

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ



Vũ Thành Long

**ÔN ĐỊNH CỦA VỎ FGM CÓ LỖ RỔNG VÀ
PANEL SANDWICH FG-CNTRC VỚI CÁC CẠNH BIÊN
CHỊU LIÊN KẾT ĐÀN HỒI**

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ
NGÀNH KỸ THUẬT CƠ KHÍ VÀ CƠ KỸ THUẬT**

Hà Nội - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

**VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM**

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Vũ Thành Long

**ỔN ĐỊNH CỦA VỎ FGM CÓ LỖ RỔNG VÀ
PANEL SANDWICH FG-CNTRC VỚI CÁC CẠNH BIÊN
CHỊU LIÊN KẾT ĐÀN HỒI**

Chuyên ngành: Cơ kỹ thuật

Mã số: 9 52 01 01

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ
NGÀNH KỸ THUẬT CƠ KHÍ VÀ CƠ KỸ THUẬT**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

- 1. PGS.TS. Hoàng Văn Tùng**
- 2. PGS.TS. Đào Như Mai**

Hà Nội - 2022

LỜI CAM ĐOAN

Tôi là Vũ Thành Long, tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trình bày trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh

Vũ Thành Long

LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới hai thầy, cô giáo hướng dẫn là PGS.TS Hoàng Văn Tùng và PGS.TS Đào Như Mai đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ, động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi và thường xuyên động viên để tác giả hoàn thành luận án này.

Trong quá trình thực hiện luận án, tác giả đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi của lãnh đạo và tập thể cán bộ, các nhà khoa học trong Viện Cơ học, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành về những sự giúp đỡ đó.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám Hiệu Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải và các đồng nghiệp trong Bộ môn Đường bộ, khoa Công trình đã tạo điều kiện, luôn quan tâm và động viên trong quá trình tác giả học tập và hoàn thiện luận án.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình, bạn bè và những người thân đã luôn động viên và chia sẻ những khó khăn của tác giả trong suốt quá trình thực hiện luận án.

MỤC LỤC

	Trang
LỜI CAM ĐOAN	I
LỜI CẢM ƠN	II
MỤC LỤC	III
DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ, ĐỒ THỊ	VII
DANH MỤC CÁC BẢNG BIỂU	XIII
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CÁC CHỮ VIẾT TẮT.....	XV
MỞ ĐẦU	1
CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN.....	6
1.1. Các loại vật liệu composite FGM và FG-CNTRC	6
1.1.1. Vật liệu composite cơ tính biến đổi (FGM)	6
1.1.2. Composite gia cường ống nano cac-bon có cơ tính biến đổi (FG-CNTRC)	6
1.2. Các nghiên cứu về ổn định tĩnh của vỏ trụ và vỏ tròn FGM.....	8
1.3. Các nghiên cứu về ổn định của vỏ cầu thoải và tấm tròn FGM.....	11
1.4. Các nghiên cứu về kết cấu FGM có lỗ rỗng	12
1.5. Các nghiên cứu về ổn định của kết cấu FG-CNTRC	13
1.5.1. Ổn định của tấm và panel cong FG-CNTRC.....	13
1.5.2. Ổn định của vỏ kín FG-CNTRC	14
1.5.3. Ổn định nhiệt đàn hồi của tấm và vỏ FG-CNTRC	16
1.6. Các nghiên cứu về kết cấu sandwich FG-CNTRC	17
1.7. Tình hình nghiên cứu trong nước	18
1.8. Về bài toán ổn định tĩnh của kết cấu.....	20

CHƯƠNG 2. ỔN ĐỊNH TUYẾN TÍNH CỦA VỎ TRỐNG FGM CÓ LỖ RỖNG SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG TRƯỢT BẬC CAO.....	22
2.1. Mô hình kết cấu và các tính chất vật liệu	23
2.2. Các phương trình cơ bản	25
2.3. Nghiệm giải tích của bài toán ổn định tuyến tính.....	29
2.3.1. Vỏ trống với các cạnh bị ràng buộc chịu áp lực ngoài và nhiệt độ	31
2.3.2. Vỏ trống với các cạnh tựa di động chịu các tải cơ kết hợp	34
2.4. Kết quả số và thảo luận	35
2.4.1. Các nghiên cứu so sánh	35
2.4.2. Vỏ trống FGM có lỗ rỗng với các cạnh tựa di động chịu tải cơ.....	39
2.4.3. Vỏ trống FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài và/hoặc nhiệt độ.....	45
2.5. Kết luận chương 2.....	51
CHƯƠNG 3. ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ FGM CÓ LỖ RỖNG SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG TRƯỢT BẬC NHẤT	52
3.1. Mô hình kết cấu và các tính chất vật liệu	53
3.2. Các phương trình cơ bản	53
3.3. Nghiệm giải tích của bài toán ổn định phi tuyến	56
3.3.1. Vỏ trụ FGM có các cạnh bị ràng buộc chịu áp lực ngoài và/hoặc tải nhiệt	58
3.3.2. Vỏ trụ FGM có lỗ rỗng với các cạnh tựa di động chịu tải cơ kết hợp....	61
3.4. Các kết quả số và thảo luận	63
3.4.1. Các nghiên cứu so sánh	63
3.4.2. Vỏ trụ FGM có lỗ rỗng và các cạnh tựa di động chịu tải cơ kết hợp....	65
3.4.3. Vỏ trụ FGM có lỗ rỗng và các cạnh biên bị ràng buộc chịu áp lực ngoài	66
3.4.4. Vỏ trụ FGM có lỗ rỗng chịu nhiệt độ tăng đều	70
3.5. Kết luận chương 3.....	74

CHƯƠNG 4. ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA VỎ CẦU THOẢI VÀ TẤM TRÒN FGM CÓ LỖ RỖNG VỚI CÁC CẠNH CHỊU LIÊN KẾT ĐÀN HỒI	75
4.1. Mô hình kết cấu vỏ cầu thoải FGM có lỗ rỗng	76
4.2. Các phương trình cơ bản	76
4.3. Nghiệm giải tích của bài toán ổn định	79
4.4. Các kết quả số và thảo luận	83
4.4.1. Các nghiên cứu so sánh	83
4.4.2. Tấm tròn FGM có lỗ rỗng chịu nhiệt độ tăng đều.....	85
4.4.3. Vỏ cầu thoải FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài	88
4.5. Kết luận chương 4.....	94
CHƯƠNG 5. ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA TẤM VÀ PANEL SANDWICH FG-CNTRC VỚI CÁC CẠNH CHỊU LIÊN KẾT ĐÀN HỒI	96
5.1. Các mô hình panel sandwich FG-CNTRC	97
5.1.1. Mô hình sandwich loại A: Lóp lõi thuần nhất và hai lớp mặt FG-CNTRC	98
5.1.2. Mô hình sandwich loại B: Lóp lõi FG-CNTRC và hai lớp mặt thuần nhất	99
5.2. Các phương trình cơ bản	101
5.3. Nghiệm giải tích của các phương trình cơ bản	105
5.3.1. Panel trụ sandwich FG-CNTRC chịu nén dọc trục	106
5.3.2. Panel hai độ cong sandwich FG-CNTRC chịu áp lực ngoài.....	107
5.3.3. Tấm chữ nhật sandwich FG-CNTRC chịu tải nhiệt.....	108
5.3.4. Tấm chữ nhật sandwich FG-CNTRC chịu tải kết hợp cơ – nhiệt.....	108
5.4. Các kết quả số và thảo luận	110
5.4.1. Các nghiên cứu so sánh	111
5.4.2. Panel trụ sandwich với các cạnh tựa di động chịu nén dọc trục	113
5.4.3. Tấm sandwich với các cạnh bị ràng buộc dịch chuyển chịu tải nhiệt.....	117
5.4.4. Tấm sandwich với hai cạnh bị ràng buộc chịu tải cơ – nhiệt.....	122

5.4.5. Panel hai độ cong sandwich chịu áp lực ngoài.....	125
5.5. Kết luận chương 5.....	128
KẾT LUẬN.....	130
MỘT SỐ HƯỚNG PHÁT TRIỂN TỪ LUẬN ÁN.....	131
DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN	132
TÀI LIỆU THAM KHẢO	134
PHỤ LỤC.....	150

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ, ĐỒ THỊ

<i>Hình 1.1.</i> Một số kiểu phân bố CNTs qua chiều dày kết cấu tấm FG-CNTRC.....	8
<i>Hình 1.2.</i> Mất ổn định theo kiểu rẽ nhánh (bifurcation-type buckling).....	21
<i>Hình 1.3.</i> Mất ổn định theo kiểu cực trị (extreme-type buckling)	21
<i>Hình 2.1.</i> Hình dạng và hệ tọa độ của một vỏ trống được bao quanh bởi nền đàn hồi.....	23
<i>Hình 2.2.</i> Các kiểu phân bố đều (Even) và không đều (Uneven) của các lỗ rỗng....	24
<i>Hình 2.3.</i> Mô hình ràng buộc đàn hồi theo phương tiếp tuyến ở các cạnh biên	32
<i>Hình 2.4.</i> So sánh tải nhiệt tới hạn của vỏ trụ Al / Al_2O_3 với các cạnh tựa cố định chịu tải nhiệt đều.	38
<i>Hình 2.5.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ lỗ rỗng lên miền ổn định của vỏ trụ FGM chịu tải cơ kết hợp.....	43
<i>Hình 2.6.</i> Ảnh hưởng của độ cong Gauss lên miền ổn định của vỏ FGM có lỗ rỗng chịu tải cơ kết hợp.....	43
<i>Hình 2.7.</i> Ảnh hưởng của môi trường đàn hồi lên miền ổn định của vỏ gần như trụ FGM có các lỗ rỗng phân bố đều	44
<i>Hình 2.8.</i> Ảnh hưởng của môi trường nhiệt lên miền ổn định của vỏ gần như trụ FGM có lỗ rỗng phân bố không đều	44
<i>Hình 2.9.</i> Ảnh hưởng của các tính chất hình học lên miền ổn định của vỏ gần trụ FGM với các lỗ rỗng phân bố không đều.	44
<i>Hình 2.10.</i> Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích lên miền ổn định của vỏ gần trụ FGM với các lỗ rỗng phân bố đều.	44
<i>Hình 2.11.</i> Ảnh hưởng của lỗ rỗng phân bố đều, nhiệt độ và sự ràng buộc cạnh biên áp lực ngoài tới hạn của vỏ FGM.....	46
<i>Hình 2.12.</i> Ảnh hưởng của loại phân bố lỗ rỗng, nhiệt độ và ràng buộc cạnh lên áp lực ngoài tới hạn của vỏ FGM	46
<i>Hình 2.13.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ lỗ rỗng và nền đàn hồi lên áp lực tới hạn của vỏ FGM có lỗ rỗng phân bố không đều trong môi trường nhiệt	47
<i>Hình 2.14.</i> Ảnh hưởng của môi trường đàn hồi và tỷ lệ lỗ rỗng lên tải nhiệt tới hạn của vỏ trống rất thoải FGM có các lỗ rỗng phân bố không đều.....	50
<i>Hình 2.15.</i> Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích và độ cong Gauss lên tải nhiệt tới hạn của vỏ trống FGM có các lỗ rỗng phân bố đều.....	50

<i>Hình 3.1.</i> Các kích thước và hệ tọa độ của vỏ trụ tròn	53
<i>Hình 3.2.</i> So sánh tải nhiệt tới hạn của vỏ trụ FGM hoàn hảo với các cạnh tựa cố định	64
<i>Hình 3.3.</i> Ảnh hưởng tỷ lệ lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM chịu nén dọc trục kết hợp với áp lực ngoài.....	65
<i>Hình 3.4.</i> Ảnh hưởng của kiểu phân bố lỗ rỗng và áp lực ngoài lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM chịu nén dọc trục	65
<i>Hình 3.5.</i> Ảnh hưởng của tải nén trước dọc trục lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài.....	66
<i>Hình 3.6.</i> Ảnh hưởng của môi trường nhiệt lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ chịu áp lực ngoài kết hợp nén dọc trục	66
<i>Hình 3.7.</i> Ảnh hưởng của ràng buộc dịch chuyển cạnh lên áp lực ngoài tới hạn của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng	67
<i>Hình 3.8.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ, tỷ lệ và loại phân bố của các lỗ rỗng lên áp lực ngoài tới hạn của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng.....	67
<i>Hình 3.9.</i> Ảnh hưởng của λ lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài ở nhiệt độ phòng.....	68
<i>Hình 3.10.</i> Ảnh hưởng của λ lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài ở nhiệt độ cao	68
<i>Hình 3.11.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ và loại phân bố lỗ rỗng lên đáp ứng sau vòng của vỏ trụ chịu áp lực ở nhiệt độ phòng	69
<i>Hình 3.12.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ và loại phân bố lỗ rỗng lên đáp ứng sau vòng của vỏ trụ chịu áp lực ở nhiệt độ cao	69
<i>Hình 3.13.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ cao lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài.....	69
<i>Hình 3.14.</i> Ảnh hưởng của tỷ số R/h lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt	69
<i>Hình 3.15.</i> Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích và tỷ lệ lỗ rỗng lên tải nhiệt tới hạn của vỏ trụ FGM	72
<i>Hình 3.16.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có các cạnh tựa cố định	72
<i>Hình 3.17.</i> Ảnh hưởng của loại phân bố lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM chịu tải nhiệt.....	73

<i>Hình 3.18.</i> Ảnh hưởng của sự ràng buộc các cạnh biên lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có các lỗ rỗng phân bố đều	73
<i>Hình 3.19.</i> Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ có lỗ rỗng phân bố đều chịu tải nhiệt.....	73
<i>Hình 3.20.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ kích thước lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ có lỗ rỗng phân bố đều chịu tải nhiệt	73
<i>Hình 4.1.</i> Mô hình vỏ cầu thoải trên nền đàn hồi.....	76
<i>Hình 4.2.</i> So sánh đáp ứng tải – độ võng của vỏ cầu thuần nhất đẳng hướng với cạnh ngàm cứng (immovable) chịu áp lực ngoài phân bố đều	84
<i>Hình 4.3.</i> So sánh tải nhiệt tới hạn của tấm tròn làm từ Al / Al_2O_3 có cạnh biên ngàm cứng	84
<i>Hình 4.4.</i> Ảnh hưởng của ràng buộc cạnh biên và tỷ số a/h lên tải nhiệt tới hạn của tấm tròn FGM hoàn hảo (không có lỗ rỗng)	86
<i>Hình 4.5.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của tấm tròn FGM chịu tải nhiệt	87
<i>Hình 4.6.</i> Ảnh hưởng của mức độ ràng buộc cạnh và loại phân bố lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của tấm tròn chịu tải nhiệt	87
<i>Hình 4.7.</i> Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích lên ứng xử sau vòng của tấm tròn FGM có lỗ rỗng phân bố đều chịu nhiệt	88
<i>Hình 4.8.</i> Ảnh hưởng của nền phi tuyến lên ứng xử sau vòng của tấm tròn FGM có lỗ rỗng phân bố không đều chịu nhiệt.....	88
<i>Hình 4.9.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/R và độ không hoàn hảo hình dáng lên áp lực tới hạn của vỏ cầu FGM không lỗ rỗng.....	89
<i>Hình 4.10.</i> Ảnh hưởng của tỷ số R/h , tỷ lệ và loại phân bố lỗ rỗng lên áp lực tới hạn của vỏ cầu có cạnh ngàm cứng	89
<i>Hình 4.11.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ lỗ rỗng lên ổn định phi tuyến của vỏ cầu FGM có cạnh ngàm cứng chịu áp lực ngoài.....	91
<i>Hình 4.12.</i> Ảnh hưởng của ràng buộc cạnh biên lên ổn định phi tuyến của vỏ cầu FGM hoàn hảo chịu áp lực ngoài.....	91
<i>Hình 4.13.</i> Ảnh hưởng của tỷ số độ cong a/R lên đáp ứng phi tuyến của vỏ cầu FGM có lỗ rỗng phân bố không đều.....	92

<i>Hình 4.14.</i> Ảnh hưởng của sự không hoàn hảo lên đáp ứng phi tuyến của vỏ cầu FGM có lỗ rỗng phân bố không đều	92
<i>Hình 4.15.</i> Ảnh hưởng của nền đàn hồi phi tuyến lên ổn định phi tuyến của vỏ cầu FGM có lỗ rỗng phân bố không đều	93
<i>Hình 4.16.</i> Ảnh hưởng của tham số nền phi tuyến lên ổn định phi tuyến của vỏ cầu FGM tựa trên nền đàn hồi Winkler	93
<i>Hình 4.17.</i> Ảnh hưởng của λ lên đáp ứng phi tuyến của vỏ cầu FGM chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt	93
<i>Hình 4.18.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ lỗ rỗng và các mức nhiệt lên ổn định phi tuyến của vỏ cầu FGM chịu áp lực ngoài	93
<i>Hình 5.1.</i> Hình dạng và hệ tọa độ của vỏ hai độ cong trên nền đàn hồi	97
<i>Hình 5.2.</i> Các kiểu phân bố FG của CNTs trong mô hình sandwich loại A	98
<i>Hình 5.3.</i> Các kiểu phân bố FG của CNTs trong mô hình sandwich loại B	99
<i>Hình 5.4.</i> Tấm chữ nhật chịu đồng thời tải cơ – nhiệt	109
<i>Hình 5.5.</i> So sánh đường tải – độ võng sau vòng của tấm sandwich loại A với các cạnh tựa di động chịu nén một phương ($h_H = h - 2h_f$)	112
<i>Hình 5.6.</i> So sánh ứng xử sau vòng của tấm sandwich với các lớp mặt FG-CNTRC và các cạnh tựa cố định chịu nhiệt độ tăng đều ($h_H = h - 2h_f$)	113
<i>Hình 5.7.</i> Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT ở hai lớp mặt lên ứng xử sau vòng của panel trụ sandwich loại A chịu nén	115
<i>Hình 5.8.</i> Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT ở lớp lõi lên ứng xử sau vòng của panel trụ sandwich loại B chịu nén	115
<i>Hình 5.9.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ h_f / h và nhiệt độ lên ứng xử sau vòng của panel trụ sandwich loại A chịu nén dọc trục	116
<i>Hình 5.10.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ h_f / h và V_{CNT}^* lên ứng xử sau vòng của panel trụ sandwich loại B chịu nén dọc trục	116
<i>Hình 5.11.</i> Ảnh hưởng của tỷ số độ cong lên ứng xử sau vòng của các panel trụ sandwich loại A chịu nén dọc trục	116
<i>Hình 5.12.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT lên ứng xử sau vòng của các panel trụ sandwich loại A chịu nén dọc trục	116

<i>Hình 5.13.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT và tỷ lệ chiều dày h_f / h lên tải nhiệt tới hạn của tấm sandwich loại B	119
<i>Hình 5.14.</i> Ảnh hưởng của sự ràng buộc cạnh và độ không hoàn hảo lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A	119
<i>Hình 5.15.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A chịu tải nhiệt	120
<i>Hình 5.16.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày và nền đàn hồi lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A chịu tải nhiệt	120
<i>Hình 5.17.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày h_f / h lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại B chịu tải nhiệt	121
<i>Hình 5.18.</i> Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT trong lõi và nền đàn hồi lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại B	121
<i>Hình 5.19.</i> So sánh khả năng mang tải sau vòng của các mô hình tấm sandwich loại A và loại B chịu tải nhiệt.....	121
<i>Hình 5.20.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT và tỷ lệ h_f / h lên tải nén tới hạn của tấm sandwich loại A chịu nén	122
<i>Hình 5.21.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT và tỷ lệ h_f / h lên tải nén tới hạn của tấm sandwich loại B chịu nén	122
<i>Hình 5.22.</i> Ảnh hưởng của tham số ràng buộc λ và nhiệt độ T lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A chịu nén.....	123
<i>Hình 5.23.</i> Ảnh hưởng của tham số ràng buộc λ và nhiệt độ T lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại B chịu nén.....	123
<i>Hình 5.24.</i> So sánh ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A và loại B chịu nén.....	124
<i>Hình 5.25.</i> Ảnh hưởng của tỷ số h_f / h và sự ràng buộc 2 cạnh $y = 0, b$ lên sự ổn định nhiệt của tấm sandwich loại A	125
<i>Hình 5.26.</i> Ảnh hưởng của tải nén trước lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại B chịu nhiệt độ tăng đều.....	125
<i>Hình 5.27.</i> Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày h_f / h lên sự ổn định của panel cầu sandwich với lõi CNTRC chịu áp lực	126

<i>Hình 5.28.</i> Ảnh hưởng của sự ràng buộc các cạnh lên đáp ứng phi tuyến của panel cầu sandwich CNTRC chịu áp lực ngoài	126
<i>Hình 5.29.</i> Ảnh hưởng của các độ cong lên sự ổn định phi tuyến của các panel cong sandwich chịu áp lực ngoài	127
<i>Hình 5.30.</i> Ảnh hưởng của nền đàn hồi lên sự ổn định phi tuyến của các panel cầu sandwich chịu áp lực ngoài	127
<i>Hình 5.31.</i> Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo lên sự ổn định của panel sandwich chịu áp lực ngoài	127
<i>Hình 5.32.</i> Ảnh hưởng của ràng buộc cạnh biên và nhiệt độ cao lên ổn định phi tuyến của panel sandwich chịu áp lực.....	127

DANH MỤC CÁC BẢNG BIỂU

Bảng 2.1. Các tính chất phụ thuộc vào nhiệt độ của các vật liệu [172].	35
Bảng 2.2. So sánh các tải tới hạn (MPa) của các vỏ trụ FGM hoàn hảo $Si_3N_4 / SUS304$ với các cạnh biên tựa di động	36
Bảng 2.3. So sánh các tải tới hạn (P_{cr}, q_{cr}) (MPa) của các vỏ trụ dày FGM hoàn hảo $Si_3N_4 / SUS304$ với các cạnh tựa di động chịu tải kết hợp nén dọc trục và áp lực ngoài	37
Bảng 2.4. Các tải tới hạn P_{cr} (MPa) của các vỏ trụ mỏng $Si_3N_4 / SUS304$ chịu nén dọc trục trong các môi trường nhiệt độ	39
Bảng 2.5. Các tải tới hạn P_{cr} (MPa) của các vỏ FGM $Si_3N_4 / SUS304$ tương đối dày có lỗ rỗng chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt độ (lỗ rỗng phân bố đều)	40
Bảng 2.6. Các tải tới hạn q_{cr} (MPa) của các vỏ trụ mỏng $Si_3N_4 / SUS304$ có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài [$R/h = 100, T = 300\text{ K}, R/a = 0, (K_1, K_2) = (0, 0)$]	41
Bảng 2.7. Các tải tới hạn q_{cr} (MPa) của các vỏ tương đối dày $Si_3N_4 / SUS304$ có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài trong một môi trường nhiệt (lỗ rỗng phân bố không đều)	42
Bảng 2.8. Ảnh hưởng của tham số λ lên các tải tới hạn q_{cr} (MPa) của các vỏ trống rất thoải FGM có các lỗ rỗng phân bố đều chịu áp lực ngoài	45
Bảng 2.9. Tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các vỏ trống mỏng FGM hoàn hảo chỉ chịu nhiệt độ tăng đều [$N = 2, \xi = 0, R/h = 100, L^2/Rh = 400, (K_1, K_2) = (0, 0)$]	48
Bảng 2.10. Tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các vỏ trống tương đối dày FGM hoàn hảo chỉ chịu nhiệt độ tăng đều	48
Bảng 2.11. Tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các vỏ trống rất thoải FGM có lỗ rỗng và áp lực ngoài tác dụng trước q (MPa) chịu nhiệt độ tăng đều	49
Bảng 3.1. So sánh tải tới hạn q_{cr} (MPa) của vỏ trụ $Si_3N_4 / SUS304$ với các cạnh tựa di động chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt	63
Bảng 3.2. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích và tỷ lệ lỗ rỗng lên tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các vỏ trụ FGM [$R/h = 80, L^2/Rh = 120, \lambda = 1, (m, n) = (1, 6)$]	70
Bảng 3.3. Ảnh hưởng của tỷ số R/h và mức độ ràng buộc cạnh λ lên tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng phân bố đều	71

Bảng 4.1. Các tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các tấm tròn FGM có các lỗ rỗng phân bố đều và các cạnh ngàm cứng ($a/h = 50$, $\lambda = 1$).....	86
Bảng 4.2. Các tải tới hạn q_{cr} (MPa) của vỏ cầu thoải FGM hoàn hảo chỉ chịu áp lực ngoài ($R/h = 100$, $\xi = 0$, $K_1 = K_2 = K_3 = 0$, $\mu = 0$, $T = 300$ K)	89
Bảng 5.1. Tỷ lệ thể tích $V_{CNT}(z)$ của CNTs trong hai lớp mặt của mô hình kết cấu sandwich FG-CNTRC loại A	99
Bảng 5.2. So sánh các tải tới hạn $P_{xcr}bh$ (kN) của các panel trụ FG-CNTRC chịu nén dọc trục [$a/b = 0.98$, $a/R = 0.5$, $b/h = 20$, $h = 1$ mm, $(m,n) = (1,1)$].....	111
Bảng 5.3. Các ảnh hưởng khác nhau lên tải tới hạn P_{xcr} (MPa) của panel trụ sandwich loại A chịu nén đều dọc trục [$a/b = 1$, $b/h = 25$, $h_f/h = 0.1$, $(m,n) = (1,1)$]	114
Bảng 5.4. Các ảnh hưởng khác nhau lên tải tới hạn P_{xcr} (MPa) của panel trụ sandwich loại B chịu nén đều dọc trục [$a/b = 1$, $b/h = 25$, $h_f/h = 0.1$, $(m,n) = (1,1)$]	114
Bảng 5.5. Ảnh hưởng của h_H/h_f , V_{CNT}^* và kiểu phân bố CNT trong hai lớp mặt lên tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các tấm sandwich loại A với các cạnh tựa cố định	118
Bảng 5.6. Ảnh hưởng của h_H/h_f , V_{CNT}^* và kiểu phân bố CNT trong lớp lõi lên tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các tấm sandwich loại B với các cạnh tựa cố định	118

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CÁC CHỮ VIẾT TẮT

Ký hiệu	Tiếng Việt	Tiếng Anh
FGM	Vật liệu cơ tính biến đổi	Functionally Graded Material
CNT	Ống nano các-bon	Carbon Nanotube
CNTs	Các ống nano các-bon	Carbon Nanotubes
CNTRC	Vật liệu composite gia cường ống nano các-bon	Carbon Nanotube Reinforced Composite
FG-CNTRC	Vật liệu composite gia cường ống nano các-bon cơ tính biến đổi	Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite
SWCNT	Ống nano các-bon đơn thành	Single-walled carbon nanotube
MWCNT	Ống nano các-bon đa thành	Multi-walled carbon nanotube
UD	Phân bố đều (của CNTs)	Uniform distribution
<i>Pa</i> và <i>K</i>	Pascal (đơn vị đo áp suất) và Kelvin (đơn vị đo nhiệt độ)	Pascal, Kelvin
TPa, GPa, MPa	Tê-ra-Pascal, Giga-Pascal, Mêga-Pascal	
MEMS	Hệ vi cơ điện tử	Micro-Electromechanical System
ccs	các cộng sự	
CST	Lý thuyết vỏ cổ điển	Classical Shell Theory
FSDT	Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất	First order Shear Deformation Theory
HSDT	Lý thuyết biến dạng trượt bậc cao	Higher order Shear Deformation Theory
Even, Uneven	(Kiểu phân bố lỗ rỗng) Đều, Không đều	
<i>m</i> và <i>c</i>	kim loại và ce-ra-míc	metal, ceramic
V_m và V_c	Tỷ lệ thể tích của kim loại, ceramic	Volume fraction of metal, ceramic

Ký hiệu	Tiếng Việt	Tiếng Anh
ξ	Tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng	Volume fraction of porosities
N	Chỉ số tỷ lệ thể tích	Volume fraction index
E_m và E_c	Mô đun đàn hồi của kim loại và ceramic	Elastic modulus of metal, ceramic
E	Mô đun đàn hồi hiệu dụng của FGM.	Elastic modulus of FGM
α_m và α_c	Hệ số dẫn nở nhiệt của kim loại và ceramic	Thermal expansion coefficient of metal, ceramic
α	Hệ số dẫn nở nhiệt hiệu dụng của FGM.	Thermal expansion coefficient of FGM
ν	Hệ số Poisson của FGM	Poisson's ratio of FGM
$E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}$ và G_{12}^{CNT}	Các mô đun đàn hồi theo phương dọc, phương ngang và mô đun trượt của ống nano các-bon.	The longitudinal, transverse elastic modulus and shear modulus of carbon nanotubes
$\nu_{12}^{CNT}, \nu_{21}^{CNT}$	Các hệ số Poisson của ống nano các-bon	Poisson's ratios of CNT
E^m và G^m	Mô đun đàn hồi và mô đun trượt của vật liệu nền	Elastic modulus and shear modulus of matrix
η_1, η_2, η_3	Các tham số hiệu quả của gia cường ống nano các-bon	Carbon nanotube efficiency parameters
V_{CNT}	Tỷ lệ phần trăm thể tích của các ống nano các-bon	Volume fraction of carbon nanotube
V_{CNT}^*	Tổng tỷ lệ phần trăm thể tích của các ống nano các-bon	Total volume fraction of carbon nanotube
$V_m = 1 - V_{CNT}$	Tỷ lệ phần trăm thể tích của vật liệu nền trong CNTRC	Volume fraction of matrix
α_{11}^{CNT} và α_{22}^{CNT}	Các hệ số dẫn nở nhiệt của ống nano các-bon.	Thermal expansion coefficients of CNT

Ký hiệu	Tiếng Việt	Tiếng Anh
α^m	Hệ số dẫn nở nhiệt của vật liệu nền	Thermal expansion coefficient of matrix
α_{11} và α_{22}	Các hệ số dẫn nở nhiệt hiệu dụng của CNTRC	Thermal expansion coefficients of CNTRC
q và P	Áp lực vuông góc với mặt giữa và áp lực nén dọc trục	
T và $\Delta T = T - T_0$	Nhiệt độ và mức tăng nhiệt độ so với giá trị nhiệt độ phòng T_0	
T-D và T-ID	Các tính chất vật liệu phụ thuộc và không phụ thuộc vào nhiệt độ.	
w, w^* và f	Các hàm mô tả độ võng, độ không hoàn hảo và hàm ứng suất	Deflection, imperfection, and stress functions
W_0 và W_1	Các biên độ của độ võng ở trạng thái trước vòng và sau khi vòng	Amplitudes of prebuckling, linear buckling deflection
W_{max} và W	Độ võng lớn nhất với dạng độ võng đa và đơn số hạng	
λ	Tham số độ cứng ràng buộc cạnh	Dimensionless tangential stiffness parameter
k_1, k_2, k_3	Các tham số độ cứng của nền đàn hồi	Stiffness parameters of elastic foundation
K_1, K_2, K_3	Các tham số độ cứng không thứ nguyên của nền đàn hồi	Nondimensional stiffness parameters of elastic foundation
m và n	Các số nguyên dương mô tả mode (kiểu dáng) vòng	
$\sigma_{0,y}$	Ứng suất trung bình theo phương vĩ tuyến của vỏ trụ và trống	Average circumferential stress
γ và η	Các giá trị không thứ nguyên chỉ hệ số tải (khi vỏ chịu tải kết hợp)	Nondimensional load ratios
cr	Chỉ số dưới để chỉ giá trị tải tới hạn	Critical

Ký hiệu	Tiếng Việt	Tiếng Anh
K_s	Hệ số hiệu chỉnh trượt	Shear correction coefficient
E_H, α_H và ν_H	Mô đun đàn hồi, hệ số dẫn nở nhiệt và hệ số Poisson của vật liệu thuần nhất (trong panel sandwich).	
c_1 và c_2	Tham số độ cứng của ràng buộc cạnh $x = 0, a$ và $y = 0, b$	Tangential stiffness on the restrained edges
λ_1 và λ_2	Độ cứng không thứ nguyên ràng buộc cạnh $x = 0, a$ và $y = 0, b$	
μ	Tham số chỉ mức độ không hoàn hảo hình dáng	
h	Tổng chiều dày của panel hoặc vỏ	
h_f và h_H	Các chiều dày lớp mặt và lớp thuần nhất của panel sandwich	

MỞ ĐẦU

Các kết cấu dạng tấm và vỏ được sử dụng phổ biến trong rất nhiều các lĩnh vực khác nhau và ở các mức độ kích cỡ khác nhau. Trong các ứng dụng thực tế, các tấm và vỏ thường được sử dụng như các bộ phận chịu tải chính. Vì thế, các đáp ứng tĩnh và động nói chung và ứng xử ổn định nói riêng là các vấn đề quan trọng trong phân tích kết cấu tấm vỏ. Sự ra đời của các loại vật liệu mới với nhiều đặc tính ưu việt càng đặt ra các bài toán cần được quan tâm giải quyết liên quan đến ổn định của tấm và vỏ làm từ các loại vật liệu này.

Vật liệu cơ tính biến đổi (Functionally Graded Material) với tên quốc tế FGM là một loại composite được chế tạo từ hai loại vật liệu thành phần gồm kim loại và ceramic. Các đặc tính ưu việt của FGM kế thừa từ các tính chất mang tính thế mạnh của các vật liệu thành phần điển hình là độ cứng cao, hệ số dẫn nhiệt và hệ số truyền nhiệt thấp của ceramic cùng với độ mềm dẻo của kim loại. Sự kết hợp này được thực hiện thông qua sự biến đổi trơn và liên tục của các thành phần vật liệu theo một phương nhất định. Vì vậy, FGM là một composite có độ cứng và độ bền cao và tránh được sự tập trung ứng suất giữa các lớp thường gặp trong composite cốt sợi. Tuy nhiên, trong quá trình chế tạo, các lỗ rỗng (pores) có thể xuất hiện bên trong vật liệu FGM và ảnh hưởng đến cơ tính của FGM. Vì vậy, các nghiên cứu về ảnh hưởng của lỗ rỗng lên đáp ứng tĩnh và động nói chung và sự ổn định nói riêng của các tấm vỏ FGM là một vấn đề cần được quan tâm. Trong hơn hai thập kỷ qua, đã có một số lượng lớn các nghiên cứu về các bài toán liên quan đến kết cấu FGM. Tuy nhiên, hầu hết các công bố này đều giả thiết vật liệu FGM là hoàn hảo về mặt cấu trúc (tức là không có các lỗ rỗng). Có tương đối ít các nghiên cứu đã thực hiện về ổn định kết cấu, nhất là kết cấu dạng vỏ FGM có lỗ rỗng.

Khác với các kết cấu dạng dầm và tấm, các kết cấu trong dạng vỏ trụ, vỏ tròn và vỏ cầu là các loại vỏ có hình dạng và ứng xử tương đối phức tạp. Vì vậy, các kết quả nghiên cứu ổn định cho các loại vỏ này có số lượng hạn chế hơn đáng kể so với các kết quả đã công bố về ổn định của dầm và tấm. Trong các ứng dụng thực tế, các kết cấu dạng vỏ thường xuyên chịu các điều kiện tải trọng phức tạp như áp lực vuông góc với các mặt, áp lực nén trên các cạnh và nhiệt độ cao. Hơn nữa, các ảnh hưởng đồng thời của các lỗ rỗng trong vật liệu FGM và tính đàn hồi về điều kiện ràng buộc

ở các cạnh biên lên ứng xử nói chung và sự ổn định nói riêng của vỏ là bài toán quan trọng và còn chưa được nghiên cứu.

Các ống nano các-bon (Carbon Nanotubes) thường được viết tắt là CNTs là một loại vật liệu thu hút sự quan tâm lớn của nhiều nhà khoa học. Nhờ có độ cứng và độ bền rất cao cùng với tỷ lệ kích thước (chiều dài trên đường kính ống) rất lớn, CNTs là loại vật liệu độn (filler) lý tưởng vào các loại nền đẳng hướng để tạo thành composite gia cường ống nano các-bon (Carbon Nanotube Reinforced Composite) thường được viết tắt là CNTRC. Về khía cạnh vật liệu, việc phân bố tối ưu CNTs trong pha nền là vấn đề được quan tâm. Dựa trên ý tưởng cơ tính biến đổi trong FGM, khái niệm vật liệu composite gia cường ống nano các-bon có cơ tính biến đổi với tên gọi Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite và thường được viết tắt là FG-CNTRC đã được đề xuất bởi Shen. Về khía cạnh kết cấu, ứng xử của các kết cấu làm từ FG-CNTRC là một bài toán quan trọng và nhận được sự quan tâm to lớn của đông đảo các nhà khoa học trong lĩnh vực cơ học kết cấu ở trong và ngoài nước. Tuy nhiên, hầu hết các nghiên cứu về kết cấu FG-CNTRC đều tập trung vào các dạng đơn lớp. Hiện còn rất ít các công trình nghiên cứu về ứng xử của kết cấu sandwich làm từ các lớp FG-CNTRC.

Kết cấu dạng sandwich với nhiều đặc tính ưu việt như tỷ số độ cứng trên khối lượng rất lớn và khả năng tiêu âm rất tốt. Trong dạng chuẩn của mô hình sandwich, các lớp mặt thường mỏng và cứng hơn, trong khi đó lớp lõi thường dày hơn và nhẹ hơn. Sự kết hợp các đặc trưng thế mạnh của từng lớp làm cho kết cấu sandwich có những tính chất nổi bật và được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau, điển hình là trong các kết cấu xây dựng và hàng không. Sự ra đời của các loại vật liệu mới như FG-CNTRC đặt ra yêu cầu cần phát triển các dạng sandwich mới để tìm ra giải pháp tối ưu về khía cạnh vật liệu và kết cấu. Các panel phẳng (tấm) và panel cong được ứng dụng phổ biến trong nhiều kết cấu thực tế. Khi được chế tạo dưới dạng sandwich từ các composite thế hệ mới như FG-CNTRC, các panel này còn nhiều tiềm năng ứng dụng từ các kết cấu vi mô đến vĩ mô. Vì vậy, bài toán ổn định của các dạng panel sandwich từ FG-CNTRC là một chủ đề cần được nghiên cứu. Xuất phát từ những lý do trên, luận án đặt ra mục tiêu nghiên cứu “***Ổn định của vỏ FGM có lỗ rỗng và panel sandwich FG-CNTRC với các cạnh biên chịu liên kết đàn hồi***”.

Mục tiêu của luận án

1. Phân tích ổn định tuyến tính của vỏ trụ tròn và vỏ trống dày làm từ FGM có lỗ rỗng chịu tải cơ, nhiệt và cơ-nhiệt có kể đến tính đàn hồi trong ràng buộc dịch chuyển các cạnh biên.

2. Phân tích các ảnh hưởng của lỗ rỗng và tính đàn hồi trong ràng buộc dịch chuyển các cạnh biên lên ứng xử vòng và sau vòng của các vỏ trụ tròn FGM chịu tải cơ, nhiệt và kết hợp cơ-nhiệt.

3. Phân tích các ảnh hưởng của nền đàn hồi phi tuyến ba tham số và tính đàn hồi trong ràng buộc dịch chuyển cạnh biên lên ổn định phi tuyến của vỏ cầu thoải và tấm tròn làm từ FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài và nhiệt độ.

4. Phân tích ổn định phi tuyến của các panel sandwich phẳng và cong làm từ FG-CNTRC có xét đến tính đàn hồi trong ràng buộc dịch chuyển các cạnh biên.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là các vỏ trụ tròn và vỏ trống dày và tương đối dày làm từ FGM có lỗ rỗng với các cạnh biên chịu liên kết bản lề, các vỏ cầu thoải và tấm tròn mỏng làm từ FGM có lỗ rỗng với các cạnh biên chịu liên kết ngàm, và các panel phẳng và panel cong sandwich làm từ FG-CNTRC với các cạnh biên chịu liên kết bản lề.

Phạm vi nghiên cứu của luận án là bài toán ổn định tĩnh tuyến tính và phi tuyến và được thực hiện trong khuôn khổ các giả thiết sau đây:

- + Tất cả các thành phần vật liệu và composite làm việc ở trạng thái đàn hồi.
- + CNTs được gia cường đồng phương vào pha nền. Bỏ qua sự chông chát, đứt gãy và lượn sóng của CNTs và bỏ qua sự rạn nứt trong kết cấu composite.
- + Các lỗ rỗng có kích thước nhỏ, tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng trong FGM nhỏ và bên trong các lỗ rỗng là môi trường chân không.
- + Sự liên kết giữa các lớp trong kết cấu sandwich là hoàn hảo, tức là bỏ qua sự bong tách giữa lớp lõi và các lớp mặt.
- + Các kết cấu vỏ trống và vỏ cầu tương đối thoải theo phương kinh tuyến, tức là bán kính cong theo phương kinh tuyến lớn hơn nhiều so với phương vĩ tuyến.
- + Các tải tác dụng phân bố đều. Cụ thể, các tải cơ phân bố đều trên các cạnh hoặc bề mặt của kết cấu và tải nhiệt được giải thiết tăng đều.
- + Trong trường hợp có nền đàn hồi hoặc môi trường đàn hồi bao quanh, toàn bộ diện tích bề mặt của kết cấu đều được tựa trên hoặc bao quanh bởi nền đàn hồi.

Phương pháp nghiên cứu

Luận án sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết, dựa trên lý luận toán học để nghiên cứu bài toán cơ học. Cách tiếp cận dựa trên toán học mà luận án sử dụng là giải tích và bán giải tích. Bài toán ổn định được đặt theo ứng suất với các phương trình chủ đạo là phương trình cân bằng và phương trình tương thích biến dạng. Tùy theo độ dày của kết cấu, luận án sử dụng các lý thuyết tấm vỏ khác nhau, cụ thể là lý thuyết cổ điển đối với kết cấu mỏng, lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất đối với kết cấu tương đối dày và lý thuyết biến dạng trượt bậc cao đối với kết cấu dày. Luận án sử dụng các nghiệm giải tích xấp xỉ để thỏa mãn gần đúng các điều kiện biên tựa bản lề hoặc ngàm. Phương pháp Galerkin được sử dụng để dẫn ra các biểu thức của tải tới hạn hoặc mối liên hệ phi tuyến giữa tải và độ võng. Trong phân tích ứng xử vòng và sau vòng của kết cấu chịu tải nhiệt, do sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu, phương pháp lặp được sử dụng để tính toán các tải nhiệt tới hạn và phác họa các đường liên hệ giữa tải nhiệt và độ võng phi tuyến trong giai đoạn sau tới hạn.

Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của luận án

Ý nghĩa khoa học của luận án:

+ Luận án phân tích ổn định của nhiều loại kết cấu tấm và vỏ khác nhau như tấm chữ nhật, tấm tròn, panel trụ, panel hai độ cong, vỏ trụ tròn, vỏ trống và vỏ cầu thoải làm từ hai loại composite đang được quan tâm hiện nay là FGM và FG-CNTRC. Các kết cấu này chịu các loại tải khác nhau gồm tải cơ (nén trên cạnh hoặc phân bố vuông góc với mặt), tải nhiệt và kết hợp đồng thời cơ-nhiệt. Như vậy có thể thấy luận án đề cập đến một miền khá rộng các loại kết cấu, vật liệu và tải trọng. Do đó các kết quả của luận án góp phần làm giàu thêm sự hiểu biết về ứng xử của các loại kết cấu tấm vỏ làm từ các loại composite thế hệ mới và là tài liệu tham khảo có giá trị cho các nhà nghiên cứu trong lĩnh vực cơ học vật liệu và kết cấu.

+ Trong luận án này, lần đầu tiên nghiệm độ võng dạng hai số hạng được sử dụng cho phân tích ổn định phi tuyến của các vỏ trụ tròn FGM tương đối dày (có kể đến biến dạng trượt ngang). Cách tiếp cận này có thể là một lời giải xấp xỉ tốt cho phân tích ổn định phi tuyến của các vỏ trụ có biến dạng trượt và có thể mở rộng cho phân tích dao động tuyến tính và phi tuyến của các vỏ kín dày và tương đối dày làm từ các loại vật liệu khác nhau.

Ý nghĩa thực tiễn của luận án:

Luận án xem xét nhiều ảnh hưởng khác nhau thường gặp trong quá trình chế tạo và ứng dụng kết cấu trong thực tế kỹ thuật. Cụ thể là:

+ Luận án xét đến sự không hoàn hảo về cấu trúc vật liệu FGM, cụ thể là xét đến các lỗ rỗng xuất hiện trong quá trình chế tạo FGM và đã đánh giá các ảnh hưởng của các lỗ rỗng này lên khả năng kháng vòng và khả năng mang tải sau vòng của các tấm và vỏ FGM.

+ Luận án xét đến tính đàn hồi trong điều kiện ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến của các cạnh biên. Điều này cho thấy rằng luận án đã bao phủ một miền rộng lớn các tình huống thường gặp của các liên kết biên trong ứng dụng tấm vỏ vào các kết cấu kỹ thuật.

+ Trong luận án, ảnh hưởng của sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu và sự không hoàn hảo hình dáng của kết cấu đã được xem xét.

+ Luận án đã thực hiện một loạt các kết quả số và phân tích ảnh hưởng của nhiều yếu tố khác nhau (gồm các ảnh hưởng tích cực và tiêu cực) lên sự ổn định của kết cấu composite.

Các yếu tố và các ảnh hưởng mang tính thực tế kể trên cho thấy rằng luận án phản ánh khá gần gũi các tình huống thực tiễn của ứng dụng kết cấu và là tham khảo có giá trị cho các nhà thiết kế vật liệu và kết cấu.

Bố cục của luận án

Luận án gồm phần mở đầu, 5 chương nội dung, phần kết luận, danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án, tài liệu tham khảo và phụ lục. Nội dung cụ thể các chương của luận án như sau:

- Chương 1 trình bày tổng quan vấn đề nghiên cứu mà luận án đặt ra.
- Chương 2 nghiên cứu ổn định tuyến tính của vỏ trụ và vỏ trống dày làm từ FGM có lỗ rỗng chịu các tải cơ, nhiệt và kết hợp cơ-nhiệt.
- Chương 3 nghiên cứu ổn định phi tuyến của vỏ trụ tròn tương đối dày làm từ FGM có lỗ rỗng chịu tải cơ, nhiệt và kết hợp cơ-nhiệt.
- Chương 4 nghiên cứu ổn định phi tuyến của vỏ cầu thoải và tấm tròn mỏng làm từ FGM có lỗ rỗng lần lượt chịu áp lực ngoài và tải nhiệt.
- Chương 5 nghiên cứu ổn định phi tuyến của các tấm và panel cong sandwich FG-CNTRC chịu tải cơ, nhiệt và cơ-nhiệt.

CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN

1.1. Các loại vật liệu composite FGM và FG-CNTRC

1.1.1. Vật liệu composite cơ tính biến đổi (FGM)

Vật liệu cơ tính biến đổi (Functionally Graded Material), thường được viết tắt là FGM, là một loại composite hai thành phần được cấu thành từ ceramic và kim loại trong đó tỷ lệ thể tích của mỗi thành phần được biến đổi trơn và liên tục theo một phương nhất định của kết cấu [1,2]. Sự ra đời của FGM xuất phát từ nhu cầu thực tế về một loại vật liệu composite có thể khắc phục được các nhược điểm thường gặp của composite cốt sợi truyền thống như sự đứt gãy các sợi, sự bong tách các lớp và sự tập trung ứng suất cao. Thành phần ceramic làm cho FGM có độ cứng cao và hệ số dẫn nở nhiệt cùng với hệ số truyền nhiệt tương đối thấp, trong khi thành phần kim loại làm tăng độ bền của FGM. Sự kết hợp các đặc tính nổi bật của các vật liệu thành phần cùng với tính toàn vẹn (integrity) về mặt cấu trúc làm cho FGM là vật liệu lý tưởng trong nhiều ứng dụng thực tế, đặc biệt là các ứng dụng trong các môi trường nhiệt độ cao như các vỏ tên lửa, các bộ phận của trạm không gian, lò phản ứng hạt nhân, các bình cao áp, các ống dẫn, các thiết bị thí nghiệm, ...

1.1.2. Composite gia cường ống nano các-bon có cơ tính biến đổi (FG-CNTRC)

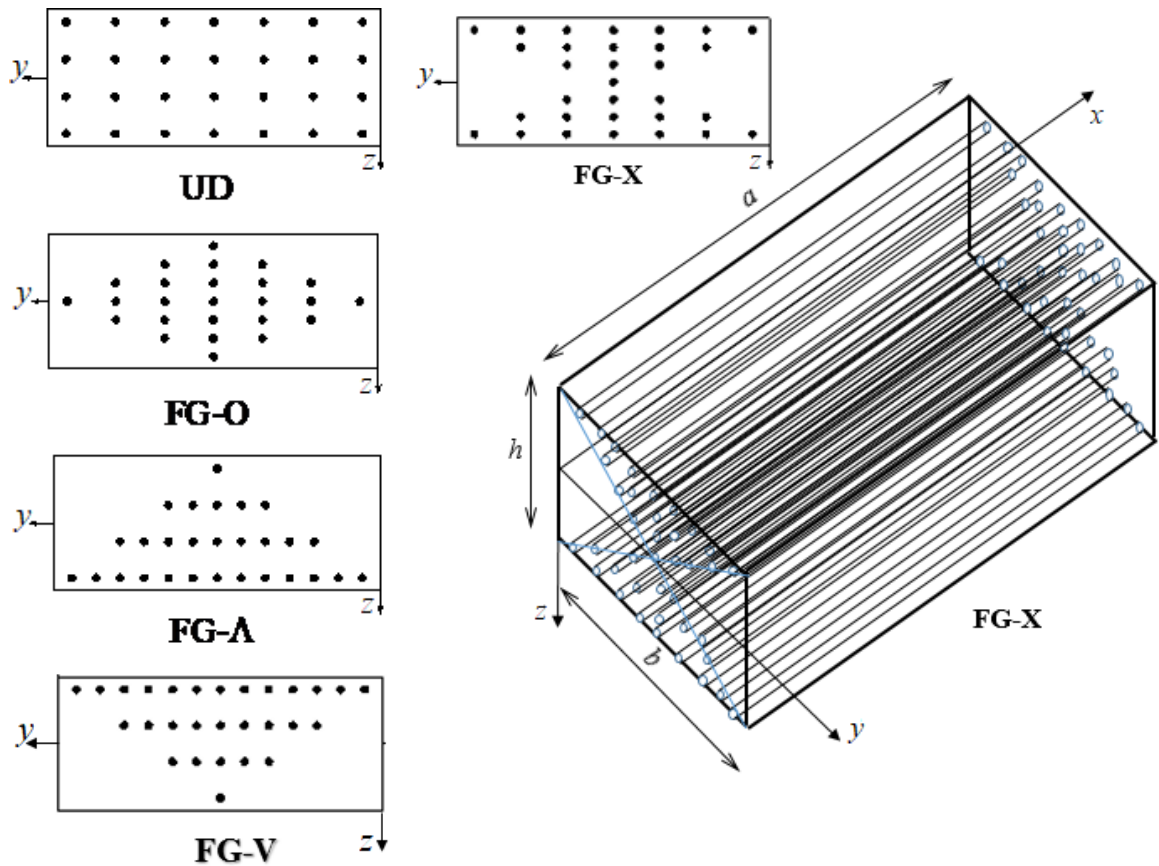
Từ những năm cuối thế kỷ trước, các nghiên cứu tiên phong của Iijima [3,4] về một dạng vật liệu dạng ống có đường kính cỡ nm (nano-mét) đã thu hút sự chú ý của nhiều nhà khoa học. Các nghiên cứu này đã giới thiệu một dạng cấu trúc vật liệu ống nano các-bon (carbon nanotube) thường được viết tắt là CNT hoặc dạng số nhiều (carbon nanotubes) là CNTs. Có hai dạng cấu trúc là ống nano các-bon đơn thành (single-walled carbon nanotubes) và ống nano các-bon đa thành (multi-walled carbon nanotubes) thường được viết tắt lần lượt là SWCNTs và MWCNTs. Cấu trúc đơn thành của CNT được tạo thành từ một phiến graphene được cuộn một cách hoàn hảo để tạo thành một ống hình trụ có đường kính cỡ nm và chiều dài có thể lên đến cỡ cm (xăng-ti-mét). Cấu trúc đa thành là một tập hợp các trụ có chung trục đối xứng và cách nhau khoảng 0.35 nm. CNTs sở hữu nhiều tính chất rất ưu việt mà chưa từng có ở các vật liệu trước đây, như được tổng hợp trong các bài báo tổng quan của Thostenson và các cộng sự [5,6], nghiên cứu tổng quan của Coleman cùng các cộng sự [7], và công trình của Han và Elliott [8]. Theo các số liệu được báo cáo trong các

công trình [5-8], CNTs có khối lượng riêng rất thấp (khoảng 1300 kg/m^3) và mô đun đàn hồi theo phương dọc trục vào khoảng hơn 1 TPa (Têra-Pascal), tức là cao hơn rất nhiều lần so với mô đun đàn hồi của thép (khoảng 0.21 TPa). Hơn nữa, độ bền chịu kéo của CNT vào khoảng 63 GPa (Giga-Pascal), tức là cao gấp khoảng 100 lần độ bền chịu kéo của thép cường độ cao (khoảng 0.61 GPa).

Nhờ những tính chất cơ học cao đến lạ thường như đã kể trên cùng với tỷ lệ kích thước (chiều dài trên đường kính ống) rất cao, CNTs là thành phần độn (filler) lý tưởng vào các vật liệu nền đẳng hướng (như polymer) để tạo thành composite gia cường ống nano các-bon (carbon nanotube reinforced composite) thường được viết tắt là CNTRC. Khác với thành phần độn là sợi các-bon, chỉ cần độn một lượng rất nhỏ CNTs có thể làm cho cơ tính của CNTRC tăng lên đáng kể. Cụ thể, theo số liệu công bố trong các bài báo tổng quan [5,6], chỉ cần độn khoảng 1% khối lượng (khoảng 0.5% thể tích) CNTs vào nền polystyrene có thể làm cho mô đun đàn hồi của CNTRC tăng khoảng 36-42% và độ bền chịu kéo của composite tăng khoảng 25%. Mặc dù vậy, vấn đề phân bố tối ưu CNTs trong pha nền vẫn nhận được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học. CNTRC là một loại composite thể hệ mới được ứng dụng trong các hệ vi cơ điện tử (Micro-Electromechanical Systems), thường được biết đến với tên gọi MEMS. Như được đề cập trong bài báo tổng quan của Gohardani và các cộng sự [9], CNTRC còn nhiều tiềm năng ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau trong đó có các ứng dụng trong khoa học và công nghệ hàng không.

Dựa trên ý tưởng về vật liệu composite có cơ tính biến đổi FGM, Shen [10] đã đề xuất khái niệm vật liệu *composite gia cường ống nano các-bon có cơ tính biến đổi* (Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite) và thường được viết tắt là FG-CNTRC. Theo nghiên cứu mang tính đề xuất của Shen [10], CNTs được gia cường vào pha nền theo cách đồng phương sao cho tỷ lệ thể tích của CNTs được biến đổi qua chiều dày kết cấu theo các hàm tuyến tính. Về cơ bản, mục đích của đề xuất này là tìm ra kiểu phân bố tối ưu của CNTs trong pha nền và thu được đáp ứng mong đợi của kết cấu làm từ FG-CNTRC. Hình 1.1 minh họa một số kiểu phân bố CNTs trong một tấm chữ nhật có chiều dày h . Như có thể thấy, CNTs có thể được gia cường vào pha nền thông qua kiểu phân bố đều UD (Uniform Distribution) hoặc các

kiểu phân bố biến đổi FG (Functionally Graded) trong dạng chữ O, Λ , V và X mà thường được gọi lần lượt là các dạng phân bố FG-O, FG- Λ , FG-V và FG-X.



Hình 1.1. Một số kiểu phân bố CNTs qua chiều dày kết cấu tấm FG-CNTRC.

Tiếp sau đây, luận án sẽ tổng quan các nghiên cứu đã tiến hành về phân tích kết cấu làm từ FGM và FG-CNTRC liên quan đến chủ đề nghiên cứu của luận án. Để cho việc trình bày được ngắn gọn, từ đây về sau, các kết cấu (tấm, vỏ, panel) được làm từ vật liệu cơ tính biến đổi FGM sẽ được gọi là kết cấu (tấm, vỏ, panel) FGM. Tương tự, các kết cấu (tấm, vỏ, panel) được chế tạo từ vật liệu composite gia cường ống nano các-bon có cơ tính biến đổi FG-CNTRC sẽ được đề cập đến một cách ngắn gọn là các kết cấu (tấm, vỏ, panel) FG-CNTRC. Trong luận án, vỏ trụ tròn (kín) và mảnh vỏ trụ (hở) sẽ được gọi một cách ngắn gọn là vỏ trụ và panel trụ. Hơn nữa, đối với các công trình nghiên cứu có từ ba tác giả trở lên sẽ nhắc đến tên của tác giả đầu tiên và “ccs” (các cộng sự) để thay thế cho các tác giả còn lại.

1.2. Các nghiên cứu về ổn định tĩnh của vỏ trụ và vỏ trống FGM

Trong mục này, luận án tổng quan các nghiên cứu đã tiến hành về ổn định tuyến tính và phi tuyến của các vỏ trụ và vỏ trống FGM không có lỗ rỗng. Ổn định

tuyến tính hay ứng xử vòng (buckling), tức là bài toán xác định tải tới hạn làm kết cấu mất ổn định, của các vỏ trụ FGM đã được nghiên cứu trong các công trình [11-26]. Ổn định tuyến tính của vỏ trụ FGM mỏng chịu tải nhiệt đã được nghiên cứu trong các công trình của Shahsiah và Eslami [11] và Wu cùng ccs [12] lần lượt sử dụng dạng không tách biệt (coupled form) và dạng tách biệt (uncoupled form) của phương trình ổn định được thiết lập dựa trên *lý thuyết vỏ cổ điển* (Classical Shell Theory) – sau đây sẽ gọi tắt là CST. Dựa trên *lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất* (First order Shear Deformation Theory), sau đây sẽ gọi tắt là FSDT, Khazaeinejad và ccs [13] đã giới thiệu các kết quả nghiên cứu ổn định tuyến tính của các vỏ trụ FGM chịu tải cơ kết hợp. Dựa trên *lý thuyết biến dạng trượt bậc cao* (Higher order Shear Deformation Theory), sau đây sẽ gọi tắt là HSDT, Bagherizadeh và ccs [14] đã tính toán các tải tới hạn của vỏ trụ FGM chịu các loại tải cơ có xét đến ảnh hưởng của môi trường đàn hồi bao quanh vỏ. Ảnh hưởng của các lớp áp điện (piezoelectric layer) lên ứng xử vòng của các vỏ trụ FGM chịu tải nhiệt tăng đều đã được phân tích trong bài báo của Mirzavand và Eslami [15]. Bằng cách sử dụng CST và nghiệm giải tích, Huang và Han [16] đã đánh giá ảnh hưởng của sự không hoàn hảo hình dáng lên ổn định tuyến tính của vỏ trụ FGM mỏng chịu tải nén dọc trục. Điểm chung của các công trình kể trên [11-16] là các phương trình ổn định tuyến tính của vỏ trụ FGM được thiết lập dựa trên tiêu chuẩn cân bằng lân cận (adjacent equilibrium criterion) được trình bày trong cuốn sách của Brush và Almroth [17] và sau đó được giải bằng cách sử dụng các nghiệm giải tích dạng đơn số hạng cho các vỏ trụ với hai cạnh biên chịu liên kết bản lề. Bằng cách sử dụng CST, phương pháp năng lượng Ritz và phương pháp phần tử hữu hạn, Huang và ccs [18] đã tính toán các tải tới hạn của vỏ trụ FGM với các điều kiện biên khác nhau chịu các điều kiện tải cơ kết hợp. Các phân tích vòng tuyến tính của các vỏ trụ FGM chịu đồng thời tải nén dọc trục và nhiệt độ đã được thực hiện trong các nghiên cứu của Sun và ccs [19,20] dựa trên CST và HSDT. Dựa trên một số cách tiếp cận giải tích và số cùng với các lý thuyết khác nhau, ổn định tuyến tính của các vỏ trụ FGM chịu một số điều kiện tải cơ và nhiệt cũng đã được nghiên cứu trong các công trình [21-26].

Ổn định phi tuyến, còn được biết đến như ứng xử sau vòng (postbuckling), của các vỏ trụ và vỏ trống FGM đã được nghiên cứu trong một số công trình. Dựa trên cách tiếp cận bán giải tích và các lý thuyết vỏ CST và HSDT, ổn định phi tuyến của

các vỏ trụ FGM chịu một số điều kiện tải trọng như áp lực ngoài, nén dọc trục và nhiệt độ tăng đều đã được phân tích trong các công trình của Shen [27-32] trong đó có kể đến ảnh hưởng của sự không hoàn hảo hình dáng và sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu. Trong các nghiên cứu này, Shen đã sử dụng phương pháp nghiệm nhiễu (các hàm độ võng và góc xoay được khai triển phụ thuộc vào một tham số bé) cùng với một thuật toán lặp như được trình bày trong cuốn sách của Shen [33]. Huang và Han [34-36] đã sử dụng phương pháp năng lượng Ritz dựa trên CST để phân tích ứng xử vòng và sau vòng của vỏ trụ FGM mỏng với các cạnh biên tựa bản lề chịu nén dọc trục, áp lực ngoài và tải cơ kết hợp. Lý thuyết biến dạng trượt cải tiến và phương pháp phần tử hữu hạn đã được sử dụng trong công trình của Trabelsi và ccs [37] để nghiên cứu ứng xử sau vòng của tấm và vỏ trụ FGM với các điều kiện biên khác nhau chịu tải nhiệt. Các ảnh hưởng của gân gia cường lệch tâm và nền đàn hồi bao quanh lên sự ổn định tĩnh và động phi tuyến của các vỏ trụ và vỏ trống FGM với các cạnh tựa bản lề đã được đánh giá trong các công trình của Dung và ccs [38-41] sử dụng các lý thuyết vỏ CST, HSĐT và các dạng nghiệm giải tích. Dựa trên cách tiếp cận giải tích và CST, Bich và ccs [42-45] đã nghiên cứu ổn định tĩnh và động phi tuyến của các vỏ trụ và vỏ trống FGM có gân gia cường chịu một số loại tải cơ trong môi trường nhiệt độ. Trong công trình của Thinh và ccs [46], lý thuyết vỏ Donnell cải tiến cùng các nghiệm giải tích đơn số hạng đã được sử dụng để phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trống FGM có chiều dày thay đổi. Bằng cách sử dụng CST và các dạng nghiệm giải tích, các kết quả nghiên cứu về ổn định phi tuyến của vỏ trụ và vỏ trống làm từ vật liệu xốp cơ tính biến đổi lần lượt chịu tải xoắn và nén dọc trục đã lần lượt được giới thiệu trong các công trình của Nam và ccs [47] và Hung cùng ccs [48]. Các ảnh hưởng của điều kiện ràng buộc dịch chuyển các cạnh biên lên sự ổn định phi tuyến của các vỏ trụ FGM dạng đơn lớp và sandwich chịu các tải cơ và nhiệt đã được phân tích trong các công trình của Tung và Hieu [49,50] sử dụng CST và các nghiệm giải tích. Các phân tích ổn định phi tuyến của các vỏ trụ sandwich FGM mỏng và dày với các gân gia cường lệch tâm chịu tải cơ trong môi trường nhiệt đã được thực hiện trong các công trình của Dung và ccs [51,52]. Nam và ccs [53] đã sử dụng CST và nghiệm đa số hạng để đánh giá ảnh hưởng của các gân xiên và nền đàn hồi bao quanh lên sự ổn định của vỏ trụ sandwich FGM chịu tải xoắn trong môi trường nhiệt.

1.3. Các nghiên cứu về ổn định của vỏ cầu thoải và tấm tròn FGM

Vỏ cầu thoải hay chòm cầu (spherical cap), sau đây gọi tắt là vỏ cầu, là loại kết cấu dạng vỏ được ứng dụng rộng rãi trong các kết cấu xây dựng, các bình chứa cao áp (pressure vessel) và đặc biệt là trong kỹ thuật hàng không. Vì vậy, đáp ứng tĩnh và động nói chung và ổn định nói riêng của dạng kết cấu này đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu. Khác với các loại kết cấu khác, do đặc thù hình dạng và tính ứng dụng thực tiễn, loại tải được quan tâm trong nghiên cứu vỏ cầu chủ yếu là áp lực vuông góc với các bề mặt vỏ. Bằng cách sử dụng phương pháp nghiệm chuỗi Fourier-Bessel và FSDT, Xu [54,55] đã giới thiệu các nghiên cứu về ổn định và dao động phi tuyến của các vỏ cầu với các điều kiện biên khác nhau chịu áp lực ngoài. Nath và Sandeep [56] đã sử dụng dạng nghiệm chuỗi Chebyshev kết hợp với một thuật toán lặp dựa trên FSDT để phân tích ứng xử vòng và sau vòng của các vỏ cầu chịu áp lực ngoài. Trong các nghiên cứu này [54-56], vỏ cầu được làm từ composite phân lớp. Một phân tích ổn định phi tuyến của vỏ cầu thoải làm từ vật liệu trục hướng và đẳng hướng đã được thực hiện bởi Dube và ccs [57] sử dụng FSDT, độ võng dạng đa thức và phương pháp Galerkin. Ứng xử vòng của các vỏ cầu đẳng hướng với các cạnh biên ngâm chịu áp lực ngoài đã được phân tích trong các công trình của Uemura [58] và Li cùng ccs [59] lần lượt sử dụng cách tiếp cận biến phân và phương pháp lặp. Trong công trình của Civalek [60], tác giả đã sử dụng phương pháp cầu phương vi phân để phân tích các đáp ứng tĩnh và động phi tuyến của vỏ cầu đẳng hướng tựa trên nền đàn hồi hai tham số. Bằng cách sử dụng các nghiệm giải tích dựa trên CST, Bich và Tung [61] đã nghiên cứu ổn định phi tuyến của các vỏ cầu FGM mỏng chịu áp lực ngoài có kể đến ảnh hưởng của nhiệt độ. Bich và ccs [62] đã giải bài toán ổn định tĩnh và động phi tuyến của vỏ cầu FGM mỏng chịu biến dạng phi đối xứng trục bằng cách tiếp cận giải tích và tiêu chuẩn Budiansky-Roth. Ứng xử sau vòng của các vỏ cầu FGM có lớp áp điện chịu áp lực ngoài kết hợp với tải nhiệt-điện đã được phân tích trong bài báo của Boroujerdy và Eslami [63] sử dụng CST và phương pháp sai phân hữu hạn. Ảnh hưởng của nền đàn hồi hai tham số, sự không hoàn hảo hình dáng và sự ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên lên sự ổn định phi tuyến của các vỏ cầu FGM chịu áp lực ngoài và nhiệt độ đã được đánh giá trong các nghiên cứu của Tung [64,65] sử dụng FSDT và cách tiếp cận giải tích. Một số nghiên cứu về tấm tròn FGM được thực hiện trong các công trình [66-68]. Najafizadeh và Heydari [66] đã

sử dụng tiêu chuẩn cân bằng lân cận dựa trên HSDT để tính toán các tải nhiệt tới hạn cho các tấm tròn FGM chịu nhiệt độ tăng đều. Phương pháp bán được sử dụng trong nghiên cứu của Li và ccs [67] để phân tích ứng xử sau vòng của tấm tròn FGM chịu tải cơ và nhiệt độ tăng đều. Bài toán ổn định tuyến tính của các tấm chữ nhật và tấm tròn FGM chịu tải nhiệt đã được chú trọng trong công trình Loc và ccs [68] sử dụng phương pháp đẳng hình học.

1.4. Các nghiên cứu về kết cấu FGM có lỗ rỗng

Trong quá trình chế tạo, các lỗ rỗng (pores) có thể tồn tại trong vật liệu FGM và ảnh hưởng đến cơ tính của vật liệu. Ảnh hưởng của hiện tượng rỗng (porosity) lên ứng xử của kết cấu FGM là chủ đề được quan tâm bởi nhiều nhà nghiên cứu. Wattanasakulpong và Ungbhakorn [69] đã sử dụng phương pháp biến đổi vi phân để nghiên cứu dao động tuyến tính và phi tuyến của các dầm FGM có các lỗ rỗng phân bố đều và không đều trong dầm. Phương pháp phần tử hữu hạn đã được sử dụng trong nghiên cứu của Zghal và ccs [70] cho việc phân tích tĩnh của các dầm FGM có lỗ rỗng. Nam và ccs [71] đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn với phần tử dạng đa giác để phân tích đáp ứng độ võng lớn của các tấm FGM có lỗ rỗng. Một nghiên cứu giải tích sử dụng nghiệm dạng chuỗi Navier được tiến hành bởi Zenkour và Radwan [72] để đánh giá ảnh hưởng của độ nhiệt ẩm và các lỗ rỗng lên ứng xử uốn của các tấm chữ nhật FGM. Phương pháp tiếp cận không gian trạng thái đã được Demirhan và Taskin [73] sử dụng để giải bài toán uốn tĩnh và dao động tự do của các tấm chữ nhật FGM có lỗ rỗng. Trong các nghiên cứu của Phuc và ccs [74,75], các tác giả đã sử dụng phương pháp đẳng hình học dựa trên HSDT để đánh giá ảnh hưởng của các lỗ rỗng lên các đáp ứng tĩnh, động và dao động tự do của các tấm FGM có kích cỡ từ nano đến macro. Một cách tiếp cận giải tích dựa trên lý thuyết biến dạng trượt cải tiến đã được sử dụng trong công trình của Trinh và Kim [76] để giải quyết bài toán uốn và dao động tự do của các vỏ thoải hai độ cong làm từ FGM có lỗ rỗng. Hiện có tương đối ít các công bố về ổn định của kết cấu FGM có lỗ rỗng. Cong và ccs [77] đã sử dụng nghiệm giải tích dựa trên HSDT để phân tích các ứng xử vòng và sau vòng của tấm chữ nhật FGM có lỗ rỗng chịu tải nén một phương trong môi trường nhiệt độ. Phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên HSDT đã được sử dụng trong nghiên cứu của Gupta và Talha [78] để đánh giá các ảnh hưởng của sự không hoàn hảo hình dáng và các lỗ rỗng lên sự ổn định tuyến tính của các tấm FGM chịu tải cơ. Các phân tích ứng

xử vòng và sau vòng của các tấm kích cỡ micro làm từ FGM có lỗ rỗng chịu nhiệt độ tăng đều và sự truyền nhiệt qua chiều dày tấm đã được tiến hành bởi Cuong và ccs [79] bằng cách sử dụng phương pháp đẳng hình học dựa trên phiên bản cải tiến của lý thuyết biến dạng trượt bậc cao.

1.5. Các nghiên cứu về ổn định của kết cấu FG-CNTRC

Kể từ khi vật liệu FG-CNTRC được phát triển đã có một số lượng lớn các công bố về đáp ứng tĩnh và động của các dạng kết cấu làm từ FG-CNTRC. Trong khuôn khổ tổng quan của luận án, các nghiên cứu điển hình về ổn định của các kết cấu dạng tấm và vỏ FG-CNTRC sẽ được đề cập sau đây.

1.5.1. Ổn định của tấm và panel cong FG-CNTRC

Ổn định tuyến tính của các tấm và panel cong FG-CNTRC đã được đề cập trong các công trình [80-90]. Nhóm nghiên cứu của Liew và ccs [80-83] đã giới thiệu các nghiên cứu về ổn định tuyến tính của các tấm chữ nhật và xiên làm từ FG-CNTRC chịu tải cơ nén trên các cạnh. Trong các nghiên cứu này, các tấm được giả thiết hoàn hảo về mặt hình dáng và chịu các điều kiện biên khác nhau. Các phương trình cơ bản được thiết lập dựa trên FSDT và được giải bằng phương pháp không lưới (meshless). Các ảnh hưởng của nền đàn hồi cũng đã được xem xét trong các nghiên cứu [82,83]. Kiani và cộng sự [84-86] đã sử dụng phương pháp Ritz dựa trên FSDT để giải quyết bài toán ổn định tuyến tính của các tấm chữ nhật và tấm xiên FG-CNTRC với các điều kiện biên khác nhau chịu một số điều kiện tải cơ như tải trượt và tải phân bố dạng parabol trên các cạnh. Trong các nghiên cứu này, các hàm dạng được chọn theo đa thức Chebyshev [84,85] hoặc theo quá trình Gram-Schmidt [86]. Các phân tích vòng tuyến tính của các tấm xiên và panel cong làm từ FG-CNTRC chịu các tải cơ đã được tiến hành trong các nghiên cứu của Civalek và cộng sự [87,88] bằng cách sử dụng phương pháp cuộn đơn rời rạc DSC (discrete singular convolution) dựa trên FSDT. Trong nghiên cứu của Zghal và ccs [89], các tác giả đã sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn dựa trên HSDT để tính toán các tải tới hạn của các tấm và panel cong làm từ FGM và FG-CNTRC chịu các tải cơ. Macias và ccs [90] đã sử dụng phương pháp mô phỏng số dựa trên lý thuyết vỏ mỏng để phân tích ứng xử vòng tuyến tính của các tấm và panel trụ chịu nén dọc trục và tải trượt.

Ổn định phi tuyến của các tấm và panel cong FG-CNTRC là chủ đề nghiên cứu trong các công trình [91-103]. Bằng cách sử dụng phương pháp không lưới dựa trên FSDT, Liew và ccs [91,92] đã nghiên cứu ổn định phi tuyến của các tấm chữ nhật và panel trụ FG-CNTRC với các điều kiện biên khác nhau chịu nén đều dọc theo một phương. Trang và Tung [93-98] đã sử dụng nghiệm giải tích, phương pháp Galerkin và các lý thuyết khác nhau để phân tích ổn định phi tuyến của các tấm chữ nhật, panel trụ và panel hai độ cong với các cạnh biên tựa bản lề chịu một số điều kiện tải cơ và kết hợp cơ-nhiệt. Các nghiên cứu này đã đánh giá các ảnh hưởng của tính không hoàn hảo hình dáng, nền đàn hồi hai tham số và tính đàn hồi trong ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến của các cạnh biên lên khả năng kháng vòng và mang tải trong giai đoạn sau vòng của các tấm và panel cong FG-CNTRC. Bài toán ổn định phi tuyến của các panel trụ FG-CNTRC tựa trên nền đàn hồi và chịu một số điều kiện tải cơ như nén dọc trục, áp lực ngoài và tải cơ kết hợp đã được giải quyết trong các công trình của Shen và Xiang [99-101] sử dụng phương pháp nghiệm nhiễu dựa trên HSDT. Một phân tích ứng xử sau vòng của các panel trụ FG-CNTRC chịu nén dọc trục đã được thực hiện trong công bố của Macias và ccs [102] sử dụng cách tiếp cận số, trong đó các tính chất hiệu dụng của CNTRC được xác định theo mô hình Eshelby-Mori-Tanaka. Bằng cách sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên phiên bản cải tiến của FSDT, Zghal và ccs [103] đã phân tích ứng xử sau vòng của các tấm và panel cong làm từ FGM và FG-CNTRC chịu các tải cơ.

1.5.2. Ổn định của vỏ kín FG-CNTRC

Ổn định của các loại vỏ kín như vỏ trụ tròn, vỏ trống và vỏ nón cụt làm từ FG-CNTRC đã được nghiên cứu trong nhiều công trình. Ổn định tuyến tính, tức là bài toán phân tích ứng xử vòng (buckling), của các vỏ kín FG-CNTRC là chủ đề nghiên cứu của các công trình [104-113]. Hajlaoui và ccs [104] đã sử dụng phần tử hữu hạn vỏ dạng khối dựa trên phiên bản cải tiến của FSDT để phân tích ứng xử vòng của các vỏ trụ FG-CNTRC chịu áp lực ngoài và nén dọc trục. Bằng cách sử dụng FSDT, tiêu chuẩn cân bằng lân cận và phương pháp cầu phương vi phân tổng quát, Jam và Kiani [105] đã giải bài toán xác định tải tới hạn cho các vỏ nón cụt FG-CNTRC chịu áp lực ngoài. Dựa trên cách tiếp cận số, FSDT và các phiên bản của phương pháp cầu phương vi phân, các nghiên cứu về ổn định tĩnh, ổn định động và dao động tuyến tính của các vỏ nón cụt FG-CNTRC với các dạng điều kiện biên khác nhau chịu các tải

nén dọc trục dạng tĩnh và động đã được giải quyết trong các công trình [106-109]. Trong công bố của Duc và ccs [110], các tác giả đã sử dụng tiêu chuẩn cân bằng lân cận để thiết lập các phương trình ổn định tuyến tính và sử dụng nghiệm giải tích kết hợp với phương pháp Galerkin để tính toán các tải tới hạn cho vỏ nón cụt FG-CNTRC với các cạnh biên tựa bản lề chịu tải cơ và nhiệt. Sofiyev và ccs [111] đã sử dụng các nghiệm giải tích kết hợp với phương pháp Galerkin dựa trên FSDT và giả thiết Donnell cải tiến để nghiên cứu bài toán vòng tuyến tính của các vỏ nón cụt FG-CNTRC chịu áp lực ngoài và áp lực thủy tĩnh. Gần đây, Hieu và Tung [112,113] đã sử dụng nghiệm giải tích với dạng độ võng hai số hạng dựa trên FSDT để nghiên cứu ứng xử vòng tuyến tính của các vỏ trụ và vỏ trống FG-CNTRC chịu một số dạng tải trọng như áp lực ngoài, nén dọc trục, tải cơ kết hợp và nhiệt độ tăng đều.

Ổn định phi tuyến của các vỏ kín FG-CNTRC là một chủ đề được quan tâm nghiên cứu trong các công trình [114-121]. Shen và cộng sự [114-116] đã thực hiện các nghiên cứu về ổn định phi tuyến, gồm các ứng xử vòng và sau vòng, của các vỏ trụ FG-CNTRC với các cạnh biên tựa bản lề đặt trong môi trường nhiệt độ tăng đều và chịu các tải cơ gồm nén dọc trục [114], áp lực ngoài [115] và các tải cơ kết hợp [116]. Trong các công trình này, bài toán ổn định phi tuyến được đặt theo ứng suất với các phương trình cơ bản được thiết lập dựa trên lý thuyết vỏ bậc cao HSDT và được giải bằng sử dụng nghiệm nhiễu tiệm cận kết hợp với phương pháp lặp. Bằng cách sử dụng cách tiếp cận tương tự, gần đây Shen và ccs [117] đã đánh giá các ảnh hưởng của hệ số Poisson âm lên ứng xử sau vòng của các vỏ trụ tròn dạng phân lớp FG-CNTRC chịu áp lực ngoài. Ảnh hưởng của chất lỏng nhớt chứa bên trong và môi trường đàn hồi trục hướng bao bọc bên ngoài lên các đặc trưng dao động và ổn định của vỏ trụ tròn FG-CNTRC được phân tích trong bài báo của Bidgoli và ccs [118] trong đó các phương trình được thiết lập dựa trên FSDT và được giải bằng phương pháp cầu phương vi phân tổng quát. Gần đây, Hieu và Tung [119-121] đã giới thiệu các nghiên cứu giải tích về ổn định phi tuyến của các vỏ trụ tròn và vỏ trống mỏng FG-CNTRC với các cạnh biên tựa bản lề chịu một số điều kiện khác nhau của các tải cơ và nhiệt. Trong các nghiên cứu này, dạng nghiệm độ võng ba số hạng dựa trên CST đã được sử dụng và các ảnh hưởng của sự truyền nhiệt tuyến tính qua chiều dày và trong mặt phẳng vỏ cũng như điều kiện ràng buộc các cạnh biên đã được kể đến.

1.5.3. Ổn định nhiệt đàn hồi của tấm và vỏ FG-CNTRC

Bởi vì các kết cấu thường được ứng dụng trong các môi trường nhiệt độ cao nên bài toán ổn định của các kết cấu chịu tải nhiệt là một chủ đề rất quan trọng. Sự ra đời của vật liệu mới FG-CNTRC đã thu hút nhiều sự quan tâm của các nhà khoa học về phân tích ổn định nhiệt đàn hồi của các kết cấu làm từ vật liệu này. Ứng xử vòng của các tấm và vỏ FG-CNTRC chịu tải nhiệt đã được nghiên cứu trong các công trình [122-127]. Phương pháp Ritz với hàm dạng là các đa thức Chebyshev dựa trên FSDT đã được sử dụng trong các nghiên cứu của Mirzaei và Kiani [122-124] để tính tải nhiệt tới hạn của các tấm chữ nhật, xiên và elip với các điều kiện biên khác nhau chịu tải nhiệt. Ứng xử vòng do nhiệt gây nên của các vỏ nón cụt FG-CNTRC được phân tích trong bài báo của Mirzaei và Kiani [125] sử dụng FSDT, tiêu chuẩn cân bằng lân cận và phương pháp cuộn đơn rời rạc. Các phân tích ổn định tuyến tính của các tấm FG-CNTRC có các hình dạng khác nhau chịu nhiệt độ tăng đều đã được tiến hành bởi Ansari cùng ccs [126] và Torabi cùng ccs [127] sử dụng các lý thuyết FSDT, HSDT và phương pháp cầu phương vi phân.

Ổn định phi tuyến của các tấm và vỏ FG-CNTRC chịu các loại tải nhiệt đã được thực hiện trong các nghiên cứu [128-137]. Dựa trên các lý thuyết khác nhau, ổn định phi tuyến của các tấm chữ nhật FG-CNTRC chịu nhiệt đã được phân tích trong các công trình của Shen và Zhang [128] sử dụng phương pháp nghiệm nhiễu, Kiani [129] sử dụng phương pháp Ritz và Tung cùng cộng sự [130,131] sử dụng cách tiếp cận giải tích và phương pháp Galerkin. Bài toán ổn định phi tuyến của các tấm và panel trụ mỏng FG-CNTRC chịu sự truyền nhiệt không đều trong mặt phẳng đã được giải trong các công bố của Trang và Tung [132,133] thực hiện trong thời gian gần đây. Dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc cao và các cách tiếp cận khác nhau, ổn định phi tuyến của panel trụ FG-CNTRC chịu nhiệt độ tăng đều được đề cập trong các nghiên cứu của Shen & Xiang [134] và Trang & Tung [135]. Một phân tích ổn định phi tuyến của các vỏ trụ tròn FG-CNTRC có các cạnh biên tựa cố định chịu nhiệt độ tăng đều đã được thực hiện bởi Shen [136] sử dụng các nghiệm tiệm cận và phương pháp lặp dựa trên HSDT. Các ảnh hưởng của nền đàn hồi bao quanh và tính đàn hồi trong ràng buộc dịch chuyển các cạnh biên lên sự ổn định phi tuyến của các vỏ trụ FG-CNTRC mỏng chịu nhiệt độ tăng đều đã được đánh giá trong công trình của Hieu và Tung [137] sử dụng nghiệm độ võng ba số hạng dựa trên CST.

1.6. Các nghiên cứu về kết cấu sandwich FG-CNTRC

Kết cấu dạng sandwich có nhiều đặc tính rất ưu việt như tỷ lệ độ cứng trên trọng lượng cao cùng với độ cách âm và tản nhiệt tốt. Vì vậy, ứng xử của các kết cấu sandwich là vấn đề cần phân tích và dự đoán để tối ưu hiệu quả làm việc của kết cấu trong các ứng dụng vào thực tiễn. Sự ra đời của các vật liệu mới như FG-CNTRC đặt ra yêu cầu cần có thêm các nghiên cứu về đáp ứng tĩnh và động của kết cấu sandwich FG-CNTRC. Wang và Shen [138] đã nghiên cứu bài toán dao động và uốn phi tuyến của các tấm sandwich FG-CNTRC chịu tải cơ trong môi trường nhiệt. Shen và Zhu [139] đã phân tích ứng xử sau vòng của các tấm sandwich FG-CNTRC chịu tải nén trên các cạnh và nhiệt độ tăng đều. Một nghiên cứu về dao động trong miền sau vòng do nhiệt gây ra của các tấm sandwich FG-CNTRC đã được tiến hành bởi Shen và ccs [140]. Trong các công trình này [138-140], các phương trình cân bằng và chuyển động của tấm sandwich với lớp lõi đẳng hướng và các lớp mặt FG-CNTRC được thiết lập dựa trên HSDT và được giải bằng cách sử dụng nghiệm tiệm cận kết hợp với thuật toán lặp. Các kết quả nghiên cứu về ứng xử uốn và dao động tự do của các tấm sandwich FG-CNTRC đã được trình bày trong bài báo của Natarajan và ccs [141] sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao. Bài toán vòng tuyến tính của các tấm tròn sandwich với các lớp mặt FG-CNTRC chịu tải cơ đã được giải bởi Jalali and Heshmati [142] sử dụng phương pháp giả phổ (pseudospectral method). Dựa trên HSDT của Reddy, Shokravi [143] đã thực hiện nghiên cứu về ứng xử vòng của tấm sandwich FG-CNTRC tựa trên nền đàn hồi trục hướng. Phương pháp Kantorovich-Galerkin đa số hạng dựa trên lý thuyết tấm cổ điển đã được áp dụng bởi Wang và ccs [144] để tính toán các tần số dao động tự do của tấm mỏng sandwich FG-CNTRC. Bằng cách sử dụng cách tiếp cận số với phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc cao, Mehar và một số tác giả khác [145-147] đã giới thiệu các kết quả nghiên cứu về bài toán dao động và ổn định tuyến tính của các kết cấu dạng tấm và panel cong sandwich FG-CNTRC chịu tải nhiệt. Kiani [148] đã sử dụng phương pháp Ritz với hàm dạng là các đa thức Chebyshev để nghiên cứu đáp ứng sau vòng của các tấm chữ nhật sandwich FG-CNTRC với các điều kiện biên khác nhau chịu nhiệt độ tăng đều. Gần đây, cách tiếp cận giải tích dựa trên FSDT và phương pháp Galerkin đã được sử dụng trong công trình của Sofiyev và ccs [149] để nghiên

cứ ứng xử vòng tuyến tính của các vỏ trụ tròn sandwich với các lớp mặt FG-CNTRC chịu áp lực ngoài.

1.7. Tình hình nghiên cứu trong nước

Trong những năm gần đây, nhiều nghiên cứu về lĩnh vực phân tích tấm vỏ composite đã được thực hiện bởi các nhà khoa học và các nhóm nghiên cứu ở Việt Nam. Nhóm nghiên cứu của tác giả Đào Huy Bích và ccs [42-45] đã thực hiện các nghiên cứu về ổn định tuyến tính và phi tuyến của các vỏ trống và vỏ trụ làm từ vật liệu FGM sử dụng phương pháp Galerkin. Nhóm nghiên cứu của tác giả Đào Văn Dũng và ccs [38-41,51,52] đã thu được các kết quả nghiên cứu về ổn định phi tuyến của vỏ trụ và vỏ trống FGM có các gân gia cường lệch tâm chịu các tải cơ. Các tác giả Trần Ích Thịnh và Trần Minh Tú cùng ccs [46,48] đã công bố kết quả nghiên cứu về bài toán ổn định phi tuyến của vỏ trống có chiều dày thay đổi làm từ FGM và vật liệu xốp cơ tính biến đổi dựa trên lý thuyết vỏ mỏng. Tác giả Vũ Hoài Nam và ccs [47,53] đã sử dụng dạng nghiệm độ võng ba số hạng dựa trên lý thuyết CST để nghiên cứu ứng xử sau vòng của các vỏ trụ sandwich FGM chịu tải xoắn. Một số kết quả nghiên cứu về ổn định tĩnh, đáp ứng động và dao động của các tấm chữ nhật, panel cong và vỏ trụ FG-CNTRC với các cạnh biên tựa bản lề chịu tải cơ đã được công bố bởi nhóm tác giả Nguyễn Đình Đức và ccs [110,150-153] sử dụng phương pháp tiếp cận giải tích.

Bằng cách sử dụng các phương pháp số dựa trên HSDT, nhóm nghiên cứu của tác giả Nguyễn Xuân Hùng và ccs [154-157] đã thu được các kết quả nghiên cứu cho bài toán phân tích uốn và ổn định của các kết cấu dạng tấm và vỏ thoải làm từ FG-CNTRC chịu các loại tải cơ. Dựa trên lý thuyết biến dạng trượt cải tiến với bốn ẩn chuyển vị, tác giả Trần Hữu Quốc và ccs đã nghiên cứu bài toán uốn tĩnh của các tấm chữ nhật làm từ FG-CNTRC phân lớp có các lớp áp điện sử dụng nghiệm giải tích dạng chuỗi Navier [158] và bài toán điều khiển dao động của các panel vỏ cầu làm từ FG-CNTRC có lớp áp điện sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn [159]. Tác giả Hoàng Văn Tùng và ccs đã thu được một số kết quả nghiên cứu cho bài toán ổn định tĩnh của các tấm, panel cong, vỏ trụ, vỏ trống và vỏ cầu thoải làm từ vật liệu FGM [49,50,61,64,65] và vật liệu FG-CNTRC [93-98,112,113,119-121,130-133,137] sử dụng cách tiếp cận giải tích dựa trên một số lý thuyết khác nhau. Ổn định tĩnh và động

của các kết cấu dạng vỏ làm từ vật liệu FGM chịu tải cơ là chủ đề nghiên cứu của một số luận án thực hiện trong những năm gần đây [160-162]. Liên quan gần đến chủ đề của luận án là các công trình luận án của Lê Thị Như Trang [163] và Phạm Thanh Hiếu [164]. Trong công trình [163], tác giả đã nghiên cứu ổn định phi tuyến của các tấm chữ nhật và panel cong FG-CNTRC đơn lớp chịu một số loại tải nhiệt và cơ-nhiệt có kể đến tính đàn hồi của các liên kết biên. Ổn định phi tuyến của vỏ trụ và vỏ trống mỏng làm từ FGM hoàn hảo (không có lỗ rỗng) và FG-CNTRC dựa trên CST và ổn định tuyến tính của vỏ trụ, vỏ trống tương đối dày FG-CNTRC dựa trên FSDT đã được nghiên cứu trong công trình [164] có kể đến tính đàn hồi của liên kết biên.

Từ tổng quan trên đây có thể nhận xét rằng:

+ Có tương đối ít các công bố về ổn định của các kết cấu làm từ vật liệu FGM có lỗ rỗng. Đặc biệt, chưa có công bố nào về ổn định tuyến tính và phi tuyến của các vỏ trụ và vỏ trụ FGM có lỗ rỗng.

+ Các kết quả nghiên cứu về ổn định phi tuyến của vỏ cầu thoải và tấm tròn FGM còn rất hạn chế về số lượng so với các kết quả đã công bố về ổn định của tấm chữ nhật và vỏ trụ tròn FGM. Theo hiểu biết của tác giả luận án, hiện chưa có nghiên cứu nào được tiến hành về ổn định phi tuyến của vỏ cầu thoải và tấm tròn làm từ vật liệu FGM có lỗ rỗng.

+ Trong số các nghiên cứu đã tiến hành về kết cấu sandwich FG-CNTRC, hầu như chỉ một mô hình sandwich đó là lớp lõi đẳng hướng và các lớp mặt FG-CNTRC. Sự kết hợp khác nhau các đặc điểm thế mạnh của CNTRC và vật liệu đẳng hướng có thể cần được mở rộng trong các mô hình sandwich mới.

+ Trong ứng dụng của kết cấu vào thực tiễn, các cạnh của kết cấu có thể chỉ dịch chuyển một phần và tính đàn hồi về ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến của các cạnh biên nên được xem xét. Một số nghiên cứu trước đây của Librescu và ccs [165,166] về ổn định và dao động của tấm và vỏ thoải composite phân lớp, của Tung và ccs [50,93-98,113,131-133,135] về ổn định của của tấm và vỏ FGM và FG-CNTRC, và của Zhang cùng ccs [167-169] về dao động và ổn định của các tấm FG-CNTRC đều đã chỉ ra ảnh hưởng rất quan trọng của tính đàn hồi về ràng buộc dịch chuyển của các cạnh biên lên ứng xử của kết cấu composite. Tuy nhiên, hiện chưa có nghiên cứu nào đánh giá các ảnh hưởng đồng thời của các lỗ rỗng (porosity) và điều kiện ràng buộc dịch chuyển các cạnh biên lên sự ổn định của các vỏ kín FGM tương đối dày, các vỏ cầu và tấm tròn FGM.

+ Trong số các nghiên cứu về ứng xử của kết cấu có nền đàn hồi, chỉ có một số rất ít các công trình xem xét đến mô hình nền đàn hồi phi tuyến, ví dụ [55,170]. Ảnh hưởng của nền đàn hồi phi tuyến lên sự ổn định phi tuyến của các kết cấu nói chung, đặc biệt là các kết cấu vỏ chịu áp lực lớn như vỏ cầu thoải FGM nên được khảo sát.

1.8. Về bài toán ổn định tĩnh của kết cấu

Ổn định (stability) là bài toán cơ bản trong phân tích và dự đoán ứng xử của kết cấu. Sự mất ổn định tĩnh (static instability) là trường hợp kết cấu mất ổn định dưới tác dụng của tải tĩnh (bỏ qua tốc độ gia tải) và có thể diễn ra khi các điều kiện tải trọng và điều kiện biên thỏa mãn các điều kiện nhất định, thông thường là khi trong kết cấu xuất hiện các miền chịu ứng suất nén. Một cách tương đối, có thể phân thành bài toán ổn định tuyến tính và bài toán ổn định phi tuyến. Bài toán ổn định tuyến tính, còn được biết đến là ứng xử vòng tuyến tính (linear buckling) hay đơn giản là ứng xử vòng (buckling), dựa trên giả thiết các chuyển vị sau khi vòng (đặc biệt là chuyển vị ngang hay độ võng) là nhỏ và có thể bỏ qua các số hạng phi tuyến liên quan đến chuyển vị. Mục đích của phân tích ổn định tuyến tính chỉ dừng lại ở việc xác định giá trị tải trọng nhỏ nhất làm cho kết cấu bị mất trạng thái cân bằng ban đầu (tức là cân bằng ổn định) và thường gọi là tải tới hạn. Bài toán ổn định phi tuyến (hình học), còn được biết đến là ứng xử vòng phi tuyến hoặc phân tích sau vòng (postbuckling), dựa trên giả thiết các thành phần chuyển vị sau khi vòng (đặc biệt là độ võng) là không nhỏ và các số hạng phi tuyến liên quan đến chuyển vị là không thể bỏ qua được. Bên cạnh việc thu được các tải tới hạn làm cho kết cấu bị vòng (trong trường hợp tồn tại), bài toán ổn định phi tuyến còn dự đoán xu hướng ứng xử và khả năng mang tải trong giai đoạn sau vòng, tức là giai đoạn tải trọng vượt quá giá trị tới hạn. Mất ổn định là một quá trình phức tạp và dạng đáp ứng phụ thuộc vào hình dạng kết cấu và điều kiện tải trọng. Một cách tương đối, quá trình diễn tiến và dạng đáp ứng của một vài kiểu mất ổn định thường gặp được mô tả sau đây.

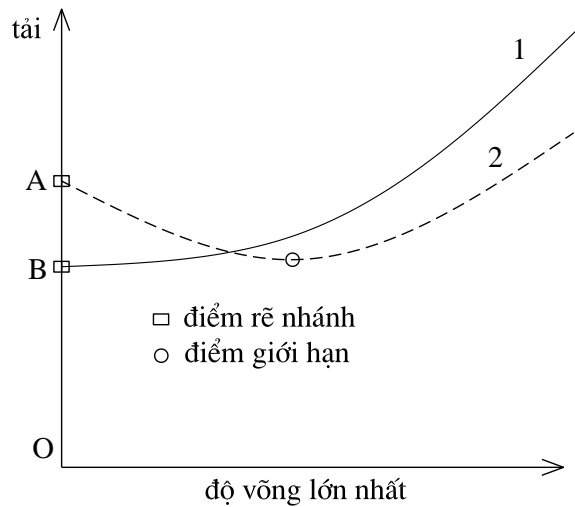
Mất ổn định theo kiểu rẽ nhánh (bifurcation-type buckling), như được minh họa trên hình 1.2, là một quá trình diễn tiến gồm các trạng thái với các đặc điểm sau:

+ Trạng thái trước khi vòng (pre-buckling state) là trạng thái cân bằng ổn định, tức là kết cấu chưa bị võng dù tải trọng tăng và đường đáp ứng tải – độ võng trong

giai đoạn này là đường thẳng (đoạn OA hoặc OB trên hình 1.2). Giai đoạn này còn được gọi là trạng thái màng (membrane state) trong kết cấu.

+ Trạng thái vòng (buckling) diễn ra tại một điểm (A hoặc B), thường được gọi là điểm rẽ nhánh (bifurcation point), khi tải trọng đạt giá trị tải tới hạn.

+ Trạng thái sau khi vòng (postbuckling) là trạng thái cân bằng không ổn định (tức là độ võng thay đổi khi tải thay đổi) sau khi tải vượt quá giá trị tới hạn.

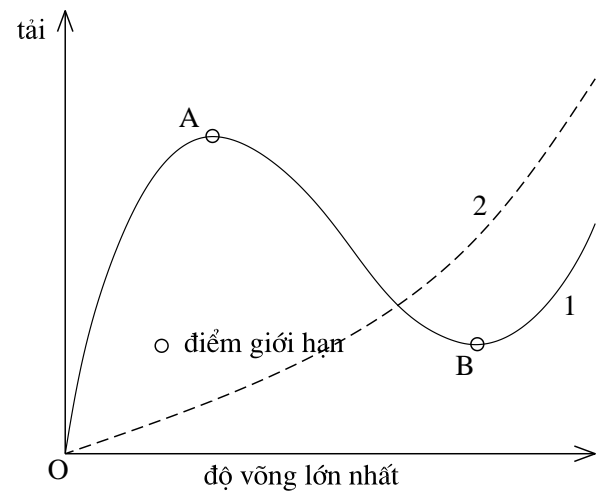


Hình 1.2. Mất ổn định theo kiểu rẽ nhánh (bifurcation-type buckling)

Mất ổn định theo kiểu cực trị (extreme-type buckling), như được minh họa trên hình 1.3, là một quá trình gồm các trạng thái với các đặc điểm sau đây:

+ Trạng thái trước khi vòng (đoạn OA trên hình 1.3) không phải là trạng thái màng, tức là tồn tại độ võng trước khi vòng và đường đáp ứng tải – độ võng là đường cong.

+ Trạng thái vòng diễn ra tại một lân cận điểm, thường được gọi là điểm cực trị hoặc điểm giới hạn khi tải trọng đạt giá trị tới hạn.



Hình 1.3. Mất ổn định theo kiểu cực trị (extreme-type buckling).

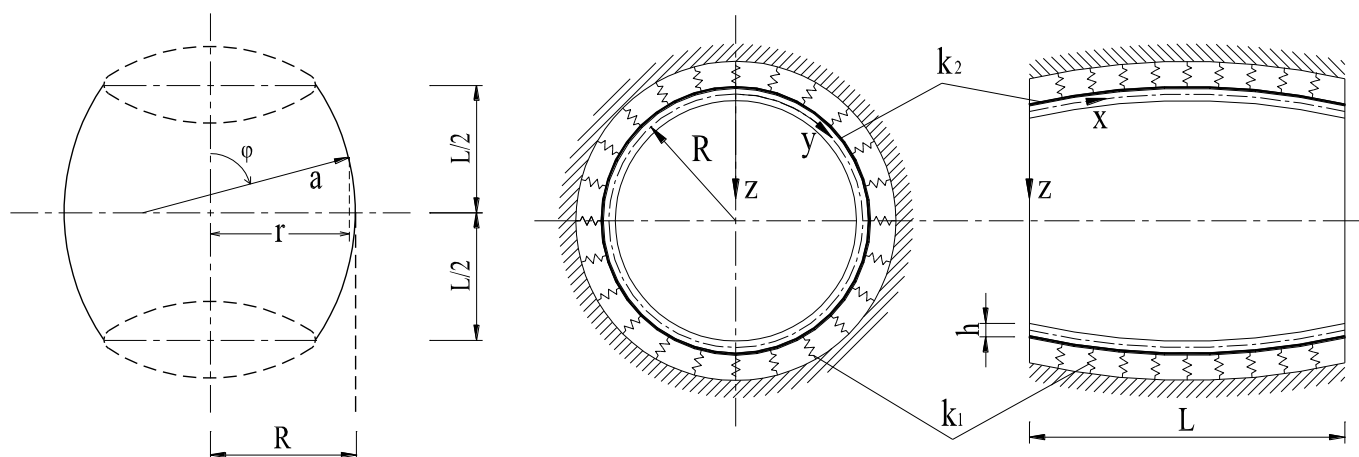
+ Trạng thái sau khi vòng là trạng thái cân bằng không ổn định và sự thay đổi của tải trọng có thể dẫn đến sự thay đổi đáng kể của độ võng. Trong đa số các trường hợp dạng đường cong đáp ứng tải – độ võng của mất ổn định theo kiểu cực trị là đường cong bậc ba và thường tồn tại điểm uốn trong giai đoạn sau khi vòng. Xu hướng ứng xử này còn được biết đến là hiện tượng hóp (snap-through) trong kết cấu và cường độ hóp được xác định bởi độ chênh lệch tải trọng ứng với điểm cực đại (A) và điểm cực tiểu (B). Trường hợp đặc biệt (ví dụ khi vỏ rất thoải) thì đường đáp ứng gần như thẳng (không có điểm cực trị) như đường số 2 trên hình 1.3 và ứng xử của kết cấu gần với ứng xử uốn.

CHƯƠNG 2. ỔN ĐỊNH TUYẾN TÍNH CỦA VỎ TRỐNG FGM CÓ LỖ RỖNG SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG TRƯỢT BẬC CAO

Vỏ trống (Toroidal Shell Segment) là một loại vỏ kín có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau, đặc biệt là trong kỹ thuật hàng không và các bình chứa chịu áp lực. Tuy nhiên, theo hiểu biết của tác giả luận án, chưa có nghiên cứu nào về ổn định của vỏ trống dày làm từ vật liệu composite cơ tính biến đổi FGM có lỗ rỗng. Chương này của luận án sử dụng một cách tiếp cận giải tích để nghiên cứu bài toán ổn định tĩnh tuyến tính của các vỏ trống dày làm từ FGM có lỗ rỗng chịu các tải cơ gồm nén dọc trục, áp lực ngoài, kết hợp giữa nén dọc trục với áp lực ngoài, nhiệt độ tăng đều và kết hợp cơ-nhiệt. Các lỗ rỗng tồn tại trong vật liệu FGM theo các kiểu phân bố đều (even) hoặc không đều (uneven). Tỷ lệ thể tích các vật liệu thành phần trong FGM được biến đổi qua chiều dày thành vỏ theo quy luật hàm lũy thừa. Các tính chất của các vật liệu thành phần trong FGM được giả thiết phụ thuộc vào nhiệt độ và các tính chất vật liệu hiệu dụng của FGM có lỗ rỗng được xác định bởi phiên bản cải tiến của quy tắc hỗn hợp. Vỏ trống được giả thiết dày, hoàn hảo về mặt hình dáng và thoải theo phương kinh tuyến. Bài toán ổn định tĩnh đặt theo ứng suất với các hàm ẩn cơ bản là hàm độ võng và hàm ứng suất. Các phương trình cơ bản được thiết lập dựa trên giả thiết của Stein-McElman và lý thuyết biến dạng trượt bậc cao của Reddy có kể đến tương tác giữa vỏ với môi trường đàn hồi bao quanh. Các cạnh của vỏ được giả thiết tựa bản lề và chịu ràng buộc đàn hồi về dịch chuyển theo phương tiếp tuyến. Trong chương này, nghiệm giải tích xấp xỉ với độ võng dạng hai số hạng được đề xuất trong các nghiên cứu của Hieu và Tung [112,113] sẽ được sử dụng và phương pháp Galerkin được áp dụng để dẫn ra các biểu thức dạng đóng của tải vòng. Trong phân tích vòng của vỏ chịu tải nhiệt, thuật toán lặp được sử dụng để tính toán các nhiệt độ tới hạn. Sau các nghiên cứu so sánh để kiểm chứng độ tin cậy, một loạt các ví dụ số được tiến hành để đánh giá các ảnh hưởng của tỷ lệ phần trăm lỗ rỗng trong FGM, các tỷ số hình dạng vỏ, các tham số độ cứng của nền đàn hồi bao quanh, ảnh hưởng của các điều kiện ứng suất trước (do tải cơ và tải nhiệt), ảnh hưởng của mức độ ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên và sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu lên các tải tới hạn của vỏ trống. Từ việc phân tích các kết quả số, luận án đưa ra các nhận xét và kết luận.

2.1. Mô hình kết cấu và các tính chất vật liệu

Mô hình kết cấu được xem xét trong chương này là một vỏ trống có chiều dài L , chiều dày h và các bán kính cong theo các phương kinh tuyến và vĩ tuyến lần lượt là a và R , như được chỉ ra trong hình 2.1. Vỏ được bao quanh bởi một môi trường đàn hồi được mô hình như một nền hai tham số và được xác định trong một hệ tọa độ xyz có gốc nằm trên mặt giữa ở một cạnh vỏ, các trục x và y lần lượt hướng theo các phương kinh tuyến và vĩ tuyến, trong khi đó trục z vuông góc với mặt giữa vỏ và có chiều dương hướng vào phía trong ($-h/2 \leq z \leq h/2$).



Hình 2.1. Hình dạng và hệ tọa độ của một vỏ trống được bao quanh bởi nền đàn hồi.

Luận án chỉ xét các vỏ trống rất thoải theo phương kinh tuyến, tức là $a \ll R$ (hay $R/a \gg 1$) và lớp vỏ trống này còn được gọi là các vỏ gần với hình dạng trụ (nearly cylindrical shell). Để nhận thấy từ hình 3.1 rằng $r = R - a(1 - \sin \varphi)$ trong đó φ là góc giữa trục đối xứng và đường pháp tuyến với mặt giữa của vỏ. Khi vỏ trống rất thoải theo phương kinh tuyến có thể xem như góc φ xấp xỉ một góc vuông và khi đó $r \approx R$. Dựa trên giả thiết của Stein và McElman [171], đối với các vỏ trống rất thoải có thể xấp xỉ rằng $dx \approx a d\varphi$ và $dy = R d\theta$ trong đó θ là góc vĩ tuyến. Giả thiết này có ý nghĩa quan trọng để chuyển các phương trình viết trong hệ tọa độ cong trục giao về dạng tựa Đề-Các. Các giá trị $a > 0$ (tức là độ cong Gauss dương) và $a < 0$ (tức là độ cong Gauss âm) tương ứng chỉ các vỏ trống lồi và lõm. Trong trường hợp đặc biệt, khi $a \rightarrow \infty$ (tức là độ cong Gauss bằng không) ta nhận được vỏ trụ tròn.

Trong chương này, vỏ trống được làm từ vật liệu composite cơ tính biến đổi FGM có các lỗ rỗng. Tỷ lệ phần trăm thể tích, được ký hiệu bởi V , của mỗi thành

phần trong FGM được giả thiết biến đổi theo phương chiều dày theo quy luật hàm lũy thừa [172]

$$V_m = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^N, \quad V_c = 1 - V_m \quad (2.1)$$

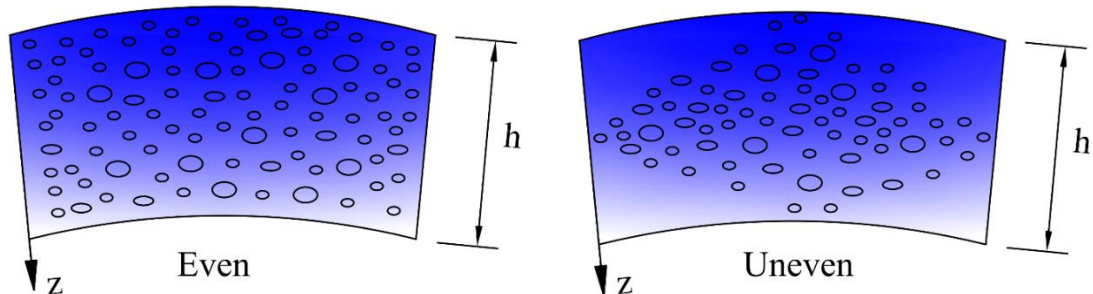
trong đó $N \geq 0$ là chỉ số tỷ lệ thể tích và các chỉ số dưới m và c lần lượt để chỉ các thành phần kim loại và ceramic.

Trong quá trình chế tạo, một lượng nhỏ các lỗ rỗng có thể tồn tại trong FGM. Do sự có mặt của các lỗ rỗng, các tính chất hiệu dụng P_{eff} của FGM có thể được xác định theo phiên bản cải tiến của quy tắc hỗn hợp [69]

$$P_{eff} = P_m \left(V_m - \frac{\xi}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\xi}{2} \right) \quad (2.2)$$

trong đó P đại diện cho một tính chất cụ thể (ví dụ như mô đun đàn hồi, hệ số dẫn nhiệt, ...) của các vật liệu thành phần và ξ là đại lượng nhận giá trị nhỏ so với đơn vị ($0 \leq \xi \ll 1$) và được gọi là tỷ lệ thể tích của các lỗ rỗng. Trong trường hợp đặc biệt $\xi = 0$, vật liệu FGM không có lỗ rỗng và thường được gọi là FGM hoàn hảo.

Trong khuôn khổ luận án, các lỗ rỗng được giả thiết phân bố trong FGM theo các kiểu phân bố đều hoặc không đều. Đối với kiểu phân bố đều, mật độ các lỗ rỗng tại mọi vị trí trong FGM là giống nhau. Trong trường hợp các lỗ rỗng phân bố không đều, các lỗ rỗng tập trung nhiều hơn ở khu vực gần mặt giữa của vỏ như được minh họa trong hình 2.2.



Hình 2.2. Các kiểu phân bố đều (Even) và không đều (Uneven) của các lỗ rỗng.

Từ các biểu thức (2.1) và (2.2), mô đun đàn hồi hiệu dụng E và hệ số dẫn nhiệt hiệu dụng α của vật liệu FGM có lỗ rỗng được xác định như sau [69]

$$E(z, T) = [E_m(T) - E_c(T)] \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^N + E_c - \frac{\xi}{2} [E_m(T) + E_c(T)] \left(1 - 2\tau \frac{|z|}{h} \right) \quad (2.3a)$$

$$\alpha(z, T) = [\alpha_m(T) - \alpha_c(T)] \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^N + \alpha_c - \frac{\xi}{2} [\alpha_m(T) + \alpha_c(T)] \left(1 - 2\tau \frac{|z|}{h} \right) \quad (2.3b)$$

trong đó $\tau = 0$ và $\tau = 1$ lần lượt đối với các trường hợp phân bố đều và không đều của các lỗ rỗng trong FGM và T là nhiệt độ môi trường. Do sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất của các vật liệu thành phần, các tính chất vật liệu hiệu dụng của FGM phụ thuộc vào vị trí (z), vào nhiệt độ (T) và tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng (ξ). Ngược lại, do sự phụ thuộc yếu vào vị trí, nhiệt độ và các lỗ rỗng, các hệ số Poisson của các vật liệu thành phần và hệ số Poisson hiệu dụng ν của FGM được giả thiết là hằng số.

2.2. Các phương trình cơ bản

Bài toán ổn định tuyến tính được đặt theo ứng suất và các phương trình cơ bản được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc cao (HSDT) được phát triển bởi Reddy và Liu [173]. Dựa trên HSDT, các thành phần biến dạng màng $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ và các thành phần biến dạng trượt ngang γ_{xz}, γ_{yz} ở một điểm bất kỳ cách mặt giữa một khoảng z được biểu diễn như sau [173, 174]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x^1 \\ k_y^1 \\ k_{xy}^1 \end{pmatrix} + z^3 \begin{pmatrix} k_x^3 \\ k_y^3 \\ k_{xy}^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{pmatrix} + z^2 \begin{pmatrix} k_{xz}^2 \\ k_{yz}^2 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

trong đó $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$ là các thành phần biến dạng của điểm tương ứng trên mặt giữa ($z = 0$) và có các liên hệ sau đây

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} - w/a \\ v_{,y} - w/R \\ u_{,y} + v_{,x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_x^1 \\ k_y^1 \\ k_{xy}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_x^3 \\ k_y^3 \\ k_{xy}^3 \end{pmatrix} = -c_1 \begin{pmatrix} \phi_{x,x} + w_{,xx} \\ \phi_{y,y} + w_{,yy} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} + 2w_{,xy} \end{pmatrix} \quad (2.5a)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_x + w_{,x} \\ \phi_y + w_{,y} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_{xz}^2 \\ k_{yz}^2 \end{pmatrix} = -3c_1 \begin{pmatrix} \phi_x + w_{,x} \\ \phi_y + w_{,y} \end{pmatrix} \quad (2.5b)$$

trong đó $c_1 = 4/(3h^2)$, u, v, w là ba thành phần chuyển vị lần lượt theo các phương x, y, z (w còn được gọi là chuyển vị ngang hay độ võng của vỏ), và ϕ_x, ϕ_y là các góc

quay tại $z = 0$ của các pháp tuyến đến mặt giữa lần lượt đối với các trục y, x . Hơn nữa, trong toàn bộ luận án, dấu phẩy dưới được dùng để chỉ đạo hàm riêng đối với biến theo sau dấu phẩy, ví dụ $w_{,x} = \partial w / \partial x$, $w_{,xy} = \partial^2 w / \partial x \partial y$.

Các thành phần ứng suất được xác định nhờ các liên hệ ứng suất – biến dạng sau đây [174]

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y - (1+\nu)\alpha\Delta T] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x - (1+\nu)\alpha\Delta T] \\ (\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}) &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})\end{aligned}\quad (2.6)$$

trong đó $\Delta T = T - T_0$ là nhiệt độ tăng đều từ giá trị ban đầu là nhiệt độ phòng T_0 mà ở đó giả thiết vỏ không chịu ứng suất nhiệt.

Theo lý thuyết biến dạng trượt bậc cao, các thành phần hợp nội lực và mô men trên một đơn vị chiều dài được tính qua các thành phần ứng suất như sau [173]

$$\begin{aligned}(N_i, M_i, P_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z, z^3) dz \quad (i = x, y, xy), \\ (Q_j, K_j) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{jz}(1, z^2) dz \quad (j = x, y)\end{aligned}\quad (2.7)$$

Sau khi thay các thành phần biến dạng từ (2.4) vào (2.6) và đặt các biểu thức nhận được của các thành phần ứng suất vào (2.7), ta nhận được các biểu thức cụ thể của các hợp nội lực và mô men như sau

$$\begin{aligned}(N_x, M_x, P_x) &= \frac{1}{1-\nu^2} \left[(E_1, E_2, E_4) (\varepsilon_x^0 + \nu\varepsilon_y^0) + (E_2, E_3, E_5) (k_x^1 + \nu k_y^1) \right. \\ &\quad \left. + (E_4, E_5, E_7) (k_x^3 + \nu k_y^3) - (1+\nu) (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_4) \right], \\ (N_y, M_y, P_y) &= \frac{1}{1-\nu^2} \left[(E_1, E_2, E_4) (\varepsilon_y^0 + \nu\varepsilon_x^0) + (E_2, E_3, E_5) (k_y^1 + \nu k_x^1) \right. \\ &\quad \left. + (E_4, E_5, E_7) (k_y^3 + \nu k_x^3) - (1+\nu) (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_4) \right], \\ (N_{xy}, M_{xy}, P_{xy}) &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left[(E_1, E_2, E_4) \gamma_{xy}^0 + (E_2, E_3, E_5) k_{xy}^1 + (E_4, E_5, E_7) k_{xy}^3 \right]\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$(Q_x, K_x) = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[(E_1, E_3) \gamma_{xz}^0 + (E_3, E_5) k_{xz}^2 \right],$$

$$(Q_y, K_y) = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[(E_1, E_3) \gamma_{yz}^0 + (E_3, E_5) k_{yz}^2 \right]$$

trong đó

$$(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_7) = \int_{-h/2}^{h/2} E(z, T) (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz,$$

$$(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_4) = \int_{-h/2}^{h/2} E(z, T) \alpha(z, T) \Delta T (1, z, z^3) dz \quad (2.9)$$

Dựa trên HSĐT, hệ phương trình cân bằng của vỏ mỏng FGM được bao quanh bởi môi trường đàn hồi được viết như sau [173]

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (2.10a)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (2.10b)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} - 3c_1 (K_{x,x} + K_{y,y}) + c_1 (P_{x,xx} + 2P_{xy,xy} + P_{y,yy}) + \frac{N_x}{a} + \frac{N_y}{R} \\ + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} + q - k_1 w + k_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) = 0 \quad (2.10c)$$

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x + 3c_1 K_x - c_1 (P_{x,x} + P_{xy,y}) = 0 \quad (2.10d)$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y + 3c_1 K_y - c_1 (P_{xy,x} + P_{y,y}) = 0 \quad (2.10e)$$

trong đó q là áp lực phân bố đều vuông góc với mặt giữa của vỏ, nhận giá trị dương trong trường hợp áp lực từ ngoài vào, k_1 và k_2 lần lượt là các tham số độ cứng của lớp đàn hồi Winkler và lớp trượt Pasternak của nền đàn hồi bao quanh. Hai phương trình đầu (2.10a) và (2.10b) được thỏa mãn đồng nhất bằng cách sử dụng hàm ứng suất $f(x, y)$ được xác định sao cho [33]

$$N_x = f_{,yy}, \quad N_y = f_{,xx}, \quad N_{xy} = -f_{,xy}. \quad (2.11)$$

Đặt hai phương trình cuối (2.10d), (2.10e) vào phương trình (2.10c), sau đó sử dụng các liên hệ động học (2.5), các biểu thức của nội lực (2.8) và thực hiện các biến đổi toán học tương tự như cách làm đã thực hiện trong công trình của Tung và Duc

[175], ta có thể thu được phương trình cân bằng của vỏ trống dày FGM có lỗ rỗng được bao quanh bởi nền đàn hồi như sau

$$\begin{aligned}
& c_1^2 \left(\frac{D_2 D_5}{D_4} - D_3 \right) \nabla^6 w + \left(c_1 \frac{D_2}{D_4} + 1 \right) D_6 \nabla^4 w \\
& + \left(1 - c_1 \frac{D_5}{D_4} \right) \nabla^2 \left(f_{,yy} w_{,xx} - 2f_{,xy} w_{,xy} + f_{,xx} w_{,yy} + \frac{f_{,yy}}{a} + \frac{f_{,xx}}{R} + q - k_1 w + k_2 \nabla^2 w \right) \\
& - \frac{D_6}{D_4} \left(f_{,yy} w_{,xx} - 2f_{,xy} w_{,xy} + f_{,xx} w_{,yy} + \frac{f_{,yy}}{a} + \frac{f_{,xx}}{R} + q - k_1 w + k_2 \nabla^2 w \right) = 0 \quad (2.12)
\end{aligned}$$

trong đó $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ là toán tử Laplace và

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)}, \quad D_2 = \frac{E_1 E_5 - E_2 E_4}{E_1 (1 - \nu^2)}, \quad D_3 = \frac{E_1 E_7 - E_4^2}{E_1 (1 - \nu^2)}, \\
D_4 &= D_1 - c_1 D_2, \quad D_5 = D_2 - c_1 D_3, \quad D_6 = \frac{1}{2(1 + \nu)} (E_1 - 6c_1 E_3 + 9c_1^2 E_5). \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Phương trình (2.12) chứa hai hàm ẩn là hàm độ võng w và hàm ứng suất f . Để thu được một phương trình thứ hai chứa các hàm ẩn này, luận án sử dụng phương trình tương thích biến dạng. Từ liên hệ động học (2.5a), phương trình tương thích biến dạng của vỏ trống chịu biến dạng tuyến tính có dạng sau đây

$$\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = -\frac{w_{,xx}}{R} - \frac{w_{,yy}}{a}. \quad (2.14)$$

Từ các biểu thức của nội lực (2.8) ta có thể biểu diễn các thành phần biến dạng mặt giữa $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ qua các thành phần nội lực N_x, N_y, N_{xy} . Sau đó, bằng cách đặt các biểu thức nhận được của biến dạng mặt giữa vào (2.14) và lưu ý đến định nghĩa của hàm ứng suất (2.11), phương trình tương thích biến dạng tuyến tính được viết lại dưới dạng sau đây

$$\nabla^4 f + E_1 \left(\frac{w_{,xx}}{R} + \frac{w_{,yy}}{a} \right) = 0. \quad (2.15)$$

Hai phương trình (2.12) và (2.15) là các phương trình cơ bản được sử dụng cho bài toán phân tích ứng xử vòng tuyến tính của các vỏ trống dày FGM có lỗ rỗng.

Hai cạnh biên của vỏ trống được giả thiết tựa bản lề và các điều kiện biên được biểu diễn như sau [173]

$$w = N_{xy} = \phi_y = M_x = P_x = 0, \quad N_x = N_{x0} \quad \text{tại } x = 0, L \quad (2.16)$$

trong đó N_{x0} là hợp của lực nén (chủ động) tác dụng trên hai cạnh biên trong trường hợp các cạnh này được tự do dịch chuyển (freely movable) và là hợp của phản lực (bị động) trên hai cạnh biên trong trường hợp các cạnh này bị ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến.

2.3. Nghiệm giải tích của bài toán ổn định tuyến tính

Trong số các nghiên cứu giải tích về ổn định tuyến tính của các vỏ kín có hai cạnh biên tựa bản lề đã được công bố, bài toán ổn định thường được giải dựa theo tiêu chuẩn cân bằng lân cận (adjacent equilibrium criterion) và bài toán được đặt theo chuyển vị. Cụ thể, sau khi thiết lập các phương trình cân bằng phi tuyến, các phương trình ổn định tuyến tính được dẫn ra nhờ tiêu chuẩn cân bằng lân cận dưới dạng không tách biệt (tức là hệ các phương trình ổn định tuyến tính được biểu diễn qua các gia số của tất cả các đại lượng dịch chuyển $u_1, v_1, w_1, \phi_{x1}, \phi_{y1}$) như các công trình [11-15, 110] hoặc dạng tách biệt (tức là chỉ một phương trình ổn định tuyến tính biểu diễn qua chỉ một gia số độ võng w_1) như trong công trình [12]. Điểm chung của các dạng nghiệm giải tích xấp xỉ trong các công trình đã đề cập đó là độ võng (ở trạng thái cân bằng lân cận) được xấp xỉ bởi một số hạng, dạng $\sin(m\pi x/L)\sin(ny/R)$. Tức là độ võng trong giai đoạn trước khi vồng đã không được xem xét. Tuy nhiên, khác với kết cấu dạng tấm hoặc panel, các vỏ kín như vỏ trụ và vỏ trống thường có độ võng đều đáng kể trong giai đoạn trước khi vồng, như đã được thảo luận trong cuốn sách nổi tiếng về ổn định kết cấu của Brush và Almroth [17]. Gần đây, Hieu và Tung [112, 113] đã giới thiệu một cách tiếp cận giải tích mới dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT) để giải bài toán ổn định tuyến tính của các vỏ trụ và vỏ trống tương đối dày có các cạnh biên tựa bản lề làm từ vật liệu FG-CNTRC. Cụ thể, trong hai công bố vừa đề cập, các tác giả đã đặt bài toán ổn định theo ứng suất và sử dụng dạng nghiệm giải tích với nghiệm độ võng dạng hai số hạng khi kể đến số hạng độ võng đều trong giai đoạn trước khi vồng để phản ánh chính xác hơn ứng xử của các dạng vỏ kín. Trong chương này, luận án mở rộng cách tiếp cận của Hieu và Tung [112, 113] để

tính toán các tải tới hạn của các vỏ tròn dày FGM có lỗ rỗng. Cụ thể, nghiệm giải tích xấp xỉ của bài toán ổn định được chọn như sau [112,113]

$$w(x, y) = W_0 + W_1 \sin \beta_m x \sin \delta_n y \quad (2.17a)$$

$$f(x, y) = A_1 \cos 2\beta_m x + A_2 \cos 2\delta_n y + A_3 \sin \beta_m x \sin \delta_n y - \frac{1}{2} \sigma_{0y} h x^2 + \frac{1}{2} N_{x0} y^2 \quad (2.17b)$$

$$\phi_x = B_1 \cos \beta_m x \sin \delta_n y, \quad \phi_y = B_2 \sin \beta_m x \cos \delta_n y \quad (2.17c)$$

trong đó W_0 và W_1 lần lượt là các biên độ của độ võng ứng với trạng thái trước khi vòng và trạng thái ngay sau khi vòng, $\beta_m = m\pi / L$, $\delta_n = n / R$ với m và n là các số nguyên dương lần lượt biểu thị số nửa sóng theo phương kinh tuyến và số sóng theo phương vĩ tuyến. Hơn nữa σ_{0y} là ứng suất trung bình theo phương vĩ tuyến và A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 là các hệ số cần xác định.

Bằng cách thay các nghiệm (2.17a) và (2.17b) vào phương trình tương thích biến dạng (2.15), các hệ số trong hàm ứng suất có thể được xác định như sau

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{E_1}{(\beta_m^2 + \delta_n^2)^2} \left(\frac{\delta_n^2}{a} + \frac{\beta_m^2}{R} \right) W_1. \quad (2.18)$$

Từ các liên hệ động học (2.5) và các biểu thức nội lực (2.8) hai phương trình cân bằng (2.10d), (2.10e) có thể được biểu diễn qua các đạo hàm riêng của các thành phần độ võng w và góc xoay ϕ_x, ϕ_y . Sau đó, bằng cách đặt các nghiệm (2.17a) và (2.17c) vào các phương trình cân bằng thu được, các hệ số biên độ B_1, B_2 của các góc xoay có thể được xác định. Tuy nhiên, để cho ngắn gọn, các biểu thức cụ thể này không được hiển thị ở đây.

Tiếp theo, khi đặt các nghiệm (2.17) vào phương trình cân bằng (2.12) và áp dụng phương pháp Galerkin đối với phương trình nhận được, ta có

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L LS \times 1 dx dy = 0 \quad (2.19a)$$

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L LS \times \sin \beta_m x \sin \delta_n y dx dy = 0 \quad (2.19b)$$

ở đây LS là vế trái của phương trình (2.12) nhận được sau khi đã thay các nghiệm (2.17) vào trong đó. Sau khi tiến hành tích phân hệ phương trình (2.19) với lưu ý về điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường, $W_1 \neq 0$, ta nhận được kết quả sau

$$-\bar{N}_{x0} \frac{R_a}{R_h} + \frac{\sigma_{0y}}{R_h} - q + K_1 \frac{E_m^0}{R_h^4} \bar{W}_0 = 0 \quad (2.20a)$$

$$\frac{1 + a_{11}}{R_h^2} \left(\bar{N}_{x0} \frac{m^2 \pi^2}{L_R^2} - \sigma_{0y} n^2 \right) + a_{21} = 0 \quad (2.20b)$$

trong đó E_m^0 là giá trị của E_m được tính ở nhiệt độ phòng $T_0 = 300$ K, a_{11}, a_{21} có các biểu thức cụ thể được cho ở công thức (A1) của phụ lục A và

$$\begin{aligned} \bar{W}_0 &= \frac{W_0}{h}, \quad R_h = \frac{R}{h}, \quad R_a = \frac{R}{a}, \quad L_R = \frac{L}{R}, \\ \bar{N}_{x0} &= \frac{N_{x0}}{h}, \quad (K_1, K_2) = \frac{R^2}{E_m^0 h^3} (k_1 R^2, k_2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Một số bài toán về ổn định tuyến tính của vỏ trống FGM có lỗ rỗng chịu một số điều kiện tải trọng cụ thể sẽ được phân tích sau đây.

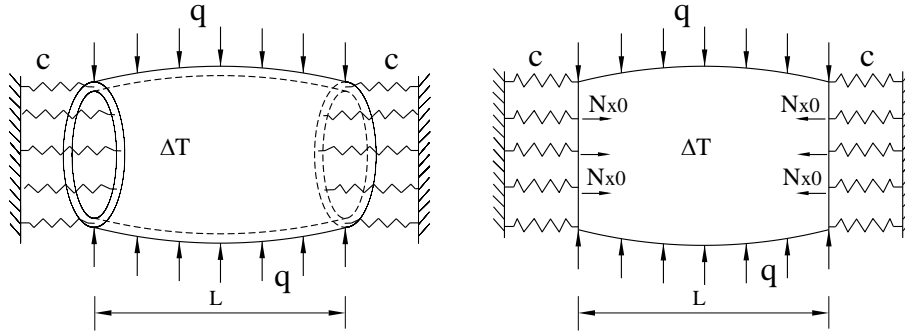
2.3.1. Vỏ trống với các cạnh bị ràng buộc chịu áp lực ngoài và nhiệt độ

Mục này thiết lập các biểu thức tải tới hạn cho bài toán ổn định tuyến tính của các vỏ trống FGM có lỗ rỗng với các cạnh bị ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến và chịu áp lực ngoài và/hoặc nhiệt độ tăng đều. Trong trường hợp này, hợp phần lực trên các cạnh biên và độ dịch chuyển trung bình của các cạnh biên có liên hệ theo biểu thức sau đây [49,50,113,119]

$$N_{x0} = -\frac{c}{2\pi RL} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx dy \quad (2.22)$$

trong đó c là tham số độ cứng ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến ở các cạnh biên. Nếu mô hình điều kiện ràng buộc dịch chuyển ở các cạnh biên như các lò xo đàn hồi, như được minh họa trên hình 2.3, thì có thể hiểu một cách đơn giản c là độ cứng đàn hồi của các lò xo. Có thể nhận thấy rằng liên hệ (2.22) bao hàm tất cả các trường hợp ràng buộc theo phương tiếp tuyến ở các cạnh biên. Cụ thể, khi $c = 0$ ta có $N_{x0} = 0$ và các cạnh biên có thể tự do di chuyển (movable). Khi $c \rightarrow \infty$ dịch chuyển trung bình trên các cạnh tiến đến không, tức là các cạnh không thể di chuyển

(immovable). Trong trường hợp c nhận các giá trị trung gian, tức là $0 < c < \infty$, ta có các cạnh chỉ có thể dịch chuyển một phần (partially movable).



Hình 2.3. Mô hình ràng buộc đàn hồi theo phương tiếp tuyến ở các cạnh biên.

Đối với các dạng vỏ kín như vỏ trống, điều kiện đóng theo phương vĩ tuyến cần được xem xét. Điều kiện này được thỏa mãn theo nghĩa trung bình như sau [27]

$$\frac{1}{2\pi RL} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = 0. \quad (2.23)$$

Từ các liên hệ động học (2.5a) và các biểu thức của nội lực (2.8) ta có thể giải ra các biểu thức của $u_{,x}$ và $v_{,y}$ cụ thể như sau

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_1} (f_{,yy} - \nu f_{,xx}) - \frac{E_2}{E_1} \phi_{x,x} + c_1 \frac{E_4}{E_1} (\phi_{x,x} + w_{,xx}) + \frac{w}{a} + \frac{\Phi_1}{E_1} \quad (2.24a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E_1} (f_{,xx} - \nu f_{,yy}) - \frac{E_2}{E_1} \phi_{y,y} + c_1 \frac{E_4}{E_1} (\phi_{y,y} + w_{,yy}) + \frac{w}{R} + \frac{\Phi_1}{E_1} \quad (2.24b)$$

Sau khi đặt các nghiệm (2.17) vào các biểu thức (2.24) rồi đặt các biểu thức kết quả vào các điều kiện (2.22) và (2.23), ta nhận được các kết quả sau đây:

$$\bar{N}_{x0} + \lambda \nu \sigma_{0y} + \lambda \bar{E}_1 \frac{R_a}{R_h} \bar{W}_0 + \lambda G \Delta T = 0 \quad (2.25a)$$

$$\sigma_{0y} + \nu \bar{N}_{x0} - \frac{\bar{E}_1}{R_h} \bar{W}_0 - G \Delta T = 0 \quad (2.25b)$$

trong đó

$$\lambda = \frac{c}{E_1 + c}, \quad G = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} E \alpha dz, \quad \bar{E}_1 = \frac{E_1}{h} \quad (2.26)$$

Đại lượng λ là tham số độ cứng không thứ nguyên của ràng buộc cạnh theo phương tiếp tuyến, nhận giá trị trong khoảng $0 \leq \lambda \leq 1$, và sẽ được sử dụng để đo mức độ ràng buộc cạnh trong các kết quả số ở phần sau. Cụ thể, các giá trị $\lambda = 0$ (khi

$c = 0$), $\lambda = 1$ (khi $c \rightarrow \infty$) và $0 < \lambda < 1$ (khi $0 < c < \infty$) lần lượt biểu thị các trường hợp hai cạnh biên tựa di động, tựa cố định và có thể dịch chuyển một phần.

Giải hệ phương trình (2.25) đối với hai ẩn \bar{N}_{x0} và σ_{0y} , ta nhận được kết quả sau đây

$$\bar{N}_{x0} = -\lambda \bar{E}_1 \frac{\nu + R_a}{R_h(1 - \lambda \nu^2)} \bar{W}_0 - \lambda \frac{1 + \nu}{1 - \lambda \nu^2} G \Delta T \quad (2.27a)$$

$$\sigma_{0y} = \frac{\bar{E}_1}{R_h(1 - \lambda \nu^2)} (\lambda \nu R_a + 1) \bar{W}_0 + \frac{1 + \lambda \nu}{1 - \lambda \nu^2} G \Delta T \quad (2.27b)$$

Đặt \bar{N}_{x0} và σ_{0y} từ (2.27) vào các phương trình (2.20a,b) ta nhận được các biểu thức sau

$$q = g_{11} \bar{W}_0 + g_{21} \Delta T \quad (2.28a)$$

$$\bar{W}_0 = g_{12} - g_{22} \Delta T \quad (2.28b)$$

trong đó các hệ số g_{ij} ($i, j = 1, 2$) được cho trong biểu thức (A3) của phụ lục A.

Sau khi đặt \bar{W}_0 từ (2.28b) vào (2.28a) ta nhận được biểu thức sau đây

$$q = g_{11} g_{12} - (g_{11} g_{22} - g_{21}) \Delta T \quad (2.29)$$

Biểu thức (2.29) là biểu thức dạng đóng của tải vòng của vỏ trống FGM có lỗ rỗng với các cạnh biên bị ràng buộc đàn hồi đặt trong môi trường nhiệt (tồn tại trước) và chịu áp lực ngoài phân bố đều. Các tải tới hạn q_{cr} là giá trị nhỏ nhất trong số các tải vòng theo mode vòng m, n . Biểu thức (2.29) có thể được viết lại dưới dạng

$$\Delta T = \frac{g_{11} g_{12} - q}{g_{11} g_{22} - g_{21}}. \quad (2.30)$$

Biểu thức (2.30) biểu thị tải vòng của các vỏ trống FGM có lỗ rỗng với các cạnh biên bị ràng buộc đàn hồi chịu áp lực vuông góc với mặt giữa (tồn tại trước) và sau đó chịu nhiệt độ tăng đều. Do sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu, các tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} được xác định bằng cách cực tiểu hóa tải vòng theo mode vòng m, n và thực hiện một quá trình lặp theo mode vòng tới hạn. Các bước của quá trình lặp đã được mô tả chi tiết trong nhiều công trình trước đây, ví dụ [29,31], và để cho ngắn gọn, sẽ không được nêu cụ thể ở đây.

2.3.2. Vỏ trống với các cạnh tựa di động chịu các tải cơ kết hợp

Trong mục này luận án xét bài toán ổn định tuyến tính của vỏ trống FGM có lỗ rỗng với các cạnh tựa di động (tức là các cạnh có thể tự do di chuyển theo phương tiếp tuyến) và chịu các điều kiện tải cơ gồm nén dọc trục và kết hợp đồng thời giữa nén dọc trục và áp lực ngoài. Cụ thể, vỏ trống chịu nén dọc trục bởi áp lực nén có cường độ P phân bố đều trên hai cạnh biên tựa di động và chịu áp lực q phân bố đều vuông góc với mặt giữa của vỏ. Trong trường hợp này $N_{x0} = -Ph$ và ứng suất trung bình theo phương vĩ tuyến σ_{0y} xác định từ điều kiện đóng kín theo phương vĩ tuyến.

Bằng cách thay các nghiệm (2.17) vào (2.24b) và đặt biểu thức kết quả vào điều kiện (2.23), ta có thể thu được ứng suất trung bình theo phương vĩ tuyến như biểu thức (2.25b). Sau đó, đặt $\bar{N}_{x0} = -P$ và σ_{0y} từ (2.25b) vào hệ phương trình (2.20) ta nhận được hệ phương trình sau

$$P \frac{\nu + R_a}{R_h} + \frac{\bar{W}_0}{R_h^4} (\bar{E}_1 R_h^2 + K_1 E_m^0) - q + \frac{G}{R_h} \Delta T = 0 \quad (2.31a)$$

$$P (\nu n^2 L_R^2 + m^2 \pi^2) + n^2 L_R^2 \left(\frac{\bar{E}_1}{R_h} \bar{W}_0 + G \Delta T \right) - \frac{a_{21}}{1 + a_{11}} R_h^2 L_R^2 = 0 \quad (2.31b)$$

Khử \bar{W}_0 từ các phương trình (2.31) trên đây, ta thu được biểu thức sau đây

$$P = \frac{a_{22} - a_{32} \Delta T}{\gamma + a_{12}} \quad (2.32)$$

trong đó $\gamma = q/P$ là giá trị không thứ nguyên biểu thị tỷ số tải và a_{12}, a_{22}, a_{32} được cho trong công thức (A4) của phụ lục A. Biểu thức (2.32) là biểu thức của tải vòng của vỏ trống FGM có lỗ rỗng đặt trong một môi trường nhiệt độ chịu các giá trị nhỏ của áp lực ngoài tồn tại trước và sau đó chịu áp lực nén dọc trục. Trong trường hợp riêng, khi $\gamma = 0$, biểu thức này là tải vòng của vỏ trống chịu nén đều theo phương dọc trục trong môi trường nhiệt độ. Các giá trị tải tới hạn P_{cr} là giá trị nhỏ nhất trong số các tải vòng được chọn bằng cách cực tiểu P theo mode vòng m, n .

Biểu thức (2.32) có thể được viết lại dưới dạng sau đây

$$q = \frac{a_{22} - a_{32}\Delta T}{1 + \eta a_{12}} \quad (2.33)$$

trong đó $\eta = P/q$ là giá trị không thứ nguyên biểu thị tỷ số tải. Biểu thức (2.33) là tải vòng của vỏ trống FGM có lỗ rỗng đặt trong môi trường nhiệt độ chịu giá trị nhỏ của áp lực nén dọc trục tồn tại trước và sau đó chịu áp lực ngoài phân bố đều. Giá trị tải tới hạn q_{cr} nhận được bằng cách cực tiểu hóa các tải vòng theo mode vòng m, n .

2.4. Kết quả số và thảo luận

Phần này của luận án trình bày các kết quả số về phân tích vòng của các vỏ trống FGM có các lỗ rỗng chịu một số điều kiện tải cơ, nhiệt và kết hợp cơ-nhiệt. Vỏ trống được làm từ các vật liệu thành phần là silicon nitride (ceramic) và stainless steel (inox 304) lần lượt được ký hiệu là Si_3N_4 và $SUS304$. Các tính chất của các thành phần vật liệu này phụ thuộc vào nhiệt độ như sau [176]

$$P = P_0 (P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (2.34)$$

trong đó $T = T_0 + \Delta T$ với $T_0 = 300$ K (nhiệt độ phòng) và các hệ số P_{-1}, P_0, P_1, P_2 và P_3 là duy nhất đối với mỗi thành phần vật liệu. Các giá trị cụ thể của các hệ số này cho các vật liệu Si_3N_4 và $SUS304$ được cho trong công trình của Reddy và Chin [172] và được liệt kê trong bảng 2.1. Như hầu hết các nghiên cứu trước đây, luận án giả thiết hệ số Poisson của các thành phần vật liệu là $\nu = 0.28$ [27-33].

Bảng 2.1. Các tính chất phụ thuộc vào nhiệt độ của các vật liệu [172].

Vật liệu	Tính chất	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Si_3N_4	E_c (Pa)	$348.43e+9$	0	$-3.070e-4$	$2.160e-7$	$-8.946e-11$
	α_c (1/K)	$5.8723e-6$	0	$9.095e-4$	0	0
$SUS304$	E_m (Pa)	$201.04e+9$	0	$3.079e-4$	$-6.534e-7$	0
	α_m (1/K)	$12.330e-6$	0	$8.086e-4$	0	0

2.4.1. Các nghiên cứu so sánh

Trong phần này, luận án thực hiện một số nghiên cứu so sánh để kiểm chứng độ chính xác của cách tiếp cận mà luận án đề xuất. Như đã đề cập trong phần tổng

quan và phần đầu của chương hiện tại, theo hiểu biết của tác giả luận án, không có nghiên cứu nào đã công bố liên quan đến ổn định của vỏ trống FGM có lỗ rỗng với các cạnh biên chịu ràng buộc đàn hồi. Do đó, các so sánh trực tiếp là không thể thực hiện được. Để đánh giá độ tin cậy của cách tiếp cận đã sử dụng, luận án thực hiện một số so sánh cho các trường hợp riêng của mô hình kết cấu, vật liệu, điều kiện tải trọng và điều kiện biên. Cụ thể, các so sánh được tiến hành cho các vỏ trụ tròn (tức là trường hợp $a \rightarrow \infty$) làm từ FGM hoàn hảo (không có lỗ rỗng) với các trường hợp đặc biệt của ràng buộc cạnh biên (tựa di động hoặc tựa cố định) và không có nền đàn hồi bao quanh.

Nghiên cứu so sánh đầu tiên thực hiện cho bài toán ổn định tuyến tính của các vỏ trụ mỏng FGM hoàn hảo ($R/h = 500$, $\xi = 0$) có các cạnh tựa di động và chịu sự tác dụng riêng rẽ của áp lực nén dọc trục P_{cr} hoặc áp lực ngoài q_{cr} ở nhiệt độ phòng. Bảng 2.2 chỉ ra kết quả tính toán tải tới hạn sử dụng các biểu thức dạng đóng của luận án và so sánh với kết quả đã được đưa ra trong bài báo của Huang và ccs [18] sử dụng phương pháp năng lượng Ritz và phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên lý thuyết vỏ cổ điển CST. Để phù hợp với ký hiệu trong [18], trong bảng 2.2, N^* là chỉ số tỷ lệ thể tích trong trường hợp các vỏ trụ có mặt trong giàu ceramic và mặt ngoài giàu kim loại, tức là quy luật hàm lũy thừa cho thành phần ceramic $V_c = (1/2 + z/h)^{N^*}$. Có thể dễ nhận thấy từ bảng 2.2 rằng kết quả của luận án phù hợp rất tốt với các kết quả đã thu được theo một cách tiếp cận khác trong công trình [18].

Bảng 2.2. So sánh các tải tới hạn (MPa) của các vỏ trụ FGM hoàn hảo $Si_3N_4 / SUS304$ với các cạnh biên tựa di động [$R/h = 500, L/R = 2, T = 300$ K].

Tải tới hạn	Nguồn	N^*				
		0.2	0.5	1	2	5
Nén dọc trục P_{cr}	Huang và ccs [18]	361.612	337.604	316.294	297.745	279.521
	Luận án ^a	361.285	337.299	316.004	297.474	279.259
Áp lực ngoài q_{cr}	Huang và ccs [18]	0.0252	0.0235	0.0221	0.0209	0.0198
	Luận án ^b	0.0251	0.0234	0.0219	0.0208	0.0197

^a Mode vòng $(m, n) = (26, 2), (26, 3), (26, 2), (26, 1), (25, 6)$ lần lượt $N^* = 0.2, 0.5, 1, 2, 5$.

^b Mode vòng $(m, n) = (1, 9)$ đối với tất cả các giá trị N^* .

Nghiên cứu so sánh thứ hai xem xét ứng xử vòng của vỏ trụ dày FGM hoàn hảo ($R/h = 30$, $\xi = 0$) với các cạnh tựa di động chịu tải cơ kết hợp nén dọc trục và áp lực ngoài ở nhiệt độ phòng. Bài toán này cũng đã được nghiên cứu trong công trình của Shen và Noda [30] sử dụng phương pháp nghiệm nhiễu dựa trên HSDT. Bảng 2.3 chỉ ra sự so sánh giữa kết quả tính toán dựa trên các biểu thức tải tới hạn của luận án và kết quả đã được báo cáo trong [30]. Dễ nhận thấy từ bảng 2.3 rằng kết quả tải tới hạn thu được theo cách tiếp cận của luận án phù hợp rất tốt với kết quả tải tới hạn đã thu được theo cách tiếp cận được sử dụng bởi Shen và Noda [30].

Bảng 2.3. So sánh các tải tới hạn (P_{cr}, q_{cr}) (MPa) của các vỏ trụ dày FGM hoàn hảo $Si_3N_4 / SUS304$ với các cạnh tựa di động chịu tải kết hợp nén dọc trục và áp lực ngoài ($R/h = 30$, $L^2/Rh = 500$, $T = 300$ K).

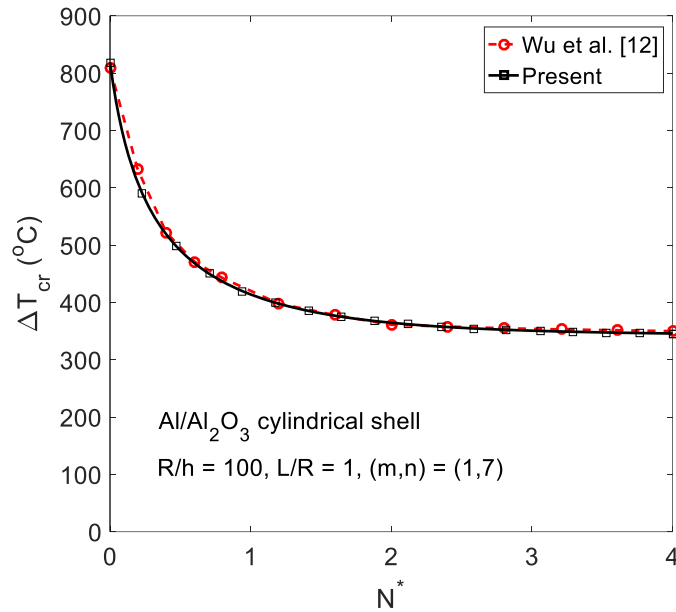
N	Nguồn	(P_{cr}, q_{cr}) (MPa)			
0.2	Ref. [30]	(4110.57, 0)	(3865.17, 2.577)	(1248.38, 8.323)	(0, 11.061)
	Luận án	(4510.5, 0) *	(3865.17, 2.578)	(1248.377, 8.323)	(0, 11.061)
1.0	Ref. [30]	(4735.33, 0)	(4420.00, 2.947)	(1427.56, 9.571)	(0, 12.648)
	Luận án	(5192.4, 0)	(4420.00, 2.949)	(1427.56, 9.530)	(0, 12.648)
2.0	Ref. [30]	(5018.19, 0)	(4654.40, 3.103)	(1503.25, 10.022)	(0, 13.319)
	Luận án	(5499.1, 0)	(4654.40, 3.105)	(1503.25, 10.022)	(0, 13.319)

* Mode vòng $(m, n) = (13, 1)$ với $q_{cr} = 0$ và $(m, n) = (1, 3)$ đối với các trường hợp khác.

Nghiên cứu so sánh thứ ba thực hiện cho bài toán vòng tuyến tính của các vỏ trụ mỏng FGM hoàn hảo ($R/h = 100$, $\xi = 0$) với các cạnh biên tựa cố định ($\lambda = 1$) chỉ chịu nhiệt độ tăng đều. Bài toán này cũng đã được xem xét trong nghiên cứu của Wu và ccs [12] sử dụng tiêu chuẩn cân bằng lân cận và dạng tách biệt (uncoupled form) của phương trình ổn định tuyến tính dựa trên lý thuyết vỏ mỏng cổ điển CST. Trong khuôn khổ nghiên cứu so sánh này, vỏ trụ được làm từ nhôm (Al) và oxit nhôm (Al_2O_3) với các tính chất vật liệu không phụ thuộc vào nhiệt độ. Cụ thể, các tính chất vật liệu này là [11,12] $E_m = 70$ GPa, $\alpha_m = 23 \times 10^{-6}$ ($1/^\circ C$), $\nu_m = 0.3$ cho nhôm và $E_c = 380$ GPa, $\alpha_c = 7.4 \times 10^{-6}$ ($1/^\circ C$), $\nu_c = 0.3$ cho oxit nhôm. Các tải nhiệt

tới hạn được tính toán theo biểu thức dạng đóng (2.30) của luận án và được so sánh trong hình 2.4 với kết quả của Wu và ccs [12].

Tương tự như nghiên cứu so sánh thứ nhất, trong hình 2.4, N^* là chỉ số tỷ lệ thể tích trong trường hợp vỏ trụ FGM có mặt trong giàu ceramic và mặt ngoài giàu kim loại, tức là $V_c = (1/2 + z/h)^{N^*}$. Một lần nữa có thể dễ thấy từ hình 2.4 rằng một sự phù hợp rất tốt đạt được trong nghiên cứu so sánh này.



Hình 2.4. So sánh tải nhiệt tới hạn của vỏ trụ Al/Al_2O_3 với các cạnh tựa cố định chịu nhiệt đều.

Trong phần tiếp sau đây, các ví dụ số để phân tích các ảnh hưởng khác nhau lên sự ổn định tuyến tính của các vỏ trống FGM làm từ Si_3N_4 và $SUS304$ có các lỗ rỗng chịu các tải cơ, nhiệt và cơ-nhiệt sẽ được thực hiện. Một vài ví dụ số cho các vỏ trụ dày và mỏng làm từ FGM có và không có lỗ rỗng cũng được giới thiệu như các trường hợp riêng của mô hình vật liệu và kết cấu được xét trong chương này. Trong các khảo sát số, mức độ ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên sẽ được đo bằng giá trị của tham số không thứ nguyên λ mà có biểu thức định nghĩa trong (2.26) và ảnh hưởng của nền đàn hồi bao quanh sẽ được đánh giá bằng các tham số độ cứng không thứ nguyên K_1, K_2 mà có biểu thức định nghĩa trong (2.21). Sự phụ thuộc vào nhiệt độ (temperature dependence) của các tính chất vật liệu sẽ được đề cập đến một cách ngắn gọn là T-D. Trong một số trường hợp, để làm nổi bật sự khác biệt, các kết quả tính toán cho trường hợp các tính chất vật liệu không phụ thuộc vào nhiệt độ (temperature independence), sau đây được đề cập ngắn gọn là T-ID, cũng sẽ được trình bày. Để cho việc diễn đạt được ngắn gọn, nếu không có lưu ý gì thêm, các vỏ FGM được giả thiết không có tương tác với nền đàn hồi ($K_1 = K_2 = 0$), các cạnh vỏ tựa cố định ($\lambda = 1$) khi vỏ chỉ chịu nhiệt độ tăng đều và có các tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ (T-D).

2.4.2. Vỏ trống FGM có lỗ rỗng với các cạnh tựa di động chịu tải cơ

Phần này giới thiệu một số kết quả số cho bài toán vòng tuyến tính của các vỏ trụ và vỏ trống với các cạnh biên tựa di động (movable edges) làm từ FGM có lỗ rỗng và chịu một số điều kiện tải cơ trong môi trường nhiệt độ. Các tải tới hạn của các vỏ trụ và vỏ trống FGM có lỗ rỗng chịu các tải cơ riêng rẽ như nén dọc trục hoặc áp lực ngoài trong môi trường nhiệt độ được cho dưới dạng các bảng.

Bảng 2.4. Các tải tới hạn P_{cr} (MPa) của các vỏ trụ mỏng $Si_3N_4 / SUS304$ chịu nén dọc trục trong các môi trường nhiệt độ [$R/h=100$, $L^2/Rh=300$, $R/a=0$, $(K_1, K_2) = (0,0)$, $m=1$].

T (K)	Phân bố lỗ rỗng	N				
		0	0.5	1	2	5
300	Hoàn hảo ($\xi = 0$)	1244 (2) ⁱ	1477 (1)	1574 (2)	1667 (2)	1769 (3)
	Đều ($\xi = 0.1$)	1085 (2)	1317 (1)	1414 (2)	1507 (3)	1609 (3)
	Không đều ($\xi = 0.1$)	1184 (1)	1416 (1)	1514 (1)	1607 (2)	1709 (2)
400	Hoàn hảo ($\xi = 0$)	1226 (2)	1452 (1)	1546 (2)	1636 (2)	1734 (3)
	Đều ($\xi = 0.1$)	1070 (2)	1295 (1)	1389 (2)	1479 (3)	1578 (3)
	Không đều ($\xi = 0.1$)	1167 (1)	1392 (1)	1487 (1)	1577 (2)	1676 (2)
500	Hoàn hảo ($\xi = 0$)	1192 (2)	1418 (1)	1512 (2)	1601 (2)	1700 (3)
	Đều ($\xi = 0.1$)	1040 (2)	1264 (1)	1358 (2)	1447 (3)	1547 (3)
	Không đều ($\xi = 0.1$)	1135 (1)	1359 (1)	1454 (1)	1543 (2)	1643 (2)

ⁱ Các số trong các ngoặc đơn chỉ số sóng theo phương vòng n .

Bảng 2.4 khảo sát ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích N , nhiệt độ môi trường T và kiểu phân bố lỗ rỗng lên các tải tới hạn của vỏ trụ mỏng FGM ($R/h=100$) chịu nén dọc trục. Có thể nhận thấy rằng các tải tới hạn được tăng đáng kể và bị giảm nhẹ khi lần lượt N và T được tăng lên. Hơn nữa, tải tới hạn bị giảm đi đáng kể khi trong FGM có các lỗ rỗng ($\xi = 0.1$ trong ví dụ này), trong đó kiểu phân bố đều của các lỗ rỗng có ảnh hưởng tiêu cực hơn lên khả năng kháng vòng của các vỏ trụ FGM. Ví dụ, với trường hợp $N = 1$ và $T = 400K$, tải nén tới hạn của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng

giảm so với tải nén tới hạn của vỏ trụ FGM hoàn hảo ($\xi = 0$) lần lượt 11.3% và 3.96% khi các lỗ rỗng được phân bố đều và không đều trong FGM.

Bảng 2.5. Các tải tới hạn P_{cr} (MPa) của các vỏ FGM $Si_3N_4 / SUS304$ tương đối dày có lỗ rỗng chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt độ ($N = 1$, $R/h = 30$, $L^2/Rh = 300$, $T = 400K$, lỗ rỗng phân bố đều).

R/a	(K_1, K_2)	ξ			
		0	0.1	0.2	0.3
-0.01	(0,0)	4326.7 (1,3) *	3886.3 (1,3)	3445.0 (1,3)	3002.2 (1,3)
	(50,0)	5213.6 (10,2)	4695.3 (10,2)	4175.9 (10,2)	3654.9 (10,2)
	(50,1)	5449.4 (10,1)	4931.5 (10,1)	4412.5 (10,1)	3892.1 (10,1)
0	(0,0)	5101.1 (10,1)	4583.0 (10,1)	4063.9 (10,1)	3543.4 (10,1)
	(50,0)	5217.3 (10,1)	4698.9 (10,2)	4179.1 (10,2)	3657.7 (10,2)
	(50,1)	5450.4 (10,1)	4932.4 (10,1)	4413.4 (10,1)	3892.8 (10,1)
0.05	(0,0)	5106.3 (10,1)	4587.7 (10,1)	4068.1 (10,1)	3547.0 (10,1)
	(50,0)	5222.4 (10,1)	4703.9 (10,1)	4184.3 (10,1)	3663.2 (10,1)
	(50,1)	5455.7 (10,1)	4937.2 (10,1)	4417.6 (10,1)	3896.5 (10,1)
0.1	(0,0)	5111.5 (10,1)	4592.4 (10,1)	4072.3 (10,1)	3550.6 (10,1)
	(50,0)	5227.6 (10,1)	4708.5 (10,1)	4188.4 (10,1)	3666.8 (10,1)
	(50,1)	5461.0 (10,1)	4941.9 (10,1)	4421.8 (10,1)	3900.2 (10,1)

* Các chữ số trong các ngoặc đơn chỉ mode vòng (m, n).

Tiếp theo, các ảnh hưởng của tỷ số độ cong R/a , tỷ lệ phần trăm ξ của các lỗ rỗng và các tham số độ cứng không thứ nguyên K_1, K_2 của môi trường đàn hồi bao quanh lên tải nén tới hạn của các vỏ trống và vỏ trụ FGM tương đối dày ($N = 1$, $R/h = 30$) chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt ($T = 400K$) được phân tích trong bảng 2.5. Các số liệu trong bảng này chỉ ra rằng tải tới hạn bị giảm khi tỷ lệ phần trăm các lỗ rỗng tăng lên. Ngược lại, sự có mặt của môi trường đàn hồi bao quanh giúp cải thiện khả năng kháng vòng của vỏ FGM có lỗ rỗng và các tải tới hạn được tăng lên khi các tham số độ cứng của môi trường đàn hồi tăng lên. Thêm vào đó, các tải tới hạn tăng mạnh khi tỷ số R/a tăng từ -0.01 đến 0 và tăng rất nhẹ khi

R/a tăng từ 0 đến 0.1. Nói khác đi, tải nén tới hạn của vỏ trụ cao hơn đáng kể so với tải nén tới hạn của vỏ trống lõm và thấp hơn rất ít so với tải tới hạn của vỏ trống lồi.

Bảng 2.6 đánh giá các ảnh hưởng của tỷ số hình học L^2/Rh , chỉ số tỷ lệ thể tích N và loại phân bố lỗ rỗng lên tải tới hạn của vỏ trụ mỏng FGM chịu áp lực ngoài. Như có thể thấy, sự tăng lên của L^2/Rh và N lần lượt dẫn đến sự giảm và tăng rõ rệt của tải tới hạn. Tải áp lực tới hạn của vỏ trụ có lỗ rỗng ($\xi = 0.1$) nhỏ hơn rõ rệt so với tải tới hạn của vỏ trụ hoàn hảo. Hơn nữa, khả năng kháng vòng của vỏ trụ FGM trở nên yếu hơn khi các lỗ rỗng phân bố đều trong FGM.

Bảng 2.6. Các tải tới hạn q_{cr} (MPa) của các vỏ trụ mỏng $Si_3N_4/SUS304$ có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài [$R/h = 100$, $T = 300\text{K}$, $R/a = 0$, $(K_1, K_2) = (0, 0)$].

L^2/Rh	Phân bố lỗ rỗng	N				
		0	0.5	1	2	5
300	Hoàn hảo ($\xi = 0$)	1.2095	1.4375	1.5267	1.6032*	1.6947*
	Đều ($\xi = 0.1$)	1.0552	1.2819	1.3707	1.4463*	1.5389*
	Không đều ($\xi = 0.1$)	1.1580	1.3853	1.4744	1.5571	1.6501*
400	Hoàn hảo ($\xi = 0$)	1.0089	1.1998	1.2716	1.3370	1.4148
	Đều ($\xi = 0.1$)	0.8802	1.0699	1.1412	1.2068	1.2855
	Không đều ($\xi = 0.1$)	0.9691	1.1595	1.2310	1.2965	1.3747
500	Hoàn hảo ($\xi = 0$)	0.9078	1.0800	1.1429	1.1997	1.2687
	Đều ($\xi = 0.1$)	0.7920	0.9629	1.0255	1.0825	1.1522
	Không đều ($\xi = 0.1$)	0.8738	1.0454	1.1082	1.1651	1.2344

* Mode vòng $(m, n) = (1, 7)$, các trường hợp khác $(m, n) = (1, 6)$.

Các ảnh hưởng của tỷ số độ cong R/a , tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng ξ và môi trường đàn hồi loại Winkler lên các tải tới hạn của vỏ trống và vỏ trụ tương đối dày FGM ($N = 1$, $R/h = 30$) chịu áp lực ngoài được khảo sát trong bảng 2.7. Rõ ràng là sự có mặt của các lỗ rỗng làm cho khả năng kháng áp lực ngoài của vỏ trở nên kém hơn. Ngược lại, sự có mặt của môi trường đàn hồi làm tăng đáng kể áp lực ngoài tới hạn. Khác với trường hợp vỏ chịu nén dọc trục, sự tăng lên của tỷ số độ cong R/a dẫn đến sự cải thiện rõ rệt khả năng kháng vòng của vỏ chịu áp lực ngoài. Cụ thể, áp

lực tới hạn của vỏ trụ tròn lần lượt cao hơn và thấp hơn đáng kể so với các áp lực tới hạn của các vỏ trống lõm và lồi.

Bảng 2.7. Các tải tới hạn q_{cr} (MPa) của các vỏ tương đối dày $Si_3N_4 / SUS304$ có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài trong một môi trường nhiệt ($N = 1$, $R/h = 30$, $L^2/Rh = 300$, $T = 400K$, các lỗ rỗng phân bố không đều).

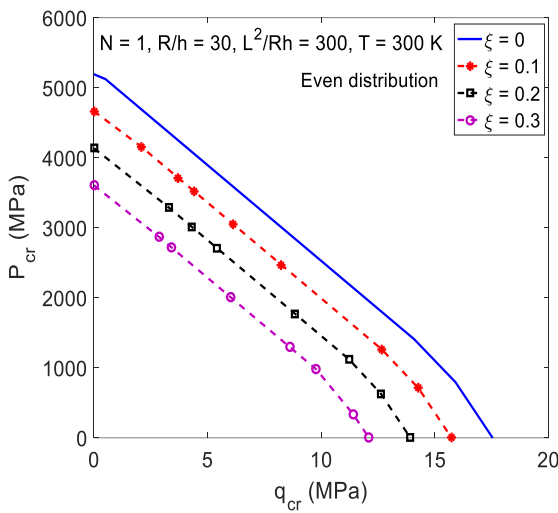
R/a	(K_1, K_2)	ξ			
		0	0.1	0.2	0.3
-0.1	(0,0)	9.5565 (1,3)	9.3033 (1,3)	9.0491 (1,3)	8.7938 (1,3)
	(5,0)	13.8476 (1,3)	13.5988 (1,3)	13.3492 (1,3)	13.0986 (1,3)
-0.05	(0,0)	12.2697 (1,3)	11.8808 (1,3)	11.4910 (1,3)	11.1000 (1,3)
	(5,0)	16.5728 (1,3)	16.1884 (1,3)	15.8031 (1,3)	15.4168 (1,3)
0	(0,0)	17.2305 (1,4)	16.7325 (1,4)	16.2327 (1,4)	15.7309 (1,4)
	(5,0)	19.6769 (1,4)	19.1835 (1,4)	18.6885 (1,4)	18.1917 (1,4)
0.05	(0,0)	21.4000 (1,4)	20.6935 (1,4)	19.9852 (1,4)	19.2750 (1,4)
	(5,0)	23.8649 (1,4)	23.1630 (1,4)	22.4595 (1,4)	21.7542 (1,4)
0.1	(0,0)	27.9744 (1,4)	26.9391 (1,4)	25.9022 (1,4)	24.8632 (1,4)
	(5,0)	30.4684 (1,4)	29.4378 (1,4)	28.4056 (1,4)	27.3716 (1,4)

Các số trong ngoặc đơn chỉ mode vòng (m, n).

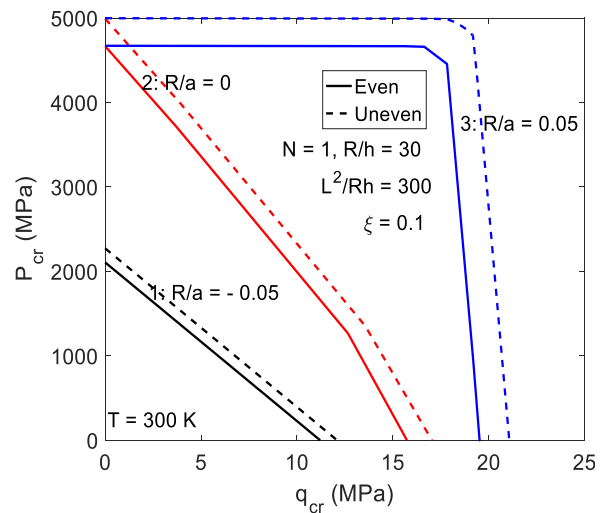
Trong phần tiếp sau đây, ứng xử sau vòng của vỏ dày và tương đối dày FGM có lỗ rỗng chịu tác dụng đồng thời của áp lực nén dọc trục và áp lực ngoài, sau đây gọi tắt là tải cơ kết hợp, trong các môi trường nhiệt độ sẽ được phân tích dưới dạng các hình vẽ. Vấn đề cốt lõi trong phân tích vòng của vỏ chịu tải cơ kết hợp là xác định đường tương tác vòng, tức là các đường vạch nên ranh giới của miền ổn định.

Hình 2.5 phân tích ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng ξ lên miền ổn định của vỏ trụ dày FGM ($N = 1$, $R/h = 30$) có các lỗ rỗng phân bố đều chịu tải cơ kết hợp. Hình này chỉ ra rằng sự có mặt của các lỗ rỗng làm cho sự ổn định của vỏ trụ FGM giảm so với vỏ FGM hoàn hảo và miền ổn định của vỏ bị thu hẹp đáng kể khi tỷ lệ các lỗ rỗng tăng lên. Thêm vào đó, dạng của đường tương tác vòng gần như không đổi khi ξ thay đổi. Khác với điều này, như được chỉ ra trong hình 2.6, dạng của đường tương tác vòng thay đổi nhiều khi tỷ số các bán kính cong R/a thay đổi.

Cụ thể, đường tương tác vòng của vỏ trống lõm ($R/a = -0.05$) gần như là đường thẳng (tức là miền ổn định gần như hình tam giác) và miền ổn định mở rộng nhanh chóng, phát triển mạnh về phía tải nén tới hạn cao, khi vỏ tiệm cận hình dẹt trụ ($R/a = 0$). Sau đó miền ổn định được mở rộng, đặc biệt là về phía áp lực ngoài cao, khi tỷ số R/a tăng từ 0 đến 0.05. Hình 2.6 cũng chỉ ra rằng, trong số hai kiểu phân bố lỗ rỗng, miền ổn định của vỏ rộng hơn (vỏ ổn định hơn) khi các lỗ rỗng phân bố không đều trong FGM.

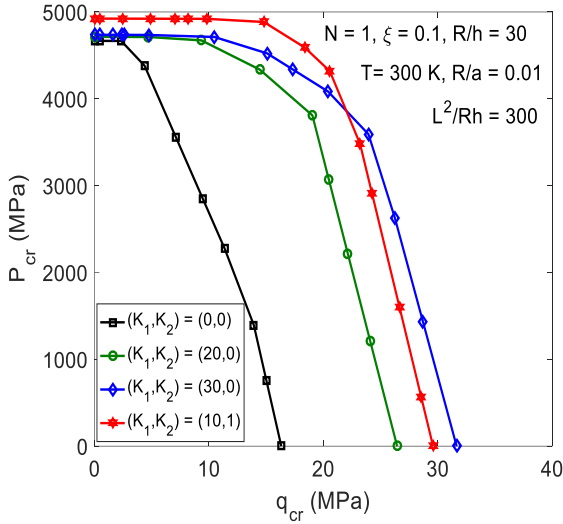


Hình 2.5. Ảnh hưởng của tỷ lệ lỗ rỗng lên miền ổn định của vỏ trụ FGM chịu tải cơ kết hợp.

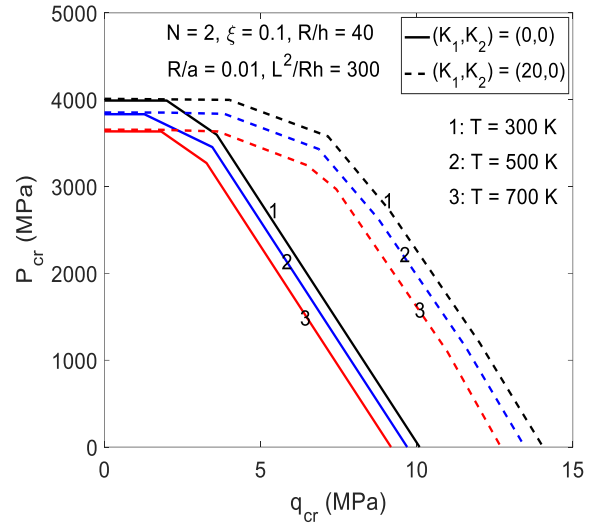


Hình 2.6. Ảnh hưởng của độ cong Gauss lên miền ổn định của vỏ FGM có lỗ rỗng chịu tải cơ kết hợp.

Các ảnh hưởng của nền đàn hồi bao quanh và nhiệt độ môi trường lên miền ổn định của các vỏ gần như trụ (nearly cylindrical shells) FGM có các lỗ rỗng ($N = 1$, $R/a = 0.01$, $\xi = 0.1$) phân bố đều và không đều được lần lượt khảo sát trên các hình 2.7 và 2.8. Sự quan sát các hình 2.7 và 2.8 dẫn đến nhận xét rằng các môi trường đàn hồi bao quanh có ảnh hưởng tích cực lên sự ổn định của vỏ chịu tải cơ kết hợp. Cụ thể hơn, miền ổn định được mở rộng hơn về phía các trục tải áp lực ngoài và tải nén dọc trục khi lần lượt các tham số độ cứng K_1 và K_2 được tăng lên. Điều này chứng tỏ rằng lớp đàn hồi Winkler và lớp trượt Pasternak lần lượt có ảnh hưởng rõ rệt hơn lên khả năng kháng áp lực ngoài và áp lực nén dọc trục của vỏ. Hình 2.8 chỉ ra rằng mặc dù các miền ổn định bị thu hẹp lại (các vỏ kém ổn định hơn) khi nhiệt độ môi trường tăng lên nhưng dạng (shape) của đường tương tác vòng gần như không đổi khi nhiệt độ T thay đổi.

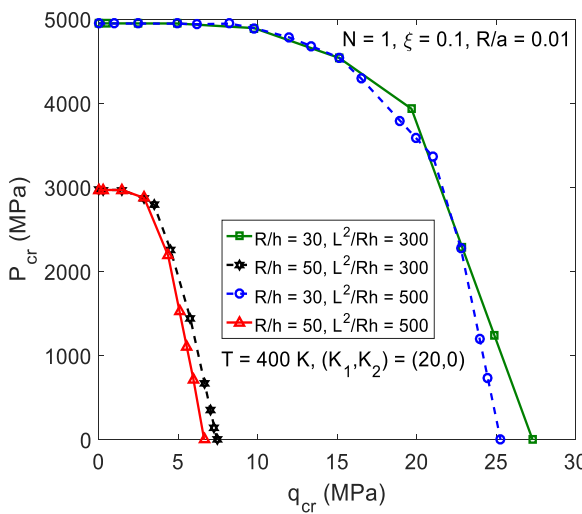


Hình 2.7. Ảnh hưởng của môi trường đàn hồi lên miền ổn định của vỏ gần như trụ FGM có các lỗ rỗng phân bố đều.

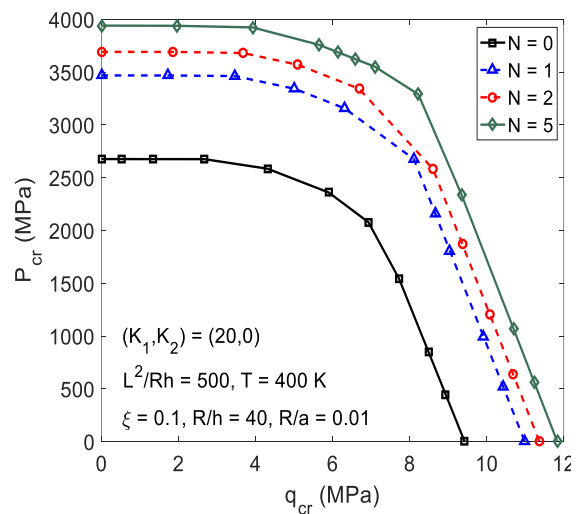


Hình 2.8. Ảnh hưởng của môi trường nhiệt lên miền ổn định của vỏ gần như trụ FGM có lỗ rỗng phân bố không đều.

Ảnh hưởng của các tỷ số hình học R/h , L^2/Rh và chỉ số tỷ lệ thể tích N lên miền ổn định của các vỏ gần như trụ ($R/a = 0.01$) FGM có lỗ rỗng ($\xi = 0.1$) được bao quanh bởi nền đàn hồi Winkler ($K_1 = 20, K_2 = 0$), đặt trong môi trường nhiệt độ ($T = 400K$) với các lỗ rỗng phân bố không đều và đều lần lượt được đánh giá trong các hình 2.9 và 2.10. Hình 2.9 chỉ ra rằng miền ổn định trở nên hẹp hơn rất nhiều khi tỷ số R/h lớn hơn (vỏ mỏng hơn), trong khi đó tỷ số L^2/Rh chỉ ảnh hưởng làm hẹp miền ổn định trong miền áp lực ngoài lớn hơn.



Hình 2.9. Ảnh hưởng của các tính chất hình học lên miền ổn định của vỏ gần trụ FGM với các lỗ rỗng phân bố không đều.



Hình 2.10. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích lên miền ổn định của vỏ gần trụ FGM với các lỗ rỗng phân bố đều.

Hình 2.10 chỉ ra rằng miền ổn định của vỏ trở nên rộng hơn đáng kể khi chỉ số tỷ lệ thể tích N tăng từ 0 (vỏ thuần túy kim loại) đến khoảng 1, sau đó miền ổn định được mở rộng một cách chậm hơn khi chỉ số N được tăng lên.

2.4.3. Vỏ trống FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài và/hoặc nhiệt độ

Trong mục này, luận án giới thiệu các kết quả số cho bài toán ổn định tuyến tính của các vỏ trụ và vỏ trống FGM làm từ $Si_3N_4 / SUS304$ có lỗ rỗng với các cạnh chịu ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến chịu áp lực ngoài và/hoặc nhiệt độ tăng đều.

Trong phần đầu của mục này, các ảnh hưởng của một số yếu tố khác nhau lên tải tới hạn của vỏ trống FGM có lỗ rỗng với các cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển đặt trong môi trường nhiệt độ (tồn tại trước) và chịu áp lực ngoài được phân tích trong bảng 2.8 và các hình 2.11 – 2.13.

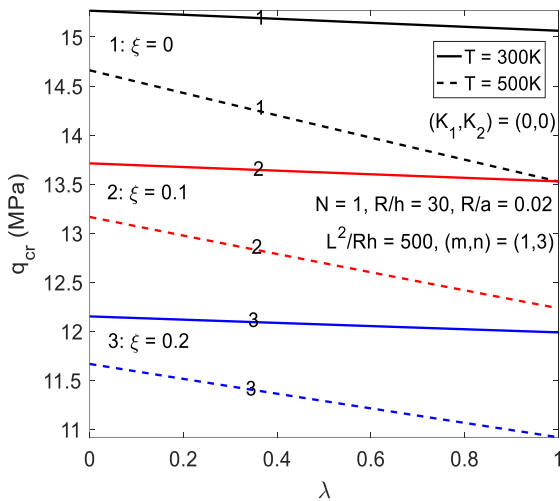
Bảng 2.8. Ảnh hưởng của tham số λ lên các tải tới hạn q_{cr} (MPa) của các vỏ trống rất thoải FGM có các lỗ rỗng phân bố đều chịu áp lực ngoài [$R/h = 30, R/a = 0.02, N = 1, \xi = 0.1, (K_1, K_2) = (0, 0), m = 1$].

T (K)	λ	L^2 / Rh				
		100	200	300	400	500
300	0	29.1683	20.1558	16.9994	15.6466	13.7116
	0.5	28.7463	19.9401	16.8943	15.5855	13.6186
	1	28.3410	19.7314	16.7917	15.5257	13.5278
500	0	28.0038	19.3517	16.3207	15.0218	13.1651
	0.5	26.7845	18.5423	15.8722	14.7436	12.6940
	1	25.6132	17.7591	15.4342	14.4707	12.2345
700	0	26.2564	18.1545	15.3026	14.0806	12.3627
	0.5	24.1671	16.6959	14.4781	13.5647	11.4773
	1	22.1603	15.2844	13.6729	12.1359	10.6138

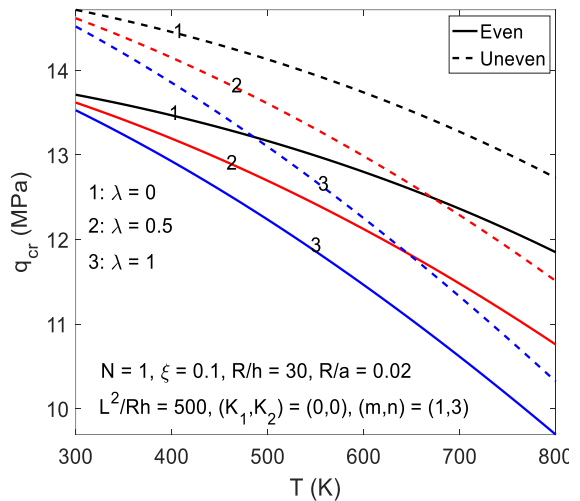
Mode vòng $n = 5, 4, 4, 4$ và 3 lần lượt đối với $L^2 / Rh = 100, 200, 300, 400$ và 500.

Bảng 2.8 khảo sát các ảnh hưởng của nhiệt độ môi trường T , mức độ ràng buộc dịch chuyển λ và tỷ số hình học L^2 / Rh lên các tải tới hạn q_{cr} của các vỏ trống

thoải FGM có lỗ rỗng phân bố đều ($N = 1, R/a = 0.02, \xi = 0.1$) chịu áp lực ngoài. Như có thể thấy, các áp lực tới hạn bị giảm khi tỷ số L^2/Rh lớn hơn (vỏ dài hơn), nhiệt độ môi trường cao hơn và/hoặc tham số λ lớn hơn (các cạnh biên bị ràng buộc chặt chẽ hơn). Cụ thể, sự ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên dẫn đến sự giảm nhẹ và giảm mạnh của tải áp lực tới hạn lần lượt ở nhiệt độ phòng ($T = 300\text{K}$) và nhiệt độ cao ($T > 300\text{K}$). Ví dụ, với $L^2/Rh = 200$ tải áp lực tới hạn của vỏ với các cạnh biên tựa cố định ($\lambda = 1$) thấp hơn so với áp lực tới hạn của vỏ với các cạnh biên tựa di động ($\lambda = 0$) khoảng 2.17%, 8.96% và 18.78% lần lượt ở các mức nhiệt $T = 300\text{K}$, $T = 500\text{K}$ và $T = 700\text{K}$. Điều này cũng có thể được quan sát rõ hơn trong các hình 2.11 và 2.12.



Hình 2.11. Ảnh hưởng của lỗ rỗng phân bố đều, nhiệt độ và ràng buộc cạnh biên lên áp lực ngoài tới hạn của vỏ FGM.

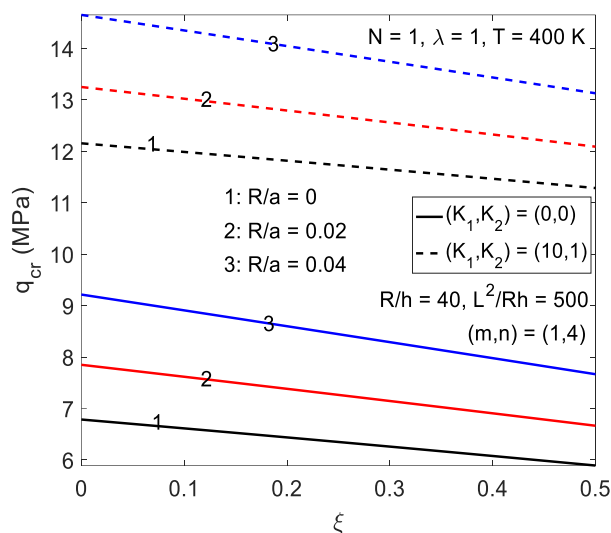


Hình 2.12. Ảnh hưởng của loại phân bố lỗ rỗng, nhiệt độ và ràng buộc cạnh lên áp lực ngoài tới hạn của vỏ FGM.

Hình 2.11 cũng chỉ ra rằng các lỗ rỗng có ảnh hưởng tiêu cực lên khả năng kháng vòng của vỏ FGM chịu áp lực ngoài và tải áp lực tới hạn bị giảm rõ rệt khi tỷ lệ các lỗ rỗng cao hơn. Hơn nữa, một nhận xét thú vị có thể nhận thấy từ hình 2.11 đó là mặc dù cả lỗ rỗng và nhiệt độ cao đều có tác hại đối với sự ổn định của vỏ FGM chịu áp lực ngoài nhưng ảnh hưởng tiêu cực của nhiệt độ cao có xu hướng giảm khi tỷ lệ các lỗ rỗng cao hơn. Hình 2.12, được vẽ với các giá trị khác nhau của nhiệt độ T , tham số ràng buộc λ và hai loại phân bố lỗ rỗng, chứng tỏ rằng tải tới hạn trở nên nhỏ hơn khi các lỗ rỗng phân bố đều (Even) trong FGM và sự ràng buộc các cạnh biên làm cho áp lực tới hạn bị giảm sâu hơn khi nhiệt độ môi trường trở nên cao hơn.

Dường như hợp lực nén (bị động) ở các cạnh biên bị ràng buộc trở nên lớn hơn khi mức độ ràng buộc chặt chẽ hơn và nhiệt độ cao hơn và hợp lực này gây nên ứng suất trước làm cho vỏ mất ổn định sớm hơn.

Hình 2.13 đánh giá các ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng, tỷ số R/a và nền đàn hồi loại Pasternak lên các tải tới hạn của các vỏ trống rất thoải FGM có các lỗ rỗng phân bố không đều, với các cạnh tựa cố định ($\lambda = 1$) đặt trong môi trường nhiệt ($T = 400\text{K}$) và chịu áp lực ngoài. Như có thể thấy, sự tăng lên của tỷ lệ các lỗ rỗng và sự có mặt của nền đàn hồi loại Pasternak lần lượt có ảnh hưởng bất lợi và có lợi lên khả năng kháng vòng của vỏ FGM chịu áp lực ngoài. Một lần nữa có thể nhận thấy ưu điểm vượt trội của vỏ trống so với vỏ trụ trong việc chống chịu áp lực ngoài khi tải áp lực tới hạn được tăng lên đáng kể bởi việc tăng chỉ vài phần trăm của tỷ số bán kính R/a .



Hình 2.13. Ảnh hưởng của tỷ lệ lỗ rỗng và nền đàn hồi lên áp lực tới hạn của vỏ FGM có lỗ rỗng phân bố không đều trong môi trường nhiệt.

Trong phần còn lại của mục này, ứng xử vòng của vỏ trống FGM có các lỗ rỗng với các cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển chịu áp lực vuông góc với mặt giữa (tồn tại trước) và sau đó chịu nhiệt độ tăng đều được phân tích trong các bảng 2.9 – 2.11 và các hình 2.14, 2.15. Vì chưa có nghiên cứu nào trước đây về ổn định của vỏ trống FGM hoàn hảo với các cạnh bị ràng buộc chịu nhiệt độ tăng đều nên các bảng 2.9 và 2.10 lần lượt trình bày các kết quả tính toán tải nhiệt tới hạn cho các vỏ trống tương đối mỏng ($R/h = 100$) và tương đối dày ($R/h = 50$) làm từ $Si_3N_4 / SUS304$ không có lỗ rỗng ($N = 2, \xi = 0$) với các cạnh biên bị ràng buộc ($0 < \lambda \leq 1$) chịu nhiệt độ tăng đều. Các số liệu tính toán trong các bảng này cho thấy rằng tải nhiệt tới hạn bị giảm đi nhanh chóng khi các cạnh biên bị ràng buộc khắt khe hơn. Ví dụ với vỏ trống có $R/h = 100$, $R/a = 0.02$ và trường hợp T-D, các tải tới hạn giảm tới 48.1% khi tham số λ tăng từ 0.6 (dịch chuyển một phần) đến 1 (không thể dịch chuyển).

Bảng 2.9. Tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các vỏ trống mỏng FGM hoàn hảo chỉ chịu nhiệt độ tăng đều [$N = 2, \xi = 0, R/h = 100, L^2/Rh = 400, (K_1, K_2) = (0, 0)$].

Tính chất	R/a	λ				
		0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
T-ID	-0.04	437.2	373.9	326.5	289.6	260.1
	-0.02	650.9	557.4	487.2	432.6	388.9
	0	997.2	854.7	747.9	664.8	598.3
	0.02	1025.0	879.6	770.5	685.7	617.8
	0.04	1054.2	905.7	794.4	707.8	638.5
T-D	-0.04	351.6	308.2	274.5	247.3	225.2
	-0.02	487.1	429.9	385.0	348.7	318.8
	0	678.1	603.2	543.8	495.6	455.5
	0.02	692.1	616.5	556.6	507.9	467.3
	0.04	706.7	630.4	569.9	520.7	479.8

$(m, n) = (1, 5), (1, 5), (11, 5), (12, 1), (12, 1)$ lần lượt khi $R/a = -0.04, -0.02, 0, 0.02, 0.04$.

Bảng 2.10. Tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các vỏ trống tương đối dày FGM hoàn hảo chỉ chịu nhiệt độ tăng đều [$N = 2, \xi = 0, R/h = 50, L^2/Rh = 400, (K_1, K_2) = (0, 0)$].

Tính chất	R/a	λ				
		0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
T-ID	-0.04	988.2	845.2	738.0	654.6	587.9
	-0.02	1395.5	1194.8	1044.3	927.3	833.6
	0	1985.7	1702.0	1489.3	1323.8	1191.4
	0.02	2040.8	1751.2	1534.1	1365.2	1230.1
	0.04	2099.1	1803.5	1581.8	1409.4	1271.4
T-D	-0.04	666.4	593.5	535.0	487.3	447.5
	-0.02	853.0	766.5	696.1	637.6	588.5
	0	1092.5	991.0	905.9	834.2	773.3
	0.02	1110.6	1009.7	924.5	852.5	791.5
	0.04	1129.1	1029.0	943.9	871.8	810.4

$(m, n) = (1, 4), (1, 4), (12, 1), (12, 1), (12, 1)$ lần lượt khi $R/a = -0.04, -0.02, 0, 0.02, 0.04$.

Ảnh hưởng tiêu cực của nhiệt độ cao lên các tính chất vật liệu nên được tính đến để các dự đoán tải tới hạn chính xác hơn, đặc biệt là đối với các vỏ dày hơn. Ví dụ, trong trường hợp $R/a = 0.02$ và $\lambda = 1$, tải nhiệt tới hạn ứng với trường hợp T-D nhỏ hơn so với trường hợp T-ID khoảng 32.2% và 55.5% lần lượt khi $R/h = 100$ và $R/h = 50$. Không giống như trường hợp vỏ chịu áp lực ngoài (xem hình 2.13), nhiệt độ tới hạn của vỏ trống lõi chỉ hơi cao hơn so với vỏ trụ. Ví dụ, đối với trường hợp $R/h = 100$, $\lambda = 1$ và T-D, tải nhiệt tới hạn của vỏ trống với $R/a = 0.04$ chỉ cao hơn khoảng 5.27% so với vỏ trụ ($R/a = 0$).

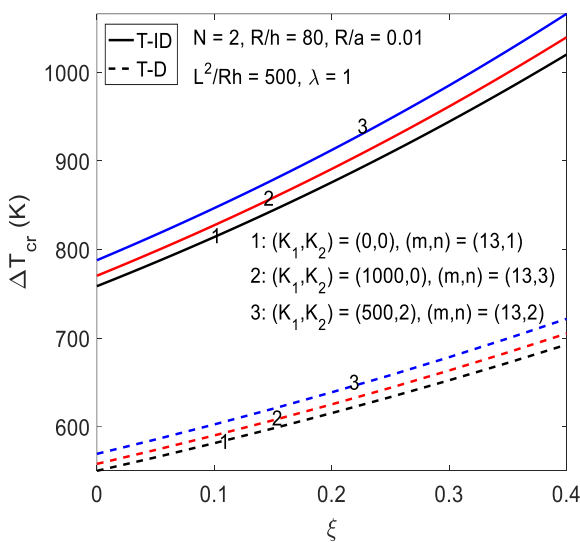
Bảng 2.11. Tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các vỏ trống rất thoải FGM có lỗ rỗng và áp lực ngoài tác dụng trước q (MPa) chịu nhiệt độ tăng đều [$N = 2, \xi = 0.1, R/h = 60, R/a = 0.01, \lambda = 1$, các tính chất T-D, $(K_1, K_2) = (0, 0)$].

Phân bố	q	L^2 / Rh				
		100	200	300	400	500
Even	0	750.3 (6,1)	751.2 (8,3)	750.9 (10,2)	750.3 (12,1)	751.2 (13,1)
	2	633.5 (1,6)	559.3 (1,5)	524.8 (1,5)	496.5 (1,4)	424.8 (1,4)
	3	528.3 (1,6)	407.5 (1,5)	294.6 (1,5)	211.8 (1,5)	151.6 (1,4)
Uneven	0	722.3 (6,1)	723.1 (8,2)	722.6 (10,1)	722.2 (12,1)	722.4 (13,1)
	2	626.6 (1,6)	558.9 (1,5)	538.4 (1,5)	501.3 (1,4)	440.8 (1,4)
	3	531.5 (1,6)	422.4 (1,5)	333.3 (1,5)	274.2 (1,5)	199.8 (1,4)

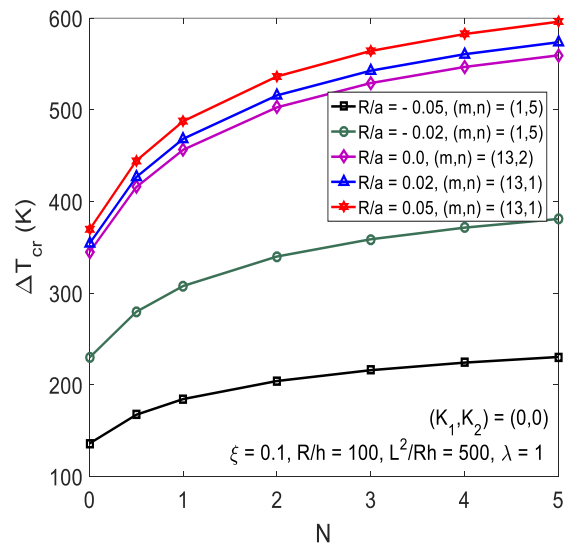
Các số trong các ngoặc đơn chỉ mode vòng (m, n)

Ảnh hưởng của áp lực ngoài tác dụng trước và loại phân bố lỗ rỗng lên sự ổn định của vỏ trống rất thoải ($R/a = 0.01$) FGM có các lỗ rỗng và các cạnh tựa cố định ($N = 2, \xi = 0.1, \lambda = 1$) chịu nhiệt độ tăng đều được khảo sát trong bảng 2.11. Như có thể thấy, sự có mặt của áp lực ngoài tác dụng trước làm cho khả năng chịu tải nhiệt của vỏ giảm đáng kể và nhiệt độ tới hạn trở nên nhỏ hơn khi áp lực ngoài cao hơn. Thêm vào đó, ảnh hưởng của kiểu phân bố lỗ rỗng lên tải nhiệt tới hạn phụ thuộc vào tỷ lệ kích thước L^2 / Rh và độ lớn của áp lực ngoài tác dụng trước. Cụ thể, tải nhiệt tới hạn trong trường hợp các lỗ rỗng phân bố đều cao hơn trong trường hợp phân bố không đều khi tỷ số L^2 / Rh và áp lực q nhỏ.

Tiếp theo, hình 2.14 đánh giá các ảnh hưởng của môi trường đàn hồi bao quanh và tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng lên tải nhiệt tới hạn của các vỏ trống rất thoải FGM có các lỗ rỗng phân bố không đều với các cạnh tựa cố định ($R/a = 0.01$, $\lambda = 1$) và chỉ chịu nhiệt độ tăng đều. Như có thể thấy, nhiệt độ tới hạn của vỏ trống được tăng lên khi vỏ được bao quanh bởi các nền đàn hồi, đặc biệt là nền loại Pasternak. Trái ngược với trường hợp các vỏ chịu tải cơ, các lỗ rỗng có ảnh hưởng tích cực lên sự ổn định của các vỏ FGM chỉ chịu tải nhiệt và, cụ thể là, các tải nhiệt tới hạn được tăng lên đáng kể khi tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng tăng lên. Một lần nữa, hình 2.14 chỉ ra rằng các tải nhiệt tới hạn trong trường hợp T-D thấp hơn nhiều so với trường hợp T-ID.



Hình 2.14. Ảnh hưởng của môi trường đàn hồi và tỷ lệ lỗ rỗng lên tải nhiệt tới hạn của vỏ trống rất thoải FGM có các lỗ rỗng phân bố không đều.



Hình 2.15. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích và độ cong Gauss lên tải nhiệt tới hạn của vỏ trống FGM có các lỗ rỗng phân bố đều.

Cuối cùng, các ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích và tỷ số các bán kính cong R/a lên sự ổn định tuyến tính của vỏ trống FGM có các lỗ rỗng phân bố đều và các cạnh tựa cố định chịu nhiệt độ tăng đều được phân tích trong hình 2.15. Hình này chỉ ra rằng tải nhiệt tới hạn được tăng lên nhanh chóng khi tỷ số R/a được tăng từ -0.05 (vỏ trống lõm) đến 0 (vỏ trụ), sau đó tải nhiệt tới hạn được tăng khá chậm khi tỷ số các bán kính cong R/a tăng từ 0 đến 0.05 . Điều này cho thấy rằng, khi chịu nhiệt độ tăng đều, khả năng kháng vòng của vỏ trụ cao hơn nhiều và thấp hơn không nhiều lần lượt so với vỏ trống lõm và vỏ trống lồi. Kết quả trong hình 2.15 cũng cho thấy rằng khi chỉ số tỷ lệ thể tích tăng lên làm cho các tải nhiệt tới hạn cao hơn.

2.5. Kết luận chương 2

Từ các kết quả thu được trong chương 2, luận án đưa ra một số nhận xét sau:

1. Sự có mặt của các lỗ rỗng có ảnh hưởng tích cực và tiêu cực lần lượt lên sự ổn định của các vỏ FGM chịu tải nhiệt và tải cơ. Nói khác đi, tải cơ và tải nhiệt tới hạn của vỏ FGM lần lượt bị giảm và được tăng khi tỷ lệ các lỗ rỗng tăng lên.

2. Về ảnh hưởng của kiểu phân bố lỗ rỗng, tải nhiệt tới hạn của vỏ cao hơn trong trường hợp các lỗ rỗng phân bố đều, ngược lại tải cơ tới hạn cao hơn trong trường hợp các lỗ rỗng phân bố không đều.

3. Sự tăng độ cong theo phương kinh tuyến làm cho các tải tới hạn của vỏ trống FGM chịu nén dọc trục và áp lực ngoài lần lượt được tăng rất nhẹ và tăng mạnh. Khi chịu tải cơ kết hợp, miền ổn định của vỏ được mở rộng hơn về phía áp lực ngoài cao khi độ cong theo phương kinh tuyến tăng lên.

4. Nói chung, các môi trường đàn hồi bao quanh làm tăng các tải tới hạn. Nói riêng, lớp đàn hồi Winkler giúp cho vỏ chịu áp lực ngoài tốt hơn đáng kể, trong khi lớp trượt Pasternak có ảnh hưởng tích cực lên khả năng chịu tải nén dọc trục của vỏ.

5. Trong trường hợp vỏ FGM có các lỗ rỗng với các cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt, các áp lực tới hạn bị giảm khi các cạnh biên bị ràng buộc chặt chẽ hơn và mức giảm sâu hơn khi nhiệt độ môi trường trở nên cao hơn.

6. Trong trường hợp vỏ trống chịu nhiệt độ tăng đều, nhiệt độ tới hạn giảm mạnh khi các cạnh biên bị ràng buộc chặt chẽ hơn và/hoặc áp lực ngoài (tác dụng trước) tăng lên. Khác với trường hợp vỏ trống chịu áp lực ngoài, nhiệt độ tới hạn của vỏ trống lõi cao hơn không nhiều so với vỏ trụ.

7. Cách tiếp cận giải tích với dạng độ võng hai số hạng có độ chính xác tốt và tương đối hiệu quả để giải quyết bài toán ổn định tuyến tính của các vỏ dày dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc cao. Cách tiếp cận này có thể mở rộng cho bài toán ổn định và dao động tuyến tính của vỏ trống và vỏ trụ dày làm từ các vật liệu khác nhau.

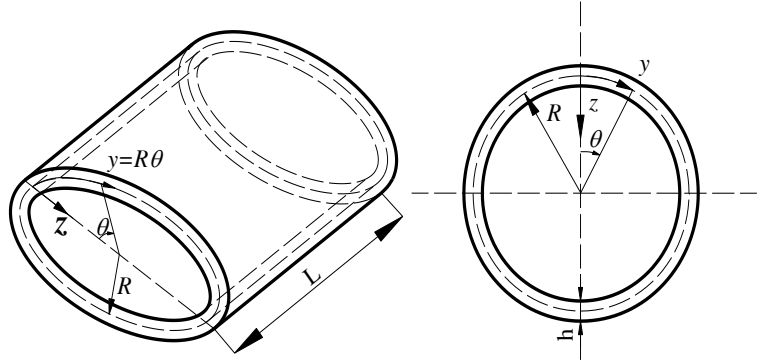
Các kết quả chính của chương 2 đã được công bố trong 2 bài báo khoa học đăng trên các tạp chí quốc tế thuộc danh mục ISI, cụ thể là các bài báo số 1 và số 2 trong danh mục các công trình của tác giả liên quan đến luận án.

CHƯƠNG 3. ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ FGM CÓ LỖ RỖNG SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG TRƯỢT BẬC NHẤT

Vỏ trụ là dạng kết cấu được sử dụng phổ biến trong nhiều lĩnh vực khác nhau và sự ổn định của loại vỏ này là một bài toán nhận được sự quan tâm của nhiều tác giả. Tuy nhiên, theo hiểu biết của tác giả luận án, chưa có nghiên cứu nào đánh giá ảnh hưởng đồng thời của các lỗ rỗng trong vật liệu, biến dạng trượt ngang trong vỏ và tính đàn hồi về liên kết ở các cạnh lên sự ổn định phi tuyến (bao gồm các ứng xử vòng và sau vòng) của các vỏ trụ FGM. Chương này của luận án giới thiệu một cách tiếp cận giải tích để nghiên cứu ổn định phi tuyến của các vỏ trụ tròn làm từ FGM có các lỗ rỗng chịu tải cơ, nhiệt và kết hợp cơ-nhiệt có kể đến tính đàn hồi về ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến ở các cạnh biên. Vỏ trụ được giả thiết có hình dáng hoàn hảo và các cạnh biên tựa bản lề. Các lỗ rỗng được giả thiết tồn tại trong FGM theo các kiểu phân bố đều và không đều. Các tính chất của các vật liệu thành phần được giả thiết phụ thuộc vào nhiệt độ và các tính chất hiệu dụng của FGM có lỗ rỗng được xác định theo công thức hỗn hợp cải tiến. Bài toán ổn định được đặt theo ứng suất và các phương trình cơ bản được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất có kể đến tính phi tuyến hình học theo nghĩa von Kármán – Donnell. Các phương trình này được giải nhờ sử dụng các nghiệm giải tích và phương pháp Galerkin. Trong chương này, lần đầu tiên dạng nghiệm độ võng hai số hạng được sử dụng để phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ. Đối với các vỏ trụ dày và tương đối dày, dạng nghiệm độ võng hai số hạng có thể là một xấp xỉ tốt vì có thể giảm đáng kể các khó khăn về mặt toán học. Dạng nghiệm độ võng hai số hạng dựa trên quan điểm rằng ảnh hưởng của số hạng độ võng đối xứng trục phi tuyến là nhỏ và bỏ qua được khi vỏ trụ tương đối dày. Sau khi thu được các biểu thức giải tích của mối liên hệ phi tuyến giữa tải và độ võng, luận án thực hiện nhiều ví dụ số để đánh giá các ảnh hưởng riêng rẽ và đồng thời của tỷ lệ lỗ rỗng, kiểu phân bố các lỗ rỗng, mức độ ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên và tải tác dụng trước (khi vỏ chịu tải kết hợp) lên khả năng kháng vòng và khả năng mang tải sau vòng của vỏ. Từ các kết quả số, một số nhận xét được đưa ra. Bên cạnh sự đóng góp mới về phương pháp tiếp cận, các kết quả số mà luận án thu được có thể là tham khảo có giá trị đối với những nhà nghiên cứu trong lĩnh vực vật liệu và ổn định kết cấu, đặc biệt là kết cấu dạng vỏ kín.

3.1. Mô hình kết cấu và các tính chất vật liệu

Trong chương này luận án xét mô hình kết cấu là các vỏ trụ tròn có chiều dài L , chiều dày h và bán kính cong R . Vỏ được xác định trong một hệ tọa độ xyz có gốc đặt trên mặt giữa tại một cạnh



Hình 3.1. Các kích thước và hệ tọa độ của vỏ trụ tròn.

và các trục $x, y = R\theta$ (θ là góc vĩ tuyến) và z lần lượt hướng theo phương dọc trục, phương vĩ tuyến và phương của pháp tuyến trong đến mặt giữa ($-h/2 \leq z \leq h/2$).

Vỏ trụ được làm từ vật liệu cơ tính biến đổi FGM có lỗ rỗng. Mô hình vật liệu và các tính chất hiệu dụng của vật liệu FGM có lỗ rỗng đã được mô tả trong mục 2.1 ở chương 2 và, để cho ngắn gọn, sẽ không trình bày lại ở đây.

3.2. Các phương trình cơ bản

Trong chương này bài toán ổn định phi tuyến được đặt theo ứng suất và các phương trình cơ bản được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT). Dựa trên FSDT, các thành phần biến dạng tại một điểm cách mặt giữa một khoảng z được biểu diễn như sau

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_x + w_{,x} \\ \phi_y + w_{,y} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

trong đó

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} + w_{,x}^2 / 2 \\ v_{,y} - w / R + w_{,y}^2 / 2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

và các đại lượng có cùng ý nghĩa như đã mô tả trong chương 2.

Các thành phần ứng suất trong vỏ được xác định bởi liên hệ ứng suất - biến dạng sau đây

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y - (1+\nu) \alpha \Delta T \right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x - (1+\nu) \alpha \Delta T \right] \\ (\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}) &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})\end{aligned}\quad (3.3)$$

trong đó $\Delta T = T - T_0$ là mức tăng nhiệt độ đều từ giá trị ban đầu T_0 , mà giả thiết ở đó vỏ không chịu ứng suất nhiệt, đến giá trị T . Trong nghiên cứu này T_0 được giả thiết là nhiệt độ phòng.

Các thành phần hợp lực màng N_x, N_y, N_{xy} , hợp lực trượt ngang Q_x, Q_y , mô men uốn M_x, M_y và mô men xoắn M_{xy} trong vỏ được tính qua các thành phần ứng suất như sau

$$\begin{aligned}(N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz, \quad (Q_x, Q_y) = K_S \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz, \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz\end{aligned}\quad (3.4)$$

trong đó K_S là hệ số hiệu chỉnh trượt.

Sau khi đặt các thành phần biên dạng (3.1) vào biểu thức các thành phần ứng suất (3.3) rồi thay kết quả vào (3.4) ta nhận được các biểu thức cụ thể của các thành phần nội lực và mô men như sau

$$\begin{aligned}(N_x, M_x) &= \frac{1}{1-\nu^2} \left[(E_1, E_2) (\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_y^0) + (E_2, E_3) (\varepsilon_x^1 + \nu \varepsilon_y^1) \right] - \frac{1}{1-\nu} (\Phi_1, \Phi_2) \\ (N_y, M_y) &= \frac{1}{1-\nu^2} \left[(E_1, E_2) (\varepsilon_y^0 + \nu \varepsilon_x^0) + (E_2, E_3) (\varepsilon_y^1 + \nu \varepsilon_x^1) \right] - \frac{1}{1-\nu} (\Phi_1, \Phi_2) \\ (N_{xy}, M_{xy}) &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left[(E_1, E_2) \gamma_{xy}^0 + (E_2, E_3) \gamma_{xy}^1 \right] \\ Q_x &= \frac{E_1 K_S}{2(1+\nu)} (\phi_x + w_{,x}), \quad Q_y = \frac{E_1 K_S}{2(1+\nu)} (\phi_y + w_{,y})\end{aligned}\quad (3.5)$$

trong đó

$$(E_1, E_2, E_3) = \int_{-h/2}^{h/2} E(z, T) (1, z, z^2) dz, \quad (\Phi_1, \Phi_2) = \int_{-h/2}^{h/2} E(z, T) \alpha(z, T) \Delta T (1, z) dz \quad (3.6)$$

Hệ phương trình cân bằng phi tuyến của vỏ trụ tròn hoàn hảo hình dáng dựa trên FSDT được viết như sau [172]

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (3.7a)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (3.7b)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} + N_y / R + q = 0 \quad (3.7c)$$

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = 0 \quad (3.7d)$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = 0 \quad (3.7e)$$

trong đó q là áp lực bề mặt phân bố đều vuông góc với mặt giữa của vỏ, nhận giá trị dương và âm lần lượt đối với các trường hợp áp lực từ ngoài vào và từ trong ra.

Hai phương trình đầu (3.7a, b) được thỏa mãn đồng nhất bởi việc đưa vào hàm ứng suất $f(x, y)$ như được định nghĩa trong (2.11). Sau khi thay (3.7d,e) vào (3.7c) và thực hiện các biến đổi toán học theo cách tương tự như đã tiến hành trong các công trình [97,98,131], phương trình cân bằng phi tuyến của vỏ trụ FGM có lẽ rộng được viết lại dưới dạng sau

$$D\nabla^2(\phi_{x,x} + \phi_{y,y}) + f_{,yy} w_{,xx} - 2f_{,xy} w_{,xy} + f_{,xx} w_{,yy} + f_{,xx} / R + q = 0 \quad (3.8)$$

trong đó D là độ cứng chống uốn và ∇^2 là toán tử Laplace có biểu thức như sau

$$D = \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1(1-\nu^2)}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3.9)$$

Từ các liên hệ động học (3.2), phương trình tương thích biến dạng được viết như sau

$$\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = -\frac{w_{,xx}}{R} - w_{,xx} w_{,yy} + w_{,xy}^2. \quad (3.10)$$

Từ các liên hệ (3.5), các thành phần biến dạng của mặt giữa $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ có thể được biểu diễn qua các thành phần nội lực N_x, N_y, N_{xy} (và do đó qua các đạo hàm riêng của hàm ứng suất). Sau đó, bằng cách đặt các biểu thức $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ vừa nhận được vào (3.10) thu được dạng mới của phương trình tương thích biến dạng viết qua các đạo hàm riêng của độ võng w và hàm ứng suất f như sau

$$\nabla^4 f + E_1 \left(\frac{w_{,xx}}{R} + w_{,xx} w_{,yy} - w_{,xy}^2 \right) = 0 \quad (3.11)$$

trong đó $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ là toán tử lưỡng điều hòa.

Trong chương này, các cạnh biên của vỏ trụ được giả thiết tựa bản lề và điều kiện biên được biểu diễn như sau [172]

$$w = M_x = \phi_y = 0, \quad N_x = N_{x0} \quad \text{tại } x = 0, L \quad (3.12)$$

trong đó N_{x0} là hợp lực nén (chủ động) trong trường hợp các cạnh biên tựa di động và là hợp của các phản lực (bị động) trong trường hợp các cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến.

3.3. Nghiệm giải tích của bài toán ổn định phi tuyến

Trong hầu hết các nghiên cứu giải tích đã tiến hành về ổn định phi tuyến của vỏ trụ nói chung và vỏ trụ FGM nói riêng có các cạnh tựa bản lề, lý thuyết vỏ mỏng cổ điển (CST) thường được sử dụng và độ võng thường được giả thiết có dạng một số hạng [42,46,48] hoặc ba số hạng [34-36,38,39,43,50]. Nghiệm độ võng dạng một số hạng là xấp xỉ đơn giản khi chỉ giữ lại số hạng độ võng ngay sau khi vỏ bị võng và bỏ qua độ võng đều trước khi võng và độ võng phi tuyến trong giai đoạn sau võng. Khắc phục mặt hạn chế này, độ võng dạng ba số hạng đã kể đến số hạng độ võng đều trước khi võng và độ võng đối xứng trục phi tuyến trong giai đoạn sau khi võng. Tuy nhiên, việc sử dụng dạng độ võng ba số hạng cho lý thuyết vỏ biến dạng trượt gặp những khó khăn toán học và số hạng độ võng đối xứng trục phi tuyến có thể chỉ đáng kể đối với các vỏ mỏng và rất mỏng (khi mà độ võng trong giai đoạn sau võng lớn hơn nhiều lần so với chiều dày của vỏ). Gần đây, Hieu và Tung [112,113] đã lần đầu tiên sử dụng dạng nghiệm độ võng hai số hạng để phân tích bài toán vòng tuyến tính của các vỏ trụ và vỏ trống FG-CNTRC tương đối dày dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất FSDT. Dạng nghiệm độ võng hai số hạng này cũng đã được mở rộng cho phân tích vòng tuyến tính của vỏ trụ và vỏ trống FGM dày có lỗ rỗng dựa trên lý thuyết vỏ biến dạng trượt bậc cao HSDT. Trong chương hiện tại của luận án, lần đầu tiên nghiệm độ võng dạng hai số hạng được sử dụng để phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ tròn làm từ FGM có các lỗ rỗng. Như được đề cập trong cuốn sách của Brush và Almroth [17], đối với các dạng vỏ kín như vỏ trụ và vỏ trống, độ võng đều

trong giai đoạn trước khi vòng là đáng kể và nên xét đến để đảm bảo độ chính xác khi phân tích ổn định. Ngược lại, độ võng đối xứng trục phi tuyến trong giai đoạn sau khi vòng, cụ thể là số hạng $\sin^2(m\pi x/L)$, có thể là không đáng kể đối với các vỏ trụ dày hoặc tương đối dày. Dựa trên quan điểm này, dạng hai số hạng của độ võng có thể là một xấp xỉ đáng tin cậy cho bài toán ổn định của vỏ trụ dày hoặc tương đối dày. Cụ thể, chương này giả thiết dạng nghiệm của độ võng w , hàm ứng suất f và các hàm góc xoay ϕ_x, ϕ_y có dạng như sau [112,113]

$$w(x, y) = W_0 + W_1 \sin \beta_m x \sin \delta_n y \quad (3.13a)$$

$$f(x, y) = A_1 \cos 2\beta_m x + A_2 \cos 2\delta_n y + A_3 \sin \beta_m x \sin \delta_n y \quad (3.13b)$$

$$+ A_4 \sin 3\beta_m x \sin \delta_n y - \sigma_{0y} h \frac{x^2}{2} + N_{x0} \frac{y^2}{2}$$

$$\phi_x = B_1 \cos \beta_m x \sin \delta_n y, \quad \phi_y = B_2 \sin \beta_m x \cos \delta_n y \quad (3.13c)$$

trong đó W_0 và W_1 lần lượt là độ võng đều trong giai đoạn trước khi vòng và biên độ của độ võng trong giai đoạn ngay sau khi vòng, và $A_i (i=1 \div 4)$, $B_j (j=1, 2)$ là các hệ số cần xác định. Hơn nữa, $\beta_m = m\pi/L$, $\delta_n = n/R$ và các đại lượng m, n và σ_{0y} có cùng ý nghĩa như trong chương 2.

Sau khi thay các liên hệ động học (3.2) và các nội lực ở (3.5) vào hai phương trình cân bằng (3.7d, e) và đặt các nghiệm (3.13a, c) vào hai phương trình nhận được, ta có thể thu được các hệ số biên độ của các hàm góc xoay như sau

$$B_1 = \frac{b_{22}b_{31} - b_{21}b_{32}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} W_1, \quad B_2 = \frac{b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} W_1 \quad (3.14)$$

trong đó các biểu thức cụ thể của b_{ij} ($i=1 \div 3, j=1, 2$) được cho trong công thức (B1) ở phụ lục B.

Thay các nghiệm (3.13a, b) vào phương trình tương thích biến dạng (3.11) ta thu được phương trình mà từ đó các hệ số trong hàm ứng suất được xác định như sau

$$A_1 = \frac{E_1 \delta_n^2}{32 \beta_m^2} W_1^2, \quad A_2 = \frac{E_1 \beta_m^2}{32 \delta_n^2} W_1^2, \quad A_3 = \frac{E_1 \beta_m^2 W_1}{R(\beta_m^2 + \delta_n^2)}, \quad A_4 = 0. \quad (3.15)$$

Bằng cách đặt các nghiệm (3.13) vào phương trình vi phân cân bằng (3.8) sau đó áp dụng phương pháp Galerkin trên toàn miền vỏ trụ ($0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq 2\pi R$) cho phương trình nhận được, tương tự như các biểu thức (2.19a, b), ta thu được hệ phương trình đại số sau đây

$$-\frac{\sigma_{0y}}{R_h} + q = 0 \quad (3.16a)$$

$$-g_{11} - g_{21}\bar{W}_1^2 - \frac{m^2\pi^2}{R_h^2 L_R^2} \bar{N}_{x0} + \frac{n^2}{R_h^2} \sigma_{0y} = 0 \quad (3.16b)$$

trong đó

$$\begin{aligned} (\bar{W}_1, R_h, \bar{N}_{x0}) &= \frac{1}{h} (W_1, R, N_{x0}), \quad L_R = \frac{L}{R}, \quad g_{21} = \bar{E}_1 \left(\frac{m\pi}{2R_h L_R} \right)^4 + \bar{E}_1 \left(\frac{n}{2R_h} \right)^4, \\ g_{11} &= -\frac{\bar{D}}{R_h^3} \left(\frac{m^2\pi^2}{L_R^2} + n^2 \right) \left(\frac{m\pi}{L_R} \bar{B}_1 + n\bar{B}_2 \right) + \frac{\bar{E}_1}{R_h^2} \left(\frac{m^2\pi^2}{n^2 L_R^2 + m^2\pi^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

và

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= \frac{E_1}{h}, \quad \bar{D} = \frac{D}{h^3}, \quad \bar{B}_1 = \frac{\bar{b}_{22}\bar{b}_{31} - \bar{b}_{21}\bar{b}_{32}}{\bar{b}_{11}\bar{b}_{22} - \bar{b}_{12}\bar{b}_{21}}, \quad \bar{B}_2 = \frac{\bar{b}_{11}\bar{b}_{32} - \bar{b}_{12}\bar{b}_{31}}{\bar{b}_{11}\bar{b}_{22} - \bar{b}_{12}\bar{b}_{21}}, \\ (\bar{b}_{11}, \bar{b}_{21}, \bar{b}_{12}, \bar{b}_{22}) &= \frac{1}{h} (b_{11}, b_{21}, b_{12}, b_{22}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tiếp sau đây, các biểu thức cụ thể của tải tới hạn và liên hệ phi tuyến tải – độ võng cho các trường hợp cụ thể của tải trọng và điều kiện biên sẽ được xác định.

3.3.1. Vỏ trụ FGM có các cạnh bị ràng buộc chịu áp lực ngoài và/hoặc tải nhiệt

Phần này trình bày cách thiết lập các công thức dạng đóng của tải tới hạn và liên hệ phi tuyến giữa tải và độ võng của vỏ trụ tròn FGM có lỗ rỗng với các cạnh bị ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến đặt trong môi trường nhiệt và chịu áp lực ngoài. Trong trường hợp này N_{x0} trong (3.16b) là hợp của các phản lực (bị động) trên các cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển. Mối liên hệ giữa hợp phản lực trên các cạnh biên và dịch chuyển trung bình trên các cạnh này được biểu diễn như (2.22) và điều kiện đóng theo hướng vòng được thỏa mãn theo nghĩa trung bình như (2.23).

Từ các liên hệ động học (3.2) và các biểu thức nội lực (3.5), có thể thu được các biểu thức sau đây

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_1} (f_{,yy} - \nu f_{,xx}) - \frac{E_2}{E_1} \phi_{,xx} - \frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{\Phi_1}{E_1} \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E_1} (f_{,xx} - \nu f_{,yy}) - \frac{E_2}{E_1} \phi_{,yy} + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} w_{,y}^2 + \frac{\Phi_1}{E_1} \quad (3.19b)$$

Bằng cách đặt các biểu thức nghiệm (3.13) vào các biểu thức (3.19) sau đó đặt các biểu thức kết quả vào các liên hệ (2.22) và (2.23) ta sẽ thu được một hệ hai phương trình đại số tuyến tính của hai biến \bar{N}_{x0} và σ_{0y} như sau

$$\nu \lambda \sigma_{0y} + \bar{N}_{x0} = \lambda \frac{\bar{E}_1 \pi^2 m^2}{8R_h^2 L_R^2} \bar{W}_1^2 - \lambda G \Delta T \quad (3.20a)$$

$$\sigma_{0y} + \nu \bar{N}_{x0} = \frac{\bar{E}_1}{R_h} \bar{W}_0 - \frac{n^2 \bar{E}_1}{8R_h^2} \bar{W}_1^2 + G \Delta T \quad (3.20b)$$

trong đó λ và G có biểu thức như (2.26) và $\bar{W}_0 = \frac{W_0}{h}$. Sau khi giải hệ phương trình (3.20) ta thu được kết quả sau đây

$$\bar{N}_{x0} = -g_{13} \bar{W}_0 + g_{23} \bar{W}_1^2 - g_{33} \Delta T \quad (3.21a)$$

$$\sigma_{0y} = g_{12} \bar{W}_0 - g_{22} \bar{W}_1^2 + g_{32} \Delta T \quad (3.21b)$$

trong đó các hệ số g_{ij} ($i = 1 \div 3, j = 2, 3$) được cho trong công thức (B2) ở phụ lục B.

Biểu thức của độ võng đều trước vòng không thứ nguyên \bar{W}_0 có thể nhận được bằng cách thay (3.21) vào (3.16a) như sau

$$\bar{W}_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{g_{22}}{g_{12}} \bar{W}_1^2 - \frac{g_{32}}{g_{12}} \Delta T + \frac{R_h}{g_{12}} q \quad (3.22)$$

Tương tự, bằng cách đặt \bar{N}_{x0} và σ_{0y} từ (3.21) vào (3.16b) ta nhận được

$$\left(\frac{m^2 \pi^2}{R_h^2 L_R^2} g_{13} + \frac{n^2}{R_h^2} g_{12} \right) \bar{W}_0 - \left(g_{21} + \frac{m^2 \pi^2}{R_h^2 L_R^2} g_{23} + \frac{n^2}{R_h^2} g_{22} \right) \bar{W}_1^2 - g_{11} + \left(\frac{m^2 \pi^2}{R_h^2 L_R^2} g_{33} + \frac{n^2}{R_h^2} g_{32} \right) \Delta T = 0. \quad (3.23)$$

Bây giờ với việc đặt \bar{W}_0 từ (3.22) vào (3.23) ta nhận được biểu thức sau

$$q = \frac{1}{g_{14}} \left(g_{11} + g_{24} \bar{W}_1^2 - g_{34} \Delta T \right) \quad (3.24)$$

trong đó g_{k4} ($k = 1 \div 3$) được hiển thị trong công thức (B3) ở phụ lục B.

Biểu thức (3.24) là liên hệ phi tuyến giữa tải và độ võng trong giai đoạn ngay sau khi vòng của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng với các cạnh bị ràng buộc đặt trong môi trường nhiệt tăng đều (tồn tại trước) và chịu áp lực vuông góc với mặt giữa của vỏ. Bằng cách cho $\bar{W}_1 \rightarrow 0$ ta có thể thu được

$$q_b = \frac{1}{g_{14}}(g_{11} - g_{34}\Delta T) \quad (3.25)$$

Đây là biểu thức tải vòng của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng. Các tải áp lực tới hạn q_{cr} có thể thu được bằng cách cực tiểu hóa các tải vòng theo mode vòng m, n . Giá trị của độ võng đều trong giai đoạn trước khi vòng có thể được dự đoán từ biểu thức (3.22) với $\bar{W}_1 \rightarrow 0$, $q = q_b$ và m, n là mode vòng tới hạn như sau

$$\bar{W}_0 = \frac{R_h g_{11}}{g_{12} g_{14}} - \left(\frac{g_{32}}{g_{12}} + \frac{R_h g_{34}}{g_{12} g_{14}} \right) \Delta T. \quad (3.26)$$

Từ (3.13a) và (3.22) có thể dễ nhận thấy rằng độ võng lớn nhất không thứ nguyên của vỏ trụ có biểu thức như sau

$$\bar{W}_{\max} = \frac{W_{\max}}{h} = \bar{W}_0 + \bar{W}_1 = \bar{W}_1 + \frac{g_{22}}{g_{12}} \bar{W}_1^2 - \frac{g_{32}}{g_{12}} \Delta T + \frac{R_h}{g_{12}} q. \quad (3.27)$$

Các biểu thức (3.24) và (3.27) sẽ được sử dụng để xác định các đường liên hệ giữa tải áp lực ngoài và độ võng lớn nhất không thứ nguyên của vỏ trụ FGM.

Trong trường hợp vỏ trụ FGM chỉ chịu nhiệt độ tăng đều, biểu thức liên hệ giữa tải nhiệt và độ võng có thể được thu được từ (3.24) như sau

$$\Delta T = \frac{1}{g_{34}}(g_{11} + g_{24} \bar{W}_1^2) \quad (3.28)$$

Bằng cách cho $\bar{W}_1 \rightarrow 0$ ta thu được biểu thức của tải nhiệt có thể làm cho vỏ trụ bị vòng như sau

$$\Delta T_b = \frac{g_{11}}{g_{34}} \quad (3.29)$$

và tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} là giá trị nhỏ nhất trong số các tải vòng ΔT_b xác định bằng cách cực tiểu hóa ΔT_b theo mode vòng m, n .

Tương tự như trên, giá trị của độ võng trước vòng không thứ nguyên có thể được xác định từ (3.22) và (3.29) với $\bar{W}_1 \rightarrow 0$, $q = 0$, $\Delta T = \Delta T_{cr}$ như sau

$$\bar{W}_0 = \frac{W_0}{h} = -\frac{g_{32}g_{11}}{g_{12}g_{34}}. \quad (3.30)$$

Hơn nữa biểu thức của độ võng lớn nhất không thứ nguyên khi vỏ trụ FGM chỉ chịu nhiệt độ tăng đều có dạng sau đây

$$\bar{W}_{\max} = \bar{W}_0 + \bar{W}_1 = \bar{W}_1 + \frac{g_{22}}{g_{12}}\bar{W}_1^2 - \frac{g_{32}}{g_{12}}\Delta T. \quad (3.31)$$

Các biểu thức (3.28) và (3.31) có thể được sử dụng để xác định các đường liên hệ giữa tải nhiệt và độ võng lớn nhất. Do sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu, các tải nhiệt tới hạn và các đường liên hệ tải – độ võng trong phân tích sau vòng được thu được sau một quá trình lặp.

3.3.2. Vỏ trụ FGM có lỗ rỗng với các cạnh tựa di động chịu tải cơ kết hợp

Xét bài toán vỏ trụ FGM có lỗ rỗng với các cạnh tựa di động chịu tác dụng đồng thời của áp lực ngoài q phân bố đều vuông góc với mặt giữa và áp lực nén đều dọc trục P . Trong trường hợp này hợp lực nén (chủ động) trên các cạnh là $N_{x0} = -Ph$ và bằng cách thay nghiệm (3.13) vào (3.19b) rồi đặt vào điều kiện (2.23) ta nhận được biểu thức của σ_{0y} như (3.20b). Sau khi đặt N_{x0} và σ_{0y} vào các phương trình (3.16) ta nhận được

$$\bar{E}_1\bar{W}_0 + \nu R_h P - R_h^2 q + R_h G \Delta T - \frac{n^2 \bar{E}_1}{8R_h} \bar{W}_1^2 = 0 \quad (3.32a)$$

$$-g_{11} - g_{21}\bar{W}_1^2 + \frac{m^2 \pi^2}{R_h^2 L_R^2} P + \nu \frac{n^2}{R_h^2} P + \frac{n^2}{R_h^3} \bar{E}_1 \bar{W}_0 + \frac{n^2}{R_h^2} G \Delta T - \frac{\bar{E}_1 n^4}{8R_h^4} \bar{W}_1^2 = 0 \quad (3.32b)$$

Bằng cách khử \bar{W}_0 từ hai phương trình trên ta thu được liên hệ sau đây

$$P = \frac{g_{11}}{g_{31}} + \frac{g_{21}}{g_{31}} \bar{W}_1^2 \quad (3.33)$$

trong đó

$$g_{31} = \frac{m^2 \pi^2}{R_h^2 L_R^2} + \gamma \frac{n^2}{R_h}, \quad \gamma = \frac{q}{P} \quad (3.34)$$

Biểu thức (3.33) là liên hệ phi tuyến giữa tải và độ võng của vỏ trụ FGM chịu các giá trị nhỏ của áp lực ngoài tác dụng trước và sau đó chịu nén đều dọc trục. Bằng cách cho $\bar{W}_1 \rightarrow 0$ ta thu được tải vòng như sau

$$P_b = \frac{g_{11}}{g_{31}} \quad (3.35)$$

Từ (3.13a) và (3.32a), biểu thức của độ võng lớn nhất không thứ nguyên trong trường hợp này có dạng sau

$$\bar{W}_{\max} = \bar{W}_0 + \bar{W}_1 = \frac{R_h}{E_1} (\gamma R_h - \nu) P - \frac{R_h}{E_1} G \Delta T + \bar{W}_1 + \frac{n^2}{8R_h} \bar{W}_1^2 \quad (3.36)$$

Các biểu thức (3.33) và (3.36) được sử dụng để xác định các đường liên hệ giữa áp lực nén và độ võng lớn nhất trong phân tích sau vòng. Các biểu thức (3.33) và (3.34) có thể được viết lại dưới dạng

$$q = \frac{g_{11}}{g_{41}} + \frac{g_{21}}{g_{41}} \bar{W}_1^2 \quad (3.37)$$

trong đó

$$g_{41} = \eta \frac{m^2 \pi^2}{R_h^2 L_R^2} + \frac{n^2}{R_h}, \quad \eta = \frac{P}{q} \quad (3.38)$$

Biểu thức (3.37) là liên hệ phi tuyến giữa tải và độ võng của vỏ trụ FGM có các cạnh tựa di động chịu các giá trị nhỏ của áp lực nén dọc trục tác dụng trước và sau đó chịu áp lực ngoài. Tải vòng của vỏ thu được khi cho $\bar{W}_1 \rightarrow 0$ như sau

$$q_b = \frac{g_{11}}{g_{41}} \quad (3.39)$$

và biểu thức của độ võng lớn nhất trong trường hợp này có dạng

$$\bar{W}_{\max} = \bar{W}_0 + \bar{W}_1 = \frac{R_h}{E_1} (R_h - \eta \nu) q - \frac{R_h}{E_1} G \Delta T + \bar{W}_1 + \frac{n^2}{8R_h} \bar{W}_1^2. \quad (3.40)$$

Các biểu thức (3.37) và (3.40) sẽ được sử dụng để phác họa các đường liên hệ giữa áp lực ngoài và độ võng lớn nhất của vỏ trụ FGM chịu tải cơ kết hợp. Cũng tương tự như mục trước, các giá trị tải tới hạn P_{cr}, q_{cr} của vỏ trụ FGM được xác định như là giá trị nhỏ nhất của tải vòng và thu được bằng cách cực tiểu hóa tải vòng theo mode vòng m, n .

3.4. Các kết quả số và thảo luận

Phần này trình bày các kết quả số cho phân tích vòng và sau vòng của các vỏ trụ FGM làm từ các vật liệu thành phần là Si_3N_4 và SUS304 chịu các tải cơ, nhiệt và cơ-nhiệt. Các tính chất phụ thuộc vào nhiệt độ của các vật liệu thành phần đã được trình bày trong chương 2, cụ thể là theo công thức (2.34) và các hệ số được cho trong bảng 2.1. Trong các kết quả số, hệ số hiệu chỉnh trượt được giả thiết là $K_s = 5/6$.

3.4.1. Các nghiên cứu so sánh

Để kiểm chứng độ tin cậy của cách tiếp cận mà luận án sử dụng, phần này thực hiện một số nghiên cứu so sánh với các kết quả đã thu được trong các công bố trước đây. Tuy nhiên, theo hiểu biết của tác giả luận án, chưa có công bố nào về ổn định của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng với các cạnh chịu liên kết đàn hồi. Vì vậy, các nghiên cứu so sánh được tiến hành cho các trường hợp riêng, cụ thể là vỏ trụ FGM hoàn hảo (không có lỗ rỗng) với các cạnh tựa di động (khi vỏ chịu tải cơ) hoặc tựa cố định (khi vỏ chịu tải nhiệt).

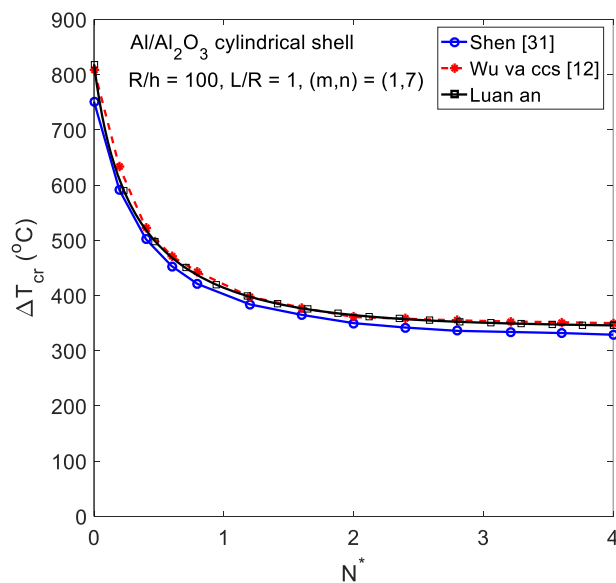
Nghiên cứu so sánh đầu tiên thực hiện tính toán tải tới hạn của vỏ trụ FGM với các cạnh tựa di động chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt độ. Bài toán này cũng đã được xem xét trong công trình của Shen [28] khi sử dụng dạng nghiệm tiệm cận và phương pháp lặp hai bước dựa trên CST. Bảng 3.1 so sánh kết quả thu được theo cách tiếp cận của luận án và kết quả đạt được trong công trình của Shen [28]. Dễ nhận thấy rằng một sự phù hợp rất tốt đạt được trong nghiên cứu so sánh này.

Bảng 3.1. So sánh tải tới hạn q_{cr} (MPa) của vỏ trụ $Si_3N_4 / SUS304$ với các cạnh tựa di động chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt ($R/h = 300$, $\Delta T = 200$ K, $m = 1$).

L^2 / Rh	Tham khảo	N				
		0	0.5	1	3	5
100	Shen [28]	0.231	0.275	0.291	0.314	0.324
	Luận án	0.231	0.276	0.292	0.315	0.325
200	Shen [28]	0.157	0.187	0.198	0.213	0.220
	Luận án	0.157	0.187	0.198	0.214	0.221
500	Shen [28]	0.096	0.114	0.121	0.130	0.134
	Luận án	0.096	0.114	0.121	0.130	0.134

$n = 14$, 12 và 10 lần lượt đối với $L^2 / Rh = 100$, 200 và 500.

Tiếp theo, luận án xem xét ứng xử vòng của vỏ trụ FGM hoàn hảo với các cạnh tựa cố định chịu nhiệt độ tăng đều. Bài toán này cũng đã được xem xét trong bài báo của Shen [31] sử dụng các nghiệm khai triển tiệm cận theo tham số bé dựa trên HSDT và trong công bố của Wu và ccs [12] sử dụng tiêu chuẩn cân bằng lân cận cùng nghiệm độ võng dạng một số hạng dựa trên lý thuyết vỏ CST.



Hình 3.2. So sánh tải nhiệt tới hạn của vỏ trụ FGM hoàn hảo với các cạnh tựa cố định.

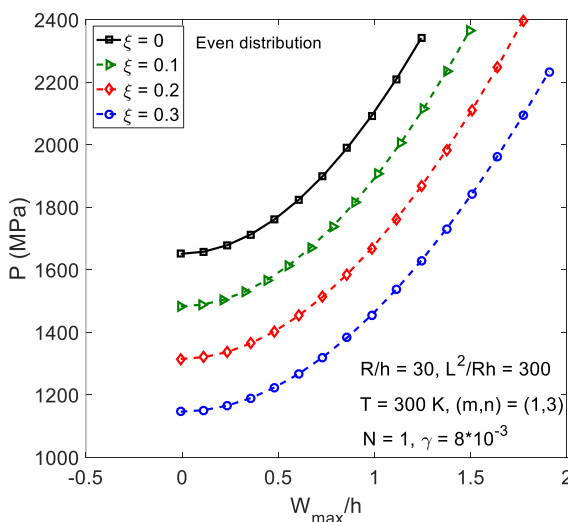
Trong nghiên cứu so sánh này vỏ trụ được làm từ nhôm (Al) và oxit nhôm (Al_2O_3) với các tính chất (mô đun đàn hồi và hệ số dẫn nở nhiệt) độc lập với nhiệt độ. Cụ thể, các tính chất vật liệu của các thành phần trong FGM là [11,12] $E_m = 70$ GPa, $\alpha_m = 23 \times 10^{-6}$ ($1/^{\circ}\text{C}$), $\nu_m = 0.3$ đối với nhôm và $E_c = 380$ GPa, $\alpha_c = 7.4 \times 10^{-6}$ ($1/^{\circ}\text{C}$), $\nu_c = 0.3$ đối với oxit nhôm. Hình 3.2 chỉ ra sự so sánh các kết quả về tải nhiệt tới hạn theo cách tiếp cận của luận án, sử dụng công thức (3.29), và các kết quả đã được báo cáo trong các công trình trước của Shen [31] và Wu cùng ccs [12]. Để cho phù hợp ký hiệu, trong hình 3.2 N^* là chỉ số tỷ lệ thể tích của vỏ trụ FGM có mặt trong giàu ceramic và mặt ngoài giàu kim loại, tức là $V_c = (1/2 + z/h)^{N^*}$. Như có thể nhận thấy, các kết quả theo cách tiếp cận của luận án hơi cao hơn so với kết quả của Shen [31] và phù hợp rất tốt với kết quả của Wu và ccs [12].

Sau đây, các kết quả số sẽ được giới thiệu để phân tích ổn định của (1) vỏ trụ FGM có lỗ rỗng và các cạnh biên tựa di động chịu tải cơ kết hợp trong môi trường nhiệt độ, (2) vỏ trụ FGM có lỗ rỗng và các cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt và (3) vỏ trụ FGM có lỗ rỗng và các cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển chỉ chịu nhiệt độ tăng đều. Trong các kết quả số, mức độ ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên sẽ được đo bằng tham số λ như (2.26) mà theo đó các cạnh tựa di động, tựa cố định và tựa di động một phần sẽ lần lượt được đặc

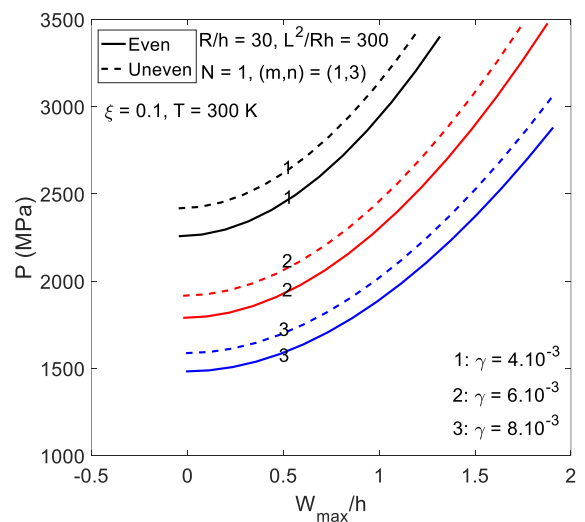
trung bởi các giá trị $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ và $0 < \lambda < 1$. Hơn nữa, tương tự như chương 2, các tính chất vật liệu phụ thuộc và không phụ thuộc vào nhiệt độ sẽ được đề cập đến lần lượt là T-D và T-ID.

3.4.2. Vỏ trụ FGM có lỗ rỗng và các cạnh tựa di động chịu tải cơ kết hợp

Phần này trình bày một số kết quả số dưới dạng các hình vẽ để phân tích sau vòng của vỏ trụ FGM tương đối dày có lỗ rỗng với các cạnh biên tựa di động chịu tải cơ kết hợp trong môi trường nhiệt độ. Hình 3.3 khảo sát ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích ξ của các lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có các lỗ rỗng phân bố đều chịu nén dọc trục kết hợp với áp lực ngoài (tồn tại trước). Rõ ràng là khả năng mang tải của vỏ có lỗ rỗng kém hơn đáng kể so với vỏ hoàn hảo và các đường tải – độ võng hạ thấp hơn khi tỷ lệ các lỗ rỗng trở nên cao hơn. Tiếp theo, các ảnh hưởng của mức độ áp lực ngoài tồn tại trước (tham số tải $\gamma = q/P$) và loại phân bố lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM chịu nén dọc trục được phân tích trong hình 3.4. Hình này cho thấy rằng khả năng mang tải nén dọc trục của vỏ trụ trở nên yếu đi rõ rệt khi áp lực ngoài tăng lên. Hơn nữa, các đường tải – độ võng ứng với loại phân bố đều (even) thấp hơn đáng kể so với loại phân bố không đều (Uneven) của các lỗ rỗng.



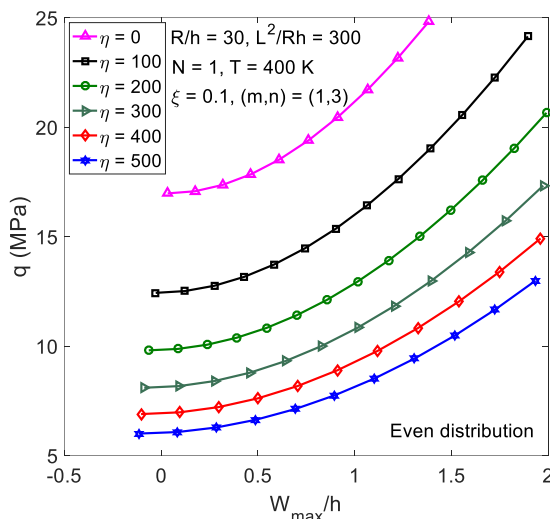
Hình 3.3. Ảnh hưởng tỷ lệ lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM chịu nén dọc trục kết hợp với áp lực ngoài.



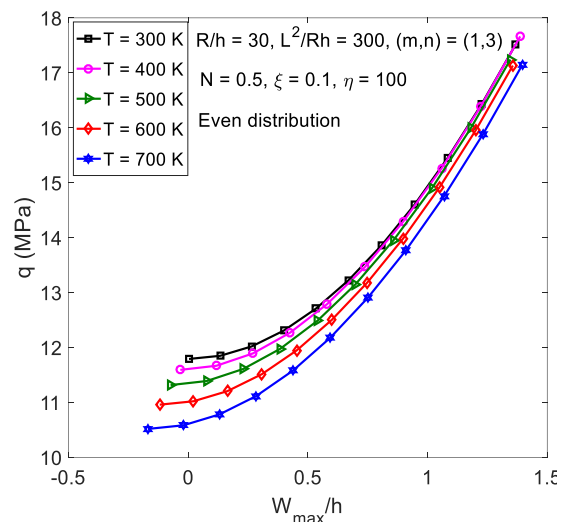
Hình 3.4. Ảnh hưởng của kiểu phân bố lỗ rỗng và áp lực ngoài lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM chịu nén dọc trục.

Ví dụ số tiếp theo được phác họa trong hình 3.5 để xét ảnh hưởng của tải nén trước theo hướng dọc trục, cụ thể là tỷ số tải $\eta = P/q$, lên khả năng mang tải của vỏ

trụ FGM có các lỗ rỗng phân bố đều ($\xi = 0.1$) chịu áp lực ngoài trong một môi trường nhiệt độ ($T = 400\text{K}$). Như có thể quan sát thấy rằng, sự có mặt của tải nén dọc trục tồn tại trước làm cho khả năng chịu áp lực ngoài giảm đi đáng kể. Cụ thể hơn, đường cân bằng tải – độ võng hạ thấp nhanh chóng khi η tăng từ 0 đến 100 và hạ xuống chậm hơn khi η trở nên lớn hơn (từ 100 đến khoảng 500 trong ví dụ này). Kết quả số cuối cùng trong tiểu mục này được chỉ ra trong hình 3.6 khi đánh giá ảnh hưởng của nhiệt độ môi trường lên đáp ứng sau vòng của vỏ trụ FGM có các lỗ rỗng phân bố đều ($N = 0.5$, $\xi = 0.1$) chịu nén trước bởi áp lực dọc trục ($\eta = 100$) và sau đó chịu áp lực ngoài. Nhìn chung nhiệt độ cao có ảnh hưởng tiêu cực lên khả năng mang tải trong giai đoạn sau vòng của vỏ trụ chịu tải cơ. Thêm vào đó, sự quan sát hình 3.6 nhận thấy rằng trong giai đoạn trước khi vòng dường như vỏ trụ bị võng vào phía trong và võng ra phía ngoài lần lượt ở các giá trị thấp và cao của nhiệt độ môi trường.



Hình 3.5. Ảnh hưởng của tải nén trước dọc trục lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài.



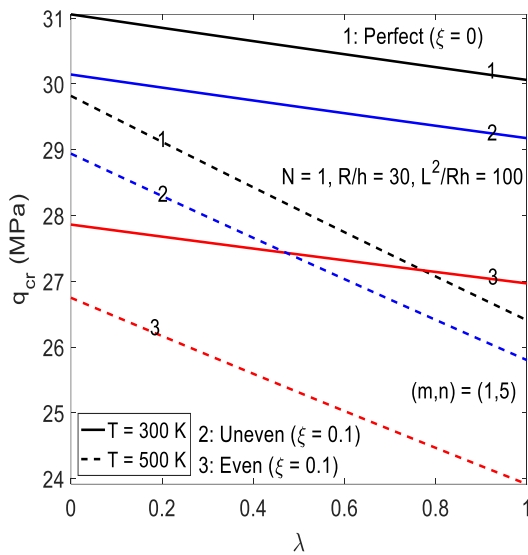
Hình 3.6. Ảnh hưởng của môi trường nhiệt lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ chịu áp lực ngoài kết hợp nén dọc trục.

3.4.3. Vỏ trụ FGM có lỗ rỗng và các cạnh biên bị ràng buộc chịu áp lực ngoài

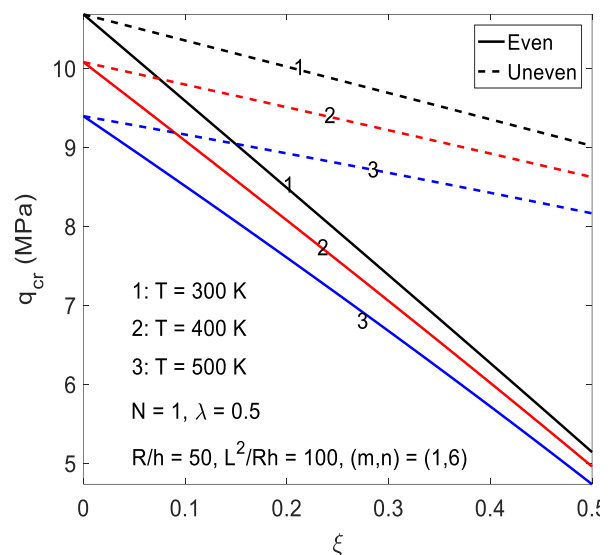
Một số kết quả số về phân tích vòng và sau vòng của các vỏ trụ FGM có lỗ rỗng với các cạnh bị ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến, đặt trong môi trường nhiệt độ và chịu áp lực ngoài được giới thiệu trong phần này.

Các ảnh hưởng của mức độ ràng buộc dịch chuyển các cạnh biên (tham số λ), loại phân bố các lỗ rỗng, tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng (ξ) và nhiệt độ môi trường (T)

lên các tải áp lực ngoài tới hạn của các vỏ trụ FGM có lỗ rỗng được đánh giá trong các hình 3.7 và 3.8. Như có thể nhận thấy từ hình 3.7, các áp lực tới hạn q_{cr} bị giảm nhẹ khi tham số độ cứng ràng buộc không thứ nguyên λ tăng từ 0 (các cạnh tựa di động) đến 1 (các cạnh tựa cố định) ở nhiệt độ phòng ($T = 300\text{ K}$) và bị giảm mạnh khi λ tăng ở nhiệt độ cao ($T = 500\text{ K}$). Dường như hợp lực nén dọc trục do nhiệt ở các cạnh biên bị ràng buộc tăng lên ở nhiệt độ cao và làm cho vỏ trụ bị mất ổn định sớm hơn dưới tác dụng của áp lực ngoài. Hơn nữa, hình 3.7 cũng chứng tỏ rằng vỏ có lỗ rỗng ($\xi = 0.1$) có tải tới hạn thấp hơn đáng kể so với vỏ hoàn hảo ($\xi = 0$) và áp lực tới hạn bị giảm sâu hơn trong trường hợp các lỗ rỗng phân bố đều trong vỏ FGM.



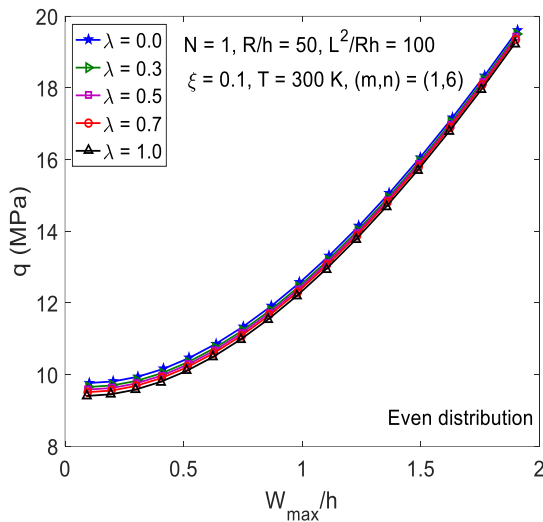
Hình 3.7. Ảnh hưởng của ràng buộc dịch chuyển cạnh lên áp lực ngoài tới hạn của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng.



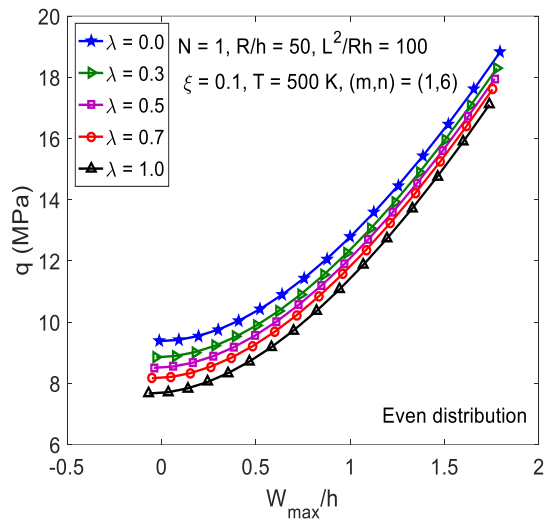
Hình 3.8. Ảnh hưởng của nhiệt độ, tỷ lệ và loại phân bố của các lỗ rỗng lên áp lực ngoài tới hạn của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng.

Hình 3.8, được vẽ cho vỏ có $\lambda = 0.5$ (các cạnh chỉ được dịch chuyển một phần), chỉ ra rằng áp lực ngoài tới hạn bị giảm và giảm mạnh khi tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng tăng lên lần lượt trong trường hợp các lỗ rỗng phân bố không đều (Uneven) và đều (Even) trong FGM. Điều đó cho thấy mức độ chênh lệch các tải tới hạn ứng với hai loại phân bố lỗ rỗng tăng lên khi tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng tăng lên. Mặc dù sự tăng lên của nhiệt độ môi trường dẫn đến sự giảm của áp lực ngoài tới hạn nhưng ảnh hưởng tiêu cực của nhiệt độ cao lên tải tới hạn trở nên nhẹ hơn khi các lỗ rỗng phân bố đều, đặc biệt là ở tỷ lệ lỗ rỗng cao. Tiếp theo, ảnh hưởng của sự ràng buộc cạnh biên lên ứng xử sau vòng của các vỏ trụ FGM có các lỗ rỗng phân bố đều ($\xi = 0.1$) chịu áp lực ngoài ở nhiệt độ phòng ($T = 300\text{ K}$) và nhiệt độ cao ($T = 500\text{ K}$) lần lượt

được phân tích trong các hình 3.9 và 3.10. Sự quan sát các hình này dẫn đến nhận xét rằng sự ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên có ảnh hưởng bất lợi lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài. Cụ thể hơn, khả năng mang tải áp lực ngoài của vỏ trụ FGM bị giảm nhẹ và giảm rõ rệt khi vỏ lần lượt được đặt ở nhiệt độ phòng (tức là chỉ chịu áp lực) và ở nhiệt độ cao (tức là vỏ chịu tải cơ-nhiệt kết hợp). Hơn nữa, khi các cạnh bị ràng buộc chặt, độ võng đều trước khi vòng của vỏ hướng vào trong và hướng ra ngoài lần lượt ở nhiệt độ phòng và nhiệt độ cao.



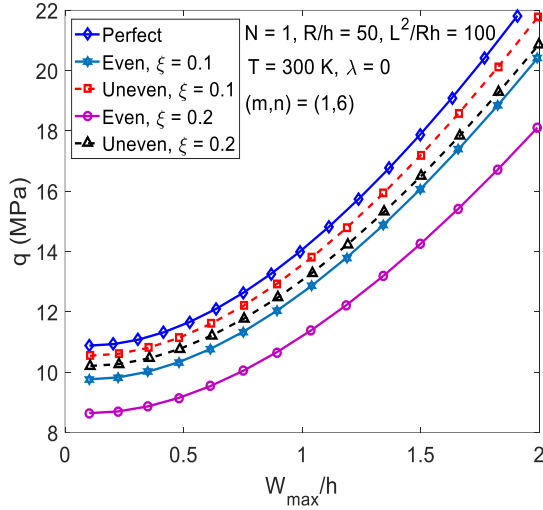
Hình 3.9. Ảnh hưởng của λ lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài ở nhiệt độ phòng.



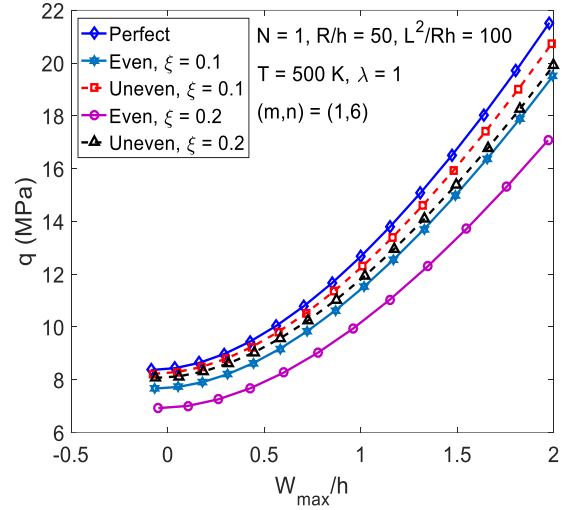
Hình 3.10. Ảnh hưởng của λ lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài ở nhiệt độ cao.

Các ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích và loại phân bố các lỗ rỗng lên đáp ứng sau vòng của vỏ trụ FGM chịu áp lực ngoài với các cạnh tựa di động ở nhiệt độ phòng ($T = 300\text{ K}$, $\lambda = 0$) và với các cạnh tựa cố định ở nhiệt độ cao ($T = 500\text{ K}$, $\lambda = 1$) được lần lượt minh họa trong các hình 3.11 và 3.12. Khi các cạnh tựa di động và ở nhiệt độ phòng, hình 3.11 cho thấy rằng khả năng mang tải của vỏ trụ bị giảm khi tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng tăng lên và mức độ giảm sâu hơn khi các lỗ rỗng phân bố đều trong FGM. Tuy nhiên, khi vỏ có các cạnh biên tựa cố định và đặt ở nhiệt độ cao, sự chênh lệch giữa các đường tải – độ võng ứng với các tỷ lệ và loại phân bố lỗ rỗng khác nhau giảm đi đáng kể. Ví dụ số tiếp theo được chỉ trong hình 3.13 để đánh giá ảnh hưởng của nhiệt độ môi trường lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng và các cạnh tựa cố định ($\xi = 0.2$, $\lambda = 1$) chịu áp lực ngoài. Rõ ràng là khả năng mang tải áp lực trong giai đoạn sau vòng của vỏ trụ bị giảm khi nhiệt độ môi trường tăng lên. Hơn

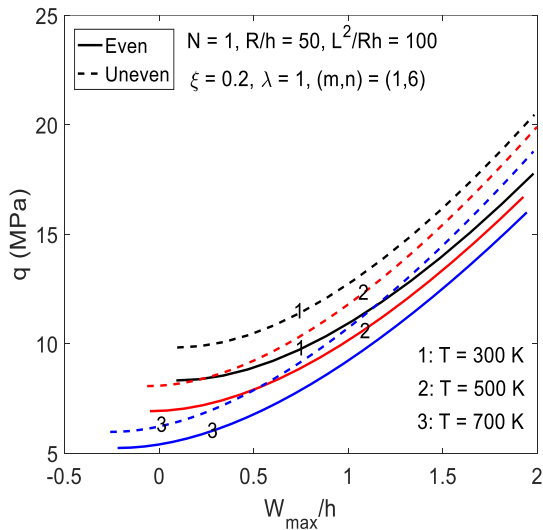
nữa, ở nhiệt độ càng cao thì chênh lệch giữa các đường đáp ứng áp lực – độ võng sau vòng của các vỏ với các kiểu phân bố lỗ rỗng đều và không đều càng được thu hẹp và vỏ bị võng ra phía ngoài (độ võng âm) trong giai đoạn trước khi vòng càng nhiều.



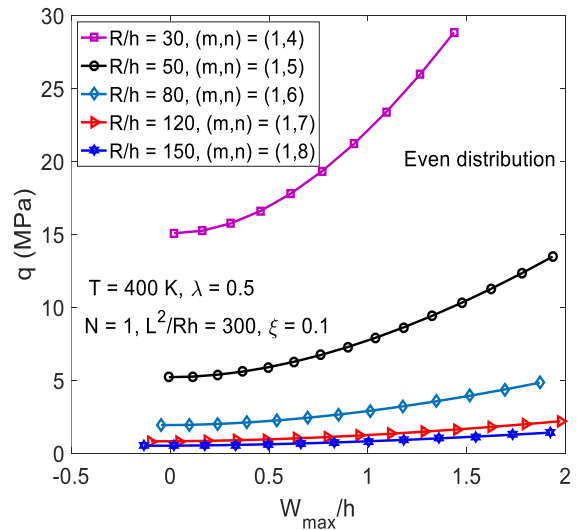
Hình 3.11. Ảnh hưởng của tỷ lệ và loại phân bố lỗ rỗng lên đáp ứng sau vòng của vỏ trụ chịu áp lực ở nhiệt độ phòng.



Hình 3.12. Ảnh hưởng của tỷ lệ và loại phân bố lỗ rỗng lên đáp ứng sau vòng của vỏ trụ chịu áp lực ở nhiệt độ cao.



Hình 3.13. Ảnh hưởng của nhiệt độ cao lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài.



Hình 3.14. Ảnh hưởng của tỷ số R/h lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt.

Kết quả số cuối cùng trong tiểu mục này được chỉ ra trong hình 3.14 để khảo sát ảnh hưởng của tỷ lệ bán kính trên chiều dày R/h lên ứng xử sau vòng của các vỏ trụ FGM có lỗ rỗng và các cạnh có thể dịch chuyển một phần ($\lambda = 0.5$) chịu áp lực

ngoài trong một môi trường nhiệt độ ($T = 400\text{K}$). Có thể thấy rằng tỷ số R/h có ảnh hưởng quan trọng lên xu hướng ứng xử và khả năng mang tải của vỏ trụ. Cụ thể, khả năng mang tải của vỏ trụ giảm rất nhanh khi R/h tăng từ 30 đến 50 và giảm chậm hơn khi tỷ số này trở nên lớn hơn. Hơn nữa, trong khi các đường đáp ứng tải – độ võng của vỏ tương đối dày phát triển khá nhanh (tức là dốc hơn) thì đường đáp ứng của vỏ tương đối mỏng và mỏng được phát triển chậm hơn đáng kể (tức là thoải hơn). Kết quả này cho thấy rằng đáp ứng dạng hóp (snap-through) có thể xảy ra với cường độ nhẹ đối với các vỏ trụ dày hoặc tương đối dày.

3.4.4. Vỏ trụ FGM có lỗ rỗng chịu nhiệt độ tăng đều

Phần này giới thiệu một số kết quả số cho phân tích vòng và sau vòng của các vỏ trụ FGM làm từ $\text{Si}_3\text{N}_4 / \text{SUS304}$ có lỗ rỗng với các cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển chỉ chịu nhiệt độ tăng đều.

Bảng 3.2. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích và tỷ lệ lỗ rỗng lên tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các vỏ trụ FGM [$R/h = 80$, $L^2/Rh = 120$, $\lambda = 1$, $(m, n) = (1, 6)$].

Tính chất	ξ	N				
		0	0.2	1	2	5
T-ID	0	491 ^a (491 ^b)	543 (543)	671 (671)	750 (750)	851 (851)
	0.1	530 (518)	593 (576)	748 (716)	849 (805)	981 (920)
	0.2	576 (548)	652 (611)	847 (767)	979 (867)	1158 (998)
T-D	0	391 (391)	425 (425)	502 (502)	545 (545)	598 (598)
	0.1	417 (409)	457 (446)	547 (529)	600 (576)	665 (634)
	0.2	447 (429)	494 (469)	603 (558)	669 (610)	751 (675)

^a Kết quả khi các lỗ rỗng phân bố đều, ^b Kết quả khi các lỗ rỗng phân bố không đều.

Các ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích N , tỷ lệ ξ và loại phân bố các lỗ rỗng lên tải nhiệt tới hạn của vỏ trụ FGM có các cạnh biên tựa cố định ($\lambda = 1$) chịu nhiệt độ tăng đều được phân tích trong bảng 3.2 cho cả hai trường hợp các tính chất vật liệu không (T-ID) và phụ thuộc (T-D) vào nhiệt độ. Có thể thấy rằng nhiệt độ tới hạn tăng lên và chênh lệch giữa các dự đoán trong hai trường hợp T-ID và T-D cũng tăng lên khi chỉ số tỷ lệ thể tích N lớn hơn. Ví dụ, với trường hợp $\xi = 0.1$ và lỗ rỗng phân bố đều thì tải nhiệt tới hạn trong trường hợp T-D thấp hơn trong trường hợp T-ID

khoảng 29.76% và 47.52% lần lượt đối với $N = 0.2$ và $N = 5$. Một nhận xét thú vị đó là, trái ngược với trường hợp vỏ trụ chịu tải cơ, sự có mặt của các lỗ rỗng có ảnh hưởng tích cực lên khả năng kháng vòng của vỏ trụ chịu tải nhiệt và nhiệt độ tới hạn cao hơn khi tỷ lệ phần trăm về thể tích các lỗ rỗng cao hơn. Cụ thể hơn, với loại lỗ rỗng phân bố đều, $N = 1$ và các tính chất T-D, tải nhiệt tới hạn của vỏ có lỗ rỗng tăng 8.96% và 20.12% so với vỏ hoàn hảo khi trong vỏ có lần lượt 10% ($\xi = 0.1$) và 20% ($\xi = 0.2$) các lỗ rỗng. Hơn nữa, nhiệt độ tới hạn của vỏ có lỗ rỗng phân bố đều cao hơn của vỏ có lỗ rỗng phân bố không đều và sự chênh lệch này trở nên lớn hơn khi tỷ lệ lỗ rỗng ξ cao hơn và/hoặc chỉ số N lớn hơn (vỏ giàu ceramic hơn). Chẳng hạn, tải nhiệt tới hạn khi lỗ rỗng phân bố đều cao hơn khi lỗ rỗng phân bố không đều khoảng 2.47% và 11.26% lần lượt đối với các trường hợp $(\xi, N) = (0.1, 0.2)$ và $(\xi, N) = (0.2, 5)$.

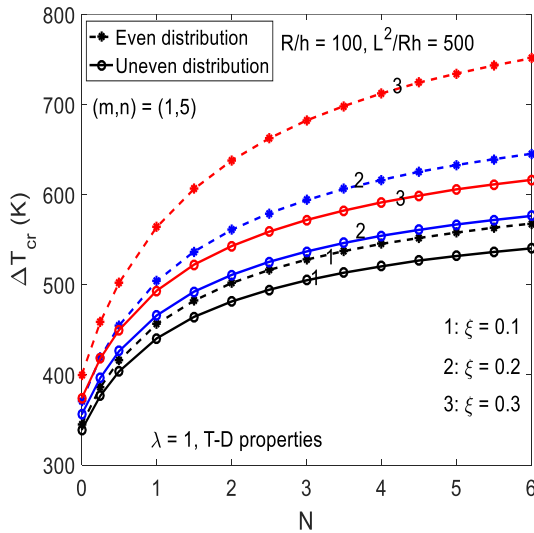
Bảng 3.3. Ảnh hưởng của tỷ số R/h và mức độ ràng buộc cạnh λ lên tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng phân bố đều ($N = 1, L^2 / Rh = 500, \xi = 0.1$)

Tính chất	R/h	λ			
		0.5	0.6	0.8	1.0
T-ID	100	1203 (-1.36)*	1002 (-1.16)	752 (-0.91)	601 (-0.77)
	150	799 (-1.36)	665 (-1.16)	499 (-0.91)	399 (-0.76)
	200	600 (-1.36)	500 (-1.16)	375 (-0.91)	300 (-0.76)
T-D	100	785 (-1.32)	686 (-1.14)	549 (-0.91)	459 (-0.76)
	150	576 (-1.34)	499 (-1.15)	394 (-0.91)	327 (-0.76)
	200	459 (-1.35)	395 (-1.16)	310 (-0.91)	256 (-0.76)

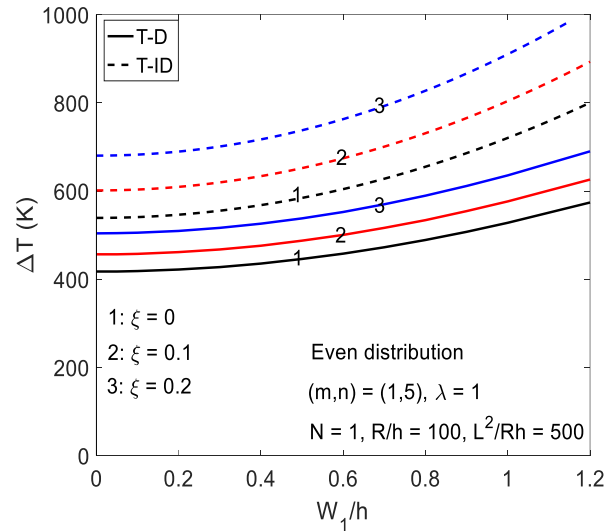
* Số trong ngoặc đơn chỉ giá trị W_0/h . Mode vòng $(m, n) = (1, 5), (1, 6)$ và $(1, 7)$ lần lượt đối với $R/h = 100, 150$ và 200 .

Bảng 3.3 chỉ ra các ảnh hưởng của tỷ số R/h và mức độ ràng buộc cạnh biên λ lên tải nhiệt tới hạn của vỏ trụ FGM có lỗ rỗng phân bố đều ($N = 1, \xi = 0.1$). Có thể quan sát thấy rằng tải nhiệt tới hạn của vỏ bị giảm đi nhanh chóng khi tỷ số R/h và/hoặc λ tăng lên. Ngược lại với trường hợp vỏ trụ chịu áp lực ngoài, các vỏ chịu tải nhiệt sẽ bị võng ra phía ngoài (độ võng âm) trong giai đoạn trước khi vòng và độ võng trước vòng giảm khi các cạnh biên bị ràng buộc chặt chẽ hơn. Một nhận xét

khác đó là ảnh hưởng tiêu cực của tính chất T-D lên sự ổn định của vỏ trở nên rõ ràng hơn đối với các vỏ dày hơn và/hoặc các cạnh bị ràng buộc nhẹ hơn. Ví dụ, tải nhiệt tới hạn trong trường hợp T-D nhỏ hơn tải nhiệt tới hạn trong trường hợp T-ID khoảng 46.06% và 17.19% lần lượt khi $(R/h, \lambda) = (100, 0.6)$ và $(R/h, \lambda) = (200, 1.0)$. Các ảnh hưởng tích cực của vỏ giàu ceramic, tỷ lệ lỗ rỗng cao và loại phân bố đều của các lỗ rỗng lên tải nhiệt tới hạn cũng được khẳng định lại ở hình 3.15.

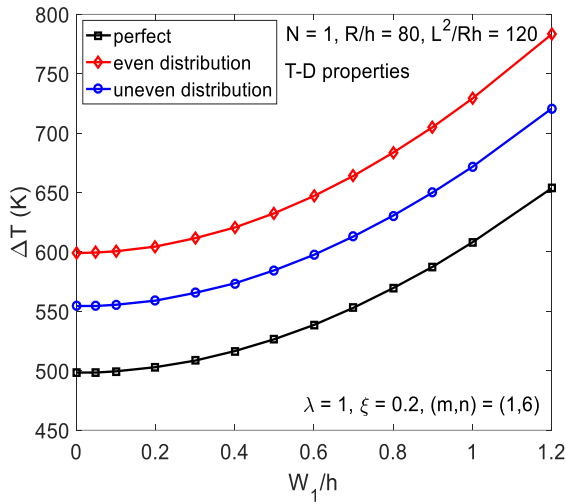


Hình 3.15. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích và tỷ lệ lỗ rỗng lên tải nhiệt tới hạn của vỏ trụ FGM.

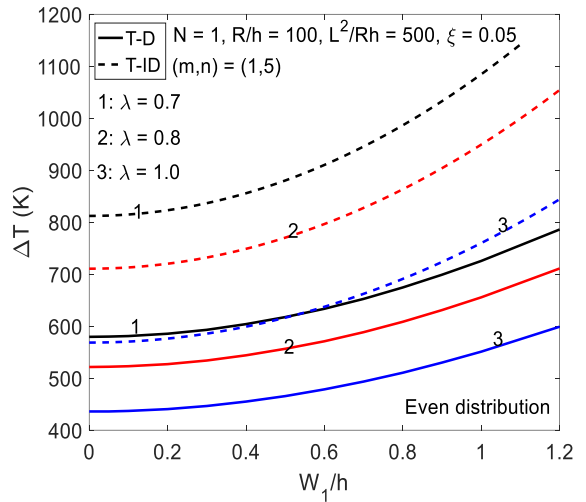


Hình 3.16. Ảnh hưởng của tỷ lệ lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có các cạnh tựa cố định.

Hình 3.16 khảo sát ảnh hưởng của các lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có các cạnh tựa cố định và lỗ rỗng phân bố đều. Có thể dễ nhận thấy rằng, trái ngược với trường hợp vỏ trụ chịu tải cơ, sự có mặt của các lỗ rỗng có ảnh hưởng tích cực lên sự ổn định của vỏ trụ chịu tải nhiệt và khả năng mang tải nhiệt của vỏ trở nên mạnh hơn khi tỷ lệ các lỗ rỗng cao hơn. Tiếp theo, hình 3.17 chỉ ra rằng khả năng mang tải nhiệt của vỏ trở nên cao hơn khi các lỗ rỗng phân bố đều trong vỏ FGM. Các ảnh hưởng của mức độ ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có các lỗ rỗng phân bố đều được phân tích trong hình 3.18. Rõ ràng là các nhiệt độ tới hạn và các đường cân bằng trong giai đoạn sau tới hạn đều bị hạ thấp hơn khi tham số λ trở nên lớn hơn, tức là khi các cạnh biên bị ngăn dịch chuyển nghiêm ngặt hơn. Hơn nữa, có thể nhận thấy rằng các đường cân bằng thoải hơn và thấp hơn nhiều khi kể đến sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu.

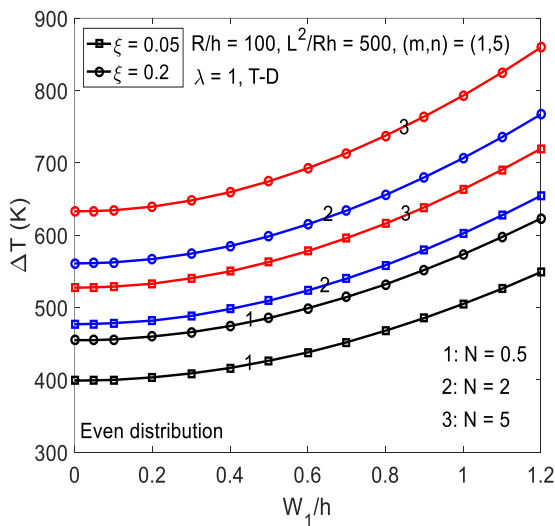


Hình 3.17. Ảnh hưởng của loại phân bố lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM chịu tải nhiệt.

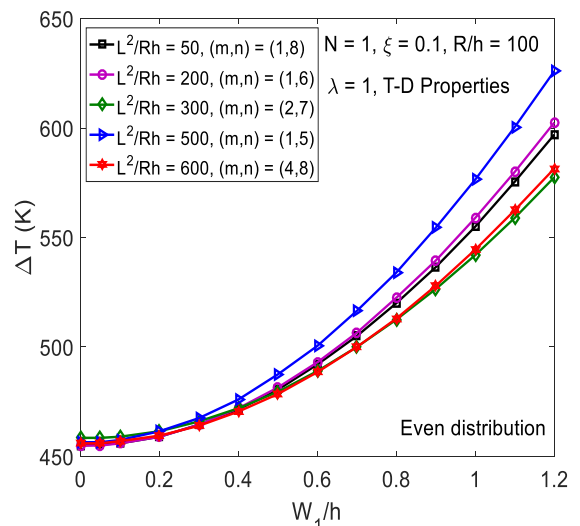


Hình 3.18. Ảnh hưởng của sự ràng buộc các cạnh biên lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ FGM có các lỗ rỗng phân bố đều.

Ví dụ số tiếp theo được chỉ ra trong hình 3.19 để đánh giá ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích lên ứng xử sau vòng của các vỏ trụ FGM có các lỗ rỗng phân bố đều và các cạnh tựa cố định chịu nhiệt độ tăng đều. Có thể nhận thấy rằng sự tăng lên của chỉ số N làm tăng tỷ lệ thành phần ceramic trong FGM và do đó làm tăng khả năng mang tải nhiệt của vỏ. Hơn nữa, ảnh hưởng tích cực của tỷ lệ lỗ rỗng cao ($\xi = 0.2$) lên khả năng mang tải nhiệt rõ ràng hơn đối với các giá trị lớn hơn của chỉ số N .



Hình 3.19. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ có lỗ rỗng phân bố đều chịu tải nhiệt.



Hình 3.20. Ảnh hưởng của tỷ lệ kích thước lên ứng xử sau vòng của vỏ trụ có lỗ rỗng phân bố đều chịu tải nhiệt.

Cuối cùng, hình 3.20 chỉ ra rằng mặc dù mode vòng thay đổi nhưng tải nhiệt tới hạn không thay đổi đáng kể và không có một xu hướng biến đổi rõ ràng về khả năng mang tải nhiệt với các giá trị khác nhau của tỷ số kích thước L^2 / Rh .

3.5. Kết luận chương 3.

Trong chương 3 luận án đã lần đầu tiên sử dụng cách tiếp cận giải tích với dạng độ võng hai số hạng dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất để phân tích ổn định phi tuyến của các vỏ trụ tương đối dày làm từ FGM có các lỗ rỗng chịu các tải cơ, nhiệt và kết hợp cơ-nhiệt. Ảnh hưởng của tính đàn hồi về ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến của các cạnh biên và sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu đã được tính đến trong nghiên cứu. Từ các kết quả đã thu được, luận án đưa ra một số nhận xét sau đây:

1. Dạng độ võng hai số hạng mà luận án sử dụng có thể là một xấp xỉ phù hợp để dự đoán đáp ứng ổn định phi tuyến của các dạng vỏ kín như vỏ trụ tròn khi kể đến biến dạng trượt ngang trong vỏ.

2. Sự có mặt của các lỗ rỗng trong FGM có ảnh hưởng bất lợi lên khả năng kháng vòng và khả năng mang tải sau vòng của vỏ trụ FGM chịu tải cơ. Ngược lại, các lỗ rỗng có ảnh hưởng tích cực lên sự ổn định của vỏ trụ FGM chịu tải nhiệt.

3. Kiểu phân bố lỗ rỗng có ảnh hưởng khác nhau lên sự ổn định của vỏ trụ chịu tải cơ và nhiệt. Cụ thể, vỏ trụ chịu tải cơ và tải nhiệt có sự ổn định tốt hơn khi các lỗ rỗng lần lượt phân bố trong vỏ theo kiểu phân bố không đều và đều.

4. Khả năng mang tải của vỏ trụ FGM trở nên mạnh hơn khi tỷ lệ ceramic trong vỏ cao hơn (N lớn hơn). Hơn nữa, ảnh hưởng của lỗ rỗng, kiểu phân bố lỗ rỗng và các tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ cũng trở nên rõ ràng hơn khi tỷ lệ phần trăm thành phần ceramic cao hơn.

5. Trong đa số các trường hợp, sự ràng buộc dịch chuyển của các cạnh biên đều làm cho tải tới hạn nhỏ hơn và khả năng mang tải của vỏ yếu hơn, đặc biệt là trong môi trường nhiệt độ cao.

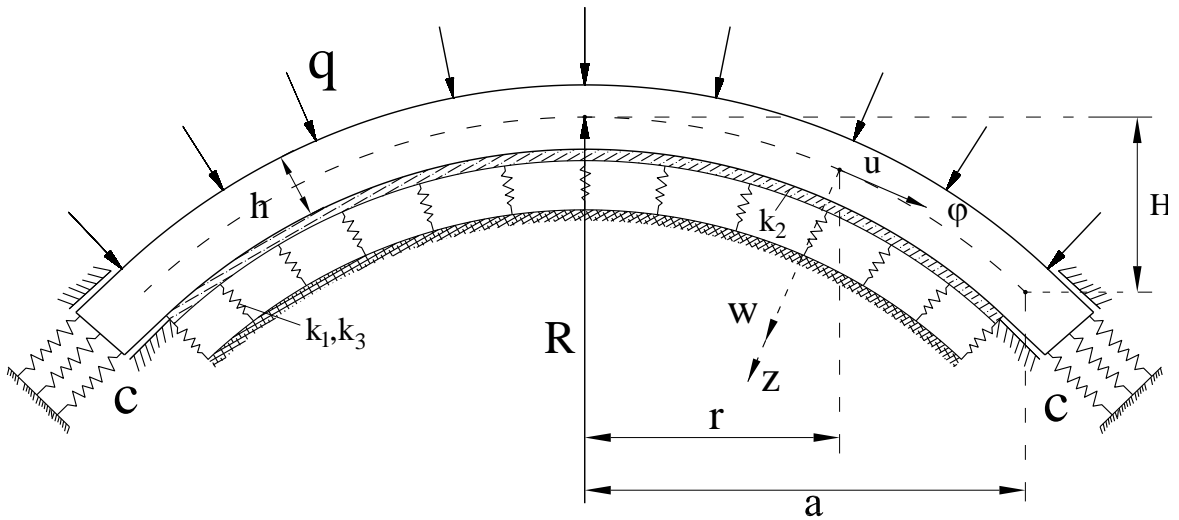
Các kết quả chính của chương 3 đã được công bố trong 2 bài báo khoa học đăng trên các tạp chí quốc tế thuộc danh mục ISI, cụ thể là các bài báo số 3 và 4 trong danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

CHƯƠNG 4. ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA VỎ CẦU THOẢI VÀ TẮM TRÒN FGM CÓ LỖ RỖNG VỚI CÁC CẠNH CHỊU LIÊN KẾT ĐÀN HỒI

Do có nhiều ưu điểm về khả năng chịu áp lực mặt và tính thẩm mỹ, vỏ cầu là dạng kết cấu được sử dụng nhiều trong các bộ phận chịu áp lực lớn, điển hình là các kết cấu trong kỹ thuật xây dựng và hàng không. Tuy nhiên, do sự phức tạp về mặt toán học của các phương trình cơ bản, các công bố về phân tích tĩnh và động của các vỏ cầu thường có số lượng hạn chế hơn rất nhiều so với các công bố về dầm và tấm. Theo hiểu biết của tác giả luận án, trong các tài liệu mở chưa có kết quả nghiên cứu nào được công bố về ổn định phi tuyến của vỏ cầu thoải FGM có lỗ rỗng với các cạnh biên chịu liên kết đàn hồi. Với mong muốn cung cấp thêm sự hiểu biết về ứng xử của vỏ cầu nói chung và ổn định của vỏ cầu FGM nói riêng, chương này của luận án sử dụng một cách tiếp cận giải tích để nghiên cứu ổn định phi tuyến của vỏ cầu thoải FGM có lỗ rỗng với các cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt độ. Như một trường hợp riêng, ổn định phi tuyến của tấm tròn mỏng FGM có lỗ rỗng chịu nhiệt độ tăng đều cũng được phân tích. Các tính chất của các vật liệu thành phần được giả thiết phụ thuộc vào nhiệt độ và các tính chất hiệu dụng của FGM xác định bằng quy tắc hỗn hợp cải tiến. Các lỗ rỗng giả thiết phân bố đều hoặc không đều trong FGM. Vỏ cầu và tấm tròn được giả thiết là mỏng, thoải, chịu biến dạng đối xứng trục và chịu liên kết ngàm ở biên. Bài toán ổn định đặt theo ứng suất và các phương trình cơ bản được thiết lập dựa trên lý thuyết vỏ cổ điển có kể đến tính phi tuyến hình học theo nghĩa von Kármán – Donnell, tính không hoàn hảo hình dáng ban đầu và áp lực tương tác từ nền đàn hồi phi tuyến ba tham số. Các phương trình này được giải bằng nghiệm giải tích và phương pháp Galerkin. Trong bài toán ổn định của tấm tròn FGM chịu tải nhiệt, phương pháp lặp được sử dụng để tính toán các tải nhiệt tới hạn và các đường cân bằng tải nhiệt – độ võng trong giai đoạn sau võng. Sau khi thực hiện các nghiên cứu so sánh để kiểm định độ tin cậy, luận án thực hiện một loạt các kết quả số để phân tích nhiều ảnh hưởng khác nhau lên sự ổn định của vỏ cầu thoải và tấm tròn FGM có lỗ rỗng. Các kết quả phân tích chỉ ra rằng mức độ ràng buộc dịch chuyển ở các cạnh biên có thể có ảnh hưởng quan trọng lên xu hướng ứng xử của vỏ cầu, đặc biệt là khả năng xuất hiện hiện tượng hóp trong vỏ. Hơn nữa, khả năng mang tải và sự ổn định của vỏ, đặc biệt là việc giảm cường độ hóp, có thể đạt được bằng cách sử dụng các dạng nền đàn hồi với độ cứng phù hợp.

4.1. Mô hình kết cấu vỏ cầu thoải FGM có lỗ rỗng

Mô hình kết cấu được xét trong chương này là các vỏ cầu thoải có chiều dày h , bán kính cong R , bán kính đáy a và phần nhô cao (rise) H , như được minh họa trong hình 4.1. Vỏ cầu được giả thiết thoải (tức là $H/a \ll 1$) và được tựa trên một nền đàn hồi ba tham số. Vỏ cầu được xác định trong một hệ tọa độ (φ, θ, z) có gốc nằm trên mặt giữa, các trục φ và θ lần lượt là các tọa độ theo các phương kinh tuyến và vĩ tuyến, và trục z hướng theo pháp tuyến trong của mặt giữa ($-h/2 \leq z \leq h/2$).



Hình 4.1. Mô hình vỏ cầu thoải trên nền đàn hồi.

Vỏ cầu được làm từ vật liệu FGM có lỗ rỗng trong đó các lỗ rỗng tồn tại trong FGM theo các kiểu phân bố đều (Even) hoặc không đều (Uneven). Các tính chất vật liệu hiệu dụng của loại vật liệu này đã được mô tả cụ thể trong mục 2.1 của chương 2 và, để cho ngắn gọn, sẽ không trình bày lại ở đây.

4.2. Các phương trình cơ bản

Trong chương này các vỏ cầu được giả thiết là mỏng, thoải và chịu biến dạng đối xứng trục. Các phương trình cơ bản được thiết lập trong khuôn khổ lý thuyết vỏ cô điển (CST). Để cho thuận lợi, một biến mới r với liên hệ (xem hình 4.1) $r = R \sin \varphi$ sẽ được sử dụng trong việc thiết lập các phương trình cơ bản. Do tính thoải của vỏ cầu, có thể xấp xỉ $\cos \varphi \approx 1$, $R d\varphi \approx dr$ và $R \approx a^2 / 2H$. Dựa trên CST và giả thiết biến dạng đối xứng trục, các thành phần biến dạng khác không tại điểm cách mặt giữa một khoảng z có dạng như sau [17,60,61]

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r0} - z\chi_r, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta0} - z\chi_\theta \quad (4.1)$$

trong đó các thành phần biến dạng của mặt giữa $\varepsilon_{r0}, \varepsilon_{\theta0}$ và các thành phần độ cong χ_r, χ_θ có biểu thức như sau [17,60,61]

$$\varepsilon_{r0} = u' - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w'^2, \quad \varepsilon_{\theta0} = \frac{u}{r} - \frac{w}{R}, \quad \chi_r = w'', \quad \chi_\theta = \frac{w'}{r} \quad (4.2)$$

trong đó u và w lần lượt là các thành phần chuyển vị của một điểm trên mặt giữa ($z = 0$) lần lượt theo các phương φ và z (w cũng được gọi là chuyển vị ngang hay đơn giản là độ võng). Trong khuôn khổ chương hiện tại ký hiệu dấu phẩy trên được sử dụng để chỉ đạo hàm theo biến r , ví dụ $u' = du/dr$, $w'' = d^2w/dr^2$.

Các thành phần ứng suất khác không trong vỏ cầu FGM được xác định từ các liên hệ ứng suất – biến dạng như sau

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha\Delta T], \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha\Delta T] \quad (4.3)$$

trong đó $\Delta T = T - T_0$ là mức tăng nhiệt đều từ giá trị ban đầu là nhiệt độ phòng T_0 mà ở đó vỏ được giả thiết không chịu ứng suất nhiệt.

Các thành phần hợp nội lực và mô men được tính qua các thành phần ứng suất như sau [17]

$$(N_r, N_\theta) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r, \sigma_\theta) dz, \quad (M_r, M_\theta) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r, \sigma_\theta) z dz. \quad (4.4)$$

Sau khi đặt các thành phần biến dạng (4.1) vào (4.3) và thay các biểu thức ứng suất vào (4.4) ta nhận được các biểu thức cụ thể của các nội lực và mô men như sau

$$N_r = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{r0} + \nu\varepsilon_{\theta0}) - \frac{E_2}{1-\nu^2} (\chi_r + \nu\chi_\theta) - \frac{\Phi_1}{1-\nu} \quad (4.5a)$$

$$N_\theta = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta0} + \nu\varepsilon_{r0}) - \frac{E_2}{1-\nu^2} (\chi_\theta + \nu\chi_r) - \frac{\Phi_1}{1-\nu} \quad (4.5b)$$

$$M_r = \frac{E_2}{1-\nu^2} (\varepsilon_{r0} + \nu\varepsilon_{\theta0}) - \frac{E_3}{1-\nu^2} (\chi_r + \nu\chi_\theta) - \frac{\Phi_2}{1-\nu} \quad (4.6a)$$

$$M_\theta = \frac{E_2}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta0} + \nu\varepsilon_{r0}) - \frac{E_3}{1-\nu^2} (\chi_\theta + \nu\chi_r) - \frac{\Phi_2}{1-\nu} \quad (4.6b)$$

trong đó $E_i (i = 1 \div 3)$ và $\Phi_j (j = 1, 2)$ có biểu thức định nghĩa như (3.6).

Dựa trên CST, hệ phương trình cân bằng phi tuyến của vỏ cầu thoải chịu biến dạng đối xứng trục có dạng như sau [60,61]

$$(rN_r)' - N_\theta = 0 \quad (4.7a)$$

$$(rM_r)'' - M_\theta' + \frac{r}{R}(N_r + N_\theta) + (rN_r w')' + r(q - q_f) = 0 \quad (4.7b)$$

trong đó q là áp lực ngoài phân bố đều trên bề mặt ngoài của vỏ cầu và q_f là áp lực tương tác từ nền đàn hồi. Vỏ cầu chịu áp lực thường trải qua độ võng lớn và hiện tượng hóp mạnh và nền đàn hồi phi tuyến được kỳ vọng là một giải pháp giảm võng và hóp. Vì vậy, trong chương này, mô hình nền đàn hồi phi tuyến ba tham số được xem xét và áp lực tương tác từ nền có biểu thức như sau [55,170]

$$q_f = k_1 w - k_2 \Delta_s w + k_3 w^3 \quad (4.8)$$

trong đó $\Delta_s = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ là toán tử Laplace trong trường hợp đối xứng trục và k_1, k_2 và k_3 lần lượt là các tham số độ cứng của nền Winkler tuyến tính, lớp trượt Pasternak và nền Winkler phi tuyến. Khi $k_3 = 0$ ta nhận lại được nền đàn hồi tuyến tính hai tham số theo mô hình Winkler – Pasternak.

Bằng cách đưa vào hàm ứng suất f được xác định sao cho $N_r = f'/r$, $N_\theta = f''$ và kể đến ảnh hưởng của tính không hoàn hảo hình dáng ban đầu, phương trình (4.7a) tự động thỏa mãn và phương trình (4.7b) được viết lại dưới dạng sau

$$D\Delta_s^2 w - \frac{1}{R}\Delta_s f - \frac{1}{r}f'(w + w^*)'' - \frac{1}{r}f''(w + w^*)' - q + k_1 w - k_2 \Delta_s w + k_3 w^3 = 0 \quad (4.9)$$

trong đó w^* là một hàm biết trước mô tả sự không hoàn hảo hình dáng ban đầu của vỏ cầu, $\Delta_s^2 = \Delta_s \Delta_s$ là toán tử lưỡng điều hòa và D là độ cứng chống uốn của vỏ có biểu thức như sau

$$\Delta_s^2 = \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr}, \quad D = \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)}. \quad (4.10)$$

Phương trình (4.9) chứa hai hàm ẩn là hàm độ võng w và hàm ứng suất f . Để thu được một phương trình thứ hai liên hệ các hàm này, luận án sử dụng phương trình tương thích biến dạng. Phương trình tương thích biến dạng của vỏ cầu thoải chịu biến dạng đối xứng trục có dạng như sau [61]

$$\frac{1}{r^2} \left(r^2 \varepsilon'_{\theta\theta} \right)' - \frac{1}{r} \varepsilon'_{r0} = -\frac{1}{R} \Delta_s w - \chi_r \chi_\theta \quad (4.11)$$

Từ các biểu thức (4.5) ta có thể giải các biến dạng mặt giữa $\varepsilon_{r0}, \varepsilon_{\theta\theta}$ qua các thành phần nội lực N_r, N_θ (và do đó qua hàm ứng suất f) và các độ cong χ_r, χ_θ (và do đó qua các đạo hàm của độ võng w theo (4.2)). Sau đó đặt các biểu thức thu được của $\varepsilon_{r0}, \varepsilon_{\theta\theta}$ vào phương trình (4.11) ta có thể viết lại phương trình tương thích biến dạng dưới dạng sau đây

$$\frac{1}{E_1} \Delta_s^2 f = -\frac{1}{R} \Delta_s w - \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{dw^*}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w^*}{dr^2} \right) \quad (4.12)$$

4.3. Nghiệm giải tích của bài toán ổn định

Vỏ cầu thoải được giả thiết chịu liên kết ngàm ở cạnh biên (tức là đường chu tuyến đáy) và chịu liên kết đàn hồi theo phương kinh tuyến (xem hình 4.1). Các điều kiện về tính đối xứng ở đỉnh ($r=0$) và ràng buộc trên biên ($r=a$) của vỏ cầu được biểu diễn về mặt toán học như sau [54,56]

$$w = W, \quad w' = 0, \quad N_r \quad \text{hữu hạn tại đỉnh } r=0 \quad (4.13a)$$

$$w = 0, \quad w' = 0, \quad N_r = N_{r0} \quad \text{tại cạnh biên } r=a \quad (4.13b)$$

trong đó W là độ võng lớn nhất của vỏ cầu thoải và N_{r0} là hợp các phản lực trên cạnh biên do sự ràng buộc dịch chuyển theo phương kinh tuyến. Hợp các phản lực có liên hệ với độ dịch chuyển trung bình Δ_r trên cạnh biên như sau

$$N_{r0} = c \Delta_r \quad (4.14)$$

trong đó c là tham số độ cứng của sự ràng buộc cạnh biên. Nếu mô hình sự ràng buộc như các lò xo thì có thể xem c như độ cứng trung bình của hệ lò xo ràng buộc. Do vỏ cầu thoải chịu biến dạng đối xứng trục, độ dịch chuyển trung bình của cạnh biên theo phương kinh tuyến có biểu thức như sau

$$\Delta_r = -\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{du}{dr} dr \quad (4.15)$$

Có thể nhận thấy từ liên hệ (4.14) rằng các giá trị $c=0$ (tức là $N_{r0}=0$), $c \rightarrow \infty$ (tức là $\Delta_r=0$) và $0 < c < \infty$ lần lượt biểu thị các trường hợp cạnh biên có thể

tự do dịch chuyển (tức là cạnh biên chịu liên kết ngàm trượt), không thể dịch chuyển (tức là cạnh biên chịu liên kết ngàm cứng) và cạnh biên có thể dịch chuyển một phần.

Để thỏa mãn các điều kiện đối xứng và điều kiện biên (4.13), luận án sử dụng các nghiệm xấp xỉ của hàm độ võng w và dạng không hoàn hảo w^* như sau [58,61]

$$w = \frac{W}{a^4}(a^2 - r^2)^2, \quad w^* = \frac{\mu h}{a^4}(a^2 - r^2)^2 \quad (4.16)$$

trong đó μ là một giá trị nhỏ không thứ nguyên được biết đến như cỡ của sự không hoàn hảo hình dáng ban đầu.

Với việc thay các nghiệm (4.16) vào phương trình tương thích biến dạng (4.12) rồi tích phân phương trình vi phân đối với biến hàm ứng suất f có kể đến điều kiện về tính hữu hạn của $N_r = f' / r$ tại đỉnh ($r = 0$) và điều kiện $N_r = N_{r_0}$ tại cạnh biên ($r = a$) ta có thể thu được biểu thức đạo hàm cấp một của hàm ứng suất như sau

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} = & -\frac{E_1}{6a^4 R}(r^5 - 3a^2 r^3)W - \frac{E_1}{6a^8}(r^7 - 4a^2 r^5 + 6a^4 r^3)W(W + 2\mu h) \\ & + \frac{E_1 r}{2a^2}W(W + 2\mu h) - \frac{E_1 r}{3R}W + N_{r_0}r. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Bây giờ các nghiệm (4.16) và (4.17) được thay vào phương trình cân bằng (4.9) và áp dụng phương pháp Galerkin đối với phương trình nhận được, cụ thể là

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a LS \times (a^2 - r^2)^2 r dr d\theta = 0 \quad (4.18)$$

trong đó LS là biểu thức kết quả của vế trái của phương trình cân bằng (4.9) nhận được sau khi đã thay các nghiệm (4.16) và (4.17) vào trong đó. Sau khi thực hiện tích phân ở (4.18) ta nhận được liên hệ sau đây

$$\begin{aligned} q = & \left(\frac{64\bar{D}}{R_h^4 R_a^4} + \frac{4\bar{E}_1}{15R_h^2} + \frac{3E_m^0 K_1}{5R_h^4 R_a^4} + \frac{4E_m^0 K_2}{R_h^4 R_a^4} \right) \bar{W} - \frac{2\bar{E}_1}{3R_h^3 R_a^2} \bar{W}(\bar{W} + \mu) \\ & - \frac{\bar{E}_1}{3R_h^3 R_a^2} \bar{W}(\bar{W} + 2\mu) + \frac{6\bar{E}_1}{7R_h^4 R_a^4} \bar{W}(\bar{W} + \mu)(\bar{W} + 2\mu) \\ & + \frac{E_m^0 K_3}{3R_h^6 R_a^6} \bar{W}^3 + \left[\frac{4}{R_h^2 R_a^2}(\bar{W} + \mu) - \frac{2}{R_h} \right] \bar{N}_{r_0} \end{aligned} \quad (4.19)$$

trong đó

$$R_h = \frac{R}{h}, R_a = \frac{a}{R}, \bar{W} = \frac{W}{h}, \bar{E}_1 = \frac{E_1}{h}, \bar{D} = \frac{D}{h^3}, \bar{N}_{r0} = \frac{N_r}{h},$$

$$(K_1, K_2, K_3) = \frac{a^2}{E_m^0 h^3} (a^2 k_1, k_2, a^4 k_3) \quad (4.20)$$

với E_m^0 là giá trị của E_m được tính ở nhiệt độ phòng $T_0 = 300$ K.

Tiếp sau đây, biểu thức của hợp phản lực \bar{N}_{r0} sẽ được xác định. Từ liên hệ động học (4.2) và biểu thức nội lực (4.5) ta có thể giải ra biểu thức của u' như sau

$$\frac{du}{dr} = u' = \frac{1}{E_1} \left(\frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \nu \frac{d^2 f}{dr^2} \right) + \frac{E_2}{E_1} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{dw}{dr} \frac{dw^*}{dr} + \frac{w}{R} + \frac{\Phi_1}{E_1} \quad (4.21)$$

Bằng cách đặt các nghiệm (4.16) và (4.17) vào (4.21) rồi đặt các biểu thức thu được vào các liên hệ (4.14), (4.15), ta nhận được kết quả sau đây

$$\bar{N}_{r0} = \frac{\bar{c}}{\bar{E}_1 + \bar{c}(1-\nu)} \left[\frac{\bar{E}_1}{3R_h^2 R_a^2} \bar{W} (\bar{W} + 2\mu) - \frac{\bar{E}_1}{3R_h} \bar{W} - G\Delta T \right] \quad (4.22)$$

trong đó

$$\bar{c} = \frac{c}{h}, G = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} E\alpha dz \quad (4.23)$$

Như một trường hợp đặc biệt của nghiên cứu hiện tại, biểu thức của hợp phản lực trên cạnh biên ngàm cứng của tấm tròn chỉ chịu nhiệt độ tăng đều có thể nhận được bằng cách đặc biệt hóa biểu thức (4.22) cho trường hợp $c \rightarrow \infty, R \rightarrow \infty$ và $W = 0$ như sau

$$\bar{N}_{r0} = -\frac{1}{1-\nu} G\Delta T \quad (4.24)$$

Biểu thức (4.24) này cũng đã được dẫn ra trong công trình của Najafizadeh và Heydari [66] bằng cách giải dạng màng của phương trình cân bằng trước vòng khi phân tích ứng xử vòng của tấm tròn FGM hoàn hảo (không lỗ rỗng) chịu nhiệt độ.

Sau khi đặt \bar{N}_{r0} từ (4.22) vào (4.19) ta nhận được liên hệ phi tuyến giữa tải và độ võng lớn nhất không thứ nguyên của vỏ cầu thoải FGM có lỗ rỗng tựa trên nền đàn hồi phi tuyến, đặt trong môi trường nhiệt độ và chịu áp lực ngoài phân bố đều

$$q = \bar{g}_{11}\bar{W} - \bar{g}_{21}\bar{W}(\bar{W} + \mu) - \bar{g}_{31}\bar{W}(\bar{W} + 2\mu) + \bar{g}_{41}\bar{W}(\bar{W} + \mu)(\bar{W} + 2\mu) + \bar{g}_{51}\bar{W}^3 - \bar{g}_{61}\left[\frac{2}{R_h R_a^2}(\bar{W} + \mu) - 1\right]\Delta T \quad (4.25)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \bar{g}_{11} &= \frac{64\bar{D}}{R_h^4 R_a^4} + \frac{4\bar{E}_1}{15R_h^2} + \frac{2\bar{c}\bar{E}_1}{3R_h^2[\bar{E}_1 + \bar{c}(1-\nu)]} + \frac{3E_m^0 K_1}{5R_h^4 R_a^4} + \frac{4E_m^0 K_2}{R_h^4 R_a^4}, \\ \bar{g}_{21} &= \frac{2\bar{E}_1}{3R_h^3 R_a^2} + \frac{4\bar{c}\bar{E}_1}{3R_h^3 R_a^2[\bar{E}_1 + \bar{c}(1-\nu)]}, \quad \bar{g}_{31} = \frac{\bar{E}_1}{3R_h^3 R_a^2} + \frac{2\bar{c}\bar{E}_1}{3R_h^3 R_a^2[\bar{E}_1 + \bar{c}(1-\nu)]}, \\ \bar{g}_{41} &= \frac{6\bar{E}_1}{7R_h^4 R_a^4} + \frac{4\bar{c}\bar{E}_1}{3R_h^4 R_a^4[\bar{E}_1 + \bar{c}(1-\nu)]}, \quad \bar{g}_{51} = \frac{E_m^0 K_3}{3R_h^6 R_a^6}, \quad \bar{g}_{61} = \frac{2\bar{c}G}{R_h[\bar{E}_1 + \bar{c}(1-\nu)]}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Trong trường hợp vỏ cầu thoải chỉ chịu áp lực ngoài ($\Delta T = 0$) liên hệ (4.25) được viết lại như sau

$$q = s_1\bar{W} - s_2\bar{W}^2 + s_3\bar{W}^3 \quad (4.27)$$

trong đó

$$s_1 = \bar{g}_{11} - \mu\bar{g}_{21} - 2\mu\bar{g}_{31} + 2\mu^2\bar{g}_{41}, \quad s_2 = \bar{g}_{21} + \bar{g}_{31} - 3\mu\bar{g}_{41}, \quad s_3 = \bar{g}_{41} + \bar{g}_{51} \quad (4.28)$$

Các giá trị cực trị của độ võng tại các điểm trị của đường liên hệ áp lực – độ võng được xác định từ điều kiện $dq/d\bar{W} = 0$ như sau

$$\bar{W}_{1,2} = \frac{s_2 \mp \sqrt{s_2^2 - 3s_1s_3}}{3s_3} \quad (4.29)$$

nếu điều kiện sau đây được thỏa mãn

$$s_2^2 - 3s_1s_3 > 0 \quad (4.30)$$

Trong trường hợp các tính chất vật liệu, hình dáng vỏ, các lỗ rỗng, mức độ ràng buộc cạnh biên và độ cứng của nền đàn hồi làm cho điều kiện (4.30) được thỏa mãn, vỏ cầu sẽ trải qua ứng xử vòng theo kiểu cực trị với tải tới hạn là giá trị áp lực ứng với điểm cực đại như sau

$$q_{cr} = q(\bar{W}_1) = s_1\bar{W}_1 - s_2\bar{W}_1^2 + s_3\bar{W}_1^3 \quad (4.31)$$

Bài toán ổn định phi tuyến của tấm tròn có bán kính a , chiều dày h làm từ FGM có lỗ rỗng và chịu nhiệt độ tăng đều có thể được xem xét như trường hợp riêng.

Thật vậy, đặc biệt hóa liên hệ (4.25) cho trường hợp $q = 0$ và $R \rightarrow \infty$ ta nhận được liên hệ sau đây

$$\Delta T = \frac{\bar{E}_1 + \bar{c}(1-\nu)}{4\bar{c}G\beta^2} \left(64\bar{D} + \frac{3}{5}E_m^0 K_1 + 4E_m^0 K_2 \right) \frac{\bar{W}}{\bar{W} + \mu} + \frac{\bar{E}_1}{14\bar{c}G\beta^2} \left[3\bar{E}_1 + \bar{c} \left(\frac{23}{3} - 3\nu \right) \right] \bar{W} (\bar{W} + 2\mu) + \frac{E_m^0 K_3 [\bar{E}_1 + \bar{c}(1-\nu)]}{12\bar{c}G\beta^4} \frac{\bar{W}^3}{\bar{W} + \mu} \quad (4.32)$$

trong đó $\beta = a/h$ là tỷ số bán kính trên chiều dày của tấm tròn. Biểu thức (4.32) là liên hệ phi tuyến giữa tải nhiệt và độ võng của tấm tròn FGM có lỗ rỗng đặt trên nền đàn hồi phi tuyến và chịu nhiệt độ tăng đều. Tải nhiệt tới hạn của tấm tròn hoàn hảo hình dáng ($\mu = 0$) có thể thu được từ (4.32) bằng cách cho $\bar{W} \rightarrow 0$ như sau

$$\Delta T_{cr} = \frac{\bar{E}_1 + \bar{c}(1-\nu)}{4\bar{c}G\beta^2} \left(64\bar{D} + \frac{3}{5}E_m^0 K_1 + 4E_m^0 K_2 \right). \quad (4.33)$$

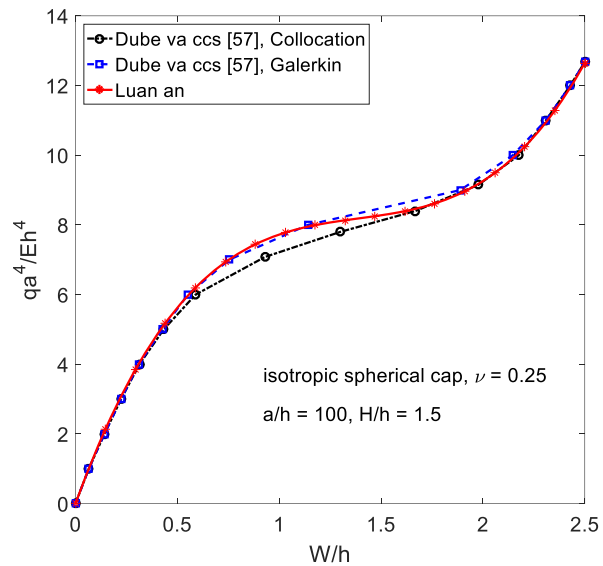
Để nhận thấy từ (4.33) rằng $\Delta T_{cr} \rightarrow \infty$ khi $\bar{c} = 0$. Do vậy, như được mong đợi, tấm tròn với cạnh có thể tự do di chuyển (ngâm trượt) sẽ không bị võng khi chịu nhiệt độ tăng đều. Hơn nữa, có thể quan sát thấy rằng tải nhiệt tới hạn không phụ thuộc vào tham số nền phi tuyến K_3 . Do sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu, tải nhiệt tới hạn và các đường liên hệ tải nhiệt – độ võng trong phân tích sau tới hạn của tấm tròn FGM chịu nhiệt độ tăng đều được xác định bằng cách sử dụng một quá trình lặp.

4.4. Các kết quả số và thảo luận

4.4.1. Các nghiên cứu so sánh

Phần này thực hiện các nghiên cứu so sánh để kiểm chứng độ tin cậy của cách tiếp cận giải tích mà luận án sử dụng. Như đã thảo luận ở phần đầu chương, hiện chưa có công bố nào trong tài liệu mở về ổn định của vỏ cầu thoải và tấm tròn FGM có các lỗ rỗng với cạnh biên chịu liên kết đàn hồi và tựa trên nền đàn hồi phi tuyến. Do đó, không thể thực hiện các nghiên cứu so sánh trực tiếp. Để kiểm tra độ tin cậy, các nghiên cứu so sánh được tiến hành cho các trường hợp đặc biệt của mô hình vật liệu, kết cấu và ràng buộc cạnh biên. Cụ thể, các nghiên cứu so sánh thực hiện với vỏ cầu thoải đẳng hướng chịu áp lực và tấm tròn FGM hoàn hảo chịu tải nhiệt.

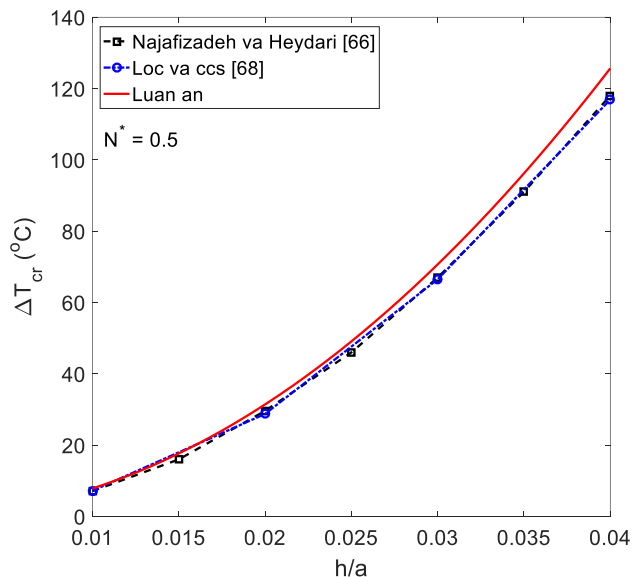
Nghiên cứu so sánh thứ nhất xem xét ổn định phi tuyến của vỏ cầu thoải làm từ vật liệu thuần nhất đẳng hướng với cạnh biên chịu liên kết ngàm và không thể di chuyển (ngàm cứng) chịu áp lực ngoài phân bố đều. Bài toán này cũng đã được nghiên cứu bởi Dube và ccs [57] bằng cách sử dụng phương pháp sắp đặt theo thứ tự (collocation method) và phương pháp Galerkin với hàm trọng số dạng đa thức. Hình 4.2 chỉ ra kết quả các đường cong liên hệ tải – độ võng theo cách tiếp cận giải tích của luận án và các đường cong thu được trong công trình của Dube và ccs [57]. Có thể thấy rằng kết quả của luận án phù hợp tốt với kết quả nhận được trong [57].



Hình 4.2. So sánh đáp ứng tải – độ võng của vỏ cầu thuần nhất đẳng hướng với cạnh ngàm cứng (immovable) chịu áp lực ngoài phân bố đều.

Nghiên cứu so sánh thứ hai xem xét ứng xử vòng của các tấm tròn FGM hoàn hảo vật liệu và hình dạng làm từ các thành phần nhôm (Al) và oxit nhôm (Al_2O_3) có các cạnh ngàm cứng. Các tính chất độc lập với nhiệt độ như mô đun đàn hồi, hệ số dẫn nở nhiệt và hệ số Poisson của hai vật liệu này đã được đề cập trong các nghiên cứu so sánh ở các chương trước.

Hình 4.3. So sánh tải nhiệt tới hạn của tấm tròn làm từ Al / Al_2O_3 có cạnh biên ngàm cứng.



Các tải nhiệt tới hạn của tấm tròn Al / Al_2O_3 thu được bằng cách sử dụng công thức (4.33) của luận án được chỉ ra trong hình 4.3 trong sự so sánh với các kết quả đã thu được bởi Najafizadeh và Heydari [66] sử dụng tiêu chuẩn cân bằng lân cận dựa trên

HSĐT và với kết quả được báo cáo trong công trình của Loc và ccs [68] sử dụng phương pháp đẳng hình học dựa trên HSĐT. Như có thể quan sát thấy rằng kết quả của luận án phù hợp tốt với các kết quả trong [66,68] khi tấm mỏng (tỷ số h/a nhỏ) và hơi cao hơn so với các kết quả được so sánh khi tấm dày hơn (h/a lớn hơn). Điều này là hợp lý vì khi tấm dày hơn trong tấm xuất hiện biến dạng trượt ngang và lý thuyết cổ điển mà luận án sử dụng có thể vượt dự tính các giá trị tải nhiệt tới hạn.

Trong phần còn lại của mục này, các kết quả số cho phân tích ứng xử vòng và sau vòng của các tấm tròn và vỏ cầu thoải FGM làm từ hai vật liệu thành phần đó là Si_3N_4 và $SUS304$ có các lỗ rỗng sẽ được giới thiệu. Các tính chất phụ thuộc vào nhiệt độ của các vật liệu Si_3N_4 và $SUS304$ đã được trình bày trong các chương 2, 3. Tương tự như các chương trước, trong các kết quả số của chương hiện tại, mức độ ràng buộc dịch chuyển trên cạnh biên của tấm tròn hoặc vỏ cầu thoải sẽ được đo bằng tham số không thứ nguyên λ có biểu thức định nghĩa như (2.26) mà theo đó các giá trị $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ và $0 < \lambda < 1$ lần lượt đặc trưng cho các trường hợp cạnh biên có thể tự do dịch chuyển (ngàm trượt), không thể dịch chuyển (ngàm cứng) và dịch chuyển một phần. Để cho việc trình bày được ngắn gọn, nếu không có lưu ý gì thêm, các tấm tròn và vỏ cầu được giả thiết hoàn hảo hình dáng ($\mu = 0$), không có ảnh hưởng của nền đàn hồi ($K_1 = K_2 = K_3 = 0$) và các lỗ rỗng phân bố đều (even) trong FGM.

4.4.2. Tấm tròn FGM có lỗ rỗng chịu nhiệt độ tăng đều

Các ảnh hưởng của tỷ lệ các lỗ rỗng ξ , chỉ số tỷ lệ thể tích N và các độ cứng K_1, K_2 của nền đàn hồi lên tải nhiệt tới hạn của các tấm tròn FGM có các lỗ rỗng phân bố đều và các cạnh ngàm cứng chịu nhiệt độ tăng đều được khảo sát trong bảng 4.1. Như có thể thấy, sự tăng lên của chỉ số tỷ lệ thể tích làm tăng tải nhiệt tới hạn một cách đáng kể. Hơn nữa, các nền đàn hồi cũng giúp cải thiện khả năng kháng vòng của các tấm tròn chịu nhiệt độ và tải nhiệt tới hạn tăng lên khi độ cứng lớp đàn hồi Winkler và đặc biệt là lớp trượt Pasternak tăng lên. Một nhận xét thú vị đó là các lỗ rỗng có ảnh hưởng tích cực lên sự ổn định của tấm FGM chịu nhiệt độ tăng đều và tải nhiệt tới hạn tăng lên khi tỷ lệ các lỗ rỗng tăng lên. Ngược lại, sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu làm giảm tải nhiệt tới hạn của tấm. Ảnh hưởng của tỷ lệ bán kính trên chiều dày a/h và các mức độ ràng buộc dịch chuyển cạnh biên

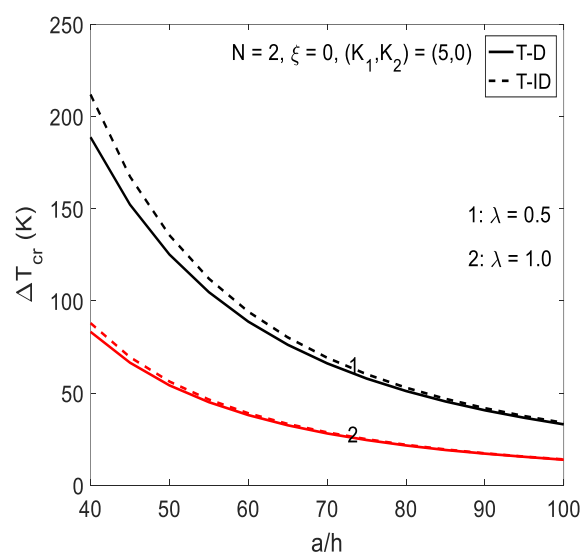
λ ($= 0.5$ và 1) lên tải nhiệt tới hạn của tấm tròn FGM hoàn hảo ($\xi = 0$, $\mu = 0$) tựa trên nền đàn hồi Winkler và chịu nhiệt độ tăng đều được khảo sát trên hình 4.4.

Bảng 4.1. Các tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các tấm tròn FGM có các lỗ rỗng phân bố đều và cạnh biên chịu liên kết ngàm cứng ($a/h = 50$, $\lambda = 1$).

(K_1, K_2)	ξ	N			
		0	0.5	1	5
(0,0)	0	26.44 (26.98)	32.47 (33.27)	35.67 (36.61)	44.16 (45.65)
	0.1	28.54 (29.15)	35.67 (36.66)	39.61 (40.78)	50.43 (52.44)
	0.2	30.99 (31.70)	39.61 (40.82)	44.53 (46.02)	59.04 (61.70)
(5,0)	0	39.73 (40.89)	46.12 (47.66)	49.94 (51.64)	60.02 (62.63)
	0.1	45.02 (46.37)	52.52 (54.45)	57.19 (59.44)	70.48 (73.95)
	0.2	51.78 (53.63)	60.88 (63.38)	66.79 (69.84)	84.87 (89.89)
(5,1)	0	57.32 (59.42)	64.21 (66.86)	68.63 (71.67)	80.93 (85.27)
	0.1	66.54 (69.32)	74.66 (78.16)	80.20 (84.31)	96.55 (102.63)
	0.2	78.97 (82.86)	88.56 (93.46)	95.94 (101.59)	118.57 (127.47)

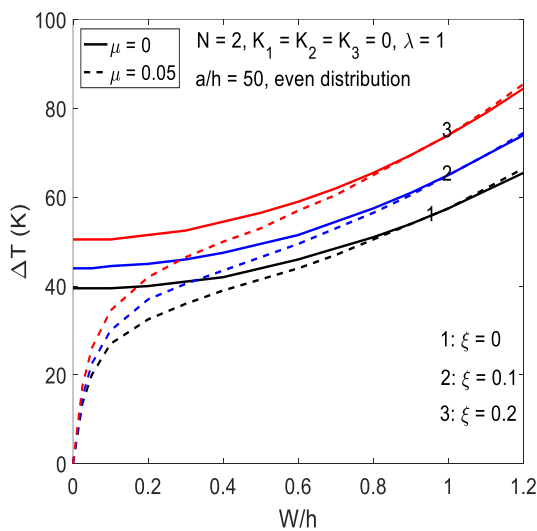
Trong ngoặc là kết quả tính toán khi các tính chất vật liệu độc lập nhiệt độ (T-ID).

Có thể thấy rằng tải nhiệt tới hạn của tấm tròn có cạnh bị ngàm cứng nhỏ hơn nhiều so với tải nhiệt tới hạn của tấm tròn có cạnh được dịch chuyển một phần. Hình 4.4 cũng chỉ ra rằng tải nhiệt tới hạn bị giảm mạnh khi tỷ số a/h trở nên lớn hơn. Hơn nữa mức độ chênh lệch giữa các tải nhiệt tới hạn với các giá trị khác nhau của λ và các trường hợp các tính chất vật liệu phụ thuộc (T-D) và không phụ thuộc (T-ID) vào nhiệt độ giảm đi khi tấm tròn trở nên mỏng hơn.

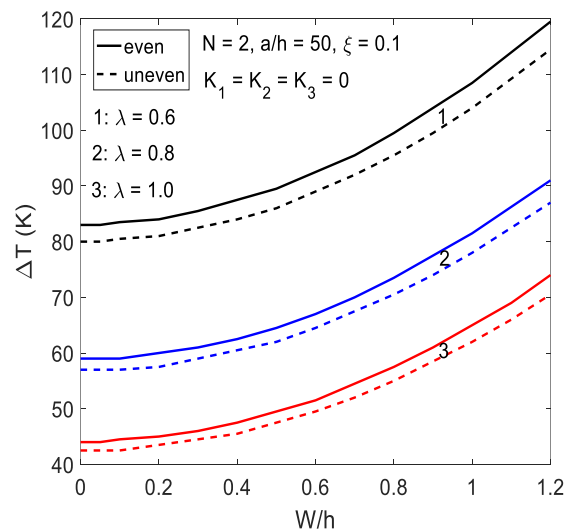


Hình 4.4. Ảnh hưởng của ràng buộc cạnh biên và tỷ số a/h lên tải nhiệt tới hạn của tấm tròn FGM hoàn hảo (không có lỗ rỗng).

Tiếp theo, các ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của tấm tròn FGM có hình dáng hoàn hảo ($\mu = 0$) và không hoàn hảo ($\mu = 0.05$) với cạnh biên ngàm cứng ($\lambda = 1$) chịu tải nhiệt được minh họa trong hình 4.5. Rõ ràng là sự có mặt của các lỗ rỗng trong FGM làm cho tấm tròn ổn định hơn khi chịu tải nhiệt và đường cân bằng tải nhiệt - độ võng của tấm trở nên cao hơn khi tỷ lệ lỗ rỗng tăng lên. Ảnh hưởng tích cực của lỗ rỗng lên khả năng chịu tải nhiệt cũng được quan sát thấy trong nghiên cứu của Cuong và ccs [79] khi phân tích sự ổn định của vi tấm (microplate) FGM có lỗ rỗng chịu tải nhiệt. Hiện tượng này có thể được giải thích là sự tồn tại của các lỗ rỗng làm cho hệ số dẫn nhiệt hiệu dụng của vật liệu composite bị giảm, như được chỉ trong nghiên cứu về vật liệu của Ghabezloo [177]. Ví dụ số tiếp theo được chỉ ra trong hình 4.6 để đánh giá ảnh hưởng của mức độ ràng buộc dịch chuyển trên cạnh biên và loại phân bố lỗ rỗng lên đáp ứng sau vòng của tấm tròn FGM ($N = 2, \xi = 0.1$) chịu nhiệt độ tăng đều. Như có thể thấy, tải nhiệt tới hạn và khả năng mang tải sau tới hạn của tấm tròn bị giảm mạnh khi cạnh biên bị ràng buộc chặt chẽ hơn (tức là λ lớn hơn). Hơn nữa, khả năng mang tải nhiệt của tấm FGM tốt hơn khi các lỗ rỗng phân bố đều trong vật liệu.



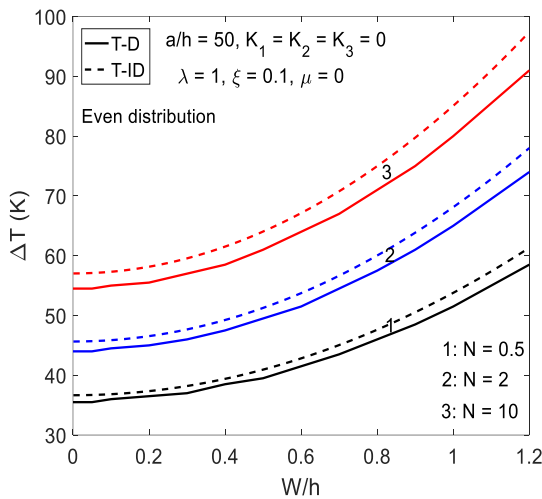
Hình 4.5. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích các lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của tấm tròn FGM chịu tải nhiệt.



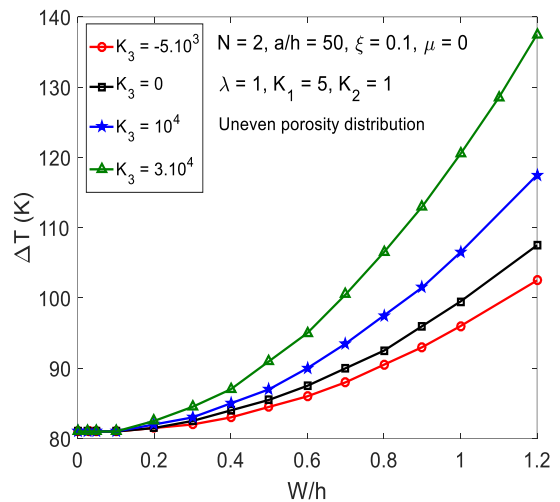
Hình 4.6. Ảnh hưởng của mức độ ràng buộc cạnh và loại phân bố lỗ rỗng lên ứng xử sau vòng của tấm tròn chịu tải nhiệt.

Tiếp theo, hình 4.7 chỉ ra rằng khả năng mang tải nhiệt sau vòng của tấm tròn FGM có lỗ rỗng được tăng lên đáng kể khi chỉ số tỷ lệ thể tích N cao hơn. Hơn nữa, ảnh hưởng bất lợi của tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ (T-D) cũng trở nên rõ ràng

hơn khi chỉ số N cao hơn (tức là tỷ lệ ceramic trong tấm cao hơn). Ví dụ số cuối cùng trong tiêu mục này được chỉ ra trong hình 4.8 để đánh giá ảnh hưởng của tham số nền phi tuyến không thứ nguyên K_3 lên ứng xử sau vòng của tấm tròn FGM có cạnh ngàm cứng và lỗ rỗng ($\xi = 0.1$) phân bố không đều. Như có thể thấy, mặc dù độ cứng nền phi tuyến không ảnh hưởng lên tải nhiệt tới hạn nhưng có ảnh hưởng quan trọng lên khả năng mang tải nhiệt trong giai đoạn sau tới hạn, đặc biệt là trong miền độ võng lớn. Cụ thể hơn, trong khi nền loại làm mềm (softening-type foundation) với $K_3 < 0$ làm giảm khả năng mang tải nhiệt trong giai đoạn sâu của đáp ứng sau vòng thì nền loại làm cứng (hardening-type foundation) với $K_3 > 0$ giúp cho khả năng mang tải của tấm tròn trong giai đoạn sau vòng được cải thiện đáng kể.



Hình 4.7. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích lên ứng xử sau vòng của tấm tròn FGM có lỗ rỗng phân bố đều chịu nhiệt.



Hình 4.8. Ảnh hưởng của nền phi tuyến lên ứng xử sau vòng của tấm tròn FGM có lỗ rỗng phân bố không đều chịu nhiệt.

4.4.3. Vỏ cầu thoải FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài

Trong phần đầu của tiêu mục này, luận án trình bày các kết quả số về phân tích ổn định phi tuyến của vỏ cầu thoải FGM có lỗ rỗng chỉ chịu áp lực ngoài, tức là các vỏ đặt ở nhiệt độ phòng ($T = 300\text{K}$, $\Delta T = 0$).

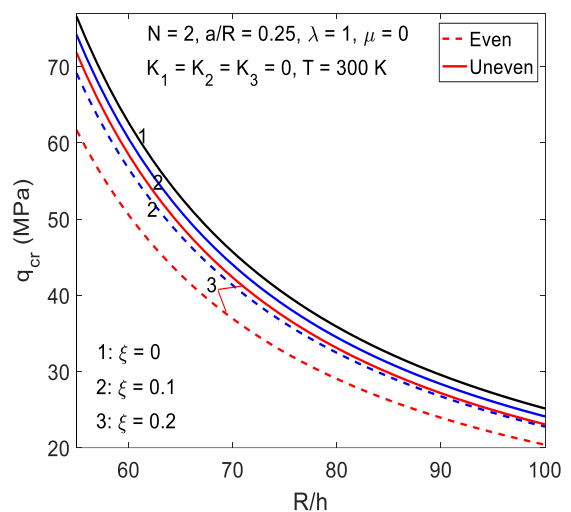
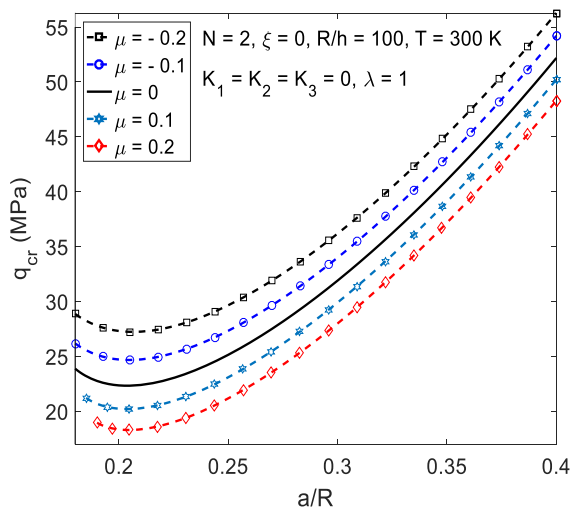
Trước tiên, ảnh hưởng của các yếu tố lên đáp ứng vòng loại cực trị của vỏ cầu được phân tích trong bảng 4.2 và các hình 4.9, 4.10. Các ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích, tỷ số bán kính đáy trên bán kính cong a/R và mức độ ràng buộc dịch chuyển theo phương kinh tuyến λ của cạnh biên lên các tải tới hạn (loại cực trị) của các vỏ

cầu thoải FGM hoàn hảo ($\mu = 0, \xi = 0$) chỉ chịu áp lực ngoài được khảo sát trong bảng 4.2. Các ảnh hưởng của độ không hoàn hảo hình dáng (μ) và tỷ số a/R lên tải tới hạn của vỏ cầu FGM hoàn hảo ($\xi = 0$) chịu áp lực ngoài được phân tích trong hình 4.9 trong đó các giá trị âm và dương của μ lần lượt biểu thị độ lệch ban đầu của bề mặt vỏ ra phía ngoài (phía lồi) và vào phía trong (phía lõm).

Bảng 4.2. Các tải tới hạn q_{cr} (MPa) của vỏ cầu thoải FGM hoàn hảo chỉ chịu áp lực ngoài ($R/h = 100, \xi = 0, K_1 = K_2 = K_3 = 0, \mu = 0, T = 300\text{K}$).

N	a/R	λ				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	0.2	NB	NB	NB	15.1585	16.7276
	0.25	9.0678	10.8560	13.0238	15.5776	18.5825
	0.3	9.1533	12.0155	15.2898	19.0643	23.4589
5	0.2	NB	NB	19.7734	21.3554	23.7251
	0.25	12.7865	15.4470	18.6351	22.3768	26.7719
	0.3	13.1227	17.3054	22.0871	27.5971	34.0113

NB nghĩa là không có đáp ứng vòng (No Buckling).



Hình 4.9. Ảnh hưởng của tỷ số a/R và độ không hoàn hảo hình dáng lên áp lực tới hạn của vỏ cầu FGM không lõm rỗng.

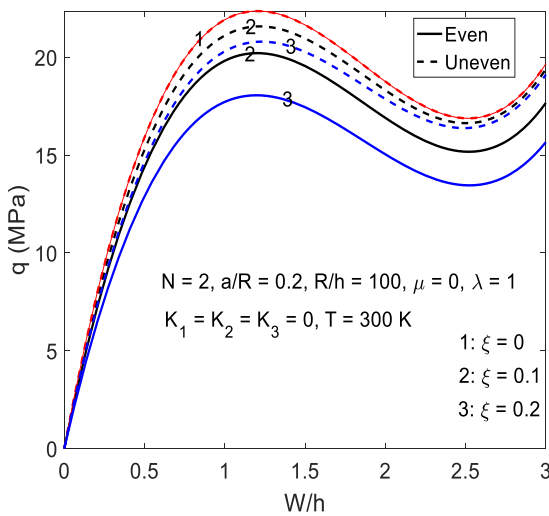
Hình 4.10. Ảnh hưởng của tỷ số R/h , tỷ lệ và loại phân bố lỗ rỗng lên áp lực tới hạn của vỏ cầu có cạnh ngầm cứng.

Các số liệu trong bảng 4.2 và hình 4.9 chứng tỏ rằng khả năng xuất hiện đáp ứng vòng loại cực trị (extreme-type buckling), tức là điều kiện (4.30) được thỏa mãn và tồn tại giá trị áp lực tới hạn q_{cr} , phụ thuộc khá nhạy vào các yếu tố như tỷ số bán kính đáy trên bán kính cong a/R , mức độ ràng buộc cạnh λ , độ không hoàn hảo μ và chỉ số tỷ lệ thể tích N . Cụ thể hơn, đáp ứng vòng chỉ tồn tại khi vỏ cầu đủ cong (tỷ số a/R lớn hơn một giá trị nhất định) và/hoặc cạnh biên bị ràng buộc đủ chặt chẽ (λ lớn hơn một giá trị nhất định). Với mỗi giá trị nhất định của λ và N , tải áp lực tới hạn q_{cr} ban đầu giảm nhẹ khi tỷ số a/R tăng đến một giá trị nhất định sau đó được tăng rõ rệt khi a/R tăng lên như được chỉ ra trong hình 4.9. Với cùng một giá trị của tỷ số a/R và tham số λ , chỉ số tỷ lệ thể tích N (phản ánh tỷ lệ các vật liệu thành phần trong FGM) có thể quyết định sự xuất hiện ứng xử vòng kiểu cực trị. Ví dụ, với $a/R = 0.2$ và $\lambda = 0.6$, vỏ cầu làm từ kim loại thuần nhất ($N = 0$) sẽ không có đáp ứng vòng nhưng vỏ cầu giàu ceramic với $N = 5$ sẽ có ứng xử vòng cực trị. Hình 4.9 cũng chỉ ra rằng sự không hoàn hảo hình dáng ban đầu có ảnh hưởng quan trọng lên giá trị tải tới hạn, cụ thể là các biến dạng nhỏ ban đầu của mặt vỏ cầu hướng vào trong và ra ngoài lần lượt làm giảm và tăng giá trị áp lực tới hạn của vỏ cầu.

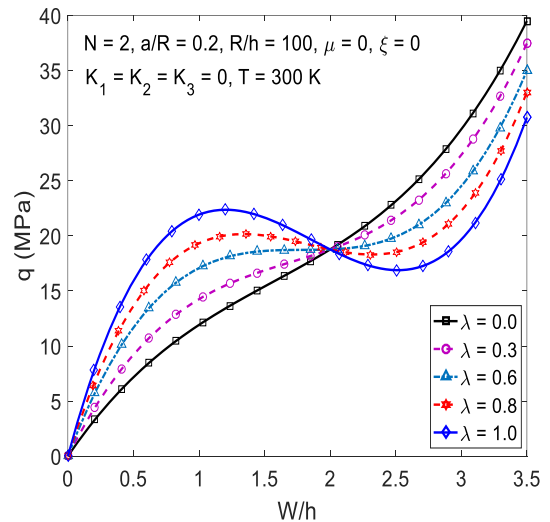
Hình 4.10 khảo sát ảnh hưởng của tỷ số bán kính cong trên chiều dày R/h , tỷ lệ thể tích và loại phân bố các lỗ rỗng lên các tải áp lực tới hạn của vỏ cầu FGM có cạnh biên bị ngàm chặt ($\lambda = 1$) và hình dạng hoàn hảo ($\mu = 0$). Rõ ràng là sự có mặt của các lỗ rỗng có ảnh hưởng tiêu cực lên áp lực tới hạn và vỏ cầu sẽ bị vòng sớm hơn khi tỷ số R/h và/hoặc tỷ lệ ξ cao hơn. Hơn nữa, giá trị tải áp lực tới hạn khi các lỗ rỗng phân bố đều nhỏ hơn khi các lỗ rỗng phân bố không đều và sự chênh lệch giữa các tải tới hạn ứng với hai loại phân bố trở nên lớn hơn khi tỷ lệ lỗ rỗng cao hơn.

Tiếp theo đây, ứng xử ổn định phi tuyến của vỏ cầu thoải FGM chịu áp lực ngoài được phân tích trong các hình 4.11 – 4.16. Hình 4.11 khảo sát ảnh hưởng của tỷ lệ và loại phân bố các lỗ rỗng lên sự ổn định của vỏ cầu FGM có cạnh biên bị ngàm cứng chịu áp lực ngoài. Sự quan sát hình này nhận thấy rằng đường cân bằng tải – độ võng bị hạ thấp đáng kể khi tỷ lệ lỗ rỗng trong FGM tăng lên và đường cân bằng trở nên thấp hơn khi các lỗ rỗng phân bố đều trong FGM. Sự chênh lệch về khả năng mang tải của vỏ cầu ứng với hai loại phân bố của lỗ rỗng trở nên lớn hơn khi tỷ lệ lỗ rỗng cao hơn. Một trong những điểm quan trọng trong phân tích sự ổn định phi tuyến

của vỏ cầu chịu áp lực ngoài đó là khả năng xuất hiện đáp ứng hóp (snap-through response) cũng như việc hạn chế độ mạnh (intensity) của hóp mà được đo bởi mức độ chênh lệch các giá trị áp lực ứng với điểm cực đại (cũng là áp lực tới hạn) và điểm cực tiểu trên đường cong áp lực – độ võng. Từ sự quan sát các đường tải – độ võng trên hình 4.11 có thể nhận xét rằng mặc dù các lỗ rỗng làm giảm khả năng mang tải của vỏ cầu chịu áp lực nhưng dường như độ mạnh của đáp ứng hóp thay đổi rất ít khi tỷ lệ các lỗ rỗng tăng lên.



Hình 4.11. Ảnh hưởng của tỷ lệ lỗ rỗng lên ổn định phi tuyến của vỏ cầu FGM có cạnh ngầm cứng chịu áp lực ngoài.

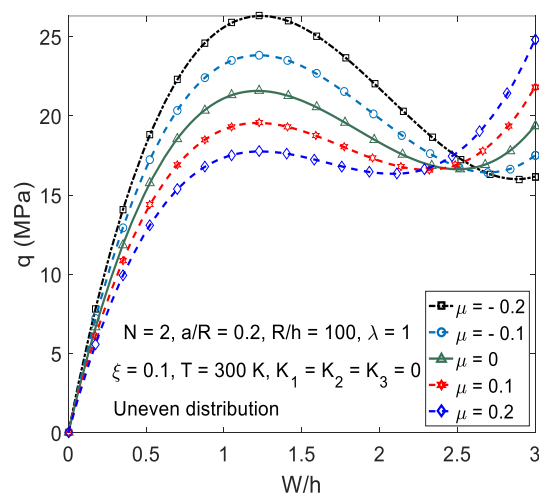
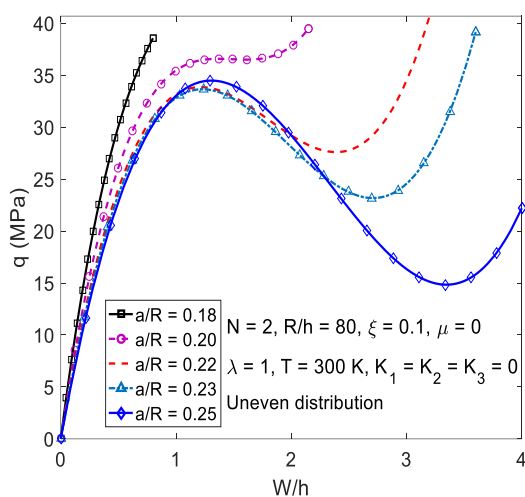


Hình 4.12. Ảnh hưởng của ràng buộc cạnh biên lên ổn định phi tuyến của vỏ cầu FGM hoàn hảo chịu áp lực ngoài.

Các ảnh hưởng của mức độ ràng buộc cạnh biên lên ứng xử phi tuyến của vỏ cầu thoải FGM hoàn hảo chịu áp lực ngoài được phân tích trong hình 4.12. Có thể thấy rằng, với các tính chất vật liệu và hình học xác định, đường cân bằng áp lực – độ võng trong giai đoạn độ võng nhỏ được nâng cao lên khi tham số ràng buộc dịch chuyển λ tăng lên và hiện tượng vòng kiểu cực trị chỉ xuất hiện khi λ đủ lớn (các cạnh bị ràng buộc đủ chặt). Tuy nhiên, đáp ứng sau vòng không ổn định và cường độ hóp tăng lên khi tăng mức độ ràng buộc dịch chuyển cạnh biên.

Tiếp theo, các ảnh hưởng của tỷ số bán kính đáy trên bán kính cong a/R và mức độ không hoàn hảo hình dáng ban đầu μ lên đáp ứng phi tuyến của vỏ cầu FGM có các lỗ rỗng phân bố không đều và cạnh biên ngầm cứng chịu áp lực ngoài lần lượt được nghiên cứu trong các hình 4.13 và 4.14. Hình 4.13 chỉ ra rằng tỷ số a/R có ảnh hưởng nhạy lên ứng xử của vỏ cầu. Cụ thể, đáp ứng kiểu vòng cực trị chỉ xuất hiện

khi a/R vượt qua một giá trị nhất định và áp lực tới hạn của vỏ cầu FGM giảm khi tỷ số a/R tăng trong đoạn nhỏ (khoảng $0.2 \leq a/R \leq 0.23$ trong ví dụ này, tương tự như xu hướng biến đổi đã chỉ ra trong hình 4.9). Sau đó, khi a/R đạt giá trị đủ lớn (khoảng $a/R > 0.23$ trong ví dụ này) thì áp lực ngoài tới hạn và cường độ của đáp ứng hóp đều tăng lên khi tăng tỷ số a/R . Hình 4.14, được vẽ với năm giá trị khác nhau của cỡ không hoàn hảo μ , chỉ ra rằng dường như sự không hoàn hảo của hình dáng vỏ ban đầu đã làm thay đổi độ cong thực tế của vỏ cầu. Cụ thể hơn, các độ lệch nhỏ ban đầu hướng vào trong ($\mu > 0$) và ra ngoài ($\mu < 0$) của bề mặt vỏ cầu lần lượt làm giảm và tăng cả tải áp lực tới hạn và cường độ của đáp ứng hóp.

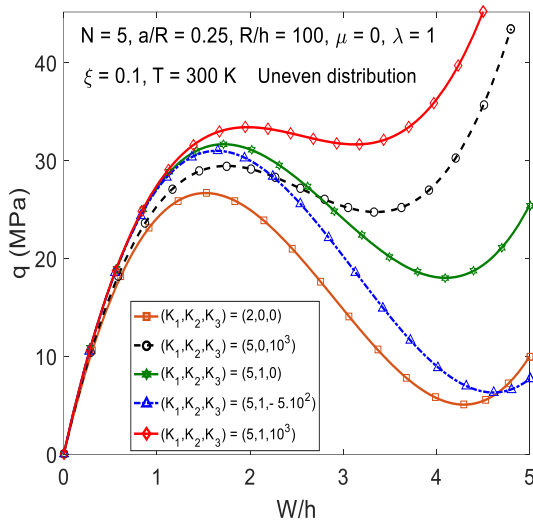


Hình 4.13. Ảnh hưởng của tỷ số độ cong a/R lên đáp ứng phi tuyến của vỏ cầu FGM có lỗ rỗng phân bố không đều.

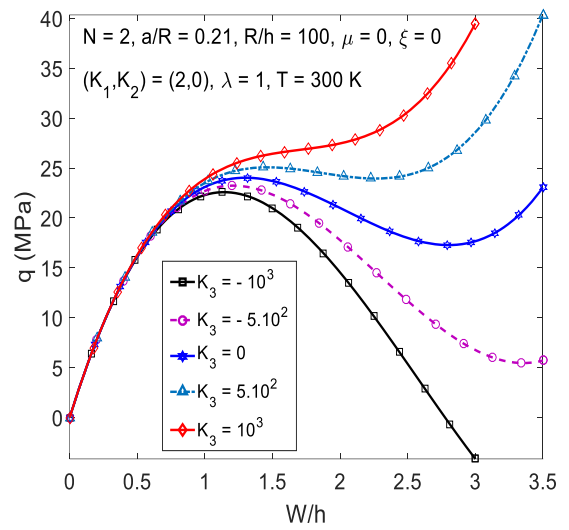
Hình 4.14. Ảnh hưởng của sự không hoàn hảo lên đáp ứng phi tuyến của vỏ cầu FGM có lỗ rỗng phân bố không đều.

Ví dụ số tiếp theo được chỉ trong hình 4.15 để đánh giá ảnh hưởng của nền đàn hồi phi tuyến ba tham số lên sự ổn định phi tuyến của vỏ cầu thoải FGM có lỗ rỗng phân bố không đều ($\xi = 0.1$) và cạnh biên ngàm cứng ($\lambda = 1$) chịu áp lực ngoài. Hình 4.16 phân tích ảnh hưởng của riêng hệ số độ cứng không thứ nguyên K_3 của nền phi tuyến lên đáp ứng phi tuyến của vỏ cầu FGM hoàn hảo với cạnh ngàm cứng chịu áp lực ngoài. Có thể nhận thấy từ các hình này rằng nền đàn hồi mang lại lợi ích rõ rệt cho sự ổn định phi tuyến của vỏ cầu chịu áp lực ngoài. Cụ thể là áp lực tới hạn được nâng lên trong khi cường độ đáp ứng hóp bị giảm đi khi vỏ cầu được đỡ bởi các nền đàn hồi. Tham số độ cứng K_3 của nền phi tuyến hầu như không ảnh hưởng lên khả năng mang tải trước vòng nhưng có ảnh hưởng rõ rệt lên đáp ứng trong miền độ

võng sâu sau vòng và các nền loại làm mềm ($K_3 < 0$) và làm cứng ($K_3 > 0$) lần lượt làm tăng và giảm cường độ của đáp ứng hợp.

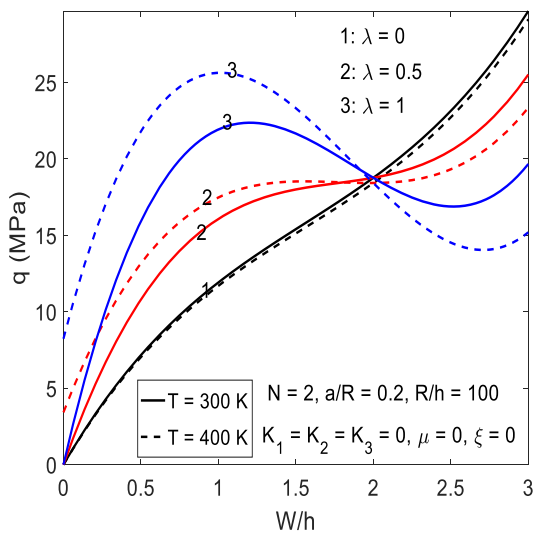


Hình 4.15. Ảnh hưởng của nền đàn hồi phi tuyến lên ổn định phi tuyến của vỏ cầu FGM có lỗ rỗng phân bố không đều.

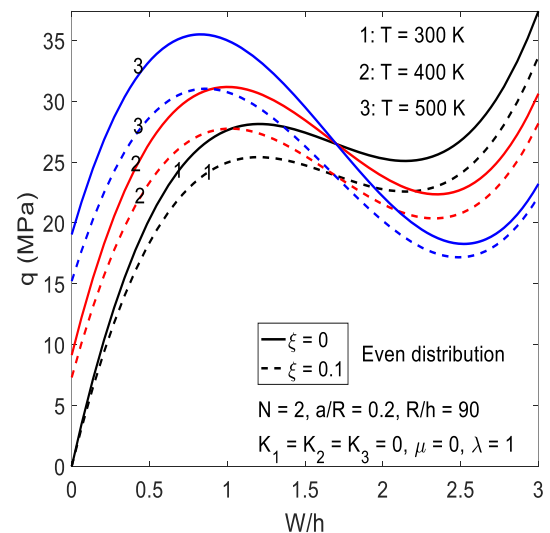


Hình 4.16. Ảnh hưởng của tham số nền phi tuyến lên ổn định phi tuyến của vỏ cầu FGM tựa trên nền đàn hồi Winkler.

Trong phần còn lại của mục này, luận án trình bày các kết quả số cho phân tích ổn định phi tuyến của vỏ cầu FGM với cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển đặt trong môi trường nhiệt tồn tại trước và chịu áp lực ngoài.



Hình 4.17. Ảnh hưởng của λ lên đáp ứng phi tuyến của vỏ cầu FGM chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt.



Hình 4.18. Ảnh hưởng của tỷ lệ lỗ rỗng và các mức nhiệt lên ổn định phi tuyến của vỏ cầu FGM chịu áp lực ngoài.

Các ảnh hưởng của mức độ ràng buộc cạnh biên lên đáp ứng phi tuyến của vỏ cầu thoải FGM hoàn hảo ($\mu = 0, \xi = 0$) chịu áp lực ngoài ở nhiệt độ phòng ($T = 300$ K) và nhiệt độ cao ($T = 400$ K) được so sánh trong hình 4.17. Có thể nhận thấy rằng vỏ cầu với các cạnh bị ràng buộc chịu áp lực ngoài ở nhiệt độ cao sẽ trải qua đáp ứng dạng tựa rẽ nhánh và áp lực tại điểm rẽ nhánh và đường cân bằng trở nên cao hơn khi các cạnh bị ràng buộc chặt chẽ hơn. Cuối cùng, các ảnh hưởng của tỷ lệ lỗ rỗng và các mức nhiệt lên ổn định phi tuyến của các vỏ cầu FGM với cạnh ngàm cứng chịu áp lực ngoài được phân tích trong hình 4.18. Như có thể thấy, khác với trường hợp tấm tròn chỉ chịu tải nhiệt, ngay ở nhiệt độ cao các lỗ rỗng vẫn gây ảnh hưởng bất lợi lên khả năng chịu áp lực của vỏ cầu. Sự tăng lên của nhiệt độ dường như gây nên ứng suất nhiệt trên cạnh vỏ làm vỏ bị võng ra phía ngoài, trở nên cong hơn và chịu áp lực ngoài tốt hơn. Tuy nhiên, sự tăng lên của khả năng mang tải trong giai đoạn trước vòng và áp lực tới hạn đi kèm với sự tăng lên của cường độ hóp trong giai đoạn sau vòng khi nhiệt độ môi trường tăng lên.

4.5. Kết luận chương 4

Từ các kết quả đã thu được trong chương 4, luận án đưa ra các nhận xét sau:

1. Sự có mặt của các lỗ rỗng mang lại các ảnh hưởng có lợi và có hại lên các khả năng kháng vòng và mang tải trong giai đoạn sau vòng lần lượt của tấm tròn FGM chịu tải nhiệt tăng đều và vỏ cầu thoải FGM chịu áp lực ngoài.

2. Sự phân bố lỗ rỗng theo kiểu đều trong FGM mang lại nhiều lợi ích hơn so với kiểu không đều cho sự ổn định của tấm tròn FGM chịu nhiệt độ tăng đều. Ngược lại, sự phân bố lỗ rỗng theo kiểu không đều gây nên ít tác hại hơn so với kiểu đều cho sự ổn định của vỏ cầu FGM chịu áp lực ngoài. Hơn nữa, mức độ chênh lệch giữa các dự đoán ứng với hai loại phân bố tăng lên khi tỷ lệ các lỗ rỗng tăng lên.

3. Tải nhiệt tới hạn và khả năng mang tải nhiệt trong giai đoạn sau tới hạn bị giảm mạnh khi tăng mức độ ràng buộc dịch chuyển ở cạnh biên. Ngược lại, độ cứng của nền phi tuyến không có ảnh hưởng lên tải nhiệt tới hạn nhưng có ảnh hưởng quan trọng lên khả năng mang tải nhiệt trong miền độ võng sâu của giai đoạn sau vòng.

4. Đối với vỏ cầu FGM chịu áp lực ngoài, khả năng mang tải trong giai đoạn trước vòng và tải áp lực tới hạn được tăng đáng kể khi tăng một trong những hoặc

tất cả các yếu tố là độ cong của vỏ (a/R), mức độ ràng buộc dịch chuyển cạnh biên (λ) của vỏ, độ lệch nhỏ (sự không hoàn hảo) ban đầu của mặt vỏ ra phía ngoài và tỷ lệ phần trăm ceramic trong FGM. Tuy nhiên, đi kèm với “cái được” về khả năng mang tải trước vòng và tải tới hạn cao là “cái mất” trong giai đoạn sau vòng vì cường độ (intensity) của hiện tượng hóp tăng lên khi tăng các yếu tố kể trên. Ngược lại, mặc dù các lỗ rỗng làm giảm đáng kể tải áp lực tới hạn nhưng dường như cường độ của hiện tượng hóp rất ít thay đổi khi tỷ lệ các lỗ rỗng tăng lên.

5. Nhiệt độ tồn tại trước có ảnh hưởng rất nhẹ lên việc giảm khả năng chịu áp lực của vỏ cầu có các cạnh ngàm trượt (movable edge). Ngược lại, sự có mặt của nhiệt độ cao tồn tại trước làm thay đổi xu hướng ứng xử và khả năng mang tải của vỏ cầu với cạnh bị ràng buộc dịch chuyển chịu áp lực ngoài. Dường như ứng suất trước do nhiệt ở cạnh bị ràng buộc gây nên lực nén làm cho vỏ cầu bị võng ra phía ngoài, làm thay đổi độ cong của vỏ và làm cho vỏ cầu có ứng xử tựa rẽ nhánh khi chịu áp lực ngoài. Do vậy, dường như nhiệt độ cao tồn tại trước có ảnh hưởng tích cực lên khả năng mang tải của vỏ cầu với cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển theo phương kính tuyến và chịu áp lực ngoài.

6. Nói chung, nền đàn hồi có ảnh hưởng tích cực lên sự ổn định của vỏ cầu chịu áp lực ngoài theo nghĩa rằng áp lực tới hạn được tăng lên và cường độ của hiện tượng hóp của vỏ được giảm đi khi vỏ được đỡ bởi các nền đàn hồi. Nói riêng về nền phi tuyến, mặc dù tham số nền phi tuyến K_3 có rất ít ảnh hưởng lên khả năng mang tải trong giai đoạn trước vòng và tải vòng tới hạn nhưng có ảnh hưởng quan trọng lên ứng xử trong miền độ võng lớn sau vòng.

7. Các kết quả phân tích của chương này giúp cho các nhà nghiên cứu và các kỹ sư thiết kế hiểu sâu hơn về các ảnh hưởng có lợi và có hại, các tác động riêng rẽ và kết hợp của nhiều yếu tố lên xu hướng ứng xử và khả năng mang tải của vỏ cầu FGM chịu áp lực ngoài. Các kết quả cũng cho thấy rằng, các vỏ cầu với cạnh biên bị ràng buộc một phần và được đỡ bởi nền đàn hồi với độ cứng phù hợp có thể có khả năng kháng vòng cao và sự ổn định tốt (có thể giảm cường độ hoặc tránh hóp).

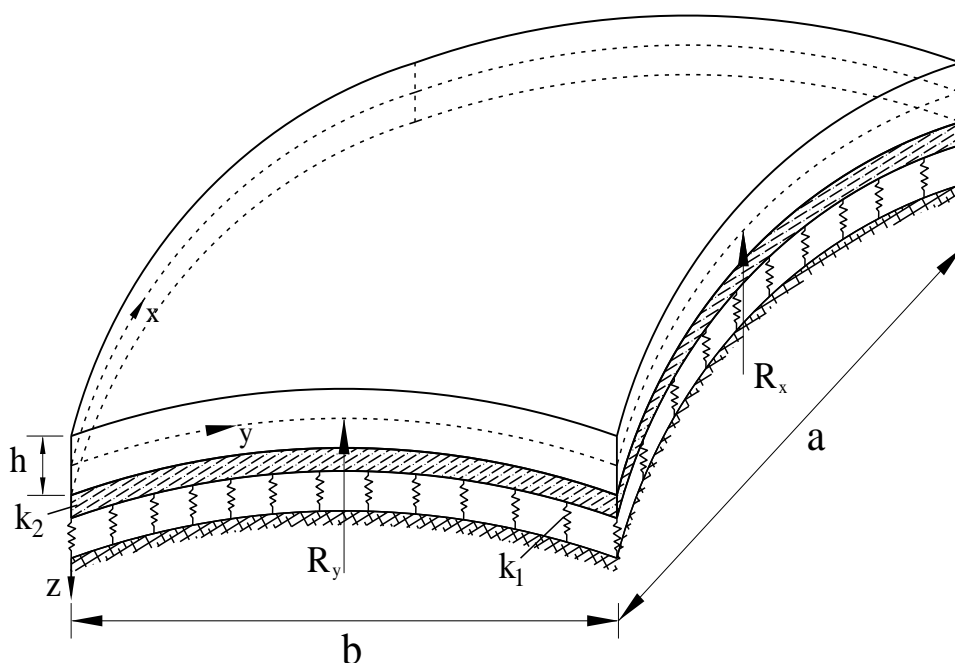
Các kết quả chính của chương 4 đã được công bố trong 1 bài báo khoa học đăng trên tạp chí quốc tế thuộc danh mục ISI, cụ thể là bài báo số 5 trong danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

CHƯƠNG 5. ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA TẤM VÀ PANEL SANDWICH FG-CNTRC VỚI CÁC CẠNH CHỊU LIÊN KẾT ĐÀN HỒI

Kết cấu dạng sandwich có một số đặc tính rất ưu việt và được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau, điển hình là trong các kết cấu xây dựng và hàng không. Sự ra đời của các loại vật liệu mới như composite gia cường ống nano các-bon cơ tính biến đổi FG-CNTRC và tiềm năng ứng dụng rộng rãi của loại vật liệu này đặt ra yêu cầu cần có thêm các nghiên cứu lý thuyết mang tính dự đoán về ứng xử tĩnh và động nói chung và ổn định nói riêng của các kết cấu sandwich làm từ FG-CNTRC. Mặc dù vậy, theo hiểu biết của tác giả luận án, có rất ít các nghiên cứu đã thực hiện liên quan đến ổn định tĩnh phi tuyến của các kết cấu sandwich FG-CNTRC. Trong chương này, luận án giới thiệu một nghiên cứu giải tích về ổn định tĩnh phi tuyến của các kết cấu sandwich dạng tấm chữ nhật, panel trụ và panel hai độ cong làm từ các lớp vật liệu FG-CNTRC và thuần nhất chịu một số điều kiện tải cơ, nhiệt và kết hợp cơ – nhiệt. Các tính chất của FG-CNTRC và vật liệu thuần nhất được giả thiết phụ thuộc vào nhiệt độ và các tính chất hiệu dụng của lớp FG-CNTRC được xác định bằng quy tắc hỗn hợp suy rộng. Bài toán ổn định được đặt theo ứng suất và các phương trình cơ bản được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất có kể đến tính phi tuyến hình học do độ võng lớn, tính không hoàn hảo hình dáng ban đầu và áp lực tương tác từ nền đàn hồi Winkler – Pasternak. Các cạnh không chịu tải nén cơ học giả thiết chịu ràng buộc dịch chuyển theo mô hình liên kết đàn hồi. Các nghiệm giải tích xấp xỉ được giả thiết để thỏa mãn các điều kiện biên tựa bản lề và phương pháp Galerkin được sử dụng để dẫn ra các biểu thức liên hệ phi tuyến giữa tải và độ võng mà từ đó các biểu thức của tải tới hạn (trong trường hợp tồn tại) có thể thu được. Trong phân tích ổn định của kết cấu chịu tải nhiệt, các nhiệt độ tới hạn và các đường liên hệ tải nhiệt – độ võng được xác định bằng phương pháp lặp. Sau khi thực hiện các so sánh kiểm chứng, luận án thực hiện nhiều ví dụ số để đánh giá nhiều ảnh hưởng khác nhau như tỷ lệ thể tích CNT, kiểu phân bố CNT, tỷ lệ chiều dày các lớp mặt, mức độ ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên, độ lớn của tải tác dụng trước, độ cứng của nền đàn hồi và sự không hoàn hảo hình dáng lên khả năng kháng vòng và mang tải của kết cấu sandwich FG-CNTRC. Từ các kết quả thu được, luận án đưa ra các nhận xét và kết luận.

5.1. Các mô hình panel sandwich FG-CNTRC

Mô hình kết cấu được xét trong chương hiện tại là các dạng panel sandwich gồm panel phẳng (tức là các tấm), panel trụ và panel hai độ cong đặt trên nền đàn hồi hai tham số. Để cho tổng quát, xét panel hai độ cong có tổng chiều dày h , các kích thước phẳng (planform) a, b và các bán kính theo các phương a, b lần lượt là R_x, R_y , như được chỉ trong hình 5.1. Panel được đặt trong một hệ tọa độ xyz có gốc nằm trên mặt giữa ở một góc của panel, các trục x, y lần lượt hướng theo các kích thước a, b và trục z vuông góc với mặt giữa của panel ($-h/2 \leq z \leq h/2$) với chiều dương hướng vào phía trong (phía lõm).

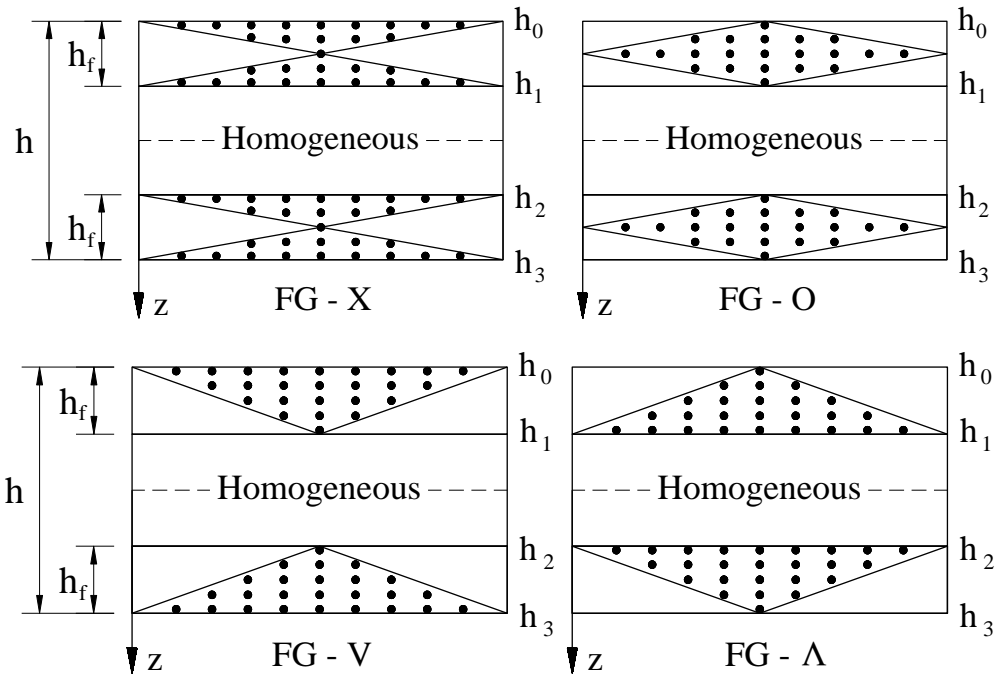


Hình 5.1. Hình dạng và hệ tọa độ của panel hai độ cong trên nền đàn hồi.

Panel được cấu thành từ hai lớp mặt mỏng với chiều dày mỗi lớp là h_f và được phân cách bởi một lớp lõi dày hơn có chiều dày $h_H = h - 2h_f$ làm từ vật liệu thuần nhất hoặc CNTRC, trong đó các lớp được giả thiết có liên kết hoàn hảo với nhau (bỏ qua sự bong tách) và vật liệu nền (matrix) trong lớp CNTRC và vật liệu của lớp thuần nhất có chung bản chất đẳng hướng nhưng có thể không cùng tính chất (vì có thể làm từ các vật liệu khác nhau). Hầu hết các nghiên cứu trước đây chỉ xét mô hình sandwich gồm hai lớp mặt FG-CNTRC và lớp lõi thuần nhất. Luận án sẽ xem xét cả hai mô hình kết cấu sandwich có các lớp mặt hoặc lớp lõi làm từ vật liệu FG-CNTRC và sẽ được gọi tương ứng là kết cấu (tấm, panel) sandwich loại A và loại B.

5.1.1. Mô hình sandwich loại A: Lớp lõi thuần nhất và hai lớp mặt FG-CNTRC

Trong mô hình sandwich loại A, kết cấu sandwich được tạo thành từ lớp lõi làm từ vật liệu thuần nhất đẳng hướng và hai lớp mặt làm từ FG-CNTRC. Trong hai lớp mặt, CNTs được gia cường vào nền đẳng hướng thông qua kiểu phân bố đều UD (uniform distribution) hoặc bốn kiểu phân bố biến đổi theo hàm FG (Functionally Graded) của biến chiều dày theo các dạng chữ X, O, V và Λ mà sau đây sẽ lần lượt gọi tên là các kiểu phân bố FG-X, FG-O, FG-V và $FG-\Lambda$. Các kiểu phân bố FG của CNTs trong hai lớp mặt của mô hình tấm sandwich loại A được minh họa trong hình 5.2, trong đó $h_0 = -h/2$, $h_1 = -h/2 + h_f$, $h_2 = h/2 - h_f$, $h_3 = h/2$. Có thể thấy rằng trong mô hình sandwich loại A, sự phân bố vật liệu đối xứng qua mặt giữa kết cấu.



Hình 5.2. Các kiểu phân bố FG của CNTs trong mô hình sandwich loại A.

Tỷ lệ thể tích V_{CNT} của CNTs trong hai lớp mặt của mô hình sandwich loại A tương ứng với năm loại phân bố khác nhau được cho trong bảng 5.1 trong đó V_{CNT}^* là tổng tỷ lệ thể tích của CNTs trong CNTRC và có biểu thức cụ thể như sau [10]

$$V_{CNT}^* = \frac{w_{CNT}}{w_{CNT} + (\rho_{CNT} / \rho_m)(1 - w_{CNT})} \quad (5.1)$$

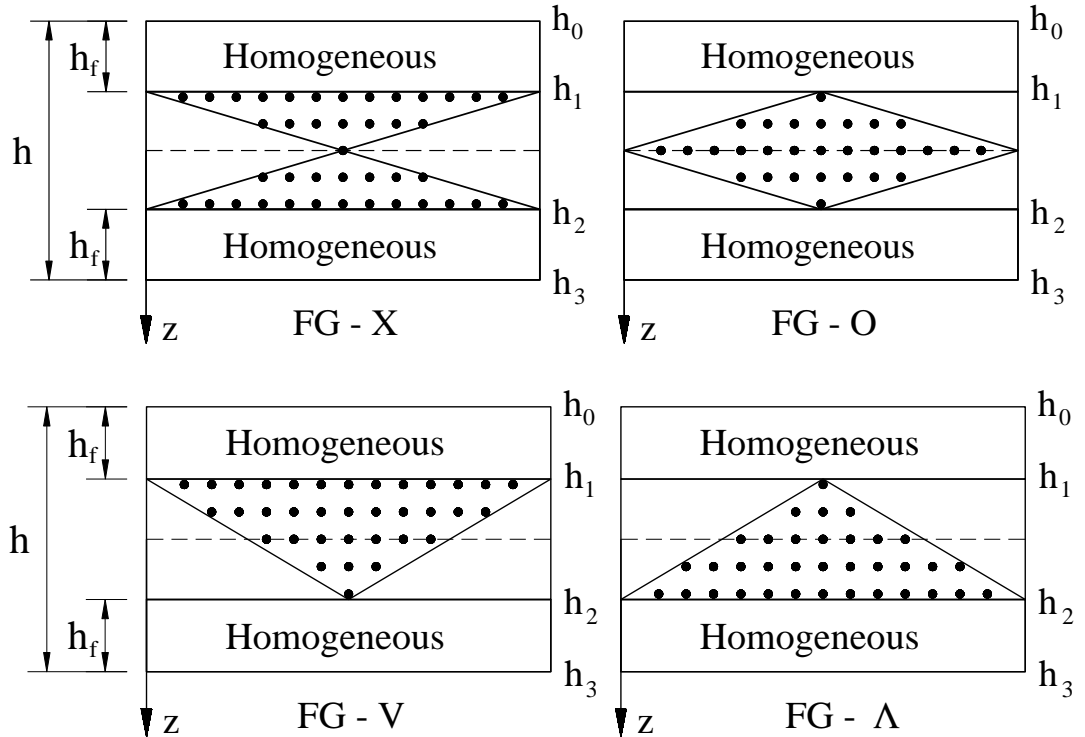
trong đó w_{CNT} là tỷ lệ phần trăm khối lượng của CNTs, ρ_{CNT} và ρ_m lần lượt là khối lượng riêng của CNT và vật liệu nền. Có thể thấy rằng tỷ lệ phần trăm khối lượng CNT trong lớp CNTRC ứng với loại phân bố đều và các loại phân bố FG là như nhau.

Bảng 5.1. Tỷ lệ thể tích $V_{CNT}(z)$ của CNTs trong hai lớp mặt của mô hình kết cấu sandwich FG-CNTRC loại A.

Loại phân bố	Lớp mặt trên ($h_0 \leq z \leq h_1$)	Lớp mặt dưới ($h_2 \leq z \leq h_3$)
UD	V_{CNT}^*	V_{CNT}^*
FG-X	$2 \frac{ h_0 + h_1 - 2z }{h_1 - h_0} V_{CNT}^*$	$2 \frac{ h_2 + h_3 - 2z }{h_3 - h_2} V_{CNT}^*$
FG- Λ	$2 \frac{z - h_0}{h_1 - h_0} V_{CNT}^*$	$2 \frac{h_3 - z}{h_3 - h_2} V_{CNT}^*$
FG-V	$2 \frac{h_1 - z}{h_1 - h_0} V_{CNT}^*$	$2 \frac{z - h_2}{h_3 - h_2} V_{CNT}^*$
FG-O	$2 \left(1 - \frac{ 2z - h_0 - h_1 }{h_1 - h_0} \right) V_{CNT}^*$	$2 \left(1 - \frac{ 2z - h_2 - h_3 }{h_3 - h_2} \right) V_{CNT}^*$

5.1.2. Mô hình sandwich loại B: Lớp lõi FG-CNTRC và hai lớp mặt thuần nhất

Trong mô hình sandwich loại B, kết cấu sandwich được tạo thành từ lớp lõi làm từ FG-CNTRC và hai lớp mặt làm từ vật liệu thuần nhất đẳng hướng như được minh họa trong hình 5.3.



Hình 5.3. Các kiểu phân bố FG của CNTs trong mô hình sandwich loại B.

Tỷ lệ thể tích CNTs trong lớp lõi ($h_1 \leq z \leq h_2$) ứng với các loại phân bố khác nhau như UD, FG-X, FG-O, FG-V và $FG-\Lambda$ được cho như sau

$$V_{CNT} = \begin{cases} V_{CNT}^* & UD \\ 4 \frac{|z|}{h_2 - h_1} V_{CNT}^* & FG-X \\ 2 \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} V_{CNT}^* & FG-\Lambda \\ 2 \frac{h_2 - z}{h_2 - h_1} V_{CNT}^* & FG-V \\ 2 \left(1 - \frac{2|z|}{h_2 - h_1} \right) V_{CNT}^* & FG-O \end{cases} \quad (5.2)$$

Trong cả hai mô hình sandwich, tỷ lệ phần trăm thể tích của vật liệu nền, ký hiệu là V_m , trong các lớp CNTRC được xác định như sau

$$V_m = 1 - V_{CNT} \quad (5.3)$$

Luận án giả thiết rằng CNTs được gia cường dọc theo phương x và các tính chất của các vật liệu thành phần gồm CNTs, nền và lớp thuần nhất phụ thuộc vào nhiệt độ. Các mô đun đàn hồi hiệu dụng theo phương dọc CNTs và vuông góc với CNTs, được ký hiệu lần lượt là E_{11} và E_{22} , và mô đun trượt hiệu dụng G_{12} của lớp CNTRC được xác định theo quy tắc hỗn hợp suy rộng như công trình của Shen [10]

$$E_{11} = \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E^m \quad (5.4a)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E^m} \quad (5.4b)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G^m} \quad (5.4c)$$

trong đó E_{11}^{CNT} , E_{22}^{CNT} và G_{12}^{CNT} lần lượt là các mô đun đàn hồi theo hai phương dọc, ngang và mô đun trượt của CNT, trong khi đó E^m và G^m lần lượt là mô đun đàn hồi và mô đun trượt của vật liệu nền đẳng hướng. Hơn nữa, các hệ số η_j ($j = 1 \div 3$) được xem như phần mở rộng của các công thức (5.4) so với các công thức hỗn hợp thông thường (áp dụng cho composite gia cường sợi [174]) và được bổ sung trong (5.4) để

kể đến ảnh hưởng của kích thước nano của thành phần gia cường lên các tính chất hiệu dụng của composite độn CNTs.

Như tất cả các công bố trước đây về kết cấu FG-CNTRC, luận án giả thiết hệ số Poisson hiệu dụng ν_{12} của CNTRC là hằng số và được xác định theo quy tắc hỗn hợp thông thường như sau [10]

$$\nu_{12} = V_{CNT}^* \nu_{12}^{CNT} + V_m \nu^m = V_{CNT}^* \nu_{12}^{CNT} + (1 - V_{CNT}^*) \nu^m \quad (5.5)$$

trong đó ν_{12}^{CNT} và ν^m tương ứng là các hệ số Poisson của CNT và nền. Hơn nữa, hệ số Poisson hiệu dụng ν_{21} được xác định theo công thức [174]

$$\nu_{21} = \frac{E_{22}^*}{E_{11}^*} \nu_{12} \quad (5.6)$$

trong đó E_{11}^* và E_{22}^* lần lượt là các giá trị của E_{11} và E_{22} ứng với trường hợp CNTs phân bố đều trong CNTRC, cụ thể là

$$E_{11}^* = E^m + (\eta_1 E_{11}^{CNT} - E^m) V_{CNT}^*, \quad E_{22}^* = \frac{\eta_2 E_{22}^{CNT} E^m}{E_{22}^{CNT} + (E^m - E_{22}^{CNT}) V_{CNT}^*}. \quad (5.7)$$

Trong luận án, các hệ số dẫn nở nhiệt hiệu dụng của CNTRC theo các phương dọc α_{11} và ngang α_{22} được xác định theo các công thức sau [122,134,136]

$$\alpha_{11} = \frac{V_{CNT} E_{11}^{CNT} \alpha_{11}^{CNT} + V_m E^m \alpha^m}{V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E^m} \quad (5.8a)$$

$$\alpha_{22} = (1 + \nu_{12}^{CNT}) V_{CNT} \alpha_{22}^{CNT} + (1 + \nu^m) V_m \alpha^m - \nu_{12} \alpha_{11} \quad (5.8b)$$

trong đó α_{11}^{CNT} và α_{22}^{CNT} là các hệ số dẫn nở nhiệt của CNT lần lượt theo các phương dọc và ngang trong khi α^m là hệ số dẫn nở nhiệt của pha nền.

5.2. Các phương trình cơ bản

Chương này xét các panel sandwich tương đối dày, có các cạnh tựa bản lề và không hoàn hảo về mặt hình dáng. Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT) được sử dụng để thiết lập các phương trình cơ bản. Dựa trên FSDT, các thành phần biến dạng tại một điểm cách mặt giữa một khoảng z được biểu diễn như sau [174]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_x + w_{,x} \\ \phi_y + w_{,y} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

trong đó

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} - w/R_x + w_{,x}^2/2 \\ v_{,y} - w/R_y + w_{,y}^2/2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

trong đó u, v, w lần lượt là các thành phần biến dạng của điểm trên mặt giữa theo các phương x, y, z và ϕ_x, ϕ_y là các góc xoay của pháp tuyến đến mặt giữa tương ứng đối với các trục y, x .

Các thành phần ứng suất trong panel sandwich được xác định nhờ các liên hệ ứng suất – biến dạng như sau [174]

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \alpha_{11}\Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_{22}\Delta T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

trong đó $\Delta T = T - T_0$ là độ tăng nhiệt đều từ trạng thái ban đầu T_0 mà ở đó giả thiết panel không chịu ứng suất nhiệt. Giống như các chương trước, giá trị T_0 được giả thiết là ở nhiệt độ phòng ($T_0 = 300\text{ K}$). Hơn nữa, các số hạng độ cứng Q_{ij} có biểu thức như sau

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{44} = G_{13}, \quad Q_{55} = G_{23}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (5.12)$$

trong các lớp vật liệu CNTRC (cụ thể là $h_0 \leq z \leq h_1$ và $h_2 \leq z \leq h_3$ đối với mô hình sandwich loại A và $h_1 \leq z \leq h_2$ đối với mô hình sandwich loại B) và

$$E_{11} = E_{22} = E_H, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_H, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \nu_H,$$

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E_H}{1 - \nu_H^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_H E_H}{1 - \nu_H^2}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E_H}{2(1 + \nu_H)} \quad (5.13)$$

trong các lớp vật liệu thuần nhất (cụ thể là $h_0 \leq z \leq h_1$ và $h_2 \leq z \leq h_3$ đối với mô hình sandwich loại B và $h_1 \leq z \leq h_2$ đối với mô hình sandwich loại A) trong đó E_H, α_H và ν_H lần lượt là mô đun Young, hệ số dẫn nở nhiệt và hệ số Poisson của lớp vật liệu thuần nhất đẳng hướng.

Các thành phần nội lực và mô men trong panel sandwich được tính qua các thành phần ứng suất như công thức (3.4). Sau khi thay các biến dạng (5.9) vào các liên hệ ứng suất – biến dạng (5.11) và thay biểu thức kết quả vào (5.11) ta nhận được các biểu thức cụ thể của nội lực và mô men trong panel sandwich như sau

$$N_x = e_{11}\varepsilon_x^0 + \nu_{21}e_{11}\varepsilon_y^0 + e_{12}\phi_{x,x} + \nu_{21}e_{12}\phi_{y,y} - e_{11T}\Delta T \quad (5.14a)$$

$$N_y = \nu_{12}e_{21}\varepsilon_x^0 + e_{21}\varepsilon_y^0 + \nu_{12}e_{22}\phi_{x,x} + e_{22}\phi_{y,y} - e_{21T}\Delta T \quad (5.14b)$$

$$N_{xy} = e_{31}\gamma_{xy}^0 + e_{32}(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \quad (5.14c)$$

$$Q_x = K_S e_{41}(\phi_x + w_{,x}), \quad Q_y = K_S e_{51}(\phi_y + w_{,y}) \quad (5.14d)$$

$$M_x = e_{12}\varepsilon_x^0 + \nu_{21}e_{12}\varepsilon_y^0 + e_{13}\phi_{x,x} + \nu_{21}e_{13}\phi_{y,y} - e_{12T}\Delta T \quad (5.15a)$$

$$M_y = \nu_{12}e_{22}\varepsilon_x^0 + e_{22}\varepsilon_y^0 + \nu_{12}e_{23}\phi_{x,x} + e_{23}\phi_{y,y} - e_{22T}\Delta T \quad (5.15b)$$

$$M_{xy} = e_{32}\gamma_{xy}^0 + e_{33}(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \quad (5.15c)$$

trong đó

$$\begin{aligned} (e_{11}, e_{21}, e_{31}, e_{41}, e_{51}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11}, Q_{22}, Q_{66}, Q_{44}, Q_{55}) dz \\ (e_{12}, e_{22}, e_{32}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11}, Q_{22}, Q_{66}) z dz, \quad (e_{13}, e_{23}, e_{33}) = \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11}, Q_{22}, Q_{66}) z^2 dz \\ (e_{11T}, e_{12T}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} (\alpha_{11} + \nu_{21}\alpha_{22})(1, z) dz, \\ (e_{21T}, e_{22T}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{22} (\nu_{12}\alpha_{11} + \alpha_{22})(1, z) dz \end{aligned} \quad (5.16)$$

và K_S là hệ số hiệu chỉnh trượt được giả thiết bằng 5/6 trong luận án.

Dựa trên FSDT, hệ phương trình cân bằng phi tuyến của panel sandwich có dạng tương tự như (3.7). Sau khi đưa vào hàm ứng suất $f(x, y)$ được định nghĩa như (2.11), hệ hai phương trình (3.7a,b) được thỏa mãn đồng nhất. Bằng cách thực hiện các biến đổi toán học tương tự như các bước đã tiến hành trong các công trình trước đây về tấm và panel có biến dạng trượt ngang [98,131,175], ta thu được phương trình cân bằng phi tuyến của panel sandwich FG-CNTRC như sau

$$a_{11}\phi_{x,xxx} + a_{21}\phi_{x,xyy} + a_{31}\phi_{y,xyy} + a_{41}\phi_{y,yyy} + a_{51}f_{,xyy} + f_{,yy}(w_{,xx} + w_{,xx}^*) - 2f_{,xy}(w_{,xy} + w_{,xy}^*) + f_{,xx}(w_{,yy} + w_{,yy}^*) + \frac{f_{,yy}}{R_x} + \frac{f_{,xx}}{R_y} + q - k_1w + k_2(w_{,xx} + w_{,yy}) = 0 \quad (5.17)$$

trong đó $w^*(x, y)$ là hàm biểu thị sự không hoàn hảo hình dáng ban đầu, q là áp lực phân bố đều trên mặt panel và k_1, k_2 là các hệ số độ cứng của nền đàn hồi Winkler – Pasternak có ý nghĩa như đã được giải thích trong chương 2. Hơn nữa, các hệ số a_{j1} ($j = 1 \div 5$) được cho trong công thức (C1) ở phụ lục C.

Phương trình tương thích biến dạng của panel hai độ cong không hoàn hảo hình dáng có thể được viết từ các liên hệ động học (5.10) như sau [98,175]

$$\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} + 2w_{,xy}w_{,xy}^* - w_{,xx}w_{,yy}^* - w_{,yy}w_{,xx}^* - \frac{w_{,yy}}{R_x} - \frac{w_{,xx}}{R_y} \quad (5.18)$$

Sau khi giải các biến dạng mặt giữa qua các thành phần nội lực từ (5.14) và thay kết quả vào (5.18) ta có thể viết lại phương trình tương thích biến dạng như sau

$$a_{12}f_{,xxxx} + a_{22}f_{,xyy} + a_{32}f_{,yyy} + a_{42}\phi_{x,xxx} + a_{52}\phi_{y,xyy} + a_{62}\phi_{y,yyy} + a_{72}\phi_{x,xyy} - w_{,xy}^2 + w_{,xx}w_{,yy} - 2w_{,xy}w_{,xy}^* + w_{,xx}w_{,yy}^* + w_{,yy}w_{,xx}^* + \frac{w_{,yy}}{R_x} + \frac{w_{,xx}}{R_y} = 0 \quad (5.19)$$

trong đó các hệ số a_{k2} ($k = 1 \div 7$) được cho như công thức (C2) của phụ lục C.

Tất cả các cạnh biên của panel sandwich được giả thiết tựa bản lề và các điều kiện biên được biểu diễn về mặt toán học như sau [174]

$$w = 0, \quad \phi_y = 0, \quad M_x = 0, \quad N_x = N_{x0} \quad \text{tại hai cạnh} \quad x = 0, a \quad (5.20a)$$

$$w = 0, \quad \phi_x = 0, \quad M_y = 0, \quad N_y = N_{y0} \quad \text{tại hai cạnh} \quad y = 0, b \quad (5.20b)$$

trong đó N_{x_0} và N_{y_0} là hợp lực nén (chủ động) lần lượt trên các cạnh $x = 0, a$ và $y = 0, b$ trong trường hợp các cạnh này tựa di động và là hợp phản lực (bị động) trên các cạnh trong trường hợp các cạnh này bị ràng buộc đàn hồi theo phương tiếp tuyến.

5.3. Nghiệm giải tích của các phương trình cơ bản

Để giải các phương trình cơ bản với các điều kiện biên (5.20), luận án sử dụng các nghiệm giải tích xấp xỉ dưới dạng sau [165,170]

$$(w, w^*) = (W, \mu h) \sin \beta_m x \sin \delta_n y \quad (5.21a)$$

$$f = A_1 \cos 2\beta_m x + A_2 \cos 2\delta_n y + A_3 \sin \beta_m x \sin \delta_n y + \frac{1}{2} N_{x_0} y^2 + \frac{1}{2} N_{y_0} x^2 \quad (5.21b)$$

$$\phi_x = B_1 \cos \beta_m x \sin \delta_n y, \quad \phi_y = B_2 \sin \beta_m x \cos \delta_n y \quad (5.21c)$$

trong đó $\beta_m = m\pi / a$, $\delta_n = n\pi / b$ ($m, n = 1, 2, \dots$), W và μ lần lượt là biên độ của độ võng và mức độ không hoàn hảo, trong khi A_i, B_j ($i = 1 \div 3, j = 1 \div 2$) là các hệ số cần xác định.

Bằng cách thay các nghiệm (5.21) vào phương trình tương thích (5.19) và hai phương trình cân bằng cuối, sau đó thực hiện các thủ tục biến đổi toán học tương tự như cách làm trong [98,131,175], các hệ số A_i, B_j ($i = 1 \div 3, j = 1 \div 2$) được xác định như sau

$$A_1 = \frac{\delta_n^2}{32a_{12}\beta_m^2} W (W + 2\mu h), \quad A_2 = \frac{\beta_m^2}{32a_{32}\delta_n^2} W (W + 2\mu h),$$

$$A_3 = A_3^* W, \quad B_1 = B_1^* W, \quad B_2 = B_2^* W \quad (5.22)$$

trong đó chi tiết của các hệ số A_3^*, B_1^*, B_2^* có thể tìm trong các công thức (C3) và (C4) trong phụ lục C.

Tiếp theo, thay các nghiệm (5.21) vào phương trình cân bằng (5.17) và áp dụng phương pháp Galerkin cho phương trình kết quả ta có

$$\int_0^a \int_0^b VTPTCB \times \sin \beta_m x \sin \delta_n y dx dy = 0 \quad (5.23)$$

trong đó VTPTCB là biểu thức về trái phương trình cân bằng (5.17) sau khi đã thay các nghiệm (5.21) vào trong đó. Sau khi tính tích phân (5.23) ta nhận được biểu thức sau đây

$$a_{13}\bar{W} + a_{23}\bar{W}(\bar{W} + \mu) + a_{33}\bar{W}(\bar{W} + 2\mu) + a_{43}\bar{W}(\bar{W} + \mu)(\bar{W} + 2\mu) - \frac{16q}{mn\pi^2}\gamma_m\gamma_n + (\bar{N}_{x0}m^2B_a^2 + \bar{N}_{y0}n^2)\frac{\pi^2}{B_h^2}(\bar{W} + \mu) - (\bar{N}_{x0}B_aR_1 + \bar{N}_{y0}R_2)\frac{16}{mn\pi^2B_h}\gamma_m\gamma_n = 0 \quad (5.24)$$

trong đó các hệ số a_{k3} ($k=1, \dots, 4$) được cho trong công thức (C5) của phụ lục C ,

$$R_1 = \frac{a}{R_x}, R_2 = \frac{b}{R_y}, \bar{W} = \frac{W}{h}, B_a = \frac{b}{a}, B_h = \frac{b}{h}, (\bar{N}_{x0}, \bar{N}_{y0}) = \frac{1}{h}(N_{x0}, N_{y0}), \gamma_k = \frac{1}{2}[1 - (-1)^k] \quad (k=m, n), K_1 = \frac{k_1b^4}{E_0^m h^3}, K_2 = \frac{k_2b^2}{E_0^m h^3} \quad (5.25)$$

và E_0^m là giá trị của E^m ở nhiệt độ phòng $T_0 = 300$ K.

Trong phần tiếp sau đây, luận án xây dựng các biểu thức liên hệ phi tuyến giữa tải và độ võng cho một số bài toán ổn định của các dạng panel sandwich FG-CNTRC.

5.3.1. Panel trụ sandwich FG-CNTRC chịu nén dọc trục

Xét panel trụ sandwich FG-CNTRC có bán kính R với tất cả các cạnh tựa di động chịu nén dọc trục bởi áp lực nén P_x phân bố đều trên hai cạnh cong $x=0, a$ và phương của áp lực nén P_x trùng với phương của CNTs. Trong trường hợp này, ta có $R_x \rightarrow \infty, R_y = R, q=0, N_{x0} = -P_x h$ và $N_{y0} = 0$. Từ biểu thức (5.24) ta có thể thu được liên hệ giữa áp lực nén dọc trục và độ võng lớn nhất không thứ nguyên của panel trụ FG-CNTRC như sau

$$P_x = \left(\frac{B_h}{m\pi B_a}\right)^2 \left[a_{13} \frac{\bar{W}}{\bar{W} + \mu} + a_{23}\bar{W} + a_{33}\bar{W} \frac{\bar{W} + 2\mu}{\bar{W} + \mu} + a_{43}\bar{W}(\bar{W} + 2\mu) \right] \quad (5.26)$$

Có thể nhận thấy rằng panel trụ hoàn hảo hình dáng ($\mu=0$) có ứng xử vòng theo kiểu rẽ nhánh và tải vòng được tính theo công thức sau

$$P_{xb} = a_{13} \left(\frac{B_h}{m\pi B_a}\right)^2 \quad (5.27)$$

và áp lực nén tới hạn P_{xcr} là giá trị nhỏ nhất trong số các áp lực vòng P_{xb} được cực tiểu hóa theo mode vòng (m, n) .

5.3.2. Panel hai độ cong sandwich FG-CNTRC chịu áp lực ngoài

Xét panel hai độ cong sandwich FG-CNTRC với các cạnh bị ràng buộc dịch chuyển, đặt trong môi trường nhiệt độ và chịu áp lực ngoài phân bố đều. Hợp phản lực trên các cạnh bị ràng buộc và dịch chuyển trung bình trên các cạnh biên có liên hệ sau đây [165,166]

$$N_{x0} = -\frac{c_1}{ab} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial u}{\partial x} dx dy \quad \text{trên các cạnh } x=0, a \quad (5.28a)$$

$$N_{y0} = -\frac{c_2}{ab} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dx dy \quad \text{trên các cạnh } y=0, b \quad (5.28b)$$

trong đó c_1, c_2 là các độ cứng trung bình của ràng buộc dịch chuyển theo phương tiếp tuyến lần lượt trên các cạnh $x=0, a$ và $y=0, b$.

Từ các liên hệ (5.10) và (5.14) có thể giải ra các biểu thức sau đây

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a_{82}} & \left[e_{21} f_{,yy} - \nu_{21} e_{11} f_{,xx} + (e_{11} e_{22} \nu_{12} \nu_{21} - e_{12} e_{21}) \phi_{,xx} + (e_{11} e_{22} \nu_{21} - e_{12} e_{21} \nu_{21}) \phi_{,yy} \right] \\ & + \frac{1}{a_{82}} (e_{11T} e_{21} - e_{11} e_{21T} \nu_{21}) \Delta T + \frac{w}{R_x} - \frac{1}{2} w_{,x}^2 - w_{,x} w_{,x}^* \quad (5.29a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{a_{82}} & \left[e_{11} f_{,xx} - e_{21} \nu_{12} f_{,yy} + (e_{12} e_{21} \nu_{12} - e_{11} e_{22} \nu_{12}) \phi_{,xx} + (e_{12} e_{21} \nu_{12} \nu_{21} - e_{11} e_{22}) \phi_{,yy} \right] \\ & + \frac{1}{a_{82}} (e_{21T} e_{11} - e_{21} e_{11T} \nu_{12}) \Delta T + \frac{w}{R_y} - \frac{1}{2} w_{,y}^2 - w_{,y} w_{,y}^* \quad (5.29b) \end{aligned}$$

trong đó a_{82} có biểu thức như công thức (C2) ở phụ lục C.

Bằng cách đặt các nghiệm (5.21) vào các biểu thức (5.29) rồi thay các biểu thức nhận được vào (5.28), ta có thể thu được các hợp phản lực như sau

$$\bar{N}_{x0} = s_{11} \bar{W} + s_{21} \bar{W} (\bar{W} + 2\mu) + s_{31} \Delta T \quad (5.30a)$$

$$\bar{N}_{y0} = s_{12} \bar{W} + s_{22} \bar{W} (\bar{W} + 2\mu) + s_{32} \Delta T \quad (5.30b)$$

trong đó các hệ số s_{ij} ($i=1 \div 3, j=1, 2$) cho như công thức (C7) trong phụ lục C.

Đặt các giá trị hợp phần lực ở (5.30) vào (5.24) ta nhận được liên hệ phi tuyến giữa áp lực và độ võng lớn nhất không thứ nguyên như sau

$$q = s_{15} \bar{W} + s_{25} \bar{W} (\bar{W} + \mu) + s_{35} \bar{W} (\bar{W} + 2\mu) + s_{45} \bar{W} (\bar{W} + \mu) (\bar{W} + 2\mu) - [s_{55} (\bar{W} + \mu) + s_{65}] \Delta T \quad (5.31)$$

trong đó các hệ số s_{k5} ($k = 1 \div 6$) được cho trong công thức (C10) trong phụ lục C.

5.3.3. Tấm chữ nhật sandwich FG-CNTRC chịu tải nhiệt

Xét tấm chữ nhật (tức là panel phẳng) sandwich FG-CNTRC với các cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển và chịu nhiệt độ tăng đều. Trong trường hợp này $q = 0$, $R_x \rightarrow \infty$, $R_y \rightarrow \infty$, $R_1 = a / R_x = 0$, $R_2 = b / R_y = 0$, $a_{33} = 0$ (suy từ công thức (C5) trong phụ lục C), $a_{35} = a_{65} = 0$ (suy từ công thức (C10) trong phụ lục C). Từ (5.31) ta thu được liên hệ phi tuyến giữa tải nhiệt và độ võng lớn nhất không thứ nguyên như sau

$$\Delta T = \frac{1}{s_{55}^*} \left[s_{15}^* \frac{\bar{W}}{\bar{W} + \mu} + s_{25}^* \bar{W} + s_{45}^* \bar{W} (\bar{W} + 2\mu) \right] \quad (5.32)$$

trong đó $s_{15}^*, s_{25}^*, s_{45}^*, s_{55}^*$ nhận được từ các giá trị tương ứng $s_{15}, s_{25}, s_{45}, s_{55}$ trong trường hợp $R_1 = R_2 = 0$. Dễ nhận thấy từ (5.32) rằng tấm sandwich hoàn hảo ($\mu = 0$) có thể bị võng với biểu thức tải nhiệt vòng như sau

$$\Delta T_b = \frac{s_{15}^*}{s_{55}^*} \quad (5.33)$$

Do sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu, các tải nhiệt tới hạn và các đường liên hệ tải nhiệt – độ võng trong giai đoạn sau tới hạn thu được nhờ sử dụng một quá trình lặp.

5.3.4. Tấm chữ nhật sandwich FG-CNTRC chịu tải kết hợp cơ – nhiệt

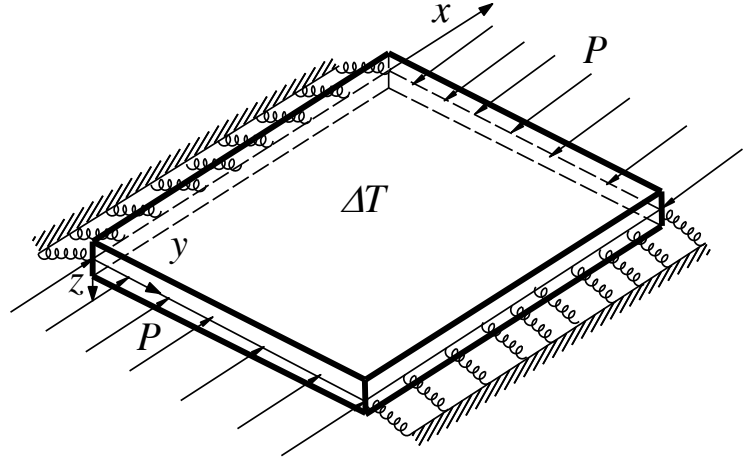
Xét tấm chữ nhật (panel phẳng) sandwich FG-CNTRC đặt trong môi trường nhiệt độ tăng đều ΔT . Tấm chịu nén theo một phương bởi áp lực nén P phân bố đều trên hai cạnh tựa di động (movable) $x = 0, a$, trong khi hai cạnh còn lại $y = 0, b$ không chịu nén nhưng chịu ràng buộc theo phương tiếp tuyến như chỉ trong hình 5.4.

Trong trường hợp này
 $q = 0, R_x \rightarrow \infty, R_y \rightarrow \infty$.

Hợp lực nén (chủ động)
trên hai cạnh tựa di động
 $x = 0, a$ là $N_{x0} = -Ph$.

Hợp phản lực trên hai cạnh
bị ràng buộc $y = 0, b$ được
xác định theo quy trình

tương tự như mục 5.3.2. *Hình 5.4. Tấm chữ nhật chịu đồng thời tải cơ – nhiệt.*



Cụ thể, bằng cách đặt các nghiệm (5.21) vào biểu thức v_y ở (5.29b) rồi đặt biểu thức nhận được vào (5.28b) ta nhận được biểu thức của hợp phản lực như sau

$$\bar{N}_{y0} = \frac{\bar{c}_2}{1 - \bar{c}_2 g_1} \left[g_2 \bar{N}_{x0} + g_3 \bar{W} + g_4 \bar{W} (\bar{W} + 2\mu) + g_5 \Delta T \right] \quad (5.34)$$

trong đó g_i ($i = 1 \div 5$) được cho như công thức (C11) trong phụ lục C.

Sau khi đặt $\bar{N}_{x0} = -P$ và \bar{N}_{y0} từ (5.34) vào (5.24) ta nhận được liên hệ giữa tải và độ võng như sau

$$P = d_1 \frac{\bar{W}}{\bar{W} + \mu} + d_2 \bar{W} + d_3 \bar{W} (\bar{W} + 2\mu) - d_4 \Delta T \quad (5.35)$$

trong đó các hệ số d_j ($j = 1 \div 4$) được cho ở công thức (C12) trong phụ lục C.

Công thức (5.35) là mối liên hệ phi tuyến giữa tải và độ võng của tấm sandwich FG-CNTRC đặt trong môi trường nhiệt tồn tại trước và chịu nén một phương. Có thể thấy rằng tấm hoàn hảo hình dáng có thể bị võng khi tải nén đạt đến giá trị sau

$$P_b = d_1 - d_4 \Delta T \quad (5.36)$$

Khi thứ tự đặt tải thay đổi, phương trình (5.35) được viết lại dưới dạng sau

$$\Delta T = \frac{1}{d_4} \left[d_1 \frac{\bar{W}}{\bar{W} + \mu} + d_2 \bar{W} + d_3 \bar{W} (\bar{W} + 2\mu) - P \right] \quad (5.37)$$

Công thức (5.37) biểu diễn mối liên hệ phi tuyến giữa tải và độ võng của tấm sandwich FG-CNTRC chịu nén trước bởi áp lực nén trên các cạnh tựa di động sau đó

chịu nhiệt độ tăng đều. Đối với các tấm hoàn hảo hình dẹt ($\mu = 0$) ứng xử vòng kiểu rẽ nhánh có thể xảy ra khi nhiệt độ đạt đến giá trị sau

$$\Delta T_b = \frac{1}{d_4}(d_1 - P) \quad (5.38)$$

Do các tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ nên tải nhiệt tới hạn và các đường liên hệ tải nhiệt – độ võng trong giai đoạn sau tới hạn được xác định thông qua việc sử dụng một thuật toán lặp.

5.4. Các kết quả số và thảo luận

Phần này của luận án thực hiện các ví dụ số để phân tích các ảnh hưởng khác nhau lên các ứng xử vòng và sau vòng của một số dạng tấm và panel sandwich làm từ các lớp FG-CNTRC và thuần nhất. Trong các ví dụ số này, vật liệu FG-CNTRC được chế tạo từ pha nền đẳng hướng là Poly (methyl methacrylate), thường được viết tắt là PMMA, và được gia cường bởi các ống nano các-bon đơn thành SWCNT (10,10). Các tính chất phụ thuộc vào nhiệt độ của vật liệu nền đẳng hướng PMMA là $\nu^m = 0.34$, $\alpha^m = 45(1 + 0.0005\Delta T) \times 10^{-6} K^{-1}$ và $E^m = (3.52 - 0.0034T) \text{ GPa}$ trong đó $T = T_0 + \Delta T$ và $T_0 = 300 \text{ K}$ là nhiệt độ phòng. Các tính chất của SWCNT ở các mức nhiệt độ khác nhau được cho trong công trình của Shen và Zhang [128]. Để thuận lợi cho việc thực hiện quá trình lặp, Shen [100] và Kiani [122] đã thực hiện phép nội suy toán học để biểu diễn các tính chất vật liệu của SWCNT như các hàm liên tục của nhiệt độ như sau

$$\begin{aligned} E_{11}^{CNT} &= (6.18387 - 0.00286T + 4.22867 \times 10^{-6}T^2 - 2.2724 \times 10^{-9}T^3) \text{ TPa}, \\ E_{22}^{CNT} &= (7.75348 - 0.00358T + 5.30057 \times 10^{-6}T^2 - 2.84868 \times 10^{-9}T^3) \text{ TPa}, \\ G_{12}^{CNT} &= (1.80126 + 7.7845 \times 10^{-4}T - 1.1279 \times 10^{-6}T^2 + 4.93484 \times 10^{-10}T^3) \text{ TPa}, \\ \alpha_{11}^{CNT} &= (-1.12148 + 0.02289T - 2.88155 \times 10^{-5}T^2 + 1.13253 \times 10^{-8}T^3) \times 10^{-6} / K, \\ \alpha_{22}^{CNT} &= (5.43874 - 9.95498 \times 10^{-4}T + 3.13525 \times 10^{-7}T^2 - 3.56332 \times 10^{-12}T^3) \times 10^{-6} / K \\ \nu_{12}^{CNT} &= 0.175. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Các hệ số hiệu chỉnh η_1, η_2, η_3 phụ thuộc vào tổng tỷ lệ thể tích V_{CNT}^* của CNTs trong CNTRC và được chọn như trong các công trình của Shen [128, 134, 136]. Cụ thể, các hệ số hiệu chỉnh là $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (0.137, 1.022, 0.715)$ cho trường hợp $V_{CNT}^* = 0.12$, $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (0.142, 1.626, 1.138)$ cho trường hợp $V_{CNT}^* = 0.17$ và $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (0.141, 1.585, 1.109)$ cho trường hợp $V_{CNT}^* = 0.28$. Hơn nữa, các ví dụ số thực hiện với giả thiết $G_{13} = G_{12}$ và $G_{23} = 1.2G_{12}$ như được sử dụng trong các công trình trước đây [105, 122, 128, 134, 136].

Các lớp vật liệu thuần nhất trong các mô hình sandwich được xét trong các kết quả số làm từ hợp kim nhôm-titan (Ti-6Al-4V) với các tính chất như sau [148]

$$\begin{aligned} E_H &= 122.56(1 - 4.586 \times 10^{-4}T) \text{ GPa} \\ \alpha_H &= 7.5788(1 + 6.638 \times 10^{-4}T - 3.147 \times 10^{-7}T^2) \times 10^{-6} K^{-1} \\ \nu_H &= 0.29. \end{aligned} \quad (5.40)$$

5.4.1. Các nghiên cứu so sánh

Một số nghiên cứu so sánh được thực hiện trong tiêu mục này để kiểm chứng độ tin cậy của cách tiếp cận mà luận án sử dụng. Vì chưa có các kết quả nghiên cứu về ổn định của kết cấu sandwich FG-CNTRC tựa trên nền đàn hồi với các mức ràng buộc biên khác nhau nên các so sánh được thực hiện cho các trường hợp riêng của mô hình kết cấu trong luận án.

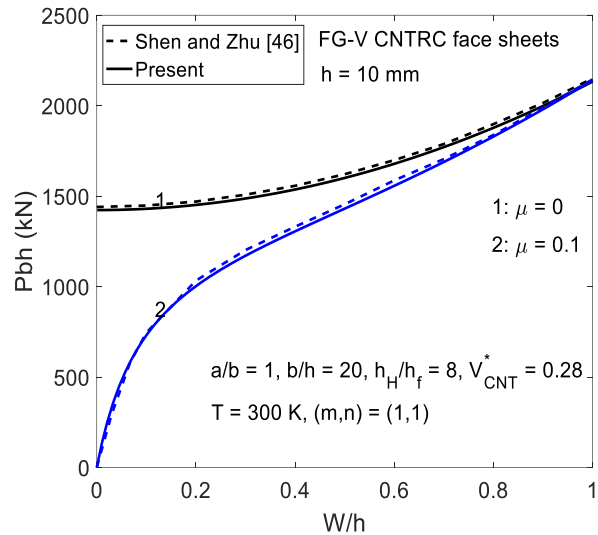
Bảng 5.2. So sánh các tải tới hạn $P_{xcr}bh$ (kN) của các panel trụ FG-CNTRC chịu nén dọc trục [$a/b = 0.98$, $a/R = 0.5$, $b/h = 20$, $h = 1mm$, $(m, n) = (1, 1)$].

V_{CNT}^*	Tham khảo	UD	FG-X	FG-V
0.12	Shen và Xiang [99]	3.77 ⁱ (3.45) ⁱⁱ	5.74 (5.34)	3.02 (2.74)
	Luận án	3.66 (3.43)	4.71 (4.38)	2.94 (2.74)
0.17	Shen và Xiang [99]	5.79 (5.29)	8.76 (8.14)	4.62 (4.16)
	Luận án	5.63 (5.29)	7.32 (6.84)	4.50 (4.21)
0.28	Shen và Xiang [99]	8.17 (7.58)	12.74 (11.94)	6.52 (6.04)
	Luận án	7.95 (7.43)	10.40 (9.65)	6.39 (6.00)

ⁱ T = 300 K, ⁱⁱ T = 400 K

Hiện chưa có nghiên cứu nào được công bố về ổn định của panel trụ sandwich FG-CNTRC chịu nén dọc trục. Vì vậy so sánh kết quả bài toán này chỉ có thể thực hiện cho trường hợp panel đơn lớp. Cụ thể, nghiên cứu so sánh đầu tiên thực hiện xem xét ứng xử vòng của panel trụ FG-CNTRC đơn lớp với các cạnh tựa di động chịu nén đều dọc trục. Kết quả tính toán tải tới hạn thu được từ công thức (5.27) trong trường hợp đặc biệt của mô hình panel sandwich loại B khi $h_f = 0$ và được so sánh trong bảng 5.2 với kết quả nhận được trong nghiên cứu của Shen và Xiang [99] cho các giá trị khác nhau của tỷ lệ thể tích CNT, các kiểu phân bố CNT khác nhau và ở hai mức của nhiệt độ môi trường. Dạng nghiệm tiệm cận dựa trên HSDT đã được sử dụng trong công trình [99]. Có thể dễ nhận thấy từ bảng 5.2 rằng kết quả của luận án phù hợp tốt với kết quả dựa trên cách tiếp cận trong [99].

Nghiên cứu so sánh thứ hai xét ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A với hai lớp mặt FG-CNTRC và các cạnh biên tựa di động chịu nén đều dọc theo một phương. Bài toán này cũng đã được nghiên cứu trong bài báo của Shen và Zhu [139] sử dụng dạng nghiệm tiệm cận dựa trên HSDT. Các đường cân bằng tải –

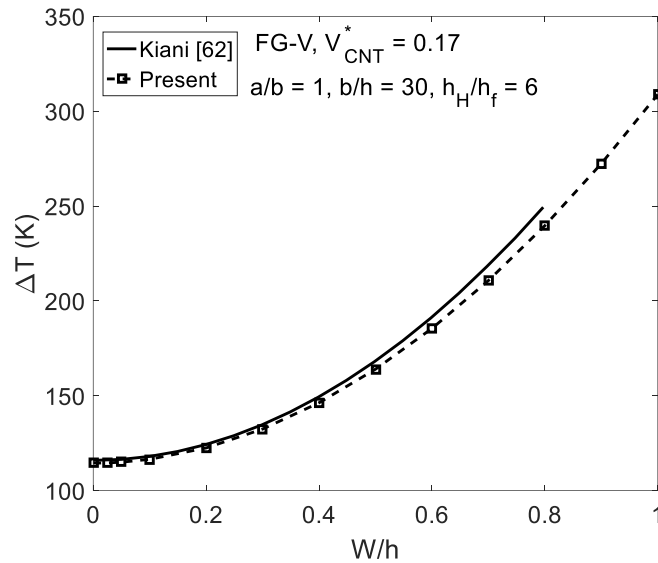


độ võng cho tấm sandwich loại A được thu được từ (5.35) và được so sánh trong hình 5.5 với các kết

quả trong bài báo của Shen và Zhu [139]. Như có thể quan sát, kết quả của luận án phù hợp rất tốt với các kết quả trong tham khảo [139] cho cả hai trường hợp tấm hoàn hảo ($\mu = 0$) và không hoàn hảo ($\mu = 0.1$).

Phần cuối của tiểu mục này thực hiện nghiên cứu ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A với hai lớp mặt FG-CNTRC, không có nền đàn hồi và với tất cả các cạnh tựa cố định chịu nhiệt độ tăng đều. Bài toán này cũng đã được giải quyết bởi

Kiani [148] bằng cách sử dụng phương pháp Ritz với các hàm dạng là các đa thức Chebyshev dựa trên FSDT. Các đường cân bằng tải nhiệt – độ võng cho mô hình tấm sandwich loại A có hình dáng hoàn hảo ($\mu = 0$) với các tính chất phụ thuộc vào nhiệt độ được xác định từ biểu thức (5.32) kết hợp với một thuật toán lặp và được so sánh trong hình 5.6 với kết quả đã được báo cáo trong công trình của Kiani [148]. Có thể thấy rằng kết quả của luận án phù hợp rất tốt với kết quả trong [148] khi độ võng nhỏ và hơi thấp hơn so với kết quả của Kiani khi độ võng lớn hơn.



Hình 5.6. So sánh ứng xử sau vòng của tấm sandwich với các lớp mặt FG-CNTRC và các cạnh tựa cố định chịu nhiệt độ tăng đều ($h_H = h - 2h_f$).

5.4.2. Panel trụ sandwich với các cạnh tựa di động chịu nén dọc trục

Trong phần này luận án trình bày một số kết quả số cho phân tích vòng và sau vòng của các panel trụ sandwich FG-CNTRC có các cạnh tựa di động và không có tương tác với nền đàn hồi. Các kết quả phân tích vòng của panel hoàn hảo ($\mu = 0$) được cho dưới dạng bảng và các kết quả phân tích sau vòng được cho dưới dạng các hình vẽ.

Các ảnh hưởng của tỷ số độ cong a/R , nhiệt độ môi trường T , tỷ lệ thể tích và kiểu phân bố CNT lên các tải tới hạn của panel trụ sandwich FG-CNTRC loại A và B với $h_f/h = 0.1$, $b/h = 25$ lần lượt được khảo sát trong các bảng 5.3 và 5.4. Nói chung, các kết quả từ hai bảng chứng tỏ rằng tải nén tới hạn của cả panel sandwich loại A và B đều được tăng lên khi tỷ số độ cong a/R và/hoặc tỷ lệ thể tích CNT trong lớp CNTRC được tăng lên và đều bị giảm khi nhiệt độ môi trường tăng. Nói riêng, với panel sandwich loại A, loại phân bố CNT trong các lớp mặt có ảnh hưởng nhẹ và tải tới hạn ứng với phân bố kiểu FG-V (cả hai mặt panel giàu CNT) cao hơn so với các kiểu phân bố khác. Trong khi đó, đối với panel sandwich loại B, loại phân

bố CNT trong lớp lõi có ảnh hưởng quan trọng lên khả năng kháng vòng của panel và tải nén tới hạn ứng với kiểu phân bố FG-X trong lớp lõi là cao nhất.

Bảng 5.3. Các ảnh hưởng khác nhau lên tải tới hạn P_{xcr} (MPa) của panel trụ sandwich loại A chịu nén đều dọc trục [$a/b=1$, $b/h=25$, $h_f/h=0.1$, $(m,n)=(1,1)$].

V_{CNT}^*	a/R	UD	FG-X	FG-V	$FG-\Lambda$
0.12	0.1	376.9 ⁱ (358.6 ⁱⁱ)	377.1 (358.7)	381.3 (363.0)	372.5 (354.3)
	0.3	548.7 (521.3)	548.8 (521.4)	553.1 (525.7)	544.3 (517.0)
0.17	0.1	407.5 (388.3)	407.8 (388.6)	414.1 (394.8)	401.0 (382.0)
	0.3	581.2 (552.9)	581.5 (553.1)	587.8 (559.4)	574.8 (546.5)
0.28	0.1	461.3 (441.5)	462.1 (442.2)	472.5 (452.4)	451.2 (431.4)
	0.3	637.4 (608.3)	638.2 (609.0)	648.6 (619.2)	627.3 (598.3)

ⁱ T = 300 K, ⁱⁱ T = 400 K

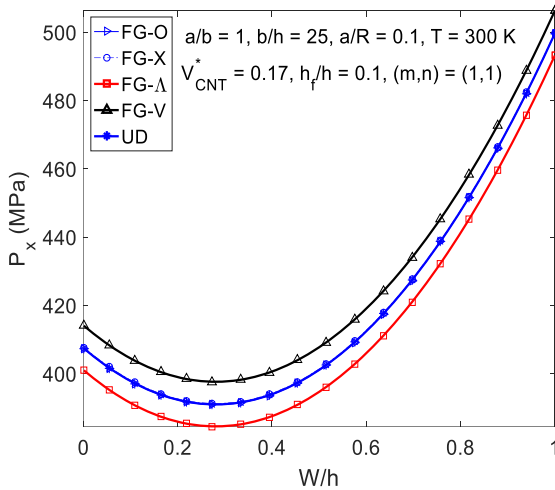
Bảng 5.4. Các ảnh hưởng khác nhau lên tải tới hạn P_{xcr} (MPa) của panel trụ sandwich loại B chịu nén đều dọc trục [$a/b=1$, $b/h=25$, $h_f/h=0.1$, $(m,n)=(1,1)$].

V_{CNT}^*	a/R	UD	FG-X	FG-V	$FG-\Lambda$
0.12	0.1	345.5 ⁱ (328.8 ⁱⁱ)	375.6 (358.4)	335.4 (318.5)	327.2 (310.7)
	0.3	396.3 (376.6)	426.4 (406.2)	394.4 (374.1)	369.8 (350.8)
0.17	0.1	376.9 (359.3)	421.3 (402.8)	358.8 (341.0)	349.5 (332.1)
	0.3	430.8 (409.8)	475.3 (453.5)	422.2 (400.5)	394.1 (373.9)
0.28	0.1	430.9 (412.5)	502.9 (483.0)	396.7 (378.2)	386.4 (368.5)
	0.3	486.2 (464.2)	558.6 (535.1)	462.6 (439.9)	431.8 (410.9)

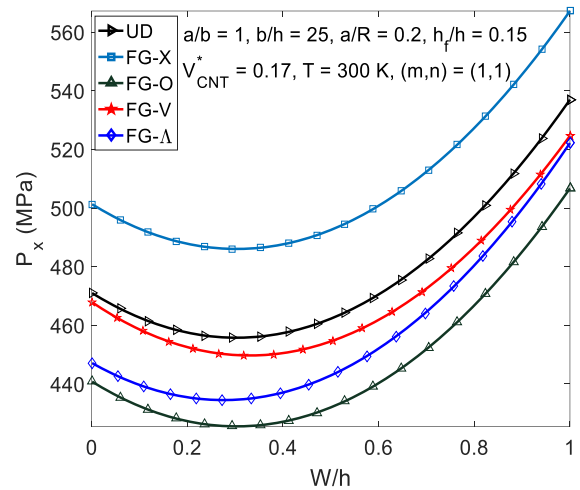
ⁱ T = 300 K, ⁱⁱ T = 400 K

Tiếp theo, các ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT lên ứng xử sau vòng của các panel trụ sandwich loại A và loại B hoàn hảo hình dáng chịu nén dọc trục được khảo sát lần lượt trong các hình 5.7 và 5.8. Đối với mô hình sandwich loại A, kiểu phân bố CNT ở hai lớp mặt chỉ có ảnh hưởng tương đối nhẹ lên đáp ứng sau vòng của panel trụ chịu nén và khả năng mang tải của panel trụ ứng với hai loại phân bố FG-V và $FG-\Lambda$ lần lượt là cao nhất và thấp nhất. Đối với mô hình sandwich loại B, kiểu

phân bố CNT trong lớp lõi có ảnh hưởng rõ rệt lên ứng xử sau vòng của panel, cụ thể là khả năng mang tải sau vòng của panel ứng với các kiểu phân bố FG-X và FG-O lần lượt là cao nhất và thấp nhất. Khác với ứng xử sau vòng của panel trụ đơn lớp FG-CNTRC chịu nén dọc trục đã được phân tích trong các công trình trước [95,99], khả năng mang tải nén của panel sandwich cao hơn nhưng đáp ứng hóp trong giai đoạn sau vòng cũng mạnh hơn.



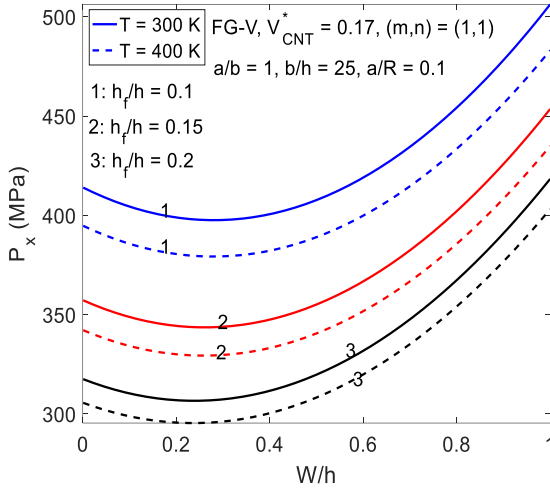
Hình 5.7. Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT ở hai lớp mặt lên ứng xử sau vòng của panel trụ sandwich loại A chịu nén.



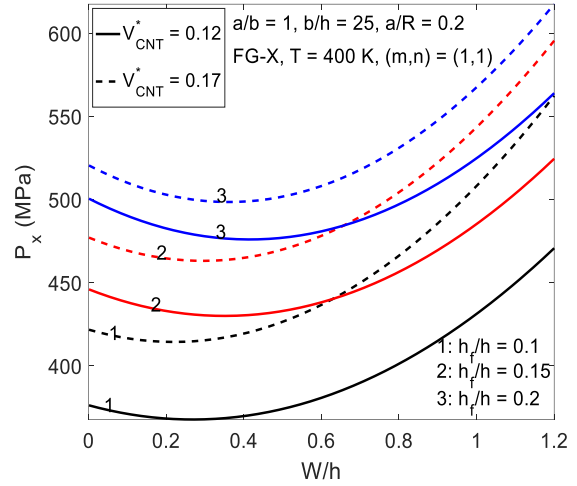
Hình 5.8. Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT ở lớp lõi lên ứng xử sau vòng của panel trụ sandwich loại B chịu nén.

Các ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày lớp mặt trên tổng chiều dày h_f/h lên ứng xử sau vòng của panel trụ sandwich loại A và loại B chịu nén dọc trục lần lượt được đánh giá trong các hình 5.9 và 5.10. Hình 5.9 chỉ ra rằng khả năng mang tải trong giai đoạn sau vòng của panel trụ sandwich loại A bị giảm khi tỷ số h_f/h cao hơn. Hơn nữa, ảnh hưởng tiêu cực của nhiệt độ cao ($T = 400\text{K}$) lên khả năng mang tải trở nên nhẹ hơn khi các lớp mặt CNTRC trở nên dày hơn. Ngược lại, quan sát hình 5.10 có thể thấy rằng sự tăng chiều dày của các lớp mặt thuần nhất làm tăng đáng kể khả năng mang tải trong giai đoạn sau vòng của các panel trụ sandwich loại B. Thêm vào đó, ảnh hưởng tích cực của tỷ lệ CNT lên tải tới hạn trở nên nhỏ hơn và cường độ của hiện tượng hóp trở nên mạnh hơn khi các lớp mặt thuần nhất dày hơn.

Trong phần cuối của tiểu mục này, các ảnh hưởng của tỷ số độ cong a/R và tỷ lệ phần trăm thể tích CNT lên ứng xử sau vòng của panel trụ sandwich loại A với các lớp mặt FG-CNTRC chịu nén dọc trục được phân tích lần lượt trong các hình 5.11 và 5.12 cho cả panel hoàn hảo và không hoàn hảo về hình dáng.

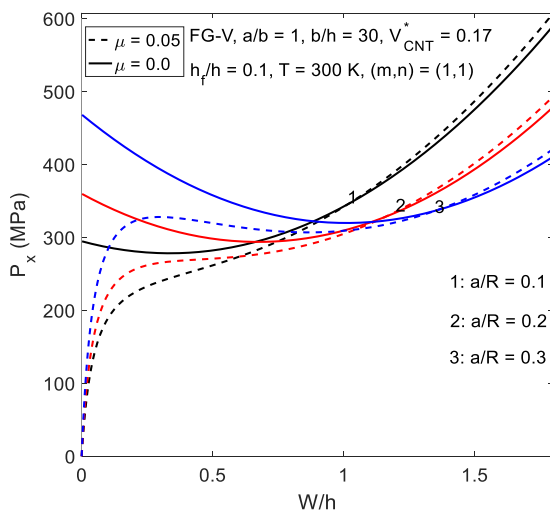


Hình 5.9. Ảnh hưởng của tỷ lệ h_f/h và nhiệt độ lên ứng xử sau vòng của panel trụ sandwich loại A chịu nén dọc trục.

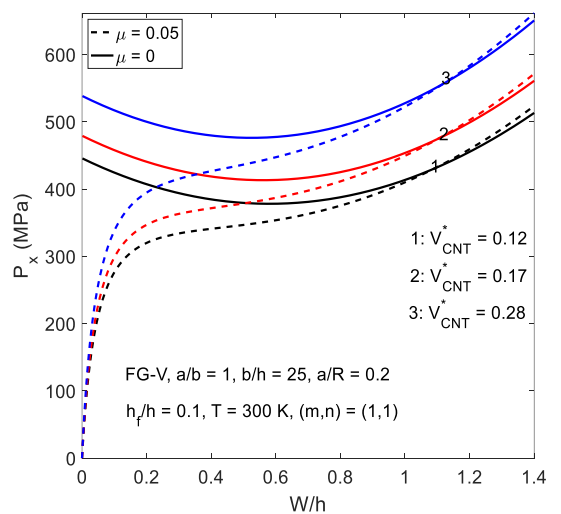


Hình 5.10. Ảnh hưởng của tỷ lệ h_f/h và V_{CNT}^* lên ứng xử sau vòng của panel trụ sandwich loại B chịu nén dọc trục.

Hình 5.11 chỉ ra rằng khả năng kháng vòng và khả năng mang tải trong miền độ võng nhỏ được tăng lên khi tỷ số a/R tăng lên. Tuy nhiên, đi kèm với ảnh hưởng tích cực này là đáp ứng hóp xảy ra với cường độ mạnh hơn khi tỷ số độ cong panel trở nên lớn hơn. Hình 5.12 một lần nữa chứng tỏ ảnh hưởng rõ rệt của tỷ lệ thể tích CNT ở các lớp mặt lên ứng xử sau vòng của các panel trụ sandwich loại A chịu nén dọc trục và các đường cân bằng tải – độ võng cao hơn đáng kể khi tỷ lệ thể tích CNT trở nên lớn hơn.



Hình 5.11. Ảnh hưởng của tỷ số độ cong lên ứng xử sau vòng của các panel trụ sandwich loại A chịu nén dọc trục.



Hình 5.12. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT lên ứng xử sau vòng của các panel trụ sandwich loại A chịu nén dọc trục.

5.4.3. Tấm sandwich với các cạnh bị ràng buộc dịch chuyển chịu tải nhiệt

Phần này trình bày các kết quả số cho phân tích vòng và sau vòng của các tấm chữ nhật sandwich FG-CNTRC loại A và loại B với các cạnh biên bị ràng buộc dịch chuyển chỉ chịu nhiệt độ tăng đều. Để thuận lợi trong việc xác định mức độ ràng buộc dịch chuyển, từ đây về sau, luận án sử dụng các tham số độ cứng ràng buộc không thứ nguyên λ_1, λ_2 có biểu thức như sau [130,131]

$$\lambda_1 = \frac{c_1}{e_{11} + c_1}, \quad \lambda_2 = \frac{c_2}{e_{11} + c_2} \quad (5.41)$$

Dễ thấy rằng, các giá trị $\lambda_1 = 0$ (khi $c_1 = 0$), $\lambda_1 = 1$ (khi $c_1 \rightarrow \infty$) và $0 < \lambda_1 < 1$ (khi $0 < c_1 < \infty$) lần lượt biểu thị các trường hợp tựa di động, tựa cố định và tựa tự do một phần của các cạnh $x = 0, a$. Tương tự, các trường hợp tựa di động, tựa cố định và tựa tự do một phần của các cạnh $y = 0, b$ lần lượt được đặc trưng bởi các giá trị $\lambda_2 = 0$ (khi $c_2 = 0$), $\lambda_2 = 1$ (khi $c_2 \rightarrow \infty$) và $0 < \lambda_2 < 1$ (khi $0 < c_2 < \infty$). Để cho việc diễn đạt được ngắn gọn, nếu không có giải thích gì thêm, các tấm sandwich được giả thiết là vuông ($a/b = 1$) có hình dáng hoàn hảo ($\mu = 0$), không có tương tác với nền đàn hồi ($K_1 = K_2 = 0$), có tất cả các cạnh tựa cố định ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) và các tính chất của các vật liệu thành phần trong tấm sandwich phụ thuộc vào nhiệt độ (T-D).

Trước tiên, các ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT, tỷ lệ chiều dày các lớp và kiểu phân bố CNT trong lớp CNTRC lên tải nhiệt tới hạn của các tấm sandwich FG-CNTRC loại A và loại B lần lượt được chỉ ra trong các bảng 5.5 và 5.6. Đối với tấm sandwich loại A, như có thể thấy từ bảng 5.5, tải nhiệt tới hạn được tăng và bị giảm khi lần lượt tăng tỷ lệ thể tích CNT và chiều dày hai lớp mặt. Đối với mô hình sandwich loại A, kiểu phân bố CNT ở hai lớp mặt có ảnh hưởng tương đối nhẹ lên tải nhiệt tới hạn, đặc biệt khi chiều dày các lớp mặt nhỏ. Trong số 5 kiểu phân bố CNT thì các kiểu phân bố FG-V (CNTs tập trung nhiều ở hai mặt ngoài) và FG- Λ (CNTs tập trung nhiều ở hai mặt tiếp giáp) lần lượt làm cho tấm sandwich có tải nhiệt tới hạn cao nhất và thấp nhất. Ngược lại, đối với mô hình tấm sandwich loại B, có thể nhận thấy từ bảng 5.6 rằng tải nhiệt tới hạn có xu hướng bị giảm khi tỷ lệ thể tích V_{CNT}^* trong lớp lõi CNTRC được tăng lên từ 12% đến 28%. Hơn nữa, kiểu phân bố CNT trong lớp lõi có ảnh hưởng đáng kể lên sự ổn định của các tấm loại B chịu nhiệt.

Bảng 5.5. Ảnh hưởng của tỷ lệ các lớp, tỷ lệ thể tích CNT và kiểu phân bố CNT trong hai lớp mặt lên tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các tấm sandwich loại A với các cạnh tựa cố định [$a/b=1$, $b/h=20$, $(K_1, K_2) = (0,0)$, $(\lambda_1, \lambda_2) = (1,1)$, $(m, n) = (1,1)$].

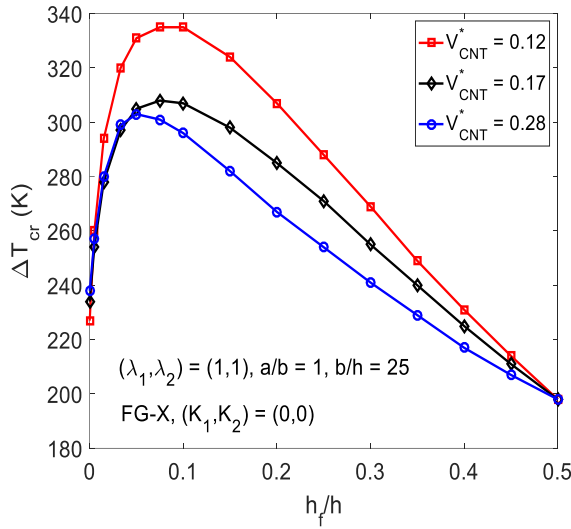
V_{CNT}^*	h_H / h_f	UD	FG-X	FG-O	FG-V	FG- Λ
0.12	8	230.48	230.60	230.36	233.44	227.52
	6	216.53	216.78	216.41	221.35	211.84
	4	197.15	197.64	196.78	205.91	188.51
0.17	8	244.06	244.31	244.06	248.50	239.86
	6	233.56	233.94	233.44	240.48	226.90
	4	219.49	220.36	219.12	232.09	207.39
0.28	8	270.73	271.22	270.85	277.89	264.06
	6	266.41	267.15	266.41	277.64	255.91
	4	261.59	263.07	261.22	281.59	242.95

Trong số ba kiểu phân bố đối xứng qua mặt giữa thì tải tới hạn của tấm FG-X cao hơn đáng kể so với hai kiểu phân bố còn lại (cụ thể là cao hơn tải tới hạn của tấm UD và FG-O lần lượt khoảng 13.15% và 26.26% khi $V_{CNT}^* = 0.17$ và $h_f / h = 0.1$).

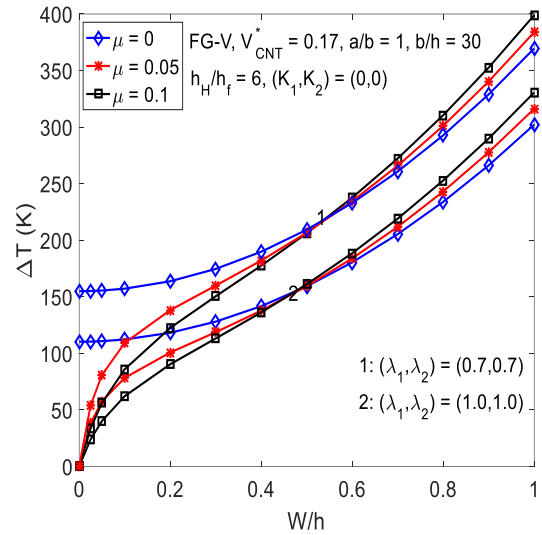
Bảng 5.6. Ảnh hưởng của tỷ lệ các lớp, tỷ lệ thể tích CNT và kiểu phân bố CNT trong lớp lõi lên tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của các tấm sandwich loại B với các cạnh tựa cố định [$a/b=1$, $b/h=20$, $(K_1, K_2) = (0,0)$, $(\lambda_1, \lambda_2) = (1,1)$, $(m, n) = (1,1)$].

V_{CNT}^*	h_f / h	FG-X	UD	FG-O
0.12	0	226.4 ⁱ (281.6 ⁱⁱ)	174.1 (207.6)	108.5 (122.5)
	0.1	333.8 (382.3)	303.7 (350.8)	276.7 (319.8)
	0.2	306.2 (347.2)	297.0 (337.7)	290.2 (328.5)
0.17	0	233.7 (287.8)	176.8 (209.2)	108.6 (122.2)
	0.1	306.3 (350.9)	270.7 (312.5)	238.8 (275.5)
	0.2	284.6 (323.2)	272.6 (310.3)	263.1 (298.3)
0.28	0	237.3 (316.0)	182.6 (229.1)	115.4 (134.5)
	0.1	294.9 (351.5)	250.7 (299.5)	210.2 (249.5)
	0.2	266.5 (310.5)	250.0 (291.5)	236.1 (273.9)

ⁱ T-D, ⁱⁱ T-ID



Hình 5.13. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT và tỷ lệ chiều dày h_f/h lên tải nhiệt tới hạn của tấm sandwich loại B.

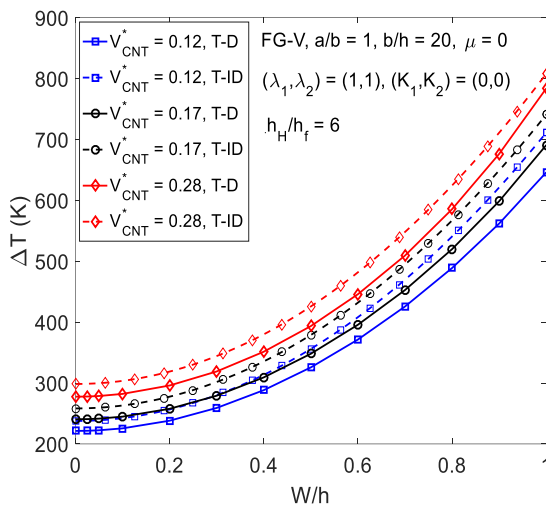


Hình 5.14. Ảnh hưởng của sự ràng buộc cạnh và độ không hoàn hảo lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A.

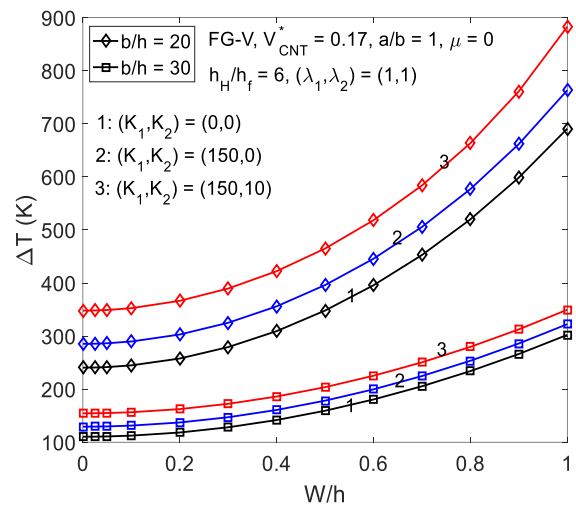
Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT và tỷ lệ chiều dày h_f/h lên tải nhiệt tới hạn của tấm sandwich loại B cũng được minh họa trên hình 5.13. Có thể nhận thấy từ bảng 5.6 và hình 5.13 rằng tải nhiệt tới hạn ban đầu tăng khi h_f/h tăng đến một giá trị nhất định và sau đó bị giảm khi h_f/h tăng. Nói khác đi, với mỗi giá trị nhất định của tỷ lệ thể tích CNT, tồn tại một tỷ lệ h_f/h tối ưu mà ở đó tấm ổn định nhất khi chịu nhiệt độ tăng đều. Ví dụ tiếp theo được trình bày trong hình 5.14 để đánh giá ảnh hưởng của mức độ ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên (λ_1, λ_2) và mức độ không hoàn hảo hình dáng (μ) lên xu hướng đáp ứng của tấm sandwich loại A chịu tải nhiệt. Như có thể thấy, tấm không có ứng xử rẽ nhánh khi hình dáng ban đầu không hoàn hảo và khả năng mang tải nhiệt trong giai đoạn đầu (độ võng nhỏ) giảm khi độ không hoàn hảo tăng. Ngược lại, trong giai đoạn sau (độ võng sâu) khả năng mang tải nhiệt của tấm không hoàn hảo tốt hơn so với tấm hoàn hảo hình dáng. Hình 5.14 cũng chứng tỏ rằng khả năng mang tải nhiệt của tấm bị giảm mạnh khi tất cả các cạnh tựa cố định $(\lambda_1 = \lambda_2 = 1)$.

Các ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT trong hai lớp mặt, tỷ lệ chiều dày b/h và các độ cứng không thứ nguyên của các nền đàn hồi lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A với các cạnh tựa cố định chịu nhiệt độ tăng đều được khảo sát trong

các hình 5.15 và 5.16. Có thể thấy rằng, đối với mô hình sandwich loại A, CNTs có ảnh hưởng tích cực lên khả năng mang tải nhiệt của tấm và đường cân bằng sau vòng được nâng lên khi tỷ lệ CNT trong hai lớp mặt cao hơn. Hình 5.16 chứng tỏ rằng sự có mặt của nền đàn hồi làm cho khả năng kháng vòng và mang tải nhiệt sau vòng của tấm sandwich loại A được cải thiện đáng kể. Theo một chiều hướng khác, sự tăng lên của tỷ lệ kích thước trên chiều dày b/h dẫn đến sự giảm mạnh của khả năng mang tải nhiệt và làm cho đường cân bằng phát triển chậm hơn (thoải hơn).



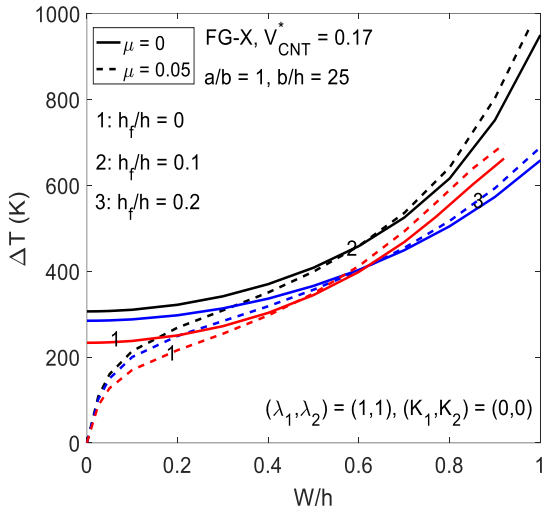
Hình 5.15. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A chịu tải nhiệt.



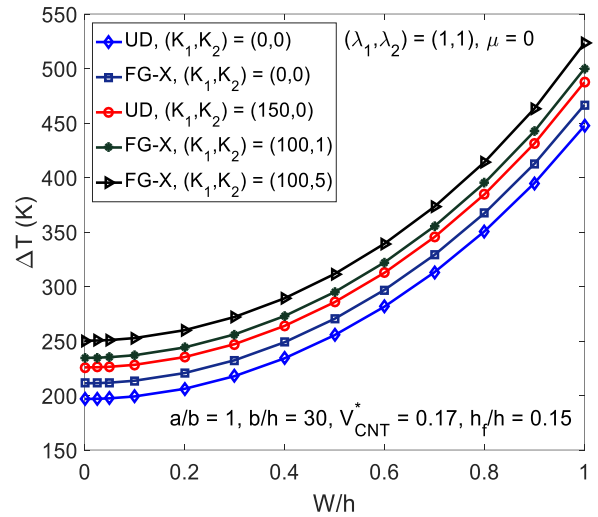
Hình 5.16. Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày và nền đàn hồi lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A chịu tải nhiệt.

Phần còn lại của tiểu mục này trình bày các kết quả số cho phân tích ổn định phi tuyến của tấm chữ nhật sandwich loại B với lớp lõi FG-CNTRC chịu nhiệt độ tăng đều. Hình 5.17 phân tích ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày các lớp mặt trên tổng chiều dày h_f/h lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại B với các cạnh tựa cố định chịu tải nhiệt. Có thể nhận thấy rằng khả năng mang tải nhiệt được tăng lên khi tỷ số h_f/h tăng đến một giá trị nhất định, sau đó bị giảm khi tỷ số h_f/h trở nên lớn hơn. Như vậy, từ các hình 5.13 và 5.17 có thể thấy rằng dường như tồn tại một giá trị tối ưu của tỷ số h_f/h tương đối nhỏ mà ở đó tấm sandwich loại B có khả năng ổn định tốt nhất dưới tác dụng của tải nhiệt. Tiếp theo, ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT trong lớp lõi và độ cứng các nền đàn hồi lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại B với các cạnh tựa cố định chịu nhiệt độ tăng đều được khảo sát trong hình 5.18. Như có thể thấy rằng kiểu phân bố đối xứng mặt giữa dạng FG-X đem lại hiệu quả cao

hơn đáng kể so với phân bố đều UD. Hơn nữa, nền đàn hồi với độ cứng phù hợp, đặc biệt là độ cứng của lớp trượt Pasternak mang lại hiệu quả mang tải nhiệt rất tốt cho tấm sandwich loại B.

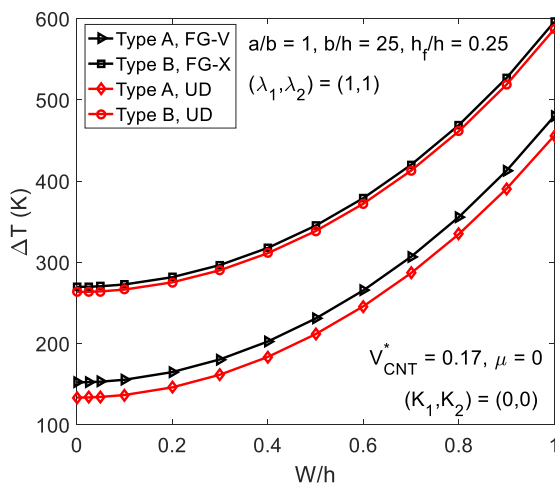
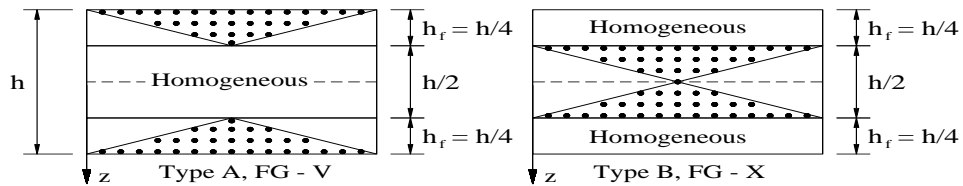


Hình 5.17. Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày h_f/h lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại B chịu tải nhiệt.



Hình 5.18. Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT trong lõi và nền đàn hồi lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại B.

Cuối cùng, ứng xử sau vòng của các tấm sandwich loại A và loại B có cùng tỷ lệ CNT và tổng chiều dày các lớp được so sánh trong hình 5.19.

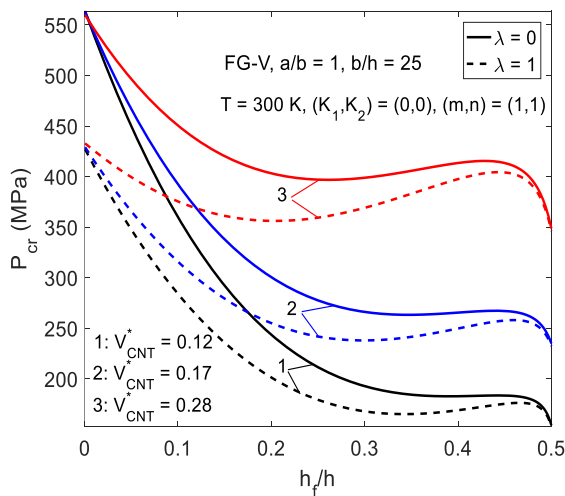


Hình 5.19. So sánh khả năng mang tải sau vòng của các mô hình tấm sandwich loại A và loại B chịu tải nhiệt.

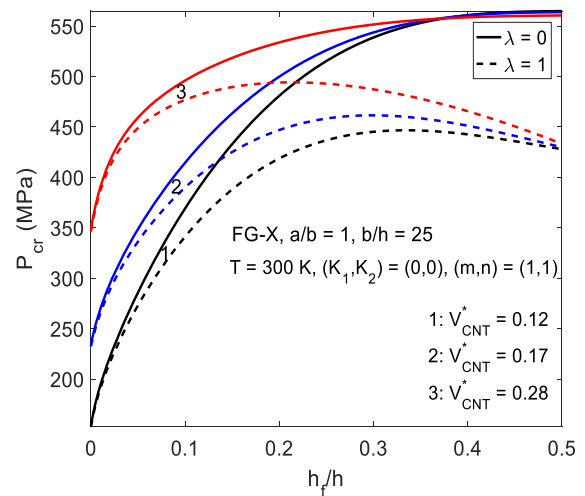
Trong so sánh này, tỷ lệ chiều dày mỗi lớp biên trên tổng chiều dày được chọn là $h_f / h = 0.25$ và với tỷ lệ này thì tấm sandwich loại A với kiểu phân bố FG-V trong lớp mặt và tấm sandwich loại B với kiểu phân bố FG-X trong lớp lõi có tổng chiều dày các lớp FG-CNTRC và thuần nhất giống nhau và mỗi loại vật liệu phân bố trong một nửa chiều dày tấm. Một điều thú vị có thể nhận thấy từ hình 5.19 rằng với cùng một tỷ lệ vật liệu thì tấm sandwich loại B có khả năng mang tải vượt trội so với tấm sandwich loại A. Điều này cho thấy, mô hình sandwich với lớp lõi FG-CNTRC (nhẹ) và hai lớp mặt làm từ vật liệu thuần nhất Ti-6Al-4V (cứng) có thể là một mô hình sandwich chuẩn và đem lại hiệu quả mang tải rất ưu việt so với mô hình sandwich với lõi thuần nhất và hai lớp mặt FG-CNTRC đã được xét trong các nghiên cứu trước.

5.4.4. Tấm sandwich với hai cạnh bị ràng buộc chịu tải cơ – nhiệt

Trong phần đầu của tiểu mục này, luận án trình bày một số kết quả số cho phân tích vòng và sau vòng của tấm sandwich FG-CNTRC đặt trong môi trường nhiệt (tồn tại trước) và chịu nén một phương trên hai cạnh tựa di động $x = 0, a$ trong khi hai cạnh còn lại $y = 0, b$ chịu ràng buộc đàn hồi. Do chỉ có sự ràng buộc trên hai cạnh không chịu nén $y = 0, b$ nên trong các kết quả số này ký hiệu λ sẽ được sử dụng để thay cho ký hiệu λ_2 đã được định nghĩa trong (5.41). Hơn nữa, từ các kết quả phân tích ở trên, phần còn lại của kết quả số chỉ xét các tấm sandwich loại A với kiểu phân bố FG-V trong hai lớp mặt và sandwich loại B với kiểu phân bố FG-X trong lớp lõi.

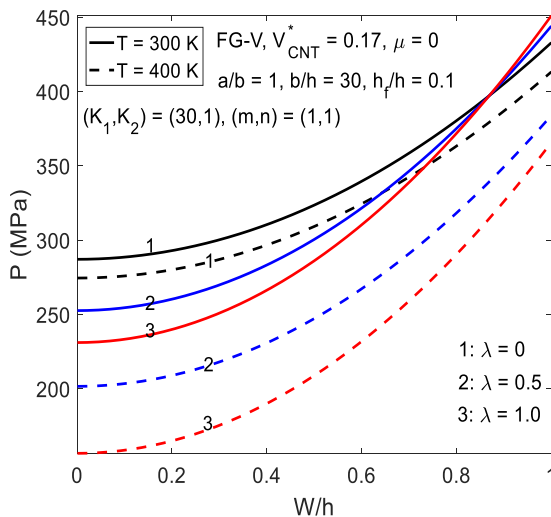


Hình 5.20. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT và tỷ lệ h_f / h lên tải nén tới hạn của tấm sandwich loại A chịu nén.

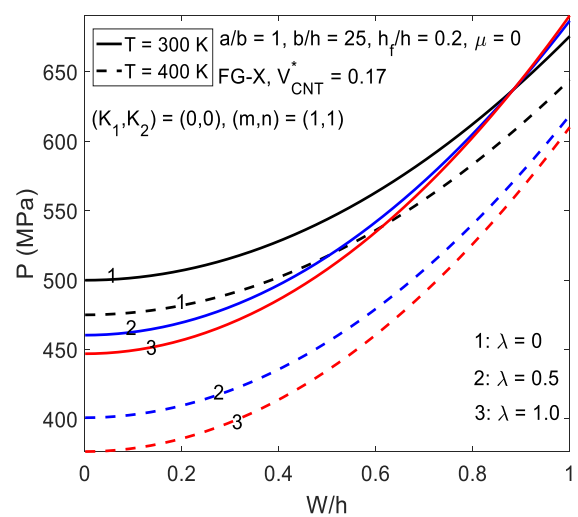


Hình 5.21. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT và tỷ lệ h_f / h lên tải nén tới hạn của tấm sandwich loại B chịu nén.

Các ảnh hưởng của tỷ lệ V_{CNT}^* của CNT trong lớp CNTRC, tỷ lệ chiều dày các lớp h_f/h và mức độ ràng buộc các cạnh không chịu nén λ ($= 0$ và 1) lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A với kiểu phân bố FG-V trong hai lớp mặt và loại B với kiểu phân bố FG-X trong lớp lõi chịu nén một phương lần lượt được khảo sát trong các hình 5.20 và 5.21. Đối với cả hai mô hình tấm sandwich, tỷ lệ phần trăm CNT trong lớp CNTRC có ảnh hưởng quan trọng lên khả năng kháng vòng của tấm sandwich, đặc biệt là khi các lớp CNTRC dày hơn, và nhìn chung tỷ lệ phần trăm CNT càng cao thì tải nén tới hạn càng lớn. Hơn nữa, có thể nhận thấy từ các hình 5.20 và 5.21 rằng mức độ ảnh hưởng của sự ràng buộc hai cạnh $y=0, b$ phụ thuộc vào tỷ lệ chiều dày các lớp, cụ thể là tải nén tới hạn ứng với $\lambda=1$ giảm nhẹ và giảm sâu so với tải tới hạn ứng với $\lambda=0$ lần lượt trong các trường hợp lớp thuần nhất mỏng và dày. Đối với tấm sandwich loại A, tải nén tới hạn ban đầu giảm mạnh sau đó giảm nhẹ khi tỷ lệ h_f/h tăng (các lớp mặt FG-V CNTRC dày hơn). Đối với tấm sandwich loại B, tải nén tới hạn ban đầu tăng mạnh khi chiều dày hai lớp mặt thuần nhất tăng sau đó tăng nhẹ khi các cạnh $y=0, b$ tựa di động ($\lambda=0$) và giảm nhẹ khi hai cạnh $y=0, b$ cố định ($\lambda=1$) và tỷ số h_f/h tăng.



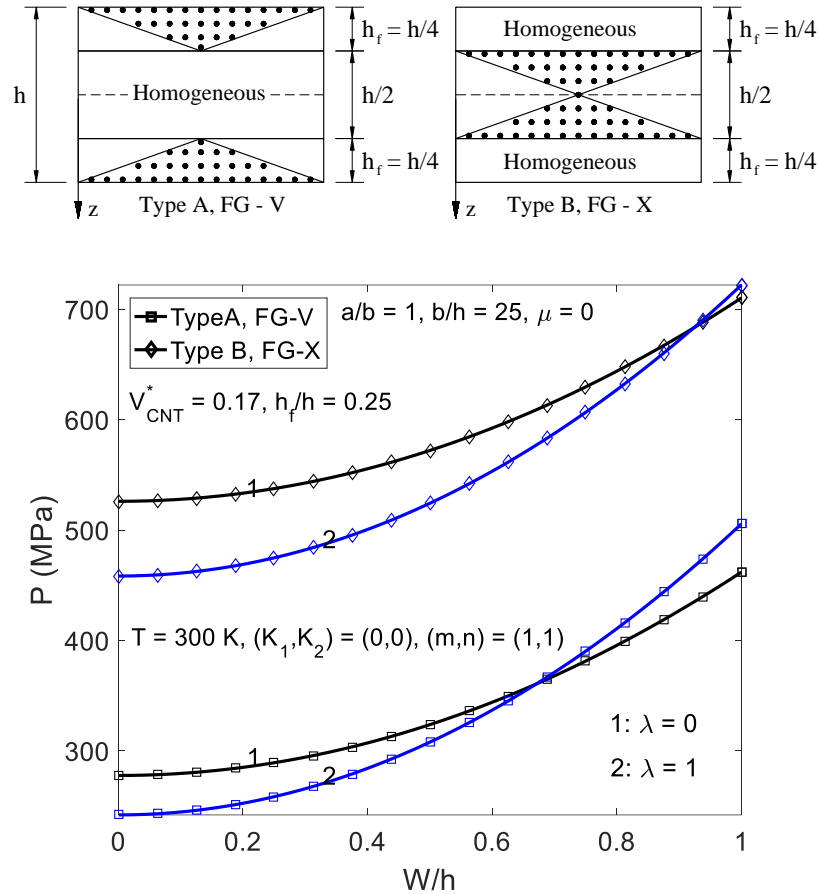
Hình 5.22. Ảnh hưởng của tham số ràng buộc λ và nhiệt độ T lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A chịu nén.



Hình 5.23. Ảnh hưởng của tham số ràng buộc λ và nhiệt độ T lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại B chịu nén.

Các ảnh hưởng của sự ràng buộc hai cạnh biên không chịu nén $y=0, b$ và nhiệt độ môi trường T lên ứng xử sau vòng của các tấm sandwich loại A và loại B

chịu nén một phương lần lượt được khảo sát trong các hình 5.22 và 5.23. Rõ ràng là, nhiệt độ cao ($T = 400\text{K}$) làm cho khả năng mang tải nén của tấm bị giảm nhẹ và giảm mạnh lần lượt khi các cạnh không chịu nén tựa di động và bị ràng buộc. Điều này có thể được giải thích là tải nén bị động do nhiệt trở nên lớn hơn khi các cạnh không chịu nén bị ràng buộc chặt chẽ hơn và làm cho tấm kém ổn định hơn khi chịu nén.

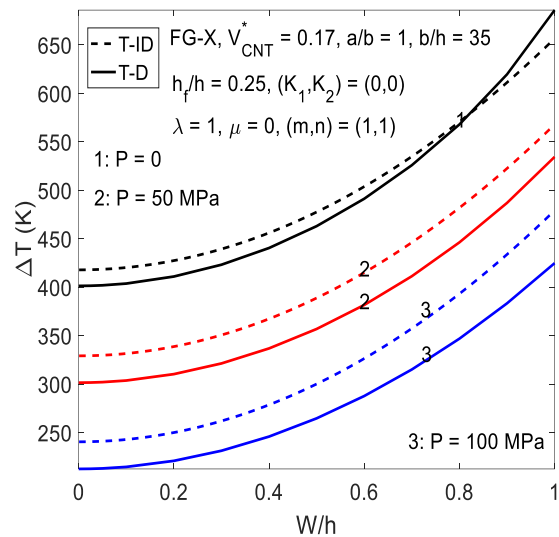
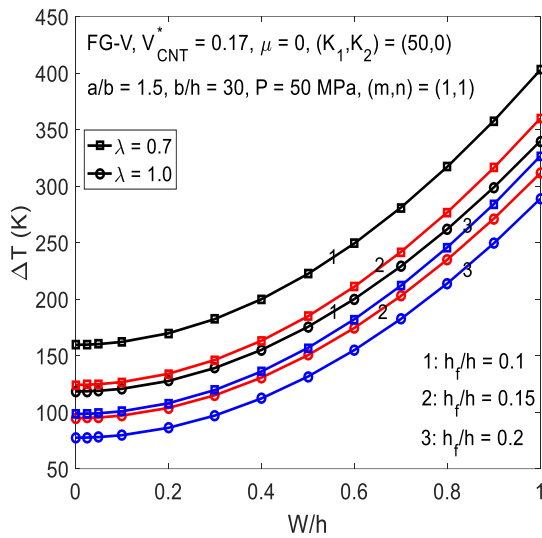


Hình 5.24. So sánh ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại A và loại B chịu nén.

Một sự so sánh ứng xử sau vòng của các tấm sandwich loại A với các lớp mặt FG-V CNTRC và tấm sandwich loại B với lớp lõi FG-X CNTRC, trong đó chiều dày của mỗi lớp mặt là $h_f = h/4$, chịu nén theo một phương được so sánh trong hình 5.24. Với cấu hình sandwich này, có thể nhận thấy rằng tỷ lệ các loại vật liệu trong hai loại tấm sandwich là giống nhau. Có thể thấy rằng với cùng một điều kiện biên và tỷ lệ thể tích các thành phần vật liệu, tấm sandwich loại B có khả năng mang tải cao hơn nhiều so với tấm sandwich loại A.

Phần còn lại của tiểu mục này giới thiệu một số kết quả cho phân tích sau vòng của các tấm sandwich chịu nén trước bởi áp lực P trên hai cạnh tựa di động $x=0, a$ và chịu nhiệt độ tăng đều.

Hình 5.25 phân tích ảnh hưởng của tỷ số tỷ lệ chiều dày h_f/h và mức độ ràng buộc λ trên hai cạnh $y=0, b$ lên ứng xử sau vòng do nhiệt của tấm sandwich loại A đặt trên nền đàn hồi Winkler ($K_1=50, K_2=0$) chịu nén trước bởi $P=30$ MPa. Có thể nhận thấy rằng khả năng mang tải nhiệt của tấm sandwich loại A bị giảm rõ rệt khi chiều dày các lớp mặt và/hoặc độ ràng buộc cạnh λ trở nên lớn hơn.



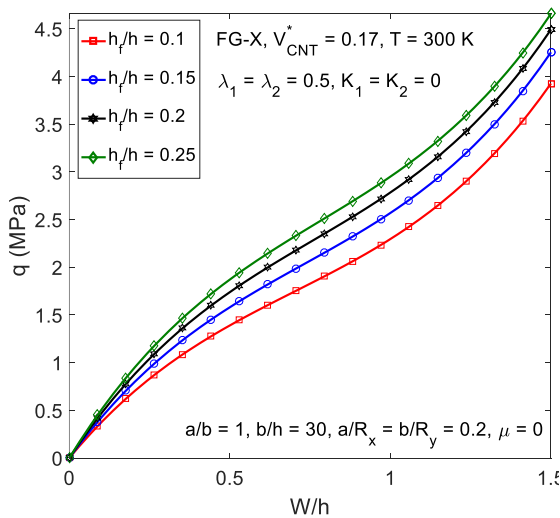
Hình 5.25. Ảnh hưởng của tỷ số h_f/h và sự ràng buộc 2 cạnh $y=0, b$ lên sự ổn định nhiệt của tấm sandwich loại A. Hình 5.26. Ảnh hưởng của tải nén trước lên ứng xử sau vòng của tấm sandwich loại B chịu nhiệt độ tăng đều.

Ví dụ số cuối cùng trong tiêu mục này được chỉ trong hình 2.26 để đánh giá ảnh hưởng của tải nén trước trên hai cạnh tựa di động lên khả năng chịu tải nhiệt của tấm sandwich loại B. Như có thể thấy, khả năng mang tải nhiệt của tấm bị giảm mạnh khi tăng tải nén tác dụng trước.

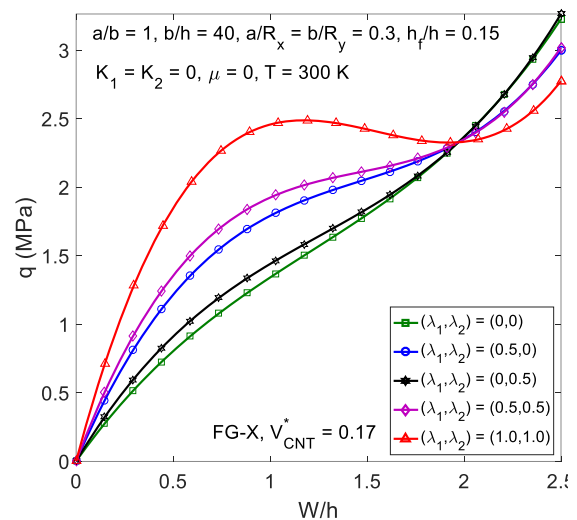
5.4.5. Panel hai độ cong sandwich chịu áp lực ngoài

Các phân tích ở phần trên đã chứng tỏ sự ưu việt của mô hình sandwich loại B so với mô hình sandwich loại A. Vì vậy, trong tiêu mục này, luận án chỉ xét các panel hai độ cong sandwich loại B. Cụ thể, một số kết quả số cho phân tích ổn định phi tuyến của các panel cầu và panel trụ với lớp lõi FG-X CNTRC và hai lớp mặt thuần nhất chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt độ sẽ được phân tích trong tiêu mục này. Để ngắn gọn cách trình bày, nếu không có lưu ý thêm, panel được giả thiết có hình dáng hoàn hảo ($\mu=0$), đặt ở nhiệt độ phòng và không có tương tác nền.

Ví dụ đầu tiên trong tiêu mục này được hiển thị trong hình 5.27 để đánh giá ảnh hưởng của tỷ lệ h_f/h lên ổn định phi tuyến của các panel cầu sandwich với các cạnh được dịch chuyển một phần ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$) chỉ chịu áp lực ngoài. Có thể quan sát thấy rằng sự tăng lên của tỷ lệ h_f/h (tức là tăng chiều dày hai lớp mặt thuần nhất) làm cho đường cân bằng tải – độ võng trở nên cao hơn và panel mang áp lực ngoài tốt hơn. Tiếp theo, các ảnh hưởng của mức độ ràng buộc dịch chuyển ở hai cạnh biên lên ổn định phi tuyến của panel cầu sandwich chịu áp lực ngoài được phân tích trong hình 5.28. Như có thể thấy, đường cân bằng thấp hơn và ổn định hơn khi các cạnh tựa di động. Sự tăng mức độ ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên kéo theo sự tăng khả năng mang tải của panel trong giai đoạn độ võng nhỏ nhưng cũng tăng cường độ của hiện tượng hóp. Hơn nữa, đường cân bằng ứng với $(\lambda_1, \lambda_2) = (0.5, 0)$ cao hơn đáng kể so với đường cân bằng ứng với $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0.5)$, có nghĩa là sự ràng buộc trên các cạnh $x = 0, a$ và $y = 0, b$ lần lượt có các ảnh hưởng rõ rệt và nhẹ lên sự ổn định phi tuyến của panel cầu sandwich.



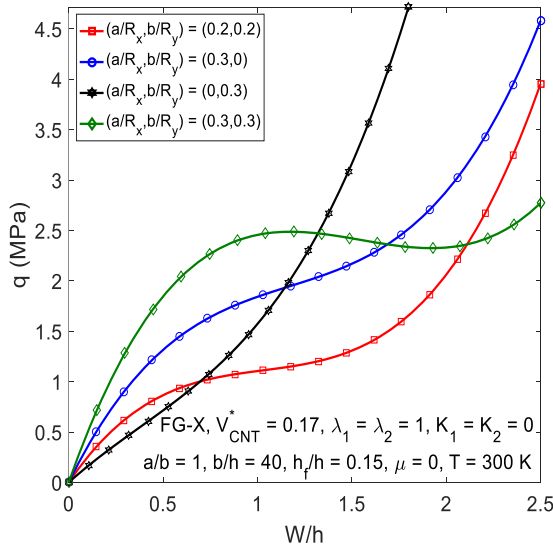
Hình 5.27. Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày h_f/h lên sự ổn định của panel cầu sandwich với lõi CNTRC chịu áp lực.



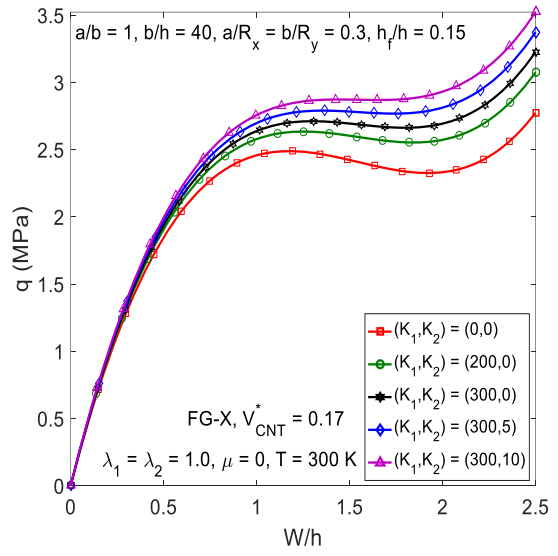
Hình 5.28. Ảnh hưởng của sự ràng buộc các cạnh lên đáp ứng phi tuyến của panel cầu sandwich CNTRC chịu áp lực ngoài.

Tiếp theo, hình 5.29 đánh giá các ảnh hưởng của các tỷ số độ cong a/R_x , b/R_y lên sự ổn định phi tuyến của các panel cong sandwich với các cạnh tựa cố định. Khi các panel cong hơn thì khả năng mang tải trong miền độ võng nhỏ tăng nhưng kéo theo đó là khả năng xuất hiện đáp ứng hóp và sự giảm khả năng mang tải trong

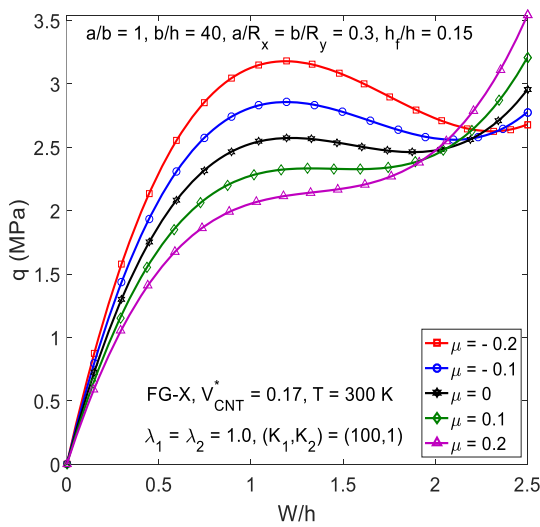
miền độ võng lớn. Hơn nữa, độ cong theo phương x (phương của CNTs) có ảnh hưởng rõ rệt hơn lên khả năng mang tải của panel. Hình 5.30, được vẽ với năm cặp tham số độ cứng nền không thứ nguyên, chỉ ra rằng các nền đàn hồi mang lại hiệu quả ổn định hóa rất tốt cho các panel sandwich chịu áp lực ngoài, đặc biệt là trong miền độ võng lớn. Cụ thể, khả năng mang tải trong miền độ võng lớn tốt hơn và các đường cân bằng ổn định hơn khi các panel được đỡ bởi nền đàn hồi.



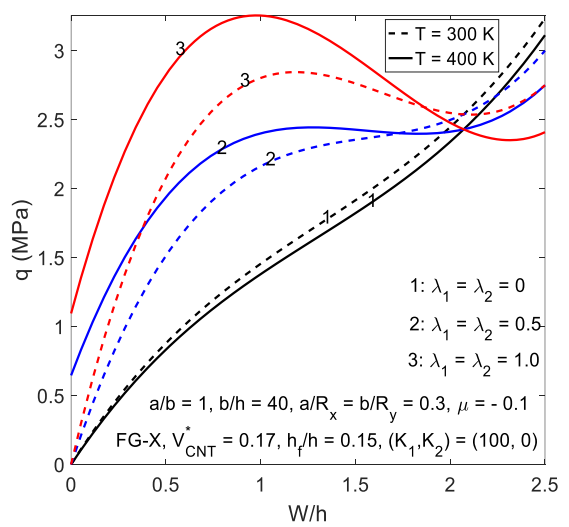
Hình 5.29. Ảnh hưởng của các độ cong lên sự ổn định phi tuyến của các panel cong sandwich chịu áp lực ngoài.



Hình 5.30. Ảnh hưởng của nền đàn hồi lên sự ổn định phi tuyến của các panel cầu sandwich chịu áp lực ngoài.



Hình 5.31. Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo lên sự ổn định của panel sandwich chịu áp lực ngoài.



Hình 5.32. Ảnh hưởng của ràng buộc cạnh biên và nhiệt độ cao lên ổn định phi tuyến của panel sandwich chịu áp lực.

Trong ví dụ tiếp theo, các đường đáp ứng tải – độ võng ứng với các giá trị khác nhau của cỡ không hoàn hảo hình dáng μ được vẽ trong hình 5.31 trong đó các giá trị âm và dương của μ lần lượt biểu thị độ lệch nhỏ ban đầu của các mặt panel hướng ra phía ngoài và vào phía trong. Dường như độ không hoàn hảo có ảnh hưởng nhạy lên độ cong thực tế của panel và do đó có ảnh hưởng quan trọng lên xu hướng ứng xử và khả năng mang tải của panel sandwich chịu áp lực ngoài. Trong khi độ lệch nhỏ vào phía trong làm cho panel có khả năng mang tải yếu hơn thì độ lệch nhỏ ra phía ngoài làm tăng khả năng mang tải trong giai đoạn trước vòng và áp lực tới hạn nhưng cũng làm cho cường độ của đáp ứng hóp trở nên mạnh hơn. Cuối cùng, ảnh hưởng đồng thời của mức độ ràng buộc các cạnh biên và nhiệt độ cao lên sự ổn định phi tuyến của panel cầu sandwich đặt trên nền đàn hồi Winkler ($K_1 = 100, K_2 = 0$) chịu áp lực ngoài được phân tích trong hình 5.32. Khi các cạnh tựa di động, nhiệt độ cao chỉ làm cho các tính chất vật liệu trở nên kém hơn và khả năng mang tải của panel cũng giảm nhẹ. Ngược lại, khi các cạnh bị ràng buộc dịch chuyển, các ứng suất nhiệt làm cho panel bị võng ra phía ngoài và làm cho panel chịu áp lực ngoài tốt hơn. Sự ràng buộc nghiêm ngặt trên các cạnh biên dẫn đến khả năng mang tải tốt hơn trong giai đoạn độ võng nhỏ, áp lực tới hạn cao hơn nhưng cũng làm cho đáp ứng hóp trở nên mạnh hơn.

5.5. Kết luận chương 5

Trong chương 5 luận án đã sử dụng cách tiếp cận giải tích dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất để phân tích ổn định phi tuyến của các tấm và panel cong sandwich làm từ các lớp vật liệu FG-CNTRC và thuần nhất. Bên cạnh mô hình sandwich gồm lớp lõi thuần nhất và hai lớp mặt FG-CNTRC (sandwich loại A), luận án đã xét mô hình sandwich được tạo thành từ lớp lõi FG-CNTRC và hai lớp mặt thuần nhất (sandwich loại B). Về mặt vật liệu, luận án đã xem xét ảnh hưởng của sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu thành phần. Về mặt kết cấu, các ảnh hưởng của độ không hoàn hảo hình dáng, tương tác giữa kết cấu với nền đàn hồi và tính đàn hồi về điều kiện ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên đã được kể đến trong luận án. Bằng cách sử dụng phương pháp Galerkin và phương pháp lặp, luận án đã tiến hành phân tích các ứng xử vòng và sau vòng của một số dạng kết cấu sandwich phổ biến như tấm chữ nhật, panel trụ và panel hai độ cong chịu các tải cơ,

hiệt và kết hợp cơ–nhiệt. Từ các kết quả phân tích đã nhận được, luận án đưa ra một số nhận xét sau đây:

1. Đối với bài toán tấm sandwich chịu nhiệt độ tăng đều, các tải nhiệt tới hạn và khả năng mang tải nhiệt của tấm sandwich loại A bị giảm khi chiều dày các lớp mặt tăng lên và được tăng lên khi tỷ lệ thể tích CNT trong lớp mặt tăng. Ngược lại, đối với mô hình tấm sandwich loại B, tồn tại một tỷ số tối ưu của chiều dày các lớp với các lớp mặt thuần nhất tương đối mỏng mà ở đó tấm có khả năng ổn định nhất khi chịu nhiệt độ tăng đều và sự tăng tỷ lệ thể tích CNT trong lớp lõi không đem lại ảnh hưởng tích cực cho sự ổn định nhiệt của tấm sandwich loại B.

2. Đối với bài toán tấm sandwich chịu tải nén, sự tăng chiều dày lớp thuần nhất làm cho tải nén tới hạn và khả năng mang tải được cải thiện đáng kể. Đối với trường hợp panel trụ sandwich chịu nén dọc trục, sự tăng chiều dày lớp FG-CNTRC làm cho tải nén và đường cân bằng tải–độ võng hạ xuống nhưng hiện tượng hóp trong giai đoạn sau vòng cũng nhẹ hơn.

3. Sự ràng buộc các cạnh biên có ảnh hưởng quan trọng lên xu hướng ứng xử và sự ổn định của tấm và panel sandwich. Đối với tấm sandwich chịu nén và/hoặc nhiệt độ, sự tăng mức độ ràng buộc các cạnh biên dẫn đến sự giảm rõ rệt tải tới hạn và khả năng chịu tải sau tới hạn. Ngược lại, đối với panel cong chịu áp lực ngoài, sự ràng buộc dịch chuyển trên các cạnh biên có thể làm cho panel bị võng ra phía ngoài ở nhiệt độ cao dẫn đến tăng độ cong panel và làm panel chịu áp lực ngoài tốt hơn.

4. Các kết quả nhận được trong chương này cho thấy rằng mô hình sandwich với lớp lõi dày hơn làm từ FG-CNTRC và hai lớp mặt mỏng làm từ vật liệu thuần nhất (dạng hợp kim) có thể là mô hình sandwich chuẩn vừa đảm bảo độ cứng (từ hai lớp mặt), độ nhẹ và dẻo dai (từ lớp lõi) và đem lại đáp ứng tối ưu cho sự ổn định kết cấu theo nghĩa chịu tải cơ, tải nhiệt tốt và giảm cường độ hóp đối với panel cong.

Các kết quả chính của chương 5 đã được công bố trong 4 bài báo khoa học trong đó có 2 bài báo đăng trên các tạp chí quốc tế danh mục ISI và 2 bài báo đăng trên tạp chí Cơ học Việt Nam, cụ thể là các bài báo số 6,7,8 và 9 trong danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

KẾT LUẬN

Luận án đã đạt được một số kết quả mới sau đây:

1. Luận án đã phân tích ổn định tuyến tính của các vỏ trống FGM dày có các lỗ rỗng chịu các điều kiện tải cơ, nhiệt và kết hợp cơ – nhiệt. Các kết quả của luận án đã chỉ ra rằng các lỗ rỗng có ảnh hưởng bất lợi và có lợi lên khả năng kháng vòng của vỏ trống lần lượt chịu tải cơ và nhiệt. Các kết quả đạt được của luận án là tương đối tổng quát và đã bao hàm một miền rộng của các điều kiện ràng buộc cạnh biên, hình dáng kết cấu vỏ kín và chiều dày vỏ.

2. Luận án đã đề xuất sử dụng nghiệm độ võng dạng hai số hạng cho phân tích ổn định phi tuyến của các vỏ trụ tròn FGM có lỗ rỗng và biến dạng trượt ngang. Các kết quả thu được của luận án gợi ý rằng đối với các vỏ dày và tương đối dày số hạng độ võng đối xứng trục phi tuyến trong giai đoạn sau vòng có thể có ảnh hưởng nhỏ và vì thế dạng độ võng hai số hạng là một xấp xỉ tốt để dự đoán các ứng xử vòng và sau vòng của vỏ trụ tròn có biến dạng trượt ngang.

3. Luận án đã phân tích các ảnh hưởng đồng thời của các lỗ rỗng, sự ràng buộc dịch chuyển trên cạnh biên và nền đàn hồi phi tuyến lên sự ổn định phi tuyến của các vỏ cầu thoải FGM chịu áp lực ngoài và tấm tròn FGM chịu nhiệt độ tăng đều. Các kết quả của luận án đã khám phá ra rằng vỏ cầu FGM tương đối thoải với cạnh biên được dịch chuyển một phần và tựa trên nền đàn hồi với độ cứng phù hợp có khả năng mang tải tốt và có thể giảm đáng kể tác hại do hiện tượng hóp.

4. Luận án đã đề xuất mô hình sandwich gồm lớp lõi FG-CNTRC và hai lớp mặt thuần nhất. Kết quả phân tích của luận án khám phá ra rằng với cùng tỷ lệ các vật liệu, mô hình sandwich với lớp lõi làm từ FG-CNTRC cùng với hai lớp mặt cứng và mỏng làm từ vật liệu thuần nhất có nhiều đặc điểm chịu tải rất ưu việt. Đây có thể là mô hình sandwich chuẩn vì đảm bảo độ cứng, độ nhẹ và sự ổn định rất tốt. Các kết quả mà luận án thu được là những gợi ý có giá trị cho việc chế tạo và ứng dụng các kết cấu sandwich từ FG-CNTRC.

MỘT SỐ HƯỚNG PHÁT TRIỂN TỪ LUẬN ÁN

Tác giả luận án cho rằng luận án có thể được phát triển theo một số hướng sau:

1. Mở rộng cách tiếp cận giải tích của luận án để phân tích ổn định tuyến tính của các vỏ trống FGM có lỗ rỗng kể đến ảnh hưởng của môi trường nhiệt ẩm, lớp áp điện hoặc môi trường lỏng chứa trong vỏ.
2. Sử dụng dạng nghiệm độ võng hai số hạng cho phân tích dao động tuyến tính và phi tuyến của các vỏ trụ và vỏ trống FGM có và không có lỗ rỗng.
3. Phân tích ổn định phi tuyến của các vỏ cầu và vỏ cầu nhẵn tương đối dày làm từ FGM có lỗ rỗng chịu áp lực ngoài có kể đến ảnh hưởng của nhiệt độ, độ ẩm và lớp áp điện.
4. Mở rộng nghiên cứu dao động phi tuyến của các mô hình tấm và panel sandwich làm từ FG-CNTRC đã xem xét trong luận án. Đồng thời, nghiên cứu ổn định của các vỏ trụ và vỏ trống làm từ sandwich FG-CNTRC có lỗ rỗng trong pha vật liệu nền và lớp thuần nhất.

**DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN
QUAN ĐẾN LUẬN ÁN**

1. Vu Thanh Long and Hoang Van Tung, *Mechanical buckling analysis of thick FGM toroidal shell segments with porosities using Reddy's higher order shear deformation theory*, Mechanics of Advanced Materials and Structures. In Press. Published online: 24-8-2021. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1969606> (ISI, Q1).
2. Vu Thanh Long and Hoang Van Tung, *Buckling behavior of thick porous FGM toroidal shell segments under external pressure and elevated temperature including tangential edge restraint*, Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME, Vol. 144 (5), 2022, p. 051310 (11 pages). <https://doi.org/10.1115/1.4053485> (ISI, Q2).
3. Vu Thanh Long and Hoang Van Tung, *Thermal nonlinear buckling of shear deformable functionally graded cylindrical shells with porosities*, AIAA Journal, Vol. 59 (6), 2021, pp. 2233-2241. <https://doi.org/10.2514/1.J060026> (ISI, Q1)
4. Vu Thanh Long and Hoang Van Tung, *Thermomechanical nonlinear buckling of pressurized shear deformable FGM cylindrical shells including porosities and elastically restrained edges*, Journal of Aerospace Engineering, Transactions of the ASCE, Vol. 34 (3), 2021, p. 04021011 [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)AS.1943-5525.0001252](https://doi.org/10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0001252) (ISI, Q2).
5. Vu Thanh Long and Hoang Van Tung, *Postbuckling responses of porous FGM spherical caps and circular plates including edge constraints and nonlinear three-parameter elastic foundations*, Mechanics Based Design of Structures and Machines. In Press. Published online: 2-8-2021. <https://doi.org/10.1080/15397734.2021.1956327> (ISI, Q1).
6. Hoang Van Tung and Vu Thanh Long, *Buckling and postbuckling of CNT-reinforced composite sandwich cylindrical panels subjected to axial compression in thermal environments*, Vietnam Journal of Mechanics, VAST, Vol. 41 (3), 2019, pp. 217-231. <https://doi.org/10.15625/0866-7136/13673>.
7. Hoang Van Tung, Dao Nhu Mai and Vu Thanh Long, *Nonlinear response of doubly curved sandwich panels with CNT-reinforced composite core and elastically*

restrained edges subjected to external pressure in thermal environments, Vietnam Journal of Mechanics, VAST, Vol. 44, No. 1, 2022, pp. 15-28. <https://doi.org/10.15625/0866-7136/16575>

8. Vu Thanh Long and Hoang Van Tung, *Thermal postbuckling behavior of CNT-reinforced composite sandwich plate models resting on elastic foundations with tangentially restrained edges and temperature-dependent properties*, Journal of Thermoplastic Composite Materials, Vol. 33 (10), 2020, pp. 1396-1428. <https://doi.org/10.1177/0892705719828789> (ISI, Q2).

9. Vu Thanh Long and Hoang Van Tung, *Thermomechanical postbuckling behavior of CNT-reinforced composite sandwich plate models resting on elastic foundations with elastically restrained unloaded edges*, Journal of Thermal Stresses, Vol. 42 (5), 2019, pp. 658-680. <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1571972> (ISI, Q1)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. Koizumi, *The concept of FGM*, Ceramic Trans., Functionally Gradient Materials, 34, 1993, 3-10.
- [2] S. Suresh and A. Mortensen, *Fundamentals of Functionally Graded Materials*, IOM Communications Ltd, 1998.
- [3] S. Iijima, *Helical microtubules of graphitic carbon*, Nature 354, 1991, 56-58.
- [4] S. Iijima and T. Ichihashi, *Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter*, Nature 363, 1993, 603-605.
- [5] E.T. Thostenson, Z. Ren, and T.W. Chou, *Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: A review*, Composites Science and Technology 61, 2001, 1899-1912.
- [6] E.T. Thostenson, C. Li, and T.W. Chou, *Nanocomposites in context*, Composites Science and Technology 65, 2005, 491-516.
- [7] J. N. Coleman, U. Khan, W. J. Blau, and Y. K. Gun'ko, *Small but strong: A review of the mechanical properties of carbon nanotube-polymer composites*, Carbon 44, 2006, 1624-1652.
- [8] Y. Han and J. Elliott, *Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/carbon nanotube composites*, Computational Materials Science 39, 2007, 315-323.
- [9] O. Gohardani, M.C. Elola, and C. Elizetxea, *Potential and prospective implementation of carbon nanotubes on next generation aircraft and space vehicles: A review of current and expected applications in aerospace sciences*, Progress in Aerospace Sciences 70, 2014, 42-68.
- [10] H.S. Shen, *Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments*, Composite Structures 91, 2009, 9-19.
- [11] R. Shahsiah and M.R. Eslami, *Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell*, Journal of Thermal Stresses 26 (3), 2003, 277-294.
- [12] L. Wu, Z. Jiang, and J. Liu, *Thermoelastic stability of functionally graded cylindrical shells*, Composite Structures 70, 2005, 60-68.
- [13] P. Khazaeinejad, M.M. Najafizadeh, J. Jenabi, and M.R. Isvandzibaei, *On the buckling of functionally graded cylindrical shells under combined external pressure and axial compression*, Journal of Pressure Vessel Technology 132 (6), 2010, 064501.

- [14] E. Bagherizadeh, Y. Kiani, and M.R. Eslami, *Mechanical buckling of functionally graded material cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation*, Composite Structures 93 (11), 2011, 3063-3071.
- [15] B. Mirzavand and M.R. Eslami, *A closed-form solution for thermal buckling of piezoelectric FGM hybrid cylindrical shells with temperature dependent properties*, Mechanics of Advanced Materials and Structures 18 (11), 2011, 185-193.
- [16] H. Huang and Q. Han, *Buckling of imperfect functionally graded cylindrical shells under axial compression*, European Journal of Mechanics - A/Solids 27, 2008, 1026-1036.
- [17] D.O. Brush and B.O. Almroth, *Buckling of bars, plates and shells*. McGraw-Hill, New York, 1975.
- [18] H. Huang, Q. Han, N. Feng, and X. Fan, *Buckling of functionally graded cylindrical shells under combined loads*, Mechanics of Advanced Materials and Structures 18, 2011, 337-346.
- [19] J. Sun, X. Xu, and C.W. Lim, *Buckling of functionally graded cylindrical shells under combined thermal and compressive loads*, Journal of Thermal Stresses 37, 2014, 340-362.
- [20] J. Sun, X. Xu, C.W. Lim, and W. Qiao, *Accurate buckling analysis for shear deformable FGM cylindrical shells under axial compression and thermal loads*, Composite Structures 123, 2015, 246-256.
- [21] F. Allahkarami, S. Satouri and M.M. Najafizadeh, *Mechanical buckling of two-dimensional functionally graded cylindrical shells surrounded by Winkler-Pasternak elastic foundation*, Mechanics of Advanced Materials and Structures 23 (8), 2016, 873-887.
- [22] Z. Wan and S. Li, *Thermal buckling analysis of functionally graded cylindrical shells*, Applied Mathematics and Mechanics (English Edition) 38, 2017, 1059-1070.
- [23] A.H. Sofiyev and N. Kuruoglu, *Buckling and vibration of shear deformable functionally graded orthotropic cylindrical shells under external pressures*, Thin-Walled Structures 78, 2014, 121-130.
- [24] A.H. Sofiyev and D. Hui, *On the vibration and stability of FGM cylindrical shells under external pressures with mixed boundary conditions by using FOSDT*, Thin-Walled Structures 134, 2019, 419-427.
- [25] R. Kandasamy, R. Dimitri, and F. Tornabene, *Numerical study on the free vibration and thermal buckling behavior of moderately thick functionally graded structures in thermal environments*, Composite Structures 157, 2016, 207-221.

- [26] S. Trabelsi, A. Frikha, S. Zghal, and F. Dammak, *A modified FSDT-based four nodes finite shell element for thermal buckling analysis of functionally graded plates and cylindrical shells*, *Engineering Structures* 178, 2019, 444-459.
- [27] H.S. Shen, *Postbuckling analysis of axially-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments*, *Composites Science and Technology* 62, 2002, 977-987.
- [28] H.S. Shen, *Postbuckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments*, *Engineering Structures* 25, 2003, 487-497.
- [29] H.S. Shen, *Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties*, *International Journal of Solids and Structures* 2004, 41, 1961–1974.
- [30] H.S. Shen and N. Noda, *Postbuckling of FGM cylindrical shells under combined axial and radial mechanical loads in thermal environments*, *International Journal of Solids and Structures* 42, 2005, 4641-4662.
- [31] H.S. Shen, *Thermal Postbuckling of Shear Deformable FGM Cylindrical Shells with Temperature-Dependent Properties*, *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 14, 2007, 439–452.
- [32] H.S. Shen, *Postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium*, *International Journal of Mechanical Sciences* 51, 2009, 372-383.
- [33] H.S. Shen, *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*, CRC Press, Boca Raton, 2009.
- [34] H. Huang and Q. Han, *Nonlinear elastic buckling and postbuckling of axially compressed functionally graded cylindrical shells*, *International Journal of Mechanical Sciences* 51, 2009, 500-507.
- [35] H. Huang and Q. Han, *Research on nonlinear postbuckling of functionally graded cylindrical shells under radial loads*, *Composite Structures* 92, 2010, 1352-1357.
- [36] H. Huang and Q. Han, *Nonlinear buckling and postbuckling of heated functionally graded cylindrical shells under combined axial compression and radial pressure*, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 44, 2009, 209-218.
- [37] S. Trabelsi, A. Frikha, S. Zghal, and F. Dammak, *Thermal post-buckling analysis of functionally graded material structures using a modified FSDT*, *International Journal of Mechanical Sciences* 144, 2018, 74-89.

- [38] D.V. Dung and L.K. Hoa, *Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure*, *Thin-Walled Structures* 63, 2013, 117-124.
- [39] D.V. Dung and V.H. Nam, *Nonlinear dynamic analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical thin shells under external pressure and surrounded by an elastic medium*, *European Journal of Mechanics, A/Solids* 46, 2014, 42-53.
- [40] D.V. Dung and H.T. Thiem, *Mechanical and thermal postbuckling of FGM thick circular cylindrical shells reinforced by FGM stiffener system using higher-order shear deformation theory*, *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)* 38, 2017, 73-98.
- [41] D.V. Dung and P.M. Vuong, *Analytical investigation on buckling and postbuckling of FGM toroidal shell segment surrounded by elastic foundation in thermal environment and under external pressure using TSDT*, *Acta Mechanica* 228 (10), 2017, 3511-3531.
- [42] D.H. Bich, D.V. Dung, V.H. Nam, and N.T. Phuong. *Nonlinear static and dynamic buckling analysis of imperfect eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under axial compression*, *International Journal of Mechanical Sciences* 74, 2013, 190-200.
- [43] D.H. Bich, D.G. Ninh, and T.I. Thinh, *Non-linear buckling analysis of FGM toroidal shell segments filled inside by an elastic medium under external pressure loads including temperature effects*, *Composites Part B: Engineering* 87, 2016, 75-91.
- [44] D.H. Bich, D.G. Ninh, B.H. Kien, and D. Hui, *Nonlinear dynamical analyses of eccentrically stiffened functionally graded toroidal shell segments surrounded by elastic foundation in thermal environment*, *Composites Part B: Engineering* 95, 2016, 355-373.
- [45] D.G. Ninh and D.H. Bich, *Nonlinear buckling of eccentrically stiffened functionally graded toroidal shell segments under torsional load surrounded by elastic foundation in thermal environment*, *Mechanic of Research and Communication* 72, 2016, 1-15.
- [46] T.I. Thinh, D.H. Bich, T.M. Tu, and N.V. Long, *Nonlinear analysis of buckling and postbuckling of functionally graded variable thickness toroidal shell segments based on improved Donnell shell theory*, *Composite Structures* 243, 2020, 112173.

- [47] V.H. Nam, N.T. Trung and L.K. Hoa, *Buckling and postbuckling of porous cylindrical shells with functionally graded composite coating under torsion in thermal environment*, Thin-Walled Structures 144, 2019, 106253.
- [48] D.X. Hung, T.M. Tu, N.V. Long and P.H. Anh, *Nonlinear buckling and postbuckling of FG porous variable thickness toroidal shell segments surrounded by elastic foundation subjected to compressive loads*, Aerospace Science and Technology 107, 2020, 106253.
- [49] H.V. Tung, *Postbuckling of functionally graded cylindrical shells with tangential edge restraints and temperature-dependent properties*, Acta Mechanica 225, 2014, 1795-1808.
- [50] P.T. Hieu and H.V. Tung, *Nonlinear buckling behavior of functionally graded material sandwich cylindrical shells with tangentially restrained edges subjected to external pressure and thermal loadings*, Journal of Sandwich Structures and Materials 23 (6), 2021, 2000-2027.
- [51] D.V. Dung, N.T. Nga, and L.K. Hoa, *Nonlinear stability of functionally graded material (FGM) sandwich cylindrical shells reinforced by FGM stiffeners in thermal environment*, Applied Mathematics and Mechanics (English Edition) 38, 2017, 647–670.
- [52] D.V. Dung, N.T. Nga, and P.M. Vuong, *Nonlinear stability analysis of stiffened functionally graded material sandwich cylindrical shells with general Sigmoid law and Power law in thermal environment using third-order shear deformation theory*, Journal of Sandwich Structures and Materials, 21 (3), 2019, 938-972.
- [53] V.H. Nam, N.T. Phuong, K.V. Minh, and P.T. Hieu, *Nonlinear thermo-mechanical buckling and post-buckling of multilayer FGM cylindrical shell reinforced by spiral stiffeners surrounded by elastic foundation subjected to torsional loads*, European Journal of Mechanics /A Solids 72, 2018, 393-406.
- [54] C.S. Xu, *Buckling and postbuckling of symmetrically laminated moderately thick spherical caps*, International Journal of Solids and Structures 28 (9), 1991, 1171-1184.
- [55] C.S. Xu, *Multi-mode nonlinear vibration and large deflection of symmetrically laminated imperfect spherical caps on elastic foundations*, International Journal of Mechanical Sciences 34 (6), 1992, 459-474.
- [56] Y. Nath and K. Sandeep, *Postbuckling of symmetrically laminated, moderately thick, axisymmetric shallow spherical shells*, International Journal of Mechanical Sciences 35 (1), 1993, 965-975.

- [57] G.P. Dube, S. Joshi, and P.C. Dumir, *Nonlinear analysis of thick shallow spherical and conical orthotropic caps using Galerkin's method*, Applied Mathematical Modelling 25, 2001, 755-773.
- [58] M. Uemura, *Axisymmetrical buckling of an initially deformed shallow spherical shell under external pressure*, International Journal of Non-Linear Mechanics 6 (2), 1971, 177-192.
- [59] Q.S. Li, J. Liu, and J. Tang, *Buckling of shallow spherical shells including the effects of transverse shear deformation*, International Journal of Mechanical Sciences 45 (9), 2003, 1519-1529.
- [60] O. Civalek, *Geometrically nonlinear dynamic and static analysis of shallow spherical shell resting on two-parameters elastic foundations*, International Journal of Pressure Vessels and Piping 113, 2014, 1-9.
- [61] D.H. Bich and H.V. Tung, *Non-linear axisymmetric response of functionally graded shallow spherical shells under uniform external pressure including temperature effects*, International Journal of Non-Linear Mechanics 46, 2011, 1195-204.
- [62] D.H. Bich, D.V. Dung and L.K. Hoa, *Nonlinear static and dynamic buckling analysis of functionally graded shallow spherical shells including temperature effects*, Composite Structures 94, 2012, 2952-2960.
- [63] M.S. Boroujerdy and M.R. Eslami, *Axisymmetric snap-through behavior of piezo-FGM shallow clamped spherical shells under thermos-electro-mechanical loading*, International Journal of Pressure Vessels and Piping 120-121, 2014, 19-26.
- [64] H.V. Tung, *Nonlinear thermomechanical stability of shear deformable FGM shallow spherical shells resting on elastic foundations with temperature dependent properties*, Composite Structures 114, 2014, 107-116.
- [65] H.V. Tung, *Nonlinear axisymmetric response of FGM shallow spherical shells with tangential edge constraints and resting on elastic foundations*, Composite Structures 149, 2016, 231 – 238.
- [66] M.M. Najafizadeh and H. R. Heydari, *Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory*, European Journal of Mechanics - A/Solids 23, 2004, 1085-1100.
- [67] S.R. Li, J.H. Zhang, and Y.G. Zhao, *Nonlinear thermomechanical post-buckling of circular FGM plate with geometric imperfection*, Thin-Walled Structures 45 (5), 2007, 528-536.

- [68] T.V. Loc, T.H. Chien, and H. Nguyen-Xuan, *An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates*, *Finite Elements in Analysis and Design* 73, 2013, 65-76.
- [69] N. Wattanasakulpong and V. Ungbhakorn, *Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities*, *Aerospace Science and Technology* 32 (1), 2014, 111-120.
- [70] S. Zghal, D. Ataoui, and F. Dammak, *Static bending analysis of beams made of functionally graded porous materials*, *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 50 (3), 2022, 1012-1029.
- [71] N.V. Nam, N.X. Hoang, S. Lee, and H. Nguyen-Xuan, *Geometrically nonlinear polygonal finite element analysis of functionally graded porous plates*, *Advances in Engineering Software* 126, 2018, 110-126.
- [72] A.M. Zenkour and A.F. Radwan, *Bending response of FG plates resting on elastic foundations in hygrothermal environment with porosities*, *Composite Structures* 213, 2019, 133-143.
- [73] P.A. Demirhan and V. Taskin, *Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach*, *Composites Part B: Engineering* 160, 2019, 661-676.
- [74] P.V. Phuc, T.H. Chien, H. Nguyen-Xuan, and M. Abdel-Wahab, *An isogeometric approach of static and free vibration analyses for porous FG nanoplates*, *European Journal of Mechanics - A/Solids* 78, 2019, 103851.
- [75] P.V. Phuc, T.H. Chien, A.J.M. Ferreira, and T. Rabczuk, *Isogeometric nonlinear transient analysis of porous FGM plates subjected to hygro-thermo-mechanical loads*, *Thin-Walled Structures* 148, 2020, 106497.
- [76] M.C. Trinh and S.E. Kim, *A three variable refined shear deformation theory for porous functionally graded doubly curved shell analysis*, *Aerospace Science and Technology* 94, 2019, 105356.
- [77] P.H. Cong, T.M. Chien, N.D. Khoa, and N.D. Duc, *Nonlinear thermomechanical buckling and post-buckling response of porous FGM plates using Reddy's HSDT*, *Aerospace Science and Technology*, 77, 2018, 419-428.
- [78] A. Gupta and M. Talha, *Influence of initial geometric imperfections and porosity on the stability of functionally graded material plates*, *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 46 (6), 2018, 693-711.

- [79] L.T. Cuong, T.V. Loc, B.Q. Tinh, N.X. Hoang, and M.A. Wahab, *Isogeometric analysis for size-dependent nonlinear thermal stability of porous FG microplates*, *Composite Structures* 221, 2019, 110838.
- [80] Z.X. Lei, K.M. Liew, and J.L. Yu, *Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method*, *Composite Structures* 98, 2013, 160–168.
- [81] L.W. Zhang, Z.X. Lei, and K.M. Liew, *Buckling analysis of FG-CNT reinforced composite thick skew plates using an element-free approach*, *Composites Part B: Engineering* 75, 2015, 36–46.
- [82] L.W. Zhang, Z.X. Lei, and K.M. Liew, *An element-free IMLS-Ritz framework for buckling analysis of FG–CNT reinforced composite thick plates resting on Winkler foundations*, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 58, 2015, 7–17.
- [83] Z.X. Lei, L.W. Zhang, K.M. Liew, *Buckling of FG-CNT reinforced composite thick skew plates resting on Pasternak foundations based on an element-free approach*, *Applied Mathematics and Computation* 266, 2015, 773–791.
- [84] Y. Kiani, *Shear buckling of FG-CNT reinforced composite plates using Chebyshev-Ritz method*, *Composites Part B: Engineering* 105, 2016, 176–187.
- [85] Y. Kiani, *Buckling of FG-CNT reinforced composite plates subjected to parabolic loading*, *Acta Mechanica* 228 (4), 2017, 1303-1319.
- [86] Y. Kiani and M. Mirzaei, *Rectangular and skew shear buckling of FG-CNT reinforced composite skew plates using Ritz method*, *Aerospace Science and Technology* 77, 2018, 388-398.
- [87] O. Civalek and M.H. Jalaei, *Buckling of carbon nanotube (CNT)-reinforced composite skew plates by the discrete singular convolution method*, *Acta Mechanica* 231, 2020, 2565-2587.
- [88] O. Civalek, *Buckling analysis of composite panels and shells with different material properties by discrete singular convolution (DSC) method*, *Composite Structures* 161, 2017, 93-110.
- [89] S. Zghal, A. Frikha, and F. Dammak, *Mechanical buckling analysis of functionally graded power-based and carbon nanotubes-reinforced composite plates and curved panels*, *Composites Part B: Engineering* 150, 2018, 165–183.
- [90] E. García-Macías, L. Rodríguez-Tembleque, R. Castro-Triguero, and A. Sáez, *Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced curved panels under axial compression and shear*, *Composites Part B: Engineering* 108, 2017, 243–256.

- [91] L.W. Zhang and K.M. Liew, *Postbuckling analysis of axially compressed CNT reinforced functionally graded composite plates resting on Pasternak foundations using an element-free approach*, Composite Structures 138, 2016, 40–51.
- [92] K.M. Liew, Z.X. Lei, J.L. Yu, and L.W. Zhang, *Postbuckling of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels under axial compression using a meshless approach*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng 268, 2014, 1–17.
- [93] L.T.N. Trang and H.V. Tung, *Tangential edge constraint sensitivity of nonlinear stability of CNT-reinforced composite plates under compressive and thermomechanical loadings*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 144 (7), 2018, 04018056.
- [94] L.T.N. Trang and H.V. Tung, *Thermomechanical postbuckling of higher order shear deformable CNT-reinforced composite plates with elastically restrained unloaded edges*, Polymers and Polymer Composites. In Press. Published online 22-6-2021. <https://doi.org/10.1177/09673911211025961>.
- [95] L.T.N. Trang and H.V. Tung, *Thermomechanical nonlinear analysis of axially compressed carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations with tangentially restrained edges*, Journal of Thermal Stresses 41 (4), 2018, 418-438.
- [96] H.V. Tung and L.T.N. Trang, *Imperfection and tangential edge constraint sensitivities of thermomechanical nonlinear response of pressure-loaded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels*, Acta Mechanica 229 (5), 2018, 1949-1969.
- [97] L.T.N. Trang and H.V. Tung, *Nonlinear stability of CNT-reinforced composite cylindrical panels with elastically restrained straight edges under combined thermomechanical loading conditions*, Journal of Thermoplastic Composite Materials 33 (2), 2020, 153-179.
- [98] L.T.N. Trang and H.V. Tung, *Thermomechanical nonlinear stability of pressure-loaded functionally graded carbon nanotube-reinforced composite doubly curved panels with tangentially restrained edges*, Proc IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 233 (16), 2019, 5848-5859.
- [99] H.S. Shen and Y. Xiang, *Postbuckling of axially compressed nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments*, Composites Part B Engineering 67, 2014, 50–61.
- [100] H.S. Shen, *Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations subjected to lateral pressure in thermal environments*, Engineering Structures 122, 2016, 174-183.

- [101] H.S. Shen and Y. Xiang, *Nonlinear response of nanotube-reinforced composite cylindrical panels subjected to combined loadings and resting on elastic foundations*, Composite Structures 131, 2015, 939-950.
- [102] E. García-Macías, L. Rodríguez-Tembleque, R. Castro-Triguero, A. Sáez, *Eshelby-Mori-Tanaka approach for post-buckling analysis of axially compressed functionally graded CNT/polymer composite cylindrical panels*, Composites Part B: Engineering 128, 2017, 208–224.
- [103] S. Zghal, S. Trabelsi and F. Dammark, *Post-buckling behavior of functionally graded and carbon nanotubes based structures with different mechanical loadings*, Mechanics Based Design of Structures and Machines. In Press, Published online: 16-6-2021. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1790387>
- [104] A. Hajlaoui, E. Chebbi, F. Dammak, *Buckling analysis of carbon nanotube reinforced FG shells using an efficient solid-shell element based on a modified FSDT*, Thin-Walled Structures 144, 2019, 106254.
- [105] J.E. Jam and Y. Kiani, *Buckling of pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced conical shells*, Composite Structures 125, 2015, 586-595.
- [106] M. Hosseini and M. Talebitooti, *Buckling analysis of moderately thick FG carbon nanotube reinforced composite conical shells under axial compression by DQM*, Mechanics of Advanced Materials and Structures 25 (8), 2018, 647-656.
- [107] R. Ansari and J. Torabi, *Numerical study on the buckling and vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical shells under axial loading*, Composites, Part B: Engineering 95, 2016, 196-208.
- [108] M. Mehri, H. Asadi and Q. Wang, *Buckling and vibration analysis of a pressurized CNT reinforced functionally graded truncated conical shell under an axial compression using HDQ method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 303, 2016, 75-100.
- [109] M. Mehri, H. Asadi and Q. Wang, *On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow*, Composite Structures 153, 2016, 938-951.
- [110] N.D. Duc, P.H. Cong, N.D. Tuan, T. Phuong, and N.V. Thanh, *Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes FG CNT-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations*, Thin-Walled Structures 115, 2017, 300–310.
- [111] A.H. Sofiyev, B. Esencan Turkaslan, R.P. Bayramov, and M.U. Salamci, *Analytical solution of stability of FG-CNTRC conical shells under external pressures*, Thin-Walled Structures 144, 2019, 106338.

- [112] P.T. Hieu and H.V. Tung, *Buckling of shear deformable FG-CNTRC cylindrical shells and toroidal shell segments under mechanical loads in thermal environments*, Z Angew Math Mech 100, 2020, p. e201900243.
- [113] P.T. Hieu and H.V. Tung, *Thermal and thermomechanical buckling of shear deformable FG-CNTRC cylindrical shells and toroidal shell segments with tangentially restrained edges*, Archives of Applied Mechanics 90 (7), 2020, 1529-1546.
- [114] H.S. Shen, *Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part I: Axially-loaded shells*, Composite Structures 93, 2011, 2096-2108.
- [115] H.S. Shen, *Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part II: Pressure-loaded shells*, Composite Structures 93, 2011, 2496-2503.
- [116] H.S. Shen and Y. Xiang, *Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells under combined axial and radial mechanical loads in thermal environment*, Composites Part B: Engineering 52, 2013, 311-322.
- [117] H.S. Shen, C. Li, and X.H. Huang, *Assessment of negative Poisson's ratio effects on the postbuckling of pressure-loaded FG-CNTRC laminated cylindrical shells*, Mechanics Based Design of Structures and Machines, In Press. Published online: 15-2-2021. <https://doi.org/10.1080/15397734.2021.1880934>
- [118] M.R. Bidgoli, M.S. Karimi, and A.G. Arani, *Nonlinear vibration and instability analysis of functionally graded CNT-reinforced composite cylindrical shells covering viscous fluid resting on orthotropic Pasternak medium*, Mechanics of Advanced Materials and Structures 23 (7), 2016, 819-831.
- [119] P.T. Hieu and H.V. Tung, *Thermomechanical nonlinear buckling of pressure-loaded carbon nanotube reinforced composite toroidal shell segment surrounded by an elastic medium with tangentially restrained edges*, Proc IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 233 (9), 2019, 3193-207.
- [120] P.T. Hieu and H.V. Tung, *Thermomechanical postbuckling of pressure-loaded CNT-reinforced composite cylindrical shells under tangential edge constraints and various temperature conditions*, Polymer Composites 41 (1), 2020, 244-57.
- [121] P.T. Hieu and H.V. Tung, *Postbuckling behavior of carbon nanotube-reinforced composite toroidal shell segments subjected to thermomechanical loadings*, AIAA Journal 58 (7), 2020, 3187-3198.

- [122] M. Mirzaei and Y. Kiani, *Thermal buckling of temperature dependent FG-CNT reinforced composite plates*, *Meccanica* 51 (9), 2016, 2185-2201.
- [123] Y. Kiani, *Thermal buckling of temperature-dependent FG-CNT-reinforced composite skew plates*, *Journal of Thermal Stresses* 40 (11), 2017, 1442-1460.
- [124] M. Mirzaei, *Thermal buckling of temperature-dependent composite super elliptical plates reinforced with carbon nanotubes*, *Journal of Thermal Stresses* 41 (7), 2018, 920-935.
- [125] M. Mirzaei and Y. Kiani, *Thermal buckling of temperature dependent FG-CNT reinforced composite conical shells*, *Aerospace Science and Technology* 47, 2015, 42-53.
- [126] R. Ansari, J. Torabi, and R. Hassani, *Thermal buckling analysis of temperature-dependent FG-CNTRC quadrilateral plates*, *Computers & Mathematics with Applications* 77, 2019, 1294–1311.
- [127] J. Torabi, R. Ansari, and R. Hassani, *Numerical study on the thermal buckling analysis of CNT-reinforced composite plates with different shapes based on the higher-order shear deformation theory*, *European Journal of Mechanics - A/Solids* 73, 2019, 144–160.
- [128] H.S. Shen and C.L. Zhang, *Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates*, *Materials and Design* 31, 2010, 3403-3411.
- [129] Y. Kiani, *Thermal post-buckling of FG-CNT reinforced composite plates*, *Composite Structures* 159, 2017, 299-306.
- [130] H.V. Tung, *Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates resting on elastic foundations with tangential-edge restraints*, *Journal of Thermal Stresses* 40 (5), 2017, 641-663.
- [131] H.V. Tung and L.T.N. Trang, *Thermal postbuckling of shear deformable CNT-reinforced composite plates with tangentially restrained edges and temperature dependent properties*, *Journal of Thermoplastic Composite Materials* 33 (1), 2020, 97-124.
- [132] L.T.N. Trang and H.V. Tung, *Thermally induced postbuckling of thin CNT-reinforced composite plates under nonuniform in-plane temperature distributions*, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*. In Press. Published online: 1-10-2020. <https://doi.org/10.1177/0892705720962172>.
- [133] L.T.N. Trang and H.V. Tung, *Thermoelastic of thin CNT-reinforced composite cylindrical panels with elastically restrained edges under nonuniform in-plane temperature distribution*, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*. In Press. Published online: 6-8-2021. <https://doi.org/10.1177/08927057211038616>.

- [134] H.S. Shen and Y. Xiang, *Thermal postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations*, Composite Structures 123, 2015, 383-392.
- [135] L.T.N. Trang and H.V. Tung, *Thermally induced postbuckling of higher order shear deformable CNT-reinforced composite flat and cylindrical panels resting on elastic foundations with elastically restrained edges*, Mechanics Based Design of Structures and Machines. In Press. Online: 2-7-2020. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1785312>.
- [136] H.S. Shen, *Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells*, Composites Part B: Engineering 43, 2012, 1030-1038.
- [137] P.T. Hieu and H.V. Tung, *Thermal buckling and postbuckling of CNT-reinforced composite cylindrical shell surrounded by an elastic medium with tangentially restrained edges*, Journal of Thermoplastic Composite Materials 34 (7), 2021, 861-883.
- [138] Z.X. Wang and H.S. Shen, *Nonlinear vibration and bending of sandwich plates with nanotube-reinforced composite face sheets*, Composites Part B: Engineering 43, 2012, 411-421.
- [139] H.S. Shen and Z.H. Zhu, *Postbuckling of sandwich plates with nanotube-reinforced composite face sheets resting on elastic foundations*, European Journal of Mechanics – A/Solids 35, 2012, 10-21.
- [140] H.S. Shen, H. Wang, and D.Q. Yang, *Vibration of thermally postbuckled sandwich plates with nanotube-reinforced composite face sheets resting on elastic foundations*, International Journal of Mechanical Sciences 124-125, 2017, 253-262.
- [141] S. Natarajan, M. Haboussi, and M. Ganapathi, *Application of higher-order structural theory to bending and free vibration analysis of sandwich plates with CNT reinforced composite face sheets*, Composite Structures 113, 2014, 197-207.
- [142] S.K. Jalali and M. Heshmati, *Buckling analysis of circular sandwich plates with tapered cores and functionally graded carbon nanotubes-reinforced composite face sheets*, Thin-Walled Structures 100, 2016, 14-24.
- [143] M. Shokravi, *Buckling of sandwich plates with FG-CNT reinforced layers resting on orthotropic elastic medium using Reddy plate theory*, Steel and Composite Structures 23 (6), 2017, 623-631.
- [144] M. Wang, Z.M. Li and P. Qiao, *Vibration analysis of sandwich plates with carbon nanotube-reinforced composite face sheets*, Composite Structures 200, 2018, 799-809.

- [145] K. Mehar, S.K. Panda and T.R. Mahapatra, *Thermoelastic nonlinear frequency analysis of CNT reinforced functionally graded sandwich structure*, European Journal of Mechanics – A/Solids 65, 2017, 384-396.
- [146] K. Mehar and S.K. Panda, *Thermal free vibration behavior of FG-CNT reinforced sandwich curved panel using finite element method*, Polymer Composites 39 (8), 2018, 2751-2764.
- [147] K. Mehar, S. K. Panda, Y. Devarajan, and G. Choubey, *Numerical buckling analysis of graded CNT-reinforced composite sandwich shell structure under thermal loading*, Composite Structures 216, 2019, 406–414.
- [148] Y. Kiani, *Thermal post-buckling of temperature dependent sandwich plates with FG-CNTRC face sheets*, Journal of Thermal Stresses 41 (7), 2018, 866-882.
- [149] A.H. Sofiyev, R.P. Bayramov, and S.H. Heydarov, *The stability of composite conical shells covered by carbon nanotube-reinforced coatings under external pressures*, Acta Mechanica 231 (11), 2020, 4547-4562.
- [150] N.D. Duc, T.Q. Quan, and N.D. Khoa, *New approach to investigate nonlinear dynamic response and vibration of imperfect functionally graded carbon nanotube reinforced composite double curved shallow shells subjected to blast load and temperature*, Aerospace Science and Technology 71, 2017, 360-372.
- [151] N.D. Duc, P.D. Nguyen, N.H. Cuong, N.V. Sy, and N.D. Khoa, *An analytical approach on nonlinear mechanical and thermal post-buckling of nanocomposite double-curved shallow shells reinforced by carbon nanotubes*, Proc IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 233, 2019, 3888–3903.
- [152] N.V. Thanh, N.D. Khoa, N.D. Tuan, T. Phuong, and N.D. Duc, *Nonlinear dynamic response and vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite FG-CNTRC, shear deformable plates with temperature-dependent material properties and surrounded on elastic foundations*, Journal of Thermal Stresses 40, 2017, 1254–1274.
- [153] N.V. Thanh, V.D. Quang, N.D. Khoa, S.E. Kim and N.D. Duc, *Nonlinear dynamic response and vibration of FG CNTRC shear deformable circular cylindrical shell with temperature-dependent material properties and surrounded on elastic foundations*, Journal of Sandwich Structures and Materials 21 (7), 2019, 2456-2483.
- [154] P.V. Phuc, M.W. Abdel, K.M. Liew, S.P.A. Bordas, and N.X. Hung, *Isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using higher-order shear deformation theory*, Composite Structures 123, 2015, 137–149.
- [155] T.N. Nguyen, C.H. Thai, N.X. Hung, and J. Lee, *NURBS-based analyses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite shells*, Composite Structures 203, 2018, 349–360.

- [156] T.N. Nguyen, C.H. Thai, A.-T. Luu, N.X. Hung, and J. Lee, *NURBS-based postbuckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite shells*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 347, 2019, 983–1003.
- [157] T.N. Nguyen, S. Lee, N.P.C Cuong, N.X. Hung, and J. Lee, *Geometrically nonlinear postbuckling behavior of imperfect FG-CNTRC shells under axial compression using isogeometric analysis*, *European Journal of Mechanics - A/Solids* 84, 2020, 104066.
- [158] T.H. Quoc, V.V. Tham, T.M. Tu, and N.T. Phuong, *A new four-variable refined plate theory for static analysis of smart laminated functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates*, *Mechanics of Materials* 142, 2020, 103294.
- [159] T.H. Quoc, V.V. Tham, and T.M. Tu, *Active vibration control of a piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced spherical shell panel*, *Acta Mechanica* 232 (3), 2021, 1005-1023.
- [160] Nguyễn Thị Phương, *Nghiên cứu ổn định tĩnh của tấm và vỏ composite cơ tính biến thiên có gân gia cường lệch tâm*. Luận án tiến sĩ kỹ thuật. Học viện Kỹ thuật Quân sự. Hà Nội, 2014.
- [161] Vũ Hoài Nam, *Phân tích phi tuyến động lực của vỏ làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên*. Luận án tiến sĩ Cơ học. Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội. Hà Nội, 2015.
- [162] Lê Khả Hòa, *Phân tích ổn định tĩnh của vỏ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên*. Luận án tiến sĩ Cơ học. Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội. Hà Nội, 2015.
- [163] Lê Thị Như Trang, *Ổn định nhiệt đàn hồi của tấm và vỏ thoải composite gia cường carbon nanotube*. Luận án tiến sĩ Cơ học. Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, Hà Nội, 2021.
- [164] Phạm Thanh Hiếu, *Phân tích ổn định tĩnh của vỏ trụ và vỏ trống làm từ FGM và FG-CNTRC có kể đến tính đàn hồi của liên kết biên*. Luận án tiến sĩ Cơ học. Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, Hà Nội, 2022.
- [165] L. Librescu, W. Lin, M.P. Nemeth, and J.H. Starnes Jr, *Thermomechanical postbuckling of geometrically imperfect flat and curved panels taking into account tangential edge constraints*, *Journal of Thermal Stresses* 18, 1995, 465–482.
- [166] L. Librescu and W. Lin, *Vibration of thermomechanically loaded flat and curved panels taking into account geometric imperfections and tangential edge restraints*, *International Journal of Solids and Structures* 34, 1997, 2161–2181.

- [167] L.W. Zhang, W.C. Cui, and K.M. Liew, *Vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite thick plates with elastically restrained edges*, International Journal of Mechanical Sciences 103, 2015, 9–21.
- [168] L.W. Zhang, K.M. Liew, and Z. Jiang, *An element-free analysis of CNT-reinforced composite plates with column supports and elastically restrained edges under large deformation*, Composites Part B: Engineering 95, 2016, 18-28.
- [169] L.W. Zhang, K.M. Liew, and J.N. Reddy, *Postbuckling of carbon nanotube reinforced functionally graded plates with edges elastically restrained against translation and rotation under axial compression*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 298, 2016, 1-28.
- [170] W. Lin and L. Librescu, *Thermomechanical postbuckling of geometrically imperfect shear-deformable flat and curved panels on a nonlinear elastic foundation*, International Journal of Engineering Sciences 36 (2), 1998, 189-206.
- [171] M. Stein and J.A. McElman, *Buckling of segments of toroidal shells*, AIAA Journal 3, 1965, 1704-1709.
- [172] J.N. Reddy and C.D. Chin, *Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates*, Journal of thermal stresses 121, 1998, 593–629.
- [173] J.N. Reddy and C.F. Liu, *A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells*, International Journal of Engineering Science 23 (3), 1985, 319-330.
- [174] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis*, CRC Press LLC, 2004.
- [175] H.V. Tung and N.D. Duc, *Nonlinear response of shear deformable FGM curved panels resting on elastic foundations and subjected to mechanical and thermal loading conditions*, Applied Mathematical Modelling 38, 2014, 2848-2866.
- [176] Y.S. Touloukian, *Thermophysical properties of high temperature solid materials*, New York: MacMillan, 1967.
- [177] S. Ghabezloo, *Micromechanical analysis of the effect of porosity on the thermal expansion coefficient of heterogeneous porous materials*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 55, 2012, 97-101.

PHỤ LỤC

Phụ lục A

+ Các hệ số a_{11} và a_{21} trong phương trình (2.20) có biểu thức cụ thể như sau

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left(\frac{\bar{D}_4}{\bar{D}_6} - \frac{4}{3} \frac{\bar{D}_5}{\bar{D}_6} \right) \left(\frac{m^2 \pi^2}{R_h^2 L_R^2} + \frac{n^2}{R_h^2} \right), \\
 a_{21} &= -\frac{16}{9\bar{D}_6} (\bar{D}_2 \bar{D}_5 - \bar{D}_3 \bar{D}_4) a_{31}^3 + \left(\frac{4}{3} \bar{D}_2 + \bar{D}_4 \right) a_{31}^2 + \\
 &+ \left[\frac{1}{\bar{D}_6} \left(\bar{D}_4 - \frac{4}{3} \bar{D}_5 \right) + \frac{R_h^2 L_R^2}{m^2 \pi^2 + n^2 L_R^2} \right] a_{41} + \frac{1 + a_{11}}{R_h^4} E_m^0 \left[K_1 + K_2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{L_R^2} + n^2 \right) \right] \quad (A1)
 \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
 a_{31} &= \frac{m^2 \pi^2}{R_h^2 L_R^2} + \frac{n^2}{R_h^2}, \quad a_{41} = \frac{\bar{E}_1 R_h^2 L_R^2}{m^2 \pi^2 + n^2 L_R^2} \left(\frac{n^2}{R_h^3} R_a + \frac{m^2 \pi^2}{R_h^3 L_R^2} \right)^2, \\
 \bar{D}_1 &= \frac{D_1}{h^3}, \quad \bar{D}_2 = \frac{D_2}{h^5}, \quad \bar{D}_3 = \frac{D_3}{h^7}, \quad \bar{D}_4 = \bar{D}_1 - \frac{4}{3} \bar{D}_2, \quad \bar{D}_5 = \bar{D}_2 - \frac{4}{3} \bar{D}_3, \quad (A2) \\
 \bar{D}_6 &= \frac{1}{2(1+\nu)} (\bar{E}_1 - 8\bar{E}_3 + 16\bar{E}_5), \quad \bar{E}_1 = \frac{E_1}{h}, \quad \bar{E}_3 = \frac{E_3}{h^3}, \quad \bar{E}_5 = \frac{E_5}{h^5}.
 \end{aligned}$$

+ Các hệ số g_{ij} ($i, j = 1, 2$) trong các phương trình (2.28) có biểu thức như sau

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \frac{\bar{E}_1}{R_h^2 (1 - \lambda \nu^2)} (1 + 2\lambda \nu R_a + \lambda R_a^2) + K_1 \frac{E_m^0}{R_h^4}, \quad g_{21} = G \frac{1 + \lambda \nu + \lambda (1 + \nu) R_a}{R_h (1 - \lambda \nu^2)}, \\
 g_{12} &= \frac{a_{21} R_h^3 L_R^2 (1 - \lambda \nu^2)}{\bar{E}_1 (1 + a_{11}) \left[\lambda m^2 \pi^2 (\nu + R_a) + n^2 L_R^2 (1 + \lambda \nu R_a) \right]}, \quad (A3) \\
 g_{22} &= \frac{\lambda m^2 \pi^2 (1 + \nu) + n^2 L_R^2 (1 + \lambda \nu)}{\bar{E}_1 \left[\lambda m^2 \pi^2 (\nu + R_a) + n^2 L_R^2 (1 + \lambda \nu R_a) \right]} R_h G.
 \end{aligned}$$

+ Biểu thức cụ thể của a_{12}, a_{22}, a_{32} trong phương trình (2.32) được cho như sau

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= \frac{1}{\bar{E}_1 n^2 R_h^3 L_R^2} \left[K_1 E_m^0 (m^2 \pi^2 + \nu n^2 L_R^2) + \bar{E}_1 R_h^2 (m^2 \pi^2 - n^2 L_R^2 R_a) \right] \\
 a_{22} &= \frac{a_{21} (\bar{E}_1 R_h^2 + K_1 E_m^0)}{\bar{E}_1 n^2 R_h (1 + a_{11})}, \quad a_{32} = \frac{K_1 E_m^0}{\bar{E}_1 R_h^3} G. \quad (A4)
 \end{aligned}$$

Phụ lục B

+ Các biểu thức cụ thể của b_{ij} ($i=1\div 3, j=1,2$) trong phương trình (3.14) được cho như sau

$$b_{11} = D \left(\beta_m^2 + \frac{1-\nu}{2} \delta_n^2 \right) + \frac{K_S E_1}{2(1+\nu)}, \quad b_{21} = b_{12} = D \frac{1+\nu}{2} \beta_m \delta_n,$$

$$b_{31} = -\frac{K_S E_1 \beta_m}{2(1+\nu)}, \quad b_{22} = D \left(\delta_n^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_m^2 \right) + \frac{K_S E_1}{2(1+\nu)}, \quad b_{32} = -\frac{K_S E_1 \delta_n}{2(1+\nu)}. \quad (B1)$$

+ Các hệ số g_{ij} ($i=1\div 3, j=2,3$) trong phương trình (3.21) được cho như sau

$$g_{12} = \frac{\bar{E}_1}{R_h(1-\lambda\nu^2)}, \quad g_{22} = \frac{\bar{E}_1(n^2 L_R^2 + \lambda\nu m^2 \pi^2)}{8R_h^2 L_R^2(1-\lambda\nu^2)}, \quad g_{32} = \frac{1+\lambda\nu}{1-\lambda\nu^2} G,$$

$$g_{13} = \lambda \frac{\nu \bar{E}_1}{R_h(1-\lambda\nu^2)}, \quad g_{23} = \lambda \frac{\bar{E}_1(\nu n^2 L_R^2 + m^2 \pi^2)}{8R_h^2 L_R^2(1-\lambda\nu^2)}, \quad g_{33} = \lambda \frac{1+\nu}{1-\lambda\nu^2} G. \quad (B2)$$

+ Các biểu thức cụ thể của g_{k4} ($k=1\div 3$) trong liên hệ (3.24) được cho như sau

$$g_{14} = g_{13} \frac{m^2 \pi^2}{g_{12} R_h L_R^2} + \frac{n^2}{R_h}, \quad g_{24} = g_{21} + \left(g_{23} - g_{13} \frac{g_{22}}{g_{12}} \right) \left(\frac{m\pi}{R_h L_R} \right)^2,$$

$$g_{34} = \left(g_{33} - g_{13} \frac{g_{32}}{g_{12}} \right) \left(\frac{m\pi}{R_h L_R} \right)^2. \quad (B3)$$

Phụ lục C

+) Các hệ số a_{j1} ($j=1\div 5$) trong phương trình (5.17) có dạng cụ thể như sau

$$a_{11} = e_{13} - \frac{e_{12}^2}{e_{11}}, \quad a_{21} = \nu_{12} e_{23} - \nu_{12} \frac{e_{22}^2}{e_{21}} + 2e_{33} - 2 \frac{e_{32}^2}{e_{31}},$$

$$a_{31} = \nu_{21} e_{13} - \nu_{21} \frac{e_{12}^2}{e_{11}} + 2e_{33} - 2 \frac{e_{32}^2}{e_{31}}, \quad a_{41} = e_{23} - \frac{e_{22}^2}{e_{21}}, \quad a_{51} = \frac{e_{12}}{e_{11}} - 2 \frac{e_{32}}{e_{31}} + \frac{e_{22}}{e_{21}}. \quad (C1)$$

+) Các hệ số a_{k2} ($k=1\div 7$) trong phương trình (5.19) được cho như sau

$$a_{12} = \frac{e_{11}}{a_{82}}, \quad a_{22} = \frac{1}{e_{31}} - \frac{1}{a_{82}} (\nu_{21} e_{11} + \nu_{12} e_{21}), \quad a_{32} = \frac{e_{21}}{a_{82}}, \quad a_{42} = \frac{\nu_{12}}{a_{82}} (e_{12} e_{21} - e_{11} e_{22})$$

$$a_{52} = \frac{e_{32}}{e_{31}} + \frac{1}{a_{82}} (v_{12}v_{21}e_{12}e_{21} - e_{11}e_{22}), \quad a_{62} = \frac{v_{21}}{a_{82}} (e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}), \quad (C2)$$

$$a_{72} = \frac{e_{32}}{e_{31}} + \frac{1}{a_{82}} (v_{12}v_{21}e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}), \quad a_{82} = (1 - v_{12}v_{21})e_{11}e_{21}.$$

+) Chi tiết của các hệ số A_3^*, B_1^*, B_2^* trong phương trình (5.22) được cho như sau

$$A_3^* = \frac{b_{24}}{b_{14}} \left(\frac{\delta_n^2}{R_x} + \frac{\beta_m^2}{R_y} \right) - \frac{b_{34}}{b_{14}},$$

$$B_1^* = \frac{b_{13}b_{32} - b_{12}b_{33}}{b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}} \left[\frac{b_{24}}{b_{14}} \left(\frac{\delta_n^2}{R_x} + \frac{\beta_m^2}{R_y} \right) - \frac{b_{34}}{b_{14}} \right] + \frac{b_{32}e_{51}\delta_n - b_{33}e_{41}\beta_m}{b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}} K_S, \quad (C3)$$

$$B_2^* = \frac{b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}}{b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}} \left[\frac{b_{24}}{b_{14}} \left(\frac{\delta_n^2}{R_x} + \frac{\beta_m^2}{R_y} \right) - \frac{b_{34}}{b_{14}} \right] + \frac{b_{23}e_{41}\beta_m - b_{22}e_{51}\delta_n}{b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}} K_S$$

trong đó

$$b_{11} = (a_{12}\beta_m^4 + a_{22}\beta_m^2\delta_n^2 + a_{32}\delta_n^4), \quad b_{21} = a_{42}\beta_m^3 + a_{72}\beta_m\delta_n^2, \quad b_{31} = a_{52}\beta_m^2\delta_n + a_{62}\delta_n^3$$

$$b_{12} = \left(\frac{e_{12}}{e_{11}} - \frac{e_{32}}{e_{31}} \right) \beta_m\delta_n^2, \quad b_{22} = \left(e_{13} - \frac{e_{12}^2}{e_{11}} \right) \beta_m^2 + \left(e_{33} - \frac{e_{32}^2}{e_{31}} \right) \delta_n^2 + K_S e_{41}$$

$$b_{32} = \left[\left(e_{13} - \frac{e_{12}^2}{e_{11}} \right) v_{21} + \left(e_{33} - \frac{e_{32}^2}{e_{31}} \right) \right] \beta_m\delta_n, \quad b_{13} = \left(\frac{e_{22}}{e_{21}} - \frac{e_{32}}{e_{31}} \right) \beta_m^2\delta_n$$

$$b_{23} = \left[\left(e_{33} - \frac{e_{32}^2}{e_{31}} \right) + \left(e_{23} - \frac{e_{22}^2}{e_{21}} \right) v_{12} \right] \beta_m\delta_n,$$

$$b_{33} = \left(e_{33} - \frac{e_{32}^2}{e_{31}} \right) \beta_m^2 + \left(e_{23} - \frac{e_{22}^2}{e_{21}} \right) \delta_n^2 + K_S e_{51}, \quad (C4)$$

$$b_{14} = b_{11}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) + b_{21}(b_{13}b_{32} - b_{12}b_{33}) + b_{31}(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22})$$

$$b_{24} = b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32},$$

$$b_{34} = (b_{21}b_{32}e_{51}\delta_n - b_{21}b_{33}e_{41}\beta_m + b_{31}b_{23}e_{41}\beta_m - b_{31}b_{22}e_{51}\delta_n) K_S.$$

+) Các hệ số $a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}$ trong phương trình (5.24) có biểu thức cụ thể như sau

$$\begin{aligned}
a_{13} = & -\left(\frac{\pi}{B_h}\right)^3 \left(a_{11}B_1^*m^3B_a^3 + a_{21}B_1^*mn^2B_a + a_{31}B_2^*m^2nB_a^2 + a_{41}B_2^*n^3 \right) \\
& + \frac{\pi^2 B_a}{B_h^3} \left(n^2 R_1 + m^2 R_2 B_a + a_{51} m^2 n^2 B_a \frac{\pi^2}{B_h} \right) \left[\frac{\bar{b}_{34}}{\bar{b}_{14}} - \frac{\bar{b}_{24} \pi^2 B_a}{\bar{b}_{14} B_h^3} (R_1 n^2 + R_2 B_a m^2) \right] \\
& + 4E_m^0 \frac{B_a}{B_h^5} K_1 + \pi^2 E_m^0 (m^2 B_a^2 + n^2) K_2, \\
a_{23} = & 8mn\pi^2 \frac{B_a \gamma_m \gamma_n}{3B_h^2} \left[\frac{\bar{b}_{34}}{\bar{b}_{14}} - \frac{\bar{b}_{24} \pi^2 B_a}{\bar{b}_{14} B_h^3} (R_1 n^2 + R_2 B_a m^2) \right], \tag{C5}
\end{aligned}$$

$$a_{33} = -\frac{\pi^2 \gamma_m \gamma_n}{6mn\pi^2 B_a B_h} \left(\frac{m^2}{\bar{a}_{32}} R_1 B_a^2 + \frac{n^2}{\bar{a}_{12}} R_2 \right), \quad a_{43} = \frac{\pi^4}{64B_h^2} \left(\frac{n^4}{\bar{a}_{12} B_a} + \frac{m^4 B_a^3}{\bar{a}_{32}} \right)$$

trong đó

$$\begin{aligned}
(\bar{a}_{11}, \bar{a}_{21}, \bar{a}_{31}, \bar{a}_{41}) &= \frac{1}{h^3} (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}), \quad \bar{b}_{14} = b_{14} h^3, \quad \bar{b}_{24} = \frac{b_{24}}{h^2}, \\
(\bar{a}_{12}, \bar{a}_{22}, \bar{a}_{32}, \bar{a}_{42}, \bar{B}_1^*, \bar{B}_2^*) &= h (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}, B_1^*, B_2^*), \\
(\bar{a}_{51}, \bar{a}_{42}, \bar{a}_{52}, \bar{a}_{62}, \bar{a}_{72}) &= \frac{1}{h} (a_{51}, a_{42}, a_{52}, a_{62}, a_{72}), \quad \bar{b}_{11} = b_{11} h^5, \tag{C6} \\
(\bar{b}_{21}, \bar{b}_{31}, \bar{b}_{12}, \bar{b}_{13}) &= h^2 (b_{21}, b_{31}, b_{12}, b_{13}), \quad (\bar{b}_{22}, \bar{b}_{32}, \bar{b}_{23}, \bar{b}_{33}) = \frac{1}{h} (b_{22}, b_{32}, b_{23}, b_{33}).
\end{aligned}$$

+) Các hệ số s_{ij} ($i = 1 \div 3, j = 1, 2$) trong công thức (5.30) được cho như sau

$$\begin{aligned}
s_{11} &= \frac{1}{s_{41}} [\bar{c}_1 (1 - \bar{c}_2 s_{24}) s_{33} + \bar{c}_1 \bar{c}_2 s_{23} s_{34}], \quad s_{21} = \frac{1}{s_{41}} [\bar{c}_1 (1 - \bar{c}_2 s_{24}) s_{43} + \bar{c}_1 \bar{c}_2 s_{23} s_{44}], \\
s_{31} &= \frac{1}{s_{41}} [\bar{c}_1 (1 - \bar{c}_2 s_{24}) s_{53} + \bar{c}_1 \bar{c}_2 s_{23} s_{54}], \quad s_{12} = \frac{1}{s_{42}} [\bar{c}_2 (1 - \bar{c}_1 s_{13}) s_{34} + \bar{c}_1 \bar{c}_2 s_{14} s_{33}], \\
s_{22} &= \frac{1}{s_{42}} [\bar{c}_2 (1 - \bar{c}_1 s_{13}) s_{44} + \bar{c}_1 \bar{c}_2 s_{14} s_{43}], \quad s_{32} = \frac{1}{s_{42}} [\bar{c}_2 (1 - \bar{c}_1 s_{13}) s_{54} + \bar{c}_1 \bar{c}_2 s_{14} s_{53}] \tag{C7} \\
s_{41} = s_{42} &= (1 - \bar{c}_1 s_{13})(1 - \bar{c}_2 s_{24}) - \bar{c}_1 \bar{c}_2 s_{14} s_{23}
\end{aligned}$$

trong đó $(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = \frac{1}{h} (c_1, c_2)$ và

$$\begin{aligned}
s_{13} &= -\frac{\bar{e}_{21}}{\bar{a}_{82}}, \quad s_{23} = \nu_{21} \frac{\bar{e}_{11}}{\bar{a}_{82}}, \quad s_{43} = \frac{m^2 \pi^2 B_a^2}{8B_h^2}, \quad s_{53} = -\frac{1}{\bar{a}_{82}} (\bar{e}_{21} \bar{e}_{11T} - \nu_{21} \bar{e}_{11} \bar{e}_{21T}), \\
s_{33} &= -\frac{4\gamma_m \gamma_n}{mn\pi^2 \bar{a}_{82}} \left\{ \pi^2 (\nu_{21} \bar{e}_{11} m^2 B_a^2 - \bar{e}_{21} n^2) \left[(n^2 R_1 + m^2 B_a R_2) B_a \pi^2 \frac{\bar{b}_{24}}{\bar{b}_{14} B_h^5} - \frac{\bar{b}_{34}}{\bar{b}_{14} B_h^2} \right] \right. \\
&\quad \left. - (\nu_{12} \nu_{21} \bar{e}_{11} \bar{e}_{22} - \bar{e}_{12} \bar{e}_{21}) m\pi \bar{B}_1^* \frac{B_a}{B_h} - (\bar{e}_{11} \bar{e}_{22} - \bar{e}_{12} \bar{e}_{21}) \nu_{21} n\pi \frac{\bar{B}_2^*}{B_h} \right\} - 4\gamma_m \gamma_n \frac{B_a R_1}{mn\pi^2 B_h}, \\
s_{14} &= \nu_{12} \frac{\bar{e}_{21}}{\bar{a}_{82}}, \quad s_{24} = -\frac{\bar{e}_{11}}{\bar{a}_{82}}, \quad s_{44} = \frac{n^2 \pi^2}{8B_h^2}, \quad s_{54} = -\frac{1}{\bar{a}_{82}} (\bar{e}_{11} \bar{e}_{21T} - \nu_{12} \bar{e}_{21} \bar{e}_{11T}), \quad (C8) \\
s_{34} &= -\frac{4\gamma_m \gamma_n}{mn\pi^2 \bar{a}_{82}} \left\{ \pi^2 (\nu_{12} \bar{e}_{21} n^2 - \bar{e}_{11} m^2 B_a^2) \left[(n^2 R_1 + m^2 B_a R_2) B_a \pi^2 \frac{\bar{b}_{24}}{\bar{b}_{14} B_h^5} - \frac{\bar{b}_{34}}{\bar{b}_{14} B_h^2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \nu_{12} (\bar{e}_{12} \bar{e}_{21} - \bar{e}_{11} \bar{e}_{22}) m\pi \bar{B}_1^* \frac{B_a}{B_h} - (\bar{e}_{12} \bar{e}_{21} \nu_{12} \nu_{21} - \bar{e}_{11} \bar{e}_{22}) n\pi \frac{\bar{B}_2^*}{B_h} \right\} - 4\gamma_m \gamma_n \frac{B_a R_2}{mn\pi^2 B_h}
\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
(\bar{e}_{11}, \bar{e}_{21}, \bar{e}_{11T}, \bar{e}_{21T}) &= \frac{1}{h} (e_{11}, e_{21}, e_{11T}, e_{21T}), \quad (\bar{e}_{12}, \bar{e}_{22}) = \frac{1}{h^2} (e_{12}, e_{22}), \\
\bar{a}_{82} &= \frac{1}{(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \bar{e}_{11} \bar{e}_{21}}. \quad (C9)
\end{aligned}$$

+) Các hệ số s_{k5} ($k = 1 \div 6$) trong phương trình (5.31) có dạng cụ thể như sau

$$\begin{aligned}
s_{15} &= \frac{mn\pi^2}{16} a_{13} - \frac{B_a R_1}{B_h} s_{11} - \frac{R_2}{B_h} s_{21}, \quad s_{25} = \frac{mn\pi^2}{16} a_{23} + \frac{m^3 n \pi^4}{16 B_h^2} B_a^2 s_{11} + \frac{mn^3 \pi^4}{16 B_h^2} s_{21}, \\
s_{35} &= \frac{mn\pi^2}{16} a_{33} - \frac{B_a R_1}{B_h} s_{21} - \frac{R_2}{B_h} s_{22}, \quad s_{45} = \frac{mn\pi^2}{16} a_{43} + \frac{m^3 n \pi^4}{16 B_h^2} B_a^2 s_{21} + \frac{mn^3 \pi^4}{16 B_h^2} s_{22}, \\
s_{55} &= \frac{m^3 n \pi^4}{16 B_h^2} B_a^2 s_{31} + \frac{mn^3 \pi^4}{16 B_h^2} s_{32}, \quad s_{65} = \frac{B_a R_1}{B_h} s_{31} + \frac{R_2}{B_h} s_{32}. \quad (C10)
\end{aligned}$$

+) Các biểu thức cụ thể của g_i ($i = 1 \div 5$) trong phương trình (5.34) có dạng như sau

$$g_1 = -\frac{\bar{e}_{11}}{\bar{a}_{82}}, \quad g_2 = \nu_{12} \frac{\bar{e}_{21}}{\bar{a}_{82}}, \quad g_4 = \frac{n^2 \pi^2}{8B_h^2}, \quad g_5 = \frac{1}{\bar{a}_{82}} (\nu_{12} \bar{e}_{21} \bar{e}_{11T} - \bar{e}_{11} \bar{e}_{21T}),$$

$$g_3 = \frac{4\gamma_m\gamma_n}{mn\pi^2\bar{a}_{82}} \left[\frac{(\bar{e}_{21}v_{12}n^2\pi^2 - \bar{e}_{11}m^2\pi^2 B_a^2)}{\bar{b}_{14}B_h^2} \bar{b}_{34} \right. \quad (C11)$$

$$\left. + v_{12}(\bar{e}_{12}\bar{e}_{21} - \bar{e}_{11}\bar{e}_{22}) \frac{m\pi B_a}{B_h} \bar{B}_1^* + (\bar{e}_{12}\bar{e}_{21}v_{12}v_{21} - \bar{e}_{11}\bar{e}_{22}) \frac{n\pi}{B_h} \bar{B}_2^* \right].$$

+) Các hệ số d_j ($j = 1 \div 4$) trong phương trình (5.35) được cho như sau

$$d_1 = \frac{a_{13}^*}{d_5}, \quad d_2 = \frac{1}{d_5} \left[a_{23}^* + \frac{g_3 n^2 \bar{c}_2 \pi^2}{(1 - g_1 \bar{c}_2) B_h^2} \right], \quad d_3 = \frac{1}{d_5} \left[a_{33}^* + \frac{g_4 n^2 \bar{c}_2 \pi^2}{(1 - g_1 \bar{c}_2) B_h^2} \right],$$

$$d_4 = \frac{g_5 n^2 \bar{c}_2 \pi^2}{d_5 (g_1 \bar{c}_2 - 1) B_h^2}, \quad d_5 = \frac{\pi^2}{B_h^2} \left(m^2 B_a^2 + \frac{g_2 n^2 \bar{c}_2}{1 - \bar{c}_2 g_1} \right)$$

$$a_{13}^* = \frac{\pi^3}{B_h^3} \left[\frac{m^2 n^2 \pi B_a^2}{\bar{b}_{14} B_h} \bar{a}_{51} \bar{b}_{34} - (m^2 B_a^2 \bar{a}_{11} + n^2 \bar{a}_{21}) m B_a \bar{B}_1^* - (m^2 B_a^2 \bar{a}_{31} + n^2 \bar{a}_{41}) n \bar{B}_2^* \right]$$

$$+ \frac{E_0^m}{B_h^4} K_1 + \frac{E_0^m \pi^2}{B_h^4} (m^2 B_a^2 + n^2) K_2, \quad (C12)$$

$$a_{23}^* = \frac{32mn\pi^2 B_a^2}{3\bar{b}_{14} B_h^4} \bar{b}_{34} \gamma_m \gamma_n, \quad a_{33}^* = \left(\frac{n^2}{\bar{a}_{12} m^2} + \frac{m^2 B_a^4}{\bar{a}_{32} n^2} \right) \frac{m^2 n^2 \pi^4}{16 B_h^4}.$$