

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VN
HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ



PHẠM MẠNH TUYẾN

NGHIÊN CỨU NGHIỆM LẠM PHÁT VŨ TRỤ
TRONG MÔ HÌNH K-GAUSS-BONNET

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Chuyên ngành vật lý lý thuyết và vật lý toán

PHẠM MẠNH TUYẾN

VẬT LÝ LÝ THUYẾT
VÀ VẬT LÝ TOÁN

2022

Hà Nội - 2022

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VN

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ



PHẠM MẠNH TUYẾN

NGHIÊN CỨU NGHIỆM LẠM PHÁT VŨ TRỤ
TRONG MÔ HÌNH K-GAUSS-BONNET

Chuyên ngành: Vật lý lý thuyết và lý thuyết toán

Mã số: 8 44 01 03

LUẬN VĂN THẠC SĨ NGÀNH
KHOA HỌC VẬT CHẤT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. Đỗ Quốc Tuấn

Hà Nội - 2022

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đề tài nghiên cứu trong luận văn này là công trình nghiên cứu do tôi thực hiện dưới sự hướng dẫn của TS. Đỗ Quốc Tuấn. Các kết quả do chính tôi làm việc và tính toán do đó các kết quả nghiên cứu đảm bảo trung thực và khách quan nhất. Các kết quả có trong luận văn "*Nghiên cứu nghiệm lạng phát vũ trụ trong mô hình k -Gauss-Bonnet*" là các kết quả mới và không trùng lặp với bất cứ một nghiên cứu nào được công bố trước đó. Các kết quả và tính toán nêu trong luận văn là trung thực nếu sai tôi hoàn toàn chịu trách nhiệm.

Hà Nội, Ngày tháng năm 202

Phạm Mạnh Tuyền

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, cho phép tôi được gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất tới TS. Đỗ Quốc Tuấn, người thầy đã trực tiếp hướng dẫn, tận tình giúp đỡ, quan tâm và chỉ dạy tôi trong suốt quá trình thực hiện đề tài luận văn này. Thầy đã định hướng công việc, giúp tôi trau dồi kiến thức chuyên môn cùng kỹ năng nghiên cứu và tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thành luận văn với các kết quả tốt nhất.

Tôi xin gửi lời cảm ơn Học viện khoa học công nghệ đã giúp tôi trau dồi các kiến thức chuyên môn để hoàn thiện luận văn này. Tôi cũng gửi lời cảm ơn đến viện nghiên cứu tiên tiến Phenikaa (PIAS) và trường đại học Phenikaa đã giúp đỡ, tạo điều kiện và môi trường làm việc thuận lợi nhất cho tôi trong suốt thời gian học tập và làm việc tại Hà Nội.

Tôi xin cảm ơn quỹ phát triển khoa học và công nghệ quốc gia Nafosted đã tài trợ một phần kinh phí cho luận văn này trong đề tài với mã số 103.01-2020.15.

Tôi xin gửi lời cảm ơn và lời tri ân tới gia đình và bạn bè, những người luôn ở bên động viên, ủng hộ và giúp đỡ tôi trong thời gian tôi thực hiện luận văn này.

Mặc dù tôi đã có nhiều cố gắng nhưng do trong thời gian ngắn và lượng kiến thức của bản thân cũng chưa thực sự được hoàn thiện nên luận văn vẫn không tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế, tôi rất mong nhận được sự góp ý, chỉ dẫn của các thầy, cô giáo và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Mục lục

1	MỞ ĐẦU	6
2	MÔ HÌNH CHUẨN CỦA VŨ TRỤ HỌC	10
2.1	Vũ trụ đồng nhất và đẳng hướng	10
2.1.1	Friedmann-Robertson-Laimaitre-Walker Metric	12
2.1.2	Dịch chuyển đỏ và tọa độ đồng chuyển động	13
2.2	Các phương trình trường Einstein	14
2.2.1	Mô hình vũ trụ học chất lỏng hoàn hảo	15
2.2.2	Mật độ tới hạn và các tham số mật độ	16
2.2.3	Phương trình bảo toàn năng lượng	18
2.3	Mô hình Λ CDM	19
2.4	Khoảng cách trong vũ trụ học	20
2.4.1	Khoảng cách đồng chuyển động và khoảng cách riêng	20
2.4.2	Khoảng cách và chân trời	21
2.4.3	Khoảng cách độ trung	21
2.4.4	Khoảng cách đường kính góc	22
2.5	Lịch sử nhiệt của vũ trụ	23
3	LẠM PHÁT VŨ TRỤ	25
3.1	Các khái niệm cơ bản về lạm phát	25
3.2	Các vấn đề trong vũ trụ học BigBang	26
3.2.1	Vấn đề độ phẳng	26
3.2.2	Vấn đề chân trời	28
3.3	Cơ chế gây ra lạm phát	30
3.3.1	Cơ sở lý thuyết cho lạm phát vũ trụ	31
3.4	Lạm phát cuộn chậm	34
3.4.1	Điều kiện cho lạm phát cuộn chậm	38
3.4.2	Các tham số cuộn chậm	39
3.4.3	Số e - folds	41

3.4.4	Tổng kết lạm phát cũ và slow roll inflation	42
3.5	Mô hình lạm phát k (k inflation)	43
3.6	Mô hình lạm phát Gauss-Bonnet	45
3.6.1	Vai trò của số hạng Gauss-Bonnet	45
3.6.2	Tổng quan mô hình lạm phát Gauss-Bonnet	46
4	MÔ HÌNH LẠM PHÁT k-GAUSS-BONNET	50
4.1	Thiết lập cơ bản	51
4.2	Lạm phát theo quy luật lũy thừa (power-law inflation)	52
4.3	Phân tích sự ổn định (stability analysis)	54
4.3.1	Phương pháp động lực học (Dynamical system method)	54
4.3.2	Phương pháp nhiễu loạn lũy thừa (power-law perturbation method)	61
4.4	Nhiều loạn tensor trong mô hình k GB	64
4.4.1	Tổng quan về lý thuyết nhiễu loạn vũ trụ	64
4.4.2	Nhiều loạn tensor trong mô hình k GB	66
5	KẾT LUẬN	70
6	PHỤ LỤC	72
6.1	Dẫn ra phương trình trường Einstein từ phiếm hàm tác dụng	72
6.2	Phương trình trường trong không thời gian phẳng đồng nhất đẳng hướng	79
6.3	Code Mathematica kiểm tra chéo các tính toán	84
6.4	Code Mathematica xét tính ổn định của mô hình bằng phương pháp động lực học	86
6.5	Code Mathematica xét tính ổn định của mô hình bằng phương pháp nhiều loạn lũy thừa	95
	TÀI LIỆU THAM KHẢO	97

Danh sách hình vẽ

2.1	Sự phân bố của các thiên hà thành đám trên thang đo nhỏ nhưng trở nên đồng đều hơn trên thang đo lớn và ở thời kỳ đầu. [74]	11
2.2	Khoảng cách đường kính góc	23
3.1	Bức xạ nền vi sóng vũ trụ (CMB) - Hình ảnh cung cấp bởi vệ tinh Planck Cơ quan Vũ trụ châu Âu ESA.	28
3.2	Các vùng ngắt kết nối nhân quả [74].	29
3.3	Trường lượng tử và đồ thị thế năng tương ứng với cường độ trường.	31
3.4	Trạng thái chân không của trường lượng tử	32
3.5	Trạng thái giả chân không hay mức năng lượng tối thiểu cục bộ.	32
3.6	Trường vô hướng trong không thời gian Minkowski và dạng thế năng của nó.	37
3.7	Trường inflaton trong cơ chế slow-roll	37
3.8	Lạm phát cũ.	42
3.9	Lạm phát cuộn chậm.	42
3.10	Hệ số thang đo như một hàm của thời gian với $C = 0$ và $\ \lambda\ = 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 10$ (từ trên xuống dưới) [32, 33]	48
3.11	Sự phát triển theo thời gian của bình phương tốc độ âm thanh hiệu dụng c_s^2 của mô hình được vẽ dưới dạng hàm của số lần e gấp [46]	49
4.1	$\zeta_{\pm}$ là hàm của λ . Trong đó, Đường màu đỏ phía trên tương ứng với ζ_+ và đường cong nét liền màu xanh ζ_- .	53
4.2	Tính chất ổn định trong không gian pha 3 chiều.	60
4.3	Tính chất ổn định trong không gian pha 2 chiều.	61

Chương 1

MỞ ĐẦU

Ngày nay, sự phát triển vượt bậc của khoa học kỹ thuật với tiền đề là sự phát triển của các ngành khoa học cơ bản. Kỷ nguyên của nhân loại đang hướng vào vũ trụ nơi mà thực tế phần lớn là vùng tối trong hiểu biết của loài người. Gần đây nhất vào 19 giờ 20 phút ngày 25 tháng 12 năm 2021 nhân loại đã phóng thành công kính viễn vọng không gian thế hệ tiếp theo James Webb với kỳ vọng có cái nhìn xa hơn về quá khứ nơi những thiên hà đầu tiên được hình thành bên cạnh đó là kỳ vọng về sự xuất hiện của sự sống ngoài hành tinh. Một trong những lĩnh vực có tác động mạnh mẽ nhất đến hiểu biết của con người về vũ trụ là vũ trụ học.

Vũ trụ học nghiên cứu sự hình thành, quá trình phát triển và kết thúc của toàn bộ vũ trụ, khi nghiên cứu vũ trụ ở khía cạnh lý thuyết người ta kỳ vọng rằng lý thuyết hấp dẫn lượng tử sẽ trở thành một lý thuyết cuối cùng giúp chúng ta mô tả tương tác hấp dẫn ở mức năng lượng cao và tạo điều kiện cho sự thống nhất các tương tác cơ bản khác từ đó cho ta một cái nhìn về lịch sử hình thành và tiến hóa của toàn bộ vũ trụ. Tuy nhiên, lý thuyết này cho đến thời điểm hiện tại vẫn còn là một dấu hỏi lớn, mặc dù vậy sự quan tâm đến các lý thuyết hấp dẫn tổng quát vẫn không suy giảm trong các tài liệu khoa học. Việc xây dựng các lý thuyết hấp dẫn tổng quát, với việc bao gồm các trường phụ hay các số hạng độ cong bậc cao trong phiếm hàm tác dụng đã thu hút sự quan tâm rất lớn trong những thập kỷ qua [1–3]. Lý do chính là những lý thuyết này có thể cung cấp một khuôn khổ mà ở đó các vấn đề nảy sinh trong lý thuyết tương đối rộng của Einstein có thể được giải quyết. Do đó, trong nội dung của các lý thuyết hấp dẫn sửa đổi này, các khía cạnh của lực hấp dẫn như các nghiệm vũ trụ học hoặc nghiệm hố đen phải được xem xét lại và trong một số trường hợp nó dẫn đến các nghiệm mới lạ và thú vị.

Trong vũ trụ học, sự hình thành của vũ trụ được phát triển bởi ý tưởng lý thuyết độ dao mang tên viễn cảnh lạm phát [4–6, 8], một kỷ nguyên mà vũ trụ giãn nở theo hàm mũ ở thời điểm $\sim 10^{-34}$ s sau điểm kỳ dị BigBang [9]. Lạm phát vũ trụ cung cấp

một cơ chế tự nhiên cho các điều kiện ban đầu của vũ trụ từ đó giải quyết các vấn đề trong vũ trụ học bao gồm vấn đề độ phẳng, vấn đề đường chân trời và vấn đề đơn cực từ. Lạm phát vũ trụ cũng giải thích nguồn gốc của các nhiễu loạn mật độ nguyên thủy và dự đoán phổ của chúng [10, 11]. Trong viễn cảnh lạm phát các nhiễu loạn mật độ nguyên thủy xuất hiện từ các thăng giáng lượng tử của trường lạm phát. Những thăng giáng này có biên độ ở thang đo chiều dài Planck (Planck length) và trong quá trình lạm phát các thăng giáng này bị kéo giãn và trở thành các dao động cổ điển từ đó tạo ra sự không đồng nhất thang đo lớn là hạt giống cho sự hình thành cấu trúc thang đo lớn. Do đó, lạm phát vũ trụ kết nối cấu trúc thang đo lớn của vũ trụ với thang đo ở mức vi mô. Những nhiễu động này cũng tạo lên tính chất bất đẳng hướng được dự đoán trên nền bức xạ nền vũ trụ (CMB) quan sát được từ WMAP và Planck [12–14].

Lạm phát vũ trụ đang được đông đảo các nhà khoa học quan tâm và do vậy cơ chế gây ra lạm phát là một câu hỏi rất cần lời giải. Có một số cách tiếp cận về cơ chế gây ra lạm phát và cách tiếp cận đầu tiên cũng là phổ biến nhất đó là dựa trên một trường vô hướng thực đơn gây ra lạm phát được gọi là trường inflaton. Về cơ bản, trường inflaton thường được cuộn chậm xuống giá trị cực tiểu của thế năng $V(\phi)$ của nó trong giai đoạn lạm phát đồng thời thế năng này phải được coi như gần như phẳng. Sau quá trình này trường lạm phát dao động xung quanh điểm cực tiểu này và các quá trình tái nhiệt sau pha lạm phát bắt đầu trong đó sự phân rã của trường inflaton dẫn đến sự hình thành các hạt cơ bản trong mô hình chuẩn [10, 11]. Ngoài ra, một loạt các nghiên cứu về trường vô hướng đã được đưa ra để nhận biết nguồn gốc của trường inflaton cùng với thế năng của nó [15]. Đáng chú ý có một mô hình lạm phát kỳ lạ dựa vào số hạng động năng của trường vô hướng (k -inflation), trong đó lạm phát có thể đạt được ngay cả khi không có thế năng thuần túy của trường vô hướng [16–18]. Ngoài ra, một số mô hình có cùng ý tưởng về lạm phát vũ trụ được gây ra bởi một số hạng động năng không tầm thường với mô hình k -inflation đã được xây dựng như lạm phát ma (ghost inflation) [19] hay lạm phát Galileon [20, 21, 23, 24].

Mặc dù kịch bản lạm phát giải quyết được vấn đề của lý thuyết vụ nổ lớn như vấn đề đường độ phẳng và vấn đề chân trời cũng như vấn đề đơn cực từ vẫn còn những câu hỏi mở chưa được giải quyết như vấn đề điểm kỳ dị ban đầu và lực hấp dẫn lượng tử. Trong vũ trụ sơ khai tiệm cận với thang đo Planck, ta có thể coi lý thuyết hấp dẫn Einstein cùng một số hiệu chỉnh là lý thuyết hấp dẫn lượng tử hiệu dụng. Phiếm hàm tác dụng siêu hấp dẫn hiệu dụng (The effective supergravity action) từ các siêu dây tạo ra các điều kiện cho hiệu chỉnh của bậc cao hơn của độ cong, có thể đóng một vai trò quan trọng trong giai đoạn vũ trụ rất sớm này. Một trong những hiệu chỉnh như vậy là số hạng bất biến tô pô Gauss-Bonnet (GB) $G \equiv R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ [25] trong phiếm hàm tác dụng hiệu dụng năng lượng thấp của dây dị loại (heterotic superstring

effective action) [26–29].

Ngoài ra, số hạng Gauss-Bonnet phát sinh trong khai triển bậc hai của lý thuyết hấp dẫn Lovelock [25], là tổng quát hóa của lý thuyết hấp dẫn Einstein. Ở khai triển bậc nhất lý thuyết Lovelock trùng với lý thuyết hấp dẫn Einstein, khai triển bậc hai cho ta lý thuyết hấp dẫn Einstein Gauss-Bonnet (EGB), chứa số hạng GB và phép biến phân số hạng này chỉ khác không trong một không gian có số chiều lớn hơn hoặc bằng năm vì trong không thời gian bốn chiều, bất biến Gauss-Bonnet hoạt động như một đạo hàm toàn phần và không đóng góp gì vào động lực học của trường hấp dẫn. Để xem xét ảnh hưởng của nó đối với động lực học của trường hấp dẫn trong không thời gian bốn chiều, người ta phải kết hợp bất biến Gauss-Bonnet với (các) trường khác, thường với (các) trường vô hướng như $f(\phi)G$ [30–34, 37–45]. Như vậy, ta có thể coi phép kết hợp không tầm thường $f(\phi)G$ này như một thế năng hiệu dụng của trường vô hướng, các tác giả đã khẳng định trong các bài báo [32, 33] cho rằng lạm phát có thể xảy ra trong mô hình Gauss-Bonnet vô hướng khi không có thế năng thuần túy của trường vô hướng $V(\phi)$. Đáng chú ý, các nghiệm lỗ đen cũng đã được tìm thấy trong mô hình này [43–45]. Thật không may, nghiệm lạm phát vũ trụ trong mô hình này đã được chứng minh là không hợp lệ về mặt hiện tượng luận do tính chất không ổn định gradient trong các nhiễu loạn tensor [46].

Gần đây, một nghiên cứu trên tài liệu tham khảo [47] đã tuyên bố rằng tính chất đạo hàm toàn phần của bất biến Gauss-Bonnet có thể được khắc phục bằng cách thay đổi tỷ lệ hệ số kết hợp của số hạng Gauss-Bonnet là $\alpha \rightarrow \alpha/(D-4)$ sau đó lấy giới hạn $D \rightarrow 4$, trong đó D là số chiều của không thời gian. Do đó, ta có thể không cần ghép $f(\phi)G$ nữa. Ý tưởng này, do đó, đã nhận được rất nhiều sự chú ý. Đáng chú ý, một số lập luận phản biện về tính hợp lệ của ý tưởng này đã được rút ra trong các bài báo tiếp theo [48–51]. Kết quả là, sự kết hợp không tầm thường giữa (các) trường vô hướng và bất biến Gauss-Bonnet dường như là một phần thiết yếu của lực hấp dẫn Gauss-Bonnet bốn chiều.

Lấy cảm hứng từ lạm phát k [16–18] và lạm phát Gauss-Bonnet [32, 33], trong khóa luận này chúng tôi muốn đề xuất nghiên cứu một kịch bản mới lạ, trong đó bất biến topo Gauss-Bonnet được phép kết hợp không tầm thường với số hạng động năng của trường vô hướng ϕ khi không có thế năng $V(\phi)$. Từ đó khảo sát nghiệm lạm phát của mô hình, cụ thể là nghiệm lạm phát vũ trụ tuân theo quy luật lũy thừa và kiểm tra tính ổn định của nghiệm trong pha lạm phát. Đồng thời nghiên cứu các nhiễu loạn tensor trong mô hình và chứng minh nghiệm lạm phát ổn định với các bất ổn gradient trong các nhiễu loạn tensor.

Bố cục trình bày của khóa luận như sau. Chương 2 sẽ trình bày về mô hình chuẩn của vũ trụ học, giới thiệu các phương trình chi phối sự tiến hóa của toàn bộ vũ trụ và

các vấn đề trong mô hình Big Bang và chỉ ra viễn cảnh lạm phát như một giải pháp cho các vấn đề vũ trụ học này. Trong chương 3, tôi trình bày khái quát về lạm phát k và lạm phát Gauss-Bonnet. Trong chương 4, cũng là phần chính của luận văn sẽ trình bày chi tiết mô hình lạm phát k -Gauss-Bonnet kiểm tra tính ổn định của mô hình và sử dụng lý thuyết nhiễu loạn trong nghiên cứu nhiễu loạn tensor của mô hình. Chương 5 sẽ là phần kết luận của luận văn và phần cuối sẽ là phần phụ lục bao gồm các tính toán trong chương 4 và phần tài liệu tham khảo.

Chương 2

MÔ HÌNH CHUẨN CỦA VŨ TRỤ HỌC

Tóm tắt: Trong chương này chúng ta thảo luận về mô hình chuẩn trong vũ trụ học Λ CDM. Mô hình vũ trụ đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu vũ trụ học hiện đại khi tuân theo giả định về tính chất đồng nhất và đẳng hướng của không thời gian từ nguyên lý vũ trụ. Đồng thời, thành phần giả định là nguyên nhân gây ra sự giãn nở hiện tại của vũ trụ là hằng số vũ trụ Λ đại diện cho năng lượng tối chiếm tỷ lệ lớn nhất trong tổng mật độ năng lượng tại thời điểm hiện tại của vũ trụ. Mô hình đơn giản nhưng phù hợp một cách đáng ngạc nhiên với các quan sát.

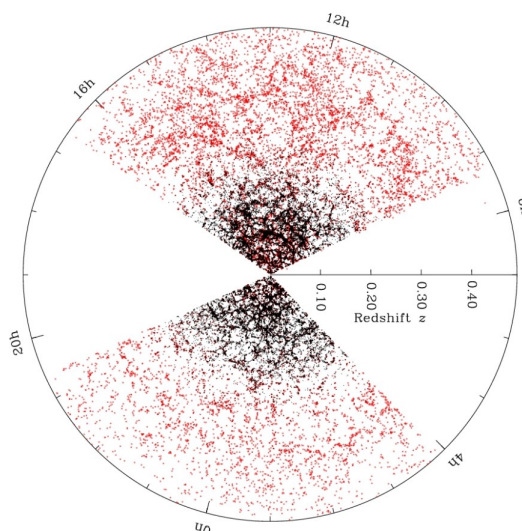
2.1 Vũ trụ đồng nhất và đẳng hướng

Khám phá tuyệt vời nhất mà chúng ta có được trong thế kỷ XX là chúng ta biết mình đang sống trong một vũ trụ đang giãn nở từ các đóng góp quan trọng của Edwin Hubble [70] cùng nỗ lực chung không thể bỏ qua của các nhà thiên văn học như Vesto Slipher [71] và George Lemaître [72].

Cùng với đó, từ các quan sát vũ trụ học hiện đại khi chúng ta càng tiến xa vào vũ trụ, nó dường như càng đơn giản (xem Hình 2.1). Vũ trụ học hiện đại dựa trên giả định rằng vũ trụ của chúng ta gần đúng là đồng nhất và đẳng hướng trên các thang đo lớn, trong đó ở thang đo lớn nghĩa là các thang đo lớn hơn 100 Mpc.

Tính trung bình trên thang đo lớn, sự phân bố thành đám của các thiên hà trở nên đồng nhất và đẳng hướng, tức là không phụ thuộc vào vị trí và hướng. Tính đồng nhất và đẳng hướng chỉ ra một dạng duy nhất của hình học không thời gian của vũ trụ và được khái quát bằng một nguyên lý được gọi là nguyên lý vũ trụ học.

Nguyên lý Vũ trụ học tuyên bố rằng Vũ trụ là **đồng nhất** và **đẳng hướng**. Hai thuật ngữ này không giống nhau **đồng nhất** có nghĩa là giống nhau ở mọi điểm và



Hình 2.1: Sự phân bố của các thiên hà thành đám trên thang đo nhỏ nhưng trở nên đồng đều hơn trên thang đo lớn và ở thời kỳ đầu. [74]

đẳng hướng có nghĩa là giống nhau theo mọi hướng,

Ở thang đo dưới 100 Mpc thì vũ trụ không đồng nhất và cũng không đẳng hướng. Ở đây, chúng ta quan sát được các cấu trúc ở dạng thiên hà, cụm thiên hà, hình sợi và khoảng trống rộng (xem Hình 2.1). Nhưng ở thang đo lớn hơn, Vũ trụ gần như đẳng hướng. Cụ thể, nếu chúng ta đếm các thiên hà thành hai khối 100 Mpc ở các bên theo hướng ngược nhau trên thiên cầu, chúng ta sẽ đo được cùng một mật độ phân bố vật chất trung bình chỉ sai khác trong phạm vi vài phần trăm. Trong khi với tính đồng nhất, chúng ta sẽ không bao giờ biết chắc chắn tính chất này.

Tuy nhiên, từ các quan sát CMB (ánh sáng xa nhất của Big Bang mà chúng ta có thể quan sát được) cho thấy vũ trụ của chúng ta xấp xỉ đồng nhất và đẳng hướng. Sự không đồng nhất và bất đẳng hướng rất nhỏ trong nhiệt độ CMB tạo ra các hạt giống dẫn đến tính bất ổn định hấp dẫn từ đó hình thành các cấu trúc thang đo lớn trong vũ trụ.

Ngoài ra, chúng ta giả định rằng các nhiễu động được đề cập ở trên khi so sánh với tính đồng nhất và đẳng hướng đã được tạo ra từ các thăng giáng lượng tử vi mô đã được khuếch đại trong thời kỳ lạm phát vũ trụ.

2.1.1 Friedmann-Robertson-Laimaitre-Walker Metric

Metric mô tả giả định đồng nhất và đẳng hướng trên thang đo lớn được gọi là metric Friedmann-Robertson-Laimaitre-Walker (FLRW) mô tả vũ trụ giãn nở có dạng như sau

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.1)$$

Trong đó, $a(t)$ là hệ số thang đo (scale factor) - vì nó cho chúng ta biết khoảng cách giữa hai điểm thay đổi như thế nào theo thời gian, K là tham số độ cong. K dương tương ứng với vũ trụ đóng, bằng 0 trong trường hợp vũ trụ phẳng và âm đối với vũ trụ mở.

Metric FLRW lần đầu tiên được Friedmann đưa ra trong [64] và [65], sau đó được suy ra trên cơ sở đẳng hướng và đồng nhất bởi Robertson và Walker trong [66], [67] và [68]. Công việc của Lemaitre [69] cũng rất cần thiết để phát triển nó.

Trong metric trên, r, θ và ϕ là các tọa độ đồng chuyển động (comoving coordinate). Khoảng cách vật lý tương ứng thu được bằng cách nhân r với hệ số thang đo, $r_{\text{phys}} = a(t)r$. Vận tốc vật lý của một vật thể khi đó có dạng

$$v_{\text{phys}} = \frac{dr_{\text{phys}}}{dt} = a(t) \frac{dr}{dt} + \frac{da}{dt} r \equiv v_{\text{pec}} + Hr_{\text{phys}}. \quad (2.2)$$

Từ phương trình trên ta thấy rằng vận tốc vật lý của vật thể được chi phối bởi 2 thành phần bao gồm: vận tốc riêng của vật thể (*peculiar velocity*), $v_{\text{per}} \equiv a(t)r$ và dòng Hubble (Hubble flow), Hr_{phys} . Với định nghĩa tham số Hubble

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.3)$$

cho ta biết tốc độ giãn nở của vũ trụ và có đơn vị là nghịch đảo của thời gian. Tham số Hubble dương tương ứng với một vũ trụ giãn nở và âm ứng với vũ trụ co lại. Nó thiết lập thang đo cơ sở trong không thời gian FLRW: Thang đo thời gian trong vũ trụ đồng nhất được đặc trưng bởi thời gian Hubble, $t_H \sim H^{-1}$ và đặc trưng cho thang đo độ dài là độ dài Hubble, $d_h \sim H$. Thời gian Hubble cho phép ta thiết lập các tính toán liên quan đến tuổi của vũ trụ trong khi đó độ dài Hubble thiết lập kích thước (size) của vũ trụ quan sát được và thường được gọi là *Chân trời Hubble* (Hubble horizon), vì nó cung cấp một ước lượng khoảng cách mà ánh sáng có thể di chuyển được trong một vũ trụ đang giãn nở.

Một hệ tọa độ khác hữu ích thường được sử dụng trong nghiên cứu vũ trụ học, định nghĩa thời gian bảo giác (conformal time)

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)}, \quad \text{then} \quad \tau = \int \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.4)$$

Khi đó yếu tố đường (line element) FLRW có dạng

$$ds^2 = a(\tau)[d\tau + d\chi^2 + \Phi_K(\chi)^2 d\Omega^2]. \quad (2.5)$$

Yếu tố đường trong khuôn khổ của thời gian bảo giác được nghiên cứu trong lý thuyết nhiễu loạn vũ trụ.

2.1.2 Dịch chuyển đỏ và tọa độ đồng chuyển động

Một tính chất quan trọng thu được từ không thời gian FLRW là ánh sáng bị dịch chuyển đỏ khi nó lan truyền trong không thời gian này, dựa trên sự phụ thuộc thời gian của hệ số thang đo. Xét một vật thể đứng yên phát xạ trong hệ tọa độ đồng chuyển động, với khoảng cách xuyên tâm r_1 , và người quan sát được xác định tại $r_0 = 0$. Ánh sáng phát ra từ vật thể đầu tiên tại thời điểm t_1 với tần số f_1 , và người quan sát thu được tại thời điểm t_0 với tần số f_0 . Ta cần xác định mối quan hệ giữa f_0 và f_1 . Vì ánh sáng di chuyển dọc theo đường trắc địa null (null geodesics) với định nghĩa $ds = 0$, quỹ đạo chuyển động xuyên tâm của ánh sáng thẳng tới người quan sát ngụ ý ($d\theta = d\phi = 0$ và $dr/dt < 0$) dẫn đến

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.6)$$

Tiếp theo ta xét sự phát xạ ở đỉnh tiếp theo của sóng ánh sáng. Đỉnh đầu tiên phát ra ở (t_1, r_1) và thu được tại $(t_0, 0)$, trong khi đó đỉnh thứ hai của sóng ánh sáng $(t_1 + \delta t_1, r_1)$ và thu được ở $(t_0 + \delta t_0, 0)$. Từ phương trình (2.6)

$$\int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.7)$$

trừ tích phân thứ 3 cho tích phân thứ 2 ở biểu thức trên sau đó lấy giới hạn tương ứng ta thu được mối liên hệ sau

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}, \quad (2.8)$$

vì khoảng thời gian giữa 2 đỉnh của sóng ánh sáng bằng nghịch đảo của tần số, do đó ta có

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = 1 + z, \quad (2.9)$$

với đẳng thức cuối cùng trong phương trình trên là định nghĩa của dịch chuyển đỏ z . Đại lượng này chỉ phụ thuộc và tỷ số giữa hệ số thang đo tại thời điểm thu tín hiệu và tại thời điểm phát xạ.

2.2 Các phương trình trường Einstein

Để có thể mô tả hành vi của toàn bộ vũ trụ trong một tổng thể thống nhất dựa trên mật độ năng lượng mà nó chứa được chúng ta sử dụng lý thuyết tương đối rộng [73] một lý thuyết hấp dẫn hiện đại lần đầu được đề xuất bởi A. Einstein. Trong cách tiếp cận biến phân, tác dụng Einstein-Hilbert mô tả động lực học của metric không thời gian có dạng sau

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (2.10)$$

trong đó $\kappa \equiv 8\pi G = 8\pi/m_{\text{pl}}^2 = 1/M_{\text{pl}}^2$, với G là hằng số hấp dẫn Newton, m_{pl} là khối lượng Planck và $M_{\text{pl}} \simeq 2.4 \times 10^{18}$ GeV là khối lượng Planck rút gọn. Trong biểu thức trên Λ là hằng số vũ trụ, g là định thức của metric $g_{\mu\nu}$, R là vô hướng Ricci.

Phiếm hàm tác dụng tổng quát sẽ có dạng sau

$$S = S_{\text{grav}} + S_{\text{matter}} \quad (2.11)$$

trong đó S_{matter} là phiếm hàm tác dụng đại diện cho các thành phần vật chất trong vũ trụ có thể là phiếm hàm của trường điện từ, vật chất hoặc bức xạ...

Với giả định vũ trụ gần như đồng nhất đẳng hướng từ nguyên lý vũ trụ với metric FLRW đã cho, các phương trình Friedmann có thể thu được bằng cách tính toán trực tiếp từ các phương trình trường Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{grav}}}{\delta g_{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

Trong phương trình trên $T_{\mu\nu}$ là tensor năng xung lượng thu được từ

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (2.13)$$

Từ metric (2.1) ta tính toán được các thành phần của Ricci tensor là

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = g_{ij} \left(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{K}{a^2} \right). \quad (2.14)$$

Từ đó suy ra được độ cong vô hướng (vô hướng Ricci)

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{K}{a^2} \right), \quad (2.15)$$

Các phương trình trường Einstein

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} T_{00} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.16)$$

$$g_{ij} \left(H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2} - \Lambda \right) = 8\pi G T_{ij}. \quad (2.17)$$

hai phương trình (2.16), (2.17) được gọi là các phương trình Friedmann.

2.2.1 Mô hình vũ trụ học chất lỏng hoàn hảo

Câu hỏi đặt ra ta sẽ sử dụng tensor năng xung lượng nào là phù hợp xuất hiện trong các phương trình Friedmann (2.16),(2.17)?

Để trả lời câu hỏi này, xuất phát từ metric FLRW chúng ta sẽ có một số ràng buộc quan trọng như sau:

- Đầu tiên, ta có $G_{0i} = 0$ tương ứng với $T_{0i} = 0$ điều này thỏa mãn tính chất đẳng hướng vì sẽ không có dòng năng lượng nào theo bất kỳ hướng nào.
- Thứ hai, vì $G_{ij} \sim g_{ij}$, do đó $T_{ij} \sim g_{ij}$
- Cuối cùng $G_{\mu\nu}$ chỉ phụ thuộc vào thời gian do đó $T_{\mu\nu}$ cũng chỉ phụ thuộc vào thời gian.

Về mặt toán học với 3 ràng buộc trên ta có

$$T_{00} = \rho(t), \quad T_{0i} = 0, \quad T_{ij} = g_{ij}P(t) \quad (2.18)$$

Trong đó $\rho(t)$ là mật độ năng lượng và $P(t)$ là áp suất chất lỏng. Dạng tổng quát của tensor năng xung lượng

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

Trong đó u_μ là vận tốc 4 chiều của thành phần chất lỏng. Trong phương trình (2.19) tensor năng xung lượng không chứa các số hạng độ nhớt và số hạng truyền năng lượng thường có của các chất lỏng thông hai số hạng thường xuất hiện trong trường hợp chất lỏng không hoàn hảo. Dạng vật chất được mô tả bằng phương trình (2.19) được biết đến là **chất lỏng hoàn hảo**.

Kết hợp các phương trình (2.16),(2.17) và phương trình (2.18). Phương trình Friedmann trở thành

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{K c^2}{a^2}, \quad (2.20)$$

và phương trình gia tốc có dạng

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.21)$$

Sử dụng thời gian bảo giác τ các phương trình Friedmann có dạng

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 + \frac{\Lambda c^2 a^2}{3} - K c^2, \quad (2.22)$$

và

$$\frac{a''}{a} = \frac{4\pi G}{3} \left(\rho - \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{2\Lambda c^2 a^2}{3} - Kc^2, \quad (2.23)$$

với dấu phẩy đặc trưng cho phép lấy đạo hàm theo thời gian bảo giác τ và

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a}, \quad (2.24)$$

là **hệ số Hubble bảo giác** (conformal Hubble factor).

Trong các phương trình Friedmann, ρ và P là tổng mật độ năng lượng và áp suất. Do đó, ta có thể viết hai số hạng này bằng tổng các đóng góp của các thành phần riêng biệt

$$\rho \equiv \sum_x \rho_x, \quad P \equiv \sum_x P_x. \quad (2.25)$$

Đóng góp của hằng số vũ trụ cũng như độ cong của vũ trụ có thể được coi là một thành phần vật chất với mật độ và áp suất tương ứng như sau

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad P_\Lambda \equiv -\rho_\Lambda c^2. \quad (2.26)$$

Theo định nghĩa hệ số thang đo $a(t)$ theo định nghĩa là dương tuy nhiên đạo hàm của nó có thể âm. Điều này dẫn đến một vũ trụ đang co lại (với a âm). Lưu ý rằng về trái của phương trình Friedmann (2.20) là không âm. Do đó, $\dot{a}$ chỉ bằng 0 khi $K > 0$ tương ứng với không gian vũ trụ đóng. Điều này ngụ ý rằng, nếu $K \leq 0$ và nếu tồn tại một thời điểm mà $\dot{a} > 0$ thì vũ trụ sẽ giãn nở vĩnh viễn.

2.2.2 Mật độ tới hạn và các tham số mật độ

Phương trình Friedmann (2.20) khi kết hợp Λ vào tổng mật độ ρ ta thu được

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2}. \quad (2.27)$$

Giá trị của ρ khi $K = 0$ được gọi là **mật độ năng lượng tới hạn (critical energy density)** và có dạng sau

$$\rho_{cr} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.28)$$

giá trị hiện tại của nó là

$$\rho_{cr}^0 = 1.878h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^3. \quad (2.29)$$

Thực tế chỉ ra rằng giá trị của ρ_0 rất gần với ρ_{cr}^0 do đó vũ trụ của ta gần như phẳng về mặt không gian. Đây như một vấn đề tinh chỉnh của K như một sự trùng

hợp đáng ngạc nhiên còn được gọi là vấn đề độ phẳng (the flatness problem). Một giải pháp khả thi cho vấn đề độ phẳng được đưa ra bằng lý thuyết lạm phát sẽ được chúng ta tìm hiểu trong chương 3.

Ngoài khái niệm mật độ một khái niệm hữu ích khác mà chúng ta thường sử dụng đó là **tham số mật độ** Ω được định nghĩa như sau

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{cr}} = \frac{8\pi G}{3H^2}. \quad (2.30)$$

Tức là mật độ năng lượng được chuẩn hóa tới mật độ chính. Khi đó phương trình Friedmann được viết lại có dạng

$$1 = \Omega - \frac{Kc^2}{H^2a^2}, \quad (2.31)$$

với định nghĩa

$$\Omega_K \equiv -\frac{Kc^2}{H^2a^2}, \quad (2.32)$$

tương ứng với mật độ năng lượng

$$\rho_K \equiv -\frac{3Kc^2}{8\pi Ga^2}, \quad (2.33)$$

của độ cong không gian, khi đó phương trình (2.31) có dạng

$$1 = \Omega + \Omega_K. \quad (2.34)$$

Do đó tổng của tất cả các tham số mật độ bao gồm cả tham số độ cong không gian sẽ bằng 1. Dễ thấy nếu $\Omega \simeq 1$ điều này chứng tỏ rằng $\Omega_K \simeq 0$ tức là vũ trụ gần như phẳng về mặt không gian. Từ các dữ liệu mới nhất của vệ tinh Planck [13] ta thu được

$$\Omega_K = 0.0007 \pm 0.0019 \quad (68\%, \text{TT,TE,EE+lowE+lensing+BAO}). \quad (2.35)$$

Chuẩn hóa ρ với mật độ chính tại thời điểm hiện tại có dạng

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{cr,0}} = \frac{8\pi G\rho}{3H_0^2}. \quad (2.36)$$

Với định nghĩa của Ω , phương trình Friedmann (2.20) được viết lại có dạng

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_x \Omega_{i0} g_i(a) + \frac{\Omega_{K0}}{a^2} \quad (2.37)$$

Trong đó $g_i(a)$ của thành phần i phụ thuộc vào hệ số thang đo a và $g_i(a_0 = 1) = 1$. Do đó

$$\sum_i \Omega_{i0} + \Omega_{K0} = 1 \quad (2.38)$$

đây là **quan hệ đóng** (closure relation)

2.2.3 Phương trình bảo toàn năng lượng

Phương trình bảo toàn năng lượng có dạng

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.39)$$

như một hệ quả trong lý thuyết tương đối rộng thông qua đồng nhất thức Bianchi. Đối với metric FLRW và một chất lỏng hoàn hảo phương trình này có dạng

$$\dot{\rho} + 3H \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0. \quad (2.40)$$

Kết quả này thu được từ thành phần $\mu = 0$ trong phương trình (2.39) và được gọi là **phương trình liên tục**.

Phương trình liên tục có lời giải giải tích nếu chúng ta giả thiết một phương trình trạng thái có dạng $P = \omega \rho c^2$, với ω là hằng số. Nghiệm tổng quát là

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (\omega = \text{constant}), \quad (2.41)$$

và $\rho_0 \equiv \rho(a_0 = 1)$.

Có ba giá trị cụ thể của ω đóng một vai trò quan trọng trong vũ trụ học:

- **Vật chất lạnh (cold matter):** $\omega = 0$, $P = 0$, và $\rho = \rho_0 a^{-3}$. Từ "lạnh" ngụ ý rằng các hạt cấu thành nên loại vật chất này có động năng nhỏ hơn rất nhiều so với năng lượng nghỉ (mass energy), hay các hạt này là các hạt phi tương đối tính.

Vật chất lạnh còn được gọi là **bụi** và nó bao gồm tất cả các hạt cơ bản phi tương đối tính đã biết, chúng được gọi chung là baryon theo thuật ngữ trong vũ trụ học. Trong khi đó, Các hạt phi tương đối tính chưa biết (nếu chúng tồn tại) được gọi là vật chất tối lạnh (CDM).

- **Vật chất nóng (hot matter):** $\omega = 1/3$, $P = \rho/3$ với $\rho = \rho_0 a^{-4}$. Từ "nóng" ở đây ngụ ý các hạt cấu tạo nên loại vật chất này là các hạt tương đối tính.

Trong ngôn ngữ vũ trụ học, loại vật chất này được gọi là bức xạ, chúng không chỉ bao gồm các hạt tương đối tính đã biết mà cũng có thể bao gồm những hạt chưa biết (vật chất tối nóng). Nền neutrino nguyên thủy là ứng cử viên cho loại vật chất này, nhưng vì neutrino có khối lượng rất nhỏ $\sim 0.1\text{eV}$, bây giờ nó trở thành lạnh.

- **Năng lượng chân không (vacuum energy):** $\omega = -1$, $P = -\rho$ và ρ là một hằng số. Một dạng vật chất đặc biệt kỳ lạ hiện vẫn là một bí ẩn lớn nhất trong vũ trụ học hoạt động như hằng số vũ trụ trong vũ trụ học và hiện tại nó cung cấp mô tả tốt nhất (và đơn giản nhất) mà chúng ta có về năng lượng tối.

2.3 Mô hình Λ CDM

Mô hình thành công nhất trong vũ trụ học là mô hình Λ CDM. Mô hình vũ trụ được tạo lên từ các thành phần Λ , CDM (năng lượng tối lạnh), vật chất thông thường baryons và bức xạ (photons và các neutrino không khối lượng (massless neutrinos) (mặc dù thực nghiệm chứng minh neutrino có khối lượng)).

Trong mô hình Λ CDM các phương trình Friedmann có dạng

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_{c0}}{a^3} + \frac{\Omega_{b0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{K0}}{a^2}. \quad (2.42)$$

Từ dữ liệu mới nhất của Planck [13]:

$$\boxed{\Omega_\Lambda = 0.6889 \pm 0.0056, \quad \Omega_{m0} = 0.3111 \pm 0.0056} \quad (2.43)$$

với độ tin cậy 68%, trong đó $\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{c0}$ tức là nó bao gồm các đóng góp từ CDM và baryons, vì chúng có cùng động lực học. Giá trị từ dữ liệu Planck:

$$\boxed{\Omega_{b0}h^2 = 0.02242 \pm 0.00014, \quad \Omega_{c0}h^2 = 0.11933 \pm 0.00091} \quad (2.44)$$

ở độ tin cậy 68%. Nội dung bức xạ, tức là photon cộng với neutrinos có thể được tính toán từ nhiệt độ của CMB

$$\boxed{\Omega_{\gamma 0}h^2 \approx 2.47 \times 10^{-5}, \quad \Omega_{\nu 0}h^2 \approx 1.68 \times 10^{-5}} \quad (2.45)$$

Với $h = 0.68$ và phương trình mối quan hệ đóng (2.38).

Chúng ta có thể kết luận rằng vũ trụ ngày nay chứa 69% là hằng số vũ trụ, 26% là vật chất lạnh (CDM) và 5% là baryons. Thành phần bức xạ và độ cong không gian là không đáng kể.

Tuổi của vũ trụ trong mô hình Λ CDM sử dụng công thức sau

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 da \frac{a}{\Omega_\Lambda a^4 + \Omega_{m0}a + \Omega_{r0} + \Omega_{K0}a^2} \quad (2.46)$$

Sử dụng các số liệu bên trên ta thu được giá trị của tích phân bằng

$$t_0 = \frac{0.95}{H_0} = 13.73 \text{Gyr} \quad (2.47)$$

Giá trị thu được từ dữ liệu Planck mới nhất là $t_0 = 13.787 \pm 0.020$ với độ tin cậy 68%.

2.4 Khoảng cách trong vũ trụ học

Trong phần này, chúng ta sẽ tìm hiểu tổng quan một số loại khoảng cách được sử dụng trong nghiên cứu vũ trụ học. Bao gồm khoảng cách đồng chuyển động, khoảng cách riêng, chân trời hạt, khoảng cách độ trung trong các nghiên cứu về hằng số Hubble tại thời điểm muộn của vũ trụ sử dụng các nền chuẩn là các sao biến quang và các siêu tân tinh loại IA, và cuối cùng là khoảng cách đường kính góc trong nghiên cứu CMB và các quan sát của BAO.

2.4.1 Khoảng cách đồng chuyển động và khoảng cách riêng

Từ metric FLRW, khoảng cách đồng chuyển động bình phương vi phân có dạng

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.48)$$

để thấy nó bao gồm 2 thành phần là thành phần xuyên tâm và thành phần ngang (transversal). Nếu χ là khoảng cách đồng chuyển động giữa 2 điểm thì khoảng cách riêng tại thời điểm t là

$$d(\chi, t) = a(t)\chi. \quad (2.49)$$

Khoảng cách đồng chuyển động (comoving distance) là một khái niệm về khoảng cách không bao hàm sự giãn nở của vũ trụ và do đó không phụ thuộc vào thời gian.

Khoảng cách riêng là khoảng cách được đo ngay lập tức. Ví dụ, bằng cách tưởng tượng chúng ta có thể kéo dài một chiếc thước kẻ giữa Trái đất và thiên hà GN-z11 (thiên hà xa nhất được biết đến, tại dịch chuyển đỏ $z = 11,09$). Số đo trên chiếc thước đó tại thời điểm t sẽ là khoảng cách riêng ngay tại thời điểm đó.

Với giả sử $d\Omega = 0$. Khi đó khoảng cách đồng chuyển động tới một vật thể với tọa độ hướng tâm r là

$$\chi = \int_0^r \frac{dr'}{1 - Kr'^2} = \begin{cases} \arcsin r, & \text{với } K = 1, \\ r, & \text{với } K = 0, \\ \operatorname{arcsinh} r, & \text{với } K = -1. \end{cases} \quad (2.50)$$

Lấy đạo hàm theo thời gian t cả 2 vế của phương trình (2.49) ta thu được

$$\dot{d} = \dot{a}\chi = \frac{\dot{a}}{a}d = Hd, \quad (2.51)$$

đưa trở lại định luật Hubble cho $t = t_0$

2.4.2 Khoảng cách và chân trời

Đối với photon, ta có

$$d\chi = \frac{cdt}{a(t)} = cd\eta, \quad (2.52)$$

trong đó χ là khoảng cách đồng chuyển động, từ phương trình trên ta thấy rằng khoảng cách đi đồng chuyển động sẽ bằng thời gian bảo giác nhân (được đưa ra từ phương trình (2.4)) với vận tốc ánh sáng.

Lấy tích phân số hạng $cdt/a(t)$ từ t_{em} đến t_0 ta thu được khoảng cách đồng chuyển động từ nguồn phát ra tín hiệu tới chúng ta, hay thời gian bảo giác cần thiết để photon lan truyền từ nguồn phát đến chúng ta

$$\chi = \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} = \int_a^1 \frac{cda'}{H(a')a'^2} \quad (2.53)$$

Khi cận dưới trong tích phân của phương trình trên (2.53) là $a = 0$ tức là tại Big Bang, ta có định nghĩa chân trời đồng chuyển động (comoving horizon) χ_p (còn được gọi là chân trời hạt hay chân trời vũ trụ). Đây là thời gian hình thành từ Vụ nổ lớn cho đến thời gian vũ trụ t hoặc hệ số thang đo a . Nó cũng là khoảng cách đồng chuyển động tối đa của một photon (do đó có tên là chân trời hạt) từ Vụ nổ lớn và vì vậy nó là kích thước đồng chuyển động của vũ trụ quan sát được.

Trong khi đó cận trên của tích phân trong phương trình (2.53) bằng vô cùng, ta có định nghĩa chân trời sự kiện

$$\chi_e(t) \equiv c \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} = c \int_a^\infty \frac{da'}{H(a')a'^2} \quad (2.54)$$

Biểu thức này chỉ có ý nghĩa nếu vũ trụ không sụp đổ. Điều này biểu diễn cho quãng đường lớn nhất mà photon truyền đi tại một thời điểm t .

2.4.3 Khoảng cách độ trưng

Khoảng cách độ trưng là một khái niệm rất quan trọng về khoảng cách cho các quan sát. Nó dựa trên kiến thức về độ trưng nội tại L của một nguồn sáng, do đó được gọi là nến chuẩn (standard candle). Ví dụ, Các sao siêu mới loại Ia là nến chuẩn.

Sau đó, đo thông lượng F của nguồn đó và chia L cho F , người ta thu được khoảng cách độ trưng bình phương:

$$d_L^2 \propto \frac{L}{F}. \quad (2.55)$$

Như vậy một nguồn sáng nằm ở 1 độ dịch chuyển z với độ sáng nội tại $L = dE/dt$. Thông lượng quan sát được cho bởi công thức sau:

$$F = \frac{dE_0}{dt_0 A_0}, \quad (2.56)$$

Trong đó A_0 là diện tích của bề mặt mà tại đó bức xạ lan truyền đều qua

$$A_0 = 4\pi a_0^2 \chi^2, \quad (2.57)$$

một cầu với khoảng cách riêng là bán kính. Chúng ta phải sử dụng khoảng cách riêng, vì đây là khoảng cách tức thời giữa nguồn và người quan sát tại thời điểm thu. Lưu ý rằng χ là khoảng cách đồng chuyển động giữa nguồn và chúng ta.

Chúng ta không thu được cùng một mức năng lượng của các photon như năng lượng lúc nó phát ra, bởi vì các photon chịu sự dịch chuyển đỏ vũ trụ, do đó:

$$\frac{dE}{dE_0} = \frac{a_0}{a} \quad (2.58)$$

Cuối cùng, khoảng thời gian được sử dụng tại nguồn cũng khác với khoảng thời gian được sử dụng tại vị trí của người quan sát:

$$\frac{dt}{dt_0} = \frac{a}{a_0} \quad (2.59)$$

Chúng ta có thể sử dụng metric FLRW với ánh sáng truyền theo đường trắc địa null $ds^2 = 0$ do đó $cdt = a(t)d\chi$.

Xét cùng $d\chi$ ở vị trí nguồn phát và vị trí thu ta được $cdt = a(t)d\chi$ và $cdt_0 = a(t_0)d\chi$. Cuối cùng ta thu được

$$F = \frac{dE_0}{dt_0 A_0} = \frac{a^2 dE}{a_0^2 dt 4\pi a_0^2 \chi^2} = \frac{dE}{dt 4\pi a_0^2 \chi^2 (1+z)^2} \quad (2.60)$$

Do đó, khoảng cách độ trung được xác định là

$$\boxed{d_L \equiv a_0(1+z)\chi} \quad (2.61)$$

2.4.4 Khoảng cách đường kính góc

Khoảng cách đường kính góc dựa trên kiến thức về kích thước riêng (proper size). Các vật thể có kích thước riêng đã được biết gọi là thước chuẩn (standard ruler). Giả sử một thước chuẩn có kích thước riêng ds (nhỏ) ở dịch chuyển đỏ z và khoảng cách đồng chuyển động χ . Thêm vào đó, vật thể này có kích thước góc là $d\phi$ cũng rất nhỏ. Xem Hình 2.2 để tham khảo

Tại một thời điểm cố định t , metric FLRW có dạng

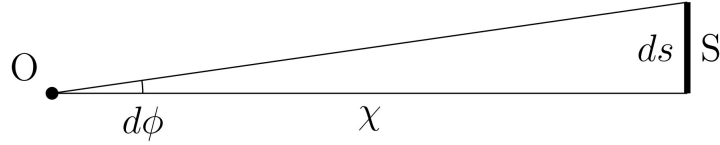
$$ds^2 = a^2(t)d\chi^2. \quad (2.62)$$

Vì vật thể là nhỏ và chúng ta ở gốc tọa độ O nên khoảng cách đồng chuyển động χ trùng với khoảng cách xuyên tâm. Khi đó ta có

$$ds = a(t)\chi d\phi. \quad (2.63)$$

Góc quan sát cũng rất nhỏ ($d\phi \simeq \sin(d\phi)$) do đó ta có khoảng cách đường kính góc có dạng sau

$$dA = \frac{ds}{d\phi} = a(t)\chi. \quad (2.64)$$



Hình 2.2: Khoảng cách đường kính góc

2.5 Lịch sử nhiệt của vũ trụ

Dịch chuyển đỏ vũ trụ học (2.9) đưa ra quy luật về hoạt động của phổ bức xạ vật đen có nhiệt độ T_γ . Thật vậy, vì tất cả các photon đều dịch chuyển đỏ theo cùng một tỷ lệ $\sim a^{-1}$, nên một hệ ban đầu hoạt động giống như vật đen sẽ vẫn là vật đen, với nhiệt độ giảm khi giãn nở tuân theo công thức

$$T_\gamma \propto a^{-1}. \quad (2.65)$$

Do đó khi chúng ta đi ngược về quá khứ trong suốt kỷ nguyên bức xạ thống trị, nhiệt độ sẽ tăng theo tỷ lệ $1/a$. Đặc biệt, điều này có nghĩa là tại điểm kỳ dị ban đầu (initial singularity) là một điểm có nhiệt độ lớn vô hạn. Điều này dẫn chúng ta đến bức tranh Big Bang nóng của vũ trụ: Một điểm kỳ dị vũ trụ học có thời gian hữu hạn trong quá khứ, tiếp theo là sự giãn nở nóng, do bức xạ chiếm ưu thế, ở đó vũ trụ nguội dần với $T \propto a^{-1}$ và khi bức xạ phân rã, sẽ tiến tới giai đoạn vật chất thống trị (matter dominate) ở đó các thiên hà, ngôi sao và hành tinh hình thành. Cuối cùng, năng lượng chân không chiếm ưu thế và đưa vũ trụ vào một trạng thái giãn nở gia tốc như ta quan sát được ngày nay.

Bức tranh đơn giản này cho phép chúng ta suy luận sự hiện diện của một vài sự kiện đáng chú ý được tóm tắt ngắn gọn trong bảng dưới đây với các thứ tự độ lớn về thời gian, dịch chuyển đỏ và nhiệt độ (năng lượng) tại đó những sự kiện này xảy ra.

Sự kiện	Thời gian t	Dịch chuyển đỏ z	Nhiệt độ T
Kỳ dị ban đầu	0	∞	∞
Hấp dẫn lượng tử	10^{-43}	-	10^{18} GeV
Lạm phát	$\gtrsim 10^{-34}$ s	-	-
Baryogenesis	$\lesssim 20$ ps	$> 10^{15}$	> 100 GeV
Chuyển pha điện yếu	20 ps	10^{15}	100 GeV
Chuyển pha QCD	20 μ s	10^{12}	150 MeV
Dark matter freeze-out	?	?	?
Neutrino decoupling	1 s	6×10^9	1 MeV
Electron-positron annihilation	6 s	2×10^9	500 keV
Big Bang nucleosynthesis	3 min	4×10^8	100 keV
Matter-radiation equality	60 kyr	3400	0.75 eV
Recombination	260–380 kyr	1100–1400	0.26–0.33 eV
Photon decoupling	380 kyr	1100	0.26 eV
Reionization	100–400 Myr	10–30	2.6–7.0 meV
Dark energy-matter equality	9 Gyr	0.4	0.33 meV
Hiện tại	13.8 Gyr	0	0.24 meV

Bảng 2.1: Lịch sử nhiệt của vũ trụ [74]

Chương 3

LẠM PHÁT VŨ TRỤ

Tóm tắt: Chương này sẽ trình bày về lý thuyết lạm phát vũ trụ, cơ chế gây ra lạm phát, trình bày khái quát một số mô hình lạm phát như lạm phát cũ, lạm phát cuộn chậm, lạm phát k , trình bày về bất biến Gauss-Bonnet vai trò của nó trong nghiệm lạm phát từ đó dẫn ra mô hình lạm phát Gauss-Bonnet.

3.1 Các khái niệm cơ bản về lạm phát

Trong nghiên cứu vũ trụ học sự hình thành của vũ trụ được phát triển bởi ý tưởng lý thuyết độc đáo mang tên viễn cảnh lạm phát. Lạm phát đã giải quyết rất gọn gàng một số câu hỏi lớn nhất trong vũ trụ học, đó là:

- Tại sao vật chất và năng lượng được trải đều khắp toàn bộ vũ trụ có thể quan sát được?
- Tại sao hình học của vũ trụ lại rất phẳng? vũ trụ giãn nở nhanh hơn nhiều vào thời gian đầu.
- Một vấn đề khác được khắc phục bởi lạm phát là sự vắng mặt của các đơn cực từ, những hạt kỳ lạ được dự đoán là đã được tạo ra trong vũ trụ sơ khai.
- Lạm phát cho chúng ta lời giải thích tại sao vũ trụ đang giãn nở ngay từ đầu. Sau khi quá trình giãn nở theo cấp số nhân kết thúc, vũ trụ sẽ tiếp tục giãn nở (giãn nở Hubble) mà ta quan sát được ngày nay.

3.2 Các vấn đề trong vũ trụ học BigBang

Trong phần này chúng ta sẽ tìm hiểu về các vấn đề xuất hiện trong mô hình vũ trụ học Big Bang và viễn cảnh lạm phát giải quyết các vấn đề này như thế nào.

3.2.1 Vấn đề độ phẳng

Vấn đề độ phẳng xuất hiện từ các tính toán về độ cong của vũ trụ tại thời điểm hiện tại xấp xỉ bằng không tức là vũ trụ gần như hoàn toàn là phẳng về mặt không gian. Cụ thể, tham số mật độ độ cong được xác định như sau (2.32)

$$\Omega_K \equiv -\frac{K}{a^2 H^2}, \quad (3.1)$$

giá trị quan sát từ vệ tinh Planck $\Omega_{K0} = 0.0007^{+0.0037}_{-0.0037}$ ở độ tin cậy 95% [13]. Hiện nhiên ta sẽ tự tin khi $|\Omega_{K0}| < 1$. Dẫn đến

$$|\Omega_K| = \left| -\frac{K}{H^2 a^2} \right| = \left| -\frac{K}{H_0^2 a_0^2} \frac{H_0^2 a_0^2}{H^2 a^2} \right| = |\Omega_{K0}| \frac{H_0^2}{a^2 H^2} < \frac{H_0^2}{H^2 a^2}, \quad (3.2)$$

Hàm xuất hiện ở vế phải của phương trình sẽ có tỷ lệ như thế nào? Khi $a \rightarrow 0$, hay xét riêng tại kỷ nguyên bức xạ thống trị, ta có:

$$\frac{H_0^2}{H^2 a^2} \sim a^2 \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Có nghĩa là, càng tiến về quá khứ, Ω_K càng tiến thực sự rất gần đến số 0 hay độ cong của vũ trụ là phẳng.

Ngoại suy về thời điểm Planck (Planck time) ta có $|\Omega_K| < 10^{-60}$. Nếu vì một lý do nào đó mà $\Omega_K \sim 10^{-59}$ tại kỷ nguyên Planck, thì Ω_{K0} ngày nay sẽ lớn hơn gấp mười lần và sẽ không thể phù hợp với quan sát. Để phù hợp với các quan sát ngày nay, Ω_K tại thời điểm Planck phải được xác định với độ chính xác đến đủ cả 60 chữ số có nghĩa! Đây là một ví dụ về sự tinh chỉnh (fine tuning problem). Đối với vấn đề độ phẳng, ý tưởng rất đơn giản được đưa ra trong A. Guth (1981) [5] như sau. Xét phương trình (3.1). Nếu H không đổi thì $\Omega_K \sim 1/a^2$. Nếu trước kỷ nguyên bức xạ thống trị, vũ trụ trải qua một giai đoạn mà H không đổi, thì có thể giải thích tại sao ngay từ đầu K quá nhỏ mà không cần điều chỉnh lại. Giai đoạn với H không đổi, hoặc gần như không đổi, ngụ ý rằng $a(t) \simeq e^{Ht}$ (hay hệ số thang đo phát triển theo cấp số nhân) được gọi là **lạm phát**.

Giải pháp cho vấn đề độ phẳng

Để xem xét định lượng cách mà lạm phát giải quyết vấn đề độ phẳng ta giả sử rằng tại thời điểm bắt đầu của lạm phát ta có

$$\frac{|K|}{a_i^2 H_i^2} = \mathcal{O}(1). \quad (3.4)$$

Khi kết thúc pha lạm phát hệ số thang đo đã tăng lên theo hệ số e^N . N là số lần e gấp (e-folds number) hay

$$\frac{|K|}{a_f^2 H_f^2} = \frac{|K|}{a_i^2 H_i^2} e^{-2N} \approx e^{-2N}. \quad (3.5)$$

Điều này dẫn đến tại thời điểm hiện tại (vì $a_0 = 1$)

$$|\Omega_{K0}| = \frac{|K|}{H_0^2} = \frac{|K|}{a_f^2 H_f^2} \left(\frac{a_f H_f}{H_0} \right)^2 \approx e^{-2N} \left(\frac{a_f H_f}{H_0} \right)^2, \quad (3.6)$$

để thỏa mãn điều kiện $|\Omega_{K0}| < 1$ thì

$$\boxed{\frac{a_f H_f}{H_0} < e^N}. \quad (3.7)$$

Ta có thể ước tính tỷ lệ ở phía vế trái, với giả thiết lạm phát kết thúc vào kỷ nguyên bức xạ thống trị. Thật vậy tại kỷ nguyên bức xạ thống trị ta có

$$H_f^2 \approx H_0^2 \Omega_{r0}^{1/4} a_f^4, \quad (3.8)$$

để có

$$a_f \approx \Omega_{r0}^{1/4} \sqrt{H_0/H_f} \quad (3.9)$$

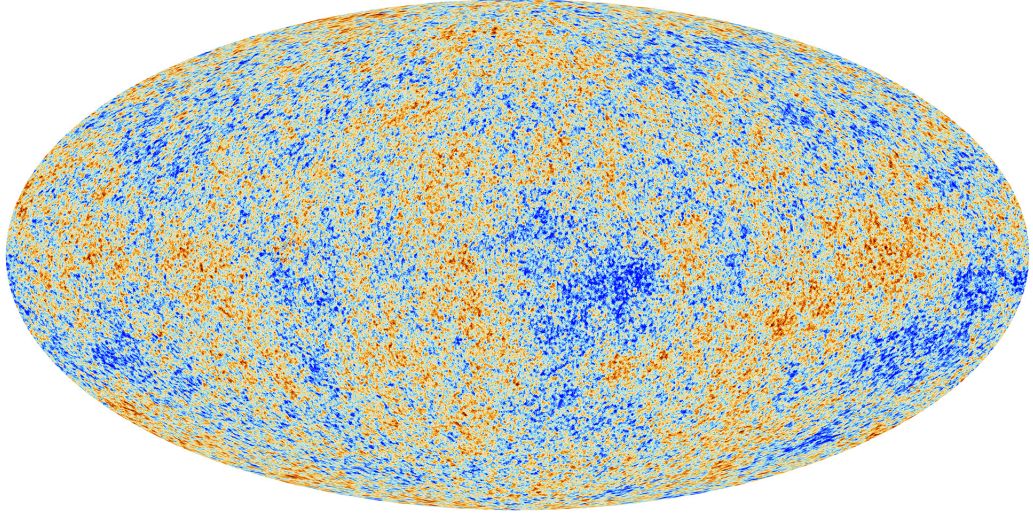
$$\Rightarrow e^N > \Omega_{r0}^{1/4} (\rho_f/\rho_0)^{1/4} = \frac{\rho_f^{1/4}}{0.037 \text{ eV}}, \quad (3.10)$$

trong đó ρ_f là thang đo năng lượng mà tại đó kết thúc quá trình lạm phát, nhưng vì H gần như không đổi trong suốt pha lạm phát (để thỏa mãn hệ số thang đo biến đổi theo cấp số nhân), ρ_f là thang đo mật độ năng lượng cho phép ta tính toán số lần e gấp (e-fold number).

Rõ ràng để không phá hỏng sự thành công của giai đoạn Big Bang Nucleosynthesis (BBN) thì ρ_f phải nhỏ hơn 1 MeV^4 với ràng buộc này ta có $N > 17$ Nếu ta chọn thang đo Planck, ta nhận được $N > 68$ và chọn thang năng lượng GUT, $N > 62$.

3.2.2 Vấn đề chân trời

Khoảng 380 000 năm sau Vụ nổ lớn, vũ trụ đã nguội đi đủ để cho phép hình thành các nguyên tử hydro đầu tiên. Các photon được tách ra khỏi plasma nguyên thủy. Chúng ta quan sát sự kiện này dưới dạng nền vi sóng vũ trụ (CMB), một ánh hào quang sau vụ nổ Big Bang nóng. Đáng chú ý, bức xạ này gần như là đẳng hướng hoàn toàn, với dị hướng ở nhiệt độ CMB nhỏ hơn một phần nghìn.



Hình 3.1: Bức xạ nền vi sóng vũ trụ (CMB) - Hình ảnh cung cấp bởi vệ tinh Planck Cơ quan Vũ trụ châu Âu ESA.

Vấn đề đường chân trời xuất hiện khi chúng ta tính toán kích thước góc của đường chân trời hạt tại thời điểm tái hợp (recombination) và nhận thấy rằng nó chỉ là một phần nhỏ của bầu trời CMB. Nếu không có quá trình nhân quả nào có thể xảy ra vượt quá 1 độ thì điều gì đã gây ra sự đẳng hướng cao của nhiệt độ CMB?

Tính toán định lượng khoảng cách của đường chân trời hạt ta có công thức sau

$$d_H = a(t) \int_0^t \frac{d\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = a \int_0^a \frac{d\tilde{a}}{H(\tilde{a})\tilde{a}^2}. \quad (3.11)$$

Trong một vũ trụ thống trị bởi vật chất và bức xạ (các thành phần khác không đáng kể) biểu thức trên trở thành

$$d_H = a \int_0^a \frac{d\tilde{a}}{H_0 \sqrt{\Omega_{m0}\tilde{a} + \Omega_{r0}}} = \frac{2a}{H_0 \Omega_{m0}} \left(\sqrt{\Omega_{m0}a + \Omega_{r0}} - \sqrt{\Omega_{r0}} \right). \quad (3.12)$$

Trong khi đó khoảng cách đường kính góc được tính theo công thức

$$d_A = a(t) \int_t^{t_0} \frac{d\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = a \int_a^1 \frac{d\tilde{a}}{H(\tilde{a})\tilde{a}^2}. \quad (3.13)$$

Tương tự ta xét vũ trụ trong thời kỳ vật chất và bức xạ thống trị

$$d_A = a \int_a^1 \frac{d\tilde{a}}{H_0 \sqrt{\Omega_{m0}\tilde{a} + \Omega_{r0}}} = \frac{2a}{H_0 \Omega_{m0}} \left(\sqrt{\Omega_{m0} + \Omega_{r0}} - \sqrt{\Omega_{m0}a + \Omega_{r0}} \right). \quad (3.14)$$

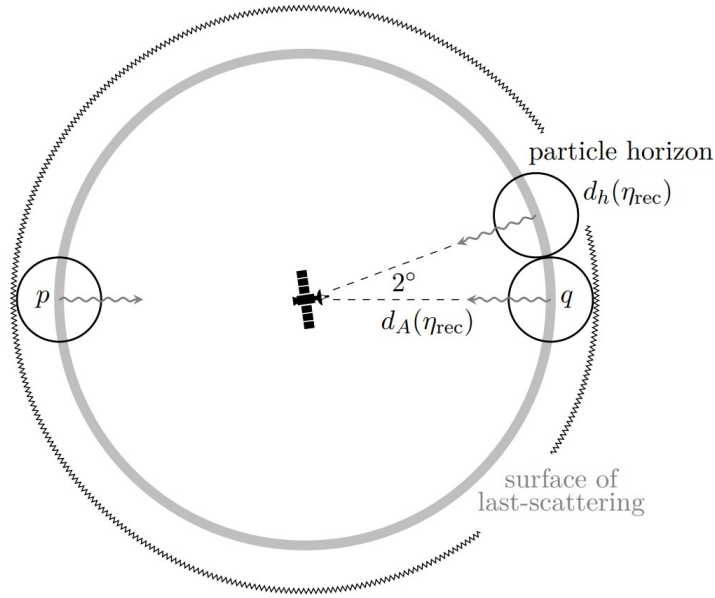
Ta có tỷ lệ

$$\frac{d_H}{d_A} = \frac{\sqrt{\Omega_{m0}a + \Omega_{r0}} - \sqrt{\Omega_{r0}}}{\sqrt{\Omega_{m0} + \Omega_{r0}} - \sqrt{\Omega_{m0}a + \Omega_{r0}}}, \quad (3.15)$$

tỷ lệ này có xu hướng tiến đến 0 khi $a \rightarrow 0$ và tại thời điểm tái hợp:

$$\frac{d_H}{d_A}(a_{\text{rec}} = 10^{-3}) = 0.018(\text{radial}), \quad (3.16)$$

giá trị này cỡ 1° trên bầu trời CMB. Do đó ta có khoảng $4\pi/(0.018)^2 \approx 10^4$ vùng bị ngắt kết nối nhân quả trên bầu trời. Nếu không có đủ thời gian để các vùng này kết nối, tại sao chúng lại trông giống nhau đến vậy? Đây là vấn đề chân trời.



Hình 3.2: Các vùng ngắt kết nối nhân quả [74].

Giải pháp cho vấn đề chân trời

Tương tự với vấn đề độ phẳng. Giả sử ban đầu có một giai đoạn lạm phát sao cho:

$$a(t) = a_i e^{H_f(t-t_i)} = a_f e^{-H_f(t_f-t)}, \quad (3.17)$$

. Khi đó ta có

$$\frac{d_H}{d_A} \approx \frac{H_0}{a_f H_f} e^N, \quad (3.18)$$

để $d_H > d_A$, ta cần điều kiện:

$$\boxed{\frac{a_f H_f}{H_0} < e^N}. \quad (3.19)$$

Trùng với điều kiện trong vấn đề độ phẳng. Cùng một giải pháp cho hai vấn đề khác nhau đây dường như là một dấu hiệu tốt và một điểm cộng cho lý thuyết lạm phát.

3.3 Cơ chế gây ra lạm phát

Để nghiên cứu lạm phát vũ trụ chúng ta cần kết hợp hai nhánh chính của vật lý hiện đại bao gồm

- Lý thuyết tương đối tổng quát (GR).
- Cơ học lượng tử: cụ thể là lý thuyết trường lượng tử (QFT).

Lý thuyết tương đối tổng quát được sử dụng để dự đoán hành vi của toàn bộ vũ trụ. Ngày nay, các quan sát vũ trụ [13] [14] chỉ ra vũ trụ đang giãn nở gia tốc do một loại năng lượng bí ẩn có đặc tính phản hấp dẫn (anti gravity) được gọi là năng lượng tối (DE). Như đã đề cập ở chương trước trong mô hình Λ CDM, Λ đại diện cho mật độ năng lượng chân không không đổi xuất hiện trong phương trình Einstein được gọi là hằng số vũ trụ - giá trị dương của Λ gây ra pha giãn nở theo cấp số nhân (pha de Sitter). Tốc độ giãn nở phụ thuộc vào độ lớn của mật độ năng lượng chân không. Đối với năng lượng tối, con số này cực kỳ nhỏ. Việc ước lượng giá trị ρ_Λ thông qua tính toán QFT và so sánh kết quả với giá trị quan sát được dẫn đến **vấn đề tinh chỉnh** (fine-tuning problem) nổi tiếng của hằng số vũ trụ [75]. Vấn đề này được mô tả như sau: Giá trị quan sát được ρ_Λ vào khoảng 10^{-47}GeV^4 [13] trong khi đó thang đo tự nhiên của mật độ năng lượng chân không là Planck scale vào cỡ 10^{76}GeV^4 . Dễ thấy sự khác biệt lên đến 123 bậc độ lớn! kể cả khi ta giả thiết một trạng thái giả chân không (false vacuum state) xuất hiện sau chuyển pha điện yếu ở 10^8GeV^4 sự sai khác vẫn quá lớn cỡ 55 bậc độ lớn [76].

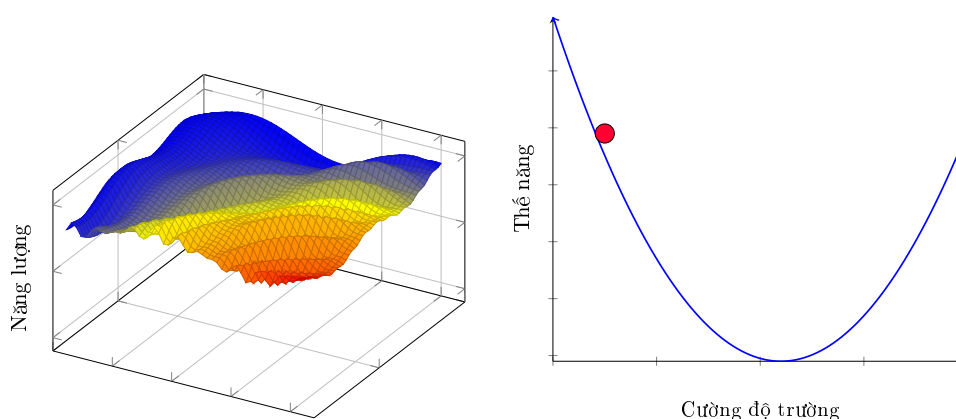
Để giải quyết các vấn đề vũ trụ học (vấn đề độ phẳng, vấn đề đường chân trời, vấn đề đơn cực từ,...) lạm phát yêu cầu mật độ năng lượng chân không không đổi lớn hơn rất nhiều so với năng lượng tối. Ngoài ra, để lạm phát có ý nghĩa, vũ trụ cũng cần dừng lạm phát vào một thời điểm nào đó để nhường chỗ cho sự giãn nở Hubble quen thuộc mà ta quan sát thấy ngày nay.

3.3.1 Cơ sở lý thuyết cho lạm phát vũ trụ

Để xem xét cơ chế này xảy ra như thế nào chúng ta cần vượt ra ngoài khuôn khổ của lý thuyết tương đối rộng cụ thể ở đây ta cần lý thuyết trường lượng tử.

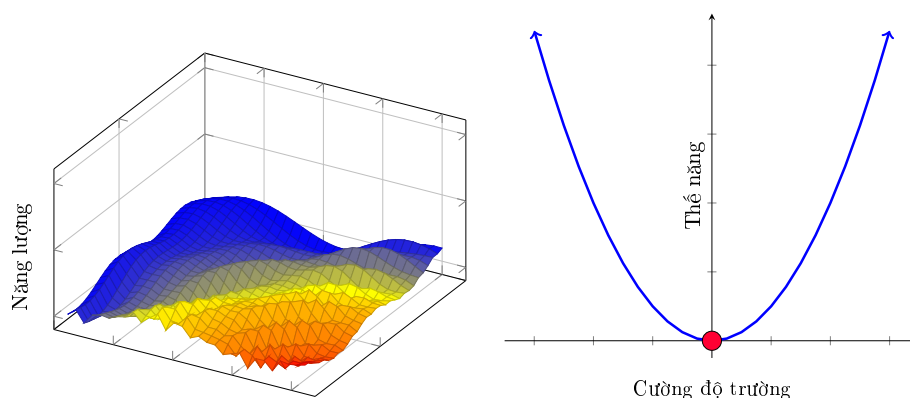
Định nghĩa.— *Lý thuyết trường lượng tử:* Trong vật lý lý thuyết, lý thuyết trường lượng tử (QFT) là một khung lý thuyết kết hợp lý thuyết trường cổ điển, thuyết tương đối hẹp và cơ học lượng tử và nó được sử dụng để xây dựng các mô hình vật lý của các hạt hạ nguyên tử.

Lý thuyết trường lượng tử có thể giải thích cách mà chân không có năng lượng. Một trường lượng tử nhận một giá trị nào đó tại mọi điểm trong không gian gọi là cường độ trường (field strength). Cường độ trường xác định độ lớn của lực mà một trường lượng tử tác dụng lên các trường và các hạt khác.



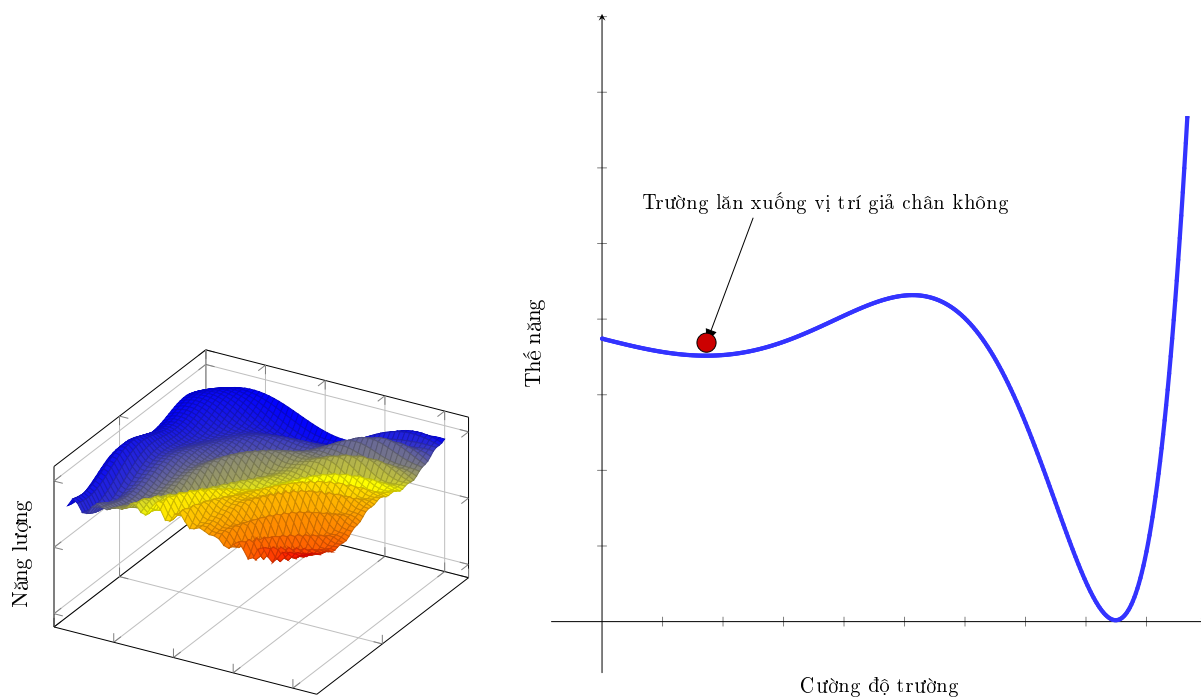
Hình 3.3: Trường lượng tử và đồ thị thế năng tương ứng với cường độ trường.

Một ví dụ dễ hình dung là từ trường, từ trường càng mạnh (cụ thể là các đường sức từ càng dày đặc) thì lực từ tác dụng dưới dạng lực kéo hoặc đẩy sẽ càng mạnh. Trong lý thuyết trường lượng tử một hạt cơ bản tương ứng với một dao động trong trường hay là một gói năng lượng nhỏ được tạo ra bởi dao động của trường lượng tử. Trường lượng tử có thể chứa năng lượng nội tại ngay cả khi trường đó không có hạt nào. Ngoài ra, nó luôn có xu hướng giảm xuống mức năng lượng thấp nhất (trạng thái chân không - vacuum state) quá trình chuyển đến trạng thái chân không này không phải ngay lập tức mà bằng cách thay đổi cường độ trường từng bước một. Nếu ta vẽ biểu đồ thế năng của một trường tương ứng với cường độ của trường đó, nó có dạng giống như các hình 3.3 nếu trường đang tồn tại trạng thái năng lượng cao (cường độ trường cao), thì nó sẽ giảm xuống mức cực tiểu và sẽ tồn tại ổn định ở đó.



Hình 3.4: Trạng thái chân không của trường lượng tử

Trên thực tế mối quan hệ giữa năng lượng của trường và cường độ trường có thể phức tạp hơn nhiều. Một trong những trường hợp như vậy là trường có thể tồn tại một mức năng lượng tối thiểu cục bộ (local minimum energy) hay một trạng thái giả chân không của trường (false vacuum state) được minh họa trong hình vẽ sau



Hình 3.5: Trạng thái giả chân không hay mức năng lượng tối thiểu cục bộ.

Trạng thái giả chân không này cung cấp chính xác một mật độ năng lượng chân không không đổi cần thiết cho quá trình lạm phát.

Ta giả sử rằng một trường như vậy tồn tại và đặt tên nó là: "trường inflaton".

Định nghĩa. — *Trường inflaton*: Trường inflaton là một trường vô hướng giả định được lý thuyết để thúc đẩy lạm phát vũ trụ trong vũ trụ rất sơ khai. Trường, do Alan Guth đưa ra lý thuyết ban đầu, cung cấp một cơ chế trong đó một khoảng thời gian giãn nở nhanh chóng từ $10^{-35} \rightarrow 10^{-34}$ giây sau khi giãn ban đầu này có thể được tạo ra. Hình thành một vũ trụ phù hợp với sự đồng nhất và đẳng hướng không gian quan sát được.

Ý tưởng ban đầu về lạm phát do Alan Guth đề xuất năm 1979 [5] như sau: Trong vũ trụ sơ khai, một trường vô hướng phẳng có cường độ trường cao do nhiệt độ khắc nghiệt tại thời điểm đó. Khi vũ trụ nguội đi, trường sẽ mất dần cường độ và năng lượng. Tuy nhiên, nó bị mắc kẹt tại trạng thái năng lượng tối thiểu cục bộ. Vũ trụ tiếp tục nguội đi nhưng trường không giảm cường độ. Để làm được điều này nó phải vượt qua rào thế. Khi tồn tại ở trạng thái giả chân không trường có một mật độ năng lượng không đổi rất lớn chính điều này là cơ chế gây ra lạm phát. Bản chất giãn nở theo cấp số nhân của lạm phát nhanh chóng thổi bùng thể tích vũ trụ, khiến vũ trụ trở về trạng thái trống rỗng và làm lạnh nó đến nhiệt độ cực thấp. Cơ chế lạm phát và làm lạnh vũ trụ này sẽ diễn ra vĩnh viễn nếu trường inflaton vẫn bị mắc kẹt tại trạng thái giả chân không này.

Tuy nhiên, dựa vào nguyên lý bất định Heisenberg, các trường lượng tử có xu hướng dao động ngẫu nhiên đến các giá trị khác nhau của cường độ trường vì vậy ở một thời điểm nào đó trường dao động sang phía bên kia của rào thế (hiệu ứng xuyên ngầm lượng tử) và nhanh chóng rơi xuống trạng thái chân không thực khi đó lạm phát kết thúc tại thời điểm này đồng thời toàn bộ trường lạm phát sẽ giảm năng lượng. Trạng thái chuyển pha của trường lạm phát từ trạng thái giả chân không về trạng thái chân không thực không làm năng lượng của trường lạm phát biến mất mà tồn tại trong thời gian ngắn dưới dạng các hạt inflaton. Nó giống như toàn bộ sản của trường được dịch chuyển xuống tại mọi điểm trong không gian; những gì đã từng là trường lạm phát thuần túy được chuyển đổi thành một nền các hạt inflaton. Những hạt đó không ổn định và chúng rất nhanh chóng phân rã năng lượng của chúng vào các trường lượng tử khác. Các hạt inflaton phân rã thành các hạt quen thuộc của mô hình chuẩn - quark, electron, v.v. Vì vậy, chân không của lạm phát được chuyển đổi thành một đại dương hạt cực nóng. Chúng ta nói rằng vũ trụ đã được 'tái nhiệt hóa' hoặc hâm nóng lại bởi quá trình này. Trên thực tế, quá trình này sẽ hâm nóng vũ trụ đến mức năng lượng cực lớn mà chúng ta mong đợi đã tồn tại ngay sau Vụ nổ lớn. Tại thời kỳ này vũ trụ bước vào giai đoạn bức xạ thống trị được dự đoán thành công trong mô hình BigBang nóng. Đây là trình tự sơ bộ được trình bày trong bài báo gốc của Alan Guth [5]. Tuy nhiên, mô hình của Guth gặp phải một số vấn đề. Vấn đề quan trọng là làm thế nào

để lạm phát dừng lại đồng thời dự đoán lý thuyết của mô hình này không phù hợp với các quan sát CMB. Ý tưởng của Guth hiện được gọi là lạm phát cũ. Nó đã giải quyết một số vấn đề trong vũ trụ học và nó cũng truyền cảm hứng cho các nhà vật lý khác tìm ra các giải pháp tốt hơn, chủ yếu bằng cách thay đổi bản chất của trường là làm phẳng thế năng của nó để cho phép thoát khỏi lạm phát trên toàn vũ trụ một cách suôn sẻ hơn. Các mô hình lạm phát mới này thành công hơn và chúng ta sẽ xem xét chúng trong phần sau.

3.4 Lạm phát cuộn chậm

Trong phần này chúng ta sẽ tìm hiểu về mô hình lạm phát mới khắc phục điểm yếu trong mô hình lạm phát cũ của Alan Guth được gọi là Lạm phát cuộn chậm (slow roll inflation). Lạm phát cuộn chậm lần đầu được đề xuất bởi ba nhà khoa học Andrei Linde [6], Andreas Albrecht và Paul Steinhardt [7], vào năm 1982, chỉ vài năm sau đề xuất của Guth. Ý tưởng về lạm phát cuộn chậm là trường lạm phát không bị mắc kẹt ở mức tối thiểu cục bộ của thế năng mà nó nằm trên một dạng thế năng gần như phẳng dẫn đến một hồ thế sâu hơn. Trong trường hợp đó, trường sẽ lăn rất xuống dốc thế đó. Như vậy, năng lượng sẽ giảm rất chậm. Điều đó sẽ vẫn cung cấp cho chúng ta mật độ năng lượng gần như không đổi cần thiết để cung cấp năng lượng cho lạm phát và sau đó, khi tốc độ tăng tốc về phía hồ thế, lạm phát sẽ kết thúc. Nhưng nó không kết thúc như một quá trình ngẫu nhiên, nó cũng không yêu cầu đường hầm lượng tử để bắt đầu. Thay vào đó, toàn bộ các vùng của vũ trụ lạm phát sẽ đạt đến mức cực tiểu này cùng với thời điểm dừng Lạm phát và do đó vũ trụ sẽ được hâm nóng ở mọi nơi cùng một lúc. Điều này mang lại cho chúng ta vũ trụ đặc nóng giãn nở mà chúng ta biết trong mô hình Vụ nổ lớn. Do tính chất tự nhiên của vật lý lượng tử Khi trường lạm phát lăn xuống hồ thế năng, cường độ trường sẽ dao động một chút. Điều đó có nghĩa là một số khu vực của vũ trụ sẽ kết thúc lạm phát trước những khu vực khác một chút. Và điều đó sẽ dẫn đến sự dao động về mật độ và nhiệt độ rất nhỏ của vật chất được tạo ra sau lạm phát. Và chúng ta thấy những biến động đó trong Nền Vi sóng Vũ trụ.

Như đề cập ở trên nghiên cứu lạm phát ta cần mở rộng lý thuyết tương đối rộng cụ thể là lý thuyết trường lượng tử. Các hạt cơ bản trong nghiên cứu vật lý hạt hiện đại được biểu diễn bằng các trường lượng tử tương ứng của chúng. các hạt cơ bản này được biểu hiện dưới dạng dao động trong các trường. Trong lý thuyết trường lượng tử, trường vô hướng đại diện cho các hạt cơ bản có spin bằng không và giống như trạng thái chân không vì chúng có cùng số lượng tử với chân không. Vật chất có áp suất âm $\rho = -p$ biểu diễn cho trạng thái giống như chân không vật lý (physical vacuum like

state), nơi tồn tại các thăng giáng lượng tử của tất cả các loại trường vật chất. Một trường vô hướng thực đơn inflaton $\phi = \phi(x, t)$ tồn tại trong vũ trụ sơ khai, giá trị của trường hay cường độ trường phụ thuộc vào vị trí x của trường trong không gian ngụ ý rằng thế năng của nó phụ thuộc vào cường độ trường tương ứng như ta đã chỉ ra một cách định tính trong phần trước. Cường độ trường cũng phụ thuộc vào thời gian và do đó nó cũng có động năng tương ứng. Như vậy mật độ năng lượng ρ_ϕ của trường inflaton ϕ là

$$\rho_\phi = \rho_\phi^k + \rho_\phi^p. \quad (3.20)$$

Tác dụng tương ứng của trường inflaton ϕ chính tắc có dạng

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right]. \quad (3.21)$$

Tensor năng xung lượng của trường

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\phi)}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - g_{\mu\nu}V(\phi) + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi. \quad (3.22)$$

Các thành phần của tensor $T_{\mu\nu}$

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2a^2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi), \quad (3.23)$$

$$T_{ij} = -g_{ij} \left[-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2a^2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right] + \partial_i\phi\partial_j\phi. \quad (3.24)$$

Khi đó mật độ năng lượng và áp suất của trường lạm phát có dạng

$$\rho_\phi = -T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2a^2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \quad (3.25)$$

và

$$p_\phi = \frac{1}{3}T_i^i = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{6a^2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi). \quad (3.26)$$

Trong thời gian xảy ra lạm phát, trường lạm phát gần như đồng nhất. Do tính đồng nhất lên số hạng gradient của trường là không đáng kể. Khi đó, ta có

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.27)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (3.28)$$

với $V(\phi) \geq 0$. Tham số phương trình trạng thái

$$\omega = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} = \frac{1 - (2V(\phi)/\dot{\phi}^2)}{1 + (2V(\phi)/\dot{\phi}^2)}. \quad (3.29)$$

Để có điều kiện cho tham số phương trình trạng thái là

$$-1 \leq \omega \leq 1. \quad (3.30)$$

Nếu số hạng động năng $\dot{\phi}^2 \gg V(\phi)$ thì $\omega \approx 1$. Ngược lại nếu số hạng thế năng $V(\phi)$ chiếm ưu thế tức là $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$ thì $\omega \approx -1$. Với trường hợp thế năng chiếm ưu thế ta có điều kiện áp suất âm $p_\phi = -\rho_\phi$ hay thế năng là thành phần chính thúc đẩy lạm phát.

Trong khi đó lấy biến phân tác dụng (3.21) theo ϕ ta thu được phương trình chuyển động của trường vô hướng

$$\square\phi = V'(\phi). \quad (3.31)$$

Trong không thời gian FLRW ta thu được

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2}(\nabla^2\phi) + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (3.32)$$

trong đó $H = \frac{\dot{a}}{a}$ là tham số Hubble.

Một lần nữa ta xét trường đồng nhất số hạng thứ hai chứa gradient của trường được bỏ qua

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (3.33)$$

Phương trình (3.33) hoàn toàn có thể thu được từ phương trình liên tục thông qua các phương trình cho ρ_ϕ và p_ϕ như sau

$$\dot{\rho}_\phi = -3H(\rho_\phi + p_\phi), \quad (3.34)$$

dẫn đến

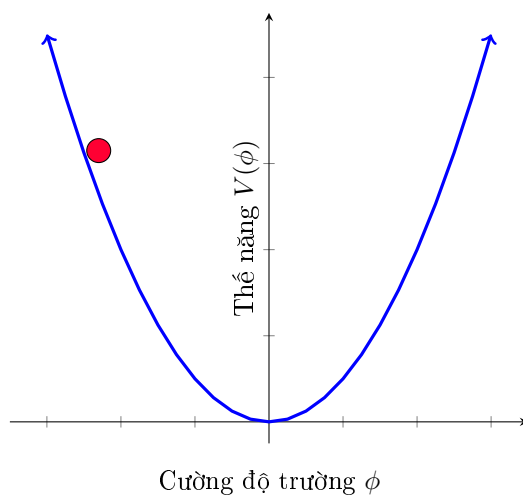
$$\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'(\phi)\dot{\phi} = -3H\dot{\phi}^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi). \quad (3.35)$$

Đây là phương trình trường cho trường vô hướng đồng nhất trong một vũ trụ giãn nở (FLRW).

Lưu ý rằng trong trường hợp không thời gian Minkowski $(-1, 1, 1, 1)$ phương trình chuyển động cho trường vô hướng có dạng

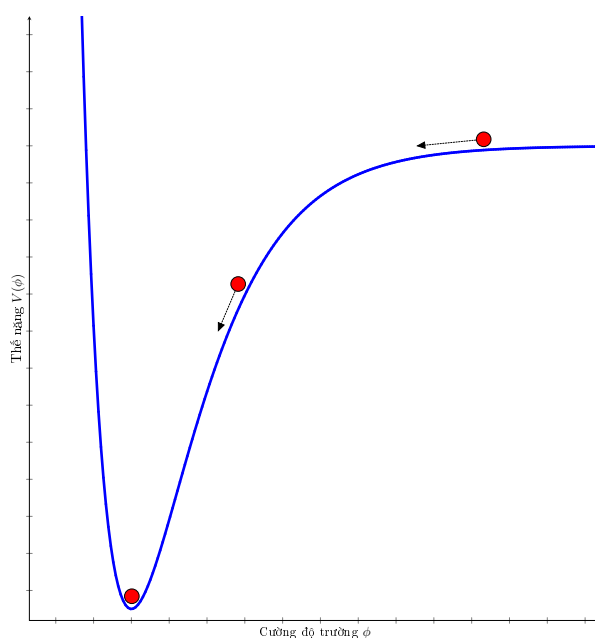
$$\ddot{\phi} = -V'(\phi), \quad (3.36)$$

số hạng $3H\dot{\phi} = 0$ vì $H = 0$ trong Minkowski spacetime. Với phương trình (3.36) cho một trường đồng nhất khi ta so sánh với phương trình trong cơ học cổ điển cho một hạt trong một trường hấp dẫn có thế năng $V(\vec{r})$ với gia tốc hấp dẫn có dạng $\ddot{\vec{r}} = -\nabla V(\vec{r})$. Do đó ta có thể coi như trường lăn dần xuống thế năng của nó như 1 tảng đá lăn dần xuống thung lũng như hình vẽ sau



Hình 3.6: Trường vô hướng trong không thời gian Minkowski và dạng thế năng của nó.

Để thấy trong vũ trụ giãn nở FLRW nơi đóng góp của số hạng $3H\dot{\phi}$ là khác không cụ thể số hạng này đóng góp như một *số hạng ma sát* làm chậm sự phát triển của trường ϕ . Hay số hạng này làm cho trường ϕ lăn chậm xuống thế năng $V(\phi)$ trong quá trình giãn nở của vũ trụ $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Trực quan hóa quá trình này như sau



Hình 3.7: Trường inflaton trong cơ chế slow-roll

3.4.1 Điều kiện cho lạm phát cuộn chậm

Phương trình Friedmann thứ hai áp dụng cho trường inflaton ϕ có dạng

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi). \quad (3.37)$$

Lạm phát là một giai đoạn giãn nở gia tốc do đó $\ddot{a} > 0$ dẫn đến điều kiện sau

$$\rho_\phi + 3p_\phi < 0 \rightarrow p_\phi < -\frac{1}{3}\rho_\phi, \quad (3.38)$$

dẫn đến

$$\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right) < -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right). \quad (3.39)$$

Trường lạm phát lăn chậm xuống thế năng của nó đồng thời lạm phát được thúc đẩy chủ yếu bởi thế năng dẫn đến bất đẳng thức trên thỏa mãn khi

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi). \quad (3.40)$$

Lấy đạo hàm 2 vế của (3.40) theo thời gian ta thu được

$$\ddot{\phi} \ll \frac{1}{2}V'(\phi), \quad (3.41)$$

từ phương trình chuyển động của trường inflaton (3.33) ta có

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (3.42)$$

ta bỏ qua số hạng $\ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$ dẫn đến

$$V'(\phi) = -3H\dot{\phi}, \quad (3.43)$$

thay vào bất phương trình (3.41)

$$\ddot{\phi} \ll \frac{1}{2}(-3H\dot{\phi}), \quad (3.44)$$

bỏ qua phần hệ số ta và lấy trị tuyệt đối 2 vế thu được điều kiện sau

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, \quad (3.45)$$

kết hợp với điều kiện (3.40) đây là hai điều kiện cuộn chậm (slow roll condition) xảy ra.

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (3.46)$$

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|. \quad (3.47)$$

Lấy đạo hàm 2 vế của phương trình (3.43) theo thời gian ta thu được

$$3(\dot{H}\dot{\phi} + H\ddot{\phi}) = -V''(\phi)\dot{\phi}, \quad (3.48)$$

vì H gần như không đổi trong suốt pha lạm phát do đó số hạng $\dot{H}$ có thể được bỏ qua và ta có

$$\ddot{\phi} = -\frac{V''(\phi)\dot{\phi}}{3H}, \quad (3.49)$$

từ phương trình (3.45) ta thu được

$$-\frac{V''(\phi)\dot{\phi}}{3H} \ll 3H\dot{\phi}, \quad (3.50)$$

dẫn đến

$$|V''(\phi)| \ll H^2. \quad (3.51)$$

3.4.2 Các tham số cuộn chậm

Ta định nghĩa các tham số cuộn chậm ϵ và η được định nghĩa dưới dạng tham số Hubble và thế năng V giúp chúng ta định lượng tham số cuộn chậm

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (3.52)$$

sử dụng công thức $a(t) \propto e^N \Rightarrow N = \ln a$ phương trình trên có thể được biểu diễn

$$\epsilon_H = -\frac{d \ln(H)}{dN}, \quad (3.53)$$

với N là e-folds number do đó

$$\eta_H = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{H}}{\dot{H}H}. \quad (3.54)$$

Phương trình Friedmann đầu tiên cho ϕ trong không thời gian phẳng FLRW có dạng

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi. \quad (3.55)$$

Nếu các điều kiện cuộn chậm (3.46), (3.47) được thỏa mãn, chúng ta có thể lấy xấp xỉ cuộn chậm phương trình Friedmann (3.55) có dạng

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\phi). \quad (3.56)$$

Lấy đạo hàm theo thời gian cả 2 vế của phương trình trên có dạng

$$\dot{H}H = \frac{4\pi G}{3} V'(\phi)\dot{\phi}. \quad (3.57)$$

Thay $V'(\phi)$ từ phương trình (3.43) vào phương trình trên ta thu được

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}^2. \quad (3.58)$$

Tiếp tục thay $\dot{H}$ từ phương trình trên vào phương trình cho ϵ_H (3.52) ta thu được

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{4\pi G}{H^2} \dot{\phi}^2. \quad (3.59)$$

Mặt khác từ phương trình (3.43) ta có

$$\dot{\phi} = -\frac{V'(\phi)}{3H}. \quad (3.60)$$

Thay vào phương trình (3.59)

$$\epsilon_H = \frac{4\pi G}{H^2} \left(\frac{V'(\phi)^2}{9H^2} \right) = \frac{4\pi G V'(\phi)^2}{9H^4}, \quad (3.61)$$

với H^2 thu được từ phương trình Friedmann (3.56) thay vào phương trình này ta thu được

$$\epsilon_H = \frac{4\pi G V'(\phi)^2}{9 \left(\frac{8\pi G}{3} V(\phi) \right)^2} = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 = \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2. \quad (3.62)$$

như vậy tham số cuộn chậm được biểu diễn dưới dạng thế năng có dạng

$$\epsilon_V = \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2, \quad (3.63)$$

tham số cuộn chậm thứ hai η_H có thể được biểu thị như sau

$$\eta_H = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}, \quad (3.64)$$

tương tự với ϵ_H ta thu được

$$\eta_V = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right) = M_{\text{pl}}^2 \left(\frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right), \quad (3.65)$$

ngoài ra nếu sử dụng phương trình (3.43) ta thu được

$$\eta_V = \frac{V''(\phi)}{3H^2}. \quad (3.66)$$

3.4.3 Số e - folds

Lạm phát được định lượng thông qua số e-fold (e-folds number) ký hiệu là N trước thời điểm kết thúc lạm phát. Trong pha lạm phát N sẽ giảm và bằng 0 tại thời điểm lạm phát kết thúc. Khi tính toán N ta sẽ đi ngược từ thời điểm kết thúc lạm phát ($N = 0$) đến thời kỳ bắt đầu lạm phát (N đạt giá trị lớn nhất). Trong pha lạm phát hệ số thang đo $a(t)$ phát triển với một hệ số cực lớn chính vì vậy nó đo số lần thời gian phát triển. Giá trị cần thiết của N để giải quyết các vấn đề vũ trụ học như đề cập ở phần trước là $N \sim 60 - 75$. Để tìm số e-fold ta giả thiết rằng trong suốt pha lạm phát hệ số thang đo phát triển như sau

$$a(t) = a(t_0)e^{Ht}, \quad (3.67)$$

hay

$$a(t) = a(t_0)e^{H(t-t_i)}, \quad (3.68)$$

thành phần Ht tạo thành số lần e-fold

$$N = Ht, \quad (3.69)$$

lấy đạo hàm 2 vế phương trình trên theo thời gian ta thu được

$$\frac{dN}{dt} = H = \partial_t(\ln a), \quad (3.70)$$

khi đó

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{\dot{a}}{a} dt = \ln \left(\frac{a_{t_f}}{a_{t_i}} \right). \quad (3.71)$$

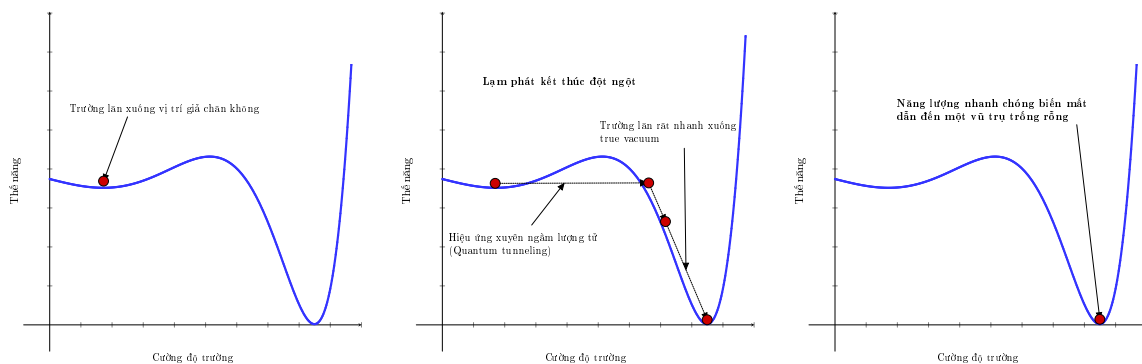
Chúng ta có thể tính toán $N(t) \equiv N(\phi(t)) = N(\phi)$ phụ thuộc vào trường vô hướng thông qua phép biến đổi tích phân và dạng của thế năng của trường vô hướng

$$\begin{aligned} N(\phi) &= Ht = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{t_i}^{t_f} H \frac{dt}{d\phi} d\phi \\ &= \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \stackrel{\text{slow-roll}}{\approx} \left[\frac{1}{M_{\text{pl}}^2} \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi \right]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

lưu ý rằng ở đây ta sử dụng điều kiện slow-roll (3.43) $3H\dot{\phi} = -V'(\phi)$. Do đó số e-fold có thể được xác định thông qua dạng thế năng của trường lạm phát. Ngoài ra tham số slow-roll có thể được biểu diễn dưới dạng số e-fold như sau

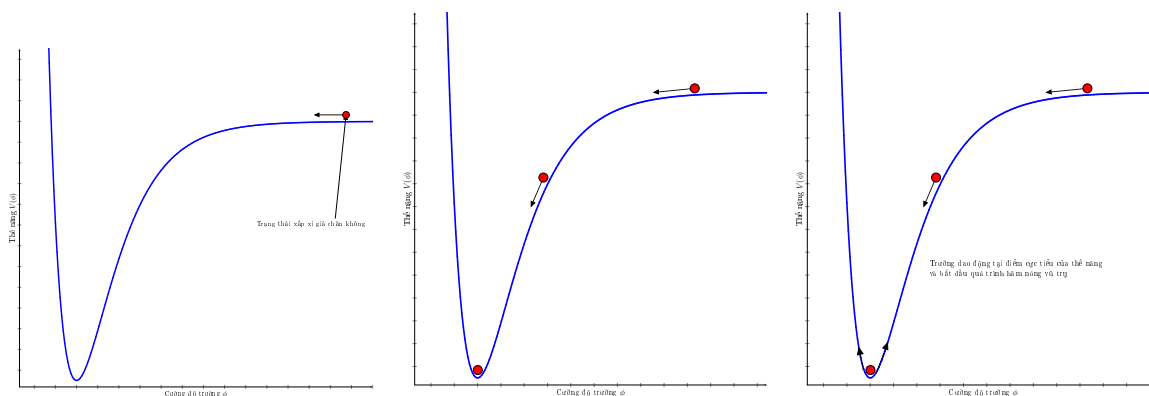
$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{H^2} \frac{dH}{dt} = -\frac{1}{H^2} \frac{dH}{dN} \frac{dN}{dt} = \left[-\frac{1}{H^2} \frac{d \ln N}{dt} \right]. \quad (3.73)$$

3.4.4 Tổng kết lạm phát cũ và slow roll inflation



(a) Trường lăn xuống vị trí giả chân không. (b) Trường thực hiện hiệu ứng xuyên ngầm lượng tử. (c) Lạm phát kết thúc ngay lập tức.

Hình 3.8: Lạm phát cũ.



(a) Trường lăn chậm ở vị trí xấp xỉ giả chân không. (b) Quá trình lạm phát bắt đầu và tiếp diễn. (c) Trường lăn xuống vị trí cực tiểu và dao động tại đó.

Hình 3.9: Lạm phát cuộn chậm.

3.5 Mô hình lạm phát k (k inflation)

Lạm phát k (k inflation) được đề xuất bởi ba nhà khoa học C. Armendariz-Picon, T. Damour và V. Mukhanov [16] Lạm phát k có số hạng động năng phi chính tắc. Phiếm hàm tác dụng trong mô hình này có dạng

$$S = \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{16\pi G} R + P(X, \phi) \right], \quad (3.74)$$

trong đó $P(X, \phi)$ là một hàm bất kỳ của trường inflaton ϕ và số hạng động năng $X = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$. Tensor năng xung lượng thu được bằng cách lấy biến phân tác dụng theo metric có dạng

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial P(X, \phi)}{\partial X} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - P(X, \phi) g_{\mu\nu}. \quad (3.75)$$

Tensor năng xung lượng này tương ứng với một chất lỏng hoàn hảo có áp suất

$$p = P(X, \phi), \quad (3.76)$$

và mật độ năng lượng

$$\rho = 2X \frac{\partial P}{\partial X} - P(X, \phi), \quad (3.77)$$

với vận tốc 4 chiều có dạng

$$u_\mu = \sigma \frac{\partial_\mu \phi}{\sqrt{2X}}, \quad (3.78)$$

với σ là dấu của $\dot{\phi}$. Các phương trình Friedmann có dạng trong không thời gian FLRW có dạng

$$H^2 = \frac{1}{3M_p^2} \rho, \quad (3.79)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_p^2} (\rho + p), \quad (3.80)$$

$M_p = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$ là khối lượng planck rút gọn. Đối với lạm phát ta có điều kiện sau

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0, \quad (3.81)$$

có thể được biểu thị dưới dạng tham số cuộn chậm

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1, \quad (3.82)$$

tham số cuộn chậm có thể được xác định dưới dạng tham số dòng Hubble như sau

$$\epsilon_0 \equiv \frac{H_k}{H}, \quad (3.83)$$

và

$$\epsilon_i \equiv \frac{d \ln |\epsilon_i|}{dN}, \quad i \geq 0, \quad (3.84)$$

với H_k là hằng số Hubble trong quá trình lạm phát tại một thời điểm khi một mode k cụ thể rời khỏi đường chân trời và N là số e-fold

$$N = \ln \left(\frac{a}{a_i} \right). \quad (3.85)$$

Đạo hàm bậc nhất của tham số dòng Hubble theo thời gian có dạng

$$\dot{\epsilon}_i = \epsilon_i \epsilon_{i+1}, \quad (3.86)$$

với 2 tham số dòng Hubble đầu tiên có dạng

$$\epsilon_1 = \epsilon = \frac{3}{2} \frac{\rho + p}{\rho}, \quad (3.87)$$

và

$$\epsilon_2 = \frac{3}{2H} \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho + p}{\rho} \right). \quad (3.88)$$

Phổ công suất của các nhiễu loạn vô hướng và nhiễu loạn tensor là chỉ số phổ vô hướng n_s và tỷ số tensor-to-scalar r trong mô hình k -inflation được tính toán trong [17] được biểu diễn dưới dạng tham số dòng Hubble có dạng

$$P_\zeta = \frac{H^2}{8\pi^2 M_p^2 c_s \epsilon} \Big|_{c_s k = aH}, \quad (3.89)$$

$$P_h = \frac{2}{\pi^2} \frac{H^2}{M_p^2} \Big|_{c_s k = ah}, \quad (3.90)$$

$$n_s = 1 - 2\epsilon_1 - \epsilon_2, \quad (3.91)$$

$$r = 16c_s \epsilon_1. \quad (3.92)$$

Trong đó tốc độ âm thanh cho nhiễu loạn có dạng

$$c_s^2 = \frac{\partial p / \partial X}{\partial \rho / \partial X}. \quad (3.93)$$

Như vậy, lạm phát k là mô hình lạm phát đặc biệt khi yếu tố chính gây ra lạm phát là thành phần động năng của trường vô hướng thay vì thế năng của trường như các mô hình chính tắc. Mô hình mở ra một cách tiếp cận mới mẽ cho nghiên cứu cơ chế gây ra lạm phát vũ trụ.

3.6 Mô hình lạm phát Gauss-Bonnet

Trong phần này chúng ta cùng tìm hiểu về một mô hình hấp dẫn bậc cao với thành phần là số hạng bất biến Gauss-Bonnet. Tìm hiểu tại sao chúng ta lại quan tâm đến số hạng Gauss-Bonnet, nó đóng vai trò gì trong vũ trụ sớm và cuối cùng là mô hình lạm phát Einstein Gauss-Bonnet do P.Kanti và cộng sự đề xuất năm 2015 [32, 33].

3.6.1 Vai trò của số hạng Gauss-Bonnet

Số hạng Gauss-Bonnet

Số hạng Gauss-Bonnet có dạng

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (3.94)$$

Số hạng này xuất hiện trong khai triển bậc hai của lý thuyết hấp dẫn Lovelock [25] đây là một lý thuyết hấp dẫn tổng quát hơn lý thuyết hấp dẫn Einstein. Lý thuyết hấp dẫn Lovelock được mô tả bởi một phiếm hàm tác dụng tổng quát trong đó chứa tổng gọi là các tensor Lovelock [25]. Khai triển bậc nhất trong lý thuyết hấp dẫn Lovelock chính là lý thuyết tương đối tổng quát hay lý thuyết hấp dẫn Einstein. Khai triển bậc hai của lý thuyết này là lý thuyết hấp dẫn Einstein-Gauss-Bonnet, trong đó chứa số hạng Gauss-Bonnet và biến phân số hạng này chỉ khác không trong không gian có số chiều lớn hơn hoặc bằng năm. Trong không thời gian bốn chiều, số hạng Gauss-Bonnet đóng vai trò như một đạo hàm toàn phần và không đóng góp vào động lực học của không thời gian. Để nghiên cứu trong không thời gian 4 chiều số hạng Gauss-Bonnet phải được kết hợp không tầm thường với một trường vô hướng ϕ và sự kết hợp này dẫn đến lý thuyết hấp dẫn Einstein-Scalar-Gauss-Bonnet.

Tại sao số hạng Gauss-Bonnet lại quan trọng cho lạm phát vũ trụ

Mặc dù kịch bản lạm phát giúp chúng ta giải quyết các vấn đề xuất hiện trong vũ trụ học vụ nổ lớn, như vấn đề chân trời, vấn đề độ phẳng và vấn đề đơn cực từ, nhưng vẫn còn các vấn đề chưa được giải quyết như điểm kỳ dị ban đầu và hấp dẫn lượng tử.

Thật vậy, Đối với vũ trụ rất sớm (nguyên thủy) khi tiệm cận thang Planck (Planck scale), Lý thuyết hấp dẫn Einstein cùng một số hiệu chỉnh được coi là lý thuyết hiệu dụng của lý thuyết hấp dẫn lượng tử. Lý thuyết siêu dây được coi là một ứng cử viên hứa hẹn nhất cho hấp dẫn lượng tử và trong lý thuyết siêu dây bao gồm các số hạng hiệu chỉnh độ cong bậc cao có thể đóng vai trò rất quan trọng trong vũ trụ rất sớm. Một trong số những số hạng đó là số hạng Gauss-Bonnet xuất hiện trong tác dụng hiệu dụng năng lượng thấp của dây dị loại (the low-energy effective action of heterotic

string) [26–29]. Lạm phát là một viễn cảnh xảy ra trong vũ trụ rất sơ khai do đó rất có khả năng số hạng Gauss-Bonnet đóng vai trò rất quan trọng trong nghiệm vũ trụ học này.

3.6.2 Tổng quan mô hình lạm phát Gauss-Bonnet

Mô hình Lạm phát Gauss-Bonnet lần đầu được đề xuất bởi P.Kanti và các cộng sự [32, 33] với phiếm hàm tác dụng có dạng sau

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{8}f(\phi)\mathcal{G} \right]. \quad (3.95)$$

Trong đó hàm ghép $f(\phi)$ là một hàm số bất kỳ của trường vô hướng gây ra lạm phát ϕ được kết hợp không tầm thường với số hạng Gauss-Bonnet. Đáng chú ý trong mô hình này không xuất hiện số hạng thế năng $V(\phi)$ của trường vô hướng, $\kappa \equiv 8\pi G$ là hằng số kết hợp hấp dẫn, g là định thức của metric tensor $g_{\mu\nu}$, R là vô hướng Ricci.

Lấy biến phân tác dụng (3.95) theo metric tensor và trường vô hướng dẫn đến các phương trình trường

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + P_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^{\alpha\beta}f = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2, \quad (3.96)$$

và

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}\partial^\mu\phi] + \frac{1}{8}f'\mathcal{G} = 0. \quad (3.97)$$

Trong đó $f' \equiv df/d\phi$, $\kappa^2 = 1$ cho thuận tiện tính toán và $P_{\mu\alpha\nu\beta}$ được định nghĩa là

$$P_{\mu\alpha\nu\beta} = R_{\mu\alpha\nu\beta} + 2g_{\mu[\beta}R_{\beta]\alpha} + 2g_{\alpha[\nu}R_{\beta]\mu} + Rg_{\mu[\nu}g_{\beta]\alpha}, \quad (3.98)$$

hay

$$\begin{aligned} P_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^{\alpha\beta}f &= -G_{\mu\nu}\nabla^2f + R_{\alpha\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha f + R_{\alpha\mu}\nabla_\nu\nabla^\alpha f - \frac{R}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu \\ &\quad - R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma f - R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma f. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Metric mô tả không thời gian phẳng đồng nhất đẳng hướng là FLRW phẳng có dạng

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (3.100)$$

Dạng tường minh của các phương trình trường (3.96),(3.97) như sau

$$6H^2(1 + H\dot{f}) = \dot{\phi}^2, \quad (3.101)$$

$$2(1 + H\dot{f})(H^2 + \dot{H}) + H^2(1 + \ddot{f}) = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad (3.102)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - 3f'H^2(H^2 + \dot{H}) = 0. \quad (3.103)$$

Trong đó $H \equiv \dot{a}/a$ là tham số Hubble và dấu chấm trên ký hiệu cho đạo hàm theo thời gian t .

Để chính xác chúng ta cần dạng chính xác của $f(\phi)$. P. Kanti và cộng sự [32, 33] xét hàm ghép có dạng bình phương $f(\phi) = \lambda\phi^2$ với hằng số kết hợp λ gây ra các nghiệm lạm phát. Trong thời gian sớm, trong cơ chế hấp dẫn mạnh (strong gravity regime), số hạng Gauss-Bonnet chiếm ưu thế hoàn toàn so với số hạng vô hướng Ricci [32, 33] với cơ chế này động lực học của vũ trụ không cho thấy thay đổi đáng kể nào miễn là trường vô hướng nhận các giá trị rất lớn hay tương ứng với λ nhận một giá trị lớn kể cả khi chúng ta bỏ qua số hạng vô hướng Ricci. Với gần đúng này, ta sẽ bỏ qua các số hạng bằng 1 trong các dấu ngoặc xuất hiện trong các phương trình trường (3.101) và (3.102). Khi đó ta thu được phương trình

$$\dot{H} + H^2 \left(1 - \frac{H^2}{H_{dS}^2}\right) = 0, \quad (3.104)$$

với $H_{dS}^2 = -5/24\lambda$ do đó $\lambda < 0$. Điều này ngụ ý một nghiệm de Sitter, với H là một hằng số và do đó $\dot{H} = 0$, với $\lambda < 0$ mô tả một pha giãn nở lạm phát. Thay vào phương trình (3.104) ta thu được 2 nghiệm với nghiệm $H_{dS}^2 = -5/24\lambda$ là một nghiệm repeller và một nghiệm là $H = 0$ mô tả không thời gian Minkowski, là một attractor. Lấy tích phân phương trình (3.104)

$$a(t) = a_0 \exp(H_{dS}t), \quad (3.105)$$

từ nghiệm (3.105), ta thấy rằng lạm phát được gây ra bởi số hạng Gauss-Bonnet. Ngoài ra trường vô hướng được giải thông qua phương trình (3.103) có dạng

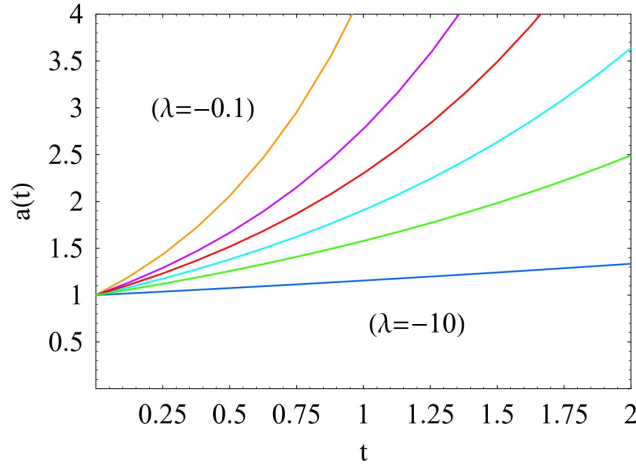
$$\phi(t) = \phi_0 \exp\left(-\frac{5}{2}H_{dS}t\right). \quad (3.106)$$

Kể cả trong các trường hợp tổng quát, chúng ta có thể tích phân phương trình (3.104) thu được

$$H = \frac{H_{dS}}{\sqrt{1 + \frac{2C}{5}H_{dS}^2a^2}}. \quad (3.107)$$

Với C là hằng số tích phân. Ta thấy rằng khi vũ trụ giãn nở, Hằng số Hubble sẽ giảm dần. Do đó, chúng ta phải điều chỉnh $\nu^{-2} \equiv 2CH_{dS}^2/5 = C/12\lambda$ để lạm phát xảy ra trong một thời gian đủ dài. Trong trường hợp này, hệ số thang đo có thể thu được bằng cách giải tích phương trình (3.107) sử dụng phép đổi biến $a = \nu \tan \omega$

$$\sqrt{a^2 + \nu^2} + \nu \log\left(\frac{\sqrt{a^2 + \nu^2} - \nu}{a}\right) = \sqrt{\frac{5}{2C}}(t + t_0), \quad (3.108)$$



Hình 3.10: Hệ số thang đo như một hàm của thời gian với $C = 0$ và $\|\lambda\| = 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 10$ (từ trên xuống dưới) [32, 33]

trong đó t_0 là hằng số tích phân. Vì nghiệm thu được với hệ số thang đo (3.108) không ở dạng tường minh do đó nghiệm tường minh thu được cho trường vô hướng không thể ở dạng phụ thuộc tường minh vào t mà chỉ thu được dạng phụ thuộc theo a như sau

$$\phi = C_0 \left(\frac{2C}{5} \right)^{5/4} \frac{(a^2 + \nu^2)^{5/4}}{a^{5/2}}, \quad (3.109)$$

trong đó C_0 là một hằng số tích phân khác. Từ phương trình này, chúng ta có thể thấy rằng ban đầu trường vô hướng giảm. Tuy nhiên, trong cơ chế $a^2 \gg \nu^2$, trường vô hướng trở thành không đổi.

Bất ổn định trong mô hình lạm phát Gauss-Bonnet

Như vậy trong trường hợp không có thế năng của trường vô hướng $V(\phi)$ lạm phát cũng có thể được xuất hiện trong hấp dẫn Gauss-Bonnet, bước tiếp theo ta cần kiểm tra tính ổn định của mô hình lạm phát này thông qua các tính toán nhiễu loạn từ công việc của Getbogi Hikmawan, Jiro Soda và các cộng sự [46]. Xuất phát từ nhiễu loạn tensor

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j, \quad (3.110)$$

trong đó $h^{ij}{}_i = h^i{}_i = 0$. Từ metric (3.110) thu được tác dụng bậc hai của nhiễu loạn tensor có dạng

$$S = \frac{1}{8} \int d^4a^3 \left[(1 + H\dot{f}) \dot{h}_{ij} \dot{h}^{ij} - \frac{1}{a^2} (1 + \ddot{f}) h_{ij,k} h^{ij,k} \right]. \quad (3.111)$$

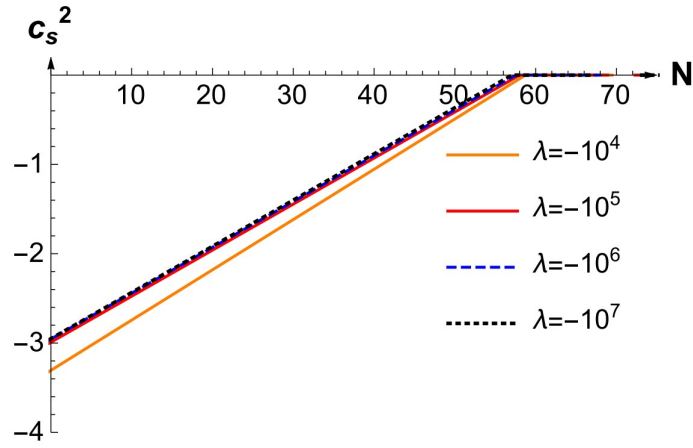
Từ đó thu được phương trình chuyển động của các nhiễu loạn tensor có dạng

$$\ddot{h}_{ij} + \left[3H + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right] \dot{h}_{ij} + \frac{k^2}{a^2} \frac{1 + \ddot{f}}{\alpha} h_{ij} = 0, \quad (3.112)$$

với $\alpha = (1 + H\dot{f})$ được định nghĩa và k là số sóng. Lưu ý rằng hệ chứa ghost nếu $\alpha < 0$. Vì sự tồn tại của ghost ngụ ý rằng mô hình là không phù hợp với thực tế, chúng ta phải tránh khả năng này. Từ phương trình (3.112), ta thấy rằng sự ổn định của hệ được xác định thông qua số hạng cuối cùng, trong khi số hạng thứ hai là số hạng ma sát. Mô hình ổn định đối với nhiễu loạn tensor khi bình phương tốc độ âm thanh hiệu dụng là dương

$$c_s^2 \equiv \frac{1 + \ddot{f}}{\alpha} > 0. \quad (3.113)$$

Kiểm tra sự ổn định của nhiễu loạn tensor của mô hình bằng cách kiểm tra giá trị của c_s^2 .



Hình 3.11: Sự phát triển theo thời gian của bình phương tốc độ âm thanh hiệu dụng c_s^2 của mô hình được vẽ dưới dạng hàm của số lần e gấp [46]

Từ các phương trình chuyển động (3.101)-(3.103), chúng ta có thể thu được sự tiến hóa theo thời gian đối với c_s^2 cho một số giá trị λ như có thể thấy trong hình 3.11.

Bởi vì c_s^2 là âm trong suốt thời gian lạm phát, chúng ta có thể kết luận rằng hệ không ổn định dưới các nhiễu loạn tensor.

Chương 4

MÔ HÌNH LẠM PHÁT k -GAUSS-BONNET

Tóm tắt: Trong chương này, cũng là phần chính của luận văn trình bày mô hình lạm phát theo quy luật lũy thừa k -Gauss-Bonnet. Mô hình cho nghiệm ổn định bằng hai phương pháp là động lực học và nhiễu loạn lũy thừa. Đồng thời tính bất ổn định trong gradient của các nhiễu loạn tensor không tồn tại trong mô hình.

Lấy cảm hứng từ lạm phát k và lạm phát Gauss-Bonnet. Câu hỏi đặt ra có thể tổng quát hóa mô hình lạm phát Gauss-Bonnet bằng cách thay hàm ghép $f(\phi) \rightarrow J(\phi, X)$ khi hàm ghép mới này có dạng bất kỳ của trường inflaton và số hạng động năng của nó. Đồng thời trường vô hướng được tổng quát hóa khi xét trường vô hướng có thể là trường vô hướng phantom với phương trình trạng thái $w = p/\rho < -1$ [56, 57] có thể gây ra lạm phát.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + P(\phi, X) - \frac{1}{8} J(\phi, X) \mathcal{G} \right], \quad (4.1)$$

luận văn sẽ xét trường hợp đơn giản nhất của hàm ghép $J(\phi, X)$ và $P(\phi, X)$ như sau

$$P(\phi, X) = X \text{ \& } J(\phi, X) = J(X), \quad (4.2)$$

trong đó X được định nghĩa là

$$X = -\frac{\omega}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi, \quad (4.3)$$

trong đó $\omega = 1$ tương ứng với trường vô hướng chính tắc và $\omega = -1$ tương ứng với trường vô hướng phantom.

4.1 Thiết lập cơ bản

Với các giả thiết ở trên ta có phiếm hàm tác dụng trong mô hình kGB có dạng

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + X - \frac{J(X)}{8} \mathcal{G} \right], \quad (4.4)$$

trong đó để thuận tiện cho các tính toán ta thiết lập $M_p^2 = 1$ (M_p^2 là khối lượng Planck rút gọn), $J(X)$ là một hàm bất kỳ của X và số hạng Gauss-Bonnet được định nghĩa là

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (4.5)$$

Lấy biến phân tác dụng (4.4) theo nghịch đảo metric $g^{\mu\nu}$ ta thu được phương trình trường Einstein có dạng (xem phụ lục A)

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= (R_{\mu\rho\nu\sigma} - g_{\mu\nu}R_{\rho\sigma})\nabla^\rho\nabla^\sigma J - G_{\mu\nu}\square J \\ &+ R_{\nu\rho}\nabla_\mu\nabla^\rho J + R_{\mu\rho}\nabla_\nu\nabla^\rho J - \frac{1}{2}R\nabla_\mu\nabla_\nu J \\ &+ \omega\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{\omega}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - \frac{\omega}{8}J'\mathcal{G}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi, \end{aligned} \quad (4.6)$$

trong đó $\square \equiv \nabla_\mu\nabla^\mu$ là toán tử d'Alembert, ∇_μ là đạo hàm hiệp biến and $J' \equiv \partial_X J$ ký hiệu cho phép lấy đạo hàm theo X .

Mặt khác, lấy biến phân tác dụng theo trường ϕ cho ta phương trình chuyển động của trường vô hướng có dạng

$$(8 - J'\mathcal{G})\square\phi = \nabla_\mu(J'\mathcal{G})\nabla^\mu\phi, \quad (4.7)$$

trong đó $\square \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu)$.

Trong luận văn này, chúng ta sẽ tập trung vào không thời gian phẳng đồng nhất đẳng hướng Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) metric

$$ds^2 = -dt^2 + \exp[2\alpha(t)](dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.8)$$

trong đó $\exp[2\alpha(t)]$ là hệ số thang đo giá trị của nó chỉ phụ thuộc vào thời gian do tính đồng nhất của không gian.

Các phương trình trường Einstein có dạng

$$\dot{\alpha}^2 = \dot{\alpha}^3 J + \frac{\omega}{6}\dot{\phi}^2 - \frac{\omega}{24}J'\mathcal{G}\dot{\phi}^2, \quad (4.9)$$

$$2(1 - \dot{\alpha}J)\ddot{\alpha} = -3\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^2\ddot{J} + 2\dot{\alpha}^3\dot{J} - \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2, \quad (4.10)$$

phương trình chuyển động của trường vô hướng

$$\dot{\phi}\frac{d}{dt}(J'G) = (8 - J'\mathcal{G})(\ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}\dot{\phi}), \quad (4.11)$$

và số hạng Gauss-Bonnet $\mathcal{G}$ có dạng

$$\mathcal{G} = 24\dot{\alpha}^2 [\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}]. \quad (4.12)$$

4.2 Lạm phát theo quy luật lũy thừa (power-law inflation)

Nghiệm lạm phát theo quy luật lũy thừa [58, 59] với hệ số thang đo được xét theo các anzats sau [18, 24, 57, 60]

$$\alpha = \zeta \log(t), \quad \phi = \xi \log(t) + \phi_0, \quad (4.13)$$

và hàm ghép $J(X)$ có dạng lũy thừa

$$J(X) = \lambda X^n. \quad (4.14)$$

Ở đây ϕ_0 , n , and λ là các hằng số tùy ý. Ta thấy rằng hệ số thang đo lúc này ở dạng lũy thừa như sau, $\exp[2\alpha(t)] = t^{2\zeta}$. Dẫn đến đối với $\zeta > 0$ phù hợp với nghiệm giãn nở, trong khi đó $\zeta > 1$ tương ứng với nghiệm lạm phát vũ trụ [58, 59]. Như vậy, các phương trình (4.9), (4.10) và (4.11) sẽ được biểu diễn dưới dạng các phương trình đại số như sau

$$-\zeta^2 + 4\lambda\omega^{-1}\xi^{-2}\zeta^4 + \frac{\omega\xi^2}{6} = 0, \quad (4.15)$$

$$2\zeta - 3\zeta^2 + 4\lambda\omega^{-1}\xi^{-2}(2\zeta^3 - \zeta^2) - \frac{\omega\xi^2}{2} = 0, \quad (4.16)$$

$$(1 - 3\zeta) [\omega\xi^2 + 12\lambda\omega^{-1}\xi^{-2}\zeta^2(\zeta^2 - \zeta)] = 0. \quad (4.17)$$

Ở đây, ta có rằng buộc $n = -1$ để tất cả các phương trình trường có cùng tỷ lệ với t^{-2} . Mặt khác, $d(J'G)/dt = 0$ cho nghiệm lạm phát theo quy luật lũy thừa này. Mối quan hệ này ngụ ý rằng $\mathcal{G} \sim (J')^{-1} \sim X^2$ và do đó $J\mathcal{G} \sim X$. Dẫn đến hàm ghép $J(X)$ không gặp vấn đề kỳ dị trong trường hợp là nghịch đảo của X tức là $J(X) \equiv X^{-1}$ khi ta xét trong giới hạn chân không $X \rightarrow 0$.

Tiếp theo chúng ta sẽ giải chính xác các phương trình này. Thật vậy, từ phương trình (4.17) ta thu được

$$\omega\xi^2 = -12\lambda\omega^{-1}\xi^{-2}\zeta^2(\zeta^2 - \zeta), \quad (4.18)$$

Trong đó ta bỏ qua nghiệm giãn nở, $\zeta = 1/3$, với mối liên hệ này thay vào phương trình (4.15) ta thu được

$$\omega\xi^2 = 2\lambda\zeta(\zeta + 1). \quad (4.19)$$

Tiếp tục thay vào phương trình (4.16) cho ta phương trình của ζ có dạng

$$(\lambda + 3)\zeta^2 + (2\lambda - 3)\zeta + \lambda = 0. \quad (4.20)$$

Phương trình này cho ta nghiệm chính xác của ζ có dạng

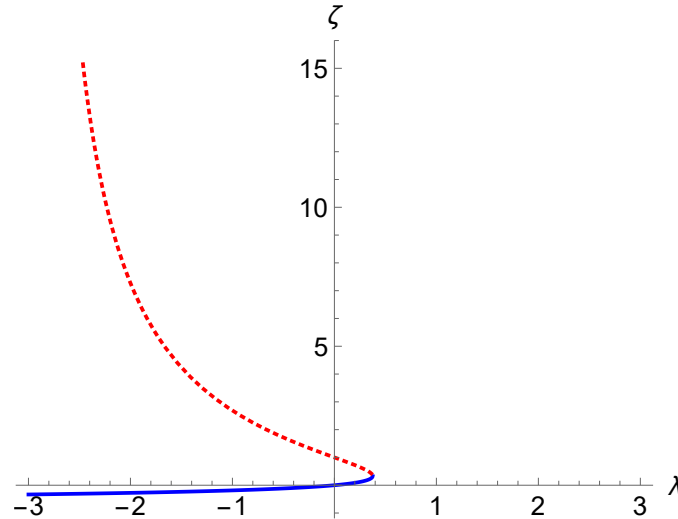
$$\zeta_{\pm} = \frac{3 - 2\lambda \pm \sqrt{3(3 - 8\lambda)}}{2(3 + \lambda)}. \quad (4.21)$$

Tuy nhiên chỉ có nghiệm

$$\zeta = \zeta_+ = \frac{3 - 2\lambda + \sqrt{3(3 - 8\lambda)}}{2(3 + \lambda)}, \quad (4.22)$$

là phù hợp cho lạm phát (xem hình 4.1). Mặt khác với ràng buộc $\zeta \gg 1$ ngụ ý cho giá trị của tham số λ nằm trong vùng $-3 < \lambda < 0$. Dễ thấy khi λ càng gần -3 , hay $\lambda = -3 + \epsilon$ với $0 < \epsilon \ll 1$, thì giá trị gần đúng của $\zeta = \zeta_+$ trở thành $\zeta \simeq 9/\epsilon \gg 1$.

Thêm vào đó, giá trị âm của λ ngụ ý rằng $\omega = -1$ tương ứng thu được từ phương trình (4.19). do đó, ϕ phải là trường phantom [56, 57] trong mô hình này để có lạm phát. Lưu ý rằng các mô hình lạm phát Gauss-Bonnet với hàm ghép thông thường $f(\phi)G$ với trường vô hướng là phantom gây ra lạm phát lũy thừa trong trường hợp không có thế năng $V(\phi)$ cũng được xem xét trong [30].



Hình 4.1: $\zeta_{\pm}$ là hàm của λ . Trong đó, Đường màu đỏ phía trên tương ứng với ζ_+ và đường cong nét liền màu xanh ζ_- .

Ngoài ra, lạm phát lũy thừa trong các mô hình vô hướng chính tắc đã được chứng minh là có cơ chế lối thoát duyên dáng (graceful exit problem) [77]. Do đó, câu hỏi đặt ra liệu lạm phát kGB theo luật lũy thừa có thừa nhận một lối thoát duyên

dáng hay không? Để giải quyết vấn đề quan trọng này, trước tiên chúng ta cần lưu ý rằng lạm phát k GB theo luật lũy thừa không do thế năng gây ra mà là do số hạng động năng, tương tự như lạm phát k [16, 17] cũng như lạm phát Galileon [22, 23]. Do đó, ϕ sẽ không dao động sau khi kết thúc lạm phát vì không có $V(\phi)$. Hơn nữa, mô hình k GB có sự chuyển dịch-đối xứng của ϕ , điều này sẽ ngăn cản các tương tác trực tiếp giữa ϕ và vật chất của mô hình chuẩn [23]. Tất cả những sự kiện này chỉ ra rằng dường như rất khó để có một lối thoát thuận lợi theo cách phổ biến trong lạm phát k GB. May mắn thay, các nghiên cứu gần đây trong tài liệu [23, 78, 79] đã chỉ ra rằng có thể thoát ra khỏi lạm phát do số hạng động năng thông qua quá trình tạo hạt hấp dẫn, hay còn gọi là tái hâm nóng bằng hấp dẫn [80–82]. Do vậy cũng có thể có một lối thoát duyên dáng như vậy trong khuôn khổ của lạm phát k GB theo luật lũy thừa thông qua việc tái hâm nóng bằng hấp dẫn. Một khảo sát chi tiết về vấn đề này sẽ được trình bày ở phần khác.

4.3 Phân tích sự ổn định (stability analysis)

Trong phần này chúng ta sẽ khảo sát sự ổn định của nghiệm lạm phát theo luật lũy thừa trong pha lạm phát bằng 2 phương pháp

- Phương pháp động lực học.
- Phương pháp nhiễu loạn luật lũy thừa.

4.3.1 Phương pháp động lực học (Dynamical system method)

Để sử dụng phương pháp động lực chúng ta sẽ biến đổi các phương trình trường thành hệ phương trình động lực bằng cách đưa vào các biến động lực không thứ nguyên như sau

$$\hat{X} \equiv \frac{\dot{\phi}}{\dot{\alpha}}, \quad Y \equiv \dot{J}\dot{\alpha}, \quad Z \equiv J'\mathcal{G}. \quad (4.23)$$

Với định nghĩa các phương trình động lực có dạng

$$\frac{d\hat{X}}{d\alpha} = \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\alpha}^2}, \quad (4.24)$$

$$\frac{dY}{d\alpha} = \ddot{J} + Y \frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}^2} \quad (4.25)$$

$$\frac{dZ}{d\alpha} = \frac{dZ}{dt} \frac{1}{\dot{\alpha}} = \frac{\dot{Z}}{\dot{\alpha}}, \quad (4.26)$$

trong đó, $\alpha \equiv \int \dot{\alpha} dt$ đóng vai trò như một biến động lực thời gian. Thực tế số hạng này chính là số e-folds N được đề cập ở phần trước khi ta định nghĩa $\dot{\alpha} = H = \frac{\dot{a}}{a}$ với $N = \ln(a(t)/a_0) = \int H dt$.

Theo đó các phương trình trường (4.9), (4.10) và (4.11) đưa về dưới dạng các biến động lực lần lượt như sau

$$-\omega \hat{X}^2(Z - 4) + 24Y - 24 = 0, \quad (4.27)$$

$$2\frac{dY}{d\alpha} - \omega \hat{X}^2 + 2Y(\epsilon + 2) - 4\epsilon - 6 = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{d\hat{X}}{d\alpha}(Z - 8) + \hat{X} \left(\frac{dZ}{d\alpha} + (Z - 8)(\epsilon + 3) \right) = 0. \quad (4.29)$$

Trong ba phương trình trên chỉ có hai phương trình là độc lập và $\epsilon \equiv \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha^2} = \frac{\dot{H}}{H^2}$ là tham số cuộn chậm.

Với biến động lực Z ta có

$$\begin{aligned} Z \equiv J'\mathcal{G} &= 24J'(X)\dot{\alpha}^4 \left(1 + \frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}^2} \right) = 24\frac{\dot{\alpha}^4}{\dot{\phi}^4} J'(X)\dot{\phi}^4 \left(1 + \frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}^2} \right) \\ &= \boxed{24\frac{J'(X)\dot{\phi}^4}{\hat{X}^4}(1 + \epsilon)}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Với $J(X)$ có dạng lũy thừa hay $J(X) = \lambda X^n$ khi đó ta có

$$J'(X) = \frac{dJ(X)}{dX} = n\lambda X^{n-1} = n\lambda \left(\frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 \right)^{n-1}. \quad (4.31)$$

Thay (4.31) vào phương trình (4.30) ta thu được

$$Z = 24n\lambda \left(\frac{\omega}{2} \right)^{n-1} \dot{\phi}^{2n+2} \frac{(1 + \epsilon)}{\hat{X}^4}. \quad (4.32)$$

Để thấy với ràng buộc $n = -1$ sẽ cho ta phương trình (4.32) có dạng

$$Z = \boxed{-\frac{96\lambda(\epsilon + 1)}{\hat{X}^4}}. \quad (4.33)$$

Lưu ý rằng chính ràng buộc $n = -1$ cho ta nghiệm điểm cố định sẽ hoàn toàn tương đương với nghiệm lũy thừa tìm được ở phần trên.

Mặt khác từ phương trình (4.30) ta có thêm mối liên hệ giữa biến Z với biến $\hat{X}$ và Y như sau

$$\begin{aligned} Z = J'\mathcal{G} &= \frac{dJ(X)}{dX} 24\dot{\alpha}^4 (1 + \epsilon) = \frac{dJ}{dt} \frac{dt}{dX} 24\dot{\alpha}^4 (1 + \epsilon) \\ &= \dot{J} \dot{\alpha}^3 \frac{1}{\hat{X}} 24(1 + \epsilon) = 24Y \frac{\dot{\alpha}^3}{\omega \dot{\phi} \dot{\phi}} (1 + \epsilon) \\ &= \boxed{24 \frac{Y}{\omega \hat{X}} \frac{(1 + \epsilon)}{d\hat{X}/d\alpha + \hat{X}\epsilon}}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

tương đương với

$$Y = \frac{\omega \hat{X} Z}{24(\epsilon + 1)} \left(\frac{d\hat{X}}{d\alpha} + \hat{X}\epsilon \right). \quad (4.35)$$

Từ các phương trình (4.28), (4.29), (4.33) và (4.35) ta thu được hệ phương trình tương ứng sau

$$\begin{cases} 2 \frac{dY}{d\alpha} - \omega \hat{X}^2 + 2Y(\epsilon + 2) - 4\epsilon - 6 = 0, \\ \frac{d\hat{X}}{d\alpha} (Z - 8) + \hat{X} \left(\frac{dZ}{d\alpha} + (Z - 8)(\epsilon + 3) \right) = 0, \\ Z = -\frac{96\lambda(\epsilon + 1)}{\hat{X}^4}, \\ Y = \frac{\omega \hat{X} Z}{24(\epsilon + 1)} \left(\frac{d\hat{X}}{d\alpha} + \hat{X}\epsilon \right). \end{cases} \quad (4.36)$$

Từ hệ phương trình trên ta thu hệ phương trình động lực dưới dạng tường minh của hệ động lực như sau

$$\frac{d\hat{X}}{d\alpha} = \frac{\hat{X}^5 Z}{96\lambda} - \frac{\hat{X}^3 Y}{4\lambda\omega} + \hat{X}, \quad (4.37)$$

$$\frac{dY}{d\alpha} = \frac{\hat{X}^4 (Y - 2) Z}{96\lambda} + \frac{\hat{X}^2 \omega}{2} - Y + 1, \quad (4.38)$$

$$\frac{dZ}{d\alpha} = \frac{(Z - 8) (\hat{X}^2 Y - 12\lambda\omega)}{4\lambda\omega}. \quad (4.39)$$

trong đó ta có biểu thức của tham số cuộn chậm $\epsilon = -\frac{\hat{X}^4 Z}{96\lambda} - 1$. Lưu ý rằng ở đây không sử dụng phương trình ràng buộc (phương trình Friedmann thứ nhất) (4.27), phương trình này sẽ được sử dụng trong phần sau trong biểu diễn trên không gian pha 2 chiều $(\hat{X}, Y)$ giống như trong tài liệu [63].

Tiếp theo chúng ta sẽ giải hệ phương trình động lực (6.70)-(4.39) để tìm các nghiệm điểm cố định (fixed points). Về mặt toán học, các điểm cố định là nghiệm của hệ phương trình sau đây

$$\frac{d\hat{X}}{d\alpha} = \frac{dY}{d\alpha} = \frac{dZ}{d\alpha} = 0. \quad (4.40)$$

Giải hệ phương trình trên ta thu được các điểm cố định tương ứng như sau:

$$A = \begin{cases} \hat{X} = 0 \\ Y = 1 \\ Z = 8 \end{cases}; B_{\pm} = \begin{cases} \hat{X}_{\pm}^2 = \pm\sqrt{6\lambda} \\ Y_{\pm} = \pm\omega\sqrt{6\lambda} \\ Z = 8 \end{cases}; C_{\pm} = \begin{cases} \hat{X}_{\pm}^2 = \frac{1}{\omega} \left(3 \pm \sqrt{9 - 24\lambda\omega^2} \right) \\ Y_{\pm} = \frac{1}{6} \left(9 \pm \sqrt{9 - 24\lambda\omega^2} \right) \\ Z = 8 \end{cases};$$

$$D = \begin{cases} \hat{X}_{\pm}^2 = \frac{1}{\omega} \left(3 \pm \sqrt{9 - 24\lambda\omega^2} \right) \\ Y_{\mp} = \frac{1}{2} \left(3 \mp \sqrt{9 - 24\lambda\omega^2} \right) \\ Z_{\mp} = \frac{1}{\lambda\omega^2} \left(6 - 8\lambda\omega^2 \mp 2\sqrt{9 - 24\lambda\omega^2} \right) \end{cases}. \quad (4.41)$$

Dễ thấy đối với điểm cố định C_- ta có với $\hat{X}_-^2 = \xi^2/\zeta_+^2$, trong đó ξ và ζ_+ thu được từ phần tính toán trước trong trường hợp nghiệm có dạng lũy thừa. Như vậy điểm cố định $(\hat{X}_-^2, Y_-, Z)$ sẽ tương đương với nghiệm lạm phát lũy thừa từ tính toán phần trước. Do đó, khảo sát sự ổn định và tính chất hội tụ của điểm cố định này sẽ cho ta tính chất tương đương với nghiệm lạm phát theo quy luật lũy thừa. Các điểm cố định khác A, B, C_+, D là các trường hợp không ổn định hoặc không phải là nghiệm lạm phát nên ta sẽ không xem xét các nghiệm này.

Như vậy điểm cố định cần tìm để khảo sát sự ổn định của lạm phát luật lũy thừa trong mô hình k -Gauss-Bonnet là

$$C_- = \begin{cases} \hat{X}_-^2 = \frac{1}{\omega} \left(3 - \sqrt{9 - 24\lambda\omega^2} \right) \\ Y_- = \frac{1}{6} \left(9 - \sqrt{9 - 24\lambda\omega^2} \right) \\ Z = 8 \end{cases}. \quad (4.42)$$

Để xem xét nghiệm này có ổn định hay không? chúng ta sẽ khai triển nhiễu loạn hệ phương trình động lực xung quanh điểm cố định này. Khi đó, hệ động lực được khai triển có dạng sau

$$\frac{d\delta\hat{X}}{d\alpha} = -\frac{(6\lambda + \sqrt{9 - 24\lambda} - 3)}{\lambda} \delta\hat{X} + \frac{(\sqrt{9 - 24\lambda} - 3)^{3/2}}{4\lambda} \delta Y - \frac{\sqrt{\sqrt{9 - 24\lambda} - 3} (4\lambda + \sqrt{9 - 24\lambda} - 3)}{16\lambda} \delta Z, \quad (4.43)$$

$$\frac{d\delta Y}{d\alpha} = \frac{1}{3} \sqrt{\sqrt{9 - 24\lambda} - 3} \delta\hat{X} - \frac{(6\lambda + \sqrt{9 - 24\lambda} - 3)}{2\lambda} \delta Y + \frac{1}{24} (\sqrt{9 - 24\lambda} - 3) \delta Z, \quad (4.44)$$

$$\frac{d\delta Z}{d\alpha} = -\frac{(8\lambda + \sqrt{9 - 24\lambda} - 3)}{2\lambda} \delta Z. \quad (4.45)$$

ở đây ta sử dụng điều kiện cho trường là phantom $\omega = -1$.

Tiếp theo chúng ta sẽ lấy nhiễu loạn theo cấp số nhân (exponential perturbation) của các biến động học như sau

$$\delta \hat{X} = A_x \exp [\tau \alpha], \quad (4.46)$$

$$\delta Y = A_y \exp [\tau \alpha], \quad (4.47)$$

$$\delta Z = A_z \exp [\tau \alpha]. \quad (4.48)$$

trong đó dấu của τ sẽ xác định tính chất ổn định của điểm cố định. Đặc biệt, nếu một tập hợp các phương trình nhiễu loạn có bất kỳ τ dương nào, thì các nhiễu loạn $\delta \sim \exp[\tau \alpha]$ sẽ tăng lên rất lớn khi $\alpha \rightarrow \infty$, gây ra tính chất bất ổn định của điểm cố định. Ngược lại, điểm cố định là ổn định nếu tất cả các nghiệm của τ đều âm vì $\delta \sim \exp[\tau \alpha]$ sẽ có tiến tới không khi $\alpha \rightarrow \infty$.

Để cụ thể hóa, các phương trình nhiễu loạn có thể được viết dưới dạng phương trình ma trận như sau

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = 0. \quad (4.49)$$

Trong đó

$$M_{11} = -\frac{6\lambda + \sqrt{9 - 24\lambda} - 3}{\lambda} - \tau, \quad (4.50)$$

$$M_{12} = \frac{(\sqrt{9 - 24\lambda} - 3)^{3/2}}{4\lambda}, \quad (4.51)$$

$$M_{13} = -\frac{\sqrt{\sqrt{9 - 24\lambda} - 3} (4\lambda + \sqrt{9 - 24\lambda} - 3)}{16\lambda}, \quad (4.52)$$

$$M_{21} = \frac{\sqrt{\sqrt{9 - 24\lambda} - 3}}{3}, \quad (4.53)$$

$$M_{22} = -\frac{6\lambda + \sqrt{9 - 24\lambda} - 3}{2\lambda} - \tau, \quad (4.54)$$

$$M_{23} = \frac{(\sqrt{9 - 24\lambda} - 3)}{24}, \quad (4.55)$$

$$M_{31} = 0, \quad (4.56)$$

$$M_{32} = 0, \quad (4.57)$$

$$M_{33} = -\frac{8\lambda + \sqrt{9 - 24\lambda} - 3}{2\lambda} - \tau. \quad (4.58)$$

Về mặt toán học, phương trình ma trận trên có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi

$$\det \mathcal{M} = 0, \quad (4.59)$$

tương ứng với một phương trình đa thức cho τ như sau

$$a_3\tau^3 + a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0 = 0, \quad (4.60)$$

trong đó

$$a_3 = -1 < 0, \quad (4.61)$$

$$a_2 = \frac{-26\lambda^3 - 4(\sqrt{9-24\lambda} - 3)\lambda^2}{2\lambda^3}, \quad (4.62)$$

$$a_1 = \frac{-112\lambda^3 - 2(17\sqrt{9-24\lambda} - 81)\lambda^2 + 15(\sqrt{9-24\lambda} - 3)\lambda}{2\lambda^3}, \quad (4.63)$$

$$a_0 = \frac{-160\lambda^3 - 72\sqrt{9-24\lambda}\lambda^2 + 468\lambda^2 + 75\sqrt{9-24\lambda}\lambda - 297\lambda - 18\sqrt{9-24\lambda} + 54}{2\lambda^3}. \quad (4.64)$$

Với nghiệm lạm phát lũy thừa (power-law) với $\lambda = -3 + \epsilon$ và $0 < \epsilon \ll 1$ ta dễ tính được

$$a_2 \simeq -9 < 0, \quad (4.65)$$

$$a_1 \simeq -27 < 0, \quad (4.66)$$

$$a_0 \simeq -27 < 0. \quad (4.67)$$

Như vậy tất cả các hệ số $a_i (i = 0, 3)$ trong phương trình đa thức đều âm dẫn đến điểm cố định đang xét thực sự ổn định chống lại các nhiễu loạn của trường.

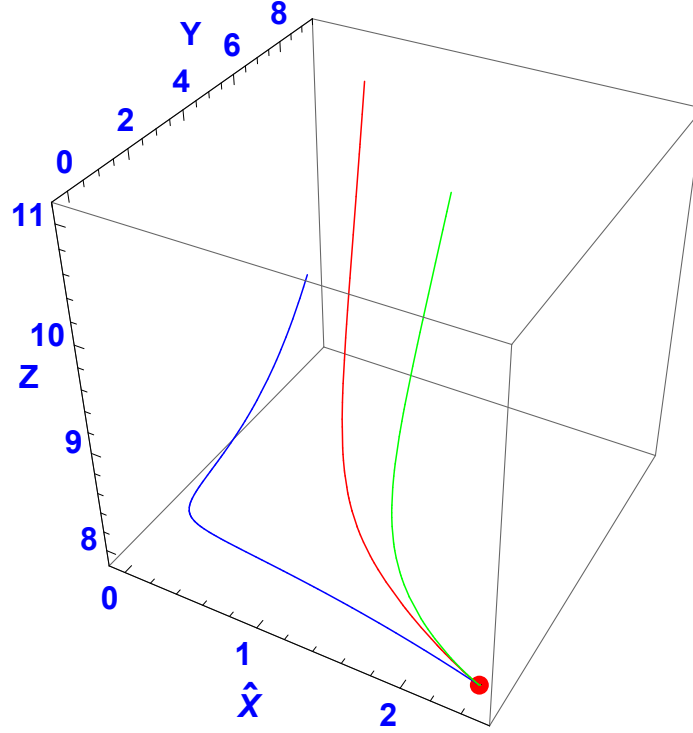
Để xác thực điều này ta sử dụng phương pháp số để quan sát tính chất ổn định của điểm cố định này trong không gian pha 3 chiều $\hat{X}, Y, Z$. Như hình 4.2 cho thấy các đường với điều kiện ban đầu khác nhau sau một thời gian sẽ đều hội tụ về điểm cố định C_- .

Ngoài biểu diễn không gian pha 3 chiều chúng ta hoàn toàn có thể biểu diễn tính chất hội tụ về điểm cố định trong không gian 2 chiều bằng cách sử dụng phương trình Friedmann thứ nhất làm phương trình ràng buộc khi này biến động lực Z sẽ được biểu diễn thông qua 2 biến động lực còn lại là $\hat{X}$ và Y

$$Z = \frac{4(\hat{X}^2\omega + 6Y - 6)}{\hat{X}^2\omega}. \quad (4.68)$$

Dẫn đến phương trình cho $dZ/d\alpha$ có dạng

$$\frac{dZ}{d\alpha} = -\frac{24}{\omega\hat{X}^2} \left[\frac{2}{\hat{X}}(Y - 1)\frac{d\hat{X}}{d\alpha} - \frac{dY}{d\alpha} \right]. \quad (4.69)$$



Hình 4.2: Tính chất ổn định trong không gian pha 3 chiều.

Tương tự ta cũng tìm được điểm cố định tương ứng với $Z = 8$ là

$$\begin{cases} \hat{X}_- = \frac{1}{\omega} (3 - \sqrt{9 - 24\lambda\omega^2}) \\ Y_- = \frac{1}{6} (9 - \sqrt{9 - 24\lambda\omega^2}) \end{cases}. \quad (4.70)$$

Hệ động lực với 2 phương trình được thu về dạng sau

$$\frac{d\hat{X}}{d\alpha} = \frac{1}{24\lambda} (\hat{X}^2 + 6) \hat{X}^3 + \hat{X}, \quad (4.71)$$

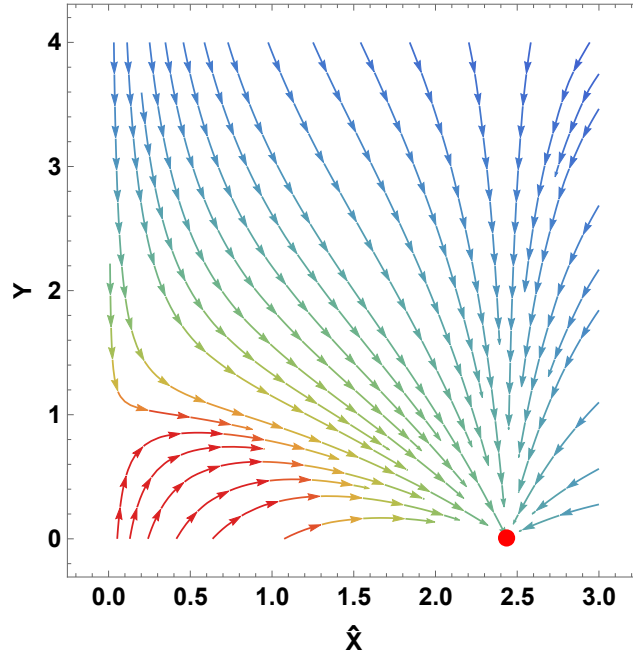
$$\frac{dY}{d\alpha} = \frac{1}{24\lambda} \hat{X}^2 (Y - 2) (\hat{X}^2 - 6Y + 6) - \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + 2Y - 2). \quad (4.72)$$

Tương tự lấy nhiễu loạn các phương trình động lực này xung quanh fixed point ta thu được

$$\frac{d\delta\hat{X}}{d\alpha} = \frac{3 - 8\lambda - \sqrt{3(3 - 8\lambda)}}{2\lambda} \delta\hat{X}, \quad (4.73)$$

$$\frac{d\delta Y}{d\alpha} = \frac{3 - 8\lambda - \sqrt{3(3 - 8\lambda)}}{2\lambda} \delta Y. \quad (4.74)$$

Lấy nhiễu loạn các biến động lực theo cấp số nhân $\delta\hat{X}, \delta Y \sim \exp[\tau\alpha]$, ta thu được



Hình 4.3: Tính chất ổn định trong không gian pha 2 chiều.

các trị riêng tương ứng

$$\tau_{1,2} = \frac{3 - 8\lambda - \sqrt{3(3 - 8\lambda)}}{2\lambda}. \quad (4.75)$$

Dễ thấy, $\tau_{1,2} \simeq -3 < 0$ cho nghiệm lạng phát với $\lambda = -3 + \epsilon$ và $0 < \epsilon \ll 1$. Vậy nghiệm ổn định trong không gian 2D (xem hình 4.3).

4.3.2 Phương pháp nhiễu loạn lũy thừa (power-law perturbation method)

Trong phần này chúng ta sẽ khảo sát tính ổn định của mô hình lạng phát kGB bằng phương pháp nhiễu loạn lũy thừa. Phương pháp này được thực hiện bằng cách tính các nhiễu loạn của trường ϕ và hệ số thang đo α trong các phương trình trường và phương trình trường vô hướng. Xét các nhiễu loạn của trường ϕ và hệ số thang đo dưới dạng lũy thừa sau đó tìm phương trình nhiễu loạn dưới dạng ma trận, tìm điều kiện nghiệm không tầm thường với $\det \mathcal{A} = 0$ để suy ra phương trình nhiễu loạn dưới dạng đa thức và điều kiện tương tự như trường hợp hệ động lực đó là tất cả các hệ số trong phương trình đó phải bằng 0 để khi thời gian tiến đến vô cùng các nhiễu loạn này tiến dần đến 0 thì nghiệm là ổn định ngược lại các nhiễu loạn sẽ tăng lên rất lớn khi thời gian tăng lên và nghiệm khi đó sẽ không ổn định.

Đầu tiên để thực hiện phương pháp này ta xét phương trình Friedmann thứ nhất (4.9) và thu được

$$\frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 = 3\dot{\alpha}^2 - 3\dot{\alpha}^3\dot{J} + \frac{\omega}{8}J'\mathcal{G}\dot{\phi}^2, \quad (4.76)$$

thay số hạng $\frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2$ vào phương trình Friedmann thứ hai (4.10) ta thu được

$$\ddot{\alpha} = -3\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\alpha}^2}{2}\ddot{J} + \frac{\dot{J}}{2}(5\dot{\alpha}^3 + 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}) - \frac{\omega}{16}J'\mathcal{G}\dot{\phi}^2. \quad (4.77)$$

Cùng với phương trình chuyển động của trường vô hướng ta có

$$\ddot{\alpha} = -3\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\alpha}^2}{2}\ddot{J} + \frac{\dot{J}}{2}(5\dot{\alpha}^3 + 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}) - \frac{\omega}{16}J'\mathcal{G}\dot{\phi}^2, \quad (4.78)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{8}\mathcal{G}J'\ddot{\phi} - 3\dot{\alpha}\left(1 - \frac{1}{8}GJ'\right)\dot{\phi} + \frac{\mathcal{G}}{8}J''\dot{X}\dot{\phi} + \frac{J'}{8}\dot{\mathcal{G}}\dot{\phi}. \quad (4.79)$$

Ta sẽ dùng hai phương trình này để khảo sát sự ổn định của nghiệm lạm phát luật lũy thừa bằng phương pháp nhiễu loạn lũy thừa.

Lấy nhiễu loạn các phương trình này ta thu được

$$\begin{aligned} & -\delta\ddot{\alpha} - 6\dot{\alpha}\delta\dot{\alpha} + \frac{1}{2}[\dot{\alpha}^2\delta\ddot{J} + 2\dot{\alpha}\ddot{J}\delta\dot{\alpha}] + \frac{1}{2}[(5\dot{\alpha}^3 + 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha})\delta\dot{J} + \dot{J}(15\dot{\alpha}^2\delta\dot{\alpha} + 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}\delta\dot{\alpha})] \\ & - \frac{\omega}{16}[\mathcal{G}\dot{\phi}^2\delta J' + J'\dot{\phi}^2\delta\mathcal{G} + 2\dot{\phi}J'\mathcal{G}\delta\dot{\phi}] = 0, \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$-\delta\ddot{\phi} + \frac{1}{8}\delta(\mathcal{G}J'\ddot{\phi}) - 3\delta(\dot{\alpha}\dot{\phi}) + \frac{3}{8}\delta(\mathcal{G}J'\dot{\alpha}\dot{\phi}) + \frac{1}{8}\delta(\mathcal{G}\dot{J}'\dot{\phi}) + \frac{1}{8}\delta(J'\dot{\mathcal{G}}\dot{\phi}) = 0. \quad (4.81)$$

Ta xét các nhiễu loạn của hệ số thang đo α và trường ϕ có dạng sau

$$\bullet \quad \delta\alpha = A_\alpha t^m, \quad (4.82)$$

$$\bullet \quad \delta\phi = A_\phi t^m. \quad (4.83)$$

Khi đó ta sẽ thu được các phương trình (4.80) và (4.81) dưới dạng các phương trình đại số sau

$$\begin{aligned} & -\frac{m(2\zeta\lambda(6\zeta(2\zeta+1) + (3\zeta+2)m-2) + \xi^2(6\zeta+m-1))}{\xi^2}A_\alpha \\ & + \frac{2\zeta^2\lambda m(2\zeta+m+2)(3\zeta+m-1)}{\xi^3}A_\phi = 0, \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{3m(60\zeta^4\lambda + 4\zeta^2\lambda(m^2 - 4m + 3) + 4\zeta^3\lambda(7m-16) + \xi^4)}{\xi^3}A_\alpha \\ & + \frac{m(3\zeta+m-1)(36\zeta^4\lambda - 36\zeta^3\lambda - \xi^4)}{\xi^4}A_\phi = 0. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Ta có thể biểu diễn hai phương trình đại số trên dưới dạng phương trình ma trận sau

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} A_\alpha \\ A_\phi \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_\alpha \\ A_\phi \end{pmatrix} = 0, \quad (4.86)$$

trong đó

$$A_{11} = -\frac{m(2\zeta\lambda(6\zeta(2\zeta+1) + (3\zeta+2)m - 2) + \xi^2(6\zeta+m-1))}{\xi^2}, \quad (4.87)$$

$$A_{12} = \frac{2\zeta^2\lambda m(2\zeta+m+2)(3\zeta+m-1)}{\xi^3}, \quad (4.88)$$

$$A_{21} = -\frac{3m(60\zeta^4\lambda + 4\zeta^2\lambda(m^2 - 4m + 3) + 4\zeta^3\lambda(7m - 16) + \xi^4)}{\xi^3}, \quad (4.89)$$

$$A_{22} = \frac{m(3\zeta+m-1)(36\zeta^4\lambda - 36\zeta^3\lambda - \xi^4)}{\xi^4}. \quad (4.90)$$

Các nghiệm không tầm thường của phương trình (4.86) tồn tại khi và chỉ khi

$$\det \mathcal{A} = 0, \quad (4.91)$$

phương trình này cho ta một phương trình đa thức cho m như sau

$$mf(m) \equiv m(a_6m^5 + a_5m^4 + a_4m^3 + a_3m^2 + a_2m + a_1) = 0, \quad (4.92)$$

với các hệ số a_i 's ($i = 1 - 6$) được cho bởi

$$\begin{aligned} a_6 &= \frac{24\zeta^4\lambda^2}{\xi^6}, \\ a_5 &= \frac{72\zeta^4(4\zeta-1)\lambda^2}{\xi^6}, \\ a_4 &= \frac{24\zeta^4[\zeta(47\zeta-22)+3]\lambda^2 - 36(\zeta-1)\zeta^3\lambda\xi^2 + 4\zeta(3\zeta+1)\lambda\xi^4 + \xi^6}{\xi^6}, \\ a_3 &= \frac{1}{\xi^6} [24\zeta^4[\zeta(\zeta(54\zeta-25)+8)-1]\lambda^2 - 36(\zeta-1)\zeta^3(9\zeta-2)\lambda\xi^2 \\ &\quad + 8\zeta(9\zeta^2+3\zeta-1)\lambda\xi^4 + (9\zeta-2)\xi^6], \\ a_2 &= \frac{1}{\xi^6} (3\zeta-1) [-48\zeta^5(\zeta(3\zeta-8)+1)\lambda^2 - 36(\zeta-1)\zeta^3(6\zeta-1)\lambda\xi^2 \\ &\quad + 4\zeta(9\zeta^2+6\zeta-1)\lambda\xi^4 + (6\zeta-1)\xi^6], \\ a_1 &= 0. \end{aligned}$$

Từ các phương trình (4.18), (4.19) và điều kiện trường phantom $\omega = -1$ cho ta

$$\lambda = -\frac{3(\zeta - 1)\zeta}{(\zeta + 1)^2},$$

$$\xi = \sqrt{-2\zeta(\zeta + 1)\lambda},$$

hai điều kiện này dẫn đến

$$a_6 = \frac{1}{(\zeta - 1)(\zeta + 1)},$$

$$a_5 = \frac{3(4\zeta - 1)}{\zeta^2 - 1},$$

$$a_4 = \frac{(9\zeta(5\zeta - 2) + 1)}{\zeta^2 - 1},$$

$$a_3 = \frac{3(1 - 3\zeta)^2(2\zeta + 1)}{\zeta^2 - 1},$$

$$a_2 = \frac{2(3\zeta - 1)^3}{\zeta^2 - 1}.$$

$$a_1 = 0.$$

Với điều kiện cho lạm phát $\zeta \gg 1$ dẫn đến tất cả các hệ số a_i là dương (hoặc âm nếu nhân -1 vào 2 vế của phương trình) do đó nghiệm lạm phát thực sự ổn định chống lại các nhiễu loạn trường.

4.4 Nhiễu loạn tensor trong mô hình kGB

Trong phần này chúng ta sẽ tìm hiểu khái quát về lý thuyết nhiễu loạn vũ trụ cùng với đó là khảo sát tính chất ổn định trong gradient của các nhiễu loạn tensor của mô hình kGB điều mà được chứng minh [46] là bất ổn trong mô hình Gauss-Bonnet inflation của P.Kanti và các cộng sự.

4.4.1 Tổng quan về lý thuyết nhiễu loạn vũ trụ

Một trong những mục tiêu quan trọng nhất của Vũ trụ học hiện đại là giải thích nguồn gốc của các nhiễu loạn nguyên thủy (primordial fluctuations) được cho là các hạt giống hình thành cấu trúc thang đo lớn trong vũ trụ. Trước khi đề xuất viễn cảnh lạm phát vũ trụ, các nhiễu loạn ban đầu đã được coi là đương nhiên và phổ của chúng đã được cố định để phù hợp với các quan sát. Vì vậy, vũ trụ học cổ điển nhằm mô tả vũ trụ hiện tại bằng cách sắp xếp các điều kiện ban đầu một cách thích hợp.

Mặt khác, lạm phát vũ trụ cố gắng giải thích nguồn gốc thực sự của các nhiễu loạn ban đầu và dự đoán chính xác quang phổ. Điều này có nghĩa là vũ trụ học hiện tại có thể kiểm tra khi so sánh các dự đoán từ lý thuyết này với các quan sát.

Theo lạm phát vũ trụ, các nhiễu loạn nguyên thủy bắt nguồn từ các thăng giáng lượng tử. Trong thời kỳ lạm phát, chúng được kéo dẫn đến thang đo siêu đường chân trời (super horizon). Do đó, lạm phát giúp kết nối các cấu trúc thang đo lớn của vũ trụ với nguồn gốc vi mô của nó. Ngoài ra, phổ kết quả của những tính không đồng nhất này dường như không quá nhạy cảm với các chi tiết của bất kỳ mô hình cụ thể nào và có hình dạng gần như bất biến về tỷ lệ. Kết quả là, chúng ta sẽ có một dự đoán cụ thể cho quang phổ của tính dị hướng trong Nền vi sóng vũ trụ.

Lý thuyết nhiễu loạn tuyến tính: Theo các quan sát CMB, vũ trụ sơ khai không hoàn toàn đồng nhất mà tồn tại các đặc tính bất đồng nhất nhỏ (small inhomogeneities) đây là một xấp xỉ tốt cho khai triển lý thuyết nhiễu loạn bậc nhất (tuyến tính). Điều này có thể được thực hiện bằng cách tách mọi đại lượng (phụ thuộc vào thời gian và tọa độ), $\xi(t, x)$, thành một phần là đồng nhất, $\xi(t)$, chỉ phụ thuộc vào thời gian vũ trụ và một phần là nhiễu loạn, $\delta\xi(t, x)$, phụ thuộc vào cả thời gian và tọa độ không gian,

$$\xi(t, x) \equiv \xi(t) + \delta\xi(t, x). \quad (4.93)$$

Bằng cách thức này, chúng ta có thể tính toán các phương trình Einstein ở bậc tuyến tính. Theo các phương trình Einstein, Tính không đồng nhất trong phân bố vật chất gây ra nhiễu loạn trong metric tensor và ngược lại.

Những nhiễu loạn này có thể được phân tách thành các phần vô hướng (scalar), vectơ và tensor và trong phép xấp xỉ tuyến tính, các loại nhiễu loạn khác nhau này phát triển độc lập và có thể được phân tích một cách riêng biệt. Ở đây chúng ta phân loại các nhiễu loạn.

Nhiễu loạn metric: Metric của một vũ trụ FRW phẳng, đồng nhất và đẳng hướng với các nhiễu loạn rất nhỏ được biểu diễn như sau

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(1 + 2\Phi)dt^2 + 2aB_id x^i dt + a^2 [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + E_{ij}] dx^i dx^j. \quad (4.94)$$

Theo Phân tách vô hướng-vector-tensor (SVT), chúng ta có thể biểu diễn B_i và E_{ij} như sau

$$B_i \equiv \partial_i B - S_i, \quad \partial^i S_i = 0, \quad (4.95)$$

và

$$E_{ij} \equiv 2\partial_{ij}E + 2\partial_{(i}K_{j)} + h_{ij}, \quad \partial^i K_i = 0, \quad h_i^i = \partial^i h_{ij} = 0. \quad (4.96)$$

Trong đó, Φ, Ψ, B_i và E_{ij} lần lượt là các hàm lapse (lapse functions), độ cong không gian (spatial curvature), vector dịch (shift vector) và shear tensor.

Bằng cách này, chúng ta đã tách metric ban đầu thành các phần vô hướng, vector và tensor riêng biệt.

Trong luận văn này tôi tập trung vào phần nhiễu loạn tensor của metric có dạng sau

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [\delta_{ij} + h_{ij}] dx^i dx^j. \quad (4.97)$$

Trong đó h_{ij} là transverse, tức là $h_{ij,i} = 0$ và không có vết, tức là $h^i_i = 0$. Các nhiễu loạn tensor là bất biến gauge.

Phần tiếp theo ta sẽ tính toán vận tốc âm thanh của các nhiễu loạn tensor trong mô hình kGB và chỉ ra vận tốc này lớn hơn 1.

4.4.2 Nhiễu loạn tensor trong mô hình kGB

Từ phiếm hàm tác dụng trong mô hình kGB

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} - \frac{\omega}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{8} J(X) \mathcal{G} \right]. \quad (4.98)$$

Lấy biến phân tác dụng theo $g^{\mu\nu}$ cho ta phương trình trường Einstein có dạng

$$G_{\mu\nu} + P_{\mu\rho\nu\sigma} \nabla^{\rho\sigma} J - \omega \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{\omega}{2} g_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi + \frac{\omega}{8} J' \mathcal{G} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = 0, \quad (4.99)$$

trong đó

$$\begin{aligned} P_{\mu\rho\nu\sigma} \nabla^{\rho\sigma} J &= G_{\mu\nu} \nabla^2 J - R_{\alpha\nu} \nabla_\mu \nabla^\alpha J - R_{\alpha\mu} \nabla_\nu \nabla^\alpha J + \frac{R}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu \\ &+ R_{\rho\sigma} g_{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla^\sigma J + R_{\mu\rho\sigma\nu} \nabla^\rho \nabla^\sigma J. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Phương trình (4.99) được biểu diễn dưới dạng

$$G_{\mu\nu} = -P_{\mu\rho\nu\sigma} \nabla^{\rho\sigma} J + \omega \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\omega}{2} g_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - \frac{\omega}{8} J' \mathcal{G} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (4.101)$$

Mặt khác phương trình chuyển động của trường vô hướng có dạng

$$\left(1 - \frac{1}{8} J' \mathcal{G} \right) \nabla^2 \phi - \frac{1}{8} \mathcal{G} \nabla_\mu J' \nabla^\mu \phi - \frac{1}{8} J' \nabla_\mu \mathcal{G} \nabla^\mu \phi = 0. \quad (4.102)$$

Phương trình Einstein ngụ ý

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \quad (4.103)$$

Với tensor năng xung lượng có dạng

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -P_{\mu\rho\nu\sigma} \nabla^{\rho\sigma} J + \omega \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\omega}{2} g_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - \frac{\omega}{8} J' \mathcal{G} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\ &= T_{\mu\nu}^{(GB)} + T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(GK)}, \end{aligned} \quad (4.104)$$

với

$$T_{\mu\nu}^{(GB)} = -P_{\mu\rho\nu\sigma}\nabla^{\rho\sigma}J = -G_{\mu\nu}\nabla^2J + R_{\alpha\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha J + R_{\alpha\mu}\nabla_\nu\nabla^\alpha J - \frac{R}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu - R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J - R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J, \quad (4.105)$$

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \omega\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{\omega}{2}g_{\mu\nu}\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi, \quad (4.106)$$

$$T_{\mu\nu}^{(GK)} = -\frac{\omega}{8}J'(X)\mathcal{G}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi. \quad (4.107)$$

Trong nền FLRW phẳng ta có

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.108)$$

Ta thu được các phương trình tương ứng

$$3H^2(1 - H\dot{J}) = \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{\omega}{8}J'\mathcal{G}\dot{\phi}^2, \quad (4.109)$$

$$H^2(1 - \ddot{J}) + 2(H^2 + \dot{H})(1 - H\dot{J}) = -\frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2, \quad (4.110)$$

$$\left(1 - \frac{1}{8}J'\mathcal{G}\right)(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) = \frac{1}{8}\dot{\phi}\frac{d}{dt}(J'(X)\mathcal{G}). \quad (4.111)$$

Phương trình chuyển động của các nhiễu loạn tensor trong mô hình k GB

Metric cho các nhiễu loạn tensor có dạng

$$ds^2 = -dt^2 = a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^i. \quad (4.112)$$

Sau các tính toán ta thu được nhiễu loạn tensor cho các phần không gian khai triển đến bậc nhất là

$$T_{ij} = T_{ij}^{(GB)} + T_{ij}^{(\phi)} + T_{ij}^{(GK)} = {}^{(0)}T_{ij} + {}^{(1)}T_{ij}. \quad (4.113)$$

Sau các bước tính toán ta thu được các nhiễu loạn bậc nhất trong tensor năng xung lượng có dạng

$${}^{(1)}T_{ij}^{(\phi)} = \frac{\omega}{2}a^2h_{ij}\dot{\phi}^2 \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}T_{ij}^{(GB)} = & (-\ddot{J})a^2\left[\frac{1}{2a^2}\nabla^2h_{ij} - \frac{1}{2}H\dot{h}_{ij} + H^2h_{ij}\right] \\ & - a^2\dot{J}\left[-H\frac{\ddot{h}_{ij}}{2} + \dot{h}_{ij}\left(-\frac{3}{2}H^2 - \frac{1}{2}\dot{H}\right) + h_{ij}(2H^3 + 2H\dot{H})\right] \end{aligned} \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}T_{ij}^{(GK)} = & {}^{(1)}\left(-\frac{\omega}{8}J'\mathcal{G}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \\ = & -\frac{\omega}{8}{}^{(1)}(J'(X))\mathcal{G}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{\omega}{8}J'(X){}^{(1)}\mathcal{G}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\ = & -\frac{\omega}{8}(J''(X)){}^{(1)}X\mathcal{G}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{\omega}{8}J'(X){}^{(1)}\mathcal{G}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = 0. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Lưu ý ta có $^{(1)}G = 0$ và $^{(1)}X = 0$. Khi đó

$$\begin{aligned}
^{(1)}T_{ij} &= ^{(1)}T_{ij}^{(\phi)} + ^{(1)}T_{ij}^{(GB)} + ^{(1)}T_{ij}^{(GK)} \\
&= \frac{\omega}{2}a^2h_{ij}\dot{\phi}^2 + ^{(1)}T_{ij}^{(GB)} + 0 \\
&= a^2h_{ij} \left[-H^2(1 - \ddot{J}) - 2(H^2 + \dot{H})(1 - H\dot{J}) \right] \\
&\quad - \ddot{J}a^2 \left[\frac{1}{2a^2}\nabla^2h_{ij} - \frac{1}{2}H\dot{h}_{ij} + H^2h_{ij} \right] \\
&\quad - a^2\dot{J} \left[-H\frac{\ddot{h}_{ij}}{2} + \dot{h}_{ij} \left(-\frac{3}{2}H^2 - \frac{1}{2}\dot{H} \right) + h_{ij}(2H^3 + 2H\dot{H}) \right] \\
&= -a^2h_{ij}(3H^2 + 2\dot{H}) - a^2\ddot{J} \left[\frac{1}{2a^2}\nabla^2 - \frac{1}{2}H\dot{h}_{ij} \right] \\
&\quad + a^2\dot{J} \left[H\frac{\ddot{h}_{ij}}{2} + \frac{\dot{h}_{ij}}{2}(3H^2 + \dot{H}) \right]. \tag{4.117}
\end{aligned}$$

Phương trình Einstein cho các nhiễu loạn tensor có dạng

$$\begin{aligned}
^{(1)}G_{ij} &= ^{(1)}T_{ij} \\
&\Leftrightarrow \frac{a^2}{2}\ddot{h}_{ij} - \frac{1}{2}\nabla^2h_{ij} + \frac{3}{2}a^2Hh_{ij} - a^2h_{ij}(2\dot{H} + 3H^2) \\
&= -a^2h_{ij}(3H^2 + 2\dot{H}) - a^2\ddot{J} \left[\frac{1}{2a^2}\nabla^2 - \frac{1}{2}H\dot{h}_{ij} \right] + a^2\dot{J} \left[H\frac{\ddot{h}_{ij}}{2} + \frac{\dot{h}_{ij}}{2}(3H^2 + \dot{H}) \right] \\
&\Leftrightarrow \frac{\ddot{h}_{ij}}{2} - \frac{1}{2a^2}\nabla^2h_{ij} + \frac{3}{2}Hh_{ij} = -\ddot{J} \left[\frac{1}{2a^2}\nabla^2h_{ij} - \frac{1}{2}H\dot{h}_{ij} \right] \\
&\quad + \dot{J} \left[H\frac{\ddot{h}_{ij}}{2} + \frac{\dot{h}_{ij}}{2}(3H^2 + \dot{H}) \right] \\
&\Leftrightarrow \frac{\ddot{h}_{ij}}{2}(1 - H\dot{J}) + \left[\frac{(3H^2 + \dot{H})(-\dot{J})}{2} + \frac{3}{2}H - \frac{1}{2}H\ddot{J} \right] - \frac{1}{2a^2}\nabla^2h_{ij}(1 - \ddot{J}) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - H\dot{J})\ddot{h}_{ij} + [3H(1 - H\dot{J}) - \dot{H}\dot{J} - H\ddot{J}]\dot{h}_{ij} - \frac{\nabla^2h_{ij}}{a^2}(1 - \ddot{J}) = 0. \tag{4.118}
\end{aligned}$$

Dẫn đến

$$\boxed{\ddot{h}_{ij} + \left[3H - \frac{\dot{H}\dot{J} + H\ddot{J}}{1 - H\dot{J}} \right]\dot{h}_{ij} - \frac{\Delta h_{ij}}{a^2} \frac{1 - \ddot{J}}{1 - H\dot{J}} = 0}. \tag{4.119}$$

Bình phương tốc độ âm thanh hiệu dụng (tốc độ truyền của các nhiễu loạn tensor) trong mô hình k GB được định nghĩa như sau

$$c_s^2 \equiv \frac{1 - \ddot{J}}{1 - H\dot{J}}. \tag{4.120}$$

Đối với nghiệm lạm phát theo quy luật lũy thừa ta tính được

$$\ddot{J} = -4\frac{\lambda}{\xi^2}, \quad (4.121)$$

$$H\dot{J} = -4\lambda\frac{\zeta}{\xi^2}. \quad (4.122)$$

Dẫn đến

$$c_s^2 = 1 + \frac{2}{\zeta} \simeq 1 + \frac{2}{9}\epsilon \gtrsim 1. \quad (4.123)$$

Kết quả này cho thấy bình phương tốc độ âm thanh hiệu dụng của các nhiễu loạn tensor trong mô hình lạm phát theo quy luật lũy thừa k GB là không âm cụ thể $c_s^2 \gtrsim 1$ khắc phục được điểm yếu được chỉ ra trong mô hình lạm phát Gauss-Bonnet [46].

Với $c_s^2 > 1$ tương ứng với $c_s > 1$ hay superluminality một vấn đề mới xuất hiện khi tốc độ truyền âm thanh của các nhiễu loạn tensor lớn hơn vận tốc ánh sáng dẫn đến vi phạm tính nhân quả do sự xuất hiện của các đường cong giống thời gian (time-like curves) (nhân quả) khép kín, như được chỉ ra trong tài liệu [83, 84]. Thay vào đó, chúng ta có thể mong đợi những hệ quả không tầm thường của nó, có thể được xuất hiện trên nền CMB [85]. Cần lưu ý rằng sự lan truyền cực đại (superluminal propagation) của nhiễu loạn tensor cũng có thể được tìm thấy trong nhiều mô hình hấp dẫn khác như mô hình lạm phát Galileon [86, 87].

Để tránh sự xuất hiện của các đường cong giống như thời gian đóng, người ta có thể đưa ra phỏng đoán bảo vệ của Hawking (the Hawking's chronology protection conjecture) [88] như được đề xuất trong các tài liệu [84, 86]. Về cơ bản, phỏng đoán này lập luận rằng sự hình thành các đường cong giống thời gian đóng có thể bị ngăn chặn do phản ứng ngược đáng kể của trường lượng tử xảy ra khi các đường cong giống thời gian gần như đóng [88]. Ngoài ra một ủng hộ hợp lý cho rằng sự lan truyền cực đại (the superluminality) không là lỗ hổng cho mô hình k GB. Cụ thể, có thể chỉ ra như phân tích trong tài liệu [87] rằng metric hấp dẫn hiệu dụng $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ xác định cấu trúc nhân quả của sự lan truyền tensor thông qua điều kiện $\mathcal{G}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$ của mô hình k GB không có mối liên hệ bảo giác (disformally related) với metric nền $g_{\mu\nu}$ nơi xác định cấu trúc nhân quả của sự lan truyền photon ánh sáng thông qua các nón ánh sáng $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$. Lưu ý rằng cả $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ và $g_{\mu\nu}$ sẽ có cùng cấu trúc nhân quả nếu chúng liên hệ bảo giác với nhau tức là $\mathcal{G}_{\mu\nu} = \Omega(x)g_{\mu\nu}$ [83, 87]. Trong mô hình k GB do tính phi bảo giác trong mối liên hệ giữa $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ và $g_{\mu\nu}$ tức là $\mathcal{G}_{\mu\nu} \neq \Omega(x)g_{\mu\nu}$ cũng như sự lan truyền cực đại (the superluminality) $c_s > 1$ nên lan truyền (the chronology) được xác định bằng $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ (thay vì $g_{\mu\nu}$) sẽ là một nền lan truyền (chronology) toàn cục của không thời gian. Do đó sự lan truyền cực đại (superluminality) sẽ không bao hàm vi phạm nhân quả [83].

Chương 5

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, tôi đã trình bày tổng quan và hệ thống về nghiên cứu vũ trụ học hiện đại với mô hình trung tâm là mô hình Λ CDM, cùng với đó là viễn cảnh lạm phát, một viễn cảnh xảy ra trong vũ trụ sớm giúp giải quyết đồng thời nhiều vấn đề quan trọng trong vũ trụ học, lạm phát cũng đưa ra lời giải thích cho cấu trúc thang đo lớn trong vũ trụ xuất phát từ các thăng giáng lượng tử xuất hiện trước thời kỳ lạm phát. Nghiên cứu lạm phát được các nhà khoa học đặc biệt quan tâm, tuy nhiên cơ chế gây lạm phát vẫn còn là dấu hỏi lớn vì vậy nhiều mô hình lạm phát vẫn tiếp tục được nghiên cứu.

Trong luận văn tôi đưa ra một số mô hình trong nghiên cứu lạm phát vũ trụ nổi bật là các mô hình mới lạ như lạm phát k [16] trong đó số hạng động năng của trường vô hướng inflaton là thành phần chính thúc đẩy lạm phát và mô hình lạm phát Gauss-Bonnet [32, 33] trong đó trường inflaton được kết hợp không tầm thường với số hạng Gauss-Bonnet là một bất biến tô pô đóng vai trò như một đạo hàm toàn phần trong không thời gian 4 chiều. Để nghiên cứu ảnh hưởng của số hạng này đến động lực học của trường hấp dẫn, chúng ta cần kết hợp nó với một (hoặc nhiều) trường vô hướng, điều này dẫn đến mô hình hấp dẫn Einstein-scalar-Gauss-Bonnet. Ngoài ra, mô hình hấp dẫn Gauss-Bonnet rất thú vị vì được nghiên cứu trong nhiều khía cạnh của vật lý lý thuyết như các nghiệm vũ trụ không có điểm kỳ dị, và vật lý hố đen.

Trong vũ trụ sớm, số hạng Gauss-Bonnet đóng vai trò quan trọng vì vậy các mô hình lạm phát có chứa số hạng Gauss-Bonnet được đông đảo cộng đồng khoa học quan tâm. Tuy nhiên lạm phát Gauss-Bonnet gặp vấn đề khi xuất hiện bất ổn định trong gradient của các nhiễu loạn tensor cụ thể là bình phương tốc độ âm thanh hiệu dụng có định nghĩa âm [46].

Vì vậy trong luận văn này chúng tôi đã mở rộng nghiên cứu mô hình lạm phát Gauss-Bonnet bằng mô hình lạm phát mới có tên gọi lạm phát k -Gauss-Bonnet [63] với việc tổng quát hóa hàm ghép của trường vô hướng với số hạng Gauss-Bonnet bày

giờ có thể là hàm bất kỳ của trường và số hạng động năng của nó $f(\phi) \rightarrow J(\phi, X)$ với X là số hạng động năng của trường vô hướng được định nghĩa $X = -\omega/2(\nabla\phi)^2$ với định nghĩa này trường lạm phát có thể là trường phantom với $\omega = -1$ và $\omega = 1$ tương ứng với trường hợp trường vô hướng chính tắc. Thử ví, là mô hình này tìm được nghiệm lạm phát chính xác theo quy luật lũy thừa đồng thời nghiệm này được chứng minh là ổn định trong pha lạm phát thông qua hai phương pháp là động lực học và nhiễu loạn lũy thừa. Ngoài ra, nghiên cứu trong khuôn khổ lý thuyết nhiễu loạn vũ trụ tôi tập trung vào nhiễu loạn tensor và tìm được phương trình chuyển động cho các nhiễu loạn tensor có bình phương tốc độ âm thanh hiệu dụng dương đối với nghiệm lạm phát theo quy luật lũy thừa khắc phục điểm yếu bất ổn định trong mô hình lạm phát Gauss-Bonnet.

Như vậy mô hình lạm phát k -Gauss-Bonnet là một mô hình rất mới và vì tính mới của nó nên còn nhiều vấn đề cần nghiên cứu thêm cụ thể các vấn đề gần nhất đó là bất ổn định Ostrogradsky xuất hiện khi các phương trình trường tồn tại đạo hàm bậc ba của biến trường ϕ điều này xuất hiện trong mở rộng của một lý thuyết vượt trên mô hình lý thuyết hấp dẫn Horndeski [89, 90] và lý thuyết hấp dẫn đạo hàm bậc cao suy biến DHOST [91, 92]. Ngoài ra, các ràng buộc với quan sát CMB cũng cần được nghiên cứu thêm xem liệu mô hình có phù hợp với quan sát hay không cụ thể là tham số tensor-to-scalar trong mô hình.

Chương 6

PHỤ LỤC

6.1 Dẫn ra phương trình trường Einstein từ phiếm hàm tác dụng

Lấy biến phân tác dụng (4.1) theo nghịch đảo metric $g^{\mu\nu}$ ta thu được

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \left(\int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} - \frac{\omega}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{J(X)}{8} \mathcal{G} \right] \right) \\ &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) \left[\frac{R}{2} - \frac{\omega}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{J(X)}{8} \mathcal{G} \right] \\ &\quad + \int d^4x \sqrt{-g} \delta \left[\frac{R}{2} - \frac{\omega}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{J(X)}{8} \mathcal{G} \right] \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$= \delta S_1 + \delta S_2, \quad (6.2)$$

trong đó

$$\begin{aligned}\delta S_1 &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) \left[\frac{R}{2} - \frac{\omega}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{J(X)}{8} \mathcal{G} \right] \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \left[\frac{R}{2} - \frac{\omega}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{J(X)}{8} \mathcal{G} \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} R g_{\mu\nu} + \frac{\omega}{4} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + g_{\mu\nu} \frac{J(X)}{16} \mathcal{G} \right] \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

và

$$\begin{aligned}\delta S_2 &= \int d^4x \sqrt{-g} \delta \left[\frac{R}{2} - \frac{\omega}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{J(X)}{8} \mathcal{G} \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\delta R}{2} - \delta \left(\frac{\omega}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) - \frac{\delta J(X)}{8} \mathcal{G} - \frac{J(X)}{8} \delta \mathcal{G} \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R_{\mu\nu} - \frac{\omega}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{8} J' \mathcal{G} \left(\frac{\omega}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) - \frac{1}{8} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta g^{\mu\nu}} J(X) \right] \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Trong phương trình này lấy biến phân của số hạng Gauss-Bonnet được tính toán như sau

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{G} &= \delta(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}) \\ &= \delta(R^2) - 4\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) + \delta(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}),\end{aligned}\quad (6.5)$$

trong đó

$$\delta(R^2) = 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu} - 2R\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}, \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned}\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) &= R_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu} - R_{\alpha\nu}\nabla^\alpha\nabla_\mu\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - R_{\alpha\mu}\nabla^\alpha\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + R^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - 2R^{\alpha\beta}R_{\alpha\nu\mu\beta}\delta g^{\mu\nu},\end{aligned}\quad (6.7)$$

$$\delta(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}) = 4R_{\mu\rho\nu\sigma}\nabla^\sigma\nabla^\rho\delta g^{\mu\nu} + 2R_{\mu\tau\rho\sigma}R_\nu{}^{\tau\rho\sigma}\delta g^{\mu\nu}. \quad (6.8)$$

Dẫn đến biến phân số hạng $\mathcal{G}$ là:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{G} &= 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu} - 2R\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - 4R_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu} + 4R_{\alpha\nu}\nabla^\alpha\nabla_\mu\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + 4R_{\alpha\mu}\nabla^\alpha\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} - 4R^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} + 8R^{\alpha\beta}R_{\alpha\nu\mu\beta}\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + 4R_{\mu\rho\nu\sigma}\nabla^\sigma\nabla^\rho\delta g^{\mu\nu} + 2R_{\mu\tau\rho\sigma}R_\nu{}^{\tau\rho\sigma}\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (6.9)$$

Tính chất đối xứng của metric tensor $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ dẫn đến số hạng thứ 9 trong biểu thức trên được biến đổi

$$R_{\mu\rho\nu\sigma}\nabla^\sigma\nabla^\rho\delta g^{\mu\nu} = R_{\nu\rho\mu\sigma}\nabla^\sigma\nabla^\rho\delta g^{\mu\nu} = R_{\nu\sigma\mu\rho}\nabla^\rho\nabla^\sigma\delta g^{\mu\nu} = -R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma\delta g^{\mu\nu}. \quad (6.10)$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{G} &= 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu} - 2R\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - 4R_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu} + 4R_{\alpha\nu}\nabla^\alpha\nabla_\mu\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + 4R_{\alpha\mu}\nabla^\alpha\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} - 4R^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} + 8R^{\alpha\beta}R_{\alpha\nu\mu\beta}\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - 4R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma\delta g^{\mu\nu} + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_\nu{}^{\rho\sigma\tau}\delta g^{\mu\nu},\end{aligned}\quad (6.11)$$

tiếp theo ta xét

$$\begin{aligned}
J\delta\mathcal{G} &= 2RR_{\mu\nu}J\delta g^{\mu\nu} + 2Rg_{\mu\nu}J\nabla^2\delta g^{\mu\nu} - 2RJ\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}J\nabla^2\delta g^{\mu\nu} \\
&+ 4R_{\alpha\nu}J\nabla^\alpha\nabla_\mu\delta g^{\mu\nu} + 4R_{\alpha\mu}J\nabla^\alpha\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} - 4R^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}J\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} \\
&+ 8JR^{\alpha\beta}R_{\alpha\nu\mu\beta}\delta g^{\mu\nu} - 4R_{\mu\rho\sigma\nu}J\nabla^\rho\nabla^\sigma\delta g^{\mu\nu} + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_\nu{}^{\rho\sigma\tau}J\delta g^{\mu\nu} \\
&= 2RR_{\mu\nu}J\delta g^{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^2(RJ) - 2\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu(RJ) - 4\delta g^{\mu\nu}\square(R_{\mu\nu}J) \\
&+ 4\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha(R_{\alpha\nu}J) + 4\delta g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla^\alpha(R_{\alpha\mu}J) - 4g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta(R^{\alpha\beta}J) \\
&- 4\delta g^{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma(R_{\mu\rho\sigma\nu}J) + 8JR^{\alpha\beta}R_{\alpha\nu\mu\beta}\delta g^{\mu\nu} + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_\nu{}^{\rho\sigma\tau}J\delta g^{\mu\nu} \quad (6.12)
\end{aligned}$$

Dẫn đến

$$\begin{aligned}
J\delta\mathcal{G} &= \delta g^{\mu\nu} \left[(2RR_{\mu\nu}J + 8R^{\alpha\beta}R_{\alpha\nu\mu\beta}J + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_\nu{}^{\rho\sigma\tau}J) \right. \\
&+ (2\nabla^2(Rg_{\mu\nu}J) - 2\nabla_\mu\nabla_\nu(RJ) - 4\nabla^2(R_{\mu\nu}J) \\
&+ 4\nabla_\mu\nabla^\alpha(R_{\alpha\nu}J) + 4\nabla_\nu\nabla^\alpha(R_{\alpha\mu}J) \\
&\left. - 4g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma(R_{\rho\sigma}J) - 4\nabla^\rho\nabla^\sigma(R_{\mu\rho\sigma\nu}J)) \right] \quad (6.13)
\end{aligned}$$

$$= \delta g^{\mu\nu} [SH1 + SH2], \quad (6.14)$$

với

$$SH1 = (2RR_{\mu\nu}J + 8R^{\alpha\beta}R_{\alpha\nu\mu\beta}J + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_\nu{}^{\rho\sigma\tau}J) \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned}
SH2 &= 2\nabla^2(Rg_{\mu\nu}J) - 2\nabla_\mu\nabla_\nu(RJ) - 4\nabla^2(R_{\mu\nu}J) \\
&+ 4\nabla_\mu\nabla^\alpha(R_{\alpha\nu}J) + 4\nabla_\nu\nabla^\alpha(R_{\alpha\mu}J) \\
&- 4g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma(R_{\rho\sigma}J) - 4\nabla^\rho\nabla^\sigma(R_{\mu\rho\sigma\nu}J), \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Xét riêng $SH2$

$$\begin{aligned}
SH2 &= 2\nabla^2(Rg_{\mu\nu}J) - 2\nabla_\mu\nabla_\nu(RJ) - 4\nabla^2(R_{\mu\nu}J) \\
&+ 4\nabla^\alpha\nabla_\mu(R_{\alpha\nu}J) + 4\nabla^\alpha\nabla_\nu(R_{\alpha\mu}J) \\
&- 4g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma(R_{\rho\sigma}J) - 4\nabla^\rho\nabla^\sigma(R_{\mu\rho\sigma\nu}J) \\
&= [2Rg_{\mu\nu}\nabla^2J + 2g_{\mu\nu}J\nabla^2R] \\
&- [2R\nabla_\mu\nabla_\nu J + 2J\nabla_\mu\nabla_\nu R] \\
&- [4R_{\mu\nu}\nabla^2J + 4J\nabla^2(R_{\mu\nu})] \\
&+ [4R_{\alpha\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha J + 4J\nabla_\mu\nabla^\alpha(R_{\alpha\nu})] \\
&+ [4R_{\alpha\mu}\nabla_\nu\nabla^\alpha J + 4J\nabla_\nu\nabla^\alpha(R_{\alpha\mu})] \\
&- [4R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J + 4g_{\mu\nu}J\nabla^\rho\nabla^\sigma(R_{\rho\sigma})] \\
&- [4R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J + 4J\nabla^\rho\nabla^\sigma R_{\mu\rho\sigma\nu}]. \quad (6.17)
\end{aligned}$$

Dẫn đến

$$\begin{aligned}
 SH2 = & \left[2Rg_{\mu\nu}\nabla^2 J - 2R\nabla_\mu\nabla_\nu J - 4R_{\mu\nu}\nabla^2 J + 4R_{\alpha\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha J + 4R_{\alpha\mu}\nabla_\nu\nabla^\alpha J \right. \\
 & \left. - 4R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J - 4R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J \right] \\
 & + J \left[2g_{\mu\nu}\nabla^2 R - 2\nabla_\mu\nabla_\nu R - \nabla^2 R_{\mu\nu} + 4\nabla_\mu\nabla^\alpha R_{\alpha\nu} + 4\nabla_\nu\nabla^\alpha R_{\alpha\mu} \right. \\
 & \left. - 4g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma R_{\rho\sigma} - 4\nabla^\rho\nabla^\sigma R_{\mu\rho\sigma\nu} \right] \quad (6.18)
 \end{aligned}$$

$$= SH3 + J \cdot SH4, \quad (6.19)$$

với

$$\begin{aligned}
 SH3 = & 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2 J - 2R\nabla_\mu\nabla_\nu J - 4R_{\mu\nu}\nabla^2 J + 4R_{\alpha\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha J + 4R_{\alpha\mu}\nabla_\nu\nabla^\alpha J \\
 & - 4R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J - 4R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J \quad (6.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SH4 = & 2g_{\mu\nu}\nabla^2 R - 2\nabla_\mu\nabla_\nu R - \nabla^2 R_{\mu\nu} + 4\nabla_\mu\nabla^\alpha R_{\alpha\nu} + 4\nabla_\nu\nabla^\alpha R_{\alpha\mu} \\
 & - 4g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma R_{\rho\sigma} - 4\nabla^\rho\nabla^\sigma R_{\mu\rho\sigma\nu} \quad (6.21)
 \end{aligned}$$

Sử dụng một số đồng nhất thức (identity) thu được từ đồng nhất thức Bianchi như sau

$$\nabla^\rho R_{\rho\tau\mu\nu} = \nabla_\mu R_{\nu\tau} - \nabla_\nu R_{\mu\tau}, \quad (6.22)$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\nabla_\mu R \quad (6.23)$$

$$\nabla_\rho R^{\rho\mu} = \frac{1}{2}\nabla^\mu R \quad (6.24)$$

$$\nabla^\rho\nabla^\sigma R_{\mu\rho\nu\sigma} = \nabla^2 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu R + R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} - R^\rho{}_\mu R_{\nu\rho} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned}
 \nabla^\rho\nabla_\mu R_{\rho\nu} + \nabla^\rho\nabla_\nu R_{\rho\mu} = & \frac{1}{2}(\nabla_\mu\nabla_\nu R + \nabla_\nu\nabla_\mu R) - 2R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} + 2R^\rho{}_\mu R_{\nu\rho} \\
 & \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_\rho\nabla_\sigma R^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\square R \quad (6.27)$$

ta có thể viết lại $SH4$ như sau

$$\begin{aligned}
 SH4 = & 2g_{\mu\nu}\nabla^2 R - 2\nabla_\mu\nabla_\nu R - 4\nabla^2 R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu\nabla_\nu R + 2\nabla_\nu\nabla_\mu R - 4g_{\mu\nu}\frac{1}{2}\square R \\
 & - 4(-\nabla^2 R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu R - R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} + R^\rho{}_\mu R_{\nu\rho}) \\
 = & 4R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} - 4R^\rho{}_\mu R_{\nu\rho}. \quad (6.28)
 \end{aligned}$$

Hệ quả là $SH2$ có dạng

$$\begin{aligned}
 SH2 = & SH3 + J(4R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} - 4R^\rho{}_\mu R_{\nu\rho}) \\
 = & 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2 J - 2R\nabla_\mu\nabla_\nu J - 4R_{\mu\nu}\nabla^2 J + 4R_{\alpha\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha J + 4R_{\alpha\mu}\nabla_\nu\nabla^\alpha J \\
 & - 4R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J - 4R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J + 4JR_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} - 4JR^\rho{}_\mu R_{\nu\rho}. \quad (6.29)
 \end{aligned}$$

Do đó ta thu được

$$\begin{aligned}
 J\delta\mathcal{G} &= \delta g^{\mu\nu} (SH1 + SH2) \\
 &= \delta g^{\mu\nu} \left[2RR_{\mu\nu}J + 8R^{\alpha\beta}R_{\alpha\nu\mu\beta}J + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_{\nu}^{\rho\sigma\tau}J + 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2J \right. \\
 &\quad - 2R\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}J - 4R_{\mu\nu}\nabla^2J + 4R_{\alpha\nu}\nabla_{\mu}\nabla^{\alpha}J + 4R_{\alpha\mu}\nabla_{\nu}\nabla^{\alpha}J \\
 &\quad \left. - 4R^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}J - 4R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma}J + 4JR_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} - 4JR_{\mu}^{\rho}R_{\nu\rho} \right], \tag{6.30}
 \end{aligned}$$

trong biểu thức này ta xét

$$\begin{aligned}
 R^{\alpha\beta}R_{\alpha\nu\mu\beta}J &= R^{\rho\sigma}R_{\rho\nu\mu\sigma}J = R_{\mu\sigma\rho\nu}R^{\rho\sigma}J \\
 &= -R_{\mu\sigma\nu\rho}R^{\rho\sigma}J = -R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma}J \\
 &= -R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma}J, \tag{6.31}
 \end{aligned}$$

dẫn đến

$$\begin{aligned}
 J\delta\mathcal{G} &= \delta g^{\mu\nu} \left[(2RR_{\mu\nu}J - 4R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma}J + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_{\nu}^{\rho\sigma\tau}J - 4R_{\mu}^{\rho}R_{\rho\nu}J) \right. \\
 &\quad + (2Rg_{\mu\nu}\nabla^2J - 2R\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}J - 4R_{\mu\nu}\nabla^2J + 4R_{\alpha\nu}\nabla_{\mu}\nabla^{\alpha}J + 4R_{\alpha\mu}\nabla_{\nu}\nabla^{\alpha}J \\
 &\quad \left. - 4R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma}J - 4R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma}J) \right]. \tag{6.32}
 \end{aligned}$$

phương trình (6.4) được biểu diễn như sau

$$\begin{aligned}
 \delta S_2 &= \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}R_{\mu\nu} - \frac{\omega}{2}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi + \frac{1}{8}J'\mathcal{G} \left(\frac{\omega}{2}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi \right) \right. \\
 &\quad - \frac{1}{8}((2RR_{\mu\nu}J - 4R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma}J + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_{\nu}^{\rho\sigma\tau}J - 4R_{\mu}^{\rho}R_{\rho\nu}J) \\
 &\quad + 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2J - 2R\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}J - 4R_{\mu\nu}\nabla^2J + 4R_{\alpha\nu}\nabla_{\mu}\nabla^{\alpha}J + 4R_{\alpha\mu}\nabla_{\nu}\nabla^{\alpha}J \\
 &\quad \left. - 4R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma}J - 4R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma}J) \right] \tag{6.33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \delta S_1 + \delta S_2 \\
 &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} + \frac{\omega}{4}g_{\mu\nu}\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi + g_{\mu\nu}\frac{V(\phi)}{2} + g_{\mu\nu}\frac{J}{16}\mathcal{G} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2}R_{\mu\nu} - \frac{\omega}{2}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi + \frac{1}{8}J'\mathcal{G} \left(\frac{\omega}{2}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi \right) \\
 &\quad - \frac{1}{8}((2RR_{\mu\nu}J - 4R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma}J + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_{\nu}^{\rho\sigma\tau}J - 4R_{\mu}^{\rho}R_{\rho\nu}J) \\
 &\quad + 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2J - 2R\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}J - 4R_{\mu\nu}\nabla^2J + 4R_{\alpha\nu}\nabla_{\mu}\nabla^{\alpha}J + 4R_{\alpha\mu}\nabla_{\nu}\nabla^{\alpha}J \\
 &\quad \left. - 4R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma}J - 4R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma}J) \right]. \tag{6.34}
 \end{aligned}$$

Áp dụng nguyên lý tác dụng tối thiểu $\delta S = 0$ cho bất kỳ $\delta g^{\mu\nu}$ dẫn đến

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} + \frac{\omega}{4}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + g_{\mu\nu}\frac{J}{16}\mathcal{G} \\
&\quad + \frac{1}{2}R_{\mu\nu} - \frac{\omega}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{8}J'\mathcal{G}\left(\frac{\omega}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \\
&\quad - \frac{1}{8}\left[2RR_{\mu\nu}J - 4R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma}J + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_\nu{}^{\rho\sigma\tau}J - 4R^\rho{}_\mu R_{\rho\nu}J\right. \\
&\quad + 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2J - 2R\nabla_\mu\nabla_\nu J - 4R_{\mu\nu}\nabla^2J + 4R_{\alpha\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha J + 4R_{\alpha\mu}\nabla_\nu\nabla^\alpha J \\
&\quad \left.- 4R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J - 4R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J\right] \\
&= G_{\mu\nu} + \frac{J}{4}\left(\frac{1}{2}\mathcal{G}g_{\mu\nu} - 2RR_{\mu\nu} + 4R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} - 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_\nu{}^{\rho\sigma\tau} + 4R^\rho{}_\mu R_{\rho\nu}\right) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\nabla^2J + \frac{R}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu J + R_{\mu\nu}\nabla^2J - R_{\alpha\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha J - R_{\alpha\mu}\nabla_\nu\nabla^\alpha J\right. \\
&\quad \left.+ R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J + R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J\right) \\
&\quad - \omega\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{\omega}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + \frac{\omega}{8}J'\mathcal{G}(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi). \tag{6.35}
\end{aligned}$$

Sử dụng đồng nhất thức trong không thời gian 4 chiều cho số hạng Gauss-Bonnet $\mathcal{G}$ có dạng

$$\frac{1}{2}\mathcal{G}g_{\mu\nu} = 2RR_{\mu\nu} - 4R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_\nu{}^{\rho\sigma\tau} - 4R^\rho{}_\mu R_{\rho\nu}. \tag{6.36}$$

Hiển nhiên, khi $J(X)$ không xuất hiện trong không thời gian 4 chiều số hạng Gauss-Bonnet tự động biến mất.

Cuối cùng, Phương trình trường hấp dẫn có dạng sau

$$\begin{aligned}
0 &= G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\nabla^2J + \frac{R}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu J + R_{\mu\nu}\nabla^2J - R_{\alpha\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha J - R_{\alpha\mu}\nabla_\nu\nabla^\alpha J \\
&\quad + R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J + R_{\mu\rho\sigma\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J \\
&\quad - \omega\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{\omega}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + \frac{\omega}{8}J'G(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi). \tag{6.37}
\end{aligned}$$

với $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ là Einstein tensor.

Mặt khác lấy biến phân tác dụng theo biến trường ϕ cho ta phương trình chuyển động của trường vô hướng

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \hat{\mathcal{L}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} - \frac{\omega}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{J(X)}{8}\mathcal{G} \right], \tag{6.38}$$

trong đó $\hat{\mathcal{L}}$ có dạng

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\hat{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} - \frac{\omega}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{J(X)}{8}\mathcal{G} \right], \tag{6.39}$$

Phương trình Euler-Lagrange có dạng

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) = 0, \quad (6.40)$$

chúng ta có thể tính toán từng số hạng như sau

$$\bullet \quad \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \phi} = 0 \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} &= \frac{\partial X}{\partial (\nabla_\mu \phi)} - \frac{1}{8} \mathcal{G} \frac{\partial J}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = \frac{\partial X}{\partial (\nabla_\mu \phi)} - \frac{1}{8} \mathcal{G} \frac{\partial J}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{8} \mathcal{G} J' \right) \frac{\partial X}{\partial (\nabla_\mu \phi)}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad -\nabla_\mu \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) &= -\nabla_\mu \left[\left(1 - \frac{1}{8} \mathcal{G} J' \right) \frac{\partial X}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right] \\ &= -\nabla_\mu \left(1 - \frac{1}{8} \mathcal{G} J' \right) \frac{\partial X}{\partial (\nabla_\mu \phi)} - \left(1 - \frac{1}{8} \mathcal{G} J' \right) \nabla_\mu \left(\frac{\partial X}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right), \end{aligned} \quad (6.43)$$

với

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial (\nabla_\mu \phi)} &= \frac{\partial \left(-\frac{\omega}{2} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi \right)}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = -\frac{\omega}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial (\nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi)}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \\ &= -\frac{\omega}{2} g^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial (\nabla_\alpha \phi)}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \nabla_\beta \phi + \frac{\partial (\nabla_\beta \phi)}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \nabla_\alpha \phi \right] \\ &= -\frac{\omega}{2} g^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\mu \nabla_\beta \phi - \frac{\omega}{2} g^{\alpha\beta} \delta_\beta^\mu \nabla_\alpha \phi \\ &= -\omega g^{\alpha\mu} \nabla_\alpha \phi = -\omega \nabla^\mu \phi, \end{aligned} \quad (6.44)$$

khi đó

$$\begin{aligned} -\nabla_\mu \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) &= -\nabla_\mu \left(1 - \frac{1}{8} \mathcal{G} J' \right) (-\omega) \nabla^\mu \phi - \left(1 - \frac{1}{8} \mathcal{G} J' \right) \nabla_\mu [(-\omega) \nabla^\mu \phi] \\ &= \omega \nabla_\mu \left(1 - \frac{1}{8} \mathcal{G} J' \right) \nabla^\mu \phi + \omega \left(1 - \frac{1}{8} \mathcal{G} J' \right) \nabla_\mu \nabla^\mu \phi \\ &= -\frac{\omega}{8} \mathcal{G} \nabla_\mu (J') \nabla^\mu \phi - \frac{\omega}{8} J' \nabla_\mu (\mathcal{G}) \nabla^\mu \phi + \omega \left(1 - \frac{1}{8} \mathcal{G} J' \right) \nabla_\mu \nabla^\mu \phi. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Khi đó phương trình chuyển động của trường vô hướng có dạng

$$\omega \left(1 - \frac{1}{8} \mathcal{G} J' \right) \square \phi - \frac{\omega}{8} \mathcal{G} \nabla_\mu (J') \nabla^\mu \phi - \frac{\omega}{8} J' \nabla_\mu (\mathcal{G}) \nabla^\mu \phi = 0. \quad (6.46)$$

6.2 Phương trình trường trong không thời gian phẳng đồng nhất đẳng hướng

Ta xét các phương trình chuyển động (6.37) và (4.16) cho metric phẳng FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + \exp[2\alpha(t)](dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (6.47)$$

Các ký hiệu Christoffel khác không có dạng

$$\Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} = g_{11}\dot{\alpha}, \quad \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{30} = \dot{\alpha}. \quad (6.48)$$

Các thành phần khác không của Riemann tensor, $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ có dạng

$$R^0_{101} = R^0_{202} = R^0_{303} = g_{11}(\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2), \quad (6.49)$$

$$R^1_{010} = R^2_{020} = R^3_{030} = -\ddot{\alpha} - \dot{\alpha}^2, \quad (6.50)$$

$$\delta^i_k \delta^j_l R^i_{jkl} = g_{11}\dot{\alpha}^2, \quad (6.51)$$

với các chỉ số latin biểu thị theo không gian $i, j, k, l = 1 \rightarrow 3$. Với Ricci tensor, $R_{\mu\nu} \equiv R^\rho_{\mu\rho\nu}$ có dạng

$$R_{00} = -3(\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}), \quad (6.52)$$

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = g_{11}(3\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}). \quad (6.53)$$

Cuối cùng Ricci Scalar có dạng

$$R = 6(2\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}), \quad (6.54)$$

Từ đó các thành phần khác không của Einstein tensor, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ là

$$G_{00} = 3\dot{\alpha}^2, \quad (6.55)$$

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = -g_{11}(3\dot{\alpha}^2 + 2\ddot{\alpha}), \quad (6.56)$$

Dạng tường minh của số hạng Gauss-Bonnet có dạng

$$\mathcal{G} = 24\dot{\alpha}^2(\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}) \quad (6.57)$$

Phương trình trường hấp dẫn (6.37) trở thành

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= (R_{\mu\rho\nu\sigma} - R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}) \nabla^\rho \nabla^\sigma J(X) \\ &\quad - G_{\mu\nu} \nabla^2 J(X) - \frac{1}{2} R \nabla_\mu \nabla_\nu J(X) + R_{\rho\nu} \nabla_\mu \nabla^\rho J(X) + R_{\rho\mu} \nabla_\nu \nabla^\rho J(X) \\ &\quad - \frac{\omega}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + \omega \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\omega}{8} J' \mathcal{G} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi), \end{aligned} \quad (6.58)$$

mỗi số hạng được tính toán cụ thể như sau

$$\begin{aligned}
1^{\text{st}}\text{term} &= R_{\mu\rho\nu\sigma}\nabla^\rho\nabla^\sigma J(X) = R_{\rho\mu\sigma\nu}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta J(X) \\
&= R^\alpha_{\mu\sigma\nu}g^{\sigma\beta}\left(\partial_\alpha\partial_\beta J(X) - \partial_\gamma J(X)\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\right), \\
2^{\text{nd}}\text{term} &= -R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma J(X) = -R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}\left(\partial_\alpha\partial_\beta J(X) - \partial_\gamma J(X)\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\right), \\
3^{\text{rd}}\text{term} &= -G_{\mu\nu}\square J(X) = -G_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha J(X) = -G_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\partial_\beta J(X) - \partial_\gamma J(X)\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\right), \\
4^{\text{th}}\text{term} &= -\frac{1}{2}R\nabla_\mu\nabla_\nu J(X) = -\frac{1}{2}R\left(\partial_\mu\partial_\nu J(X) - \partial_\gamma J(X)\Gamma^\gamma_{\mu\nu}\right), \\
5^{\text{th}}\text{term} &= R_{\rho\nu}\nabla_\mu\nabla^\rho J(X) = R_{\rho\nu}g^{\rho\alpha}\nabla_\mu\nabla_\alpha J(X) = R_{\rho\nu}g^{\rho\alpha}\left(\partial_\mu\partial_\alpha J(X) - \partial_\gamma J(X)\Gamma^\gamma_{\alpha\mu}\right), \\
6^{\text{th}}\text{term} &= R_{\rho\mu}\nabla_\nu\nabla^\rho J(X) = R_{\rho\mu}g^{\rho\alpha}\nabla_\nu\nabla_\alpha J(X) = R_{\rho\mu}g^{\rho\alpha}\left(\partial_\nu\partial_\alpha J(X) - \partial_\gamma J(X)\Gamma^\gamma_{\alpha\nu}\right), \\
7^{\text{th}}\text{term} &= -\frac{\omega}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi = -\frac{\omega}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi, \\
8^{\text{th}}\text{term} &= \omega\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi, \\
9^{\text{th}}\text{term} &= -\frac{\omega}{8}J'\mathcal{G}(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi).
\end{aligned}$$

Tổng thành phần khác 0 có dạng

Đầu tiên thành phần 00

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \left(3g^{11}R^1_{010}\Gamma^0_{11} - 3R_{11}g_{00}g^{11}g^{11}\Gamma^0_{11} - G_{00}3\dot{\alpha}\right)(-j) \\
&+ \left(-g^{00}R_{00} + G_{00} + 2R_{00}g^{00} - \frac{1}{2}Rg_{00}g^{00}\right)\ddot{j} + \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{\omega}{8}J'G\dot{\phi}^2 \\
&= -3\dot{\alpha}^3(-j) + \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - \frac{\omega}{8}J'\mathcal{G}\dot{\phi}^2,
\end{aligned} \tag{6.59}$$

và

$$\dot{\alpha}^2 = \dot{\alpha}^3j + \frac{\omega}{6}\dot{\phi}^2 - \frac{\omega}{24}J'\mathcal{G}\dot{\phi}^2, \tag{6.60}$$

Và thành phần 11(22, 33) có dạng

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \left(g^{00}R^0_{101} - g_{11}g^{00}g^{00}R_{00} + G_{11}\right)(\ddot{j}) \\
&+ \left(2g^{11}R^2_{121}\Gamma^0_{11} - 3g_{11}g^{11}g^{11}R_{11}\Gamma^0_{11} - 3G_{11}\Gamma^0_{11}\right. \\
&\quad \left.+ 2R_{11}g^{11}\Gamma^0_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11}g^{11}\Gamma^0_{11}\right)(-j) + \frac{\omega}{2}g_{11}\dot{\phi}^2 \\
&\Rightarrow -(3\dot{\alpha}^2 + 2\ddot{\alpha}) = -\dot{\alpha}^2\ddot{j} - 2\dot{\alpha}(\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha})j + \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2.
\end{aligned} \tag{6.61}$$

Như vậy ta thu được

$$\dot{\alpha}^2 = \dot{\alpha}^3j + \frac{\omega}{6}\dot{\phi}^2 - \frac{\omega}{24}J'\mathcal{G}\dot{\phi}^2, \tag{6.62}$$

$$3\dot{\alpha}^2 + 2\ddot{\alpha} = \dot{\alpha}^2\ddot{j} + 2\dot{\alpha}(\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha})j - \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2, \tag{6.63}$$

$$-\left[1 - \frac{1}{8}J'\mathcal{G}\right]\ddot{\phi} = 3\dot{\alpha}\left[1 - \frac{1}{8}J'\mathcal{G}\right]\dot{\phi} - \frac{1}{8}\left(\mathcal{G}\frac{\partial(J')}{\partial t} + J'\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}\right)\dot{\phi}. \tag{6.64}$$

Nghiệm lạm phát theo quy luật lũy thừa có dạng

$$\alpha = \zeta \log(t); \quad \phi = \xi \log(t) + \phi_0. \quad (6.65)$$

Với hàm ghép được xét như sau

$$J(X) = \lambda X^n. \quad (6.66)$$

Từng số hạng được tính toán cụ thể như sau

- $\dot{\alpha} = \zeta t^{-1} \rightarrow \ddot{\alpha} = -\zeta t^{-2},$
- $\dot{\phi} = \xi t^{-1} \rightarrow \ddot{\phi} = -\xi t^{-2},$
- $J(X) = \lambda X^n \rightarrow J = \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} = J' \dot{X},$
- $J' = \frac{\partial J}{\partial X} = \lambda n X^{n-1} = J_0 n \left(\frac{\omega}{2} \dot{\phi}^2\right)^{n-1} = \lambda n \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1} \xi^{2n-2} t^{-2n+2},$
- $\frac{\partial J'}{\partial t} = \lambda n(-2n+2) \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1} \xi^{2n-2} t^{-2n+1}$
- $X = -\frac{\omega}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = \frac{\omega}{2} \dot{\phi}^2 \rightarrow \dot{X} = \frac{\partial X}{\partial t} = \omega \dot{\phi} \ddot{\phi} = -\omega \xi^2 t^{-3},$
- $\dot{J} = J' \dot{X} = -\lambda n \xi^{2n} \omega \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1} t^{-2n-1},$
- $\ddot{J} = \lambda n(2n+1) \omega \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1} \xi^{2n} t^{-2n-2}.$

Xét từng số hạng trong phương trình (6.62)

$$\dot{\alpha}^2 = \dot{\alpha}^3 \dot{J} + \frac{\omega}{6} \dot{\phi}^2 - \frac{\omega}{24} J' \mathcal{G} \dot{\phi}^2, \quad (6.67)$$

$$SH1 = \dot{\alpha}^2 = \zeta^2 t^{-2},$$

$$SH2 = \dot{\alpha}^3 \dot{J} = \zeta^3 t^{-3} (-\lambda) n \xi^{2n} \omega^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} t^{2n-1} \stackrel{n \equiv -1}{=} (4\lambda \omega^{-1} \xi^{-2}) \zeta^3 t^{-2},$$

$$SH3 = \frac{\omega}{6} \dot{\phi}^2 = \frac{\omega}{6} \xi^2 t^{-2},$$

$$SH5 = -\frac{\omega}{24} J' \mathcal{G} \dot{\phi}^2 = -\frac{\omega}{24} J' \dot{\phi}^2 \times 24 \dot{\alpha}^2 (\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}) \stackrel{n \equiv -1}{=} (4\lambda \omega^{-1} \xi^{-2}) \zeta^2 (\zeta^2 - \zeta) t^{-2}.$$

Khi đó phương trình này được biểu thị như sau

$$\zeta^2 = 4\lambda \omega^{-1} \xi^{-2} \zeta^4 + \frac{\omega \xi^2}{6}. \quad (6.68)$$

Tiếp theo ta xét từng thành phần riêng biệt của phương trình(6.63)

$$(2\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2) = \dot{\alpha}^2 \ddot{J} + 2\dot{\alpha}(\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha})\dot{J} - \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2, \quad (6.69)$$

$$SH1 = 2\ddot{\alpha} = -2\zeta t^{-2},$$

$$SH2 = 3\dot{\alpha}^2 = 3\zeta^2 t^{-2}$$

$$SH3 = \dot{\alpha}^2 \ddot{J} = \zeta^2 t^{-2} \lambda n(2n+1) \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1} \xi^{2n} t^{-2n-2} \omega = (4\lambda \omega^{-1} \xi^{-2}) \zeta^2 t^{-2},$$

$$SH4 = 2\dot{J}\dot{\alpha}^3 = 2\dot{J}\zeta^3 t^{-2} = -2\lambda n \xi^{2n} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1} \omega t^{-2n-1} \zeta^3 t^{-3} \\ \stackrel{n=-1}{=} 2(4\lambda \omega^{-1} \xi^{-2}) \zeta^3 t^{-2},$$

$$SH5 = 2\dot{J}\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = -2\lambda n \xi^{2n} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1} \omega t^{-2n-1} \zeta t^{-1} (-\zeta) t^{-2} \\ \stackrel{n=-1}{=} -2(4\lambda \omega^{-1} \xi^{-2}) \zeta^2 t^{-2},$$

$$SH6 = -\frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 = -\frac{\omega}{2}\xi^2 t^{-2},$$

dẫn đến

$$2\zeta - 3\zeta^2 + 2(4\lambda \omega^{-1} \xi^{-2})\zeta^3 - (4\lambda \omega^{-1} \xi^{-2})\zeta^2 - \frac{\omega}{2}\xi^2 = 0. \quad (6.70)$$

Tùng số hạng trong phương trình (6.64)

$$-\left[1 - \frac{1}{8}J'\mathcal{G}\right]\ddot{\phi} = 3\dot{\alpha}\left[1 - \frac{1}{8}J'\mathcal{G}\right]\dot{\phi} - \frac{1}{8}\left(\mathcal{G}\frac{\partial(J')}{\partial t} + J'\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}\right)\dot{\phi}. \quad (6.71)$$

Tương tự ta viết lại phương trình (6.64) như sau

$$(1 - 3\zeta)\left[\omega\xi^2 + 12\lambda\omega^{-1}\xi^{-2}\zeta^2(\zeta^2 - \zeta)\right] = 0. \quad (6.72)$$

Theo đó phương trình trường dưới dạng đại số có cùng bậc theo thời gian tức là t^{-2} là

$$-\zeta^2 + 4\lambda\omega^{-1}\xi^{-2}\zeta^4 + \frac{\omega\xi^2}{6} = 0, \quad (6.73)$$

$$2\zeta - 3\zeta^2 + 4\lambda\omega^{-1}\xi^{-2}(2\zeta^3 - \zeta^2) - \frac{w}{2}\xi^2 = 0, \quad (6.74)$$

$$(1 - 3\zeta)\left[\omega\xi^2 + 12\lambda\omega^{-1}\xi^{-2}\zeta^2(\zeta^2 - \zeta)\right] = 0. \quad (6.75)$$

Từ phương trình (6.75) ta thu được

$$\omega\xi^2 = -12\lambda\omega^{-1}\xi^{-2}\zeta^2(\zeta^2 - \zeta), \quad (6.76)$$

Khi đó thay biểu thức này vào phương trình (6.73) có dạng

$$\omega\xi^2 = 2\zeta\lambda(\zeta + 1), \quad (6.77)$$

tương tự với phương trình (6.74)

$$\zeta^2(\lambda + 3) + \zeta(2\lambda - 3) + \lambda = 0 \quad (6.78)$$

Đây là phương trình bậc hai cho ζ giải phương trình này ta sẽ thu được nghiệm tương ứng như sau

$$\zeta_{\pm} = \frac{3 - 2\lambda \pm \sqrt{3(3 - 8\lambda)}}{2(3 + \lambda)}. \quad (6.79)$$

6.3 Code Mathematica kiểm tra chéo các tính toán

```

In[1]:= Clear["Global`*"];
 $\alpha[t] = \zeta \text{Log}[t];$ 
 $\sigma[t] = \eta \text{Log}[t]; \phi[t] = \phi_0 + \xi \text{Log}[t];$ 
 $\alpha'[t] = \partial_t \alpha[t];$ 
 $\alpha''[t] = \partial_t \partial_t (\alpha[t]);$ 
 $\phi'[t] = \partial_t (\phi[t]);$ 
 $\phi''[t] = \partial_t \partial_t (\phi[t]);$ 
 $\sigma'[t] = \partial_t (\sigma[t]);$ 
 $\sigma''[t] = \partial_t \partial_t (\sigma[t]);$ 
 $X[t] = w \frac{\phi'[t]^2}{2};$ 
 $X'[t] = \partial_t (X[t]);$ 
 $X''[t] = \partial_t \partial_t (X[t]);$ 
 $h[\phi[t]] = \text{Simplify}[h_0 E^{\gamma \phi[t]}];$ 
 $dh = \partial_t (h[\phi[t]]);$ 
 $Dh[\phi] = \text{Simplify}[\gamma h_0 E^{\gamma \phi[t]}];$ 
 $f[\phi[t]] = \text{Simplify}[f_0 E^{\lambda \phi[t]}];$ 
 $df = \partial_t (f[\phi[t]]);$ 
 $Df[\phi] = \text{Simplify}[\lambda f_0 E^{\lambda \phi[t]}];$ 
 $f_0 = \frac{u}{E^{\lambda \phi_0}};$ 
 $p = \text{Sqrt}[\nu f_0^2 E^{2 \rho \phi_0}];$ 
 $n = -1; \lambda = 0;$ 
 $GB1 = 24 (\alpha'[t]^2) (\alpha''[t] + \alpha'[t]^2);$ 
 $J[t] = f[\phi[t]] * X[t]^n; Jx[t] = n f[\phi[t]] * X[t]^{n-1};$ 
 $dJx = \partial_t (Jx[t]);$ 
 $J'[t] = \partial_t (J[t]);$ 
 $J''[t] = \partial_t \partial_t (J[t]);$ 

```

2 | KGB-01.nb

$$\begin{aligned}
\text{In[10]:= } \text{Eq1} &= \alpha'[\mathbf{t}]^2 == \frac{w \phi'[\mathbf{t}]^2}{6} + \text{Simplify}[\alpha'[\mathbf{t}]^3 * J'[\mathbf{t}]] - \text{Simplify}\left[\frac{w}{24} * Jx[\mathbf{t}] * GB1 * \phi'[\mathbf{t}]^2\right] \\
\text{Eq2} &= 2 \alpha''[\mathbf{t}] == -3 \alpha'[\mathbf{t}]^2 + \text{Simplify}[\alpha'[\mathbf{t}]^2 * J''[\mathbf{t}]] + \\
&\quad \text{Simplify}[2 \alpha'[\mathbf{t}] (\alpha'[\mathbf{t}]^2 + \alpha''[\mathbf{t}]) J'[\mathbf{t}]] - \text{Simplify}\left[\frac{w}{2} \phi'[\mathbf{t}]^2\right] \\
\text{Eq3} &= w \text{Simplify}\left[\left(1 - \frac{Jx[\mathbf{t}] GB1}{8}\right) (\phi''[\mathbf{t}] + 3 \alpha'[\mathbf{t}] \phi'[\mathbf{t}])\right] == \\
&\quad - \text{Simplify}\left[\frac{Df[\phi]}{8} X[\mathbf{t}]^n GB1\right] + w \text{Simplify}\left[\frac{(\partial_t(GB1) Jx[\mathbf{t}] + dJx * GB1)}{8} * \phi'[\mathbf{t}]\right] \\
\text{Eq4} &= \text{Simplify}\left[\frac{(\partial_t(GB1) f[\phi[\mathbf{t}]] + df * GB1)}{8} * \phi'[\mathbf{t}]\right];
\end{aligned}$$

$$\text{Out[10]= } \frac{\xi^2}{t^2} == \frac{4 u \xi^3}{t^2 w \xi^2} + \frac{4 u (-1 + \xi) \xi^3}{t^2 w \xi^2} + \frac{w \xi^2}{6 t^2}$$

$$\text{Out[11]= } -\frac{2 \xi}{t^2} == -\frac{3 \xi^2}{t^2} + \frac{4 u \xi^2}{t^2 w \xi^2} + \frac{8 u (-1 + \xi) \xi^2}{t^2 w \xi^2} - \frac{w \xi^2}{2 t^2}$$

$$\text{Out[12]= } \frac{(-1 + 3 \xi) (12 u (-1 + \xi) \xi^3 + w^2 \xi^4)}{t^2 w \xi^3} == 0$$

$$\begin{aligned}
\text{In[14]:= } \xi &= \text{Sqrt}[x/w]; \chi = 2 \sqrt{3} \sqrt{u \xi^3 - u \xi^4}; \\
A1 &= \xi^2 == \frac{4 u \xi^3}{w \xi^2} + \frac{4 u (-1 + \xi) \xi^3}{w \xi^2} + \frac{w \xi^2}{6} // \text{Simplify} \\
A2 &= -2 \xi == -3 \xi^2 + \frac{4 u \xi^2}{w \xi^2} + \frac{8 u (-1 + \xi) \xi^2}{w \xi^2} - \frac{w \xi^2}{2} // \text{Simplify} \\
A3 &= \frac{(-1 + 3 \xi) (12 u (-1 + \xi) \xi^3 + w^2 \xi^4)}{w \xi^3} == 0 // \text{Simplify} \\
&\text{Solve}[A1, \xi] \\
&\text{Solve}[A2, \xi]
\end{aligned}$$

$$\text{Out[15]= } \xi^2 == \frac{u \xi^3 (1 + \xi)}{\sqrt{3} \sqrt{-u (-1 + \xi) \xi^3}}$$

$$\text{Out[16]= } -2 \xi == \frac{1}{3} \xi^2 \left(-9 + \frac{\sqrt{3} u (-2 + \xi + 3 \xi^2)}{\sqrt{-u (-1 + \xi) \xi^3}} \right)$$

Out[17]= True

$$\text{Out[18]= } \left\{ \left\{ \xi \rightarrow \frac{3 - \sqrt{3} \sqrt{3 - 8 u} - 2 u}{2 (3 + u)} \right\}, \left\{ \xi \rightarrow \frac{3 + \sqrt{3} \sqrt{3 - 8 u} - 2 u}{2 (3 + u)} \right\} \right\}$$

$$\text{Out[19]= } \left\{ \left\{ \xi \rightarrow \frac{2}{3} \right\}, \left\{ \xi \rightarrow \frac{3 - \sqrt{3} \sqrt{3 - 8 u} - 2 u}{2 (3 + u)} \right\}, \left\{ \xi \rightarrow \frac{3 + \sqrt{3} \sqrt{3 - 8 u} - 2 u}{2 (3 + u)} \right\} \right\}$$

6.4 Code Mathematica xét tính ổn định của mô hình bằng phương pháp động lực học

In[1]:=

1. Dynamical system equations for FLRW metric

In[2]:= **Clear**["Global`*"];

GB = $24 \alpha' [t] \left(\alpha' [t]^3 + \alpha' [t] \alpha'' [t] \right)$;

ρ_{DE} = $3 * ft * \alpha' [t]^3 + \frac{\omega}{2} \phi' [t]^2 - \frac{\omega}{8} z * \phi' [t]^2$;

P_{DE} = $-ftt * \alpha' [t]^2 - 2 * ft * \left(\alpha' [t]^3 + \alpha' [t] \alpha'' [t] \right) + \frac{1}{2} \omega \phi' [t]^2$;

2. Setting dimensionless variables

In[6]:= $\phi' [t] = x * \alpha' [t]$; $ft = \frac{y}{\alpha' [t]}$;

$\alpha'' [t] = \epsilon * \alpha' [t]^2$;

ftt = $dy - y * \epsilon$;

$\phi'' [t] = (dx + x \epsilon) \alpha' [t]^2$;

3. Dynamically system of equations

In[10]:= **Eq1** = $3 \alpha' [t]^2 == \rho_{DE}$ // **FullSimplify**

Eq2 = $-2 \alpha'' [t] == 3 \alpha' [t]^2 + P_{DE}$ // **FullSimplify**

Eq4 = $\left(1 - \frac{1}{8} z \right) (\phi'' [t] + 3 \alpha' [t] \times \phi' [t]) - \frac{1}{8} \phi' [t] dz \alpha' [t] == 0$ // **Simplify**

Solve[**Eq1**, **z**]

Out[10]= $(-24 + 24 y - x^2 (-4 + z) \omega) \alpha' [t] == 0$

Out[11]= $(-6 + 2 dy - 4 \epsilon + 2 y (2 + \epsilon) - x^2 \omega) \alpha' [t] == 0$

Out[12]= $(dx (-8 + z) + x (dz + (-8 + z) (3 + \epsilon))) \alpha' [t] == 0$

Out[13]= $\left\{ \left\{ z \rightarrow \frac{4 (-6 + 6 y + x^2 \omega)}{x^2 \omega} \right\} \right\}$

4. Solve the autonomous equations

2 | DS-01.nb

```

In[14]:= B0 = z + 96  $\frac{\lambda}{x^4}$  (1 +  $\epsilon$ ) == 0

(**The constrain for power law models J(X) =  $\lambda X^n$  and n=-1 **)
B1 = -6 + 2 dy - 4  $\epsilon$  + 2 y (2 +  $\epsilon$ ) -  $x^2 \omega$  == 0
B2 = dx (-8 + z) + x (dz + (-8 + z) (3 +  $\epsilon$ )) == 0
B3 = y == z  $\frac{x}{24 (1 + \epsilon)}$   $\omega$  (dx + x  $\epsilon$ );

Solve[{B0, B1, B2, B3}, {dx, dy, dz,  $\epsilon$ }] // Simplify

Out[14]= z +  $\frac{96 (1 + \epsilon) \lambda}{x^4}$  == 0

Out[15]= -6 + 2 dy - 4  $\epsilon$  + 2 y (2 +  $\epsilon$ ) -  $x^2 \omega$  == 0

Out[16]= dx (-8 + z) + x (dz + (-8 + z) (3 +  $\epsilon$ )) == 0

Out[18]= { {dx  $\rightarrow$  x +  $\frac{x^5 z}{96 \lambda} - \frac{x^3 y}{4 \lambda \omega}$ , dy  $\rightarrow$  1 - y +  $\frac{x^4 (-2 + y) z}{96 \lambda} + \frac{x^2 \omega}{2}$ ,
  dz  $\rightarrow$   $\frac{(-8 + z) (x^2 y - 12 \lambda \omega)}{4 \lambda \omega}$ ,  $\epsilon \rightarrow -1 - \frac{x^4 z}{96 \lambda}$  } }
```

5. Solving the dynamical system to find the fixed point

```

In[19]:=  $\epsilon = -1 - \frac{x^4 z}{96 \lambda}$ ; dz = 0;

C1 = 0 == x +  $\frac{x^5 z}{96 \lambda} - \frac{x^3 y}{4 \lambda \omega}$  // Simplify

C2 = 0 == 1 - y +  $\frac{x^4 (-2 + y) z}{96 \lambda} + \frac{x^2 \omega}{2}$  // Simplify

C3 = 0 ==  $\frac{(-8 + z) (x^2 y - 12 \lambda \omega)}{4 \lambda \omega}$  // Simplify

Solve[{C1, C2, C3}, {x, y, z}] // Simplify

Out[20]=  $\frac{x (-24 x^2 y + x^4 z \omega + 96 \lambda \omega)}{\lambda \omega} == 0$ 

Out[21]=  $\frac{x^4 (-2 + y) z}{\lambda} + 48 x^2 \omega == 96 (-1 + y)$ 

Out[22]=  $\frac{(-8 + z) (-x^2 y + 12 \lambda \omega)}{\lambda \omega} == 0$ 
```

$$\begin{aligned}
\text{Out[23]} = & \left\{ \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 1, z \rightarrow 8\}, \{x \rightarrow -6^{1/4} \lambda^{1/4}, y \rightarrow \sqrt{6} \sqrt{\lambda} \omega, z \rightarrow 8\}, \right. \\
& \{x \rightarrow -i 6^{1/4} \lambda^{1/4}, y \rightarrow -\sqrt{6} \sqrt{\lambda} \omega, z \rightarrow 8\}, \\
& \{x \rightarrow i 6^{1/4} \lambda^{1/4}, y \rightarrow -\sqrt{6} \sqrt{\lambda} \omega, z \rightarrow 8\}, \{x \rightarrow 6^{1/4} \lambda^{1/4}, y \rightarrow \sqrt{6} \sqrt{\lambda} \omega, z \rightarrow 8\}, \\
& \{x \rightarrow -\sqrt{\frac{3 - \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}}{\omega}}, y \rightarrow \frac{1}{6} \left(9 - \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}\right), z \rightarrow 8\}, \\
& \{x \rightarrow -\sqrt{\frac{3 - \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}}{\omega}}, y \rightarrow \frac{1}{2} \left(3 + \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}\right), z \rightarrow \frac{6 - 8 \lambda \omega^2 + 2 \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}}{\lambda \omega^2}\}, \\
& \{x \rightarrow \sqrt{\frac{3 - \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}}{\omega}}, y \rightarrow \frac{1}{6} \left(9 - \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}\right), z \rightarrow 8\}, \\
& \{x \rightarrow \sqrt{\frac{3 - \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}}{\omega}}, y \rightarrow \frac{1}{2} \left(3 + \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}\right), z \rightarrow \frac{6 - 8 \lambda \omega^2 + 2 \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}}{\lambda \omega^2}\}, \\
& \{x \rightarrow -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}}{\omega}}, y \rightarrow \frac{1}{6} \left(9 + \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}\right), z \rightarrow 8\}, \\
& \{x \rightarrow -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}}{\omega}}, y \rightarrow \frac{1}{2} \left(3 - \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}\right), z \rightarrow \frac{6 - 8 \lambda \omega^2 - 2 \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}}{\lambda \omega^2}\}, \\
& \{x \rightarrow \sqrt{\frac{3 + \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}}{\omega}}, y \rightarrow \frac{1}{6} \left(9 + \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}\right), z \rightarrow 8\}, \\
& \left. \{x \rightarrow \sqrt{\frac{3 + \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}}{\omega}}, y \rightarrow \frac{1}{2} \left(3 - \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}\right), z \rightarrow \frac{6 - 8 \lambda \omega^2 - 2 \sqrt{9 - 24 \lambda \omega^2}}{\lambda \omega^2}\} \right\}
\end{aligned}$$

6. Inflationary solution

perturbing the autonomous equations

4 | DS-01.nb

In[24]:= Clear["Global`*"];

$$\begin{aligned}
d\delta x[\alpha] &= \partial_{x[\alpha]} \left(x[\alpha] + \frac{x[\alpha]^5 z[\alpha]}{96 \lambda} - \frac{x[\alpha]^3 y[\alpha]}{4 \lambda \omega} \right) \delta x[\alpha] + \\
&\quad \partial_{y[\alpha]} \left(x[\alpha] + \frac{x[\alpha]^5 z[\alpha]}{96 \lambda} - \frac{x[\alpha]^3 y[\alpha]}{4 \lambda \omega} \right) \delta y[\alpha] + \partial_{z[\alpha]} \left(x[\alpha] + \frac{x[\alpha]^5 z[\alpha]}{96 \lambda} - \frac{x[\alpha]^3 y[\alpha]}{4 \lambda \omega} \right) \delta z[\alpha] \\
d\delta y[\alpha] &= \partial_{x[\alpha]} \left(1 - y[\alpha] + \frac{x[\alpha]^4 (-2 + y[\alpha]) z[\alpha]}{96 \lambda} + \frac{x[\alpha]^2 \omega}{2} \right) \delta x[\alpha] + \\
&\quad \partial_{y[\alpha]} \left(1 - y[\alpha] + \frac{x[\alpha]^4 (-2 + y[\alpha]) z[\alpha]}{96 \lambda} + \frac{x[\alpha]^2 \omega}{2} \right) \delta y[\alpha] + \\
&\quad \partial_{z[\alpha]} \left(1 - y[\alpha] + \frac{x[\alpha]^4 (-2 + y[\alpha]) z[\alpha]}{96 \lambda} + \frac{x[\alpha]^2 \omega}{2} \right) \delta z[\alpha] \\
d\delta z[\alpha] &= \partial_{x[\alpha]} \left(\frac{(-8 + z[\alpha]) (x[\alpha]^2 y[\alpha] - 12 \lambda \omega)}{4 \lambda \omega} \right) \delta x[\alpha] + \\
&\quad \partial_{y[\alpha]} \left(\frac{(-8 + z[\alpha]) (x[\alpha]^2 y[\alpha] - 12 \lambda \omega)}{4 \lambda \omega} \right) \delta y[\alpha] + \partial_{z[\alpha]} \left(\frac{(-8 + z[\alpha]) (x[\alpha]^2 y[\alpha] - 12 \lambda \omega)}{4 \lambda \omega} \right) \delta z[\alpha]
\end{aligned}$$

$$\text{Out[25]}= d\delta x[\alpha] == \left(1 - \frac{3 x[\alpha]^2 y[\alpha]}{4 \lambda \omega} + \frac{5 x[\alpha]^4 z[\alpha]}{96 \lambda} \right) \delta x[\alpha] - \frac{x[\alpha]^3 \delta y[\alpha]}{4 \lambda \omega} + \frac{x[\alpha]^5 \delta z[\alpha]}{96 \lambda}$$

Out[26]= dδy[α] ==

$$\left(\omega x[\alpha] + \frac{x[\alpha]^3 (-2 + y[\alpha]) z[\alpha]}{24 \lambda} \right) \delta x[\alpha] + \left(-1 + \frac{x[\alpha]^4 z[\alpha]}{96 \lambda} \right) \delta y[\alpha] + \frac{x[\alpha]^4 (-2 + y[\alpha]) \delta z[\alpha]}{96 \lambda}$$

$$\text{Out[27]}= d\delta z[\alpha] == \frac{x[\alpha] \times y[\alpha] (-8 + z[\alpha]) \delta x[\alpha]}{2 \lambda \omega} + \frac{x[\alpha]^2 (-8 + z[\alpha]) \delta y[\alpha]}{4 \lambda \omega} + \frac{(-12 \lambda \omega + x[\alpha]^2 y[\alpha]) \delta z[\alpha]}{4 \lambda \omega}$$

```

In[28]:=  $\omega = -1$ ;  $x[\alpha] = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{9 - 24\lambda * \omega^2}}{\omega}}$ ;  $y[\alpha] = \frac{1}{6} \left( 9 - \sqrt{9 - 24\lambda * \omega^2} \right)$ ;  $z[\alpha] = 8$ ;

d $\delta x[\alpha] ==$ 
Collect[FullSimplify[ $\left( 1 - \frac{3 x[\alpha]^2 y[\alpha]}{4 \lambda \omega} + \frac{5 x[\alpha]^4 z[\alpha]}{96 \lambda} \right) \delta x[\alpha] - \frac{x[\alpha]^3 \delta y[\alpha]}{4 \lambda \omega} + \frac{x[\alpha]^5 \delta z[\alpha]}{96 \lambda}$ ],
{ $\delta x[\alpha]$ ,  $\delta y[\alpha]$ ,  $\delta z[\alpha]$ }]

d $\delta y[\alpha] ==$  Collect[FullSimplify[ $\left( \omega x[\alpha] + \frac{x[\alpha]^3 (-2 + y[\alpha]) z[\alpha]}{24 \lambda} \right) \delta x[\alpha] +$ 
 $\left( -1 + \frac{x[\alpha]^4 z[\alpha]}{96 \lambda} \right) \delta y[\alpha] + \frac{x[\alpha]^4 (-2 + y[\alpha]) \delta z[\alpha]}{96 \lambda}$ ], { $\delta x[\alpha]$ ,  $\delta y[\alpha]$ ,  $\delta z[\alpha]$ }]

d $\delta z[\alpha] ==$  Collect[FullSimplify[ $\frac{x[\alpha] * y[\alpha] (-8 + z[\alpha]) \delta x[\alpha]}{2 \lambda \omega} +$ 
 $\frac{x[\alpha]^2 (-8 + z[\alpha]) \delta y[\alpha]}{4 \lambda \omega} + \frac{(-12 \lambda \omega + x[\alpha]^2 y[\alpha]) \delta z[\alpha]}{4 \lambda \omega}$ ], { $\delta x[\alpha]$ ,  $\delta y[\alpha]$ ,  $\delta z[\alpha]$ }]

Out[29]= d $\delta x[\alpha] == -\frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 6\lambda) \delta x[\alpha]}{\lambda} +$ 
 $\frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda})^{3/2} \delta y[\alpha]}{4 \lambda} - \frac{\sqrt{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 4\lambda) \delta z[\alpha]}{16 \lambda}$ 

Out[30]= d $\delta y[\alpha] == \frac{1}{3} \sqrt{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}} \delta x[\alpha] - \frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 6\lambda) \delta y[\alpha]}{2 \lambda} + \frac{1}{24} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}) \delta z[\alpha]$ 

Out[31]= d $\delta z[\alpha] == -\frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 8\lambda) \delta z[\alpha]}{2 \lambda}$ 

```

Exponential perturbation

6 | DS-01.nb

```
Clear["Global`*"];
```

$$\delta x[\alpha] = A_x e^{\tau \alpha}; \delta y[\alpha] = A_y e^{\tau \alpha}; \delta z[\alpha] = A_z e^{\tau \alpha};$$

$$d\delta x[\alpha] = \partial_\alpha \delta x[\alpha]; d\delta y[\alpha] = \partial_\alpha \delta y[\alpha]; d\delta z[\alpha] = \partial_\alpha \delta z[\alpha];$$

$$d\delta x[\alpha] == -\frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 6\lambda) \delta x[\alpha]}{\lambda} +$$

$$\frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda})^{3/2} \delta y[\alpha]}{4\lambda} - \frac{\sqrt{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 4\lambda) \delta z[\alpha]}{16\lambda}$$

$$d\delta y[\alpha] == \frac{1}{3} \sqrt{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}} \delta x[\alpha] - \frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 6\lambda) \delta y[\alpha]}{2\lambda} + \frac{1}{24} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}) \delta z[\alpha]$$

$$d\delta z[\alpha] == -\frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 8\lambda) \delta z[\alpha]}{2\lambda}$$

$$\text{Out[35]} = e^{\alpha \tau} \tau A_x == -\frac{e^{\alpha \tau} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 6\lambda) A_x}{\lambda} +$$

$$\frac{e^{\alpha \tau} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda})^{3/2} A_y}{4\lambda} - \frac{e^{\alpha \tau} \sqrt{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 4\lambda) A_z}{16\lambda}$$

$$\text{Out[36]} = e^{\alpha \tau} \tau A_y == \frac{1}{3} e^{\alpha \tau} \sqrt{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}} A_x - \frac{e^{\alpha \tau} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 6\lambda) A_y}{2\lambda} + \frac{1}{24} e^{\alpha \tau} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}) A_z$$

$$\text{Out[37]} = e^{\alpha \tau} \tau A_z == -\frac{e^{\alpha \tau} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 8\lambda) A_z}{2\lambda}$$

In[38]:= **Clear["Global`*"];**

$$A11 = -\frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 6\lambda)}{\lambda} - \tau;$$

$$A12 = \frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda})^{3/2}}{4\lambda};$$

$$A13 = -\frac{\sqrt{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 4\lambda)}{16\lambda};$$

$$A21 = \frac{1}{3} \sqrt{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}};$$

$$A22 = -\frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 6\lambda)}{2\lambda} - \tau;$$

$$A23 = \frac{1}{24} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda});$$

$$A31 = 0; A32 = 0; A33 = -\frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 8\lambda)}{2\lambda} - \tau;$$

mat = {{A11, A12, A13}, {A21, A22, A23}, {A31, A32, A33}};

mat // MatrixForm

A1 = Collect[Simplify[Det[mat]], \tau]

Out[43]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 6\lambda}{\lambda} - \tau & \frac{(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda})^{3/2}}{4\lambda} & -\frac{\sqrt{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 4\lambda)}{16\lambda} \\ \frac{1}{3} \sqrt{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}} & -\frac{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 6\lambda}{2\lambda} - \tau & \frac{1}{24} (-3 + \sqrt{9 - 24\lambda}) \\ 0 & 0 & -\frac{-3 + \sqrt{9 - 24\lambda} + 8\lambda}{2\lambda} - \tau \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Out[44]} = & \frac{54 - 18\sqrt{9 - 24\lambda} - 297\lambda + 75\sqrt{9 - 24\lambda}\lambda + 468\lambda^2 - 72\sqrt{9 - 24\lambda}\lambda^2 - 160\lambda^3}{2\lambda^3} + \\ & \frac{(15(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda})\lambda - 2(-81 + 17\sqrt{9 - 24\lambda})\lambda^2 - 112\lambda^3)\tau}{2\lambda^3} + \\ & \frac{(-4(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda})\lambda^2 - 26\lambda^3)\tau^2}{2\lambda^3} - \tau^3 \end{aligned}$$

In[45]:= **Clear["Global`*"];**

\lambda = -2.95;

$$\begin{aligned} & \frac{54 - 18\sqrt{9 - 24\lambda} - 297\lambda + 75\sqrt{9 - 24\lambda}\lambda + 468\lambda^2 - 72\sqrt{9 - 24\lambda}\lambda^2 - 160\lambda^3}{2\lambda^3} + \\ & \frac{(15(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda})\lambda - 2(-81 + 17\sqrt{9 - 24\lambda})\lambda^2 - 112\lambda^3)\tau}{2\lambda^3} + \\ & \frac{(-4(-3 + \sqrt{9 - 24\lambda})\lambda^2 - 26\lambda^3)\tau^2}{2\lambda^3} - \tau^3 \end{aligned}$$

Out[47]= -26.7986 - 26.8656 \tau - 8.97757 \tau^2 - \tau^3

8 | DS-01.nb

Numerical result

```

In[48]:= EQ[ω_, λ_, x0_, y0_, z0_] := {x'[α] == x[α] +  $\frac{x[α]^5 z[α]}{96 λ} - \frac{x[α]^3 y[α]}{4 λ ω}$ ,
      y'[α] == 1 - y[α] +  $\frac{x[α]^4 (-2 + y[α]) z[α]}{96 λ} + \frac{x[α]^2 ω}{2}$ ,
      z'[α] ==  $\frac{(-8 + z[α]) (x[α]^2 y[α] - 12 λ ω)}{4 λ ω}$ , x[0] == x0, y[0] == y0, z[0] == z0};

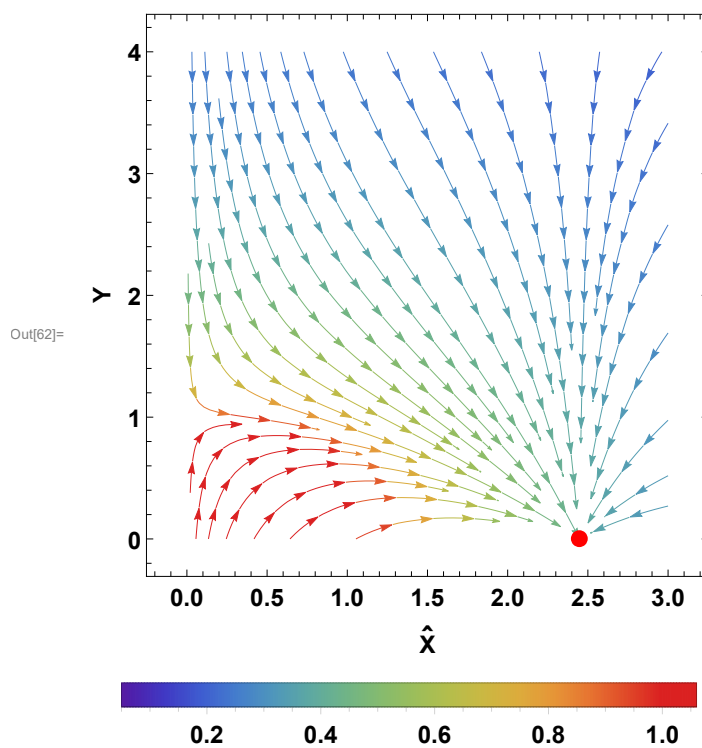
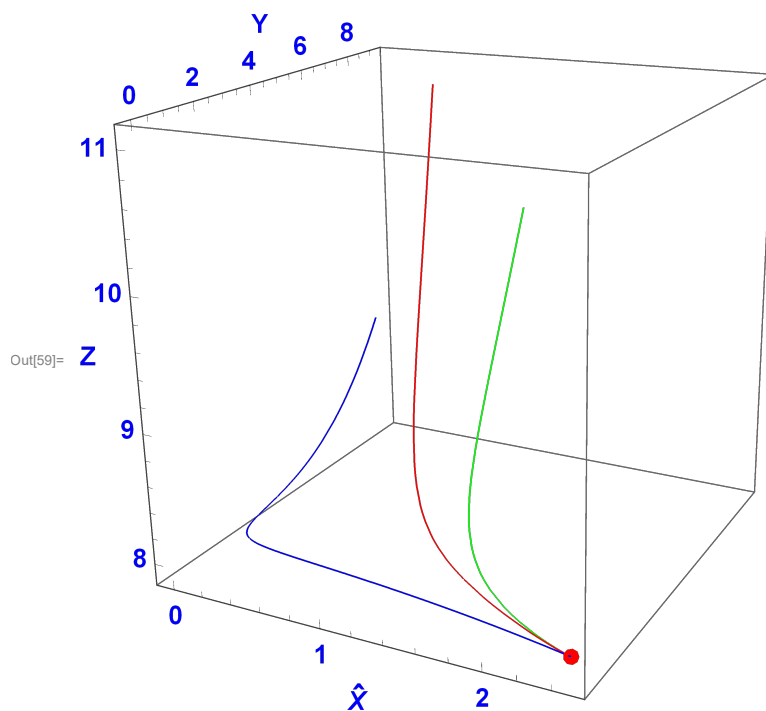
λ1 = -2.99; ω1 = -1;
s1 =  $\sqrt{\frac{3 - \sqrt{9 - 24 λ1 ω1^2}}{ω1}}$ ;
s2 =  $\frac{1}{6} \left( 9 - \sqrt{9 - 24 λ1 ω1^2} \right)$ ;
s3 = 8;
ans1 = NDSolve[EQ[ω1, λ1, 0.01, 8, 9], {x[α], y[α], z[α]}, {α, 0, 100}];
{xans1, yans1, zans1} = {x[α], y[α], z[α]} /. Flatten[ans1];
ans2 = NDSolve[EQ[ω1, λ1, 1, 9, 10], {x[α], y[α], z[α]}, {α, 0, 100}];
{xans2, yans2, zans2} = {x[α], y[α], z[α]} /. Flatten[ans2];
ans3 = NDSolve[EQ[ω1, λ1, 0.5, 8, 11], {x[α], y[α], z[α]}, {α, 0, 100}];
{xans3, yans3, zans3} = {x[α], y[α], z[α]} /. Flatten[ans3];

graphxyz1 = Show[ParametricPlot3D[
  {{xans1, yans1, zans1}, {xans2, yans2, zans2}, {xans3, yans3, zans3}}, {α, 0, 100},
  AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, PlotStyle → {{Thickness[0.002], Blue},
    {Thickness[0.002], Green}, {Thickness[0.002], Red}}, BoxRatios → {0.75, 0.75, 0.75},
  AspectRatio → Automatic, PlotRange → All, LabelStyle → Directive[Blue, Bold, 15]
  , Graphics3D[{PointSize[0.025], Red, Point[{s1, s2, s3}]}]]

λ = λ1; x0 = s1; y0 = s2;

bar =
  BarLegend[{{(ColorData["Rainbow", #] &), {1 / (2 Pi Sqrt[3^2]), 1 / (2 Pi Sqrt[0.15^2])}}}}];
StreamPlot[ $\left\{ \frac{24 λ X + 6 X^3 + X^5}{24 λ}, 3 - \frac{X^2}{2} + \left( 1 + \frac{X^2 (6 + X^2 - 6 Y)}{24 λ} \right) (-2 + Y) - 2 Y \right\}$ , {X, 0, 3},
  {Y, 0, 4}, Frame → True, FrameLabel → {"X", "Y"}, LabelStyle → Directive[Black, Bold, 14],
  FrameTicks → Automatic, Epilog → {Red, PointSize[.03], Point[{x0, y0}]},
  StreamColorFunction → (ColorData["Rainbow", 1 / (Norm[{#1, #2}])]) &,
  PlotLegends → Placed[bar, Below], StreamPoints → 30, StreamColorFunctionScaling → False]

```



6.5 Code Mathematica xét tính ổn định của mô hình bằng phương pháp nhiễu loạn lũy thừa

```

Clear["Global`*"]; n = -1;
α[t] = ξ Log[t]; σ[t] = η Log[t]; φ[t] = ξ Log[t] + φ0; α'[t] = ∂tα[t];
α''[t] = ∂t∂t(α[t]); α3[t] = ∂t∂t∂t(α[t]); δα[t] = Aα tm; δα'[t] = ∂t(δα[t]);
δα''[t] = ∂t∂t(δα[t]); δα3[t] = ∂t∂t∂t(δα[t]); φ'[t] = ∂t(φ[t]); φ''[t] = ∂t∂t(φ[t]);
φ3[t] = ∂t∂t∂t(φ[t]); δφ[t] = Aφ tm; δφ'[t] = ∂t(δφ[t]); δφ''[t] = ∂t∂t(δφ[t]);
δφ3[t] = ∂t∂t∂t(δφ[t]); σ'[t] = ∂t(σ[t]); σ''[t] = ∂t∂t(σ[t]); δσ[t] = C tm;
δσ'[t] = ∂t(δσ[t]); δσ''[t] = ∂t∂t(δσ[t]); X =  $\frac{\omega}{2}$  φ'[t]2;

J[X] = λ Xn; J'[X] = Simplify[λ n Xn-1]; δJ'[X] = n (2 n - 2) λ  $\left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1}$  (φ'[t]2 n-3 δφ'[t]);
Jt' = ∂t(J'[X]); δJt' = ∂t(δJ'[X]); J''[X] = Simplify[λ n (n - 1) Xn-2];
δJ''[X] = λ n (n - 1)  $\left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-2}$  φ'[t]2 n-5 δφ'[t];

Jt[X] = ∂t(J[X]); Jtt[X] = ∂t∂t(J[X]);
δJt[X] = Simplify[ω (δJ'[X] φ'[t] φ''[t] + J'[X] δφ'[t] φ''[t] + J'[X] φ'[t] δφ''[t])];
δJtt[X] = Simplify[ω (δJt' φ'[t] φ''[t] + Jt' δφ'[t] φ''[t] + Jt' φ'[t] δφ''[t] + δJ'[X] φ''[t]2 +
2 J'[X] φ''[t] δφ''[t] + δJ'[X] φ'[t] φ3[t] + J'[X] δφ'[t] φ3[t] + J'[X] φ'[t] δφ3[t])];

δJtt[X] = Simplify[∂t(δJt[X])];
GB = 24 ((α'[t])4 + (α'[t])2 (α''[t]));
δGB = 24 (4 (α'[t])3 δα'[t] + 2 (α''[t]) (α'[t]) δα'[t] + (α'[t])2 δα''[t]);
GBt = ∂t(GB); δGBt = ∂t(δGB); (*δdot(G)*)

Eq1 = Collect[FullSimplify[
- δα''[t] - 6 α'[t] δα'[t] + Simplify[ $\frac{1}{2}$  (α'[t]2 δJtt[X] + 2 α'[t] Jtt[X] δα'[t])] +
Simplify[ $\frac{1}{2}$  (δJt[X] (5 α'[t]3 + 2 α'[t] α''[t]) +
Jt[X] (15 α'[t]2 δα'[t] + 2 δα'[t] α''[t] + 2 α'[t] δα''[t]))] -
Simplify[ $\frac{\omega}{16}$  (GB φ'[t]2 δJ'[X] + J'[X] φ'[t]2 δGB + 2 GB J'[X] φ'[t] δφ'[t])]], {Aα, Aφ}]

Eq2 = Collect[FullSimplify[
- δφ''[t] +  $\frac{1}{8}$  (δGB J'[X] φ''[t] + GB δJ'[X] φ''[t] + GB J'[X] δφ''[t]) - 3 α'[t] δφ'[t] -
3 δα'[t] φ'[t] +  $\frac{3}{8}$  (δGB J'[X] α'[t] φ'[t] + GB δJ'[X] α'[t] φ'[t] + GB J'[X] α'[t] δφ'[t] +
GB J'[X] δα'[t] φ'[t]) +  $\frac{1}{8}$  (δGB Jt' φ'[t] + GB δJt' φ'[t] + GB Jt' δφ'[t]) +
 $\frac{1}{8}$  (δJ'[X] GBt φ'[t] + J'[X] δGBt φ'[t] + J'[X] GBt δφ'[t])], {Aα, Aφ}]

m t-2+m  $\frac{(2 \xi (-2 + 6 \xi (1 + 2 \xi)) + m (2 + 3 \xi)) \lambda - (-1 + m + 6 \xi) \xi^2 \omega}{\xi^2 \omega} A_\alpha -$ 
 $\frac{2 m t^{-2+m} \xi^2 (2 + m + 2 \xi) (-1 + m + 3 \xi) \lambda A_\phi}{\xi^3 \omega}$ 

```

2 | Stable-1.nb

$$\begin{aligned}
\text{Out}[*]:= & -\frac{3 m t^{-2+m} \left(4 \xi^2 \left(3+m^2+m(-4+7 \xi)\right)+\xi(-16+15 \xi)\right) \lambda+\xi^4 \omega^2}{\xi^3 \omega^2} A_{\alpha} \\
& +\frac{m t^{-2+m}(-1+m+3 \xi)\left(36(-1+\xi) \xi^3 \lambda-\xi^4 \omega^2\right) A_{\phi}}{\xi^4 \omega^2} \\
\text{In}[*]:= & \mathbf{A11}=\frac{m t^{-2+m}\left(2 \xi(-2+6 \xi(1+2 \xi))+m(2+3 \xi)\right) \lambda-\left(-1+m+6 \xi\right) \xi^2 \omega}{\xi^2 \omega} ; \\
& \mathbf{A12}=-\frac{2 m t^{-2+m} \xi^2(2+m+2 \xi)(-1+m+3 \xi) \lambda}{\xi^3 \omega} ; \\
& \mathbf{A21}=-\frac{3 m t^{-2+m}\left(4 \xi^2\left(3+m^2+m(-4+7 \xi)\right)+\xi(-16+15 \xi)\right) \lambda+\xi^4 \omega^2}{\xi^3 \omega^2} ; \\
& \mathbf{A22}=\frac{m t^{-2+m}(-1+m+3 \xi)\left(36(-1+\xi) \xi^3 \lambda-\xi^4 \omega^2\right)}{\xi^4 \omega^2} ; \\
& \mathbf{t}=1 ; \lambda=\frac{-3(\xi-1) \xi}{(\xi+1)^2} ; \xi=\text{Sqrt}\left[2 \xi(\xi+1) \frac{\lambda}{\omega}\right] ; \\
& \mathbf{mat}=\{\{\mathbf{A11}, \mathbf{A12}\},\{\mathbf{A21}, \mathbf{A22}\}\} ; \\
& \mathbf{mat} // \text{MatrixForm} \\
& \mathbf{A1}=\text{Collect}\left[\text{Simplify}\left[\text{Det}[\mathbf{mat}]\right], m\right] \\
& \mathbf{Deta}=\text{Collect}\left[\text{FullSimplify}\left[\mathbf{A11} * \mathbf{A22}-\mathbf{A21} * \mathbf{A12}\right], m\right] (* \text{ The second way.} *) \\
\text{Out}[*]//\text{MatrixForm}= & \left(\begin{array}{cc}
-\frac{m(1+\xi)\left(\frac{6(-1+\xi) \xi^2(-1+m+6 \xi)}{1+\xi}-\frac{6(-1+\xi) \xi^2(-2+6 \xi(1+2 \xi))+m(2+3 \xi)}{(1+\xi)^2}\right)}{6(-1+\xi) \xi^2} & \frac{m(-1+\xi) \xi^3(2+m+2 \xi)(-1+m+3 \xi)}{\sqrt{6}(1+\xi)^2\left(-\frac{(-1+\xi) \xi^2}{(1+\xi) \omega}\right)^{3/2} \omega} \\
-\frac{m\left(\frac{36(-1+\xi)^2 \xi^4}{(1+\xi)^2}-\frac{12(-1+\xi) \xi^3\left(3+m^2+m(-4+7 \xi)+\xi(-16+15 \xi)\right)}{(1+\xi)^2}\right)}{2 \sqrt{6}\left(-\frac{(-1+\xi) \xi^2}{(1+\xi) \omega}\right)^{3/2} \omega^2} & -4 m(-1+m+3 \xi)
\end{array}\right) \\
\text{Out}[*]= & \frac{m^6}{-1+\xi^2}+\frac{m^5(-3+12 \xi)}{-1+\xi^2}+\frac{m^4(1-18 \xi+45 \xi^2)}{-1+\xi^2}+ \\
& \frac{m^2(-2+18 \xi-54 \xi^2+54 \xi^3)}{-1+\xi^2}+\frac{m^3(3-12 \xi-9 \xi^2+54 \xi^3)}{-1+\xi^2} \\
\text{Out}[*]= & \frac{m^6}{-1+\xi^2}+\frac{m^5(-3+12 \xi)}{-1+\xi^2}+\frac{m^4(1-18 \xi+45 \xi^2)}{-1+\xi^2}+ \\
& \frac{m^2(-2+18 \xi-54 \xi^2+54 \xi^3)}{-1+\xi^2}+\frac{m^3(3-12 \xi-9 \xi^2+54 \xi^3)}{-1+\xi^2}
\end{aligned}$$

Tài liệu tham khảo

- [1] K. S. Stelle, Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [2] T. P. Sotiriou, Gravity and Scalar Fields, *Lect. Notes Phys.* **892**, 3 (2015) [arXiv:1404.2955 [gr-qc]].
- [3] E. Berti, E. Barausse, V. Cardoso, L. Gualtieri, P. Pani, U. Sperhake, L. C. Stein, N. Wex, K. Yagi and T. Baker, *et al.* Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations, *Class. Quant. Grav.* **32**, 243001 (2015) [arXiv:1501.07274 [gr-qc]].
- [4] A. A. Starobinsky, A new type of isotropic cosmological models without singularity, *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980).
- [5] A. H. Guth, The inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [6] A. D. Linde, A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems, *Phys. Lett.* **108B**, 389 (1982).
- [7] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
- [8] A. D. Linde, Chaotic inflation, *Phys. Lett.* **129B**, 177 (1983).
- [9] D. Baumann, Inflation, [arXiv:0907.5424 [hep-th]].
- [10] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and R. H. Brandenberger, Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions, *Phys. Rept.* **215**, 203 (1992).
- [11] A. R. Liddle and D. H. Lyth, The Cold dark matter density perturbation, *Phys. Rept.* **231**, 1 (1993) [arXiv:astro-ph/9303019 [astro-ph]].

- [12] G. Hinshaw *et al.* [WMAP Collaboration], Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Cosmological parameter results, *Astrophys. J. Suppl.* **208**, 19 (2013) [arXiv:1212.5226].
- [13] N. Aghanim *et al.* [Planck Collaboration], Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, *Astron. Astrophys.* **641**, A6 (2020) [arXiv:1807.06209].
- [14] Y. Akrami *et al.* [Planck Collaboration], Planck 2018 results. X. Constraints on inflation, *Astron. Astrophys.* **641**, A10 (2020) [arXiv:1807.06211].
- [15] J. Martin, C. Ringeval, and V. Vennin, *Encyclopædia inflationaris*, *Phys. Dark Univ.* **5-6**, 75 (2014) [arXiv:1303.3787].
- [16] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. F. Mukhanov, *k*-inflation, *Phys. Lett. B* **458**, 209 (1999) [hep-th/9904075].
- [17] J. Garriga and V. F. Mukhanov, Perturbations in *k*-inflation, *Phys. Lett. B* **458**, 219 (1999) [hep-th/9904176].
- [18] T. Q. Do, Stable small spatial hairs in a power-law *k*-inflation model, *Eur. Phys. J. C* **81**, 77 (2021) [arXiv:2007.04867].
- [19] N. Arkani-Hamed, P. Creminelli, S. Mukohyama, and M. Zaldarriaga, Ghost inflation, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04**, 001 (2004) [hep-th/0312100].
- [20] C. Deffayet, G. Esposito-Farese, and A. Vikman, Covariant Galileon, *Phys. Rev. D* **79**, 084003 (2009) [arXiv:0901.1314].
- [21] C. Deffayet, S. Deser, and G. Esposito-Farese, Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors, *Phys. Rev. D* **80**, 064015 (2009) [arXiv:0906.1967].
- [22] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations, *Prog. Theor. Phys.* **126**, 511 (2011) [arXiv:1105.5723 [hep-th]].
- [23] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama, Inflation Driven by the Galileon Field, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 231302 (2010) [arXiv:1008.0603].
- [24] T. Q. Do and W. F. Kao, Bianchi type I anisotropic power-law solutions for the Galileon models, *Phys. Rev. D* **96**, 023529 (2017).

-
- [25] D. Lovelock, The Einstein tensor and its generalizations, J. Math. Phys. **12**, 498 (1971).
 - [26] B. Zwiebach, Curvature squared terms and string theories, Phys. Lett. B **156**, 315 (1985).
 - [27] D. G. Boulware and S. Deser, String Generated Gravity Models, Phys. Rev. Lett. **55**, 2656 (1985).
 - [28] D. J. Gross and J. H. Sloan, The quartic effective action for the heterotic string, Nucl. Phys. B **291**, 41 (1987).
 - [29] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, Order α' (two-loop) equivalence of the string equations of motion and the σ -model Weyl invariance conditions: Dependence on the dilaton and the antisymmetric tensor, Nucl. Phys. B **293**, 385 (1987).
 - [30] Z. K. Guo and D. J. Schwarz, Power spectra from an inflaton coupled to the Gauss-Bonnet term, Phys. Rev. D **80**, 063523 (2009) [arXiv:0907.0427].
 - [31] Z. K. Guo and D. J. Schwarz, Slow-roll inflation with a Gauss-Bonnet correction, Phys. Rev. D **81**, 123520 (2010) [arXiv:1001.1897].
 - [32] P. Kanti, R. Gannouji, and N. Dadhich, Gauss-Bonnet inflation, Phys. Rev. D **92**, 041302(R) (2015) [arXiv:1503.01579].
 - [33] P. Kanti, R. Gannouji, and N. Dadhich, Early-time cosmological solutions in Einstein-scalar-Gauss-Bonnet theory, Phys. Rev. D **92**, 083524 (2015) [arXiv:1506.04667].
 - [34] S. D. Odintsov and V. K. Oikonomou, Viable inflation in scalar-Gauss-Bonnet gravity and reconstruction from observational indices, Phys. Rev. D **98**, 044039 (2018) [arXiv:1808.05045].
 - [35] I. Antoniadis, J. Rizos and K. Tamvakis, Singularity - free cosmological solutions of the superstring effective action, Nucl. Phys. B **415**, 497 (1994) [arXiv:hep-th/9305025 [hep-th]].
 - [36] J. Rizos and K. Tamvakis, On the existence of singularity free solutions in quadratic gravity, Phys. Lett. B **326**, 57 (1994) [arXiv:gr-qc/9401023 [gr-qc]].
 - [37] S. Nojiri, S. D. Odintsov, and M. Sasaki, Gauss-Bonnet dark energy, Phys. Rev. D **71**, 123509 (2005) [hep-th/0504052].
-

-
- [38] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Modified Gauss-Bonnet theory as gravitational alternative for dark energy, *Phys. Lett. B* **631**, 1 (2005) [hep-th/0508049].
 - [39] T. Koivisto and D. F. Mota, Cosmology and astrophysical constraints of Gauss-Bonnet dark energy, *Phys. Lett. B* **644**, 104 (2007) [astro-ph/0606078].
 - [40] S. Mignemi and N. R. Stewart, Charged black holes in effective string theory, *Phys. Rev. D* **47**, 5259 (1993) [hep-th/9212146].
 - [41] B. Kleihaus, J. Kunz, and E. Radu, Rotating Black Holes in Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 151104 (2011) [arXiv:1101.2868].
 - [42] P. Kanti, N. E. Mavromatos, J. Rizos, K. Tamvakis, and E. Winstanley, Dilatonic black holes in higher curvature string gravity, *Phys. Rev. D* **54**, 5049 (1996) [hep-th/9511071].
 - [43] G. Antoniou, A. Bakopoulos, and P. Kanti, Evasion of No-Hair Theorems and Novel Black-Hole Solutions in Gauss-Bonnet Theories, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 131102 (2018) [arXiv:1711.03390].
 - [44] D. D. Doneva and S. S. Yazadjiev, New Gauss-Bonnet Black Holes with Curvature-Induced Scalarization in Extended Scalar-Tensor Theories, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 131103 (2018) [arXiv:1711.01187].
 - [45] H. O. Silva, J. Sakstein, L. Gualtieri, T. P. Sotiriou, and E. Berti, Spontaneous scalarization of black holes and compact stars from a Gauss-Bonnet coupling, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 131104 (2018) [arXiv:1711.02080].
 - [46] G. Hikmawan, J. Soda, A. Suroso, and F. P. Zen, Comment on “Gauss-Bonnet inflation”, *Phys. Rev. D* **93**, 068301 (2016) [arXiv:1512.00222].
 - [47] D. Glavan and C. Lin, Einstein-Gauss-Bonnet Gravity in Four-Dimensional Space-time, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 081301 (2020) [arXiv:1905.03601].
 - [48] M. Gürses, T. Ç. Şişman, and B. Tekin, Is there a novel Einstein–Gauss–Bonnet theory in four dimensions?, *Eur. Phys. J. C* **80**, 647 (2020) [arXiv:2004.03390].
 - [49] R. A. Hennigar, D. Kubizňák, R. B. Mann, and C. Pollack, On taking the $D \rightarrow 4$ limit of Gauss-Bonnet gravity: theory and solutions, *J. High Energy Phys.* **07**, 027 (2020) [arXiv:2004.09472].

-
- [50] M. Gurses, T. Ç. Şişman and B. Tekin, Comment on “Einstein-Gauss-Bonnet Gravity in 4-Dimensional Space-Time”, Phys. Rev. Lett. **125**, 149001 (2020) [arXiv:2009.13508].
 - [51] J. Arrechea, A. Delhom, and A. Jiménez-Cano, Comment on “Einstein-Gauss-Bonnet Gravity in Four-Dimensional Spacetime”, Phys. Rev. Lett. **125**, 149002 (2020) [arXiv:2009.10715].
 - [52] B. Gumjudpai, Quintessential power-law cosmology: dark energy equation of state, Mod. Phys. Lett. A **28**, 1350122 (2013) [arXiv:1307.4552 [astro-ph.CO]].
 - [53] J. Ryan, Constraints on power law cosmology from cosmic chronometer, standard ruler, and standard candle data, J. Cosmol. Astropart. Phys. **08**, 051 (2021) [arXiv:2102.08457 [astro-ph.CO]].
 - [54] G. Sethi, A. Dev and D. Jain, Cosmological constraints on a power law Universe, Phys. Lett. B **624**, 135 (2005) [arXiv:astro-ph/0506255 [astro-ph]].
 - [55] K. Thepsuriya and B. Gumjudpai, Determining scalar field potential in power-law cosmology with observational data, [arXiv:0904.2743 [astro-ph.CO]].
 - [56] R. R. Caldwell, A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state, Phys. Lett. B **545**, 23 (2002) [astro-ph/9908168].
 - [57] T. Q. Do, W. F. Kao, and I. C. Lin, Anisotropic power-law inflation for a two scalar fields model, Phys. Rev. D **83**, 123002 (2011).
 - [58] L. F. Abbott and M. B. Wise, Constraints on generalized inflationary cosmologies, Nucl. Phys. B **244**, 541 (1984).
 - [59] F. Lucchin and S. Matarrese, Power law inflation, Phys. Rev. D **32**, 1316 (1985).
 - [60] S. Kanno, J. Soda, and M. a. Watanabe, Anisotropic power-law inflation, J. Cosmol. Astropart. Phys. **12** (2010) 024 [arXiv:1010.5307].
 - [61] J. Holland, S. Kanno, and I. Zavala, Anisotropic inflation with derivative couplings, Phys. Rev. D **97**, 103534 (2018) [arXiv:1711.07450].
 - [62] T. Q. Do and W. F. Kao, Anisotropic power-law inflation for a conformal-violating Maxwell model, Eur. Phys. J. C **78**, 360 (2018) [arXiv:1712.03755].
-

- [63] T. M. Pham, D. H. Nguyen and T. Q. Do, k -Gauss-Bonnet Inflation, arXiv:2107.05926 [gr-qc].
- [64] Friedmann, A. (1922). Ueber die Kruemmung des Raumes . Z. Phys., **10**:377.
- [65] Friedmann, A. (1924). Ueber die Moeglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Kruemmung des Raumes. Z. Phys., **21**:326.
- [66] Robertson, H. P. (1935). Kinematics and World-Structure. Astrophys. J., **82**:284.
- [67] Robertson, H. P. (1936). Kinematics and World-Structure III. Astrophys. J., **83**:257.
- [68] Walker, A. G. (1937). On milne's theory of world-structure. Proceedings of the London Mathematical Society, **2(1)**:90.
- [69] Lemaitre, G. (1931). The Expanding Universe. Mon. Not. Roy.Astron. Soc., **91**:490.
- [70] E. Hubble, A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae, Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [71] Slipher, V. M. (1917). Nebulae. Proc. Am. Phil. Soc., **56**:403.
- [72] Lemaitre, G. (1927). A Homogeneous Universe of Constant Mass and Growing Radius Accounting for the Radial Velocity of Extragalactic Nebulae. Annales Soc. Sci. Brux. Ser. I Sci. Math. Astron. Phys., **A47**:59.
- [73] A. Einstein, The Foundation of the General Theory of Relativity, Annalen Phys. **49**, no.7, 769(1916).
- [74] D. Baumann, Cosmology, Cambridge University Press, 2022, ISBN 978-1-108-93709-2, 978-1-108-83807-8.
- [75] S. Weinberg, The Cosmological Constant Problem, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- [76] J. Martin, Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (But Were Afraid To Ask), Comptes Rendus Physique **13**, 566 (2012) [arXiv:1205.3365 [astro-ph.CO]].
- [77] S. Unnikrishnan and V. Sahni, Resurrecting power law inflation in the light of Planck results, JCAP **10**, 063 (2013) [arXiv:1305.5260 [astro-ph.CO]].

-
- [78] H. Bazrafshan Moghaddam, R. Brandenberger and J. Yokoyama, Note on Reheating in G-inflation, *Phys. Rev. D* **95**, no.6, 063529 (2017) [arXiv:1612.00998 [hep-th]].
 - [79] S. Hashiba and J. Yokoyama, Gravitational particle creation for dark matter and reheating, *Phys. Rev. D* **99**, no.4, 043008 (2019) [arXiv:1812.10032 [hep-ph]].
 - [80] L. H. Ford, Gravitational Particle Creation and Inflation, *Phys. Rev. D* **35**, 2955 (1987).
 - [81] L. H. Ford, Cosmological particle production: a review, *Rept. Prog. Phys.* **84**, no.11, 116901 (2021) [arXiv:2112.02444 [gr-qc]].
 - [82] M. R. Haque and D. Maity, Gravitational Reheating, [arXiv:2201.02348 [hep-ph]].
 - [83] J. P. Bruneton, On causality and superluminal behavior in classical field theories: Applications to k-essence theories and MOND-like theories of gravity, *Phys. Rev. D* **75**, 085013 (2007) [arXiv:gr-qc/0607055 [gr-qc]].
 - [84] E. Babichev, V. Mukhanov and A. Vikman, k-Essence, superluminal propagation, causality and emergent geometry, *J. High Energy Phys.* **02**, 101 (2008) [arXiv:0708.0561 [hep-th]].
 - [85] V. F. Mukhanov and A. Vikman, Enhancing the tensor-to-scalar ratio in simple inflation, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **02**, 004 (2006) [arXiv:astro-ph/0512066 [astro-ph]].
 - [86] J. Ohashi and S. Tsujikawa, Potential-driven Galileon inflation, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **10**, 035 (2012) [arXiv:1207.4879 [gr-qc]].
 - [87] D. Bettoni, J. M. Ezquiaga, K. Hinterbichler and M. Zumalacárregui, Speed of Gravitational Waves and the Fate of Scalar-Tensor Gravity, *Phys. Rev. D* **95**, no.8, 084029 (2017) [arXiv:1608.01982 [gr-qc]].
 - [88] S. W. Hawking, The Chronology protection conjecture, *Phys. Rev. D* **46**, 603 (1992).
 - [89] T. Kobayashi, Horndeski theory and beyond: a review, *Rept. Prog. Phys.* **82**, no.8, 086901 (2019) [arXiv:1901.07183 [gr-qc]].
 - [90] E. Babichev, C. Charmousis, D. Langlois and R. Saito, Beyond Fab Four, *Class. Quant. Grav.* **32**, 242001 (2015) [arXiv:1507.05942 [gr-qc]].
-

- [91] D. Langlois, Degenerate Higher-Order Scalar-Tensor (DHOST) theories, [arXiv:1707.03625 [gr-qc]].
- [92] D. Langlois and K. Noui, Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability, J. Cosmol. Astropart. Phys. **02**, 034 (2016) [arXiv:1510.06930 [gr-qc]].