NGUYỄN HOÀNG DUY

VẬT LÝ LÝ THUYẾT VÀ VẬT LÝ TOÁN

2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VN

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Nguyễn Hoàng Duy

LẠM PHÁT BẤT ĐẲNG HƯỚNG DƯỚI ĐIỀU KIỆN CUỘN HẰNG SỐ CHO MÔ HÌNH DIRAC-BORN-INFELD

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Vật lý lý thuyết và vật lý toán

Hà Nội - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VN

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Nguyễn Hoàng Duy

LẠM PHÁT BẤT ĐẲNG HƯỚNG DƯỚI ĐIỀU KIỆN CUỘN HẰNG SỐ CHO MÔ HÌNH DIRAC-BORN-INFELD

Chuyên ngành : Vật lý lý thuyết và vậy lý toán
Mã số: 8440103

LUẬN VĂN THẠC SĨ NGÀNH
Khoa học vật chất

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

TS. Đỗ Quốc Tuấn

Hà Nội - 2022

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu được tôi thực hiện dưới sự hướng dẫn khoa học của TS. Đỗ Quốc Tuấn. Các nội dung nghiên cứu trong đề tài "Lạm phát bất đẳng hướng dưới điều kiện cuộn hằng số cho mô hình Dirac-Born-Infeld" của tôi là trung thực và chưa công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây. Các thông tin tham khảo trong luận văn cũng được trích dẫn đầy đủ, cẩn thận. Nếu phát hiện có bất kỳ sự gian lận nào tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Hà Nội, ngày 14 tháng 12 năm 2022

Nguyễn Hoàng Duy

Lời cảm ơn

Tôi xin chân thành cảm ơn Tiến sĩ Đỗ Quốc Tuấn từ Viện nghiên cứu tiên tiến Phenikaa - Trường Đại học Phenikaa vì đã trực tiếp hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn này. Tôi xin cảm ơn Học viện Khoa học và Công nghệ - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam và Viện nghiên cứu tiên tiến Phenikaa - Trường Đại học Phenikaa đã tạo môi trường để tôi học tập, rèn luyện, tích lũy kiến thức. Luận văn này được tài trợ bởi Tập đoàn Vingroup và hỗ trợ bởi chương trình học bổng đào tạo thạc sĩ, tiến sĩ trong nước của Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VINIF), Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn (VinBigdata), mã số VINIF.2021.ThS.48 và được tài trợ một phần từ kinh phí của đề tài Nafosted mã số 103.01-2020.15. Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình và bạn bè vì sự ủng hộ về cả vật chất lẫn tinh thần. Do những hạn chế của tôi về kiến thức chuyên môn và khả năng học tập, nghiên cứu nên luận văn của tôi sẽ không tránh khỏi thiếu sót. Tôi rất mong nhận được những lời góp ý của các thầy cô và bạn học.

Hà Nội, ngày 14 tháng 12 năm 2022

Nguyễn Hoàng Duy

Mục lục

1 Mở đầu **7**

2 Mở đầu về vũ trụ học Big Bang và lạm phát vũ trụ **11**

2.1 Một vũ trụ đồng nhất và đẳng hướng 11

2.1.1 Metric Friedmann-Lematre-Robertson-Walker 12

2.1.2 Phương trình trường Einstein 13

2.1.3 Các phương trình Friedmann 14

2.2 Vấn đề chân trời và vấn đề độ phẳng 16

2.2.1 Vấn đề chân trời 16

2.2.2 Vấn đề độ phẳng 18

2.2.3 Giải pháp 19

2.3 Lạm phát cuộn chậm với trường vô hướng chính tắc 21

2.4 Lạm phát với trường vô hướng không chính tắc 24

3 Lý thuyết nhiễu loạn vũ trụ **26**

3.1 Nhiễu loạn metric 26

3.2 Nhiễu loạn tensor năng xung lượng 29

3.3 Các phương trình nhiễu loạn 31

3.4 Nhiễu loạn độ cong 33

3.5 Phương trình Mukhanov-Sasaki 34

3.6 Các nhiễu loạn nguyên thủy từ lạm phát 37

4 Lạm phát bất đẳng hướng **40**

4.1 Giới thiệu chung 40
4.2 Lạm phát bất đẳng hướng lũy thừa 41

5 Lạm phát bất đẳng hướng dưới điều kiện cuộn hằng số **48**
5.1 Mô hình chính tắc 48
5.2 Mô hình Dirac-Born-Infeld 51
5.2.1 Các phương trình cơ bản 51
5.2.2 Nghiệm lạm phát dưới điều kiện cuộn hằng số 53
5.2.3 Khảo sát các tính chất hội tụ 60

6 Kết luận **63**

7 Phụ lục **65**
7.1 Code Mathematica cho nghiệm I 65
7.2 Code Mathematica cho nghiệm II 69
7.3 Code Mathematica cho nghiệm III 74

Danh sách hình vẽ

2.1 Sự phân bố của các thiên hà: Ở thang đo nhỏ, các thiên hà phân bố co cụm nhưng ở thang đo lớn, chúng trở nên đồng nhất [10]. 12

2.2 Nhiệt độ của bức xạ phông nền vũ trụ theo mọi hướng là gần như nhau với chênh lệch $\sim 10^{-4}$K. Nhiệt độ trung bình $T_0 = 2.7$K [10]. 12

2.3 Minh họa cho vấn đề chân trời: Hai điểm A và B thuộc bức xạ phông nền vũ trụ nằm đối xứng nhau qua Trái Đất. Nón ánh sáng quá khứ của chúng không giao nhau do bị chặn bởi kì dị Big Bang. Nói cách khác, chúng chưa từng tương tác với nhau. Điều này cũng áp dụng cho các cặp điểm khác trên bức xạ phông nền vũ trụ cách nhau nhiều hơn 1 độ. Tuy nhiên, các quan sát ở thời điểm hiện tại đều cho thấy bức xạ phông nền là gần như đồng nhất. 18

2.4 Sự thay đổi của Ω theo thời gian. 19

2.5 Minh họa cho lạm phát cuộn chậm: trường vô hướng ϕ lăn chậm trên một phần gần như phẳng của thế năng. Lạm phát xảy ra ở vùng được tô đậm. 23

3.1 Trong quá trình lạm phát, bán kính Hubble co lại khiến nó nhỏ hơn thang đo đồng chuyển động k^{-1}. Phổ nhiễu loạn của $\mathcal{R}$ ứng với số sóng k không đổi theo thời gian ở giai đoạn này. Vậy nên tính toán nhiễu loạn của $\mathcal{R}$ tại thời điểm bán kính Hubble giao với k^{-1} (horizon crossing) có thể liên hệ với quan sát sau này. 33

4.1 Các điểm dị thường trên bức xạ phông nền vũ trụ (Nguồn: ESA/Planck collaboration). 41

4.2 Sự biến đổi của các biến X, Y và Z với các tham số $\lambda = 0.1$ và $\rho = 50$ [28]. 47

5.1 Hình bên trái mô tả sự biến đổi của tỉ số H_b/H_a. Hình bên phải là không gian pha của H_b/H_a và η [37]. 51

5.2 Đồ thị của $h(\phi)$ (trái) và $V(\phi)$ (phải) ứng với $\phi_+(t)$ với $\hat{\beta} = 0.1$ và $\gamma_0 = 1.5$. Ở đây, h_0 là một hằng số tích phân. Hình vẽ chỉ ra rằng $h(\phi)$ nhỏ hơn 1 khi ϕ gần 0 và $V(\phi)$ không âm với mọi giá trị của ϕ. 59

5.3 Đồ thị của $h(\phi)$ (trái) và $V(\phi)$ (phải) tương ứng với $\phi_-(t)$ với $\hat{\beta} = 0.1$ và $\gamma_0 = 1.5$. Ở đây, h_0 là một hằng số tích phân. Hình vẽ chỉ ra rằng $h(\phi)$ luôn lướn hơn 1 và $V(\phi)$ âm ϕ tiến đến 0 (miền giá trị âm của $V(\phi)$ được thể hiện bằng đường nét đứt). 60

5.4 Sự thay đổi theo thời gia của tỉ số $H_b(t)/H_a(t)$ với 3 giá trị khác nhau của γ_0. Chúng ta dễ thấy rằng $H_b(t)/H_a(t)$ đều hội tụ về $n = \hat{\beta}/6 \simeq 0.0167$. Hình thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tương ứng với các nghiệm I, II và III. Đường cong màu đỏ, xanh lá và xanh dương lần lượt tương ứng với $\gamma_0 = 1$, 1.5, và 2. 60

5.5 Sự thay đổi theo thời gian của $\gamma(t)$ cho 3 giá trị khác nhau của γ_0. Dễ thấy rằng $\gamma(t)$ hội tụ chính xác về các γ_0 tương ứng. Hình thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tương ứng với các nghiệm I, II và III. Đường cong màu đỏ, xanh lá và xanh dương lần lượt tương ứng với $\gamma_0 = 1$, 1.5, và 2. 61

5.6 Không gian pha của $H_b(t)/H_a(t)$ và $\eta_{\rm DBI}(t)$ cho các giá trị khác nhau của γ_0. Hình thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tương ứng với các nghiệm I, II và III. Đường cong màu đỏ, xanh lá và xanh dương lần lượt tương ứng với $\gamma_0 = 1$, 1.5, và 2. 61

5.7 Đồ thị của hàm thế năng $V(\phi)$ ứng với nghiệm III cho các giá trị γ_0. Các đường màu đỏ, xanh lá, xanh dương lần lượt tương ứng với $\gamma_0 = 1$, 1.5 và 2. 62

Chương 1

Mở đầu

Vũ trụ học là một nhánh của thiên văn học, nghiên cứu chủ yếu về sự khởi đầu, tiến hóa và kết thúc của vũ trụ và các cấu trúc bên trong nó. Trước Einstein, phần lớn các nhà khoa học cho rằng vũ trụ là tĩnh, không có khởi đầu cũng như kết thúc. Năm 1915, Albert Einstein đưa ra lý thuyết tương đối tổng quát, một lý thuyết hoàn toàn mới sử dụng hình học Riemann để mô tả vũ trụ [1]. Theo lý thuyết này, không gian và thời gian không phải là hai thứ tách rời mà được gộp chung thành không-thời gian và có thể bị uốn cong dưới tác động của vật chất và năng lượng thông qua phương trình trường Einstein. Không giống như lý thuyết hấp dẫn của Newton, trọng lực trong thuyết tương đối tổng quát không phải là một lực mà là hệ quả của việc không-thời gian bị uốn cong. Năm 1922, Alexander Friedmann, bằng cách giả sử vũ trụ là đồng nhất và đẳng hướng, đã dẫn ra các phương trình Friedmann từ các phương trình trường Einstein, qua đó phỏng đoán được rằng vũ trụ đang giãn nở hoặc co lại [2]. Một cách độc lập, nhà thiên văn và mục sư Công giáo Georges Lemaitre đã đề xuất một lý thuyết về sự khởi đầu của vũ trụ mà ngày nay chúng ta gọi là thuyết Big Bang: "Nếu như ngày nay vũ trụ đang giãn nở thì có thể tại một thời điểm nào đó trong quá khứ, tất cả vật chất và năng lượng phải tập trung tại một điểm duy nhất". Sau đó, nhà thiên văn người Mỹ Erwin Hubble đã khám phá ra rằng các thiên hà đang di chuyển ra xa khỏi Trái đất với vận tốc tỉ lệ với khoảng cách của chúng tới Trái đất. Dựa theo rất nhiều các quan sát, các nhà khoa học ước tính tuổi của vũ trụ vào khoảng 14 tỉ năm.

Tuy nhiên, mô hình Big Bang tiêu chuẩn này lại gặp phải một số vấn đề nghiêm trọng mà hai trong số chúng là vấn đề chân trời và vấn đề độ phẳng. Vấn đề chân trời nảy sinh từ sự đồng nhất của bức xạ phông nền vũ trụ (CMB). Sự đồng nhất này có nghĩa rằng vũ trụ, trên thang đo rất lớn, có nhiệt độ là như nhau. Tuy nhiên, vũ trụ quan sát được lại chứa rất nhiều các vùng không tương tác (photon không có đủ thời gian để truyền đi giữa chúng). Bên cạnh đó, vấn đề độ phẳng liên quan đến độ cong của vũ trụ, thứ phụ thuộc vào mật độ vật chất và năng lượng bên trong nó. Các quan sát chỉ ra rằng mật độ hiện tại của vũ trụ rất gần với mật độ tới hạn - giá trị tương đương với vũ trụ phẳng [6, 7].

Theo các phương trình Friedmann, kết quả quan sát đó đồng nghĩa với việc mật độ của vũ trụ sơ khai phải cực kỳ gần với giá trị tới hạn này. Điều này dẫn đến câu hỏi tại sao vũ trụ lại được tinh chỉnh tới một giá trị chính xác như vậy.

Năm 1979, Alan Guth đề xuất lý thuyết lạm phát vũ trụ, một giải pháp để giải quyết các vấn đề trên [4]. Ông giả thuyết rằng vũ trụ, ở thời kỳ sơ khai, giãn nở cực nhanh trong một khoảng thời gian rất nhỏ. Theo giả thuyết này, vũ trụ quan sát được vào thời kỳ đó là một vùng rất nhỏ, có liên hệ nhân quả và cân bằng nhiệt động. Sau đó, lạm phát xảy ra và biến phần vũ trụ quan sát được đó trở nên rất lớn và không còn kết nối nhân quả nữa. Bên cạnh đó, lạm phát cũng khiến hình học của vũ trụ trở nên phẳng hơn, hay nói cách khác là lạm cho mật độ vũ trụ tiến tới rất gần mật độ tới hạn. Ý tưởng của Guth cho cơ chế lạm phát là vũ trụ, tại thời kỳ sơ khai, bị thống trị bởi một trường vô hướng gọi là trường lạm phát. Ông giả thuyết rằng thế năng của trường lạm phát có một cực tiểu địa phương với mật độ năng lượng cao (giả chân không). Trong quá trình phát triển, trạng thái của vũ trụ dịch chuyển về trạng thái giả chân không đó và và mắc kẹt ở đó. Năng lượng cao của trạng thái giả chân không đóng vai trò như một hằng số vũ trụ, dẫn tới sự giãn nở theo hàm mũ. Tuy nhiên, thông qua quá trình xuyên hầm lượng tử, một vài vùng trong vũ trụ thoát khỏi trạng thái giả chân không một cách ngẫu nhiên và tiến đến trạng thái chân không thực sự (cực tiểu với mật độ năng lượng bằng không) và như vậy lạm phát kết thúc theo từng vùng. Mặc dù giải quyết được nhiều vấn đề của vũ trụ học, ngay cả Guth cũng thừa nhận rằng lý thuyết của mình có một số vấn đề nghiêm trọng, và vì thế cần có sự điều chỉnh. Năm 1982, Linde đề xuất một mô hình lạm phát mới gọi là lạm phát cuộn chậm [5]. Thay vì có giả chân không, thế năng trong mô hình của Linde có một phần gần như phẳng (xem hình 2.5). Trường vô hướng "cuộn chậm" trên bề mặt đó nên mật độ năng lượng gần như là hằng số và kết quả là lạm phát xảy ra. Sau đó, trường vô hướng tiến về trạng thái chân không thực sự và lạm phát kết thúc.

Lạm phát còn đưa ra lời giải thích thỏa đáng cho sự hình thành các cấu trúc vĩ mô trong vũ trụ. Theo nguyên lý bất định, tồn tại các biến thiên trong trường lạm phát gọi là các nhiễu loạn lượng tử. Do lạm phát phóng đại kích thước của vũ trụ lên rất nhiều lần, các nhiễu loạn lượng tử này cũng được khuếch đại lên thang vĩ mô. Kết quả là các nhiễu loạn này trở thành nguồn gốc của các cấu trúc vĩ mô của vũ trụ (sự phân bố của vật chất, năng lượng, vật chất tối). Bên cạnh đó, lạm phát cũng tiên đoán sóng hấp dẫn nguyên thủy, đối tượng quan sát quan trọng của vũ trụ học ngày nay. Các hệ quả quan sát được của lạm phát cuộn chậm còn có thể kể đến như sự không phụ thuộc vào thang đo của phổ nhiễu loạn hay sự phân bố theo hàm phân bố chuẩn của các nhiễu loạn nguyên thủy. Bên cạnh đó, các mô hình lạm phát không chính tắc có cơ chế phức tạp hơn dẫn đến những sự khác biệt so với các mô hình lạm phát chính tắc như sự khác biệt về phổ nhiễu loạn hay sự sai lệch so với phân bố chuẩn của các nhiễu loạn nguyên thủy. Trong số những mô hình lạm phát không chính tắc, trong luận văn này chúng ta quan tâm đến mô hình lạm phát Dirac-Born-Infeld nằm trong khuôn khổ lý thuyết màng-D3 [21–26].

Một hướng nghiên cứu khác về lạm phát vũ trụ cũng rất được quan tâm đó là lạm

phát bất đẳng hướng. Các mô hình vũ trụ tiêu chuẩn được dựa trên nguyên lý vũ trụ học - vũ trụ là đồng nhất và đẳng hướng trên thang đo rất lớn [15]. Theo đó, hình học của vũ trụ được mô tả bởi metric Friedmann-Lematre-Robertson-Walker (FLRW). Nguyên lý này lại càng được củng cố một phần bởi sự đẳng hướng của bức xạ phông nền vũ trụ. Tuy nhiên, các thí nghiệm nhằm kiểm chứng tính hợp lý của nguyên lý này vẫn còn có nhiều điểm chưa rõ ràng [16]. Ngày nay, các quan sát với độ chính xác cao đã phát hiện ra một số dị thường trong bức xạ phông nền vũ trụ [17]. Các dị thường này khiến chúng ta phải xem xét lại quan niệm cũ của chúng ta về vũ trụ. Một khả năng có thể giải thích cho các dị thường này đó là vũ trụ ở thời kỳ rất sớm được mô tả bởi metric Bianchi - metric mô tả một vũ trụ đồng nhất nhưng không đẳng hướng thay vì metric FLRW [18,19]. Tuy nhiên, ngay cả khi vũ trụ ở thời kỳ sớm là bất đẳng hướng, điều đó cũng không có nghĩa là vũ trụ ở giai đoạn sau cũng như thế. Thực tế, có một giả thuyết được đề xuất bởi Hawking và các đồng nghiệp được gọi là giả thuyết no-hair, phát biểu rằng mọi sự bất đẳng hướng sẽ biến mất theo quá trình giãn nở của vũ trụ [20]. Trên thực tế, đã có nhiều nghiên cứu về giả thuyết này trong khuôn khổ của lạm phát vũ trụ. Trong đó, một hướng nghiên cứu mới nằm trong khuôn khổ lý thuyết siêu hấp dẫn đã đề xuất ra nhiều mô hình lạm phát bất đẳng hướng ổn định, qua đó đưa ra các phản ví dụ đầu tiên cho giả thuyết no-hair [27–43].

Một trong các hệ quả quan sát được của lạm phát cuộn chậm còn có thể kể đến như sự không phụ thuộc vào thang đo của phổ nhiễu loạn. Tiên đoán này đã được các quan sát về bức xạ phông nền vũ trụ xác nhận. Tuy nhiên, gần đây người ta nhận thấy rằng không chỉ có lạm phát cuộn chậm mà một mô hình lạm phát tổng quát hơn là lạm phát cuộn hằng số cũng có tính chất tương tự. Tuy nhiên, điểm khác biệt giữa hai mô hình này là lạm phát cuộn hằng số tiên đoán sự sai lệch khỏi phân bố chuẩn của nhiễu loạn nguyên thủy [46,47]. Kể từ đó, đã có nhiều nghiên cứu về lạm phát cuộn hằng số cả về lý thuyết và thực nghiệm được tiến hành trong những năm gần đây [37,48–64].

Một mô hình lạm phát thú vị kết hợp giữa lạm phát bất đẳng hướng và lạm phát cuộn hằng số đã được đề xuất bởi Asuka Ito và Jiro Soda [37]. Kết quả thu được bằng phương pháp số cho thấy các nghiệm lạm phát tìm được trong mô hình này là ổn định và hội tụ. Lấy cảm hứng từ bài báo đó, chúng tôi tìm cách mở rộng mô hình của họ sang trường hợp không chính tắc, cụ thể là mô Dirac-Born-Infeld. Thông qua các phương pháp tính toán tương tự với bài báo gốc với một số điều chỉnh cần thiết, chúng tôi cũng tìm được các nghiệm lạm phát cho mô hình Dirac-Born-Infeld. Bằng phương pháp số, chúng tôi cũng chứng minh được rằng mô hình mới cũng có các nghiệm hội tụ giống như mô hình gốc. Hơn thế nữa, chúng tôi còn phát hiện ra tính chất hội tụ của vận tốc âm thanh (vận tốc lan truyền của nhiễu loạn vô hướng) c_s - một đại lượng quan trọng trong các mô hình không chính tắc. Các kết quả nghiên cứu của tôi đã được đăng trên tạp chí European Physical Journal C trong một bài báo với tiêu đề "Anisotropic constant-roll inflation for the Dirac–Born–Infeld model" [44].

Luận văn này có cấu trúc như sau. Trong chương 2, chúng ta sẽ nghiên cứu sơ lược về mô hình vũ trụ đồng nhất và đẳng hướng cũng như lý thuyết lạm phát vũ trụ. Trong

chương 3, chúng ta sẽ nghiên cứu lý thuyết nhiễu loạn vũ trụ - lý thuyết giải thích cho sự hình thành các cấu trúc trong vũ trụ và sử dụng lý thuyết đó để nghiên cứu một số hệ quả quan sát được của lạm phát. Tiếp theo, trong chương 4, chúng ta sẽ tìm hiểu về lý thuyết lạm phát bất đẳng hướng cũng như đưa ra một mô hình đơn giản cho lý thuyết này. Chương 5 trình bày những kết quả thu được trong nghiên cứu của chúng tôi về mô hình "lạm phát bất đẳng hướng dưới điều kiện cuộn hằng số cho mô hình Dirac-Born-Infeld". Cuối cùng, trong chương 6, chúng tôi đưa ra các kết luận cũng như thảo luận về các hướng nghiên cứu tiếp theo liên quan đến lạm phát bất đẳng hướng cuộn hằng số.

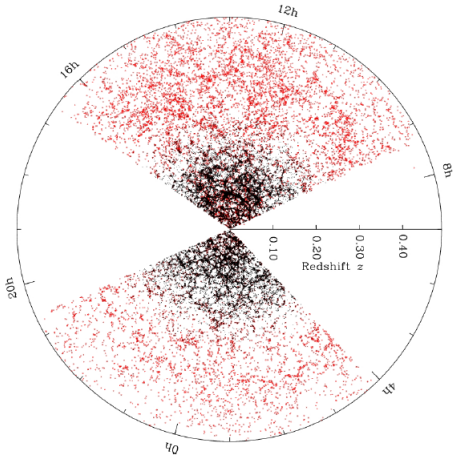
Chương 2

Mở đầu về vũ trụ học Big Bang và lạm phát vũ trụ

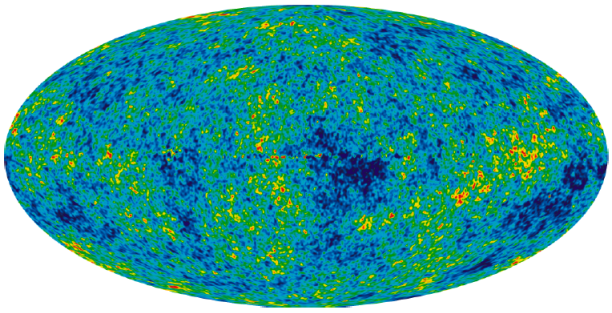
Trong chương này, chúng ta sẽ giới thiệu về nguyên lý vũ trụ học: "vũ trụ là đồng nhất và đẳng hướng trên thang đo rất lớn". Chúng ta cũng sẽ tìm hiểu về động lực học của vũ trụ và các phương trình chi phối sự tiến hóa của vũ trụ. Tiếp theo, chúng ta sẽ nghiên cứu vấn đề chân trời và vấn đề độ phẳng (hai vấn đề của vũ trụ học Big Bang) cũng như giới thiệu về lý thuyết lạm phát vũ trụ - một lý thuyết có thể giải quyết các vấn đề nêu trên. Cuối cùng, chúng ta sẽ nghiên cứu một mô hình lạm phát đơn giản - lạm phát cuộn chậm với trường vô hướng chính tắc cũng như giới thiệu sơ lược về một mô hình lạm phát không chính tắc gọi là mô hình lạm phát Dirac-Born-Infeld. Các lập luận và tính toán trong chương này tham khảo từ các sách [8–10].

2.1 Một vũ trụ đồng nhất và đẳng hướng

Phần lớn các mô hình về vũ trụ đều dựa trên nguyên lý vũ trụ học: "Phân bố vật chất trong vũ trụ là đồng nhất và đẳng hướng trên thang đo rất lớn". Hai khái niệm "đồng nhất" và "đẳng hướng" là không tương đương với nhau. Một vũ trụ đồng nhất có thể không đẳng hướng. Một vũ trụ đẳng hướng từ một vị trí quan sát nào đó có thể sẽ không còn đẳng hướng nữa khi quan sát ở một vị trí khác và như vậy vũ trụ này là không đồng nhất. Hiển nhiên là nguyên lý vũ trụ học không đúng ở các thang đo nhỏ như hệ Mặt trời hay dải Ngân hà mà chỉ được áp dụng ở các thang đo rất lớn (≥ 100Mpc). Các bằng chứng cho nguyên lý vũ trụ học được thể hiện qua các quan sát về sự phân bố các thiên hà và nhiệt độ của bức xạ phông nền vi sóng vũ trụ.



Hình 2.1: Sự phân bố của các thiên hà: Ở thang đo nhỏ, các thiên hà phân bố co cụm nhưng ở thang đo lớn, chúng trở nên đồng nhất [10].



Hình 2.2: Nhiệt độ của bức xạ phông nền vũ trụ theo mọi hướng là gần như nhau với chênh lệch $\sim 10^{-4}$K. Nhiệt độ trung bình $T_0 = 2.7$K [10].

2.1.1 Metric Friedmann-Lematre-Robertson-Walker

Một vũ trụ đồng nhất và đẳng hướng được mô tả bởi metric Friedmann-Lematre-Robertson-Walker (FLRW) có dạng

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Sigma^2, \tag{2.1.1}$$

trong đó $a(t)$ là hệ số tỉ lệ mô tả kích thước tương đối của vũ trụ tại các thời điểm khác nhau và $d\Sigma$ là yếu tố độ dài của không gian ba chiều với độ cong đồng nhất (không gian eliptic, không gian Euclid và không gian hyperbolic).

Trong hệ tọa độ cầu (r, θ, ϕ), metric FLRW có dạng

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\phi^2 \right], \tag{2.1.2}$$

với $K = \{-1, 0, 1\}$ tùy thuộc vào độ cong của vũ trụ. Ở đây, r, θ và ϕ được gọi là các tọa độ đồng chuyển động (comoving coordinate). Cụ thể, nếu một vật không có chuyển động riêng (chỉ chuyển động do sự giãn nở của vũ trụ), tọa độ đồng chuyển động của vật đó là không đổi. Điều này đưa chúng ta đến một khái niệm mới là khoảng cách đồng chuyển động (comoving distance). Nếu hai vật đứng yên hoặc đồng chuyển động trong vũ trụ giãn nở, khoảng cách đồng chuyển động giữa chúng là không đổi. Tuy nhiên, khoảng cách vật lý (khoảng cách đo bằng một thước đo nào đó) giữa chúng lại thay đổi do sự giãn nở của vũ trụ. Khoảng cách vật lý d_{physical} và khoảng cách đồng chuyển động d_{comoving} liên hệ với nhau như sau

$$d_{\text{physical}} = a(t) d_{\text{comoving}}. \tag{2.1.3}$$

2.1.2 Phương trình trường Einstein

Phương trình trường Einstein mô tả cách mà vật chất tác động lên hình học của không thời gian. Nó được viết dưới dạng tensor như sau

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{M_{pl}^2} T_{\mu\nu}, \tag{2.1.4}$$

trong đó $G_{\mu\nu}$ là tensor Einstein, $T_{\mu\nu}$ là tensor năng xung lượng và $M_{pl} \equiv 1/\sqrt{8\pi G}$ là khối lượng Planck rút gọn. Ở đây, chúng ta đặt vận tốc ánh sáng $c = 1$. Các phương trình này có thể thu được bằng cách sử dụng phương pháp tác dụng tối thiểu đối với hàm tác dụng Einstein-Hilbert có dạng

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{pl}^2}{2} R + \mathcal{L} \right], \tag{2.1.5}$$

với g là định thức của tensor metric $g_{\mu\nu}$ của không thời gian và $\mathcal{L}$ là Lagrangian.

Tensor năng xung lượng có thể được viết dưới dạng

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}. \tag{2.1.6}$$

Nâng chỉ số cho (2.1.4), ta thu được

$$G^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{M_{pl}^2} T^{\mu}{}_{\nu}, \tag{2.1.7}$$

Tiếp đến, chúng ta sẽ áp dụng metric FLRW (2.1.2) để tính toán các thành phần của tensor Einstein. Sau một vài tính toán cơ bản, chúng ta thu được các thành phần

khác 0 của $G^{\mu}{}_{\nu}$ như sau

$$G^{0}{}_{0} = -3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2} + \frac{K}{a^{2}}\right], \tag{2.1.8}$$

$$G^{i}{}_{j} = -2\left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2} + \frac{K}{a^{2}}\right]\delta^{i}{}_{j}. \tag{2.1.9}$$

với $\delta^{i}{}_{j}$ là ký hiệu delta Kronecker.

2.1.3 Các phương trình Friedmann

Để mô tả một vũ trụ đồng nhất và đẳng hướng, chúng ta mô hình hóa vật chất và năng lượng bên trong nó bằng mô hình chất lưu hoàn hảo. Tensor năng xung lượng trong mô hình này có dạng

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \tag{2.1.10}$$

với ρ và P lần lượt là mật độ và áp suất của chất lưu trong hệ quy chiếu đứng yên.

Mặt khác (2.1.10) có thể được viết dưới dạng sau

$$T^{\mu}{}_{\nu} = (\rho + P)U^{\mu}U_{\nu} + P\delta^{\mu}_{\nu}, \tag{2.1.11}$$

với $U^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ là vận tốc-4 của chất lưu

Thay (2.1.8), (2.1.9) và (2.1.10) vào (2.1.7), ta thu được các phương trình Friedmann như sau

$$H^{2} = \frac{1}{3M_{pl}^{2}}\rho - \frac{K}{a^{2}}, \tag{2.1.12}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_{pl}^{2}}(\rho + 3P), \tag{2.1.13}$$

với $H \equiv \dot{a}/a$ là tham số Hubble. Bằng cách thay (2.1.13) vào (2.1.12), chúng ta có thể thu được một phương trình khác như sau

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{pl}^{2}}(\rho + P) + \frac{K}{a^{2}}. \tag{2.1.14}$$

Sử dụng đồng nhất thức Bianchi $\nabla_\mu G^\mu{}_\nu$, chúng ta thu được phương trình liên tục

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P). \tag{2.1.15}$$

Chúng ta chú ý rằng (2.1.15) không độc lập với (2.1.12) và (2.1.14), vậy nên chúng có thể được dùng thay thế cho nhau.

Chúng ta chia chất lưu trong vũ trụ làm nhiều loại khác nhau, phụ thuộc vào mối liên hệ giữa mật độ ρ và áp suất P

Vật chất: thuật ngữ "vật chất" được dùng để chỉ các thành phần có áp suất nhỏ hơn rất nhiều so với mật độ, $|P| \ll \rho$. Vật chất được chia thành baryon (proton và neutron, electron là lepton nhưng chúng có khối lượng rất nhỏ so với hạt nhân) và vật chất tối. Thay $P = 0$ vào (2.1.15), chúng ta tìm được nghiệm

$$\rho \propto a^{-3}. \tag{2.1.16}$$

Bức xạ: Trong trường hợp bức xạ, áp suất bằng khoảng một phần ba mật độ năng lượng, $P = \rho/3$. Photon không có khối lượng và được xếp vào "bức xạ". Neutrino hành xử như bức xạ trong phần lớn lịch sử của vũ trụ. Thay $P = \rho/3$ vào (2.1.15), chúng ta tìm được nghiệm

$$\rho \propto a^{-4}. \tag{2.1.17}$$

Năng lượng tối: Gần đây, chúng ta phát hiện ra rằng chỉ vật chất và bức xạ là không đủ để mô tả sự phát triển của vũ trụ. Ngày nay, vũ trụ bị thống trị bởi một loại chất lưu có áp suất âm, $P = -\rho$. Thay nó vào (2.1.15), chúng ta thấy rằng mật độ năng lượng là hằng số.

Ba trường hợp kể trên có thể được tổng quát hóa thông qua phương trình trạng thái

$$\omega = P/\rho. \tag{2.1.18}$$

với $\omega = 0, 1/3, -1$ lập lượt tương ứng với vật chất, bức xạ, năng lượng tối. Thay (2.1.18) vào (2.1.15), chúng ta thu được

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \tag{2.1.19}$$

Trong một vũ trụ phẳng $K = 0$, thay (2.1.19) vào (2.1.12), chúng ta thu được

$$H \propto a^{-\frac{3}{2}(1+\omega)}, \tag{2.1.20}$$

và nghiệm của nó là

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} & \omega \neq -1 \\ e^{Ht} & \omega = -1 \end{cases}. \tag{2.1.21}$$

Chúng ta đưa ra thêm khái niệm thời gian bảo giác τ, liên hệ với thời gian vật lý t như sau

$$\tau = \int_{t_i}^{t} \frac{dt'}{a}, \tag{2.1.22}$$

với t_i tương ứng với kỳ dị Big Bang. Theo đó, (2.1.21) có thể được viết lại như sau

$$a(\tau) = \begin{cases} \tau^{\frac{2}{1+3\omega}} & \omega \neq -1 \\ -\tau^{-1} & \omega = -1 \end{cases} . \tag{2.1.23}$$

Các kết quả trên có thể được tóm tắt qua bảng 2.1.

	ω	$\rho(a)$	$a(t)$	$a(\tau)$
Bức xạ	1/3	a^{-4}	$t^{1/2}$	τ
Vật chất	0	a^{-3}	$t^{2/3}$	t^2
Năng lượng tối	-1	a^0	e^{Ht}	$-\tau^{-1}$

Bảng 2.1: Nghiệm trong metric FLRW với vũ trụ phẳng bị thống trị bởi một loại chất lưu

2.2 Vấn đề chân trời và vấn đề độ phẳng

Đầu tiên, chúng ta sẽ tìm hiểu hai vấn đề lớn của vũ trụ học là vấn đề chân trời và vấn đề độ phẳng. Sau đó chúng ta sẽ giới thiệu khái niệm lạm phát vũ trụ và giải thích cách mà nó giải quyết hai vấn đề trên. Cuối cùng chúng ta sẽ giới thiệu mô hình lạm phát với trường vô hướng chính tắc và mô hình lạm phát trong lý thuyết Dirac-Born-Infeld.

2.2.1 Vấn đề chân trời

Vấn đề chân trời liên quan đến sự đồng nhất của vũ trụ và đã được đề cập lần đầu bởi Wolfgang Rindler vào năm 1956 [12]. Để hiểu về nó, chúng ta cần nghiên cứu sự lan truyền của photon trong không gian FLRW. Chúng ta có metric FLRW trong hệ tọa độ cầu

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \right], \tag{2.2.1}$$

Đặt $d\theta = d\phi = 0$ (tính đẳng hướng của metric FLRW) và $dr^2/(1 - Kr^2) = d\chi^2$, chúng ta viết lại metric FLRW dưới dạng thời gian bảo giác τ

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[-d\tau^2 + d\chi^2 \right]. \tag{2.2.2}$$

Photon di chuyển theo đường trắc địa $ds^2 = 0$, vậy nên

$$\Delta\chi(\tau) = \pm\Delta\tau. \tag{2.2.3}$$

Bây giờ, chúng ta sẽ định nghĩa khái niệm "chân trời hạt". Chân trời hạt tại một mốc thời gian nào đó là khoảng cách đồng chuyển động (comoving distance) mà photon di chuyển từ lúc vũ trụ khai sinh (Big Bang) đến thời điểm đó. Nói cách khác, nếu như khoảng cách đồng chuyển động giữa hai điểm trong vũ trụ lớn hơn chân trời hạt thì chúng chưa bao giờ tương tác với nhau. Giả sử $t_i = 0$ ứng với Big Bang, từ (2.2.3), chúng ta có công thức cho chân trời hạt

$$\chi_{ph}(\tau) = \tau - \tau_i = \int_{t_i}^{t} \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_i}^{a} \frac{da}{a\dot{a}} = \int_{a_i}^{a} (aH)^{-1} d\ln a. \tag{2.2.4}$$

với $a_i \equiv 0$ tương ứng với kỳ dị Big Bang và $(aH)^{-1}$ được gọi là bán kính Hubble. Với một vũ trụ bị thống trị bởi một loại chất lưu duy nhất với phương trình trạng thái $\omega = P/\rho$, chúng ta có

$$(aH)^{-1} = k\, a^{(1+3\omega)/2}, \tag{2.2.5}$$

với k là hằng số. Thay (2.2.5) vào (2.2.4), chúng ta có

$$\chi_{ph} = \frac{2k}{1+3\omega}\left[a^{(1+3\omega)/2} - a_i^{(1+3\omega)/2}\right] = \tau - \tau_i. \tag{2.2.6}$$

Chúng ta thấy rằng vật chất ($\omega = 0$) và bức xạ ($\omega = 1/3$) thỏa mãn điều kiện $1 + 3\omega > 0$, do đó

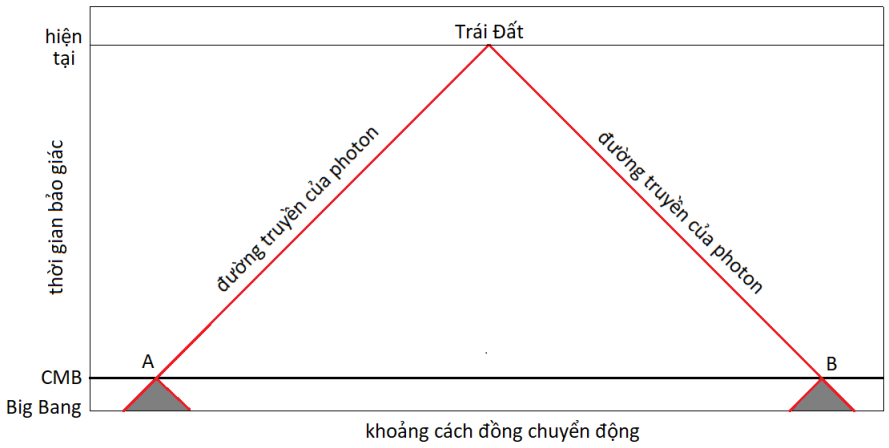
$$\tau_i = \frac{2k}{1+3\omega} a_i^{(1+3\omega)/2} \longrightarrow 0 \qquad \text{khi} \quad a_i \longrightarrow 0. \tag{2.2.7}$$

Khi đó (2.2.6) trở thành

$$\chi_{ph} = \frac{2k}{1+3\omega} a^{(1+3\omega)/2} = \frac{1}{1+3\omega}(aH)^{-1}. \tag{2.2.8}$$

Theo (2.2.8), dễ thấy rằng trong vũ trụ FLRW, chúng ta có thể dùng bán kính Hubble để ước tính chân trời hạt vì bán kính Hubble cũng dễ dàng tính toán từ các quan sát hơn.

Bức xạ phông nền vũ trụ (CMB) là bức xạ điện từ phát ra vào khoảng 380.000 năm sau Big Bang. Tại thời điểm đó, vũ trụ đã đủ lạnh để các proton và electron bắt cặp để hình thành các nguyên tử hydro đầu tiên và phát xạ ra photon ($e^- + p^+ \to H + \gamma$). Các quan sát chỉ ra rằng nhiệt độ của vũ trụ quan sát được gần như là như nhau. Tuy nhiên, kích thước của vũ trụ quan sát được lại lớn hơn rất nhiều so với bán kính Hubble. Điều này dẫn đến một nghịch lý là có những vùng của vũ trụ hoàn toàn không có tương tác với nhau nhưng lại có nhiệt độ như nhau. Đây chính là nội dung của vấn đề chân trời (xem hình 2.3).



Hình 2.3: Minh họa cho vấn đề chân trời: Hai điểm A và B thuộc bức xạ phông nền vũ trụ nằm đối xứng nhau qua Trái Đất. Nón ánh sáng quá khứ của chúng không giao nhau do bị chặn bởi kì dị Big Bang. Nói cách khác, chúng chưa từng tương tác với nhau. Điều này cũng áp dụng cho các cặp điểm khác trên bức xạ phông nền vũ trụ cách nhau nhiều hơn 1 độ. Tuy nhiên, các quan sát ở thời điểm hiện tại đều cho thấy bức xạ phông nền là gần như đồng nhất.

2.2.2 Vấn đề độ phẳng

Được đề cập lần đầu tiên bởi Robert Dicke vào năm 1969 [13], vấn đề độ phẳng liên quan đến độ cong của vũ trụ. Có ba kịch bản cho hình học của vũ trụ đồng nhất đẳng hướng: vũ trụ cầu ($K = 1$), vũ trụ hyperbolic ($K = -1$), và vũ trụ phẳng ($K = 0$). Theo phương trình trường Einstein, độ cong của vũ trụ phụ thuộc vào mật độ năng lượng bên trong nó. Nếu mật độ năng lượng ρ của vũ trụ lớn hơn mật độ tới hạn $\rho_{crit} = 8.5 \times 10^{-27}\text{kg/m}^3$ thì vũ trụ là vũ trụ cầu. Nếu $\rho < \rho_{crit}$, chúng ta có vũ trụ hyperbolic. Nếu $\rho = \rho_{crit}$, chúng ta có vũ trụ phẳng. Người ta đưa ra tham số $\Omega = \rho/\rho_{crit}$. Nếu $\Omega \neq 1$ tại một thời điểm nào đó thì càng ngày nó sẽ càng rời xa 1. Nhưng nếu Ω chính xác bằng 1, nó mãi mãi sẽ không thay đổi. Các quan sát hiện nay chỉ ra rằng Ω rất gần với 1, với mức độ không chắc chắn chỉ vài phần trăm. Điều đó có nghĩa là tại thời kỳ vũ trụ sơ khai, Ω phải vô cùng gần 1. Chúng ta không thể giải thích được tại sao Ω lại nhận một giá trị chính xác như thế. Nghịch lý này chính là vấn đề độ phẳng và chúng ta sẽ nghiên cứu nó kỹ hơn ngay sau đây.

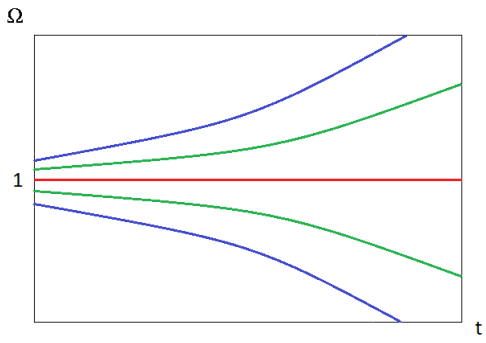
Từ phương trình (2.1.12), chia cả hai vế cho H^2, chúng ta có

$$1 = \frac{\rho}{3M_{pl}^2 H^2} - \frac{K}{a^2 H^2}. \tag{2.2.9}$$

Đặt $\rho_{crit} = 3M_{pl}^2 H^2$ và $\Omega = \rho/\rho_{crit}$, chúng ta thu được

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} a^2 \rho = \frac{3K}{8\pi G}. \tag{2.2.10}$$

Vế phải của phương trình này là hằng số theo theo thời gian. a luôn tăng trong khi ρ luôn giảm. Vì ρ giảm nhanh hơn so với a^2 tăng ($\rho \propto a^{-3}$ trong một vũ trụ thống trị bởi vật chất và $\rho \propto a^{-4}$ trong một vũ trụ bị thống trị bởi bức xạ), ρa^2 luôn giảm theo thời gian và vì thế $|(\Omega - 1)/\Omega|$ phải tăng. Điều đó có nghĩa là nếu Ω chính xác bằng 1, nó sẽ mãi mãi bằng 1. Ngược lại, nếu $\Omega \neq 1$, thì qua thời gian, nó sẽ dần bị dịch xa khỏi 1 (xem hình 2.4).



Hình 2.4: Sự thay đổi của Ω theo thời gian.

Các quan sát ngày nay chỉ ra rằng $|\Omega - 1| < 0.01$ [23, 24, 25, 26], có nghĩa rằng tại thời kỳ vũ trụ sơ khai, nó phải rất nhỏ, (nhỏ hơn 10^{-62} tại kỷ nguyên Planck). Dường như là không thể giải thích được tại sao Ω lại có giá trị ban đầu được tinh chỉnh một cách chính xác như vậy.

2.2.3 Giải pháp

Giải pháp nổi tiếng nhất cho hai vấn đề nêu trên là lạm phát vũ trụ. Chúng ta giả sử tại thời kỳ sơ khai, vũ trụ bị thống trị bởi một loại chất lưu đặc biệt với $\omega < 1/3$. Thay vào (2.2.7), chúng ta được

$$\tau_i = \frac{2k}{1+3\omega} a_i^{(1+3\omega)/2} \longrightarrow -\infty \qquad \text{khi} \quad a_i \longrightarrow 0 \tag{2.2.11}$$

Theo (2.2.4), chân trời hạt trong trường hợp này tiến tới ∞. Như vậy việc lấy bán kính Hubble để ước lượng chân trời hạt là không phù hợp. Chân trời hạt thực chất lớn hơn chúng ta nghĩ rất nhiều và như vậy các vùng khác nhau trong vũ trụ quan sát được thực chất đã có tương tác với nhau.

Chất lưu đặc biệt với $\omega < -1/3$ cũng giải quyết được vấn đề độ phẳng. Với $\omega < -1/3$, (2.1.19) trở thành

$$\rho \propto a^{\alpha} \qquad \text{với} \quad \alpha > -2. \tag{2.2.12}$$

Như vậy, đại lượng ρa^2 tăng thay vì giảm, và do đó Ω sẽ tiến tới 1. Nếu quá trình này diễn ra đủ lâu, Ω sẽ tiến tới rất gần 1 và phù hợp với các quan sát hiện nay.

Cho đến nay, chúng ta vẫn đang dùng phương trình trạng thái $\omega = P/\rho$ để định nghĩa lạm phát. Thục chất, lạm phát có thể được mô tả theo nhiều cách tương đương nhau.

• Sự gia tốc của hệ số tỉ lệ $a(t)$: Từ (2.1.21), chúng ta thấy rằng $\ddot{a} > 0$ với $\omega < -1/3$. Nếu $\omega < -1/3$ and $\omega \neq -1$, chúng ta có lạm phát theo hàm lũy thừa ($a(t)$ là lũy thừa của t). Nếu $\omega = -1$, chúng ta có lạm phát theo hàm mũ ($a(t)$ là hàm mũ của t).

• Sự thu nhỏ của bán kính Hubble: lấy đạo hàm theo thời gian của bán kính Hubble, ta được

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt}\dot{a}^{-1} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \tag{2.2.13}$$

Chúng ta thấy rằng sự gia tốc của $a(t)$ tương đương với sự co lại của bán kính Hubble

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0. \tag{2.2.14}$$

• Thông qua giá trị của tham số ε: Chúng ta định nghĩa tham số ε như sau

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \tag{2.2.15}$$

Chúng ta có thể viết

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + \dot{H}a}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1-\varepsilon). \tag{2.2.16}$$

Vì thế, sự co lại của bán kính Hubble tương đương với

$$\varepsilon < 1. \tag{2.2.17}$$

Chúng ta viết lại công thức cho ε như sau

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d\ln H}{dN}, \tag{2.2.18}$$

với

$$dN = d\ln a = H\,dt. \tag{2.2.19}$$

Ở đây, số e-fold N được dùng như thước đo quy mô của lạm phát. Như vậy, tham số ε đo sự thay đổi của tham số Hubble trên mỗi số e-fold. (2.2.17) là điều kiện để lạm phát xảy ra nhưng chỉ mình nó thì vẫn chưa đủ để giải quyết vấn đề chân trời và vấn đề độ phẳng. Chúng ta cần lạm phát diễn ra với quy mô đủ lớn ($N > 50$) ($\varepsilon < 1$ trong một khoảng thời gian đủ dài). Để đánh giá sự thay đổi của ε, chúng ta đưa vào tham số thứ hai để đo sự thay đổi của ε trên mỗi số e-fold như sau

$$\delta \equiv \frac{d\ \ln\varepsilon}{dN} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon H}. \tag{2.2.20}$$

Nếu $|\delta|$ càng nhỏ, ε nhỏ hơn 1 trong một khoảng thời gian càng dài.

Chúng ta quan tâm đến một trường hợp đặc biệt đó là lạm phát hoàn hảo hay lạm phát de Sitter với $\varepsilon = 0$ (hay $\dot{H} = 0$). Metric trong lạm phát hoàn hảo có dạng

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}d\mathbf{x}^2. \tag{2.2.21}$$

Tuy nhiên, rất khó để chúng ta có thể tìm ra một cơ chế thoát khỏi lạm phát de Sitter. Thay vào đó, lạm phát trong thực tế thường được biết đến như một thời kỳ mà vũ trụ giãn nở xấp xỉ với lạm phát hoàn hảo hay gần de Sitter.

2.3 Lạm phát cuộn chậm với trường vô hướng chính tắc

Đầu tiên, chúng ta xét một mô hình đơn giản, với Lagrangian của trường vô hướng ϕ có dạng

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi), \tag{2.3.1}$$

với $X \equiv -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ là động năng và $V(\phi)$ là thế năng. Lagrangian nói trên được gọi là Lagrangian của trường vô hướng chính tắc và chỉ phụ thuộc vào trường ϕ và đạo hàm bậc nhất của nó. Thay nó vào (2.1.6), chúng ta được

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi)\right]. \tag{2.3.2}$$

Vì chúng ta đang giả sử vũ trụ là đồng nhất, ϕ chỉ phụ thuộc vào thời gian, (2.3.2) trở thành

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right] + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi. \tag{2.3.3}$$

Từ đó chúng ta có thể tính ra các thành phần khác 0 của tensor năng xung lượng như sau

$$T^0{}_0 = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \tag{2.3.4}$$

$$T^1{}_1 = T^2{}_2 = T^3{}_3 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \tag{2.3.5}$$

So sánh với (2.1.10), chúng ta thu được

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \tag{2.3.6}$$

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \tag{2.3.7}$$

Các phương trình Friedmann (2.1.12) và (2.1.14) trở thành

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right), \tag{2.3.8}$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{pl}^2}\dot{\phi}^2. \tag{2.3.9}$$

Thay giá trị của ρ_ϕ và P_ϕ vào (2.1.15), chúng ta thu được phương trình Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0, \tag{2.3.10}$$

với $V' \equiv dV/d\phi$.

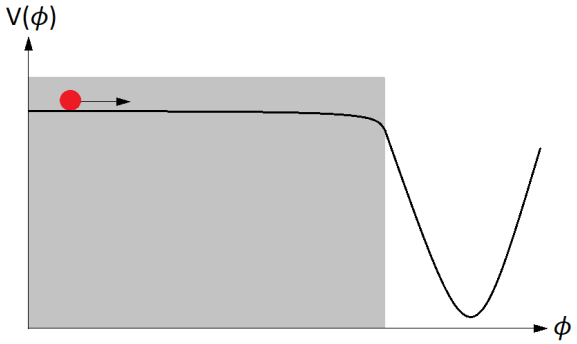
Theo (2.3.9), chúng ta thấy rằng nếu động năng ($X \equiv \dot{\phi}^2/2$) bằng 0 thì H là hằng số theo thời gian và chúng ta có lạm phát hoàn hảo. Tuy nhiên, chúng ta biết rằng lạm phát hoàn hảo không có cơ chế thoát khỏi lạm phát. Thay vào đó, nếu chúng ta giả sử X rất nhỏ so với V nhưng vẫn khác 0 thì H vẫn sẽ gần như là hằng số theo thời gian và chúng ta có xấp xỉ của lạm phát hoàn hảo gọi là lạm phát cuộn chậm. Không giống như lạm phát hoàn hảo, lạm phát cuộn chậm có cơ chế để kết thúc lạm phát. Điều này được thể hiện qua hình 2.5.

Thay (2.3.9) vào định nghĩa của ε ở (2.2.15) và định nghĩa của δ ở (2.2.20), ta có

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2 H^2}, \tag{2.3.11}$$

và

$$\delta = \frac{\dot{\varepsilon}}{H\varepsilon} = 2\left(\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - \frac{\dot{H}}{H^2}\right) = 2(\varepsilon - \eta), \tag{2.3.12}$$



Hình 2.5: Minh họa cho lạm phát cuộn chậm: trường vô hướng ϕ lăn chậm trên một phần gần như phẳng của thế năng. Lạm phát xảy ra ở vùng được tô đậm.

với

$$\eta \equiv -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi}). \tag{2.3.13}$$

Trong lạm phát cuộn chậm, hai tham số ε và δ cần phải rất nhỏ ($\{\varepsilon, |\delta|\} \ll 1$). Từ (2.3.12), chúng ta thấy rằng nó tương đương với điều kiện $\{\varepsilon, |\eta|\} \ll 1$. Điều kiện $\varepsilon \ll 1$ khiến (2.3.8) trở thành

$$H^2 \approx \frac{1}{3M_{pl}^2} V, \tag{2.3.14}$$

và điều kiện $|\eta| \ll 1$ khiến phương trình Klein-Gordon trở thành

$$3H\dot{\phi} \approx -V'. \tag{2.3.15}$$

Thay (2.3.14) và (2.3.15) vào (2.3.11), chúng ta được

$$\varepsilon \approx \frac{M_{pl}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2. \tag{2.3.16}$$

Hơn nữa, lấy đạo hàm theo thời gian của (2.3.15) và sử dụng (2.3.14), chúng ta thu được

$$\eta + \varepsilon = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - \frac{\dot{H}}{H^2} \approx M_{pl}^2 \frac{V''}{V}. \tag{2.3.17}$$

Do vậy, một cách thuận tiện để đánh giá liệu một hàm thế năng $V(\phi)$ có dẫn tới lạm phát cuộn chậm hay không là tính toán các tham số cuộn chậm thế năng được định nghĩa như sau

$$\boxed{\epsilon_V \equiv \frac{M_{pl}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2, \qquad |\eta_V| \equiv \frac{|V''|}{V}.} \tag{2.3.18}$$

Theo đó, lạm phát xảy ra khi $\{\epsilon_V, |\eta_V|\} \ll 1$.

2.4 Lạm phát với trường vô hướng không chính tắc

Như đã trình bày ở trên, Lagrangian trong lạm phát cuộn chậm có dạng $\mathcal{L}_{sr} = X - V(\phi)$ với $X \equiv -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$. Tuy nhiên, các mô hình lạm phát với trường vô hướng không chính tắc gọi là lạm phát k (k-inflation) đã được nghiên cứu bởi Mukhanov và Garriga [11]. Các mô hình lạm phát không chính tắc có nhiều tính chất khác biệt so với mô hình chính tắc có thể quan sát được. Trong lạm phát với trường vô hướng chính tắc, các nhiễu loạn vô hướng lan truyền với vận tốc ánh sáng, trong khi ở mô hình không chính tắc, vận tốc này được gọi là vận tốc âm thanh và nhìn chung là nhỏ so với vận tốc ánh sáng. Hơn nữa, các mô hình lạm phát không chính tắc còn tiên đoán sự sai lệch so với phân bố chuẩn của các nhiễu loạn nguyên thủy - một tính chất mà lạm phát chính tắc không có. Hàm tác dụng cho lạm phát không chính tắc có dạng tổng quát như sau

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{pl}^2}{2}R + P(X,\phi)\right], \tag{2.4.1}$$

với $P(X,\phi)$ là một hàm của X và ϕ. Hàm tác dụng (2.4.1) sẽ quay về dạng chính tắc nếu $P(X,\phi) = X - V(\phi)$. Ở đây, $P(X,\phi)$ đóng vai trò như áp suất của chất lưu vũ trụ. Mật độ của chất lưu được cho bởi

$$\rho = 2X\partial_X P - P \tag{2.4.2}$$

Chúng ta đưa vào khái niệm vận tốc âm thanh c_s đặc trưng cho vận tốc lan truyền của nhiễu loạn vô hướng với công thức

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{\rho + P}{2X\partial_X\rho}. \tag{2.4.3}$$

Chúng ta tập trung vào một trường hợp đặc biệt của (2.4.1), đó là hàm tác dụng Dirac-Born-Infeld (DBI), trong đó [21]

$$P(X,\phi) = \frac{1}{f(\phi)}\frac{\gamma - 1}{\gamma} - V(\phi), \tag{2.4.4}$$

với $f(\phi)$ được gọi là hệ số cuộn và γ được định nghĩa như sau

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + f(\phi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}}, \tag{2.4.5}$$

Trong trường hợp $f(\phi) \to 0$, hàm tác dụng DBI sẽ quay về trường hợp chính tắc. Sử dụng phương pháp tác dụng tối thiểu và metric FLRW, chúng ta thu được các phương

trình Friedmann như sau

$$H^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\dot{\phi}^2 + V\right], \tag{2.4.6}$$

$$\dot{H} = -\frac{\gamma}{2}\dot{\phi}^2. \tag{2.4.7}$$

Tương tự, phương trình chuyển động cho trường vô hướng ϕ là

$$\ddot{\phi} + \frac{3H}{\gamma^2}\dot{\phi} + \frac{V'}{\gamma^3} + \frac{f'}{2f}\frac{(\gamma+2)(\gamma-1)}{(\gamma+1)\gamma}\dot{\phi}^2 = 0. \tag{2.4.8}$$

Vận tốc âm thanh c_s được cho bởi

$$c_s = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \frac{1}{\gamma}. \tag{2.4.9}$$

Chương 3

Lý thuyết nhiễu loạn vũ trụ

Cho đến nay, chúng ta vẫn đang giả sử vũ trụ là đồng nhất. Trong chương này, chúng ta sẽ về sự không đồng nhất của vũ trụ thông qua lý thuyết nhiễu loạn vũ trụ. Các lập luận và tính toán trong chương này tham khảo từ tài liệu [10]. Phương trình trường Einstein cho chúng ta biết rằng vật chất tác động đến hình học của không thời gian. Vì thế, chúng ta cần phải nghiên cứu nhiễu loạn của cả tensor metric và của vật chất. Chúng ta viết tensor metric và tensor năng xung lượng nhiễu loạn như sau

$$g_{\mu\nu}(\tau, \mathbf{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(\tau) + \delta g(\tau, \mathbf{x}), \tag{3.0.1}$$

$$T_{\mu\nu}(\tau, \mathbf{x}) = \bar{T}_{\mu\nu}(\tau) + \delta T(\tau, \mathbf{x}), \tag{3.0.2}$$

với $\bar{g}_{\mu\nu}(\tau)$ và $\bar{T}_{\mu\nu}(\tau)$ lần lượt là metric nền và tensor năng xung lượng nền, $\delta g(\tau, \mathbf{x})$ và $\delta T(\tau, \mathbf{x})$ lần lượt là thành phần nhiễu loạn của tensor metric và tensor năng xung lượng. Chúng ta giả sử $\delta g(\tau, \mathbf{x}) \ll \bar{g}_{\mu\nu}(\tau)$ và $\delta T(\tau, \mathbf{x}) \ll \bar{T}_{\mu\nu}(\tau)$.

3.1 Nhiễu loạn metric

Metric FLRW nhiễu loạn có thể được viết như sau

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2A)d\tau^2 + 2B_i dx^i d\tau + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i\, dx^j\right], \tag{3.1.1}$$

với A, B_i và h_{ij} rất nhỏ. Chúng ta cũng có thể viết

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -(1+2A) & B_i \\ B_i & \delta_{ij} + h_{ij} \end{pmatrix}. \tag{3.1.2}$$

Để thỏa mãn điều kiện $g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$, metric nhiễu loạn với chỉ số trên $g^{\mu\nu}$ phải có dạng

$$g^{\mu\nu} = a^{-2} \begin{pmatrix} -(1-2A) & B^i \\ B^i & \delta^{ij} - h^{ij} \end{pmatrix}. \tag{3.1.3}$$

Ở đây B^i và h^{ij} được nâng và hạ chỉ số bằng hàm Kronecker delta thay vì bằng tensor metric.

Các nhiễu loạn metric có thể được phân tích dưới dạng vô hướng-vector-tensor như sau

$$A = A, \tag{3.1.4}$$

$$B_i = \partial_i B + \hat{B}_i, \tag{3.1.5}$$

$$h_{ij} = 2C\delta_{ij} + 2\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\nabla^2\right)E + \left(\partial_i\hat{E}_j + \partial_j\hat{E}_i\right) + 2\hat{E}_{ij}, \tag{3.1.6}$$

với $\hat{B}_i$, $\hat{E}_i$ và $\hat{E}_{ij}$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$\partial^i\hat{B}_i = \partial^i\hat{E}_i = 0, \tag{3.1.7}$$

$$\partial^i\hat{E}_{ij} = \delta^{ij}\hat{E}_{ij} = 0. \tag{3.1.8}$$

Do tính đối xứng, nhiễu loạn metric $\delta g_{\mu\nu}$ có 10 bậc tự do và do đó dạng vô hướng-vector-tensor của nó cũng phải có số bậc tự do như thế. Thật vậy, các vô hướng A, B, C và E có tổng cộng 4 bậc tự do, các vector $\hat{B}_i$ và $\hat{E}_i$ có tổng cộng 4 bậc tự do và tensor $\hat{E}_{ij}$ có 2 bậc tự do vì điều kiện (3.1.7) và (3.1.8).

Một vấn đề với lý thuyết nhiễu loạn vũ trụ là việc chọn hệ tọa độ hay chọn chuẩn. Việc viết ra tensor metric đồng nghĩa với việc chuẩn tọa độ đã được xác định. Vấn đề là ngay cả khi vũ trụ là tuyệt đối đồng nhất, các nhiễu loạn giả có thể được tạo ra nếu như chúng ta chọn chuẩn tọa độ không phù hợp. Ngược lại, các nhiễu loạn thật sự có thể bị bỏ qua bằng cách chọn một chuẩn tọa độ nào đó. Chúng ta có thể giải quyết vấn đề này bằng cách đưa vào các bất biến chuẩn (gauge-invariances) - các đại lượng không thay đổi dưới phép biến đổi chuẩn. Chúng ta xét phép biến đổi chuẩn như sau.

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(\tau, \mathbf{x}), \tag{3.1.9}$$

với ξ^μ rất nhỏ. Chúng ta có thể viết $\xi^\mu = (T, L^i)$ trong đó $\xi^0 \equiv T$ và $\xi^i \equiv L^i$. Tiếp theo, L_i có thể được phân tích thành

$$L^i = \partial^i L + \hat{L}^i, \tag{3.1.10}$$

với $\hat{L}^i$ thỏa mãn điều kiện $\partial_i\hat{L}^i = 0$.

Trong hệ tọa độ mới $\tilde{x}^\mu$, chúng ta kí hiệu tensor metric là $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Ta có

$$g_{\mu\nu} = \frac{d\tilde{x}^\alpha}{dx^\mu}\frac{d\tilde{x}^\beta}{dx^\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}. \tag{3.1.11}$$

Từ (3.1.11), chúng ta có thể dẫn ra các công thức biến đổi sau

$$\tilde{A} = A - T' - \mathcal{H}T, \tag{3.1.12}$$
$$\tilde{B} = B + T - L', \tag{3.1.13}$$
$$\tilde{C} = C - \mathcal{H}T - \frac{1}{3}\nabla^2 L, \tag{3.1.14}$$
$$\tilde{E} = E - L, \tag{3.1.15}$$
$$\tilde{\hat{B}}_i = \hat{B}_i - \hat{L}_i', \tag{3.1.16}$$
$$\tilde{\hat{E}}_i = \hat{E}_i - \hat{L}_i, \tag{3.1.17}$$
$$\tilde{\hat{E}}_{ij} = \hat{E}_{ij}. \tag{3.1.18}$$

Từ các công thức biến đổi nêu trên, chúng ta có thể xây dựng nên các bất biến chuẩn. Trong số đó, bốn bất biến chuẩn đơn giản và hữu dụng là

$$\Psi \equiv A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E')', \tag{3.1.19}$$
$$\Phi \equiv -C - \mathcal{H}(B - E') + \frac{1}{3}\nabla^2 E, \tag{3.1.20}$$
$$\hat{\Phi} \equiv \hat{E}_i' - \hat{B}_i, \tag{3.1.21}$$
$$\hat{E}_{ij} \tag{3.1.22}$$

Các phép bất biến chuẩn được coi là các nhiễu loạn thực sự bởi chúng không thể bị loại bỏ bởi các phép biến đổi chuẩn.

Chúng ta sẽ không quan tâm tới các nhiễu loạn vector bởi chúng không được sinh ra trong quá trình lạm phát. Ngay cả khi có các nhiễu loạn vector, chúng sẽ phân rã theo tỉ lệ a^{-2}. Các nhiễu loạn tensor liên quan đến sóng hấp dẫn và nằm ngoài phạm vi nghiên cứu của luận văn. Nếu chỉ xét các nhiễu loạn vô hướng, metric nhiễu loạn sẽ có dạng

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2A)d\tau^2 + 2\partial_i B\, dx^i d\tau + \left[(1+2C)\delta_{ij} + 2\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)E\right]dx^i dx^j\right]. \tag{3.1.23}$$

Một phương pháp khác cho vấn đề chọn hệ tọa độ là xác định trước một chuẩn tọa độ đặc biệt nào đó. Do sự tự do trong việc chọn T và L, chúng ta có thể đặt 2 trong 4 nhiễu loạn vô hướng bằng 0. Trong luận văn này, chúng ta sẽ quan tâm đến 2 chuẩn tọa độ sau

- Chuẩn Newton: $B = E = 0$. Chúng ta có metric trong chuẩn Newton như sau

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+\Psi)d\tau^2 + (1-2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j\right], \tag{3.1.24}$$

với $A \equiv \Psi$ và $C = -\Phi$.

• Chuẩn không gian phẳng: $C = E = 0$. Chuẩn tọa độ này tiện lợi cho việc tính các nhiễu loạn trong pha lạm phát.

3.2 Nhiễu loạn tensor năng xung lượng

Chúng ta có công thức cho tensor năng xung lượng nền như sau

$$\bar{T}^{\mu}_{\ \nu} = (\bar{\rho} + \bar{P})\bar{U}^{\mu}\bar{U}_{\nu} + \bar{P}\delta^{\mu}_{\nu}. \tag{3.2.1}$$

Từ đó, cúng ta có công thức cho nhiễu loạn của tensor năng xung lượng

$$\delta\bar{T}^{\mu}_{\ \nu} = (\delta\rho + \delta P)\bar{U}^{\mu}\bar{U}_{\nu} + (\bar{\rho} + \bar{P})(\delta U^{\mu}\bar{U}_{\nu} + \bar{U}^{\mu}\delta U_{\nu}) + \delta P\delta^{\mu}_{\nu} + \Pi^{\mu}_{\nu}, \tag{3.2.2}$$

với Π^{μ}_{ν} là đóng góp từ ứng suất bất đẳng hướng. Thành phần không gian của ứng suất bất đẳng hướng có thể được chọn để có vết bằng 0 ($\Pi^{i}_{i} = 0$) vì nó luôn có thể được gộp vào phần nhiễu loạn của P. Ứng suất bất đẳng hướng cũng có thể được chọn để trực giao với U^{μ}, ($U^{\mu}\Pi_{\mu\nu} = 0$). Do vậy, không mất tính tổng quát, chúng ta có thể đặt $\Pi^{0}_{0} = \Pi^{0}_{i} = 0$.

Chúng ta có $\bar{U}^{\mu} = a^{-1}(1, \mathbf{0})$ và $g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = -1$, nên

$$\delta U^{0} - a^{-1}A. \tag{3.2.3}$$

Do đó, chúng ta có thể viết U^{μ} như sau

$$U^{\mu} = a^{-1}[1 - A, v^{i}], \tag{3.2.4}$$

với $v^{i} = a\delta U^{i}$. Vì chúng ta chỉ đang xét nhiễu loạn vô hướng, chúng ta có thể viết $v^{i} = \partial^{i}v$, với v là một vô hướng.

Bằng cách hạ chỉ số, chúng ta thu được

$$U_{\mu} = a[-(1 + A), \partial_{i}(v + B)]. \tag{3.2.5}$$

Thay (3.2.4) và (3.2.5) vào (3.2.2), chúng ta thu được

$$\delta T^{0}_{\ 0} = -\delta\rho, \tag{3.2.6}$$
$$\delta T^{i}_{\ 0} = -(\bar{\rho} + \bar{P})\partial^{i}v = -\partial^{i}q, \tag{3.2.7}$$
$$\delta T^{0}_{\ j} = (\bar{\rho} + \bar{P})(v_{j} + B_{j}), \tag{3.2.8}$$
$$\delta T^{i}_{\ j} = \delta P\delta^{i}_{j} + \Pi^{i}_{j}, \tag{3.2.9}$$

với $q^i \equiv (\bar{\rho} + \bar{P})v^i$ là mật độ xung lượng.

Trong một vũ trụ gồm nhiều thành phần, tensor năng xung lượng tổng bằng tổng của tensor năng xung lượng các thành phần. Từ đó, ta có

$$\delta\rho = \sum_I \delta\rho_I, \qquad \delta P = \sum_I \delta P_I, \qquad \delta q = \sum_I \delta q_I, \qquad \delta\Pi = \sum_I \delta\Pi_I, \qquad , \quad (3.2.10)$$

với I là chỉ số của các thành phần chất lưu trong vũ trụ.

Dưới phép biến đổi tọa độ, tensor năng xung lượng biến đổi như sau

$$T^\mu_{\ \nu} = \frac{dx^\mu}{d\tilde{x}^\alpha}\frac{dx^\nu}{d\tilde{x}^\beta}\tilde{T}^\alpha_{\ \beta}. \quad (3.2.11)$$

Từ đó, chúng ta có thể dẫn ra các biến đổi sau

$$\delta\tilde{\rho} = \delta\rho - T\bar{\rho}', \quad (3.2.12)$$
$$\delta\tilde{P} = \delta P - T\bar{P}', \quad (3.2.13)$$
$$\tilde{v} = v + L', \quad (3.2.14)$$
$$\tilde{\Pi}_{ij} = \Pi_{ij}. \quad (3.2.15)$$

Với các nhiễu loạn trong tensor năng xung lượng, chúng ta có 2 chuẩn tọa độ phổ biến

• Chuẩn tọa độ mật độ đồng nhất: $\delta\rho = B = 0$, với mật độ năng lượng là đồng nhất trên mỗi siêu bề mặt với cùng tọa độ thời gian

• Chuẩn tọa độ đồng chuyển động: $q = B = 0$.

Các mô hình lạm phát đơn giản tiên đoán các nhiễu loạn ban đầu là đoạn nhiệt. Trong nhiễu loạn đoạn nhiệt, trạng thái của vật chất (mật độ ρ và áp suất P) tại điểm $(\tau, \mathbf{x})$ bằng với trạng thái nền của vũ trụ tại thời điểm $\tau + \delta\tau(\mathbf{x})$. Cụ thể, với mật độ ρ, ta có

$$\delta\rho_I(\tau, \mathbf{x}) = \bar{\rho}_I(\tau + \delta\tau(\mathbf{x})) - \bar{\rho}_I(\tau) = \bar{\rho}'_I\delta\tau(\mathbf{x}), \quad (3.2.16)$$

với $\delta\tau$ là như nhau với mỗi loại chất lưu I. Như vậy

$$\delta\tau = \frac{\delta\rho_I}{\bar{\rho}'_I} = \frac{\delta\rho_J}{\bar{\rho}'_J}. \quad (3.2.17)$$

Sử dụng phương trình liên tục với mỗi loại chất lưu $\bar{\rho}'_I = -3\mathcal{H}(1 + \omega_I)\bar{\rho}_I$, chúng ta có thể viết

$$\frac{\delta_I}{1 + \omega_I} = \frac{\delta_J}{1 + \omega_J}, \quad (3.2.18)$$

với δ_I được định nghĩa như sau

$$\delta_I \equiv \frac{\delta\rho_I}{\bar{\rho}_I}. \tag{3.2.19}$$

Với vật chất, $\omega_m \approx 0$ và với bức xạ $\omega_r = 1/3$. Như vậy

$$\delta_r = \frac{4}{3}\delta_m \tag{3.2.20}$$

Chúng ta có nhiễu loạn mật độ tổng $\delta\rho_{\rm tot}$ được cho bởi

$$\delta\rho_{\rm tot} = \sum_I \bar{\rho}_I \delta_I. \tag{3.2.21}$$

Do δ_I của các loại chất lưu khác nhau không chênh lệch nhiều, $\delta\rho_{\rm tot}$ bị thống trị bởi thành phần chất lưu có $\bar{\rho}_I$ chiếm ưu thế hơn.

3.3 Các phương trình nhiễu loạn

Từ chuẩn Newton, chúng ta tính các phương trình Einstein nhiễu loạn. Đầu tiên, chúng ta có các ký hiệu Christoffel

$$\Gamma^0_{00} = \mathcal{H} + \Psi', \tag{3.3.1}$$
$$\Gamma^0_{0i} = \partial_i\Psi, \tag{3.3.2}$$
$$\Gamma^i_{00} = \delta^{ij}\partial_j\Psi, \tag{3.3.3}$$
$$\Gamma^0_{ij} = [\mathcal{H} - \Phi' + 2\mathcal{H}(\Phi + \Psi)]\delta_{ij}, \tag{3.3.4}$$
$$\Gamma^i_{j0} = \mathcal{H}\delta^i_j - \Phi'\delta^i_j, \tag{3.3.5}$$
$$\Gamma^i_{jk} = -2\delta^i_{(j}\partial_{k)}\Phi + \delta_{jk}\delta^{il}\partial_l\Phi. \tag{3.3.6}$$

với $\delta^i_{(j}\partial_{k)}\Phi = \frac{1}{2}(\delta^i_j\partial_k\Phi + \delta^i_k\partial_j\Phi)$.

Từ sự bảo toàn tensor năng xung lượng $\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\alpha}T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}T^\mu_\alpha = 0$ với $\nu = 0$, ta có phương trình liên tục bậc 0 và bậc 1

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{\rho}' = -3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{P}), &(3.3.7)\\ &\delta' + (1+\omega)(\nabla\cdot\mathbf{v} - 3\Phi') + 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega)\delta = 0. &(3.3.8)\end{aligned}}$$

với $\delta \equiv \delta\rho/\bar{\rho}$.

Từ sự bảo toàn tensor năng xung lượng $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ với $\nu = i$, ta có phương trình Euler

$$\boxed{\mathbf{v}' + \mathcal{H}\left(1 - 3\frac{\bar{P}'}{\bar{\rho}'}\right)\mathbf{v} = -\frac{c_s^2}{1+\omega}\nabla\delta - \nabla\Psi.} \tag{3.3.9}$$

Tiếp đến, chúng ta chuyển đến phương trình trường Einstein. Sử dụng các công thức cho tensor Ricci, vô hướng Ricci và tensor Einstein, chúng ta có

$$G_{00} = 3\mathcal{H}^2 + 2\nabla^2\Phi - 6\mathcal{H}\Phi', \tag{3.3.10}$$
$$G_{0i} = 2\partial_i(\Phi' + \mathcal{H}\Psi), \tag{3.3.11}$$
$$\begin{aligned} G_{ij} &= -(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\Phi - \Psi) \\ &\quad + [\nabla^2(\Psi - \Phi) + 2\Phi'' + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)(\Phi + \Psi) + 2\mathcal{H}\Psi' + 4\mathcal{H}\Phi']\delta_{ij} \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Chúng ta xét thành phần ij của phương trình trường Einstein. Từ (3.2.9) và (3.3.12), chúng ta có

$$\partial_i\partial_j(\Psi - \Phi) = 8\pi G\Pi_{ij}, \qquad (i \neq j) \tag{3.3.13}$$

Vậy nếu không có ứng suất bất đẳng hướng ($\Pi_{ij} = 0$), thì $\Phi = \Psi$. Do đó, từ các phương trình (3.2.6-3.2.9) và (3.3.10-3.3.12), ta có các phương trình trường Einstein bậc 0 và 1 như sau

- Bậc 0

$$\boxed{\begin{aligned} 3\mathcal{H}^2 &= 8\pi G a^2\bar{\rho}, \\ 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 &= -8\pi G a^2\bar{P}, \end{aligned}} \tag{3.3.14}$$
$$\tag{3.3.15}$$

- Bậc 1

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) &= 4\pi G a^2\delta\rho, \\ \Phi' + \mathcal{H}\Phi &= -4\pi G a^2 q, \\ \Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi &= 4\pi G a^2\delta P. \end{aligned}} \tag{3.3.16}$$
$$\tag{3.3.17}$$
$$\tag{3.3.18}$$

Từ (3.3.16), (3.3.17) và (3.3.7), chúng ta thu được phương trình Poisson

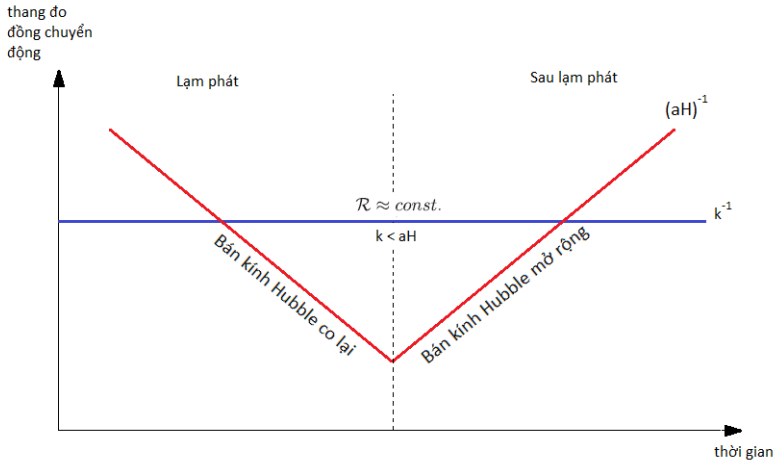
$$\boxed{\nabla^2\Phi = 4\pi G a^2\bar{\rho}\Delta,} \tag{3.3.19}$$

với Δ là một bất biến chuẩn và được định nghĩa như sau

$$\Delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}(v + B). \tag{3.3.20}$$

Ở đây $B = 0$ do chúng ta đang xét trong chuẩn Newton.

3.4 Nhiễu loạn độ cong



Hình 3.1: Trong quá trình lạm phát, bán kính Hubble co lại khiến nó nhỏ hơn thang đo đồng chuyển động k^{-1}. Phổ nhiễu loạn của $\mathcal{R}$ ứng với số sóng k không đổi theo thời gian ở giai đoạn này. Vậy nên tính toán nhiễu loạn của $\mathcal{R}$ tại thời điểm bán kính Hubble giao với k^{-1} (horizon crossing) có thể liên hệ với quan sát sau này.

Trong một chuẩn tọa độ bất kỳ, chúng ta muốn tính độ cong của siêu bề mặt (hypersurface) mà tại đó thời gian là hằng số. Metric γ_{ij} của siêu bề mặt là phần không gian của metric (3.1.23)

$$\gamma_{ij} \equiv a^2 \left[(1+2C)\delta_{ij} + 2\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\nabla^2\right) E \right]. \tag{3.4.1}$$

Từ đó, chúng ta có thể tính ra vô hướng Ricci 3 chiều

$$a^2 R^{(3)} = -4\nabla^2 \left(C - \frac{1}{3}\nabla^2 E \right). \tag{3.4.2}$$

Chúng ta định nghĩa nhiễu loạn độ cong đồng chuyển động $\mathcal{R}$ như sau

$$\mathcal{R} \equiv C - \frac{1}{3}\nabla^2 E + \mathcal{H}(B+v). \tag{3.4.3}$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng trên thang đo rất lớn và với nhiễu loạn đoạn nhiệt, $\mathcal{R}$ là bảo toàn. Vì $\mathcal{R}$ là một bất biến chuẩn, chúng ta có thể chọn một chuẩn tọa độ tùy ý để tính toán. Ở đây, chúng ta sẽ chọn chuẩn Newton. Khi đó

$$\mathcal{R} = -\Phi + \mathcal{H}v, \tag{3.4.4}$$

vì $B = E = 0$ và $C \equiv -\Phi$. Sử dụng phương trình (3.3.17), chúng ta sẽ viết lại công thức cho $\mathcal{R}$ như sau

$$\mathcal{R} = -\Phi - \frac{\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi)}{4\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{P})}. \tag{3.4.5}$$

Lấy đạo hàm theo thời gian và sử dụng các phương trình nhiễu loạn từ phần trước, chúng ta tìm được

$$-4\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{P})\mathcal{R}' = 4\pi G a^2 \mathcal{H}\delta P_{nad} + \mathcal{H}\frac{\bar{P}'}{\bar{\rho}'}\nabla^2\Phi, \tag{3.4.6}$$

với nhiễu loạn áp suất không đoạn nhiệt P_{nad} được định nghĩa như sau

$$\delta P_{nad} \equiv \delta P - \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho}'}\delta\rho. \tag{3.4.7}$$

Nhiễu loạn áp suất không đoạn nhiệt bằng 0 với chất lưu có áp suất là một hàm chỉ của mật độ ($P = P(\rho)$) (hoặc tổng quát hơn là với nhiễu loạn đoạn nhiệt với hỗn hợp các chất lưu như thế). Trong trường hợp này, vế phải của (3.4.6) sẽ tỉ lệ với $\mathcal{H}k^2\Phi \sim \mathcal{H}k^2\mathcal{R}$. Do đó

$$\frac{d\ln\mathcal{R}}{d\ln a} \sim \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2. \tag{3.4.8}$$

Như vậy, $\mathcal{R}$ không thay đổi ở bên ngoài bán kính Hubble ($k \ll \mathcal{H} = aH$). Giả sử ban đầu, tất cả các mode nhiễu loạn đều ở bên trong bán kính Hubble. Trong quá trình lạm phát, bán kính Hubble co lại, đến khi nó nhỏ hơn thang đo đồng chuyển động k^{-1}. Phổ nhiễu loạn của $\mathcal{R}$ ứng với số sóng k không đổi theo thời gian ở giai đoạn này. Vậy nên tính toán nhiễu loạn của $\mathcal{R}$ tại thời điểm bán kính Hubble giao với k^{-1} (horizon crossing) có thể liên hệ với quan sát sau này. Điều này được minh họa bởi hình 3.1.

3.5 Phương trình Mukhanov-Sasaki

Một trong những thành công của lý thuyết lạm phát là nó cung cấp một cơ chế để giải thích cho các cấu trúc vĩ mô trong vũ trụ. Quá trình lạm phát được điều khiển bởi sự biến đổi của trường inflaton $\phi(t)$. Theo nguyên lý bất định, trường lạm phát sẽ có các nhiễu loạn $\delta\phi(t, \mathbf{x}) \equiv \phi(t, \mathbf{x}) - \bar{\phi}(t)$. Do vậy, thời gian kết thúc lạm phát sẽ chênh lệch một khoảng $\delta(t)(\mathbf{x})$ tại các vùng khác nhau. Sự chênh lệch này dẫn đến sự chênh lệch về mật độ $\delta\rho(t, \mathbf{x})$ sau lạm phát và sự chênh lệch về nhiệt độ $\delta T(\mathbf{x})$ của bức xạ phông nền vũ trụ.

Chúng ta nhắc lại hàm tác dụng của trường vô hướng chính tắc

$$S = \int d\tau d^3\mathbf{x}\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right]. \tag{3.5.1}$$

Với metric FLRW không nhiễu loạn, chúng ta có

$$S = \int d\tau d^3\mathbf{x}\left[\frac{1}{2}a^2((\phi')^2 - (\nabla\phi)^2) - a^4V(\phi)\right]. \tag{3.5.2}$$

Xét nhiễu loạn nhỏ trên trường vô hướng ϕ

$$\phi(\tau,\mathbf{x}) = \bar{\phi}(\tau) + \frac{f(\tau,\mathbf{x})}{a(\tau)}, \tag{3.5.3}$$

ở đây chúng ta đã đặt $\delta\phi(\tau,\mathbf{x}) \equiv f(\tau,\mathbf{x})/a(\tau)$.

Để thu được phương trình chuyển động cho $f(\tau,\mathbf{x})$, chúng ta khai triển (3.5.1) lên nhiễu loạn bậc 2 như sau $S = \bar{S} + S^{(1)} + S^{(2)} + ...$ Nhiễu loạn bậc nhất của S là

$$S^{(1)} = \int d\tau d^3\mathbf{x}\left[a\bar{\phi}'f' - a'\bar{\phi}'f - a^3V'(\bar{\phi})f\right]. \tag{3.5.4}$$

Lấy tích phân từng phần và bỏ đi số hạng biên, chúng ta thu được

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= -\int d\tau d^3\mathbf{x}\left[\left(a\bar{\phi}'\right)' + \bar{\phi}'a' + a^3V'(\bar{\phi})\right]f \\ &= -\int d\tau d^3\mathbf{x}a\left[\bar{\phi}'' + 2\mathcal{H}\bar{\phi}' + a^2V'(\bar{\phi})\right]f. \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Phần trong ngoặc vuông của tích phân trên trùng với phương trình chuyển động nền nên bậc 1 của hàm tác dụng nhiễu loạn bằng 0. Hàm tác dụng nhiễu loạn bậc 2 có dạng

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\left[(f')^2 - (\nabla f)^2 + (\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 - a^2V''(\bar{\phi}))f^2\right] \tag{3.5.6}$$

$$= \frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\left[(f')^2 - (\nabla f)^2 + \left(\frac{a''}{a} - a^2V''(\bar{\phi})\right)f^2\right]. \tag{3.5.7}$$

Với lạm phát cuộn chậm, chúng ta có $H^2 \approx \frac{1}{3M_{pl}^2}V$, vậy nên

$$\frac{V''(\bar{\phi})}{H^2} \approx 3M_{pl}^2\frac{V''(\bar{\phi})}{V(\bar{\phi})} = 3\eta_V, \tag{3.5.8}$$

với η_V đã được định nghĩa. Vì $|\eta_V| \ll 1$, ta có

$$V''(\bar{\phi}) \ll H \tag{3.5.9}$$

Cũng trong lạm phát cuộn chậm, ta có

$$\dot{H} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{a''}{a} - 2a^2H^2\right) \approx 0 \qquad \Rightarrow \frac{a''}{a} \approx 2a^2H^2 \gg a^2V''(\bar{\phi}) \tag{3.5.10}$$

Từ đó, nhiễu loạn bậc 2 của hàm tác dụng (3.5.7) trở thành

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\tau d^3\mathbf{x}\left[(f')^2 - (\nabla f)^2 + \frac{a''}{a}f^2\right]. \tag{3.5.11}$$

Sử dụng phương trình Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu f)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f}, \tag{3.5.12}$$

cho hàm tác dụng trên, ta thu được phương trình chuyển động cho f hoặc phương trình Mukhanov-Sasaki như sau

$$f'' - \nabla^2 f - \frac{a''}{a}f = 0, \tag{3.5.13}$$

Trong không gian Fourier, (3.5.13) trở thành

$$f_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)f_{\mathbf{k}} = 0, \tag{3.5.14}$$

với

$$f_{\mathbf{k}}(\tau) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} f(\tau, \mathbf{x}) e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{3.5.15}$$

Chúng ta chú ý rằng trong lạm phát cuộn chậm

$$\frac{a''}{a} \approx 2\mathcal{H}^2 \approx \frac{2}{\tau^2}. \tag{3.5.16}$$

Phương trình (3.5.14) trở thành

$$f_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right)f_{\mathbf{k}} = 0. \tag{3.5.17}$$

Phương trình trên có nghiệm chính xác là

$$f_{\mathbf{k}} = \alpha \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) + \beta \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 + \frac{i}{k\tau},\right) \tag{3.5.18}$$

với α và β là các hằng số phụ thuộc vào điều kiện ban đầu. Sử dụng lý thuyết trường lượng tử, chúng ta tìm được $\alpha = 1$ và $\beta = 0$, (3.5.18) trở thành

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right). \tag{3.5.19}$$

3.6 Các nhiễu loạn nguyên thủy từ lạm phát

Chúng ta định nghĩa phổ của f như sau

$$P^f_{\mathbf{k}}(\tau) = \frac{k^3}{2\pi^2} |f_{\mathbf{k}}(\tau)|^2, \tag{3.6.1}$$

Ở đây, chúng ta chọn dạng không thứ nguyên của phổ (phổ chỉ phụ thuộc vào thời gian nhưng không phụ thuộc vào số sóng). Từ định nghĩa của f và (3.5.19), chúng ta có

$$P^{\delta\phi}_{\mathbf{k}}(\tau) = a^{-2} P^f_{\mathbf{k}}(\tau) = \frac{H^2}{4\pi^2} \left[1 + (k\tau)^2\right] \xrightarrow{\text{thang đo rất lớn}} \frac{H^2}{4\pi^2}. \tag{3.6.2}$$

Nhiễu loạn độ cong $\mathcal{R}$ được định nghĩa tại (3.4.3) như sau

$$\mathcal{R} = C - \frac{1}{3}\nabla^2 E + \mathcal{H}(B + v). \tag{3.6.3}$$

Từ (3.2.8), (2.3.6) và (2.3.7), chúng ta có

$$B + v = -\frac{\delta\phi}{\bar{\phi}'}. \tag{3.6.4}$$

Vì $\mathcal{R}$ là bất biến chuẩn, giá trị của nó là như nhau tại mọi chuẩn tọa độ. Trong chuẩn tọa độ phẳng ($C = E = 0$), $\mathcal{R}$ trở thành

$$\mathcal{R} = -\frac{\mathcal{H}}{\bar{\phi}'}\delta\phi. \tag{3.6.5}$$

Sử dụng (2.3.11), chúng ta có thể viết phương trình trên thành

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \frac{\delta\phi}{M_{pl}} \qquad \text{(chuẩn không gian phẳng)}. \tag{3.6.6}$$

Vì thế phổ của $\mathcal{R}$ và $\delta\phi$ liên hệ với nhau như sau

$$P_{\mathbf{k}}^{\mathcal{R}} = \frac{1}{2\varepsilon}\frac{P_{\mathbf{k}}^{\delta\phi}}{M_{pl}^2} = \frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\frac{H^2}{M_{pl}^2}. \tag{3.6.7}$$

Vì $\mathcal{R}$ đóng băng tại horizon crossing, chúng ta có thể đánh giá vế phải tại $k = aH$

$$P_{\mathbf{k}}^{\mathcal{R}} = \frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\frac{H^2}{M_{pl}^2}\Big|_{k=aH}. \tag{3.6.8}$$

Vì H và ε bây giờ là các hàm của thời gian, phổ của $\mathcal{R}$ sẽ sai lệch một chút so với dạng bất biến thang đo của nó $P_{\mathbf{k}}^{\mathcal{R}} \sim k^0$. Cách thông thường để đánh giá sự sai lệch này là thông qua chỉ số phổ n_s

$$n_s - 1 \equiv \frac{d\,\ln P_{\mathbf{k}}^{\mathcal{R}}}{d\,\ln k}. \tag{3.6.9}$$

Chúng ta thấy trong công thức này chỉ có 2 biến phụ thuộc thời gian là H^2 và ε. Vì vậy, chỉ số phổ (3.6.9) có thể được viết thành

$$n_s - 1 = \frac{d\,\ln H^2}{d\,\ln k} - \frac{d\,\varepsilon}{d\,\ln k}. \tag{3.6.10}$$

Chúng ta có thể phân tích vế trái của phương trình trên như sau

$$\begin{aligned}
n_s - 1 &= \left(\frac{d\,\ln H^2}{dt} - \frac{d\,\varepsilon}{dt}\right) \times \frac{dt}{d\,\ln k} \\
&= \left(2\frac{dH}{H\,dt} - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon\,dt}\right) \times \left(\frac{d\,\ln k}{dt}\right)^{-1} \\
&= \left(2\frac{dH}{H\,dt} - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon\,dt}\right) \times \left(\frac{d\,\ln a}{dt} + \frac{d\,\ln H}{dt}\right)^{-1} \\
&= \left(2\frac{\dot{H}}{H} - \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \times \left(H + \frac{\dot{H}}{H}\right)^{-1} \\
&\approx \left(2\frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon H}\right) \\
&= -(2\varepsilon + \delta).
\end{aligned} \tag{3.6.11}$$

Ở đây, chúng ta đã dùng $k = aH$ và định nghĩa của ε và δ (2.2.15, 2.2.20). Chúng ta có thể viết phổ vô hướng và chỉ số phổ vô hướng theo hàm thế năng như sau

$$P_{\mathbf{k}}^{\mathcal{R}} = \frac{1}{12\pi^2 M_{pl}^6}\frac{V^3}{V'^6}, \tag{3.6.12}$$

$$n_s - 1 = -6\epsilon_V + 2\eta_V. \tag{3.6.13}$$

Tham số n_s biểu diễn sự sai lệch của lạm phát với không gian de Sitter. Lạm phát cuộn chậm tiên đoán n_s rất gần 1 do $\{\epsilon_V, |\eta_V|\} \ll 1$. Các kết quả quan sát gần đây cho thấy sự phù hợp của giá trị n_s so với tiên đoán của lạm phát cuộn chậm [6,7]

$$n_s = 0.9603 \pm 0.0073. \tag{3.6.14}$$

Chương 4

Lạm phát bất đẳng hướng

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về mô hình lạm phát bất đẳng hướng. Chúng ta sẽ thảo luận về nguyên nhân dẫn đến việc cần phải đưa ra các mô hình về lạm phát bất đẳng hướng cũng như giới thiệu một mô hình đơn giản để minh họa và khảo sát các tính chất của nó. Các kết quả trong chương này được tham khảo từ các tài liệu [28, 29]

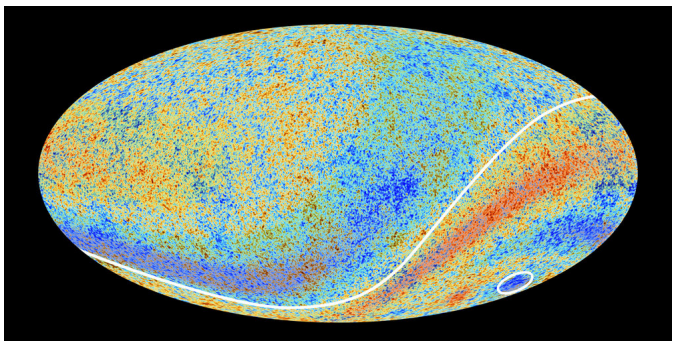
4.1 Giới thiệu chung

Lạm phát vũ trụ không chỉ thành công trong việc giải quyết vấn đề chân trời và vấn đề độ phẳng, nó còn đưa ra lời giải thích cho nguồn gốc của các cấu trúc trên thang đo lớn của vũ trụ được thể hiện trên bức xạ phông nền vi sóng vũ trụ [6, 7]. Các tiên đoán này của lạm phát có liên quan đến giả thuyết no-hair, phát biểu rằng mọi sự bất đẳng hướng cổ điển (hair) sẽ biến mất rất nhanh trong quá trình lạm phát. Phổ của nhiễu loạn là đẳng hướng về mặt thống kê và không phụ thuộc vào thang đo. Lạm phát cuộn chậm cũng tiên đoán sự phân phối chuẩn của nhiễu loạn nguyên thủy. Các tiên đoán này nhìn chung là phù hợp với các quan sát thực nghiệm.

Tuy nhiên, các quan sát vũ trụ với độ chính xác cao ngày nay buộc chúng ta phải quan tâm đến các cấu trúc tinh tế hơn của vũ trụ lạm phát. Như đã trình bày ở trên, lạm phát chỉ xấp xỉ không gian de Sitter. Sự sai lệch so với không gian de Sitter được đặc trưng bởi các tham số cuộn chậm có độ lớn chỉ vài phần trăm. Tương tự, các tham số cuộn chậm cũng đặc trưng cho sự lệch khỏi phân bố chuẩn của phổ nhiễu loạn [14]. Từ các sai lệch ở trên, chúng ta hoàn toàn có thể nghĩ tới việc tìm kiếm những sự bất đẳng hướng được đặc trưng bởi các tham số cuộn chậm.

Về mặt thực nghiệm, dù với độ chắc chắn không cao, các quan sát về bức xạ phông nền vũ trụ cũng đã chỉ ra nhiều điểm dị thường. Các kết quả đó đã dẫn đến các mô hình thách thức giả thuyết no-hair. Tuy nhiên, các mô hình đó lại hoặc không ổn định, hoặc

gặp vấn đề về tinh chỉnh, hoặc là thiếu tự nhiên. Tuy nhiên, trong khuôn khổ của lý thuyết siêu hấp dẫn, một số mô hình lạm phát bất đẳng hướng ổn định đã được tìm ra, qua đó đưa ra các phản ví dụ cho giả thuyết no-hair [27, 28]. Cụ thể, với sự có mặt của trường vector bắt cặp với trường lạm phát, có thể có một sự bất đẳng hướng nhỏ không biến mất trong quá trình lạm phát.



Hình 4.1: Các điểm dị thường trên bức xạ phông nền vũ trụ (Nguồn: ESA/Planck collaboration).

4.2 Lạm phát bất đẳng hướng lũy thừa

Chúng ta xét một mô hình đơn giản lấy cảm hứng từ lý thuyết siêu hấp dẫn có hàm tác dụng như sau [27, 28]

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) - \frac{1}{4}h^2(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right], \tag{4.2.1}$$

trong đó $h(\phi)$ là hàm ghép giữa trường lạm phát với trường vector. Tensor cường độ trường của trường vector A_μ được định nghĩa như sau $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Thông qua sự giảm số chiều của các lý thuyết nhiều chiều như lý thuyết dây, chúng ta giả sử thế năng có dạng hàm mũ

$$V(\phi) = V_0 e^{\lambda\phi}, \tag{4.2.2}$$

và hàm ghép $h(\phi)$ cũng như thế

$$h(\phi) = h_0 e^{\rho\phi}. \tag{4.2.3}$$

Nhờ bất biến chuẩn, chúng ta có thể chọn chuẩn tọa độ với $A_0 = 0$. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể chọn trục x là trục hướng theo chiều của trường vector. Vì thế, trường vector đồng nhất A_μ sẽ có dạng $A_\mu = (0, A_x(t), 0, 0)$. Để đơn giản, chúng ta giả sử

chiều của trường vector không đổi theo thời gian. Metric ứng với trường vector như thế có dạng

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha(t)}\left[e^{-4\sigma(t)}dx^2 + e^{2\sigma(t)}(dy^2+dz^2)\right], \tag{4.2.4}$$

Chúng ta tìm được phương trình cho trường vector

$$\dot{A}_x = h^{-2}(\phi)e^{-\alpha-4\sigma}p_A, \tag{4.2.5}$$

và các phương trình Einstein cũng như phương trình cho trường vô hướng ϕ

$$\dot{\alpha}^2 = \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{p_A^2}{2}h^{-2}(\phi)e^{-4\alpha-4\sigma}\right], \tag{4.2.6}$$

$$\ddot{\alpha} = -3\dot{\alpha}^2 + V(\phi) + \frac{p_A^2}{6}h^{-2}(\phi)e^{-4\alpha-4\sigma}, \tag{4.2.7}$$

$$\ddot{\sigma} = -3\dot{\alpha}\dot{\sigma} + \frac{p_A^2}{3}h^{-2}(\phi)e^{-4\alpha-4\sigma}, \tag{4.2.8}$$

$$\ddot{\phi} = -3\dot{\alpha}\dot{\phi} - V'(\phi) + p_A^2 f^{-3}(\phi)f'(\phi)e^{-4\alpha-4\sigma}, \tag{4.2.9}$$

Chúng ta đi tìm nghiệm lũy thừa bằng cách giả sử

$$\alpha = \zeta\log t, \qquad \sigma = \eta\log t, \qquad \phi = \xi\log t + \phi_0. \tag{4.2.10}$$

Trong trường hợp trường vô hướng tầm thường $p_A = 0$, chúng ta có nghiệm lũy thừa đẳng hướng

$$\zeta = \frac{2}{\lambda^2}, \qquad \eta = 0, \qquad \xi = -\frac{2}{\lambda}, \qquad V_0 e^{\lambda\phi_0} = \frac{2(6-\lambda^2)}{\lambda^4}. \tag{4.2.11}$$

với metric đẳng hướng

$$ds^2 = -dt^2 + t^{4/\lambda^2}(dx^2+dy^2+dz^2). \tag{4.2.12}$$

với $\lambda \ll 1$ để có thể thu được sự giãn nở đủ lớn.

Chúng ta cũng có thể thu được nghiệm với trường vector không tầm thường $p_A \neq 0$. Từ (4.2.6), để cho các số hạng đều tỉ lệ với t^{-2}, chúng ta rút ra được

$$\lambda\xi = -2, \qquad \rho\xi + 2\zeta + 2\eta = 1 \tag{4.2.13}$$

Điều kiện thứ hai chỉ cần thiết trong trường hợp không tầm thường $p_A \neq 0$. Từ đó, để phương trình (4.2.6) được thỏa mãn, chúng ta cần

$$-\zeta^2 + \eta^2 + \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{1}{3}u + \frac{1}{6}\omega = 0, \tag{4.2.14}$$

với

$$u \equiv V_0 e^{\lambda\phi_0}, \qquad \omega \equiv p_A^2 h_0^{-2} e^{-2\rho\phi_0}. \tag{4.2.15}$$

Từ các phương trình (4.2.13), các phương trình (4.2.7), (4.2.8) và (4.2.9) trở thành

$$-\zeta + 3\zeta^2 - u - \frac{1}{6}\omega = 0, \tag{4.2.16}$$

$$-\eta + 3\zeta\eta - \frac{1}{3}\omega = 0, \tag{4.2.17}$$

$$-\xi + 3\zeta\xi + \lambda u - \rho\omega = 0 \tag{4.2.18}$$

Từ các phương trình (4.2.13), (4.2.16) và (4.2.17), chúng ta tìm được nghiệm cho u và ω như sau

$$u = \frac{9}{2}\zeta^2 - \frac{9}{4}\zeta - \frac{3\rho}{2\lambda}\zeta + \frac{1}{4} + \frac{\rho}{2\lambda}, \qquad \omega = -9\zeta^2 + \frac{15}{2}\zeta + \frac{9\rho}{\lambda}\zeta - \frac{3}{2} - \frac{3\rho}{\lambda}. \tag{4.2.19}$$

Thay các nghiệm u và ω vừa tìm được vào (4.2.18), chúng ta thu được

$$(3\zeta - 1)\left[6\lambda(\lambda + 2\rho)\zeta - (\lambda^2 + 8\rho\lambda + 12\rho^2 + 8)\right] = 0 \tag{4.2.20}$$

Nghiệm không tầm thường của phương trình này là

$$\zeta = \frac{\lambda^2 + 8\rho\lambda + 12\rho^2 + 8}{6\lambda(\lambda + 2\rho)}. \tag{4.2.21}$$

Thay kết quả này vào phương trình (4.2.16) và (4.2.19), chúng ta thu được

$$\eta = \frac{\lambda^2 + 2\rho\lambda - 4}{3\lambda(\lambda + 2\rho)}, \tag{4.2.22}$$

$$u = \frac{(\rho\lambda + 2\rho^2 + 2)(-\lambda^2 + 4\rho\lambda + 12\rho^2 + 8)}{2\lambda^2(\lambda + 2\rho)^2}, \tag{4.2.23}$$

$$\omega = \frac{(\lambda^2 + 2\rho\lambda - 4)(-\lambda^2 + 4\rho\lambda + 12\rho^2 + 8)}{2\lambda^2(\lambda + 2\rho)^2} \tag{4.2.24}$$

Để lạm phát xảy ra thì $\lambda \ll 1$, do vậy u luôn dương. Vì ω cũng cần phải dương nên chúng ta có

$$\lambda^2 + 2\rho\lambda > 4. \tag{4.2.25}$$

Do đó, ρ phải lớn hơn 1 rất nhiều. Metric lúc này có dạng

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2\zeta - 4\eta} dx^2 + t^{2\zeta + 2\eta}(dy^2 + dz^2). \tag{4.2.26}$$

Sự giãn nở trung bình của vũ trụ được quyết định bởi ζ và tham số cuộn chậm trung bình được cho bởi

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{6\lambda(\lambda+2\rho)}{\lambda^2+8\rho\lambda+12\rho^2+8}. \tag{4.2.27}$$

Trong giới hạn $\lambda \ll 1$ và $\rho \gg 1$, tham số cuộn chậm trở thành $\varepsilon = \lambda/\rho$. Độ bất đẳng hướng được đặc trưng bởi

$$\frac{\Sigma}{H} \equiv \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\alpha}} = \frac{2(\lambda^2+2\rho\lambda-4)}{\lambda^2+8\rho\lambda+12\rho^2+8}. \tag{4.2.28}$$

Từ (4.2.27) và (4.2.28), chúng ta rút ra được mối liên hệ

$$\frac{\Sigma}{H} = \frac{1}{3}I\varepsilon, \qquad I = \frac{\lambda^2+2\rho\lambda-4}{\lambda^2+2\rho\lambda}. \tag{4.2.29}$$

Chúng ta định nghĩa các biến động lực không thứ nguyên như sau

$$X = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\alpha}}, \qquad Y = \frac{\dot{\phi}}{\dot{\alpha}}, \qquad Z = h(\phi)e^{-\alpha+2\sigma}\frac{\dot{A}_x}{\dot{\alpha}}. \tag{4.2.30}$$

Theo đó, phương trình (4.2.13) có thể được viết như sau

$$-\frac{V}{\dot{\alpha}^2} = 3(X^2-1)+\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{2}Z^2. \tag{4.2.31}$$

Do chúng ta đang xét hàm thế năng dương, chúng ta có bất đẳng thức

$$3(X^2-1)+\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{2}Z^2 < 0. \tag{4.2.32}$$

Sử dụng (4.2.31), chúng ta có thể loại bỏ ϕ ra khỏi các phương trình chuyển động. Do đó, các phương trình này có thể được viết dưới dạng

$$\frac{dX}{d\alpha} = \frac{1}{3}Z^2(X+1)+X\left\{3(X^2-1)+\frac{1}{2}Y^2\right\}, \tag{4.2.33}$$

$$\frac{dY}{d\alpha} = (Y+\lambda)\left\{3(X^2-1)+\frac{1}{2}Y^2\right\}+\frac{1}{3}YZ^2+\left(\rho+\frac{\lambda}{2}\right)Z^2, \tag{4.2.34}$$

$$\frac{dZ}{d\alpha} = Z\left[3(X^2-1)+\frac{1}{2}Y^2-\rho Y+1-2X+\frac{1}{3}Z^2\right]. \tag{4.2.35}$$

Như vậy, chúng ta có không gian của các biến X, Y và Z với điều kiện (4.2.31). Điểm bất động (fixed point) được định nghĩa như sau $dX/d\alpha = dY/d\alpha = dZ/\alpha = 0$.

Chúng ta đi tìm điểm bất động ứng với $X = 0$. Theo phương trình (4.2.33), chúng ta có $Z = 0$. Tiếp đến, phương trình (4.2.34) cho chúng ta hai nghiệm $Y = -\lambda$ và $Y^2 = 6$. Nghiệm thứ hai không thỏa mãn (4.2.32), do đó điểm bất động sẽ là

$$(X, Y, Z) = (0, -\lambda, 0). \tag{4.2.36}$$

Điểm bất động này tương đương với nghiệm lạm phát lũy thừa đẳng hướng. Bây giờ chúng ta sẽ đi tìm điểm bất động tương ứng với nghiệm lũy thừa bất đẳng hướng. Từ (4.2.33) và (4.2.34), chúng ta có

$$Y = \left(3\rho + \frac{\lambda}{2}\right) X - \lambda, \tag{4.2.37}$$

$$Z^2 = -\frac{3X}{X+1}\left[3(X^2-1) + \frac{1}{2}Y^2\right]. \tag{4.2.38}$$

Thay các phương trình trên vào (4.2.35), chúng ta có

$$(X-2)\left[(\lambda^2 + 8\rho\lambda + 12\rho^2 + 8)X - 2(\lambda^2 + 2\rho\lambda - 4)\right] = 0. \tag{4.2.39}$$

Theo (4.2.37) và (4.2.38), nghiệm $X = 2$ sẽ dẫn đến điều vô lý là $Z^2 = -18 - 36\rho^2 < 0$. Vì vậy, chúng ta sẽ chọn nghiệm cho X như sau

$$X = \frac{2(\lambda^2 + 2\rho\lambda - 4)}{\lambda^2 + 8\rho\lambda + 12\rho^2 + 8}. \tag{4.2.40}$$

Từ nghiệm của X, các phương trình (4.2.37) và (4.2.38) sẽ cho chúng ta nghiệm của Y và Z^2 như sau

$$Y = -\frac{12(\lambda + 2\rho)}{\lambda^2 + 8\rho\lambda + 12\rho^2 + 8}, \tag{4.2.41}$$

$$Z^2 = \frac{18(\lambda^2 + 2\rho\lambda - 4)(-\lambda^2 + 4\rho\lambda + 12\rho^2 + 8)}{(\lambda^2 + 8\rho\lambda + 12\rho^2 + 8)^2}. \tag{4.2.42}$$

Để $Z^2 > 0$, chúng ta cần $\lambda^2 + 2\rho\lambda > 4$ với điều kiện $\lambda \ll 1$. Các nghiệm này tương ứng với nghiệm lạm phát lũy thừa bất đẳng hướng (4.2.26)

Chúng ta sẽ khảo sát tính ổn định của các điểm cố định (4.2.40), (4.2.41) và (4.2.42).

Từ các phương trình (4.2.33). (4.2.34) và (4.2.35), chúng ta có

$$\frac{d\delta X}{d\alpha} = \left(\frac{1}{3}Z^2 + 9X^2 + \frac{1}{2}Y^2 - 3\right)\delta X + XY\delta Y + \frac{2}{3}(X+1)Z\delta Z, \tag{4.2.43}$$

$$\frac{d\delta Y}{d\alpha} = 6X(Y+\lambda)\delta X + \left\{3(X^2-1) + \frac{1}{2}Y^2 + Y(Y+\lambda) + \frac{1}{3}Z^2\right\}\delta Y + \left(\frac{2}{3}Y + 2\rho + \lambda\right)Z\delta Z, \tag{4.2.44}$$

$$\frac{d\delta Z}{d\alpha} = 2(3X-1)Z\delta X + (Y-\rho)Z\delta Y + \left(3X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + Z^2 - 2X - \rho Y - 2\right)\delta Z. \tag{4.2.45}$$

Trong trường hợp điểm bất động đẳng hướng (4.2.36), Các phương trình (4.2.43), (4.2.44) và (4.2.45) trở thành

$$\frac{d\delta X}{d\alpha} = \left(\frac{1}{2}\lambda^2 - 3\right)\delta X, \tag{4.2.46}$$

$$\frac{d\delta Y}{d\alpha} = \left(\frac{1}{2}\lambda^2 - 3\right)\delta Y, \tag{4.2.47}$$

$$\frac{d\delta Z}{d\alpha} = \left[\frac{1}{2}\lambda^2 - 2 + \rho\lambda\right]\delta Z. \tag{4.2.48}$$

Trong thời kì lạm phát $\lambda \ll 1$, Vế trái của cả ba phương trình trên có giá trị âm khi $\lambda^2 + 2\rho\lambda < 4$. Điều đó có nghĩa là điểm bất động đẳng hướng là điểm hội tụ và ổn định trong vùng $\lambda^2 + 2\rho\lambda < 4$. Ngược lại, trong vùng $\lambda^2 + 2\rho\lambda > 4$, điểm bất động trở thành điểm yên ngựa và không ổn định. Bây giờ, chúng ta sẽ khảo sát sự thay đổi của các biến X, Y và Z xung quanh điểm bất động không ổn định.

Vì chúng ta đang xét trong vũ trụ lạm phát $\lambda \ll 1$, điều kiện $\lambda^2 + 2\rho\lambda > 4$ có nghĩa là $\rho \gg 1$. Sử dụng các điều kiện đó, chúng ta có thể viết các phương trình (4.2.43), (4.2.44) và (4.2.45) như sau

$$\frac{d\delta X}{d\alpha} = -3\delta X, \tag{4.2.49}$$

$$\frac{d\delta Y}{d\alpha} = -3\delta Y + \sqrt{6(\lambda^2 + 2\rho\lambda - 4)}\delta Z, \tag{4.2.50}$$

$$\frac{d\delta Z}{d\alpha} = -\frac{1}{2}\sqrt{6(\lambda^2 + 2\rho\lambda - 4)}\delta Y. \tag{4.2.51}$$

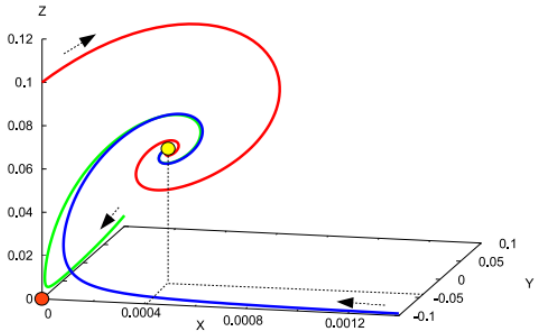
Tính ổn định có thể được phân tích bằng cách đặt

$$\delta X = e^{\omega\alpha}\delta\tilde{X}, \qquad \delta Y = e^{\omega\alpha}\delta\tilde{Y}, \qquad \delta Z = e^{\omega\alpha}\delta\tilde{Z}. \tag{4.2.52}$$

Chúng ta tìm được các giá trị riêng cho ω như sau

$$\omega = -3, -\frac{3}{2} \pm i\sqrt{3(\lambda^2 + 2\rho\lambda - 4) - \frac{9}{4}}. \tag{4.2.53}$$

Vì các trị riêng có phần thực âm, các điểm bất động bất đẳng hướng là ổn định. Do đó, điểm cuối của quỹ đạo chuyển động trong không gian của các biến X, Y và Z xung quanh nghiệm lạm phát lũy thừa đẳng hướng ổn định phải là lạm phát lũy thừa bất đẳng hướng. Hình 4.2 mô tả sự thay đổi của các biến X, Y và Z với $\lambda = 0.1$ và $\rho = 50$. Chúng ta thấy rằng quỹ đạo hội tụ về điểm bất động bất đẳng hướng được minh họa bởi hình tròn màu vàng. Điểm bất động đẳng hướng được minh họa bởi điểm màu đỏ và chỉ là điểm hội tụ trên mặt phẳng $Z = 0$, Như vậy, lạm phát lũy thừa bất đẳng hướng là điểm hội tụ với tham số thỏa mãn điều kiện $\lambda^2 + 2\rho\lambda > 4$.



Hình 4.2: Sự biến đổi của các biến X, Y và Z với các tham số $\lambda = 0.1$ và $\rho = 50$ [28].

Chương 5

Lạm phát bất đẳng hướng dưới điều kiện cuộn hằng số

Chương tiếp theo, chúng ta sẽ nghiên cứu về mô hình lạm phát bất đẳng hướng dưới điều kiện cuộn hằng số cho mô hình chính tắc, được đề xuất bởi Asuka Ito và Jiro Soda [37]. Tiếp đó, chúng ta sẽ tìm cách mở rộng mô hình này cho trường hợp mô hình Dirac-Born-Infeld và nghiên cứu các tính chất của mô hình mới này.

5.1 Mô hình chính tắc

Mô hình lạm phát bất đẳng hướng với trường vô hướng chính tắc có hàm tác dụng được cho bởi

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) - \frac{1}{4}h^2(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right], \tag{5.1.1}$$

Chúng ta viết lại metric (4.2.4) như sau

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[b^{-4}(t)dx^2 + b^2(t)\left(dy^2 + dz^2\right)\right], \tag{5.1.2}$$

với $a(t) = e^{\alpha(t)}$ và $b(t) = e^{\sigma(t)}$.

Sử dụng nguyên lý tác dụng tối thiểu và metric (5.1.2), chúng ta dẫn ra được các

thành phần khác 0 của phương trình trường Einstein như sau

$$H_a^2 - H_b^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V + \frac{p_A^2}{2}h^{-2}a^{-4}b^{-4}\right], \tag{5.1.3}$$

$$\dot{H}_a = -3H_b^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{p_A^2}{3}h^{-2}a^{-4}b^{-4}, \tag{5.1.4}$$

$$\dot{H}_b = -3H_aH_b + \frac{p_A^2}{3}h^{-2}a^{-4}b^{-4}. \tag{5.1.5}$$

Tương tự, phương trình trường cho trường vô hướng ϕ là

$$\ddot{\phi} = -3H_a\dot{\phi} - V' + h^{-3}h'p_A^2a^{-4}b^{-4}. \tag{5.1.6}$$

Tiếp theo, chúng ta đưa vào điều kiện cuộn hằng số cho mô hình chính tắc

$$\eta = -\frac{\ddot{\phi}}{H_a\dot{\phi}} = \hat{\beta}, \tag{5.1.7}$$

Chúng ta thấy rằng, điều kiện này khác với điều kiện $|\eta| \ll 1$ trong lạm phát cuộn chậm. Như đã trình bày ở trên, lạm phát cuộn chậm có các hệ quả có thể quan sát được như sự không phụ thuộc vào thang đo của phổ nhiễu loạn hay sự phân bố theo hàm phân bố chuẩn của nhiễu loạn nguyên thủy. Trong khi đó, lạm phát cuộn hằng số tuy vẫn giữ lại tính chất đầu tiên của lạm phát cuộn chậm, song nó lại dự đoán sự lệch ra khỏi hàm phân bố chuẩn của nhiễu loạn nguyên thủy. Đây là sự khác biệt giữa lạm phát cuộn chậm và lạm phát cuộn hằng số và đã được chỉ ra trong [46, 47].

Chúng ta cũng áp dụng điều kiện hằng số của độ bất đẳng hướng,

$$\frac{H_b}{H_a} = n, \tag{5.1.8}$$

với $\hat{\beta}$ và n là hằng số, chúng ta tìm được một nghiệm cho H_a theo ϕ như sau

$$H_a(\phi) = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{6\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\,\phi\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{6\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\,\phi\right) \tag{5.1.9}$$

cùng với một mối liên hệ quan trọng giữa hai tham số n và $\hat{\beta}$ [37],

$$n = \frac{\hat{\beta}}{6}. \tag{5.1.10}$$

Chúng ta xét 3 trường hợp đặc biệt của (5.1.9)

$$H_a = M \exp\left(\sqrt{\frac{6\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right), \tag{5.1.11}$$

$$H_a = M \cosh\left(\sqrt{\frac{6\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right), \tag{5.1.12}$$

$$H_a = M \sinh\left(\sqrt{\frac{6\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right), \tag{5.1.13}$$

Trường hợp đầu tiên (5.1.11) tương ứng với lạm phát lũy thừa bất đẳng hướng. Trường hợp thứ hai (5.1.12) đòi hỏi $\hat{\beta}$ phải âm để $\dot{\phi}$ nhận giá trị thực và nghiệm này không hội tụ. Nghiệm thứ ba (5.1.13) giúp chúng ta tìm được các hàm $V(\phi)$ và $h(\phi)$ như sau

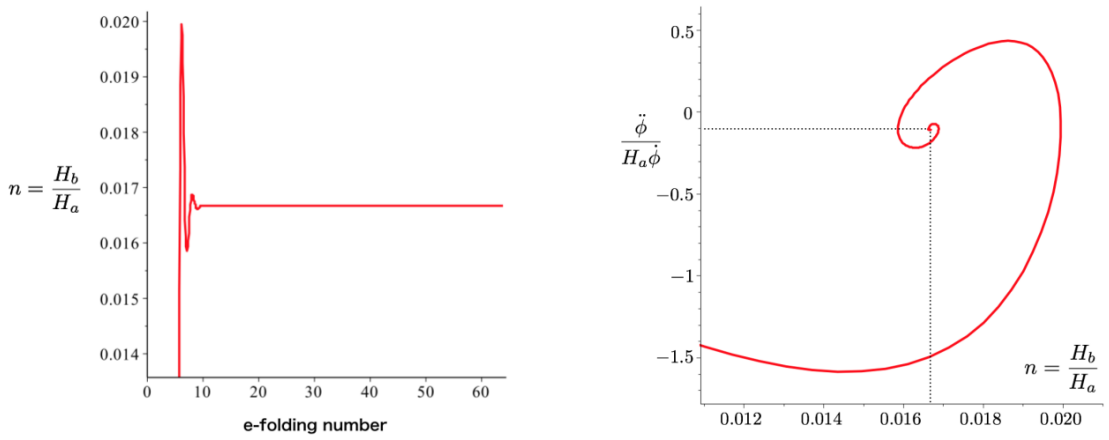
$$V(\phi) = \frac{M^2(\hat{\beta}-12)}{24}\left\{3+\hat{\beta}+(\hat{\beta}-3)\cosh\left(2\sqrt{\frac{6\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right) \mp 2\hat{\beta}\cosh\left(\sqrt{\frac{6\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)\right\}, \tag{5.1.14}$$

$$h(\phi) \propto \frac{\left[\mp 1+\cosh\left(\sqrt{\frac{6\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\,\phi\right)\right]^{\frac{6+\hat{\beta}}{3\hat{\beta}}}}{\sqrt{-(\hat{\beta}+3)-(\hat{\beta}-3)\cosh\left(2\sqrt{\frac{6\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)\pm 2\hat{\beta}\cosh\left(\sqrt{\frac{6\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)}}, \tag{5.1.15}$$

(5.1.16)

Sử dụng các nghiệm này để giải số các phương trình (5.1.3), (5.1.4), (5.1.5) và (5.1.6) với $\hat{\beta} = 0.1$, $M = 10^{-5}$, $\phi_0 = 15$ và $\dot{\phi}_0 = 0$. Sau đó biểu diễn các nghiệm số bằng hình vẽ, chúng ta thu được hình 5.1

Ở hình bên trái của hình 5.1, chúng ta thấy tỉ số H_b/H_a hội tụ đúng về giá trị $n = \hat{\beta}/6 \approx 0.01667$. Ở hình bên phải, chúng ta thấy tham số cuộn hằng số $\eta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$ hội tụ về đúng giá trị $\hat{\beta} = 0.1$.



Hình 5.1: Hình bên trái mô tả sự biến đổi của tỉ số H_b/H_a. Hình bên phải là không gian pha của H_b/H_a và η [37].

5.2 Mô hình Dirac-Born-Infeld

5.2.1 Các phương trình cơ bản

Trong luận văn này, chúng ta nghiên cứu một sự mở rộng không chính tắc của mô hình (5.1). Các kết quả trong phần này được dựa trên bài báo [44]. Trong mô hình này, trường vô hướng chính tắc được thay thế bằng trường vô hướng không chính tắc Dirac-Born-Infeld [21] như sau

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2} + \frac{1}{f(\phi)}\frac{\gamma-1}{\gamma} - V(\phi) - \frac{1}{4}h^2(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right], \tag{5.2.1}$$

với khối lượng Planck rút gọn M_p được đặt bằng 1. $V(\phi)$ là thế năng của trường vô hướng ϕ và $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ là cường độ trường của trường vector A_μ. Ở đây γ được định nghĩa như sau [21]

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + f(\phi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}}, \tag{5.2.2}$$

và đóng vai trò như hệ số Lorentz [21]. Dễ thấy rằng $\gamma \geq 1$ với hàm $f(\phi)$ không âm. Nếu chúng ta lấy giới hạn chính tắc ($f \to 0$) thì mô hình (5.2.1) sẽ thu về hàm tác dụng trong mô hình chính tắc (5.1.1).

Sử dụng phương pháp tác dụng tối thiểu, các phương trình trường tương ứng trong

mô hình DBI có thể được dẫn ra như sau

$$\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)-\gamma\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{f}\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)+V+\frac{1}{4}h^2F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right]-h^2F_{\mu\gamma}F_\nu{}^\gamma=0, \tag{5.2.3}$$

$$\partial_\mu(\gamma\sqrt{-g}\,\partial^\mu\phi)-\sqrt{-g}\left[\frac{f'}{2f}\frac{(\gamma-1)\gamma}{\gamma+1}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+V'+\frac{hh'}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]=0, \tag{5.2.4}$$

$$\partial_\mu\left[\sqrt{-g}\left(h^2F^{\mu\nu}\right)\right]=0, \tag{5.2.5}$$

với $V'\equiv dV/d\phi$, vân vân. Chúng ta sẽ xét metric Bianchi loại I mô tả một vũ trụ đồng nhất nhưng bất đẳng hướng,

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)\left[b^{-4}(t)dx^2+b^2(t)\left(dy^2+dz^2\right)\right], \tag{5.2.6}$$

ở đây $a(t)$ đóng vai trò như hệ số tỉ lệ đẳng hướng và $b(t)$ đóng vai trò như hệ số đặc trưng cho sự lệch khỏi sự đẳng hướng. Hơn nữa, chúng ta cũng giả sử trường vô hướng là đồng nhất ($\phi=\phi(t)$) và trường vector A_μ có dạng $A_\mu=(0,A_x(t),0,0)$ để đồng nhất với metric Bianchi loại I. Theo đó, nghiệm của trường vector A_μ (5.2.5) có thể được tìm ra như sau

$$\dot{A}_x=p_Ah^{-2}a^{-1}b^{-4}, \tag{5.2.7}$$

với p_A là một hằng số tích phân. Nhờ vào nghiệm này, phương trình cho trường vô hướng (5.2.4) được thu gọn thành

$$\ddot{\phi}=-\frac{3H_a}{\gamma^2}\dot{\phi}-\frac{V'}{\gamma^3}-\frac{f'}{2f}\frac{(\gamma+2)(\gamma-1)}{(\gamma+1)\gamma}\dot{\phi}^2+\frac{h^{-3}h'}{\gamma^3}p_A^2a^{-4}b^{-4}, \tag{5.2.8}$$

với hệ số Lorentz

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-f\dot{\phi}^2}}. \tag{5.2.9}$$

Ở đây, $H_a\equiv\dot{a}/a$ và $H_b\equiv\dot{b}/b$ là hai tham số Hubble. Theo đó, các thành phần khác 0 của phương trình trường Einstein (5.2.3) trở thành

$$H_a^2-H_b^2=\frac{1}{3}\left[\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\dot{\phi}^2+V+\frac{p_A^2}{2}h^{-2}a^{-4}b^{-4}\right], \tag{5.2.10}$$

$$\dot{H}_a=-3H_b^2-\frac{\gamma}{2}\dot{\phi}^2-\frac{p_A^2}{3}h^{-2}a^{-4}b^{-4}, \tag{5.2.11}$$

$$\dot{H}_b=-3H_aH_b+\frac{p_A^2}{3}h^{-2}a^{-4}b^{-4}. \tag{5.2.12}$$

Cho đến bây giờ, chúng ta đã dẫn ra tất cả các phương trình trường cho mô hình DBI, đó là các phương trình (5.2.8), (5.2.10), (5.2.11) và (5.2.12). Nếu chúng ta lấy giới hạn $\gamma \to 1$ hay tương đương là $f \to 0$, thì tất cả các phương trình trường sẽ quay về trường hợp chính tắc như (5.1.3), (5.1.4), (5.1.5) và (5.1.6).

5.2.2 Nghiệm lạm phát dưới điều kiện cuộn hằng số

Chúng ta thấy rằng trong trường hợp chính tắc, $\gamma = 1$, Phương trình (5.2.8) rút gọn thành

$$\ddot{\phi} = -3H_a\dot{\phi} - V' + h^{-3}h'p_A^2a^{-4}b^{-4}. \tag{5.2.13}$$

Lạm phát cuộn chậm được đực trưng bởi một vài tham số cuộn chậm và chúng bị ràng buộc bởi các dữ liệu quan sát của WMAP và Planck [6,7]. Một trong số chúng được định nghĩa như sau [46]

$$\eta(t) \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H_a\dot{\phi}}. \tag{5.2.14}$$

Thông thường, giá trị của η phải rất nhỏ trong trường hợp lạm phát cuộn chậm. Trong lạm phát cuộn hằng số [46], η được giả sử là hằng số trong pha lạm phát,

$$-\frac{\ddot{\phi}}{H_a\dot{\phi}} = \hat{\beta}, \tag{5.2.15}$$

với $\hat{\beta}$ là một hằng số. Trong bài báo [59], tham số cuộn chậm η có thể được điều chỉnh để phù hợp với mô hình DBI. Bằng cách viết lại phương trình (5.2.8) như sau

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma\dot{\phi}\right) = -3H_a\left(\gamma\dot{\phi}\right) - \frac{f'}{2f^2}\left(2 - \frac{1}{\gamma} - \gamma\right) - V' + p_A^2h^{-3}h'a^{-4}b^{-4}. \tag{5.2.16}$$

Bằng cách so sánh phương trình này với phương trình cho trường vô hướng chính tắc (5.2.13), chúng ta có thể viết lại định nghĩa của η như sau

$$\eta_{\rm DBI}(t) = -\frac{1}{H_a(\gamma\dot{\phi})}\frac{d(\gamma\dot{\phi})}{dt}, \tag{5.2.17}$$

Dễ thấy rằng $\eta_{\rm DBI} = \eta$ nếu $\gamma =$ constant. Điều kiện $\gamma =$ constant là cần thiết để thu được nghiệm lạm phát lũy thừa trong mô hình DBI [25, 34]. VÌ vậy, chúng ta có thể kỳ vọng điều tương tự cho mô hình lạm phát DBI với điều kiện cuộn hằng số mà mô hình

lạm phát lũy thừa là một trường hợp con. Từ đây, chúng ta sẽ giả sử hệ số Lorentz là hằng số

$$\gamma = \gamma_0, \tag{5.2.18}$$

với $\gamma_0 \geq 1$ là hằng số. Tiếp theo, điều kiện cuộn hằng số cho mô hình DBI được cho bởi

$$\eta_{\rm DBI} = \hat{\beta}. \tag{5.2.19}$$

Chúng ta cũng sẽ áp dụng điều kiện hằng số của độ bất đẳng hướng từ [37],

$$\frac{H_b}{H_a} = n, \tag{5.2.20}$$

với n cũng là một hằng số, để tìm nghiệm lạm phát. Chúng ta thấy rằng $|n| \ll 1$ là điều kiện để lạm phát bất đẳng hướng phù hợp với quan sát.

Bước tiếp theo, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp được giới thiệu trong [37] để áp dụng cho mô hình DBI với một vài hiệu chỉnh cần thiết. Cụ thể hơn, việc tìm nghiệm cho mô hình mới sẽ được tóm tắt như sau: (i) Đầu tiên, chúng ta sử dụng ba điều kiện (5.2.18), (5.2.19) và (5.2.20) để dẫn ra dạng tương ứng của $V(\phi)$, $h(\phi)$, and $f(\phi)$. (ii) Sau đó, chúng ta thay $V(\phi)$, $h(\phi)$ và $f(\phi)$ vừa tìm để giải các phương trình (5.2.8), (5.2.10), (5.2.11) và (5.2.12) bằng phương pháp số cho các giá trị khác nhau của γ_0. Các tính chất hội tụ như $\eta_{\rm DBI}(t) \to \hat{\beta}$, $H_b(t)/H_a(t) \to n$, and $\gamma(t) \to \gamma_0$ sau vài e-fold trong pha lạm phát cũng sẽ được xác nhận thông các nghiệm số vừa tìm được và sẽ được minh họa bằng hình vẽ.

Từ các phương trình (5.2.11), (5.2.12) và (5.2.20), chúng ta thu được phương trình cho H_a như sau

$$(1+n)\dot{H}_a = -3n(1+n)H_a^2 - \frac{\gamma_0}{2}\dot{\phi}^2, \tag{5.2.21}$$

Bằng cách coi H_a như một hàm của ϕ, phương trình trên có thể được viết lại như sau

$$\frac{\gamma_0}{2}\dot{\phi}^2 + (1+n)H_a'\dot{\phi} + 3n(1+n)H_a^2 = 0. \tag{5.2.22}$$

Phương trình (5.2.22) là một phương trình bậc hai của $\dot{\phi}$ và có nghiệm như sau

$$\gamma_0\dot{\phi} = -(1+n)H_a' \pm \sqrt{[(1+n)H_a']^2 - 6\gamma_0 n(1+n)H_a^2}. \tag{5.2.23}$$

Bằng cách lấy đạo hàm theo thời gian t và kết hợp với phương trình (5.2.19), chúng ta có

$$-\hat{\beta}\gamma_0 H_a = -(1+n)H_a'' \pm \frac{\sqrt{1+n}\,[(1+n)H_a'H_a'' - 6n\gamma_0 H_a H_a']}{\sqrt{(1+n)(H_a')^2 - 6n\gamma_0 H_a^2}}, \tag{5.2.24}$$

với $H_a'' \equiv d^2H_a/d\phi^2$. Trong trường hợp chính tắc với $\gamma_0 = 1$, một nghiệm cho H_a đã được tìm ra như sau Ref. [37]

$$H_a = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{6\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{6\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right) \tag{5.2.25}$$

cùng với một mối liên hệ qua trong giữa hai tham sô n và $\hat{\beta}$ [37],

$$n = \frac{\hat{\beta}}{6}. \tag{5.2.26}$$

Ở đây, C_1 và C_2 là các hằng số tích phân. Tương tự, với mối liên hệ giữa n và β (5.2.26), chúng ta tìm được nghiệm tổng quát hơn cho mô hình DBI

$$H_a = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right). \tag{5.2.27}$$

Các giá trị khác nhau của C_1 sẽ C_2 dẫn đến những kiểu lạm phát khác nhau. Chú ý rằng nếu đặt $C_1 = 0$ hoặc $C_2 = 0$, chúng ta sẽ thu được lạm phát lũy thừa [34]. Hơn nữa, điều kiện $\gamma = \gamma_0$ cũng đã được chỉ ra là điểm hội tụ trong mô hình lạm phát đó [34]. Dựa theo [37, 46], chúng ta sẽ tập trung vào 3 trường hợp đặc biệt của nghiệm tổng quát (5.2.27),

$$H_a = M \exp\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right), \tag{5.2.28}$$

$$H_a = M \cosh\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right), \tag{5.2.29}$$

$$H_a = M \sinh\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right), \tag{5.2.30}$$

với M là một hằng số tích phân. Nghiệm đầu tiên (5.2.28) thu được bằng cách đặt $C_1 = M$ and $C_2 = 0$, trong khi nghiệm thứ hai (5.2.29) tương ứng với $C_1 = C_2 = M/2$ và nghiệm cuối cùng (5.2.30) tương ứng với $C_1 = M/2$ and $C_2 = -M/2$. Nghiệm $H_a = M \exp\left(-\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)$ tương ứng với $C_1 = 0$ and $C_2 = M$ không được liệt kê bởi nó có thể thu được từ nghiệm (5.2.28) bằng cách định nghĩa lại trường vô hướng như sau $\phi \to -\phi$ [46]. Dễ thấy rằng $\hat{\beta}$ phải dương đối với nghiệm thứ nhất (5.2.28), trong khi $\hat{\beta}$ có thể âm đối

với hai nghiệm (5.2.29) và (5.2.30) [46]. Tuy nhiên, mối liên hệ (5.2.26) cho thấy rằng $|\hat{\beta}|$ phải nhỏ hơn 1 rất nhiều để $|H_b| \ll H_a$ phù hợp với các quan sát. Các nghiệm này là trường hợp tổng quát hơn của các nghiệm [37] cho trường vô hướng chính tắc.

Nghiệm thứ nhất $H_a = M \exp\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)$

Chúng ta xét nghiệm (5.2.28). Nhờ nghiệm này, phương trình (5.2.23) trở thành

$$\dot{\phi} = -M\sqrt{\frac{\hat{\beta}(6+\hat{\beta})}{6\gamma_0}} \exp\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right), \tag{5.2.31}$$

Phương trình này giúp chúng ta tìm ra các hệ số tỉ lệ a và b dưới dạng hàm của $\phi(t)$ như sau

$$a(t) \propto \exp\left(-\sqrt{\frac{6\gamma_0}{\hat{\beta}(6+\hat{\beta})}}\phi(t)\right), \tag{5.2.32}$$

$$b(t) \propto \exp\left(-\frac{\hat{\beta}}{6}\sqrt{\frac{6\gamma_0}{\hat{\beta}(6+\hat{\beta})}}\phi(t)\right). \tag{5.2.33}$$

Theo đó, dựa vào phương trình (5.2.10) và (5.2.12), hàm thế năng $V(\phi)$ và hàm coupling $h(\phi)$ có thể được tìm ra như sau

$$V(\phi) = \frac{3\gamma_0\left(12-7\hat{\beta}\right)+2\hat{\beta}^2-9\hat{\beta}+36}{12(\gamma_0+1)} M^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right) \tag{5.2.34}$$

và

$$h(\phi) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\frac{6-2\hat{\beta}}{3\hat{\beta}}\phi\right), \tag{5.2.35}$$

Từ định nghĩa của γ ở (5.2.9), chúng ta thu được hàm $f(\phi)$ như sau

$$f(\phi) = \frac{6(\gamma_0^2-1)}{M^2\gamma_0\hat{\beta}(6+\hat{\beta})} \exp\left(-2\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\,\phi\right), \tag{5.2.36}$$

Tóm lại, với nghiệm (5.2.28) dưới điều kiện cuộn hằng số, hàm $f(\phi)$, $h(\phi)$ và $V(\phi)$ tương ứng đều là hàm mũ của ϕ. Hơn nữa, (5.2.31) có thể được giải để thu được,

$$\phi(t) = -\sqrt{\frac{6+\hat{\beta}}{6\hat{\beta}\gamma_0}} \log\left(M\hat{\beta}t\right), \tag{5.2.37}$$

Chúng ta cũng thu được các hệ số tỉ lệ a và b dưới dạng hàm lũy thừa theo thời gian như sau

$$a \propto t^{\frac{1}{\hat{\beta}}},\ b \propto t^{\frac{1}{6}}, \tag{5.2.38}$$

với điều kiện $0 < \hat{\beta} \ll 1$ để thu được lạm phát bất đẳng hướng. Đây chính là nghiệm thu được trong [34] cho mô hình DBI.

Nghiệm thứ hai $H_a = M \cosh\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)$

Thay nghiệm thứ hai (5.2.29) vào (5.2.23) chỉ ra rằng $\hat{\beta}$ phải âm để $\dot{\phi}$ nhận giá trị thực. Tuy nhiên, [37] chỉ ra rằng nghiệm này không hội tụ trong trường hợp trường vô hướng chính tắc với $\gamma_0 = 1$. Điều tương tự cũng xảy ra với mô hình DBI. Vì vậy, chúng ta sẽ không đề cập thêm về nghiệm này.

Nghiệm thứ ba $H_a = M \sinh\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)$

Chúng ta xét nghiệm thứ ba (5.2.30). Theo nghiệm này, phương trình (5.2.23) trở thành

$$\dot{\phi} = M\sqrt{\frac{\hat{\beta}(6+\hat{\beta})}{6\gamma_0}}\left[\pm 1 - \cosh\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)\right], \tag{5.2.39}$$

Theo đó, chúng ta tìm ra các hệ số tỉ lệ a và b dưới dạng hàm của ϕ như sau

$$a(t) \propto \left[\mp 1 + \cosh\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi(t)\right)\right]^{-\frac{1}{\hat{\beta}}}, \tag{5.2.40}$$

$$b(t) \propto \left[\mp 1 + \cosh\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi(t)\right)\right]^{-\frac{1}{6}}. \tag{5.2.41}$$

Hoàn toàn tương tự như trường hợp nghiệm thứ nhất, các hàm $V(\phi)$, $h(\phi)$ và $f(\phi)$

có dạng

$$V(\phi) = -\frac{M^2}{24(\gamma_0+1)}\left\{\gamma_0\left(2\hat{\beta}^2+27\hat{\beta}+36\right)-4\hat{\beta}^2-9\hat{\beta}+36\right.$$
$$+\left[3\gamma_0\left(7\hat{\beta}-12\right)-2\hat{\beta}^2+9\hat{\beta}-36\right]\cosh\left(2\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)$$
$$\left.\mp 2\left[\gamma_0\left(\hat{\beta}+24\right)-3\hat{\beta}\right]\hat{\beta}\cosh\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)\right\}, \tag{5.2.42}$$

$$h(\phi) \propto \frac{\left[\mp 1+\cosh\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\,\phi\right)\right]^{\frac{6+\hat{\beta}}{3\hat{\beta}}}}{\sqrt{-(\hat{\beta}+3)-(\hat{\beta}-3)\cosh\left(2\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)\pm 2\hat{\beta}\cosh\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)}}, \tag{5.2.43}$$

$$f(\phi) = \frac{6(\gamma_0^2-1)}{M^2\gamma_0\hat{\beta}(6+\hat{\beta})}\left[\pm 1-\cosh\left(\sqrt{\frac{6\gamma_0\hat{\beta}}{6+\hat{\beta}}}\phi\right)\right]^{-2}, \tag{5.2.44}$$

Ở đây, chúng ta chỉ xét $\hat{\beta} > 0$. Với $\hat{\beta} < 0$, nghiệm (5.2.30) là tương đương với nghiệm (5.2.29) thông qua việc định nghĩa lại trường vô hướng ϕ [46]. Dễ thấy rằng nghiệm này sẽ rút gọn về nghiệm cho trường vô hướng chính tắc ở [37] bằng cách lấy giới hạn $\gamma_0 \to 1$. Kết quả là khi phương trình (5.2.39) được giải để tìm ra nghiệm cho ϕ, chúng ta có thể xác định được các hệ số tỉ lệ $a(t)$ và $b(t)$ cũng như các hàm $f(\phi)$, $h(\phi)$ và $V(\phi)$.

Nghiệm của phương trình (5.2.39) với dấu " + " được cho bởi

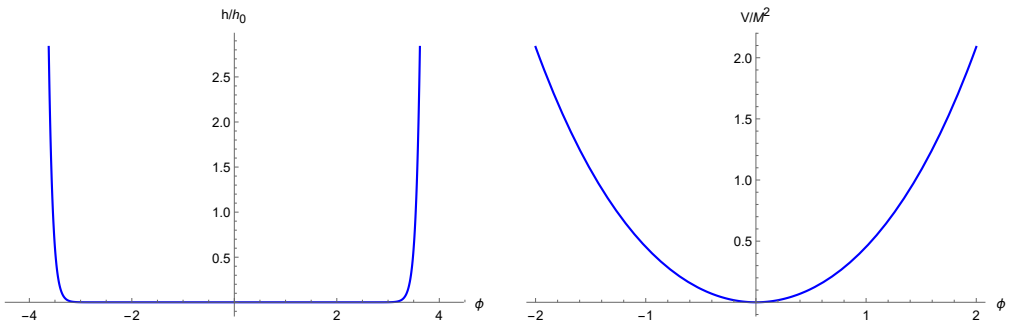
$$\phi(t) = \phi_+(t) = \sqrt{\frac{2(6+\hat{\beta})}{3\hat{\beta}\gamma_0}}\operatorname{arccoth}\left(M\hat{\beta}t\right), \tag{5.2.45}$$

Theo đó, các hệ số tỉ lệ a và b là

$$a(t) \propto \left(M^2\hat{\beta}^2t^2-1\right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}, \tag{5.2.46}$$

$$b(t) \propto \left(M^2\hat{\beta}^2t^2-1\right)^{\frac{1}{6}}. \tag{5.2.47}$$

Có thể thấy rằng $a(t)$, $b(t)$ và $\phi(t)$ nhận giá trị thực với $M^2\hat{\beta}^2t^2 > 1$. Tuy nhiên, chỉ có miền $M\hat{\beta}t > 1$ là phù hợp với nghiệm lạm phát vì miền $M\hat{\beta}t < -1$ dẫn tới $\dot{a}(t) < 0$ và lạm phát sẽ xảy ra nếu $0 < \hat{\beta} \ll 1$. Hơn nữa, cần chú ý là nghiệm này với giới hạn chính tắc, $\gamma_0 = 1$, có vấn đề về coupling mạnh xung quanh $\phi = 0$ ($h(\phi \simeq 0) < 1$) [37]. Như vậy,



Hình 5.2: Đồ thị của $h(\phi)$ (trái) và $V(\phi)$ (phải) ứng với $\phi_+(t)$ với $\hat{\beta} = 0.1$ và $\gamma_0 = 1.5$. Ở đây, h_0 là một hằng số tích phân. Hình vẽ chỉ ra rằng $h(\phi)$ nhỏ hơn 1 khi ϕ gần 0 và $V(\phi)$ không âm với mọi giá trị của ϕ.

vấn đề này dẫn tới việc lạm phát phải kết thúc trước khi ϕ bằng 0. Dễ dàng thấy rằng kết quả này cũng đúng cho trường hợp $\gamma_0 > 1$ (xem hình 5.2).

Mặt khác, một nghiệm không tầm thường của (5.2.39) với dấu " $-$ " có thể được định nghĩa như sau

$$\phi(t) = \phi_-(t) = -\sqrt{\frac{2(6+\hat{\beta})}{3\hat{\beta}\gamma_0}}\operatorname{arctanh}\left(M\hat{\beta}t\right), \tag{5.2.48}$$

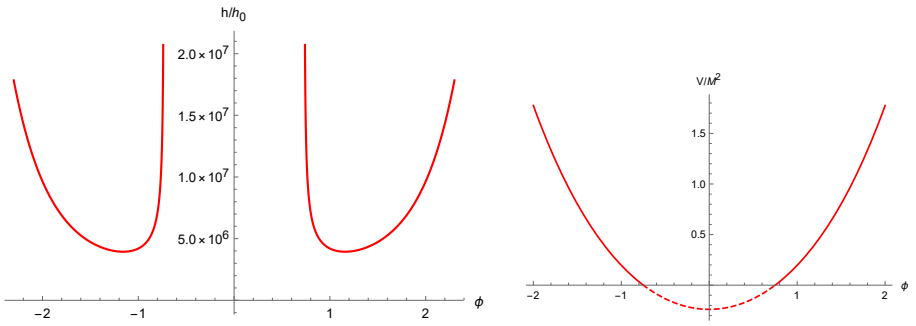
Theo đó, các hệ số tỉ lệ a và b có thể được cho bởi

$$a(t) \propto \left(1 - M^2\hat{\beta}^2t^2\right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}, \tag{5.2.49}$$

$$b(t) \propto \left(1 - M^2\hat{\beta}^2t^2\right)^{\frac{1}{6}}. \tag{5.2.50}$$

Có thể thấy rằng $a(t)$, $b(t)$, and $\phi(t)$ nhận giá trị thực với $-1 < M\hat{\beta}t < 1$. Vì $\dot{a}(t) < 0$ với $0 < M\beta t < 1$, chúng ta sẽ chỉ quan tâm đến miền $-1 < M\hat{\beta}t < 0$. Tương tự như các nghiêm kể trên, lạm phát sẽ chỉ xảy ra với $0 < \hat{\beta} \ll 1$. Dù hàm $h(\phi)$ không gặp phải vấn đề coupling mạnh trong trường hợp này. Tuy nhiên, hàm thế năng $V(\phi)$ sẽ âm xung quanh $\phi = 0$ với $0 < \hat{\beta} \ll 1$ (xem hình 5.3). Do vậy, lạm phát trong trường hợp này cũng cần phải kết thúc trước khi ϕ tiến về 0.

Tóm lại, chúng ta đã tìm ra các hàm $V(\phi)$, $h(\phi)$, and $f(\phi)$ ứng với các điều kiện $\eta_{\rm DBI}(t) = \hat{\beta}$, $H_b(t)/H_a(t) = n = \hat{\beta}/6$ và $\gamma(t) = \gamma_0$. Chúng ta đã tìm ra 3 nghiệm lạm phát khác nhau, đó là:
• nghiệm I: được mô tả bởi các phương trình (5.2.28), (5.2.31)-(5.2.38);
• nghiệm II: được mô tả bởi các phương trình (5.2.30), (5.2.39), (5.2.42)-(5.2.44), (5.2.45)-(5.2.47), ứng với nghiệm $\phi_+(t)$;
• nghiệm III: được mô tả bởi các phương trình (5.2.30), (5.2.39), (5.2.42)-(5.2.44), (5.2.48)-(5.2.50), ứng với nghiệm $\phi_-(t)$.



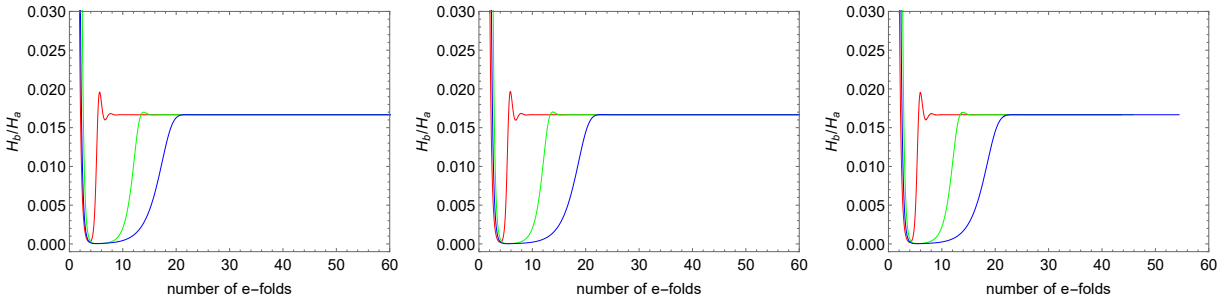
Hình 5.3: Đồ thị của $h(\phi)$ (trái) và $V(\phi)$ (phải) tương ứng với $\phi_-(t)$ với $\hat{\beta} = 0.1$ và $\gamma_0 = 1.5$. Ở đây, h_0 là một hằng số tích phân. Hình vẽ chỉ ra rằng $h(\phi)$ luôn lướn hơn 1 và $V(\phi)$ âm ϕ tiến đến 0 (miền giá trị âm của $V(\phi)$ được thể hiện bằng đường nét đứt).

5.2.3 Khảo sát các tính chất hội tụ

Như đã đề cập ở trên, chúng ta sẽ chứng minh các điều kiện (5.2.18), (5.2.19), và (5.2.20) là các điểm hội tụ bằng cách giải số cho các phương trình (5.2.8), (5.2.10), (5.2.11) và (5.2.12) cho 3 nghiệm lạm phát I, II, and III với 3 giá trị $\gamma_0 = 1$, 1.5, and 2. Khi tìm được nghiệm số, chúng ta sẽ vẽ đồ thị theo thời gian của các tham số $\eta_{\rm DBI}(t)$, $H_b(t)/H_a(t)$, and $\gamma(t)$ để xem liệu chúng có hội tụ về các giá trị mà chúng ta kỳ vọng trong pha lạm phát hay không.

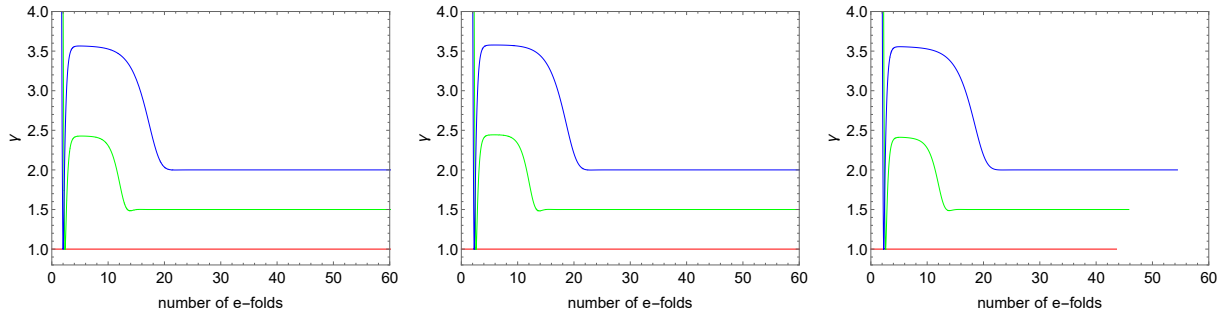
Chú ý rằng $0 < \hat{\beta} \ll 1$ cho tất cả các nghiệm lạm phát. Chúng ta sẽ chọn $\hat{\beta} = 0.1$, $|M| = 10^{-4}$, cùng với các điều kiện ban đầu là $\phi(0) = 15$ và $\dot{\phi}(0) = 0$, cho cả 3 nghiệm I, II và III.

Sự biến đổi theo thời gian của tỉ số $H_b(t)/H_a(t)$ được mô tả trong hình 5.4. dễ thấy rằng tỉ số này hội tụ đến giá trị hằng số $n = \hat{\beta}/6 \simeq 0.0167$ sau $10 - 20$ e-folds. Mặt khác, giá trị của γ_0 có ảnh hưởng đến sự hội tụ của $H_b(t)/H_a(t)$. Cụ thể, γ_0 càng lớn thì sự hội tụ của $H_b(t)/H_a(t)$ càng chậm.



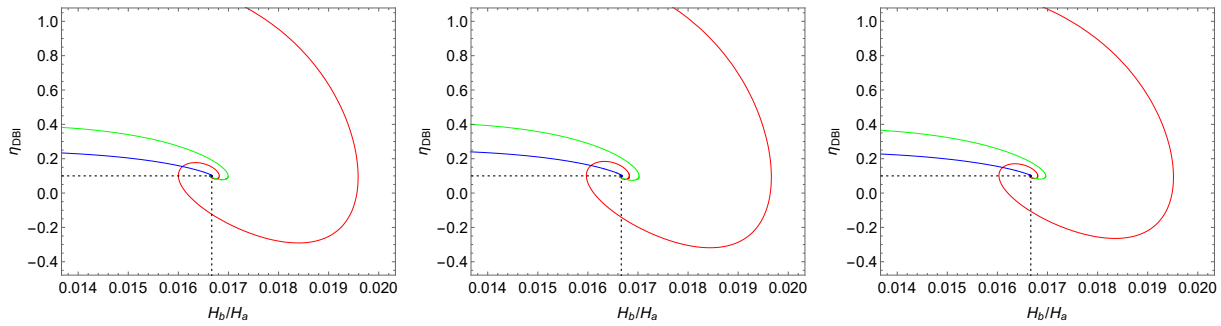
Hình 5.4: Sự thay đổi theo thời gia của tỉ số $H_b(t)/H_a(t)$ với 3 giá trị khác nhau của γ_0. Chúng ta dễ thấy rằng $H_b(t)/H_a(t)$ đều hội tụ về $n = \hat{\beta}/6 \simeq 0.0167$. Hình thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tương ứng với các nghiệm I, II và III. Đường cong màu đỏ, xanh lá và xanh dương lần lượt tương ứng với $\gamma_0 = 1$, 1.5, và 2.

Sự thay đổi theo thời gian của $\gamma(t) = 1/\sqrt{1 - f(\phi)\dot{\phi}^2}$ được thể hiện qua hình 5.5. Cần chú ý rằng $\gamma(t)$ luôn lớn hơn hoặc bằng 1. Với $\gamma_0 = 1$, $\gamma(t)$ cũng bằng 1 và không thay đổi theo thời gian. Tính chất hội tụ của γ được xác nhận thông qua hình 5.5. Có thể thấy rằng $\gamma(t)$ hội tụ về γ_0 sau $10 - 20$ e-folds. Hơn nữa, giá trị của γ_0 cũng tác động đến tốc độ hội tụ của $\gamma(t)$ giống như trường hợp $H_b(t)/H_a(t)$. Các kết quả này xác nhận rằng điều kiện $\gamma(t) = \gamma_0$ ở (5.2.18) thực sự là điểm hội tụ.



Hình 5.5: Sự thay đổi theo thời gian của $\gamma(t)$ cho 3 giá trị khác nhau của γ_0. Dễ thấy rằng $\gamma(t)$ hội tụ chính xác về các γ_0 tương ứng. Hình thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tương ứng với các nghiệm I, II và III. Đường cong màu đỏ, xanh lá và xanh dương lần lượt tương ứng với $\gamma_0 = 1$, 1.5, và 2.

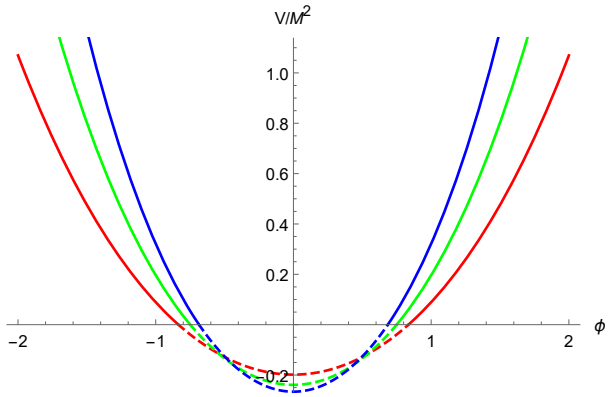
Hình 5.6 biểu diễn không gian pha của $H_b(t)/H_a(t)$ và $\eta_{\rm DBI}(t)$. Chúng ta thấy rằng với 3 giá trị khác nhau của γ_0, các đường đồ thị đều hội tụ về điểm cố định $\left(\hat{\beta}, n\right) \simeq (0.1, 0.0167)$.



Hình 5.6: Không gian pha của $H_b(t)/H_a(t)$ và $\eta_{\rm DBI}(t)$ cho các giá trị khác nhau của γ_0. Hình thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tương ứng với các nghiệm I, II và III. Đường cong màu đỏ, xanh lá và xanh dương lần lượt tương ứng với $\gamma_0 = 1$, 1.5, và 2.

Cuối cùng, chúng ta thảo luận về sự khác nhau giữa các nghiệm I, II, và III. Theo các hình vẽ trên, sự biến đổi của các tham số ứng với các nghiệm I, II, và III khác nhau không đáng kể ngoại trừ tại hình 5.5. Cụ thể, pha lạm phát tương ứng với 2 nghiệm đầu tiên I và II vẫn diễn ra khi số e-fold đạt 60. Tuy nhiên, nghiệm III lại không như vậy.

Thực chất, pha lạm phát ứng với nghiệm này dừng lại trước khi số e-fold đạt 60 do thế năng $V(\phi)$ nhận giá trị âm khi ϕ tiến lại gần 0. Một điểm nữa cần chú ý là giá trị của γ_0 có ảnh hưởng tới giá trị e-fold của nghiệm III. Cụ thể, giá trị γ_0 càng lớn, giá trị e-fold đạt được của pha lạm phát càng lớn. Kết quả này có thể được giải thích thông qua hình 5.7. Cụ thể, thế năng $V(\phi)$ có xu hướng trở nên âm sớm hơn khi γ_0 càng gần 1.



Hình 5.7: Đồ thị của hàm thế năng $V(\phi)$ ứng với nghiệm III cho các giá trị γ_0. Các đường màu đỏ, xanh lá, xanh dương lần lượt tương ứng với $\gamma_0 = 1$, 1.5 và 2.

Chương 6

Kết luận

Trong luận văn này, tôi đã trình bày những nội dung như sau:

Trong chương 2, tôi đã trình bày những nét khái quát về vũ trụ học cũng như về lý thuyết lạm phát vũ trụ. Cụ thể, từ metric FLRW, tôi đã dẫn ra các phương trình Friedmann - các phương trình mô tả sự phát triển của một vũ trụ đồng nhất và đẳng hướng. Tiếp đến, tôi đã giới về hai vấn đề của vũ trụ học là vấn đề chân trời và vấn đề độ phẳng. Sau đó, tôi cũng đã giới thiệu về lý thuyết lạm phát vũ trụ và cách mà nó giải quyết các vấn đề nêu trên. Mô hình lạm phát cuộn chậm với trường lạm phát vô hướng chính tắc - một mô hình lạm phát đơn giản cũng đã được nghiên cứu trong chương này. Trong mô hình cuộn chậm, thành phần động năng nhỏ hơn rất nhiều so với thế năng do trường vô hướng lăn chậm trên một vùng gần như là phẳng của hàm thế. Sau đó, dựa trên các phương trình Friedmann, chúng ta thấy rằng lạm phát xảy ra theo quy luật xấp xỉ hàm mũ (gần de Sitter). Chương 3 tập trung chủ yếu vào việc giới thiệu lý thuyết nhiễu loạn vũ trụ. Chúng ta đã nghiên cứu về nhiễu loạn metric, nhiễu loạn tensor năng xung lượng và từ đó đưa ra các phương trình nhiễu loạn. Tôi cũng đã giới thiệu khái niệm bất biến chuẩn - các đại lượng không đổi dưới phép biến đổi tọa độ chuẩn. Trong các bất biến chuẩn, có một bất biến vô cùng quan trọng đối với các quan sát thực nghiệm là nhiễu loạn độ cong đồng chuyển động $\mathcal{R}$. Tính chất thú vị của bất biến chuẩn này là nó sẽ không đổi theo thời gian tại thang đo rất lớn (bên ngoài bán kính Hubble). Phổ của $\mathcal{R}$ được tính toán trong chương 3. Qua đó chúng ta thấy rằng lạm phát cuộn chậm tiên đoán sự gần như không phụ thuộc vào thang đo của phổ của $\mathcal{R}$.

Chương 4 giới thiệu tổng quát về các bằng chứng thực nghiệm dẫn đến việc nghiên cứu lạm phát bất đẳng hướng (các dị thường trên bức xạ phông nền vũ trụ). Tôi cũng đã giới thiệu mô hình lạm phát bất đẳng hướng lũy thừa - một mô hình lạm phát đơn giản và chỉ ra tính ổn định của mô hình đó. Trong chương 5, tôi giới thiệu về mô hình lạm phát bất đẳng hướng dưới điều kiện cuộn hằng số. Giống như lạm phát cuộn chậm, mô hình lạm phát cuộn hằng số tiên đoán sự không phụ thuộc của phổ nhiễu loạn vào thang đo. Tuy nhiên, mô hình cuộn hằng số còn có các hệ quả khác biệt có thể quan sát

được như sự lệch khỏi phân bố chuẩn của nhiễu loạn nguyên thủy, thứ mà mô hình cuộn chậm không có. Mô hình lạm phát bất đẳng hướng dưới điều kiện cuộn hằng số được đề xuất bởi Asuka Ito và Jiro Soda [37] và được chứng minh là ổn định. Cũng trong chương này, tôi tìm cách mở rộng mô hình đó từ trường hợp chính tắc sang trường hợp lý thuyết Dirac-Born-Infeld. Bằng phương pháp số, tôi đã chứng minh được rằng mô hình mới này cũng có tính ổn định. Ngoài ra, tôi còn tìm được một tính chất mới thú vị là sự bất biến của vận tốc âm thanh c_s [44].

Việc mở rộng thành công mô hình lạm phát bất đẳng hướng dưới điều kiện cuộn hằng số sang cho lý thuyết Dirac-Born-Infeld có thể gợi ý cho việc mở rộng nó cho các mô hình không chính tắc khác nữa, ví dụ như mô hình lạm phát k với Lagrangian $\mathcal{L} = K(\phi)X + L(\phi)X^2 - V(\phi)$ [45]. Mặc dù thành công bước đầu về mặt lý thuyết, tuy nhiên cần phải có các tính toán sâu hơn như chỉ số phổ n_s hay tỉ số tensor-vô hướng để có thể khẳng định tính khả thi của mô hình.

Chương 7

Phụ lục

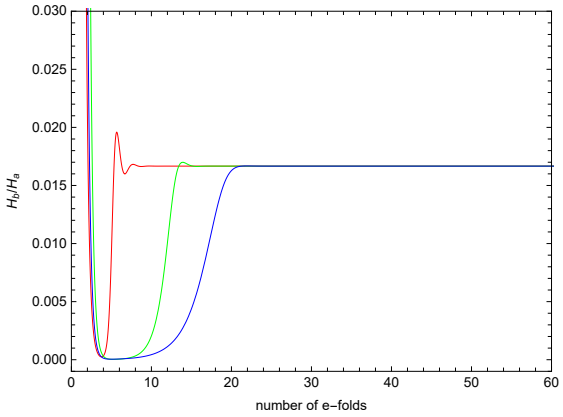
7.1 Code Mathematica cho nghiệm I

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
β = 0.1; (*(0.05) *)
tf = 2 * 10^5;
M = (10^(-4)); (*(10^(-5))*)
γa0 = 1; γa1 = 1.5; γa2 = 2;
Ha0 = 1; Hb0 = 0.1;
ϕ0 = 15; dϕ0 = 0;
step0 = 4; step1 = 10; step2 = 10;
(*  γa0  *)
V = (-21 β γa0 + 36 γa0 + 2 β^2 - 9 β + 36)/(12 (γa0 + 1)) M^2 Exp[2 Sqrt[(6 γa0 β)/(6 + β)] ϕ[t]];
h = Exp[Sqrt[(6 γa0 β)/(6 + β)] (-2 β + 6)/(3 β) ϕ[t]];
f = (6 (γa0^2 - 1))/(M^2 γa0 β (6 + β)) Exp[-2 Sqrt[(6 γa0 β)/(6 + β)] ϕ[t]];
γ = 1/Sqrt[1 - f ϕ'[t]^2];
eq1 = Ha[t]^2 - Hb[t]^2 - 3/2 Ha[t] × Hb[t] - 1/2 Hb'[t] - 1/3 (γ^2/(γ + 1) ϕ'[t]^2 + V);
eq2 = Ha'[t] + Hb'[t] + 3 Hb[t]^2 + 3 Ha[t] × Hb[t] + γ/2 ϕ'[t]^2;
eq3 = -ϕ''[t] - 3 Ha[t]/γ^2 ϕ'[t] - D[V, ϕ[t]]/γ^3 + 3 D[h, ϕ[t]]/(γ^3 h) (Hb'[t] + 3 Ha[t] × Hb[t]);
eq4 = Ne'[t] - Ha[t];
sol = NDSolve[{eq1 == 0, eq2 == 0, eq3 == 0, eq4 == 0, ϕ[0] == ϕ0, ϕ'[0] == dϕ0, Ha[0] == Ha0,
    Hb[0] == Hb0, Ne[0] == 0}, {ϕ, Ha, Hb, Ne}, {t, 0, tf}, MaxStepSize → step0];
pic1γa0 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], Hb[t]/Ha[t]} /. sol], {t, 0, tf},
   PlotRange → {{0, 60}, {-0.001, 0.03}}, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75,
   Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "H_b/H_a"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Red}];
pic2γa0 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], γ} /. sol], {t, 0, tf},
   PlotRange → {{0, 60}, {0, 3.5}}, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75, Frame → True,
   FrameLabel → {"number of e-folds", "γ"}, PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Red}];
pic3γa0 = ParametricPlot[Evaluate[{Hb[t]/Ha[t], -D[γ ϕ'[t], t]/(Ha[t] γ ϕ'[t])} /. sol], {t, 0, tf/10},
   PlotRange → Full, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75, Frame → True,
   FrameLabel → {"H_b/H_a", "η_DBI"}, PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Red}];
(*  γa1  *)
V = (-21 β γa1 + 36 γa1 + 2 β^2 - 9 β + 36)/(12 (γa1 + 1)) M^2 Exp[2 Sqrt[(6 γa1 β)/(6 + β)] ϕ[t]];
```

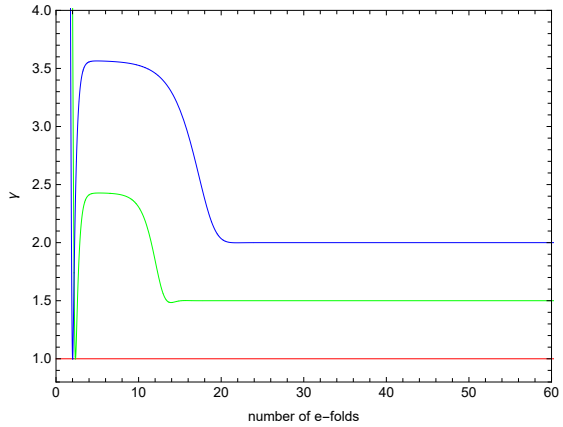
```
h = Exp[Sqrt[(6 γa1 β)/(6 + β)] (-2 β + 6)/(3 β) ϕ[t]];

f = (6 (γa1^2 - 1))/(M^2 γa1 β (6 + β)) Exp[-2 Sqrt[(6 γa1 β)/(6 + β)] ϕ[t]];

γ = 1/Sqrt[1 - f ϕ'[t]^2];

eq1 = Ha[t]^2 - Hb[t]^2 - 3/2 Ha[t] × Hb[t] - 1/2 Hb'[t] - 1/3 (γ^2/(γ + 1) ϕ'[t]^2 + V);
eq2 = Ha'[t] + Hb'[t] + 3 Hb[t]^2 + 3 Ha[t] × Hb[t] + γ/2 ϕ'[t]^2;
eq3 = -ϕ''[t] - 3 Ha[t]/γ^2 ϕ'[t] - D[V, ϕ[t]]/γ^3 -
    D[f, ϕ[t]]/(2 f) ((γ + 2) (γ - 1))/((γ + 1) γ) ϕ'[t]^2 + 3 D[h, ϕ[t]]/(γ^3 h) (Hb'[t] + 3 Ha[t] × Hb[t]);
eq4 = Ne'[t] - Ha[t];
sol = NDSolve[{eq1 == 0, eq2 == 0, eq3 == 0, eq4 == 0, ϕ[0] == ϕ0, ϕ'[0] == dϕ0, Ha[0] == Ha0,
     Hb[0] == Hb0, Ne[0] == 0}, {ϕ, Ha, Hb, Ne}, {t, 0, tf}, MaxStepSize → step1];
pic1γa1 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], Hb[t]/Ha[t]} /. sol], {t, 0, tf},
   PlotRange → {{0, 60}, {-0.001, 0.03}}, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75,
   Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "H_b/H_a"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Green}];
pic2γa1 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], γ} /. sol], {t, 1, tf},
   PlotRange → {{0, 60}, {0, 3.5}}, PlotPoints → 10000, MaxRecursion → 15,
   AspectRatio → 0.75, Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "γ"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Green}];
pic3γa1 = ParametricPlot[Evaluate[{Hb[t]/Ha[t], -D[γ ϕ'[t], t]/(Ha[t] γ ϕ'[t])} /. sol], {t, 0, tf/10},
   PlotRange → Full, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75, Frame → True,
   FrameLabel → {"H_b/H_a", "η_DBI"}, PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Green}];
(*  γa2  *)
V = (-21 β γa2 + 36 γa2 + 2 β^2 - 9 β + 36)/(12 (γa2 + 1)) M^2 Exp[2 Sqrt[(6 γa2 β)/(6 + β)] ϕ[t]];

h = Exp[Sqrt[(6 γa2 β)/(6 + β)] (-2 β + 6)/(3 β) ϕ[t]];

f = (6 (γa2^2 - 1))/(M^2 γa2 β (6 + β)) Exp[-2 Sqrt[(6 γa2 β)/(6 + β)] ϕ[t]];

γ = 1/Sqrt[1 - f ϕ'[t]^2];
```

```
eq1 = Ha[t]^2 - Hb[t]^2 - 3/2 Ha[t] × Hb[t] - 1/2 Hb'[t] - 1/3 (γ^2/(γ+1) ϕ'[t]^2 + V);
eq2 = Ha'[t] + Hb'[t] + 3 Hb[t]^2 + 3 Ha[t] × Hb[t] + γ/2 ϕ'[t]^2;
eq3 = -ϕ''[t] - 3 Ha[t]/γ^2 ϕ'[t] - D[V, ϕ[t]]/γ^3 -
    D[f, ϕ[t]]/(2 f) (γ+2)(γ-1)/((γ+1) γ) ϕ'[t]^2 + 3 D[h, ϕ[t]]/(γ^3 h) (Hb'[t] + 3 Ha[t] × Hb[t]);
eq4 = Ne'[t] - Ha[t];
sol = NDSolve[{eq1 == 0, eq2 == 0, eq3 == 0, eq4 == 0, ϕ[0] == ϕ0, ϕ'[0] == dϕ0, Ha[0] == Ha0,
     Hb[0] == Hb0, Ne[0] == 0}, {ϕ, Ha, Hb, Ne}, {t, 0, tf}, MaxStepSize → step2];
pic1γa2 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], Hb[t]/Ha[t]} /. sol], {t, 0, tf},
   PlotRange → {{0, 60}, {-0.001, 0.03}}, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75,
   Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "H_b/H_a"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Blue}];
pic2γa2 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], γ} /. sol], {t, 1, tf},
   PlotRange → {{0, 60}, {0, 3.5}}, PlotPoints → 10000, MaxRecursion → 15,
   AspectRatio → 0.75, Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "γ"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Blue}];
pic3γa2 = ParametricPlot[Evaluate[{Hb[t]/Ha[t], -D[γ ϕ'[t], t]/(Ha[t] γ ϕ'[t])} /. sol], {t, 0, tf/10},
   PlotRange → Full, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75, Frame → True,
   FrameLabel → {"H_b/H_a", "η_DBI"}, PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Blue}];

Show[pic1γa0, pic1γa1, pic1γa2,
 PlotRange → {{0, 60}, {-0.001, 0.03}}, LabelStyle → Directive[Black]]
zoom = Show[pic2γa0, pic2γa1, pic2γa2, PlotRange → {{1.9, 2.55}, {0.95, 1.25}},
   FrameTicks → {{{{1, "1.0"}, 1.1, 1.2}, None}, {{{2, "2.0"}, 2.2, 2.4}, None}},
   FrameLabel → {None, None}, LabelStyle → Bold];
Show[pic2γa0, pic2γa1, pic2γa2, PlotRange → {{0, 60}, {0.8, 4}},
 (*Epilog→{Directive[{Black}],Line[{{1,0.95},{3.8,0.95}}],
   Line[{{3.8,0.95},{3.8,1.15}}],Line[{{3.8,1.15},{1,1.15}}],
   Line[{{1,1.15},{1,0.95}}],Inset[zoom,{Right,Top},{Right,Top},Scaled[{.55,.55}]]},*)
 LabelStyle → Directive[Black]]
Show[pic3γa0, pic3γa1, pic3γa2, PlotRange → {{0.014, 0.020}, {-0.4, 1.0}}, Epilog →
  {Directive[{Black, Dotted}], Line[{{0, β}, {β/6, β}}], Line[{{β/6, -1}, {β/6, β}}]},
 LabelStyle → Directive[Black], AspectRatio → 0.8, Axes → False]
```

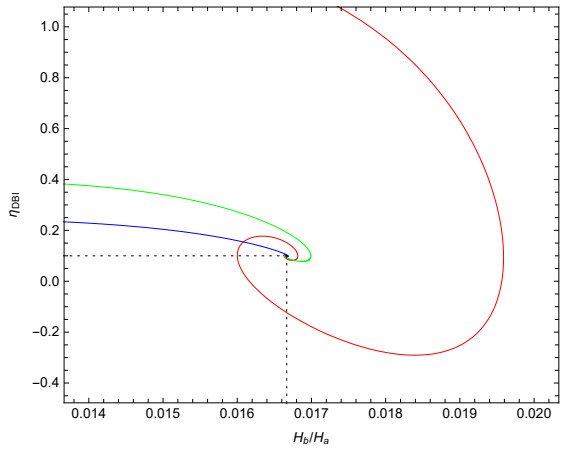
Out[•]=



Out[•]=



Out[•]=



7.2 Code Mathematica cho nghiệm II

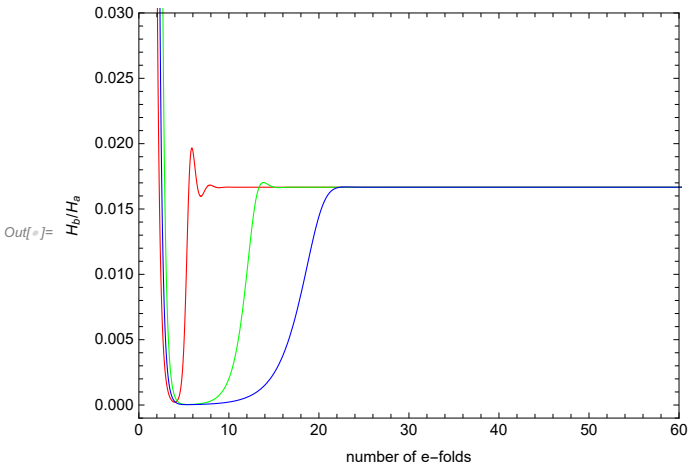
```
ClearAll["Global`*"];
β = 0.1; (*(0.05) *)
tf = 2 * 10^5;
M = 10^(-4); (*(10^(-5))*)
γa0 = 1; γa1 = 1.5; γa2 = 2;
Ha0 = 1; Hb0 = 0.1;
ϕ0 = 15; dϕ0 = 0;
step0 = 5; step1 = 10; step2 = 10;
(*  γa0  *)
V = M^2/(24 (γa0 + 1)) (-2 β^2 γa0 - 27 β γa0 - 36 γa0 + 4 β^2 + 9 β - 36 + (-21 β γa0 + 36 γa0 + 2 β^2 - 9 β + 36)
      Cosh[2 Sqrt[(6 γa0 β)/(6 + β)] ϕ[t]] - 2 (-β γa0 - 24 γa0 + 3 β) β Cosh[Sqrt[(6 γa0 β)/(6 + β)] ϕ[t]]);
h = (-1 + Cosh[Sqrt[(6 γa0 β)/(6 + β)] ϕ[t]])^((6+β)/(3 β)) /
   (Sqrt[(-(3 + β) - (β - 3) Cosh[2 Sqrt[(6 γa0 β)/(6 + β)] ϕ[t]] + 2 β Cosh[Sqrt[(6 γa0 β)/(6 + β)] ϕ[t]])]);
f = (γa0^2 - 1)/(γa0^2 M^2 (β (6+β))/(6 γa0) (1 - Cosh[Sqrt[(6 γa0 β)/(6+β)] ϕ[t]])^2);
γ = 1/Sqrt[1 - f ϕ'[t]^2];
eq1 = Ha[t]^2 - Hb[t]^2 - 3/2 Ha[t] × Hb[t] - 1/2 Hb'[t] - 1/3 (γ^2/(γ + 1) ϕ'[t]^2 + V);
eq2 = Ha'[t] + Hb'[t] + 3 Hb[t]^2 + 3 Ha[t] × Hb[t] + γ/2 ϕ'[t]^2;
eq3 = -ϕ''[t] - 3 Ha[t]/γ^2 ϕ'[t] - D[V, ϕ[t]]/γ^3 + 3 D[h, ϕ[t]]/(γ^3 h) (Hb'[t] + 3 Ha[t] × Hb[t]);
eq4 = Ne'[t] - Ha[t];
sol = NDSolve[{eq1 == 0, eq2 == 0, eq3 == 0, eq4 == 0, ϕ[0] == ϕ0, ϕ'[0] == dϕ0, Ha[0] == Ha0,
    Hb[0] == Hb0, Ne[0] == 0}, {ϕ, Ha, Hb, Ne}, {t, 0, tf}, MaxStepSize → step0];
pic1γa0 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], Hb[t]/Ha[t]} /. sol], {t, 0, tf},
   PlotRange → {{0, 60}, {-0.001, 0.03}}, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75,
   Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "H_b/H_a"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Red}];
pic2γa0 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], γ} /. sol], {t, 0, tf},
   PlotRange → {{0, 60}, {0, 3.5}}, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75, Frame → True,
   FrameLabel → {"number of e-folds", "γ"}, PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Red}];
```

```
pic3γa0 = ParametricPlot[Evaluate[{Hb[t]/Ha[t], -D[γ ϕ'[t], t]/(Ha[t] γ ϕ'[t])} /. sol], {t, 0, tf/10},
   PlotRange → Full, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75, Frame → True,
   FrameLabel → {"H_b/H_a", "η_DBI"}, PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Red}];
(*  γa1  *)
V = M^2/(24 (γa1 + 1)) (-2 β^2 γa1 - 27 β γa1 - 36 γa1 + 4 β^2 + 9 β - 36 + (-21 β γa1 + 36 γa1 + 2 β^2 - 9 β + 36)
      Cosh[2 Sqrt[6 γa1 β/(6 + β)] ϕ[t]] - 2 (-β γa1 - 24 γa1 + 3 β) β Cosh[Sqrt[6 γa1 β/(6 + β)] ϕ[t]]);
h = (-1 + Cosh[Sqrt[6 γa1 β/(6 + β)] ϕ[t]])^((6+β)/(3β)) /
   (Sqrt[(-(3 + β) - (β - 3) Cosh[2 Sqrt[6 γa1 β/(6 + β)] ϕ[t]] + 2 β Cosh[Sqrt[6 γa1 β/(6 + β)] ϕ[t]])]);
f = (γa1^2 - 1)/(γa1^2 M^2 (β (6+β))/(6 γa1) (1 - Cosh[Sqrt[6 γa1 β/(6+β)] ϕ[t]])^2);
γ = 1/Sqrt[1 - f ϕ'[t]^2];
eq1 = Ha[t]^2 - Hb[t]^2 - 3/2 Ha[t] × Hb[t] - 1/2 Hb'[t] - 1/3 (γ^2/(γ + 1) ϕ'[t]^2 + V);
eq2 = Ha'[t] + Hb'[t] + 3 Hb[t]^2 + 3 Ha[t] × Hb[t] + γ/2 ϕ'[t]^2;
eq3 = -ϕ''[t] - 3 Ha[t]/γ^2 ϕ'[t] - D[V, ϕ[t]]/γ^3 -
   D[f, ϕ[t]]/(2 f) ((γ + 2) (γ - 1))/((γ + 1) γ) ϕ'[t]^2 + 3 D[h, ϕ[t]]/(γ^3 h) (Hb'[t] + 3 Ha[t] × Hb[t]);
eq4 = Ne'[t] - Ha[t];
sol = NDSolve[{eq1 == 0, eq2 == 0, eq3 == 0, eq4 == 0, ϕ[0] == ϕ0, ϕ'[0] == dϕ0, Ha[0] == Ha0,
    Hb[0] == Hb0, Ne[0] == 0}, {ϕ, Ha, Hb, Ne}, {t, 0, tf}, MaxStepSize → step1];
pic1γa1 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], Hb[t]/Ha[t]} /. sol], {t, 0, tf},
   PlotRange → {{0, 60}, {-0.001, 0.03}}, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75,
   Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "H_b/H_a"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Green}];
pic2γa1 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], γ} /. sol], {t, 1, tf},
   PlotRange → {{0, 60}, {0, 3.5}}, PlotPoints → 10000, MaxRecursion → 15,
   AspectRatio → 0.75, Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "γ"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Green}];
```

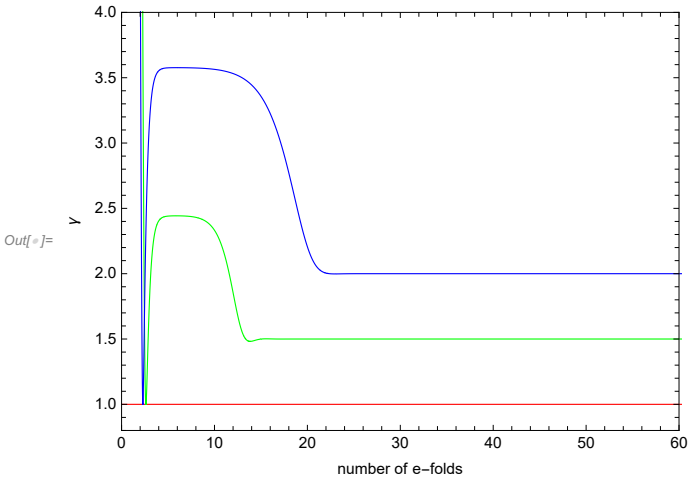
```
pic3γa1 = ParametricPlot[Evaluate[{Hb[t]/Ha[t], -D[γ ϕ'[t], t]/(Ha[t] γ ϕ'[t])} /. sol], {t, 0, tf/10},
   PlotRange → Full, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75, Frame → True,
   FrameLabel → {"H_b/H_a", "η_DBI(t)"}, PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Green}];
(*  γa2  *)
V = M^2/(24 (γa2 + 1)) (-2 β^2 γa2 - 27 β γa2 - 36 γa2 + 4 β^2 + 9 β - 36 + (-21 β γa2 + 36 γa2 + 2 β^2 - 9 β + 36)
      Cosh[2 Sqrt[6 γa2 β/(6 + β)] ϕ[t]] - 2 (-β γa2 - 24 γa2 + 3 β) β Cosh[Sqrt[6 γa2 β/(6 + β)] ϕ[t]]);
h = (-1 + Cosh[Sqrt[6 γa2 β/(6 + β)] ϕ[t]])^((6+β)/(3β)) /
   (Sqrt[(-(3 + β) - (β - 3) Cosh[2 Sqrt[6 γa2 β/(6 + β)] ϕ[t]] + 2 β Cosh[Sqrt[6 γa2 β/(6 + β)] ϕ[t]])]);
f = (γa2^2 - 1)/(γa2^2 M^2 (β (6+β))/(6 γa2) (1 - Cosh[Sqrt[6 γa2 β/(6+β)] ϕ[t]])^2);
γ = 1/Sqrt[1 - f ϕ'[t]^2];
eq1 = Ha[t]^2 - Hb[t]^2 - 3/2 Ha[t] × Hb[t] - 1/2 Hb'[t] - 1/3 (γ^2/(γ + 1) ϕ'[t]^2 + V);
eq2 = Ha'[t] + Hb'[t] + 3 Hb[t]^2 + 3 Ha[t] × Hb[t] + γ/2 ϕ'[t]^2;
eq3 = -ϕ''[t] - 3 Ha[t]/γ^2 ϕ'[t] - D[V, ϕ[t]]/γ^3 -
   D[f, ϕ[t]]/(2 f) ((γ + 2) (γ - 1))/((γ + 1) γ) ϕ'[t]^2 + 3 D[h, ϕ[t]]/(γ^3 h) (Hb'[t] + 3 Ha[t] × Hb[t]);
eq4 = Ne'[t] - Ha[t];
sol = NDSolve[{eq1 == 0, eq2 == 0, eq3 == 0, eq4 == 0, ϕ[0] == ϕ0, ϕ'[0] == dϕ0, Ha[0] == Ha0,
    Hb[0] == Hb0, Ne[0] == 0}, {ϕ, Ha, Hb, Ne}, {t, 0, tf}, MaxStepSize → step2];
pic1γa2 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], Hb[t]/Ha[t]} /. sol], {t, 0, tf},
   PlotRange → {{0, 60}, {-0.001, 0.03}}, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75,
   Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "H_b/H_a"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Blue}];
pic2γa2 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], γ} /. sol], {t, 1, tf},
   PlotRange → {{0, 60}, {0, 3.5}}, PlotPoints → 10000, MaxRecursion → 15,
   AspectRatio → 0.75, Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "γ"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Blue}];
```

```
pic3γa2 = ParametricPlot[Evaluate[{Hb[t]/Ha[t], -D[γ ϕ'[t], t]/(Ha[t] γ ϕ'[t])} /. sol], {t, 0, tf/10},
   PlotRange → Full, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75, Frame → True,
   FrameLabel → {"Hb/Ha", "ηDBI"}, PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Blue}];

Show[pic1γa0, pic1γa1, pic1γa2,
 PlotRange → {{0, 60}, {-0.001, 0.03}}, LabelStyle → Directive[Black]]
zoom = Show[pic2γa0, pic2γa1, pic2γa2, PlotRange → {{2.2, 2.8}, {0.95, 1.25}},
   FrameTicks → {{{{1, "1.0"}, 1.1, 1.2}, None}, {{2.3, 2.5, 2.7}, None}},
   FrameLabel → {None, None}, LabelStyle → Bold];
Show[pic2γa0, pic2γa1, pic2γa2, PlotRange → {{0, 60}, {0.8, 4.0}},
 (*Epilog→{Directive[{Black}],Line[{{1,0.95},{3.8,0.95}}],
   Line[{{3.8,0.95},{3.8,1.15}}],Line[{{3.8,1.15},{1,1.15}}],
   Line[{{1,1.15},{1,0.95}}],Inset[zoom,{Right,Top},{Right,Top},Scaled[{.55,.55}]]},*)
 LabelStyle → Directive[Black]]
Show[pic3γa0, pic3γa1, pic3γa2, PlotRange → {{0.014, 0.020}, {-0.4, 1.0}}, Epilog →
  {Directive[{Black, Dotted}], Line[{{0, β}, {β / 6, β}}], Line[{{β / 6, -1}, {β / 6, β}}]},
 LabelStyle → Directive[Black], AspectRatio → 0.8, Axes → False]
```

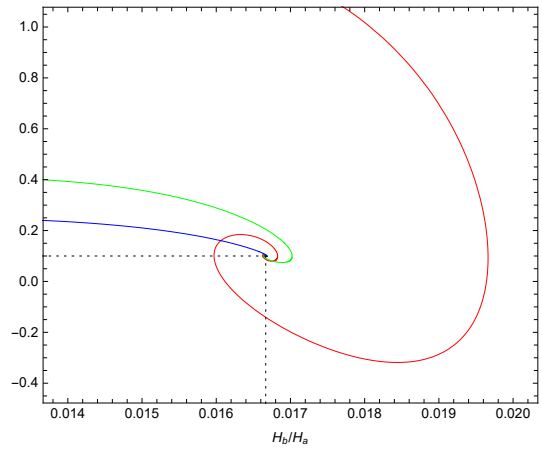
Out[•]=



Out[•]=



Out[ ]=



7.3 Code Mathematica cho nghiệm III

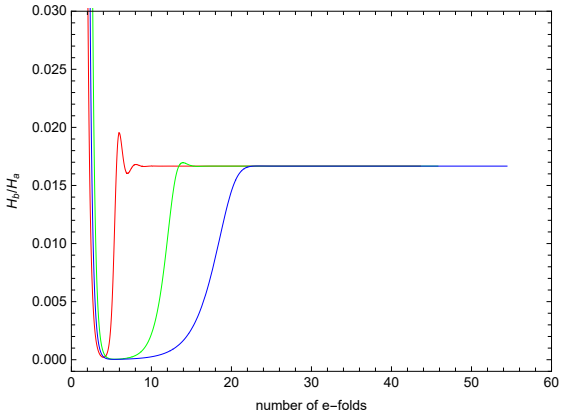
```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
β = 0.1; (*(0.05) *)
tf = 2 * 10^5;
M = (10^(-4)); (*(10^(-5))*)
γa0 = 1; γa1 = 1.5; γa2 = 2;
Ha0 = 1; Hb0 = 0.1;
ϕ0 = 15; dϕ0 = 0;
step0 = 5; step1 = 10; step2 = 10;
(*  γa0  *)
V = M^2/(24 (γa0 + 1)) (-2 β^2 γa0 - 27 β γa0 - 36 γa0 + 4 β^2 + 9 β - 36 + (-21 β γa0 + 36 γa0 + 2 β^2 - 9 β + 36)
      Cosh[2 Sqrt[6 γa0 β/(6 + β)] ϕ[t]] + 2 (-β γa0 - 24 γa0 + 3 β) β Cosh[Sqrt[6 γa0 β/(6 + β)] ϕ[t]]);
h = (+1 + Cosh[Sqrt[6 γa0 β/(6 + β)] ϕ[t]])^((6+β)/(3 β)) /
   (Sqrt[(-(3 + β) - (β - 3) Cosh[2 Sqrt[6 γa0 β/(6 + β)] ϕ[t]] - 2 β Cosh[Sqrt[6 γa0 β/(6 + β)] ϕ[t]])]);
f = (γa0^2 - 1)/(γa0^2 M^2 (β (6+β))/(6 γa0) (-1 - Cosh[Sqrt[6 γa0 β/(6+β)] ϕ[t]])^2);
γ = 1/Sqrt[1 - f ϕ'[t]^2];
eq1 = Ha[t]^2 - Hb[t]^2 - 3/2 Ha[t] × Hb[t] - 1/2 Hb'[t] - 1/3 (γ^2/(γ + 1) ϕ'[t]^2 + V);
eq2 = Ha'[t] + Hb'[t] + 3 Hb[t]^2 + 3 Ha[t] × Hb[t] + γ/2 ϕ'[t]^2;
eq3 = -ϕ''[t] - 3 Ha[t]/γ^2 ϕ'[t] - D[V, ϕ[t]]/γ^3 + 3 D[h, ϕ[t]]/(γ^3 h) (Hb'[t] + 3 Ha[t] × Hb[t]);
eq4 = Ne'[t] - Ha[t];
sol = NDSolve[{eq1 == 0, eq2 == 0, eq3 == 0, eq4 == 0, WhenEvent[
      M^2/(24 (γa0 + 1)) (-2 β^2 γa0 - 27 β γa0 - 36 γa0 + 4 β^2 + 9 β - 36 + (-21 β γa0 + 36 γa0 + 2 β^2 - 9 β + 36)
        Cosh[2 Sqrt[6 γa0 β/(6 + β)] ϕ[t]] + 2 (-β γa0 - 24 γa0 + 3 β) β Cosh[Sqrt[6 γa0 β/(6 + β)] ϕ[t]]) < 0,
    {tmax = t, "StopIntegration"}], ϕ[0] == ϕ0, ϕ'[0] == dϕ0, Ha[0] == Ha0,
   Hb[0] == Hb0, Ne[0] == 0}, {ϕ, Ha, Hb, Ne}, {t, 0, tf}, MaxStepSize → step0];
```

```
pic1γa0 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], Hb[t]/Ha[t]} /. sol], {t, 0, tmax},
   PlotRange → {{0, 60}, {-0.001, 0.03}}, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75,
   Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "Hb/Ha"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Red}];
pic2γa0 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], γ} /. sol], {t, 0, tmax},
   PlotRange → {{0, 60}, {0, 3.5}}, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75, Frame → True,
   FrameLabel → {"number of e-folds", "γ"}, PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Red}];
pic3γa0 = ParametricPlot[Evaluate[{Hb[t]/Ha[t], -D[γ ϕ'[t], t]/(Ha[t] γ ϕ'[t])} /. sol], {t, 0, tf/10},
   PlotRange → Full, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75, Frame → True,
   FrameLabel → {"Hb/Ha", "η DBI"}, PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Red}];
(*  γa1  *)
V = M^2/(24 (γa1 + 1)) (-2 β^2 γa1 - 27 β γa1 - 36 γa1 + 4 β^2 + 9 β - 36 + (-21 β γa1 + 36 γa1 + 2 β^2 - 9 β + 36)
      Cosh[2 Sqrt[6 γa1 β/(6 + β)] ϕ[t]] + 2 (-β γa1 - 24 γa1 + 3 β) β Cosh[Sqrt[6 γa1 β/(6 + β)] ϕ[t]]);
h = (+1 + Cosh[Sqrt[6 γa1 β/(6 + β)] ϕ[t]])^((6+β)/(3β)) /
   (Sqrt[(-(3 + β) - (β - 3) Cosh[2 Sqrt[6 γa1 β/(6 + β)] ϕ[t]] - 2 β Cosh[Sqrt[6 γa1 β/(6 + β)] ϕ[t]])]);
f = (γa1^2 - 1)/(γa1^2 M^2 (β (6+β))/(6 γa1) (-1 - Cosh[Sqrt[6 γa1 β/(6+β)] ϕ[t]])^2);
γ = 1/Sqrt[1 - f ϕ'[t]^2];
eq1 = Ha[t]^2 - Hb[t]^2 - 3/2 Ha[t] × Hb[t] - 1/2 Hb'[t] - 1/3 (γ^2/(γ + 1) ϕ'[t]^2 + V);
eq2 = Ha'[t] + Hb'[t] + 3 Hb[t]^2 + 3 Ha[t] × Hb[t] + γ/2 ϕ'[t]^2;
eq3 = -ϕ''[t] - 3 Ha[t]/γ^2 ϕ'[t] - D[V, ϕ[t]]/γ^3 -
   D[f, ϕ[t]]/(2 f) ((γ + 2) (γ - 1))/((γ + 1) γ) ϕ'[t]^2 + 3 D[h, ϕ[t]]/(γ^3 h) (Hb'[t] + 3 Ha[t] × Hb[t]);
eq4 = Ne'[t] - Ha[t];
sol = NDSolve[{eq1 == 0, eq2 == 0, eq3 == 0, eq4 == 0, WhenEvent[
```

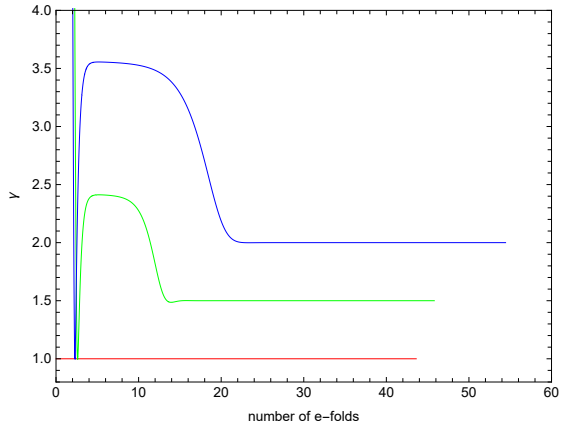
```
        M^2/(24 (γa1 + 1)) (-2 β^2 γa1 - 27 β γa1 - 36 γa1 + 4 β^2 + 9 β - 36 + (-21 β γa1 + 36 γa1 + 2 β^2 - 9 β + 36)
          Cosh[2 Sqrt[6 γa1 β/(6 + β)] ϕ[t]] + 2 (-β γa1 - 24 γa1 + 3 β) β Cosh[Sqrt[6 γa1 β/(6 + β)] ϕ[t]]) < 0,
      {tmax = t, "StopIntegration"}], ϕ[0] == ϕ0, ϕ'[0] == dϕ0, Ha[0] == Ha0,
     Hb[0] == Hb0, Ne[0] == 0}, {ϕ, Ha, Hb, Ne}, {t, 0, tf}, MaxStepSize → step1];
pic1γa1 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], Hb[t]/Ha[t]} /. sol], {t, 0, tmax},
   PlotRange → {{0, 60}, {-0.001, 0.03}}, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75,
   Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "H_b/H_a"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Green}];
pic2γa1 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], γ} /. sol], {t, 10, tmax},
   PlotRange → {{10, 60}, {0, 3.5}}, PlotPoints → 10000, MaxRecursion → 15,
   AspectRatio → 0.75, Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "γ"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Green}];
pic3γa1 = ParametricPlot[Evaluate[{Hb[t]/Ha[t], -D[γ ϕ'[t], t]/(Ha[t] γ ϕ'[t])} /. sol], {t, 0, tf/10},
   PlotRange → Full, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75, Frame → True,
   FrameLabel → {"H_b/H_a", "η_DBI"}, PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Green}];
(* γa2 *)
V = M^2/(24 (γa2 + 1)) (-2 β^2 γa2 - 27 β γa2 - 36 γa2 + 4 β^2 + 9 β - 36 + (-21 β γa2 + 36 γa2 + 2 β^2 - 9 β + 36)
      Cosh[2 Sqrt[6 γa2 β/(6 + β)] ϕ[t]] + 2 (-β γa2 - 24 γa2 + 3 β) β Cosh[Sqrt[6 γa2 β/(6 + β)] ϕ[t]]);
h = (+1 + Cosh[Sqrt[6 γa2 β/(6 + β)] ϕ[t]])^((6+β)/(3β)) /
   (Sqrt[(-(3 + β) - (β - 3) Cosh[2 Sqrt[6 γa2 β/(6 + β)] ϕ[t]] - 2 β Cosh[Sqrt[6 γa2 β/(6 + β)] ϕ[t]])]);
f = (γa2^2 - 1)/(γa2^2 M^2 (β (6+β))/(6 γa2) (-1 - Cosh[Sqrt[6 γa2 β/(6+β)] ϕ[t]])^2);
γ = 1/Sqrt[1 - f ϕ'[t]^2];
eq1 = Ha[t]^2 - Hb[t]^2 - 3/2 Ha[t] × Hb[t] - 1/2 Hb'[t] - 1/3 (γ^2/(γ + 1) ϕ'[t]^2 + V);
```

```
eq2 = Ha'[t] + Hb'[t] + 3 Hb[t]^2 + 3 Ha[t] × Hb[t] + γ/2 ϕ'[t]^2;
eq3 = -ϕ''[t] - 3 Ha[t]/γ^2 ϕ'[t] - D[V, ϕ[t]]/γ^3 -
    D[f, ϕ[t]]/(2 f) (γ + 2) (γ - 1)/((γ + 1) γ) ϕ'[t]^2 + 3 D[h, ϕ[t]]/(γ^3 h) (Hb'[t] + 3 Ha[t] × Hb[t]);
eq4 = Ne'[t] - Ha[t];
sol = NDSolve[{eq1 == 0, eq2 == 0, eq3 == 0, eq4 == 0, WhenEvent[
      M^2/(24 (γa2 + 1)) (-2 β^2 γa2 - 27 β γa2 - 36 γa2 + 4 β^2 + 9 β - 36 + (-21 β γa2 + 36 γa2 + 2 β^2 - 9 β + 36)
          Cosh[2 Sqrt[6 γa2 β/(6 + β)] ϕ[t]] + 2 (-β γa2 - 24 γa2 + 3 β) β Cosh[Sqrt[6 γa2 β/(6 + β)] ϕ[t]]) < 0,
     {tmax = t, "StopIntegration"}], ϕ[0] == ϕ0, ϕ'[0] == dϕ0, Ha[0] == Ha0,
    Hb[0] == Hb0, Ne[0] == 0}, {ϕ, Ha, Hb, Ne}, {t, 0, tf}, MaxStepSize → step2];
pic1γa2 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], Hb[t]/Ha[t]} /. sol], {t, 0, tmax},
   PlotRange → {{0, 60}, {-0.001, 0.03}}, MaxRecursion → 15, AspectRatio → 0.75,
   Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "H_b/H_a"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Blue}];
pic2γa2 = ParametricPlot[Evaluate[{Ne[t], γ} /. sol], {t, 10, tmax},
   PlotRange → {{10, 60}, {0, 3.5}}, PlotPoints → 10000, MaxRecursion → 15,
   AspectRatio → 0.75, Frame → True, FrameLabel → {"number of e-folds", "γ"},
   PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Blue}];
pic3γa2 = ParametricPlot[Evaluate[{Hb[t]/Ha[t], -D[γ ϕ'[t], t]/(Ha[t] γ ϕ'[t])} /. sol],
   {t, 0, tf/10}, PlotRange → Full, MaxRecursion → 15,
   AspectRatio → 0.75, Frame → True, FrameLabel → {"H_b/H_a", "η_DBI"},
   RotateLabel → True, PlotStyle → {Thickness[2 * 10^-3], Blue}];

Show[pic1γa0, pic1γa1, pic1γa2,
 PlotRange → {{0, 60}, {-0.001, 0.03}}, LabelStyle → Directive[Black]]
zoom = Show[pic2γa0, pic2γa1, pic2γa2, PlotRange → {{1.9, 2.55}, {0.95, 1.25}},
   FrameTicks → {{{{1, "1.0"}, 1.1, 1.2}, None}, {{{2, "2.0"}, 2.2, 2.4}, None}},
   FrameLabel → {None, None}, LabelStyle → Bold];
Show[pic2γa0, pic2γa1, pic2γa2, PlotRange → {{0, 60}, {0.8, 4}},
 (*Epilog→{Directive[{Black}],Line[{{1,0.95},{3.8,0.95}}],
   Line[{{3.8,0.95},{3.8,1.15}}],Line[{{3.8,1.15},{1,1.15}}],
   Line[{{1,1.15},{1,0.95}}],Inset[zoom,{Right,Top},{Right,Top},Scaled[{.55,.55}]]},*)
 LabelStyle → Directive[Black]]
Show[pic3γa0, pic3γa1, pic3γa2, PlotRange → {{0.014, 0.020}, {-0.4, 1.0}}, Epilog →
  {Directive[{Black, Dotted}], Line[{{0, β}, {β/6, β}}], Line[{{β/6, -1}, {β/6, β}}]},
 LabelStyle → Directive[Black], AspectRatio → 0.8, Axes → False]
```

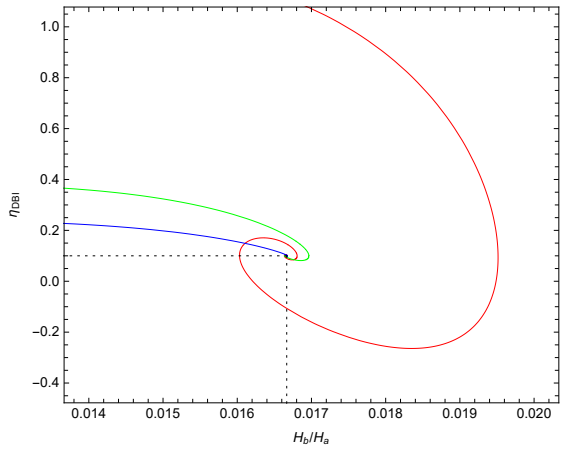
Out[•]=


0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
H_b/H_a
0
10
20
30
40
50
60
number of e−folds

Out[•]=


4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
γ
0
10
20
30
40
50
60
number of e−folds

Out[•]=


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
η_{DBI}
0.014
0.015
0.016
0.017
0.018
0.019
0.020
H_b/H_a

Tài liệu tham khảo

[1] A. Einstein, The Foundation of the General Theory of Relativity, Annalen der Physik **49**, 769 (1916).

[2] A. Friedman, Uber die Krummung des Raumes, Z. Phys. (in German). **10**(1), 377-386 (1922).

[3] A. Friedmann, Uber die Moglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krummung des Raumes, Z. Phys. (in German). **21**(1): 326-332 (1924).

[4] A. H. Guth, The inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981);

[5] A. D. Linde, A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems, Phys. Lett. **108B**, 389 (1982);

[6] G. Hinshaw *et al.* [WMAP Collaboration], Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Cosmological parameter results, Astrophys. J. Suppl. **208**, 19 (2013) [arXiv:1212.5226].

[7] N. Aghanim *et al.* [Planck Collaboration], Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, Astron. Astrophys. **641**, A6 (2020) [arXiv:1807.06209]; Y. Akrami *et al.* [Planck Collaboration], Planck 2018 results. X. Constraints on inflation, Astron. Astrophys. **641**, A10 (2020) [arXiv:1807.06211]; Y. Akrami *et al.* [Planck Collaboration], Planck 2018 results. VII. Isotropy and statistics of the CMB, Astron. Astrophys. **641**, A7 (2020) [arXiv:1906.02552].

[8] Sean Caroll, Spacetime and Geometry: An introduction to general relativity, Addison-Wesley (2004).

[9] M. Troden and S. M. Caroll, TASI lectures: Introduction to cosmology, astro-ph/0401547.

[10] D.Baumann, TASI Lectures on Inflation, arXiv:0907.5424 [hep-th].

[11] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. F. Mukhanov, k-inflation, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999) [hep-th/9904075]; J. Garriga and V. F. Mukhanov, Perturbations in k-inflation, Phys. Lett. B **458**, 219 (1999) [hep-th/9904176].

[12] Richard A. Carrigan Jr, W. Peter Trower, Magnetic monopoles, Nature volume **305**, 673678 (1983).

[13] Robert H. Dicke, Gravitation and the Universe: Jayne Lectures for 1969, American Philo- sophical Society (1970).

[14] J. M. Maldacena, Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models, JHEP **05** (2003) 013

[15] T. Buchert, A. A. Coley, H. Kleinert, B. F. Roukema, and D. L. Wiltshire, Observational challenges for the standard FLRW model, Int. J. Mod. Phys. D **25**, 1630007 (2016) [arXiv:1512.03313].

[16] D. Saadeh, S. M. Feeney, A. Pontzen, H. V. Peiris, and J. D. McEwen, How isotropic is the Universe?, Phys. Rev. Lett. **117**, 131302 (2016) [arXiv:1605.07178]; J. Soltis, A. Farahi, D. Huterer, and C. M. Liberato II, Percent-level test of isotropic expansion using type Ia supernovae Phys. Rev. Lett. **122**, 091301 (2019) [arXiv:1902.07189]; N. J. Secrest, S. von Hausegger, M. Rameez, R. Mohayaee, S. Sarkar, and J. Colin, A test of the cosmological principle with quasars, Astrophys. J. Lett. **908**, L51 (2021) [arXiv:2009.14826]; C. Krishnan, R. Mohayaee, E. Ó Colgáin, M. M. Sheikh-Jabbari, and L. Yin, Hints of FLRW breakdown from supernovae, arXiv:2106.02532.

[17] D. J. Schwarz, C. J. Copi, D. Huterer, and G. D. Starkman, CMB Anomalies after Planck, Class. Quant. Grav. **33**, 184001 (2016) [arXiv:1510.07929].

[18] C. Pitrou, T. S. Pereira, and J. P. Uzan, Predictions from an anisotropic inflationary era, J. Cosmol. Astropart. Phys. **04** (2008) 004 [arXiv:0801.3596]; A. E. Gumrukcuoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso, Inflationary perturbations in anisotropic backgrounds and their imprint on the CMB, J. Cosmol. Astropart. Phys. **07** (2007) 005 [arXiv:0707.4179].

[19] G. F. R. Ellis and M. A. H. MacCallum, A Class of homogeneous cosmological models, Commun. Math. Phys. **12**, 108 (1969); G. F. R. Ellis, The Bianchi models: Then and now, Gen. Rel. Grav. **38**, 1003 (2006).

[20] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation, Phys. Rev. D **15**, 2738 (1977); S. W. Hawking and I. G. Moss, Supercooled phase transitions in the very early universe, Phys. Lett. **110B**, 35 (1982).

[21] E. Silverstein and D. Tong, Scalar speed limits and cosmology: Acceleration from D-cceleration, Phys. Rev. D **70**, 103505 (2004) [hep-th/0310221]; M. Alishahiha, E. Silverstein, and D. Tong, DBI in the sky: Non-Gaussianity from inflation with a speed limit, Phys. Rev. D **70**, 123505 (2004) [hep-th/0404084].

[22] X. Chen, Inflation from warped space, J. High Energy Phys. **08**, 045 (2005) [hep-th/0501184]; X. Chen, Running non-Gaussianities in DBI inflation, Phys. Rev. D **72**, 123518 (2005) [astro-ph/0507053].

[23] X. Chen, M. x. Huang, S. Kachru, and G. Shiu, Observational signatures and non-Gaussianities of general single field inflation, J. Cosmol. Astropart. Phys. **01** (2007) 002 [hep-th/0605045].

[24] D. Baumann and L. McAllister, A microscopic limit on gravitational waves from D-brane inflation, Phys. Rev. D **75**, 123508 (2007) [arXiv:hep-th/0610285].

[25] M. Spalinski, On power law inflation in DBI models, J. Cosmol. Astropart. Phys. **05** (2007) 017 [hep-th/0702196]; M. Spalinski, Inflation in DBI models with constant gamma, J. Cosmol. Astropart. Phys. **04** 002 (2008) [arXiv:0711.4326].

[26] E. J. Copeland, S. Mizuno, and M. Shaeri, Cosmological dynamics of a Dirac-Born-Infeld field, Phys. Rev. D **81**, 123501 (2010) [arXiv:1003.2881].

[27] M. a. Watanabe, S. Kanno, and J. Soda, Inflationary Universe with Anisotropic Hair, Phys. Rev. Lett. **102**, 191302 (2009) [arXiv:0902.2833].

[28] S. Kanno, J. Soda, and M. a. Watanabe, Anisotropic power-law inflation, J. Cosmol. Astropart. Phys. **12** (2010) 024 [arXiv:1010.5307].

[29] J. Soda, Statistical Anisotropy from Anisotropic Inflation, Class.Quant.Grav. **29** (2012) 083001 [arXiv:1201.6434]

[30] R. Emami, H. Firouzjahi, S. M. Sadegh Movahed, and M. Zarei, Anisotropic inflation from charged scalar fields, J. Cosmol. Astropart. Phys. **02** (2011) 005 [arXiv:1010.5495]; K. Murata and J. Soda, Anisotropic inflation with non-Abelian gauge kinetic function, J. Cosmol. Astropart. Phys. **06** (2011) 037 [arXiv:1103.6164]; S. Hervik, D. F. Mota, and M. Thorsrud, Inflation with stable anisotropic hair: is it cosmologically viable?, J. High Energy Phys. **11** (2011) 146 [arXiv:1109.3456]; M. Thorsrud, D. F. Mota, and S. Hervik, Cosmology of a scalar field coupled to matter and an isotropy-violating Maxwell field, J. High Energy Phys. **10** (2012) 066 [arXiv:1205.6261]; A. A. Abolhasani, M. Akhshik, R. Emami, and H. Firouzjahi, Primordial statistical anisotropies: the effective field theory approach, J. Cosmol. Astropart. Phys. **03** (2016) 020 [arXiv:1511.03218]; S. Lahiri, Anisotropic inflation in Gauss-Bonnet gravity, J. Cosmol. Astropart. Phys. **09** (2016) 025 [arXiv:1605.09247]; J. Holland, S. Kanno, and I. Zavala, Anisotropic inflation with derivative couplings,

Phys. Rev. D **97**, 103534 (2018) [arXiv:1711.07450]; T. Q. Do and W. F. Kao, Anisotropic power-law inflation for a conformal-violating Maxwell model, Eur. Phys. J. C **78**, 360 (2018) [arXiv:1712.03755]; T. Q. Do and W. F. Kao, Anisotropic power-law inflation of the five dimensional scalar–vector and scalar-Kalb–Ramond model, Eur. Phys. J. C **78**, 531 (2018); F. Cicciarella, J. Mabillard, M. Pieroni, and A. Ricciardone, A Hamilton-Jacobi formulation of anisotropic inflation, J. Cosmol. Astropart. Phys. **09** (2019) 044 [arXiv:1903.11154]; P. Gao, K. Takahashi, A. Ito, and J. Soda, Cosmic no-hair conjecture and inflation with an SU(3) gauge field, [arXiv:2107.00264]; C. B. Chen and J. Soda, Anisotropic hyperbolic inflation, [arXiv:2106.04813].

[31] T. Q. Do, W. F. Kao, and I. C. Lin, Anisotropic power-law inflation for a two scalar fields model, Phys. Rev. D **83**, 123002 (2011); T. Q. Do and S. H. Q. Nguyen, Anisotropic power-law inflation in a two-scalar-field model with a mixed kinetic term, Int. J. Mod. Phys. D **26**, 1750072 (2017) [arXiv:1702.08308]; T. Q. Do and W. F. Kao, Anisotropic power-law inflation for a model of two scalar and two vector fields, Eur. Phys. J. C **81**, 525 (2021) [arXiv:2104.14100].

[32] T. Fujita, I. Obata, T. Tanaka, and S. Yokoyama, Statistically anisotropic tensor modes from inflation, J. Cosmol. Astropart. Phys. **07** (2018) 023 [arXiv:1801.02778]; I. Obata and T. Fujita, Footprint of two-form field: Statistical anisotropy in primordial gravitational waves, Phys. Rev. D **99**, 023513 (2019) [arXiv:1808.00548]; T. Hiramatsu, K. Murai, I. Obata, and S. Yokoyama, Statistically-anisotropic tensor bispectrum from inflation, J. Cosmol. Astropart. Phys. **03** (2021) 047 [arXiv:2008.03233];

[33] K. Yamamoto, M. a. Watanabe, and J. Soda, Inflation with multi-vector hair: the fate of anisotropy, Class. Quantum Grav. **29** (2012) 145008 [arXiv:1201.5309]; K. Yamamoto, Primordial fluctuations from inflation with a triad of background gauge fields, Phys. Rev. D **85**, 123504 (2012) [arXiv:1203.1071]; H. Funakoshi and K. Yamamoto, Primordial bispectrum from inflation with background gauge fields, Class. Quant. Grav. **30**, 135002 (2013) [arXiv:1212.2615].

[34] T. Q. Do and W. F. Kao, Anisotropic power-law inflation for the Dirac-Born-Infeld theory, Phys. Rev. D **84**, 123009 (2011).

[35] T. Q. Do and W. F. Kao, Anisotropic power-law solutions for a supersymmetry Dirac-Born-Infeld theory, Class. Quant. Grav. **33**, 085009 (2016); T. Q. Do and W. F. Kao, Bianchi type I anisotropic power-law solutions for the Galileon models, Phys. Rev. D **96**, 023529 (2017); T. Q. Do, Stable small spatial hairs in a power-law k-inflation model, Eur. Phys. J. C **81**, 77 (2021) [arXiv:2007.04867].

[36] J. Ohashi, J. Soda, and S. Tsujikawa, Anisotropic power-law k-inflation, Phys. Rev. D **88** (2013) 103517 [arXiv:1310.3053].

[37] A. Ito and J. Soda, Anisotropic constant-roll inflation, Eur. Phys. J. C **78**, 55 (2018) [arXiv:1710.09701].

[38] A. Maleknejad and M. M. Sheikh-Jabbari, Revisiting cosmic no-hair theorem for inflationary settings, Phys. Rev. D **85**, 123508 (2012) [arXiv:1203.0219].

[39] J. Kim and E. Komatsu, Limits on anisotropic inflation from the Planck data, Phys. Rev. D **88**, 101301(R) (2013) [arXiv:1310.1605]; S. R. Ramazanov and G. Rubtsov, Constraining anisotropic models of the early Universe with WMAP9 data, Phys. Rev. D **89**, 043517 (2014) [arXiv:1311.3272]; S. Ramazanov, G. Rubtsov, M. Thorsrud, and F. R. Urban, General quadrupolar statistical anisotropy: Planck limits, J. Cosmol. Astropart. Phys. **03** (2017) 039 [arXiv:1612.02347].

[40] T. R. Dulaney and M. I. Gresham, Primordial power spectra from anisotropic inflation, Phys. Rev. D **81**, 103532 (2010) [arXiv:1001.2301]; A. E. Gumrukcuoglu, B. Himmetoglu, and M. Peloso, Scalar-scalar, scalar-tensor, and tensor-tensor correlators from anisotropic inflation, Phys. Rev. D **81**, 063528 (2010) [arXiv:1001.4088]; N. Bartolo, S. Matarrese, M. Peloso, and A. Ricciardone, Anisotropic power spectrum and bispectrum in the $f(\phi)F^2$ mechanism, Phys. Rev. D **87**, 023504 (2013) [arXiv:1210.3257].

[41] M. a. Watanabe, S. Kanno and J. Soda, The nature of primordial fluctuations from anisotropic inflation, Prog. Theor. Phys. **123**, 1041 (2010) [arXiv:1003.0056]; M. a. Watanabe, S. Kanno, and J. Soda, Imprints of anisotropic inflation on the cosmic microwave background, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **412**, L83 (2011) [arXiv:1011.3604]; J. Ohashi, J. Soda, and S. Tsujikawa, Observational signatures of anisotropic inflationary models, J. Cosmol. Astropart. Phys. **12** (2013) 009 [arXiv:1308.4488].

[42] X. Chen, R. Emami, H. Firouzjahi, and Y. Wang, The TT, TB, EB and BB correlations in anisotropic inflation, J. Cosmol. Astropart. Phys. **08** (2014) 027 [arXiv:1404.4083].

[43] T. Q. Do, W. F. Kao and, I. C. Lin, CMB imprints of non-canonical anisotropic inflation, Eur. Phys. J. C **81**, 390 (2021) [arXiv:2003.04266].

[44] Duy H. Nguyen, Tuyen M. Pham, Tuan Q. Do, Anisotropic constant-roll inflation for the Dirac–Born–Infeld model, Eur.Phys.J.C **81** (2021) 9, 839 [arXiv:2107.14115]

[45] D. H. Nguyen, T. M. Pham, T. D. Le, T. Q. Do, Anisotropic constant-roll k-inflation model, accepted for publication in Communications in Physics (2023).

[46] H. Motohashi, A. A. Starobinsky, and J. Yokoyama, Inflation with a constant rate of roll, J. Cosmol. Astropart. Phys. **09** (2015) 018 [arXiv:1411.5021].

[47] J. Martin, H. Motohashi, and T. Suyama, Ultra slow-roll inflation and the non-Gaussianity consistency relation, Phys. Rev. D **87**, 023514 (2013) [arXiv:1211.0083].

[48] H. Motohashi and A. A. Starobinsky, Constant-roll inflation: confrontation with recent observational data, EPL **117**, 39001 (2017) [arXiv:1702.05847].

[49] J. T. Galvez Ghersi, A. Zucca, and A. V. Frolov, Observational constraints on constant roll inflation, J. Cosmol. Astropart. Phys. **05** (2019) 030 [arXiv:1808.01325].

[50] S. D. Odintsov and V. K. Oikonomou, Inflationary dynamics with a smooth slow-roll to constant-roll era transition, J. Cosmol. Astropart. Phys. **04** (2017) 041 [arXiv:1703.02853].

[51] L. Anguelova, P. Suranyi, and L. C. R. Wijewardhana, Systematics of constant roll inflation, J. Cosmol. Astropart. Phys. **02** (2018) 004 [arXiv:1710.06989].

[52] W. C. Lin, M. J. P. Morse, and W. H. Kinney, Dynamical analysis of attractor behavior in constant roll inflation, J. Cosmol. Astropart. Phys. **09** (2019) 063 [arXiv:1904.06289].

[53] H. Motohashi, S. Mukohyama, and M. Oliosi, Constant roll and primordial black holes, J. Cosmol. Astropart. Phys. **03** (2020) 002 [arXiv:1910.13235].

[54] A. Karam, L. Marzola, T. Pappas, A. Racioppi, and K. Tamvakis, Constant-roll (quasi-)linear inflation, J. Cosmol. Astropart. Phys. **05** (2018) 011 [arXiv:1711.09861].

[55] S. Nojiri, S. D. Odintsov, and V. K. Oikonomou, Constant-roll inflation in $F(R)$ gravity, Class. Quant. Grav. **34**, 245012 (2017) [arXiv:1704.05945].

[56] H. Motohashi and A. A. Starobinsky, Constant-roll inflation in scalar-tensor gravity, J. Cosmol. Astropart. Phys. **11** (2019) 025 [arXiv:1909.10883].

[57] S. D. Odintsov and V. K. Oikonomou, Constant-roll k-inflation dynamics, Class. Quant. Grav. **37**, 025003 (2020) [arXiv:1912.00475].

[58] A. Mohammadi, K. Saaidi, and H. Sheikhahmadi, Constant-roll approach to non-canonical inflation, Phys. Rev. D **100**, 083520 (2019) [arXiv:1803.01715].

[59] A. Mohammadi, T. Golanbari, and K. Saaidi, Observational constraints on DBI constant-roll inflation, Phys. Dark Univ. **27**, 100456 (2020) [arXiv:1808.07246].

[60] I. Antoniadis, A. Lykkas, and K. Tamvakis, Constant-roll in the Palatini-R^2 models, J. Cosmol. Astropart. Phys. **04** (2020) 033 [arXiv:2002.12681].

[61] T. J. Gao, Gauss–Bonnet inflation with a constant rate of roll, Eur. Phys. J. C **80**, 1013 (2020) [arXiv:2008.03976].

[62] M. Guerrero, D. Rubiera-Garcia, and D. Saez-Chillon Gomez, Constant roll inflation in multifield models, Phys. Rev. D **102**, 123528 (2020) [arXiv:2008.07260].

[63] J. Sadeghi and S. Noori Gashti, Anisotropic constant-roll inflation with noncommutative model and swampland conjectures, Eur. Phys. J. C **81**, 301 (2021) [arXiv:2104.00117].

[64] M. Shokri, J. Sadeghi, M. R. Setare, and S. Capozziello, Nonminimal coupling inflation with constant slow roll, arXiv:2104.00596.