

**BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO**

**VIỆN HÀN LÂM
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VN**

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ



Nguyễn Thị Hương Giang

**KÌ VỌNG SỐ NGHIỆM THỰC CỦA ĐA THỨC
NGẪU NHIÊN: HƯỚNG TIẾP CẬN HÌNH HỌC**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội – 2022

**BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO**

**VIỆN HÀN LÂM
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VN**

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ



Nguyễn Thị Hương Giang

**KÌ VỌNG SỐ NGHIỆM THỰC CỦA ĐA THỨC
NGẪU NHIÊN: HƯỚNG TIẾP CẬN HÌNH HỌC**

Chuyên ngành : Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC :
TS. Phạm Việt Hùng

Hà Nội – 2022

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những nội dung đã trình bày trong luận văn là do sự tìm tòi, học hỏi của bản thân dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy Phạm Việt Hùng. Mọi kết quả nghiên cứu và ý tưởng của các tác giả khác, nếu có đều được trích dẫn cụ thể. Đề tài luận văn này cho đến nay chưa được bảo vệ tại bất kì một hội đồng bảo vệ luận văn thạc sĩ nào và cũng chưa hề được công bố trên bất kì một phương tiện nào. Tôi xin chịu trách nhiệm về những lời cam đoan.

Hà Nội, tháng 9 năm 2022

Học viên

Nguyễn Thị Hương Giang

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, tôi xin được bày tỏ sự cảm kích đặc biệt của mình tới TS. Phạm Việt Hùng - người đã định hướng, trực tiếp hướng dẫn tôi kể từ khi tôi còn là sinh viên, tham gia Chương trình hướng dẫn Nghiên cứu Khoa học cho sinh viên cũng như trong suốt thời gian thực hiện luận văn thạc sĩ. Tôi biết ơn thầy bởi thầy luôn kiên nhẫn chỉnh sửa cho tôi từng lỗi sai nhỏ và cho tôi nhiều lời khuyên, nhận xét quý báu, giúp luận văn của tôi hoàn thiện đúng thời hạn. Trong suốt thời gian học tập với thầy, không chỉ kiến thức của tôi về toán được rộng mở, củng cố mà tôi còn rèn luyện thêm được nhiều đức tính quý báu như tính cẩn thận, chín chu trong mọi việc. Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể các thầy cô giáo, các cán bộ của Viện Toán học đã dạy bảo, hỗ trợ tôi tận tình trong suốt hai năm học thạc sĩ tại Viện Toán học.

Tôi, Nguyễn Thị Hương Giang - mã số VINIF.2020.ThS.04 xin chân thành cảm ơn Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup đã hỗ trợ tài chính giúp tôi hoàn thành hai năm học thạc sĩ. Sự giúp đỡ của Quỹ VINIF là nguồn động viên to lớn cả về vật chất lẫn tinh thần, giúp tôi yên tâm dành toàn thời gian của mình cho việc học và nghiên cứu.

Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn Viện Toán học và Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi về môi trường học tập trong suốt thời gian tôi học thạc sĩ cũng như quá trình thực hiện Luận văn.

Đặc biệt, tôi xin cảm ơn gia đình, người thân, thầy PGS.TS. Lê Văn Thành (Đại học Vinh) và họ hàng, bạn bè đã luôn sát cánh, động viên, giúp đỡ và khích lệ tôi trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu.

Danh mục các hình vẽ, đồ thị

Hình 1.1:	Hình ảnh minh họa cho bài toán Buffon trên mặt phẳng	4
Hình 1.2:	Hình ảnh minh họa mật độ số nghiệm thực $\rho_n(x)$ cho mô hình đa thức Kac với trường hợp $n = 50, n = 100$	19
Hình 2.1:	Ví dụ về đa tạp một chiều	37
Hình 2.2:	Hình minh họa miền nê-miêu vi	44
Hình 2.3:	Phép chuyển tọa độ của m	46

Danh sách các kí hiệu

Kí hiệu	Tên gọi
$\langle a, v(x) \rangle$	Tích vô hướng của hai vector a và $v(x)$
$\ \cdot \ $	Chuẩn của một vector
$N_{\mathbb{R}}(P_n)$	Số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên P_n
$\mathbb{E}[N_{\mathbb{R}}(P_n)]$	Kì vọng số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên P_n
$\mathbb{E}[N_I(P_n)]$	Kì vọng số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên P_n trên tập I
$\rho_n(t)$	Hàm mật độ của số các nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên bậc n
$\rho_{SM,n}(t)$	Hàm mật độ của số các nghiệm thực của đa thức Schehr - Majumdar
C_n^i	Số tổ hợp chập i của n

Mục lục

Lời cam đoan	i
Lời cảm ơn	ii
Danh mục các hình vẽ, đồ thị	iii
Danh sách các kí hiệu	iv
Mục lục	vi
Mở đầu	1
1 Ý nghĩa hình học của công thức Kac - Rice	3
1.1 Bài toán Buffon và sự liên quan tới đa thức ngẫu nhiên	3
1.1.1 Bài toán Buffon	3
1.1.2 Bài toán Buffon trên mặt cầu	5
1.1.3 Mối liên hệ giữa bài toán Buffon trên mặt cầu và đa thức ngẫu nhiên	6
1.1.4 Hàm số ngẫu nhiên với hệ số là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn	7
1.2 Công thức Kac-Rice	10
1.3 Mô hình đa thức Kac	14
1.4 Mô hình Elliptic	19
1.5 Mô hình Weyl	21
1.6 Mô hình Schehr - Majumdar	21
1.6.1 Giới thiệu	22
1.6.2 Trường hợp $\alpha = 0$	23
1.6.3 Trường hợp $0 < \alpha < 1$	24

1.6.4 Trường hợp $\alpha = 1$	25
1.6.5 Trường hợp $\alpha > 1$	26
1.7 Chuỗi lũy thừa ngẫu nhiên	31
1.7.1 Chuỗi lũy thừa với các hệ số tương quan	34
1.7.2 Chuỗi Dirichlet ngẫu nhiên	35
2 Mở rộng nhiều chiều	36
2.1 Trường hợp đa tạp tổng quát	36
2.1.1 Đa tạp	36
2.1.2 Đa thức ma trận	39
2.2 Hệ phương trình ngẫu nhiên	40
2.2.1 Số nghiệm thực của hệ phương trình ngẫu nhiên	40
2.2.2 Ví dụ về hệ phương trình ngẫu nhiên	42
2.3 Phân phối bất kì	43
2.3.1 Đa thức ngẫu nhiên với các hệ số là các biến ngẫu nhiên có phân phối bất kì	43
2.3.2 Đa thức ngẫu nhiên với các hệ số là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn và kì vọng khác 0	45
2.3.3 Ví dụ về đa thức ngẫu nhiên với các hệ số là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn và kì vọng khác không	47
Kết luận và kiến nghị	52
Tài liệu tham khảo	52

MỞ ĐẦU

Nghiên cứu về số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên là đề tài hiện thu hút được rất nhiều sự chú ý với nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực giải tích số, tài chính, lý thuyết trò chơi, vật lý (ví dụ trong động lực hỗn loạn lượng tử), sinh vật học (ví dụ trong sinh thái học lí thuyết), thống kê. . .

Cứ mỗi mô hình khác nhau lại liên quan đến nguồn gốc và ứng dụng thực tế khác nhau. Ta có thể kể đến các mô hình cổ điển như Kac, elliptic, Weyl, lượng giác, Bernstein, trực giao. . . Chẳng hạn, nghiên cứu về kì vọng số nghiệm thực của đa thức Weyl có ứng dụng trong lượng tử cơ học [1].

Các bài báo nghiên cứu về đa thức ngẫu nhiên đã xuất hiện từ những năm 1900. Hiện nay, đây vẫn là đề tài thu hút nhiều sự quan tâm của các nhóm nghiên cứu mạnh trên thế giới, ví dụ ở Mỹ có nhóm của giáo sư Vũ Hà Văn - Oanh Nguyễn - Hội Nguyễn - Yên Đỗ, hay nhóm của Pritsker - Lubinski, ở Pháp có các nhóm Angt - Poly, Azais - Dalmao - Leon - Armentano, Scher - Majumdar, ở Đức có nhóm Kablucko - Flasche. Ở Việt Nam, có một nhóm nghiên cứu gồm TS. Phạm Việt Hùng, TS. Cấn Văn Hảo kết hợp với PGS. TS. Dương Mạnh Hồng (Đại học Birmingham).

Trong khi đa thức ngẫu nhiên thực, chẳng hạn đa thức ngẫu nhiên thực bậc n , có chính xác n nghiệm trong mặt phẳng phức, kì vọng số nghiệm trên đường thẳng thực là một biến ngẫu nhiên. Để tính kì vọng số nghiệm thực này, người ta thường sử dụng công thức Kac-Rice được đưa ra từ những năm 1950. Năm 1995, Alan Edelman và Eric Kostlan đã chứng minh lại công thức này từ góc nhìn hình học và đưa ra ý nghĩa hình học của công thức này. Đây là công thức quan trọng trong Lý thuyết nghiên cứu về Quá trình ngẫu nhiên và có nhiều ứng dụng thực tiễn.

Trong bài báo [2] năm 2009 trên tạp chí Journal of Statistical Physics, các tác giả Grégory Schehr và Satya N. Majumdar đã giới thiệu một mô hình đa thức ngẫu nhiên có chứa tham số và họ đã có các dự đoán khác nhau về xấp xỉ kì

vọng số nghiệm thực của lớp đa thức này tùy thuộc vào từng giá trị của tham số; từ đó họ so sánh kết quả dự đoán với các mô hình cổ điển khác như mô hình Kac, Weyl.

Trong luận văn này, chúng tôi nghiên cứu ý nghĩa hình học của công thức Kac-Rice về kì vọng số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên thực và từ đó khái quát cho trường hợp đa tạp tổng quát. Ngoài ra, chúng tôi cũng tìm hiểu về lớp đa thức ngẫu nhiên được đề xuất bởi Grégory Schehr và Satya N. Majumdar [2]. Cụ thể, luận văn gồm 2 chương như sau:

1. Chương 1 trình bày bài toán Buffon trên mặt phẳng và mặt cầu, từ đó đưa ra mối liên hệ giữa độ dài đường cong chiếu trên mặt cầu và kì vọng số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên. Chương này cũng sẽ trình bày công thức Kac- Rice để tính kì vọng số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên cùng chứng minh của công thức này từ góc nhìn hình học. Sau đó chúng tôi trình bày lại một số ví dụ về đa thức ngẫu nhiên có sử dụng công thức Kac - Rice để tính kì vọng số nghiệm thực từ một số bài báo [3], [4]. Cuối cùng, chúng tôi sẽ trình bày lại mô hình đa thức ngẫu nhiên được đề xuất bởi Grégory Schehr và Satya N. Majumdar [3] và kì vọng số nghiệm thực của chuỗi lũy thừa ngẫu nhiên.
2. Chương 2 sẽ mở rộng kết quả về kì vọng số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên cho trường hợp nhiều chiều. Cụ thể, luận văn sẽ tìm hiểu về kì vọng số nghiệm thực của đa thức ma trận ngẫu nhiên, hệ phương trình ngẫu nhiên và phương trình ngẫu nhiên có các hệ số là các biến ngẫu nhiên có phân phối bất kì.

CHƯƠNG 1

Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA CÔNG THỨC KAC - RICE

Công thức Kac-Rice là công thức quan trọng trong lý thuyết về quá trình ngẫu nhiên. Công thức này được độc lập đưa ra bởi hai nhà toán học Mark Kac và Stephen Rice từ những năm 1950. Đến năm 1995, Edelman và Kostlan đã chứng minh lại công thức này trong trường hợp đặc biệt, sử dụng phương pháp Hình học tích phân. Trong chương này, chúng tôi sẽ tìm hiểu cách tiếp cận hình học trên của Edelman và Kostlan.

1.1 Bài toán Buffon và sự liên quan tới đa thức ngẫu nhiên

1.1.1 Bài toán Buffon

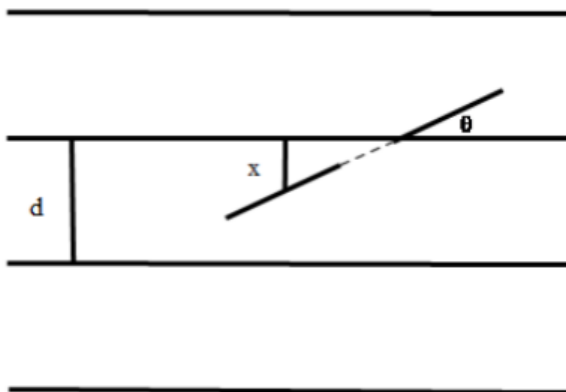
Bài toán Buffon lần đầu tiên được đưa ra vào năm 1777 bởi Georges Louis Leclerc, bá tước vùng Buffon. Đây là bài toán kinh điển và là mở đầu cho chuyên ngành Hình học tích phân (Xác suất hình học), xem [5]. Bài toán được phát biểu như sau:

Thả một cây kim có độ dài l trên tờ giấy kẻ ngang. Xác suất để cây kim cắt một trong những đường kẻ trên tờ giấy đó là bao nhiêu?

Xác suất này phụ thuộc vào khoảng cách d giữa các đường thẳng trên tờ giấy và độ dài l của cây kim.

Mệnh đề 1.1. *Nếu cây kim có độ dài l rơi xuống tờ giấy kẻ ngang có các*

dòng kẻ cách đều nhau một khoảng $d > l$ thì xác suất để cây kim nằm trên một trong các dòng kẻ là $\frac{2l}{\pi d}$.



Hình 1.1: Hình ảnh minh họa cho bài toán Buffon trên mặt phẳng.

Chứng minh. Chúng tôi sẽ đưa ra hai hướng giải quyết cho bài toán này.

Cách 1.

Gọi x là khoảng cách từ điểm chính giữa của cây kim tới đường kẻ gần nhất và θ là góc tạo bởi cây kim và đường kẻ gần nhất với nó.

Từ tam giác vuông tạo bởi cây kim, đường kẻ gần nhất với nó và khoảng cách từ điểm chính giữa của cây kim tới đường kẻ đó, ta có đánh giá sau: Cây kim giao với đường kẻ gần nhất nếu $x \leq \frac{l}{2} \sin \theta$.

Giả sử rằng giá trị của x, θ được xác định ngẫu nhiên khi cây kim rơi xuống tờ giấy, với $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq x \leq \frac{d}{2}$ (vì $l \leq d$). Do đó, không gian mẫu cho x và θ là hình chữ nhật có độ dài các cạnh lần lượt là $\frac{d}{2}$ và $\frac{\pi}{2}$.

Xác suất để cây kim rơi xuống cắt đường kẻ gần nhất chính là tỉ lệ giữa phần giao của không gian mẫu và $x \leq \frac{l}{2} \sin \theta$ với không gian mẫu.

Diện tích của không gian mẫu là

$$S = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi d}{4}.$$

Diện tích của phần giao là

$$S^* = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \sin \theta d\theta = \frac{l}{2} \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right) = \frac{l}{2}.$$

Do đó, xác suất để cây kim cắt đường thẳng là

$$P = \frac{S^*}{S} = \frac{l}{2} \cdot \frac{4}{\pi d} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Cách 2.

Giả sử cây kim được tạo bởi từ n đoạn thẳng. Gọi X_{a_i} , $i = 1, 2, \dots, n$ là số giao điểm được tạo bởi đoạn thẳng có độ dài a_i . Khi đó số giao điểm giữa cây kim và các đường kẻ trên mặt giấy là tổng của các giao điểm tạo bởi các đoạn thẳng có độ dài a_i .

Do đó, kì vọng các giao điểm là

$$\mathbb{E}(X_l) = \mathbb{E}(X_{a_1} + X_{a_2} + \dots + X_{a_n}) = \mathbb{E}(X_{a_1}) + \mathbb{E}(X_{a_2}) + \dots + \mathbb{E}(X_{a_n}),$$

bởi tính tuyến tính của kì vọng.

Ta xem $\mathbb{E}(X_l)$ như là hàm số của độ dài l . Đăng thức cho thấy $\mathbb{E}(X_l)$ là hàm cộng tính. Rõ ràng rằng $\mathbb{E}(X_l)$ là hàm không giảm. Khi đó $\mathbb{E}(X_l)$ là hàm tuyến tính, tức là $\mathbb{E}(X_l) = c \cdot l$, với c là hằng số.

Xem xét đường tròn đường kính d , có độ dài $l = d\pi$. Trong tất cả các trường hợp, số giao điểm giữa đường tròn và đường kẻ là 2. Khi đó $\mathbb{E}(X_{d\pi}) = 2$, tức là $c \cdot d\pi = 2$. Do đó $c = \frac{2}{\pi d}$, và kì vọng số giao điểm được tạo bởi cây kim có độ dài l và các đường kẻ là $\mathbb{E}(X_l) = \frac{2l}{\pi d}$.

Trong trường hợp $l < d$, $\mathbb{E}(X_l)$ bằng xác suất để cây kim cắt một đường thẳng. □

1.1.2 Bài toán Buffon trên mặt cầu

Mở rộng bài toán Buffon trên mặt phẳng đã trình bày ở trên, bài toán Buffon trên mặt cầu được đưa ra lần đầu tiên bởi Barbier vào năm 1860, xem [6] để biết thêm về lịch sử ra đời bài toán này.

Xét đường cong Γ được đặt trên mặt cầu Riemann \mathbb{S} . Chọn ngẫu nhiên một đường xích đạo của \mathbb{S} . Khi đó kì vọng số giao điểm của đường cong và đường xích đạo là bao nhiêu?

Xét trong trường hợp số chiều tổng quát, ta có kết quả sau.

Mệnh đề 1.2. Xét đường cong có độ dài L trên mặt cầu S^n . Chọn ngẫu nhiên một đường xích đạo. Kỳ vọng số giao điểm của đường cong và đường xích đạo là $\mathbb{E}_L = \frac{L}{\pi}$.

Chứng minh. Bằng cách giải thích tương tự như cách chứng minh thứ 2 của Mệnh đề 1.1, kỳ vọng số giao điểm của đường cong và một đường xích đạo là hàm tuyến tính của chiều dài đường cong, $\mathbb{E}(X_L) = c \cdot L$.

Để xác định hằng số c , ta xét trường hợp đặc biệt: đường cong là một đường xích đạo. Khi đó, kỳ vọng số giao điểm của đường cong và một đường xích đạo là 2 và chiều dài đường cong là $L = 2\pi$. Do đó $c \cdot 2\pi = 2$, hay $c = \frac{1}{\pi}$. Vậy kỳ vọng số giao điểm của đường cong và đường xích đạo là $\mathbb{E}(X_L) = \frac{L}{\pi}$. \square

1.1.3 Môi liên hệ giữa bài toán Buffon trên mặt cầu và đa thức ngẫu nhiên

Nói một cách đơn giản (xem [4], [7]), đa thức ngẫu nhiên là đa thức có các hệ số được lấy một cách ngẫu nhiên. Cụ thể, ta xét mô hình đa thức sau

$$P_n(x) = a_0\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_1x + \cdots + a_n\varepsilon_nx^n, \quad (1.1)$$

với ε_i là các hằng số cố định và a_i là các biến ngẫu nhiên có cùng phân phối chuẩn.

Phụ thuộc vào các giá trị của các ε_i mà ta có một số mô hình đa thức ngẫu nhiên nổi tiếng sau đây:

- Mô hình Kac: $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1$,
- Mô hình Elliptic: $\varepsilon_i = \sqrt{\binom{n}{i}}$,
- Mô hình Weyl: $\varepsilon_i = \sqrt{\frac{1}{i!}}$.

Bây giờ ta sẽ xét mô hình Kac, tức là, các đa thức ngẫu nhiên có dạng

$$P_{Kac,n}(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

với $a_i, i = \overline{0, n}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phân phối chuẩn tắc.

$$\text{Đặt } a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ và } v(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Ta có thể biểu diễn $P_{Kac,n}(x) = \langle a, v(x) \rangle$. Tại nghiệm t của đa thức $P_{Kac,n}(x)$ ta có: $\langle \frac{a}{\|a\|}, \frac{v(t)}{\|v(t)\|} \rangle = 0$.

Với điều kiện a_i là các biến ngẫu nhiên có cùng phân phối chuẩn tắc, điểm ngẫu nhiên $\frac{a}{\|a\|}$ có phân phối đều trên S^n . Do đó, $\langle \frac{a}{\|a\|}, \frac{v(t)}{\|v(t)\|} \rangle = 0$ có nghĩa là điểm $\frac{v(t)}{\|v(t)\|}$ nằm trên đường xích đạo vuông góc với vector chuẩn a . Do vậy, số nghiệm của đa thức $P_{Kac,n}(x)$ bằng số giao điểm giữa đường cong $\gamma = \left\{ \frac{v(x)}{\|v(x)\|}, x \in \mathbb{R} \right\}$ và đường xích đạo tương ứng với vector a .

Từ bài toán Buffon trên mặt cầu, ta có kết quả sau cho mô hình Kac.

Mệnh đề 1.3. Cho đa thức

$$P_{Kac,n}(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

với a_i là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn tắc.

Khi đó, kì vọng số nghiệm thực của đa thức $P_{Kac,n}(x)$ là

$$\mathbb{E}[N_{\mathbb{R}}(P_{Kac,n})] = \frac{|\gamma|}{\pi}.$$

1.1.4 Hàm số ngẫu nhiên với hệ số là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn

Ở trên, ta đã xét họ cơ sở đa thức $\{1, x, \dots, x^n\}$. Một cách tổng quát, với họ các hàm số $\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ bất kì, ta xét hàm ngẫu nhiên $P_n(x)$ là tổ hợp tuyến tính ngẫu nhiên của các hàm $f_i(x)$:

$$P_n(x) = a_0 + a_1f_1(x) + \cdots + a_nf_n(x),$$

với a_i là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn tắc.

$$\text{Ta xét đường cong } v(t) = \begin{pmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \text{ và vector } a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Ta xác định các vector đơn vị $\alpha \equiv a/\|a\|$ và $\gamma(t) \equiv v(t)/\|v(t)\|$.

Tương tự Mệnh đề [1.3](#), ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.4. *Kì vọng số nghiệm thực của đa thức $P_n(x)$ là*

$$\mathbb{E}[N_{\mathbb{R}}(P_n)] = \frac{1}{\pi}|\gamma| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\gamma'(t)\| dt,$$

với điều kiện các hệ số a_i của $P_n(x)$ có phân phối chuẩn tắc.

Trong trường hợp tổng quát, nếu a_i có phân phối chuẩn, $\mathbb{E}(a) = 0$ và $\mathbb{E}(aa^T) = C$ thì a là phân phối chuẩn nhiều chiều với ma trận covariance C . Khi đó, ta có kết quả sau về kì vọng số nghiệm thực của hàm số ngẫu nhiên trong trường hợp tổng quát.

Định lý 1.5. *Đặt $v(t) = (f_0(t), \dots, f_n(t))^T$ với $f_i(t)$ là các hàm khả vi và a_0, a_1, \dots, a_n là các thành phần của phân phối chuẩn nhiều chiều với kì vọng 0 và ma trận covariance C . Kì vọng số nghiệm thực trên khoảng (hoặc tập đo được) I của phương trình*

$$a_0 f_0(t) + a_1 f_1(t) + \dots + a_n f_n(t) = 0$$

là

$$\int_I \frac{1}{\pi} \|\mathbf{w}'(t)\| dt,$$

với $\mathbf{w} = \frac{C^{1/2}v(t)}{\|C^{1/2}v(t)\|}$. Nếu viết dưới dạng đạo hàm của hàm chứa logarith thì công thức trên trở thành

$$\mathbb{E}[N_I(P_n)] = \frac{1}{\pi} \int_I \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [v^T(x) C v(y)] \Big|_{y=x=t} \right)^{1/2} dt. \quad (1.2)$$

Chứng minh. Xét hàm ngẫu nhiên $P_n(x) = a_0 + a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x)$.

$$\text{Ta xét đường cong } v(t) = \begin{pmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \text{ và vector } a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Ta có $\mathbb{E}(a) = 0$ và $\mathbb{E}(aa^T) = C$.

Đặt $b = C^{-1/2}a$; $\omega(t) = C^{1/2}v(t)$. Khi đó b có phân phối chuẩn tắc và ta có thể biểu diễn $P_n(x) = \langle b, \omega(x) \rangle$.

Lúc này, áp dụng Mệnh đề 1.4, kì vọng số nghiệm thực của $P_n(x)$ là

$$\mathbb{E}[N_I(P_n)] = \frac{|\mathbf{w}|}{\pi} = \int_I \frac{1}{\pi} \|\mathbf{w}'(t)\| dt,$$

với $\mathbf{w}(t) = \left\{ \frac{\omega(t)}{\|\omega(t)\|}, t \in I \right\}$.

Giờ ta sẽ chứng minh

$$\|\mathbf{w}'(t)\|^2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [v^T(x) C v(y)] \Big|_{y=x=t}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'(t) &= \left(\frac{\omega(t)}{\sqrt{\omega(t) \cdot \omega(t)}} \right)' = \frac{\omega'(t) \sqrt{\omega(t) \cdot \omega(t)} - \omega(t) \cdot \frac{[\omega(t) \cdot \omega'(t)]}{\sqrt{\omega(t) \cdot \omega(t)}}}{[\omega(t) \cdot \omega(t)]} \\ &= \frac{\omega'(t) [\omega(t) \cdot \omega(t)] - \omega(t) [\omega(t) \cdot \omega'(t)]}{[\omega(t) \cdot \omega(t)]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}'(t)\|^2 &= \left(\frac{\omega(t)}{\sqrt{\omega(t) \cdot \omega(t)}} \right)' \cdot \left(\frac{\omega(t)}{\sqrt{\omega(t) \cdot \omega(t)}} \right)' \\ &= \frac{[\omega(t) \cdot \omega(t)] [\omega'(t) \cdot \omega'(t)] - [\omega(t) \cdot \omega'(t)]^2}{[\omega(t) \cdot \omega(t)]^2}. \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\frac{\partial}{\partial x} \log [\omega(x) \cdot \omega(y)] = \frac{\omega'(x) \cdot \omega(y)}{\omega(x) \cdot \omega(y)}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [\omega(x) \cdot \omega(y)] &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\omega'(x) \cdot \omega(y)}{\omega(x) \cdot \omega(y)} \\ &= \frac{[\omega'(x) \cdot \omega'(y)] [\omega(x) \cdot \omega(y)] - [\omega'(x) \cdot \omega(y)] [\omega(x) \cdot \omega'(y)]}{[\omega(x) \cdot \omega(y)]^2} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [v^T(x) C v(y)] \Big|_{y=x=t} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [\omega^T(x) \omega(y)] \Big|_{y=x=t} \\ &= \frac{[\omega(t) \cdot \omega(t)] [\omega'(t) \cdot \omega'(t)] - [\omega(t) \cdot \omega'(t)]^2}{[\omega(t) \cdot \omega(t)]^2}. \end{aligned}$$

Từ các biến đổi trên suy ra

$$\|\mathbf{w}'(t)\|^2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [v^T(x) C v(y)] \Big|_{y=x=t}.$$

Vậy

$$\mathbb{E}[N_I(P_n)] = \int_I \frac{1}{\pi} \|\mathbf{w}'(t)\| dt = \frac{1}{\pi} \int_I \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [v^T(x) C v(y)] \Big|_{y=x=t} \right)^{1/2} dt.$$

□

Từ định lý trên, ta có kết luận sau về hàm mật độ của số các nghiệm thực của hàm ngẫu nhiên.

Định nghĩa 1.6. *Hàm mật độ của số các nghiệm thực của phương trình*

$$a_0 f_0(t) + a_1 f_1(t) + \cdots + a_n f_n(t) = 0$$

(trong đó $f_i(t)$ là các hàm khả vi và a_i là các thành phần của phân phối chuẩn nhiều chiều với kì vọng 0 và ma trận covariance C) là

$$\rho_n(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [v^T(x) C v(y)] \Big|_{y=x=t} \right)^{1/2}.$$

1.2 Công thức Kac-Rice

Lược văn đã đề cập đến công thức của Alan Edelman và Eric Kostlan để tính kì vọng số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên qua độ dài đường cong

chiều trên mặt cầu đơn vị. Trong phần này, chúng tôi giới thiệu công thức tính tương minh hơn như sau:

Định lý 1.7 (Công thức Kac-Rice). *Xét đa thức ngẫu nhiên*

$$P_n(x) = a_0\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_1x + \cdots + a_n\varepsilon_nx^n,$$

với a_i là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn tắc.

Kì vọng số nghiệm thực của P_n trên khoảng (a, b) là

$$\mathbb{E}[N_{(a,b)}(P_n)] = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\sqrt{A_n(x)M_n(x) - B_n^2(x)}}{M_n(x)} dx,$$

với $M_n(x) = \text{var}(P_n(x))$, $A_n(x) = \text{var}(P_n'(x))$, $B_n(x) = \text{cov}(P_n(x), P_n'(x))$.

Chứng minh. Vì a_i là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn tắc nên ta có :

$$P_n'(x) = \sum_{i=0}^n a_i i \varepsilon_i x^{i-1}, \quad P_n^2(x) = \sum_{i,j=0}^n a_i a_j \varepsilon_i \varepsilon_j x^{i+j},$$

$$P_n(x)P_n'(x) = \sum_{i,j=0}^n a_i a_j i \varepsilon_i \varepsilon_j x^{i+j-1},$$

$$\mathbb{E}(P_n(x)) = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i x^i \mathbb{E}(a_i) = 0, \quad \mathbb{E}(P_n'(x)) = 0,$$

$$\begin{aligned} M_n(x) &= \text{var}(P_n(x)) = \mathbb{E}(P_n^2(x)) - (\mathbb{E}(P_n(x)))^2 = \sum_{i,j=0}^n \varepsilon_i \varepsilon_j x^{i+j} \mathbb{E}(a_i a_j) \\ &= \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 x^{2i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \text{var}(P_n'(x)) = \mathbb{E}((P_n'(x))^2) - (\mathbb{E}(P_n'(x)))^2 = \sum_{i,j=0}^n \varepsilon_i \varepsilon_j i j x^{i+j-2} \mathbb{E}(a_i a_j) \\ &= \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 i^2 x^{2(i-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \text{cov} \left(P_n(x), P_n'(x) \right) = \mathbb{E} \left(P_n(x) P_n'(x) \right) = \sum_{i,j=0}^n i \varepsilon_i \varepsilon_j x^{i+j} \mathbb{E}(a_i a_j) \\
&= \sum_{i=0}^n i \varepsilon_i^2 x^{2i-1}.
\end{aligned}$$

Ta xét đường cong $v(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ và vector $a = \begin{pmatrix} a_0 \varepsilon_0 \\ a_1 \varepsilon_1 \\ a_2 \varepsilon_2 \\ \vdots \\ a_n \varepsilon_n \end{pmatrix}$.

Ta có $\mathbb{E}(a) = 0$ và

$$\begin{aligned}
C = \mathbb{E}(aa^T) &= \begin{bmatrix} \varepsilon_0^2 \mathbb{E}(a_0^2) & \varepsilon_0 \varepsilon_1 \mathbb{E}(a_0 a_1) & \dots & \varepsilon_0 \varepsilon_n \mathbb{E}(a_0 a_n) \\ \varepsilon_0 \varepsilon_1 \mathbb{E}(a_0 a_1) & \varepsilon_1^2 \mathbb{E}(a_1^2) & \dots & \varepsilon_1 \varepsilon_n \mathbb{E}(a_1 a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_0 \varepsilon_n \mathbb{E}(a_0 a_n) & \varepsilon_1 \varepsilon_n \mathbb{E}(a_1 a_n) & \dots & \varepsilon_n^2 \mathbb{E}(a_n^2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \varepsilon_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Đặt $\omega(x) = C^{1/2}v(x)$ và $\mathbf{w}(x) = \left\{ \frac{\omega(x)}{\|\omega(x)\|}, x \in I \right\}$.

Theo chứng minh ở mục 1.1.4 ta có $\mathbb{E}[N_{(a,b)}(P_n)] = \frac{1}{\pi} \int_a^b \|\mathbf{w}'(x)\| dx$ và

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{w}'(x)\|^2 &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \log [v^T(y) C v(z)] \Big|_{y=z=x} \\
&= \frac{[\omega(x) \cdot \omega(x)] [\omega'(x) \cdot \omega'(x)] - [\omega(x) \cdot \omega'(x)]^2}{[\omega(x) \cdot \omega(x)]^2}.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\omega^T(x) \cdot \omega(x) = v^T(x) C v(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 x^{2i} = M_n(x),
\end{aligned}$$

$$\omega'(x) \cdot \omega'(x) = v'(x)Cv'(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & \dots & nx^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ \vdots \\ nx^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1^2 & 2\varepsilon_2^2 x & \dots & n\varepsilon_n^2 x^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ \vdots \\ nx^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=0}^n i^2 \varepsilon_i^2 x^{2i-2} = A_n(x),
\end{aligned}$$

$$\omega(x) \cdot \omega'(x) = v^T(x)Cv(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ nx^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_0^2 & x\varepsilon_1^2 & \dots & x^n\varepsilon_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ nx^{n-1} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^n i\varepsilon_i^2 x^{2i-1} = B_n(x).$$

Do đó

$$\mathbb{E}[N_{(a,b)}(P_n)] = \frac{1}{\pi} \int_a^b \|\mathbf{w}'(x)\| dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\sqrt{A_n(x)M_n(x) - B_n^2(x)}}{M_n(x)} dx.$$

□

Hệ quả 1.8. *Hàm mật độ của số các nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên là*

$$\rho_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{A_n(x)M_n(x) - B_n^2(x)}}{M_n(x)}.$$

1.3 Mô hình đa thức Kac

Như chúng tôi đã đề cập ở trước, đa thức Kac được xác định bởi

$$P_{Kac,n}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad (1.3)$$

với a_i là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn tắc.

Trong mục này, chúng tôi sẽ tìm hiểu kĩ hơn về số nghiệm thực cho mô hình này.

Mệnh đề 1.9. *Kì vọng số nghiệm thực của đa thức Kac là*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{(-\infty,\infty)}(P_{Kac,n})] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(1-x^2)^2} - \frac{(n+1)^2x^{2n}}{(x^{2n+2}-1)^2}} dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{(1-x^2)^2} - \frac{(n+1)^2x^{2n}}{(x^{2n+2}-1)^2}} dx. \end{aligned}$$

Chứng minh. Ta sẽ sử dụng công thức Kac-Rice để tính kì vọng số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên mô hình Kac.

Trong trường hợp này, $\varepsilon_i = 1 (i = 0, \dots, n)$.

Đầu tiên, ta thấy rằng $\sum_{i=0}^n a_i x^i = x^n \sum_{i=0}^n a_{n-i} \frac{1}{x^i}$. Do đó kì vọng số nghiệm thực của $P_{Kac,n}(x)$ trong khoảng $(-1, 1)$ bằng kì vọng số nghiệm thực của $P_{Kac,n}(x)$ ngoài khoảng $(-1, 1)$. Ngoài ra, vì phân phối của a_i và $-a_i$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) giống nhau nên $\mathbb{E}[N_{(-1,0)}(P_{Kac,n})] = \mathbb{E}[N_{(0,1)}(P_{Kac,n})]$. Do vậy

$$\mathbb{E}[N_{(-\infty,\infty)}(P_{Kac,n})] = 2\mathbb{E}[N_{(-1,1)}(P_{Kac,n})] = 4\mathbb{E}[N_{(0,1)}(P_{Kac,n})].$$

Áp dụng định lý và chứng minh ở mục 1.1.4 ta có

$$M_n(x) = \sum_{i=0}^n x^{2i}, A_n(x) = \sum_{i=0}^n i^2 x^{2(i-1)}, B_n(x) = \sum_{i=0}^n ix^{2i-1}.$$

Ta có:

$$M_n(x) = \sum_{i=0}^n x^{2i} = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}.$$

Suy ra

$$d\left(\sum_{i=0}^n x^{2i}\right) = d\left(\frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}\right),$$

hay

$$\sum_{i=0}^n ix^{2i-1} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}\right).$$

Tức là

$$B_n(x) = \frac{x(1 - x^{2n} - nx^{2n} + nx^{2n+2})}{(x^2 - 1)^2}.$$

Tương tự như thế ta cũng có

$$d\left(x \sum_{i=0}^n ix^{2i-1}\right) = \left(2i^2 \sum_{i=0}^n x^{2i-1}\right) dx.$$

Suy ra

$$i^2 \sum_{i=0}^n x^{2(i-1)} = \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(x \sum_{i=0}^n ix^{2i-1}\right).$$

Do đó

$$A_n(x) = \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{x(1 - x^{2n} - nx^{2n} + nx^{2n+2})}{(x^2 - 1)^2}\right)$$

$$= \frac{x^{2n+2} - x^2 - 1 + x^{2n}(nx^2 - n - 1)^2}{(x^2 - 1)^3}.$$

Thay các kết quả của $M_n(x)$, $B_n(x)$, $A_n(x)$ vừa tính được ở trên vào công thức Kac-Rice ta được kì vọng số nghiệm thực của $P_n(x)$ trên \mathbb{R} là

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[N_{\mathbb{R}}(P_{Kac,n})] \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{A_n(x)M_n(x) - B_n^2(x)}}{M_n(x)} dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{x^{2n+2} - x^2 - 1 + x^{2n}(nx^2 - n - 1)^2}{(x^2 - 1)^3} \cdot \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2} - \left(\frac{x(1 - x^{2n} - nx^{2n} + nx^{2n+2})}{(x^2 - 1)^2}\right)^2}}{\frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}} dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{(x^{2n+2} - 1)^2 - (n + 1)^2 x^{2n} (x^2 - 1)^2}}{(x^2 - 1)(x^{2n+2} - 1)} dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{(x^2 - 1)^2} - \frac{(n + 1)^2 x^{2n}}{(x^{2n+2} - 1)^2}} dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{(x^2 - 1)^2} - \frac{(n + 1)^2 x^{2n}}{(x^{2n+2} - 1)^2}} dx. \end{aligned}$$

□

Từ công thức trên, ta có công thức xấp xỉ cho mô hình Kac như sau, xem [4].

Định lý 1.10. *Kì vọng số nghiệm thực của đa thức (1.3) là*

$$\mathbb{E}[N_{(-\infty, \infty)}(P_{Kac,n})] \sim \frac{2}{\pi} \log n.$$

Chứng minh. Ta đã có

$$\mathbb{E}[N_{(-\infty, \infty)}(P_{Kac,n})] = 4\mathbb{E}[N_{(0,1)}(P_{Kac,n})]. \quad (1.4)$$

Bây giờ ta sẽ tính $\mathbb{E}[N_{(0,1)}(P_{Kac,n})]$.

Đầu tiên ta xem xét khoảng $(0, 1 - \epsilon)$, với $\epsilon_n = \epsilon = n^{-a}$ và a là số dương bất kì nhỏ hơn 1. Do đó với n đủ lớn,

$$x^n < (1 - \epsilon)^n = (1 - n^{-a})^n = \exp(-n^{1-a}).$$

Nếu ta chọn $a = 1 - \log \log n^{10} / \log n$ với n đủ lớn thì

$$\exp(-n^{1-a}) = n^{-10},$$

và do đó

$$x^n \leq n^{-10}.$$

Khi đó $A_n(x)$, $M_n(x)$, $B_n(x)$ có kết quả như sau

$$A_n(x) = \frac{x^{2n+2} - x^2 - 1 + x^{2n}(nx^2 - n - 1)^2}{(x^2 - 1)^3} = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^3} [1 + o(n^{-16})],$$

$$B_n(x) = \frac{x(1 - x^{2n} - nx^{2n} + nx^{2n+2})}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x}{(1 - x^2)^2} [1 + o(n^{-20})],$$

$$M_n(x) = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2} [1 + o(n^{-18})].$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{A_n(x)M_n(x) - B_n^2(x)}}{M_n(x)} &= \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{(1-x^2)^4} [1 + o(n^{-16})] - \frac{x^2}{(1-x^2)^4} [1 + o(n^{-20})]}}{\frac{1}{1-x^2} [1 + o(n^{-18})]} \\ &= \frac{1}{1-x^2} [1 + o(n^{-16})], \end{aligned}$$

và do đó

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{(0,1-\epsilon)}(P_{Kac,n})] &= \frac{1}{\pi} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{1-x^2} [1 + o(n^{-16})] \\ &= \left[\frac{a}{2\pi} \log n + \frac{1}{\pi} \log(2 - n^{-a}) \right] [1 + o(n^{-16})] \\ &\sim \frac{1}{2\pi} \log n, \end{aligned} \tag{1.5}$$

vì $a \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow \infty$.

Tiếp theo ta sẽ chỉ ra rằng số nghiệm thực của (1.3) trong khoảng $(1 - \epsilon, 1)$ là không đáng kể, hay nói cách khác với ϵ đã chọn ở trên đủ để làm cho $\mathbb{E}[N_{(1-\epsilon,1)}(P_{Kac,n})]$ nhỏ.

Sử dụng kết quả trong chứng minh của Mệnh đề 1.9 ta có

$$\frac{\sqrt{A_n(x)M_n(x) - B_n^2(x)}}{M_n(x)} = \sqrt{\frac{1}{(1-x^2)^2} - \frac{(n+1)^2 x^{2n}}{(1-x^{2n+2})^2}}.$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng

$$\frac{\sqrt{A_n(x)M_n(x) - B_n^2(x)}}{M_n(x)} < \sqrt{\frac{2n+1}{1-x}}. \quad (1.6)$$

$$\forall i \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} = \sum_{i=0}^n x^{2i} \leq n \text{ (do } x < 1) \text{ nên}$$

$$\frac{(n+1)x^n(1-x^2)}{1-x^{2n+2}} \geq x^n.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{A_n(x)M_n(x) - B_n^2(x)}}{M_n(x)} &\leq \sqrt{\frac{1-x^{2n}}{(1-x^2)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n x^{2i}}{1-x^2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{n+1}{1-x^2}} \leq \sqrt{\frac{n+1}{1-x}} \\ &< \sqrt{\frac{2n+1}{1-x}}. \end{aligned}$$

Sử dụng công thức Kac-Rice và từ (1.6) ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{(1-\epsilon,1)}(P_{Kac,n})] &< \frac{(2n+1)^{1/2}}{\pi} \int_{1-\epsilon}^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}} \\ &= \frac{(2n+1)^{1/2}}{\pi} (\epsilon^{1/2} - 1) = o(\sqrt{n\epsilon}) \\ &= o\left(n^{\log^{10}/2 \log n}\right) = o(\log n)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Từ (1.4), (1.5) và (1.7) ta có kì vọng số nghiệm thực của đa thức Kac là

$$\mathbb{E}[N_{(-\infty,\infty)}(P_{Kac,n})] \sim \frac{2}{\pi} \log n.$$

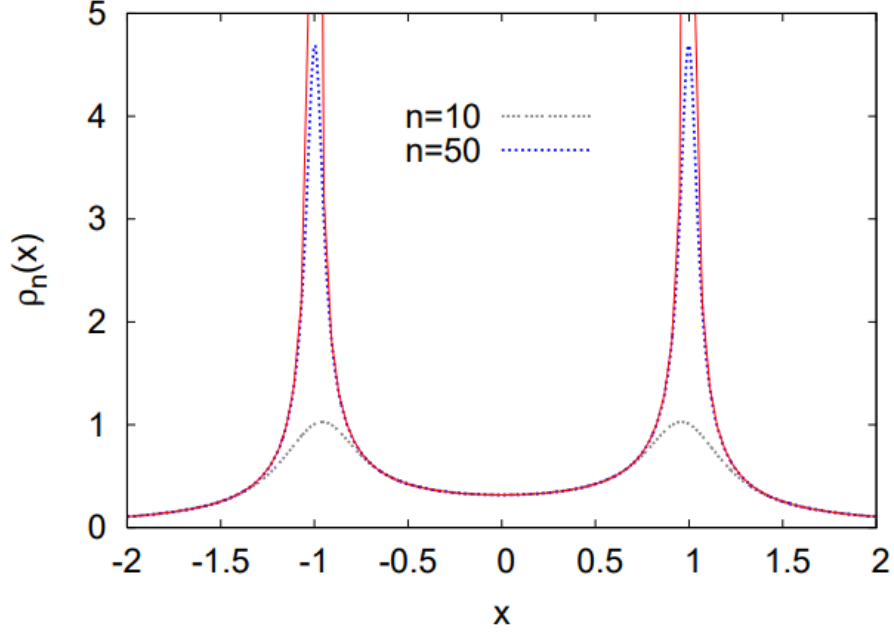
□

Nhận xét: Ta biết thêm một số tính chất sau của mô hình Kac:

Đa số nghiệm tập trung quanh ± 1 , xem hình minh họa 1.2.

- Trong [8], Wilkins đã đưa ra công thức tiệm cận đầy đủ cho kì vọng số nghiệm thực của đa thức Kac là

$$\mathbb{E}[N_{(-\infty,\infty)}(P_{Kac,n})] \sim \frac{2}{\pi} \log n + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p}{n^p}, \quad (1.8)$$



Hình 1.2: Hình ảnh minh họa mật độ số nghiệm thực $\rho_n(x)$ cho mô hình đa thức Jacobi với trường hợp $n = 50, n = 100$. Nguồn: [9].

với các $A_p, p = \overline{0, 5}$ được cho bởi

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \left\{ \log 2 + \int_0^1 (1 - t^2 \operatorname{csch}^2 t)^{1/2} t^{-1} dt \right. \\ \left. - \int_1^\infty \left[1 - (1 - t^2 \operatorname{csch}^2 t)^{1/2} \right] t^{-1} dt, \right.$$

$$A_2 = -\frac{1}{3\pi} \int_0^\infty \left[(1 - t^2 \operatorname{csch}^2 t)^{-1/2} - 1 \right] t dt,$$

$$A_4 = -\frac{1}{180\pi} \int_0^\infty \left[7 - 12(1 - t^2 \operatorname{csch}^2 t)^{-1/2} + 5(1 - t^2 \operatorname{csch}^2 t)^{-3/2} \right] t^3 dt,$$

và $A_1 = A_3 = A_5 = 0$.

1.4 Mô hình Elliptic

Mệnh đề 1.11. Xét đa thức ngẫu thức ngẫu nhiên có dạng sau

$$P_{E,n}(x) = a_0 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 x + \cdots + a_n \varepsilon_n x^n,$$

với a_i là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn tắc,

$$\varepsilon_i = \sqrt{\binom{n}{i}}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Kì vọng số nghiệm thực của đa thức $P_{E,n}(x)$ là

$$\mathbb{E}[N_{\mathbb{R}}(P_{E,n})] = \sqrt{n}.$$

Chứng minh. Vì $\varepsilon_i = \sqrt{\binom{n}{i}}$, nên ma trận covariance là $C = \text{diag}[\binom{n}{i}]$. Do đó

$$v^T(x)Cv(y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^k = (1 + xy)^n.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \log(1 + xy)^n &= \frac{ny}{1 + xy} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(1 + xy)^n &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{ny}{1 + xy} = \frac{n}{(1 + xy)^2}. \end{aligned}$$

Do đó hàm mật độ của các nghiệm là

$$\begin{aligned} \rho_{E,n}(t) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log[v^T(x)Cv(y)] \Big|_{y=x=t} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(1 + xy)^n \Big|_{y=x=t} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{n}{(1 + xy)^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Vì các hệ số của $P_{E,n}(x)$ đối xứng nên

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{\mathbb{R}}(P_{E,n})] &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) dt = 4 \int_0^1 \rho(t) dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{n}}{1 + t^2} dt = \frac{4\sqrt{n}}{\pi} \arctan(t) \Big|_0^1 \\ &= \sqrt{n}. \end{aligned}$$

□

1.5 Mô hình Weyl

Các đa thức Weyl có dạng như sau

$$P_{W,n}(x) = \sum_{i=0}^n a_i \frac{x^i}{\sqrt{i!}},$$

với a_i là các biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phân phối chuẩn tắc. Kỳ vọng số nghiệm thực của $P_{W,n}(x)$ là

$$\mathbb{E} [N_{\mathbb{R}} (P_{W,n})] \sim \left(\frac{2}{\pi} + o(1) \right) \sqrt{n}.$$

Vì a_i là các biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phân phối với kỳ vọng 0 và phương sai 1. Do đó, phương sai của $\frac{a_i}{\sqrt{i!}}$ là $\frac{1}{i!}$.

Áp dụng công thức của Alan Edelman và Eris Kostlan ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{\mathbb{R}} (P_{W,n})] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [v^T(x) C v(y)] \Big|_{y=x=t} \right\}^{1/2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \left[\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} x^i y^i \right] \Big|_{y=x=t} \right\}^{1/2} dt. \end{aligned}$$

Sau đó sử dụng công thức Stirling $i! = \sqrt{2\pi i} (1 + O(i^{-1})) \left(\frac{i}{e}\right)^i$, các tác giả trong [10] thu được

$$\mathbb{E} [N_{\mathbb{R}} (P_{W,n})] = \frac{2}{\pi} \sqrt{n} + O(n^{1/2-c}), c > 0.$$

1.6 Mô hình Schehr - Majumdar

Như ta đã thấy ở trên, tùy thuộc vào mô hình mà ta có các dáng điệu khác nhau cho kỳ vọng số nghiệm thực: $\log n$ hoặc \sqrt{n} . Câu hỏi đặt ra là liệu có một mô hình tổng quát chung để tùy vào tham số, ta có dáng điệu tiệm cận mong muốn. Từ đó, Schehr và Majumdar đã giới thiệu một lớp đa thức ngẫu nhiên thực bậc n có các hệ số là $\sqrt{e^{-k\alpha}} a_k$ với a_k là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn tắc và $\alpha \geq 0$. Trong phần này, chúng tôi sẽ trình bày lại kết quả của Schehr và Majumdar [3] về kỳ vọng số nghiệm thực của lớp đa thức này.

1.6.1 Giới thiệu

Schehr và Majumdar đã đưa ra đa thức ngẫu nhiên $P_{SM,n}(x)$ xác định bởi

$$P_{SM,n}(x) = \sum_{k=0}^n \sqrt{e^{-k\alpha}} a_k x^k, \quad (1.9)$$

với $\alpha \geq 0$ và a_k là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn tắc. Đặt $C_n(x, y) = v^T(x) C v(y)$, với $v(x) = (1, x, \dots, x^n)^T$, $C = e^{-k\alpha} \mathbb{E}(aa^T)$, $a = (a_0, a_1, \dots, a^n)^T$. Khi đó

$$C_n(x, y) = \sum_{k=0}^n e^{-k\alpha} x^k y^k. \quad (1.10)$$

Vì phân phối của a_i và $-a_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) giống nhau nên

$$\mathbb{E} [N_{(-\infty, 0)}(P_{SM,n})] = \mathbb{E} [N_{(0, \infty)}(P_{SM,n})].$$

Do đó ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.12. *Kì vọng số nghiệm thực của đa thức Schehr - Majumdar là*

$$\mathbb{E} [N_{(-\infty, \infty)} P_{SM,n}] = 2\mathbb{E} [N_{(0, \infty)} P_{SM,n}] = 2 \int_0^\infty \rho_n(x), \quad (1.11)$$

với $\rho_{SM,n}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\partial_u \partial_v \log C_n(u, v)}|_{u=v=x}$ và $C_n(x, y) = \sum_{k=0}^n e^{-k\alpha} x^k y^k$.

Schehr và Majumdar đã đưa ra kết quả về kì vọng số nghiệm thực của lớp đa thức này cho từng trường hợp cụ thể của α như sau:

1. Với $\alpha = 0, \alpha = 1$, ta có thể chuyển mô hình đa thức Schehr-Majumdar về mô hình Kac.
2. Với $0 < \alpha < 1$, phần lớn các nghiệm thực của mô hình đa thức Schehr-Majumdar tập trung trong nửa khoảng $[1, \infty)$ và kì vọng số nghiệm thực của đa thức này xấp xỉ kì vọng số nghiệm thực của mô hình đa thức Kac: $\mathbb{E} [N_{(-\infty, \infty)}(P_{SM,n})] \sim \frac{2}{\pi} \log n$.
3. Với $1 < \alpha < 2$, $\mathbb{E} [N_{(-\infty, \infty)}(P_{SM,n})] \sim \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} n^{\alpha/2}$.

4. Với $\alpha > 2$, $\mathbb{E} [N_{(-\infty, \infty)} (P_{SM, n})] \sim n$.

Tuy nhiên, chứng minh của Scher và Majumdar chỉ mang ý nghĩa xấp xỉ vật lí. Chúng tôi sẽ trình bày chi tiết lập luận của họ. Cụ thể, họ cố gắng đưa ra công thức xấp xỉ cho hàm $C_n(x, y)$.

Để thuận lợi cho việc tính toán, đặt $c_n(x) = C_n(x, x)$. Khi đó dễ thấy rằng $c_n(\sqrt{xy}) = C_n(x, y)$.

Viết lại $c_n(x)$ dưới dạng sau

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{-k^\alpha} x^{2k} = \sum_{k=0}^n \exp(-\phi(k, x)),$$

$$\phi(k, x) = k^\alpha - 2k \log x. \quad (1.12)$$

Xét hàm số $\phi(u, x) = u^\alpha - 2u \log x$, với $u \in \mathbb{R}^+$. Khi đó,

$$\partial_u \phi(u, x) = \alpha u^{\alpha-1} - 2 \log x$$

và

$$\partial_u^2 \phi(u, x) = \alpha(\alpha - 1)u^{\alpha-2}.$$

Giá trị của $c_n(x)$ phụ thuộc vào $\phi(u, x)$ như một hàm của u (và cố định x).

Tại $u^*(x) = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ ta có

$$\partial_u \phi(u^*(x), x) = 0, \quad \partial_u^2 \phi(u^*(x), x) = \alpha(\alpha - 1)u^*(x)^{\alpha-2}. \quad (1.13)$$

Bây giờ ta sẽ xét các trường hợp cụ thể đối với α .

1.6.2 Trường hợp $\alpha = 0$

Khi $\alpha = 0$, đa thức Schehr - Majumdar trở thành

$$P_{SM, n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{e}} a_k x^k,$$

với a_k là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn tắc.

Đây chính là đa thức Kac. Như luận văn đã trình bày ở phần mô hình đa thức Kac, kì vọng số nghiệm thực của đa thức Schehr - Majumdar trong trường hợp $\alpha = 0$ là

$$\mathbb{E} [N_{(-\infty, \infty)} (P_{SM, n})] \sim \frac{2}{\pi} \log n.$$

1.6.3 Trường hợp $0 < \alpha < 1$

Khi $0 < \alpha < 1$, $\partial_u^2 \phi(u^*(x), x) = \alpha(\alpha - 1)u^*(x)^{\alpha-2} < 0$. Do đó $\phi(u, x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $u^*(x) = \left(\frac{2}{\alpha} \log x\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Trong trường hợp này, phần lớn các nghiệm của đa thức Schehr - Majumdar trên \mathbb{R}^+ tập trung trong nửa khoảng $[1, +\infty)$. Thật vậy, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.13. *Tồn tại $c \in \mathbb{R}$ sao cho $\mathbb{E} [N_{(0,1)}(P_{SM,n})] < c, \forall n$.*

Chứng minh. Áp dụng công thức Kac - Rice cho đa thức Schehr - Majumdar, ta có kì vọng số nghiệm thực của đa thức này trong khoảng $(0, 1)$ là

$$\mathbb{E} [N_{(0,1)}(P_{SM,n})] = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{A_n(x) \cdot M_n(x) - B_n^2(x)}{M_n^2(x)}} dx.$$

với

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{-k\alpha} k^2 x^{2(k-1)}; M_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{-k\alpha} x^{2k}; B_n(x) = \sum_{k=0}^n k e^{-k\alpha} x^{2k-1}.$$

Với $x \in (0, 1)$ ta có:

$$B_n(x) \geq 0;$$

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{-k\alpha} x^{2k} \geq e^{-0\alpha} x^0 = 1;$$

$$M_n(x) < M_n(1) = \sum_{k=0}^n e^{-k\alpha} \leq c_M;$$

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{-k\alpha} k^2 x^{2(k-1)} < A_n(1) = \sum_{k=0}^n e^{-k\alpha} k^2 \leq c_A,$$

trong đó c_M, c_A là các hằng số.

Suy ra

$$\mathbb{E} [N_{(0,1)}(P_{SM,n})] < \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{c_A c_M} dx = \frac{1}{\pi} \sqrt{c_A c_M}.$$

□

Từ Mệnh đề 1.13 ta có thể kết luận rằng các nghiệm dương của đa thức Schehr - Majumdar tập trung chủ yếu trong nửa khoảng $[1, +\infty)$.

Với $x > 1$, xem $\phi(u, x)$ như là hàm của u trên khoảng $[0, n]$, ta có

$$\phi(0, x) = 0,$$

$$\phi(u^*(x), x) = \left[\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - 2 \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right] (\log x)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} > 0,$$

$$\phi(n, x) = n^\alpha - 2n \log x < 0.$$

Suy ra $\phi(u, x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0, n]$ tại $u = n$. Như thế, tổng $c_n(x)$ trong (1.12) được tạo thành chủ yếu bởi các hạng tử chứa $k \sim n$. Khai triển Taylor của $\phi(k, x)$ xung quanh $k = n$ thu được

$$\begin{aligned} \phi(k, x) &= \phi(n, x) + (k - n)\phi'(n, x) + \dots \\ &= n^\alpha - 2n \log x + (k - n)(\alpha n^{\alpha-1} - 2 \log x) + \dots \\ &= (1 - \alpha)n^\alpha + k(\alpha n^{\alpha-1} - 2 \log x) + \dots, \end{aligned} \quad (1.14)$$

với các hạng tử bậc cao hơn có thể bị loại bỏ khi n lớn vì $\partial^j \phi(n, x) / \partial u^j = O(n^{\alpha-j})$, $j \geq 2$. Do đó, với $\alpha < 1$,

$$c_n(x) \sim e^{-(1-\alpha)n^\alpha} \sum_{k=0}^n (x e^{-\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}})^{2k}. \quad (1.15)$$

Đặt $\tilde{x} = x e^{-\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}}$. Khi đó, (1.15) trở thành

$$c_n(\tilde{x}) \sim e^{-(1-\alpha)n^\alpha} \sum_{k=0}^n \tilde{x}^{2k},$$

có dạng giống $c_n(x)$ của phương trình Kac.

Ta có thể dùng kết quả của đa thức Kac để thu được rằng $x e^{-\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}} - 1 = O(n^{-1})$. Hay nói cách khác, các nghiệm thực của đa thức (1.9) tập trung trong miền với độ rộng $1/n$ xung quanh $e^{\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}} = 1 + \frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-2})$ và phân phối này giống như phân phối nghiệm thực của đa thức Kac (tương ứng với $\alpha = 0$). Do đó số nghiệm thực của đa thức Schehr - Majumda giống với đa thức Kac,

$$\mathbb{E} [N_{(-\infty, \infty)}(P_{SM, n})] \sim \frac{2}{\pi} \log n,$$

không phụ thuộc vào α , với $0 < \alpha < 1$.

1.6.4 Trường hợp $\alpha = 1$

Khi $\alpha = 1$, đa thức Schehr - Majumdar trở thành

$$P_{SM, n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{e^k}} a_k x^k,$$

với a_k là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn tắc.

Đặt $\tilde{x} = x.e^{-1/2}$. Khi đó, ta thu được đa thức

$$P_{SM,n}(\tilde{x}) = \sum_{k=0}^n a_k \tilde{x}^k,$$

chính là đa thức Kac.

Do đó, kì vọng số nghiệm thực của đa thức Schehr - Majumdar trong trường hợp $\alpha = 1$ bằng kì vọng số nghiệm thực của đa thức trên,

$$\mathbb{E} [N_{(-\infty, \infty)}(P_{SM,n})] \sim \frac{2}{\pi} \log n.$$

1.6.5 Trường hợp $\alpha > 1$

Ngược lại với trường hợp $0 < \alpha < 1$, khi $\alpha > 1$,

$$\partial_u^2 \phi(u^*(x), x) = \alpha(\alpha - 1)u^*(x)^{\alpha-2} > 0$$

và do đó $\phi(u, x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $u^*(x)$. Trong trường hợp này, tổng $c_n(x)$ trong (1.12) được tạo thành chủ yếu bởi các hạng tử chứa $k \sim u^*(x)$. Viết lại $c_n(x)$ dưới dạng sau

$$c_n(x) = e^{-\phi(u^*(x), x)} \sum_{k=0}^n e^{-\tilde{\phi}(k, x)}, \quad (1.16)$$

với $u^*(x)$ là điểm làm cho hàm $\phi(u, x)$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$u^*(x) = \left(\frac{2}{\alpha} \log x \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad (1.17)$$

và

$$\begin{aligned} \phi(u^*(x), x) &= (1 - \alpha)u^*(x)^\alpha, \\ \tilde{\phi}(k, x) &= \phi(k, x) - \phi(u^*(x), x) = k^\alpha - \alpha [u^*(x)]^{\alpha-1} + (\alpha - 1) [u^*(x)]^\alpha. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Từ (1.16), (1.17) và (1.18), ta có các biểu diễn sau

$$u^*(\sqrt{xy}) = \left(\frac{2}{\alpha} \log(xy) \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}\partial_x u^*(\sqrt{xy}) &= \frac{2}{\alpha} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{xy}} \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \left(\frac{2}{\alpha} \log(xy) \right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \\ &= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \frac{1}{x} [u^*(\sqrt{xy})]^{2-\alpha},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_x \phi(u^*(\sqrt{xy}), \sqrt{xy}) &= \partial_x ((1-\alpha) [u^*(\sqrt{xy})]^\alpha) \\ &= -\frac{1}{x} [u^*(\sqrt{xy})],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{x,y}^2 \phi(u^*(\sqrt{xy}), \sqrt{xy}) &= \partial_y \left(-\frac{1}{x} [u^*(\sqrt{xy})] \right) \\ &= -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \frac{1}{xy} [u^*(\sqrt{xy})]^{2-\alpha},\end{aligned}\quad (1.20)$$

$$\partial_x \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) = \frac{1}{x} [u^*(\sqrt{xy}) - k],$$

$$\partial_{xy}^2 \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) = \frac{1}{x} \partial_y [u^*(\sqrt{xy})] = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \frac{1}{xy} [u^*(\sqrt{xy})]^{2-\alpha}.\quad (1.21)$$

Để thuận tiện cho việc tính $\rho_{SM,n}(x)$, với hàm $g(k)$ bất kì đặt

$$\langle g(k) \rangle_Z = \frac{\sum_{k=0}^n g(k) \exp(-\tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}))}{\sum_{k=0}^n \exp(-\tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}))}.\quad (1.22)$$

Từ (1.16) ta có

$$c_n(\sqrt{xy}) = e^{-\phi(u^*(\sqrt{xy}), \sqrt{xy})} \sum_{k=0}^n e^{-\tilde{\phi}(k, \sqrt{xy})}.$$

Qua một số bước biến đổi đại số ta thu được

$$\begin{aligned}\partial_x \log c_n(\sqrt{xy}) &= -\partial_x \phi(u^*, \sqrt{xy}) - \left\langle \partial_x \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) \right\rangle_Z, \\ \partial_x \partial_y \log c_n(\sqrt{xy}) &= -\partial_{x,y}^2 \phi(u^*(\sqrt{xy}), \sqrt{xy}) - \left\langle \partial_{x,y}^2 \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) \right\rangle_Z \\ &\quad + \left\langle \partial_x \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) \partial_y \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) \right\rangle_Z - \left\langle \partial_x \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) \right\rangle_Z \left\langle \partial_y \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) \right\rangle_Z.\end{aligned}$$

Từ (1.20) và (1.21) suy ra

$$\partial_{xy}^2 \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) = -\partial_{x,y}^2 \phi(u^*(\sqrt{xy}), \sqrt{xy}),$$

hay

$$\left\langle \partial_{x,y}^2 \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) \right\rangle_Z = -\partial_{x,y}^2 \phi(u^*(\sqrt{xy}), \sqrt{xy}).$$

Do đó

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_y \log c_n(\sqrt{xy}) &= \left\langle \partial_x \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) \partial_y \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) \right\rangle_Z \\ &\quad - \left\langle \partial_x \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) \right\rangle_Z \left\langle \partial_y \tilde{\phi}(k, \sqrt{xy}) \right\rangle_Z. \end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned} \rho_{SM,n}(x) &= \rho_{SM,n}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\partial_u \partial_v \log C_n(u, v)} \Big|_{u=v=x} \\ &= \frac{1}{\pi x} \left\{ \frac{\sum_{k=0}^n (k - u^*(x))^2 e^{-\phi(k,x)}}{\sum_{k=0}^n e^{-\phi(k,x)}} - \left[\frac{\sum_{k=0}^n (k - u^*(x)) e^{-\phi(k,x)}}{\sum_{k=0}^n e^{-\phi(k,x)}} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Khai triển Taylor của $\phi(k, x)$ xung quanh $k \sim u^*(x)$

$$\phi(k, x) = \phi(u^*(x), x) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-j+1)}{j!} (k - u^*(x))^j [u^*(x)]^{\alpha-j}. \quad (1.24)$$

Khi x lớn, $u^*(x) \propto (\log x)^{1/(\alpha-1)}$ cũng lớn theo, do đó có thể chỉ giữ lại hạng tử chứa $j = 2$ ở (1.24)

$$\phi(k, x) \sim \phi(u^*(x), x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} (k - u^*(x))^2 [u^*(x)]^{\alpha-2}$$

và khi đó

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n g(k - u^*(x)) \exp - \phi(k, x) \\ &\sim e^{-\phi(u^*(x), x)} \sum_{k=0}^n g(k - u^*(x)) \exp \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} (k - u^*(x))^2 [u^*(x)]^{\alpha-2} \right], \end{aligned} \quad (1.25)$$

với $g(z) = z$ hoặc $g(z) = z^2$. Để thuận tiện cho việc tính toán ở phần sau, đặt $u^*(x) = [u^*(x)] + b$, với $0 < b < 1$ và $[u^*(x)]$ là phần nguyên của $u^*(x)$.

Lúc này (1.25) trở thành

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n g(k - u^*(x)) \exp -\phi(k, x) \\ & \sim e^{-\phi(u^*(x), x)} \sum_{m=-[u^*(x)]}^{n-[u^*(x)]} g(m - b) \exp \left[\frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} (m - b)^2 [u^*(x)]^{\alpha-2} \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

Bởi vì $[u^*(x)]^{\alpha-2} \propto (\log x)^{(\alpha-2)/(\alpha-1)}$, phụ thuộc vào dấu của $\alpha - 2$, ta sẽ xét riêng các trường hợp $1 < \alpha < 2$, $\alpha > 2$.

Trường hợp $1 < \alpha < 2$

Trong trường hợp này $[u^*(x)]^{\alpha-2} \rightarrow 0$ khi $u^*(x)$ lớn và do đó tổng rời rạc ở (1.26) có thể được thay thế bởi tích phân. Với n lớn và $x < \exp(\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1})$,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n g(k - u^*(x)) \exp(-\phi(k, x)) \\ & \sim e^{-\phi(u^*(x), x)} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \exp \left[\frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} (y)^2 [u^*(x)]^{\alpha-2} \right] dy. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Nếu $g(z) = 1$ thì (1.27) trở thành

$$\sum_{k=0}^n \exp(-\phi(k, x)) \propto \sqrt{2\pi} \left[\frac{u^*(x)^{2-\alpha}}{\alpha(\alpha - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.28)$$

và tương tự, nếu $g(z) = z^2$ thì

$$\sum_{k=0}^n (k - u^*(x))^2 \exp(-\phi(k, x)) \propto \sqrt{2\pi} \left[\frac{u^*(x)^{2-\alpha}}{\alpha(\alpha - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.29)$$

trong khi $\sum_{k=0}^n (k - u^*(x)) \exp(-\phi(k, x)) \sim 0$. Do đó từ (1.23), (1.28), (1.29)

ta thu được giá trị của $\rho_{SM,n}(x)$ khi x lớn như sau

$$\rho_{SM,n}(x) \sim \frac{1}{\pi x} \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha - 1)}} \left(\frac{2}{\alpha} \log x \right)^{\frac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}}. \quad (1.30)$$

Bây giờ ta sẽ tính $\mathbb{E} [N_{(-\infty, \infty)}(P_{SM,n})] = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{SM,n}(x) dx$. Với $\alpha > 1$, chuỗi số trong định nghĩa của $c_n(x)$ ở (1.12) có bán kính hội tụ vô hạn do đó $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{SM,n}(x) dx = O(1)$ khi $n \rightarrow \infty$. Ngoài ra, với $x \gg e^{\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}}$,

$$\rho_{SM,n}(x) \sim \sqrt{\frac{e^{-k^{n-1}}}{e^{-k^n}} \frac{1}{\pi x^2}} \sim \frac{e^{\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}}}{\pi x^2}, \quad (1.31)$$

và điều đó có nghĩa là $\int_{e^{\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}}}^{\infty} \rho_{SM,n}(x) dx = O(1)$ khi $n \rightarrow \infty$.

Như vậy phần lớn các nghiệm thực dương của (1.9) tập trung chủ yếu trên đoạn $[1, e^{\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}}]$. Kết hợp với (1.11) ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [N_{(-\infty, \infty)}(P_{SM,n})] &= 2 \int_1^{e^{\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}}} \rho_{SM,n}(x) dx \\ &\sim 2 \int_1^{e^{\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}}} \frac{1}{\pi x} \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \left(\frac{2}{\alpha} \log x\right)^{\frac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}} \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \left(\frac{2}{\alpha} t\right)^{\frac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{2\alpha-2}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}} t^{\frac{\alpha}{2\alpha-2}} \Big|_0^{\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}} \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} n^{\alpha/2}. \end{aligned}$$

Trường hợp $\alpha > 2$

Trong trường hợp này, tổng rời rạc ở (1.26) khác với trường hợp $1 < \alpha < 2$. Khi $\alpha > 2$, $[u^*(x)]^{\alpha-2} \propto (\log x)^{(\alpha-2)/(\alpha-1)} \rightarrow \infty$ với x lớn. Do đó với x lớn, $m = 0$ nếu $b < 1/2$ hoặc $m = 1$ nếu $b > 1/2$. Suy ra

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n g(k - u^*(x)) \exp(-\phi(k, x)) \\ &\propto g(-b) \exp\left[-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} b^2 u^*(x)^{\alpha-2}\right] \\ &+ g(1-b) \exp\left[-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} (1-b)^2 u^*(x)^{\alpha-2}\right]. \quad (1.32) \end{aligned}$$

Sử dụng (1.32) ta thu được $\rho_{SM,n}(x)$ trong (1.23) như sau

$$\rho_{SM,n}(x) \sim \frac{2}{(\pi x) \cosh} \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} Y^{\alpha-2} (1-2b) \right], Y = \left(\frac{2}{\alpha} \log x \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (1.33)$$

Từ đó

$$\widehat{\rho}_{SM,n}(Y = [Y] + b) \sim \frac{\alpha(\alpha-1)Y^{\alpha-2}}{2\pi \cosh \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} Y^{\alpha-2} (1-2b) \right]}. \quad (1.34)$$

Từ $\rho_{SM,n}(x)$ ta có thể tính được kì vọng số nghiệm thực của đa thức (1.9). Giống như ở trường hợp $\alpha < 2$, phần lớn nghiệm thực nằm trong các đoạn $[-e^{\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}}, -1]$ và $[1, e^{\frac{\alpha}{2}n^{\alpha-1}}]$. Do vậy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [N_{(-\infty, \infty)}(P_{SM,n})] &= 2 \int_0^\infty \rho_{SM,n}(x) dx \sim 2 \int_0^n \widehat{\rho}_{SM,n}(Y) dY \\ &\sim \sum_{k \gg 1}^n \int_0^1 \frac{\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}}{\pi \cosh \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} k^{\alpha-2} (1-2b) \right]} db \\ &\sim \sum_{k \gg 1}^n \int_{-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} k^{\alpha-2}}^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} k^{\alpha-2}} \frac{dz}{\pi \cosh z} \\ &\sim n \quad (\text{vì } \int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{\cosh z} = \pi). \end{aligned}$$

1.7 Chuỗi lũy thừa ngẫu nhiên

Cho $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ là dãy vô hạn các biến ngẫu nhiên độc lập. Khi đó, chuỗi số

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k \quad (1.35)$$

được gọi là *chuỗi lũy thừa ngẫu nhiên*.

Chuỗi ngẫu nhiên đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Giá trị của chuỗi được hoàn toàn xác định trong khoảng $(-1, 1)$ dựa vào kết quả sau, xem [7].

Bổ đề 1.14. Bán kính hội tụ r của chuỗi lũy thừa $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ bằng 1 hầu chắc chắn.

Dựa trên công thức đã được đưa ra, Edelman và Kostlan đã chứng minh kết quả sau cho số nghiệm thực của chuỗi ngẫu nhiên.

Định lý 1.15. Xét chuỗi lũy thừa ngẫu nhiên

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, \quad (1.36)$$

với a_k là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối chuẩn tắc.

Kì vọng số nghiệm thực của chuỗi (1.36) trên bất kì khoảng $[a, b]$ thuộc khoảng $(-1, 1)$ là

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{(1+a)(1-b)}{(1-a)(1+b)}.$$

Chứng minh. Ta có $v(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ và ma trận covariance

$$C = E(aa^T) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(a_0^2) & \mathbb{E}(a_0a_1) & \mathbb{E}(a_0a_2) & \dots \\ \mathbb{E}(a_0a_1) & \mathbb{E}(a_1^2) & \mathbb{E}(a_1a_2) & \dots \\ \mathbb{E}(a_0a_2) & \mathbb{E}(a_1a_2) & \mathbb{E}(a_2^2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Khi đó

$$v(x)^T C v(y) = \sum_{i=0}^{\infty} (xy)^i. \quad (1.37)$$

Chuỗi lũy thừa (1.36) có bán kính hội tụ bằng 1. Do đó ta có thể giả sử $-1 < x < 1$. Trong trường hợp này, $\sum_{i=0}^{\infty} (xy)^i$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn. Do đó

$$v(x)^T C v(y) = \frac{1}{1-xy}.$$

Kì vọng số nghiệm thực của chuỗi (1.36) trên bất kì đoạn $[a, b]$ thuộc khoảng $(0, 1)$ là

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [N_{[a,b]}(f)] &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [v^T(x)Cv(y)] \Big|_{y=x=t} \right)^{1/2} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \left(\frac{1}{1-xy} \right) \Big|_{y=x=t} \right)^{1/2} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{1-t^2} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \log \frac{(1+a)(1-b)}{(1-a)(1+b)}.
\end{aligned}$$

□

Ta thấy rằng kì vọng số nghiệm thực của đa thức $P_{Kac,n}(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ (với a_i là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối chuẩn tắc) trên đoạn $[a, b]$ bất kì là

$$\mathbb{E} [N_{[a,b]}(P_{Kac,n})] = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{1}{(1-x^2)^2} - \frac{(n+1)^2 x^{2n}}{(x^{2n+2}-1)^2}} dx.$$

Từ đó, một cách trực giác, kì vọng số nghiệm thực của chuỗi (1.36) trên bất kì đoạn $[a, b]$ thuộc $(0, 1)$ là

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [N_{[a,b]}(f)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [N_{[a,b]}(P_{Kac,n})] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{1}{(1-x^2)^2} - \frac{(n+1)^2 x^{2n}}{(x^{2n+2}-1)^2}} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{(1-x^2)^2} - \frac{(n+1)^2 x^{2n}}{(x^{2n+2}-1)^2}} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{1-t^2} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \log \frac{(1+a)(1-b)}{(1-a)(1+b)}.
\end{aligned}$$

1.7.1 Chuỗi lũy thừa với các hệ số tương quan

Câu hỏi được quan tâm nghiên cứu trong mục này là: Sự tương quan giữa các hệ số của chuỗi có ảnh hưởng gì đến mật độ của các nghiệm? Chúng ta sẽ xem xét trường hợp tổng quát của đa thức ở Định lý 1.15 để tìm hiểu mối liên hệ giữa sự tương quan của các hệ số của chuỗi lũy thừa và mật độ các nghiệm.

Xét chuỗi lũy thừa

$$f_r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, \quad (1.38)$$

với a_k là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc và với mọi k , $\text{cov}(a_k, a_{k+1}) = r$ (r là hằng số) và $\text{cov}(a_k, a_{k+h}) = 0, \forall h \geq 2$. Ta tạm thời giả sử sự hội tụ của chuỗi trong đoạn $[a, b] \subset (-1, 1)$ trong trường hợp này.

Khi đó ta có ma trận covariance của phân phối chuẩn nhiều chiều $(a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots)^T$ là

$$C = \mathbb{E}(aa^T) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(a_0^2) & \mathbb{E}(a_0a_1) & \mathbb{E}(a_0a_2) & \dots \\ \mathbb{E}(a_0a_1) & \mathbb{E}(a_1^2) & \mathbb{E}(a_1a_2) & \dots \\ \mathbb{E}(a_0a_2) & \mathbb{E}(a_1a_2) & \mathbb{E}(a_2^2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r & 0 & \dots \\ r & 1 & r & \dots \\ 0 & r & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Định lý Gershgorin nói rằng mỗi giá trị riêng của ma trận đều nằm trong ít nhất một hình tròn $D(a_{ii}, R_i)$, với $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Xét ma trận C ta có $R_i \leq 1 + 2r$. Do đó bán kính phổ (tức giá trị tuyệt đối lớn nhất của tất cả các giá trị riêng) của ma trận C không lớn hơn $1 + 2r$.

Đặt $v(x) = (1 \ x \ x^2 \ \dots)^T$. Ta có

$$v(x)^T C v(y) = [1 + r(x + y)] \sum_{i=0}^{\infty} (xy)^i = \frac{1 + r(x + y)}{1 - xy},$$

do đó mật độ của các nghiệm của (1.38) là

$$\rho_r(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [v^T(x) C v(y)] \Big|_{y=x=t} \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \left[\frac{1 + r(x+y)}{1 - xy} \right] \Big|_{y=x=t} \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{(1-t^2)^2} - \frac{r^2}{(1+2rt)^2}}.
\end{aligned}$$

Nhận xét: Do $\rho_r(t) < \frac{1}{\pi(1-t^2)}$, mối tương quan giữa các hệ số trong chuỗi (1.38) làm giảm mật độ của các nghiệm, kéo theo ta sẽ có ít nghiệm hơn.

1.7.2 Chuỗi Dirichlet ngẫu nhiên

Xét chuỗi Dirichlet

$$f(x) = a_1 + \frac{a_2}{2^x} + \frac{a_3}{3^x} + \dots,$$

với a_k là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối chuẩn tắc. Chuỗi này hội tụ với xác suất 1 nếu $x > \frac{1}{2}$.

Trong trường hợp này, $v(x) = (1, \frac{1}{2^x}, \frac{1}{3^x}, \dots)^T$ và $C = \text{diag}[1]$. Do đó

$$v(x)^T C v(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{x+y}} = \zeta(x+y),$$

với ζ là hàm zeta $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Khi đó, kì vọng số nghiệm thực của chuỗi (1.7.2) trên bất kì đoạn $[a, b] \subset (\frac{1}{2}, \infty)$ là

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\log \zeta(x+y))} dt. \quad (1.39)$$

Kết luận: Như vậy, từ bài toán Buffon trên mặt phẳng ta có thể phát biểu nó trên mặt cầu để từ đó tìm ra mối liên hệ giữa kì vọng số giao điểm của đường cong với đường xích đạo và kì vọng số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên có hệ số là các biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn. Kì vọng số nghiệm thực của đa thức dạng này bằng số giao điểm giữa đường cong và đường xích đạo trên hình cầu S^n . Từ mối liên hệ đó ta có thể đưa ra được các cách để tính kì vọng số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên (Định lý 1.5, Định lý 1.7) và của cả chuỗi lũy thừa ngẫu nhiên.

CHƯƠNG 2

MỞ RỘNG NHIỀU CHIỀU

Các kết quả của Edelman và Kostlan không chỉ dừng lại ở việc chứng minh lại và đưa ra ý nghĩa hình học của công thức Kac-Rice mà còn có thể mở rộng cho các đối tượng phức tạp hơn. Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày kì vọng số nghiệm thực của các hàm ngẫu nhiên trong trường hợp đa tạp tổng quát và các phân phối khác.

2.1 Trường hợp đa tạp tổng quát

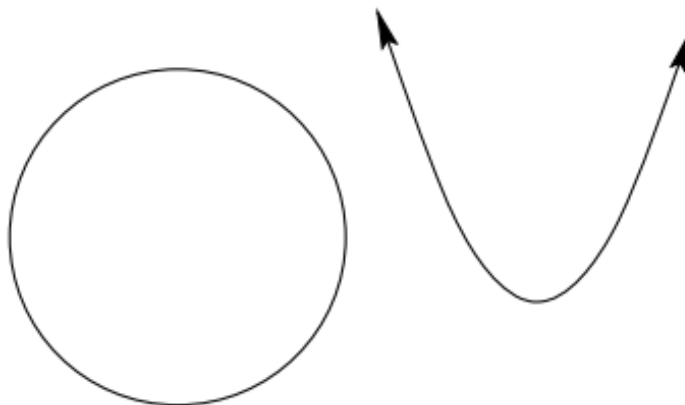
2.1.1 Đa tạp

Định nghĩa 2.1. (*Đa tạp*) Một đa tạp tô pô n chiều là không gian tô pô tách được với mỗi điểm của nó có một lân cận đồng phôi với một tập mở trong không gian Euclide n chiều. Đa tạp chính là khái niệm toán học mở rộng của đường và mặt.

Ta có một số ví dụ sau, xem [11].

1. Những đa tạp một chiều là các đường thẳng và đường cong. Các ví dụ đơn giản nhất là đường thẳng thực, đường tròn hoặc đồ thị của bất kì hàm số liên tục nào có dạng $y = f(x)$. Trong những ví dụ này, một điểm có thể được xác định bởi một số thực riêng lẻ. Ví dụ, một điểm trên đường thẳng thực là một số thực. Chúng ta có thể xác định mỗi điểm trên đường tròn bằng góc của nó, mỗi điểm trên đồ thị bởi tọa độ x của nó.

2. Những ví dụ phổ biến nhất về đa tạp hai chiều là mặt phẳng và mặt cầu. Khi nói về mặt cầu trong toán học, ta thường hiểu nó là bề mặt. Ví dụ như mặt cầu trong \mathbb{R}^3 có hai chiều.



Hình 2.1: Ví dụ về đa tạp một chiều. Nguồn: [11].

Định nghĩa 2.2. (*Thể tích của đa tạp*)

Cho $t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$, $v(t) = (f_0(t), \dots, f_n(t))^T$ ($f_i(t)$ là các hàm khả vi), M là đa tạp m chiều, U là tập đo được của \mathbb{R}^m và

$$\begin{aligned} \gamma(t) : U &\rightarrow M \\ t &\rightarrow \gamma(t) = \frac{v(t)}{\|v(t)\|}. \end{aligned}$$

Khi đó, thể tích của M là

$$|M| = \int_U \sqrt{\det \left([D_\gamma(t)]^T [D_\gamma(t)] \right)} |d^m t|,$$

với $D_\gamma(t)$ là ma trận Hessian của $\gamma(t)$.

Mở rộng công thức Buffon trên mặt cầu, ta có công thức sau, xem [5]:

Định lý 2.3. (*Công thức hình học tích phân*) Xét hai đa tạp con M và N của mặt cầu S^{m+n} , với M và N lần lượt có m và n chiều. Nếu Q là ma trận trực giao ngẫu nhiên cỡ $m+n+1$ thì kì vọng số giao điểm của M và phép quay

ngẫu nhiên N bằng 2 lần tích các thể tích của M và N chia cho tích của thể tích các mặt cầu.

$$\mathbb{E}(\#(M \cap QN)) = \frac{2}{|S^m| |S^n|} |M| |N|. \quad (2.1)$$

Ta có công thức thể tích các mặt cầu đơn vị như sau:

$$|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

với Γ là hàm gamma $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$.

Áp dụng Định lý 2.3 ta có kết quả sau.

Bổ đề 2.4. Chọn đoạn $[a, b]$ và hàm ngẫu nhiên

$$G(t) = a_0 f_0(t) + a_1 f_1(t) + \dots + a_n f_n(t), \quad t \in [a, b], \quad (2.2)$$

với a_i là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối chuẩn tắc.

Tạo một đường cong ngẫu nhiên trong \mathbb{R}^k bằng cách chọn mẫu độc lập của k hàm như thế. Khi đó, kì vọng độ dài của hình chiếu của đường cong này trên mặt cầu đơn vị trong \mathbb{R}^k bằng π lần kì vọng số nghiệm của hàm ngẫu nhiên đã chọn trên đoạn ta xét.

Chứng minh. Xét N là hình chiếu trên mặt cầu đơn vị của đường cong ngẫu nhiên được sinh ra bằng cách chọn mẫu độc lập của k hàm như $G(t)$. Ta thấy QN và N có cùng phân phối. Chọn M là giao của siêu phẳng $x_1 = 0$ với mặt cầu S^{k-1} . Số giao điểm của đường cong với M chính là số nghiệm của tọa độ đầu tiên của đường cong và đó cũng là nghiệm của hàm ngẫu nhiên $G(t)$.

Theo Định lý 2.3 ta có

$$\mathbb{E}N_{[a,b]}G(t) = \mathbb{E}(\#(M \cap QN)) = \frac{2}{|S^m| |S^n|} |M| \mathbb{E}(|N|).$$

Trong trường hợp này $n = 1$, $S^m = M$, $|S^n| = |S^1| = 2\pi$. Do vậy

$$\mathbb{E}(|N|) = \pi \cdot \mathbb{E}N_{[a,b]}G(t).$$

□

Chú ý: Điều thú vị của công thức kì vọng độ dài của hình chiếu đường cong ở trên là nó không phụ thuộc vào k .

2.1.2 Đa thức ma trận

Định nghĩa 2.5. Đa thức ma trận là đa thức có các hệ số là các ma trận vuông.

Đa thức ma trận có dạng

$$P(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_n t^n,$$

với A_i là các ma trận vuông cỡ $p \times p$.

Chú ý: Nghiệm của phương trình $\det(P(t)) = 0$ là các giá trị riêng của đa thức ma trận.

Ta có định lí sau.

Định lý 2.6. Cho $f_0(t), \dots, f_n(t)$ là các hàm khả vi và A_0, \dots, A_n là các ma trận cỡ $p \times p$ sao cho các vector ngẫu nhiên p^2 chiều $((A_0)_{ij}, (A_1)_{ij}, \dots, (A_n)_{ij})$, $(i, j = \overline{1, p})$ có phân phối chuẩn nhiều chiều với kì vọng 0 và ma trận covariance C . Đặt α_p là kì vọng số nghiệm thực trên đoạn $[a, b]$ của phương trình

$$0 = \det[A_0 f_0(t) + A_1 f_1(t) + \cdots + A_n f_n(t)].$$

Khi đó ta có

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_1} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma((p+1)/2)}{\Gamma(p/2)},$$

α_1 có thể được tính từ Định lý 1.5.

Chứng minh. Xét đường cong γ xác định bởi

$$A(t) = A_0 f_0(t) + A_1 f_1(t) + \cdots + A_n f_n(t),$$

trên khoảng $[a, b]$, và $\gamma(t) = \frac{A(t)}{\|A(t)\|_F}$, với $\|A(t)\|_F$ là chuẩn Frobenius của ma trận A , $\|A(t)\|_F = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$.

Theo Bổ đề 2.4 ta có kì vọng chiều dài của hình chiếu $\gamma(t)$ là $\alpha_1 \pi$.

Ta sẽ áp dụng Định lý [2.3](#) với M là tập các ma trận suy biến trên S^{p^2-1} , và N là đường cong tham số $\gamma(t)$ ở trên. Do đó kì vọng số giá trị t sao cho $\gamma(t)$ suy biến là

$$\alpha_p = \frac{2}{2\pi} \frac{|M||N|}{S^{p^2-2}}. \quad (2.3)$$

Dễ thấy M là đa tạp có chiều $p^2 - 2$. Thể tích của M (được tính trong [\[12\]](#)) là

$$|M| = \frac{2\pi^{p^2/2}\Gamma((p+1)/2)}{\Gamma(p/2)\Gamma((p^2-1)/2)}. \quad (2.4)$$

Thể tích của N chính bằng chiều dài kì vọng của hình chiếu $\gamma(t)$:

$$|N| = \pi\alpha_1. \quad (2.5)$$

Thể tích của mặt cầu S^{p^2-2} là

$$|S^{p^2-2}| = \frac{2\pi^{(p^2-1)/2}}{\Gamma((p^2-1)/2)}. \quad (2.6)$$

Thay [\(2.4\)](#), [\(2.5\)](#), [\(2.6\)](#) vào [\(2.3\)](#) ta thu được

$$\alpha_p = \frac{1}{\pi} \frac{2\pi^{p^2/2}\Gamma((p+1)/2)}{\Gamma(p/2)\Gamma((p^2-1)/2)} \pi\alpha_1 \frac{\Gamma((p^2-1)/2)}{2\pi^{(p^2-1)/2}}.$$

Suy ra

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_1} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma((p+1)/2)}{\Gamma(p/2)}.$$

□

2.2 Hệ phương trình ngẫu nhiên

2.2.1 Số nghiệm thực của hệ phương trình ngẫu nhiên

Ở phần này, ta sẽ mở rộng các kết quả đối với các phương trình ngẫu nhiên một biến được trình bày ở các phần trước với trường hợp hệ m phương trình m ẩn.

Định lý 2.7. Cho vector $v(t) = (f_0(t), \dots, f_n(t))^T$, $v(t) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ($f_i(t)$ là các hàm khả vi), U là tập đo được của \mathbb{R}^m , và A là ma trận ngẫu nhiên cỡ $m \times (n+1)$. Giả sử các hàng của A là các vector ngẫu nhiên chuẩn nhiều

chiều với kì vọng 0, ma trận covariance C và các thành phần của vector độc lập, có cùng phân phối.

Kì vọng số nghiệm thực thuộc tập U của hệ phương trình

$$Av(t) = 0$$

là

$$\pi^{-\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \int_U \left(\det \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} (\log v(x)^T C v(y)) \Big|_{y=x=t} \right]_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (2.7)$$

Chứng minh. Xét đa tạp con M và N lần lượt có m và $n - m$ chiều.

Đặt $\omega(t) = C^{1/2}v(t)$, $B = AC^{-1/2}$. Khi đó phương trình $Av(t) = 0$ trở thành $B\omega(t) = 0$.

Ta lấy M là hình chiếu của đường cong $\{\omega(t) : t \in U\}$ lên hình cầu đơn vị, tức $M = \left\{ \frac{\omega(t)}{\|\omega(t)\|}, t \in U \right\}$. Chọn N là giao của mặt phẳng $n - m + 1$ chiều với hình cầu, tức là $N = S^{n-m} \subset S^n$.

Áp dụng Định lý 2.3 ta có kì vọng số giao điểm của M và mặt phẳng $n - m + 1$ chiều là

$$\mathbb{E}(\#(M \cap N)) = \frac{2}{|S^m| |S^{n-m}|} |M| |N| = \frac{2|M|}{|S^m|} = \pi^{-\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) |M|. \quad (2.8)$$

Số nghiệm của phương trình $B\omega(t) = 0$ chính là số giao điểm của M và hạt nhân của B .

Theo Định lý 2.2, thể tích của M là

$$|M| = \int_U \sqrt{\det \left([D_\gamma(t)]^T [D_\gamma(t)] \right)} |d^m t|,$$

với $\gamma(t) = \frac{\omega(t)}{\|\omega(t)\|}$.

Ta có

$$\det \left([D_\gamma(t)]^T [D_\gamma(t)] \right) = \det |D_i \gamma(t) D_j \gamma(t)|_{ij},$$

với $D_i \gamma(t)$ là đạo hàm của hàm $\gamma(t)$ theo t_i . Tương tự như phần chứng minh ở mục 1.1.4,

$$D_i \gamma(t) D_j \gamma(t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} \log [v^T(x) C v(y)] \Big|_{y=x=t}.$$

Do đó

$$|M| = \int_U \left(\det \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} (\log v(x)^T C v(y)) \Big|_{y=x=t} \right]_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.9)$$

Thay (2.9) vào (2.8) ta thu được công thức (2.7). \square

2.2.2 Ví dụ về hệ phương trình ngẫu nhiên

Xét hệ gồm m đa thức ngẫu nhiên. Mỗi đa thức thứ k đều có bậc d và có dạng

$$\sum_{\sum_{k=1}^m i_k \leq d} a_{i_1, \dots, i_m}^k \prod_{j=1}^m x_j^{i_j}, \quad (2.10)$$

với a_{i_1, \dots, i_m}^k là các biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với kì vọng 0 và phương sai

$$\binom{d}{i_1, \dots, i_m} = \frac{d!}{(d - \sum_{j=1}^m i_j)! \prod_{k=1}^m i_k!}.$$

Đặt $v(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$. Ta có

$$v(x)^T C v(y) = \sum_{i_1, \dots, i_m} \binom{d}{i_1, \dots, i_m} \prod_{k=1}^m x^{i_k} y^{i_k} = (1 + x \cdot y)^d.$$

Hàm mật độ của số các nghiệm của hệ đa thức có dạng như trên là

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \pi^{-\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\det \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} (\log v(x)^T C v(y)) \Big|_{y=x=t} \right]_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \pi^{-\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\det \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} (\log (1 + x \cdot y)^d) \Big|_{y=x=t} \right]_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \pi^{-\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \frac{d^{m/2}}{(1 + t \cdot t)^{(m+1)/2}}. \end{aligned}$$

Nói cách khác, số nghiệm thực được phân bố đều trên không gian xạ ảnh thực, và kì vọng số nghiệm thực của đa thức có dạng (2.10) là $d^{m/2}$.

Shub và Smale đã tổng quát kết quả trên như sau (Xem [13]):

Định lý 2.8. Xét m đa thức ngẫu nhiên. Mỗi đa thức thứ k bậc d_k có dạng

$$\sum_{\sum_{k=1}^m i_k \leq d_k} a_{i_1, \dots, i_m} \prod_{j=1}^m x_j^{i_j}, \quad (2.11)$$

với a_{i_1, \dots, i_m} là các biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với kì vọng 0 và phương sai

$$\binom{d_k}{i_1, \dots, i_m} = \frac{d_k!}{\left(d_k - \sum_{j=1}^m i_j\right)! \prod_{k=1}^m i_k!}.$$

Khi đó kì vọng số nghiệm thực của hệ là

$$\sqrt{\prod_{k=1}^m d_k}.$$

2.3 Phân phối bất kì

2.3.1 Đa thức ngẫu nhiên với các hệ số là các biến ngẫu nhiên có phân phối bất kì

Trong Chương 1, luận văn đã tìm hiểu về kì vọng số nghiệm thực của các mô hình đa thức ngẫu nhiên với các hệ số có phân phối chuẩn tắc và mở rộng cho các phân phối hướng tâm. Trong mục này luận văn sẽ xem xét trường hợp tổng quát, tức các trường hợp phân phối bất kì, đặc biệt tập trung vào phân phối chuẩn nhiều chiều có kì vọng khác không.

Cụ thể, ta xét phương trình ngẫu nhiên

$$a_0 f_0(t) + a_1 f_1(t) + \dots + a_n f_n(t) = 0, \quad (2.12)$$

với vector ngẫu nhiên $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ có hàm mật độ đồng thời $\sigma(a)$.

Xác định $v(t)$ bởi

$$v(t) = \begin{pmatrix} f_0(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

và

$$\gamma(t) \equiv \frac{v(t)}{\|v(t)\|}. \quad (2.13)$$

Ta có định lí sau, xem [3].

Định lý 2.9. Nếu a có mật độ xác suất đồng thời $\sigma(a)$ thì mật độ của nghiệm thực của $a_0 f_0(t) + \dots + a_n f_n(t) = 0$ là

$$\rho(t) = \|\gamma'(t)\| \int_{\langle \gamma(t), a \rangle = 0} \frac{|\langle \gamma'(t), a \rangle|}{\|\gamma'(t)\|} \sigma(a) da^n = \int_{\langle \gamma(t), a \rangle = 0} |\langle \gamma'(t), a \rangle| \sigma(a) da^n,$$

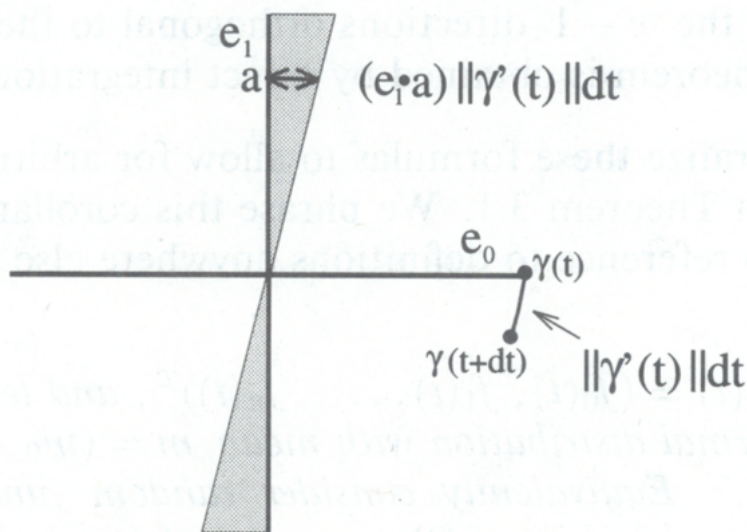
với da^n là độ đo Lebesgue chuẩn trong không gian con \mathbb{R}^n vuông góc với $\gamma(t)$.

Chứng minh. Thay vì làm việc trên mặt cầu như trong bài toán Buffon trên mặt cầu và các mục trước, ta sẽ xem xét trong \mathbb{R}^{n+1} với $\gamma(t)_\perp$ được xác định là siêu phẳng qua gốc tọa độ vuông góc với $\gamma(t)$.

Cố định t và chọn cơ sở trực chuẩn sao cho $e_0 = \gamma(t)$ và $e_1 = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

Khi ta thay đổi t thành $t + dt$, thể tích được quét bởi các siêu phẳng sẽ tạo thành một nêmi siêu vi, xem Hình 2.2.

Khi đó mật độ nghiệm chính là thể tích của nêmi siêu vi này.



Hình 2.2: Hình minh họa miền nêmi siêu vi. Nguồn: [3].

Nêmi này chính là tích Cartesian của nêmi hai chiều trong không gian mặt phẳng cơ sở (e_0, e_1) với \mathbb{R}^{n-1} , không gian toàn bộ của $n - 1$ hướng cơ sở còn lại.

Thể tích của nêmi là

$$\|\gamma'(t)\| dt \int_{\mathbb{R}^n \equiv \{\langle e_0, a \rangle = 0\}} |\langle e_1, a \rangle| \sigma(a) da^n.$$

Do đó, mật độ của các nghiệm thực của phương trình (2.12) là

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \|\gamma'(t)\| dt \int_{\mathbb{R}^n \equiv \{\langle e_0, a \rangle = 0\}} |\langle e_1, a \rangle| \sigma(a) da^n \\ &= \|\gamma'(t)\| \int_{\langle \gamma(t), a \rangle = 0} \frac{|\langle \gamma'(t), a \rangle|}{\|\gamma'(t)\|} \sigma(a) da^n \\ &= \int_{\langle \gamma(t), a \rangle = 0} |\langle \gamma'(t), a \rangle| \sigma(a) da^n.\end{aligned}$$

□

Bây giờ ta sẽ áp dụng định lí trên cho trường hợp phân phối chuẩn nhiều chiều.

2.3.2 Đa thức ngẫu nhiên với các hệ số là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn và kì vọng khác 0

Giả sử vector hệ số ta đang xét có phân phối chuẩn nhiều chiều với kì vọng m và ma trận covariance I . Khi đó

$$\sigma(a) = (2\pi)^{-(n+1)/2} e^{-\sum (a-m_i)^2/2}, \text{ và } m = (m_0, \dots, m_n)^T.$$

Định lý 2.10. *Giả sử $(a_0, \dots, a_n)^T$ có phân phối chuẩn nhiều chiều với kì vọng m và ma trận covariance I . Cho $\gamma(t)$ được xác định như (2.13), $m_0(t)$ và $m_1(t)$ lần lượt là các thành phần của m trong các hướng $\gamma(t)$ và $\gamma'(t)$. Mật độ của các nghiệm thực của phương trình $\sum a_i f_i(t) = 0$ là*

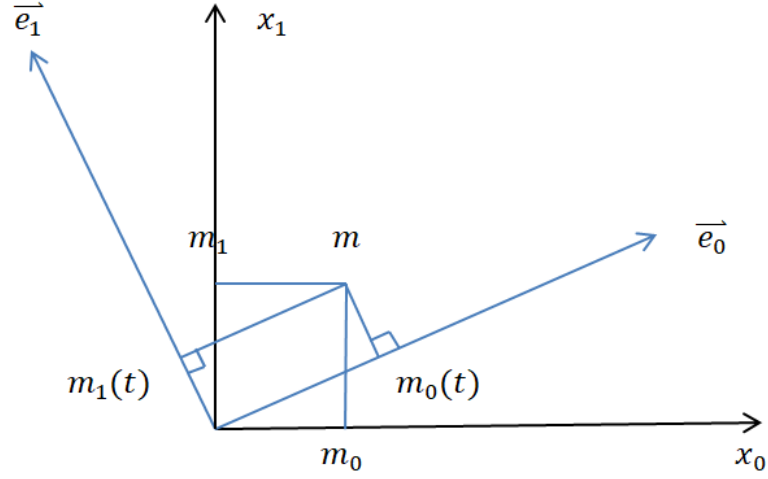
$$\rho_n(t) = \frac{1}{\pi} \|\gamma'(t)\| e^{-\frac{1}{2}m_0(t)^2} \left\{ e^{-\frac{1}{2}m_1(t)^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} m_1(t) \operatorname{erf} \left[\frac{m_1(t)}{\sqrt{2}} \right] \right\},$$

với hàm $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$.

Chứng minh. Biểu diễn lại $\sigma(a)$ theo tọa độ x_0, \dots, x_n tương ứng với các hướng e_0, \dots, e_n . Khi đó

$$\sigma(x_0, \dots, x_n) = (2\pi)^{-(n+1)/2} e^{-\sum_{i=0}^n (x_i - m_i(t))^2/2}. \quad (2.14)$$

Ngoài ra, không gian trực giao $\gamma(t)_\perp$ sẽ sinh bởi $\{e_1, \dots, e_n\}$ nên $da^n = dx_1 \dots dx_n$.

Hình 2.3: Phép chuyển tọa độ của m .

Ta có

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (0, 1, \dots, 0), \\ \langle \gamma'(t), a \rangle &= \langle (0, 1, \dots, 0), (x_0, x_1, \dots, x_n) \rangle = x_1.\end{aligned}$$

Ngoài ra, trên $\gamma(t)_\perp$ thì $x_0 = 0$.

Thay lại vào công thức trong Định lí 2.9 ta có

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \gamma'(t), a \rangle| \sigma(a) da^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |x_1| (2\pi)^{-(n+1)/2} e^{-\sum_{i=0}^n (x_i - m_i(t))^2 / 2} dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}m_0^2(t)}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |x_1| e^{-\frac{1}{2}(x_1 - m_1(t))^2} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{e^{-\sum_{i=2}^n (x_i - m_i(t))^2 / 2}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}m_0^2(t)}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |x_1| e^{-\frac{1}{2}(x_1 - m_1(t))^2} dx_1 \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}m_0^2(t)}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\sqrt{2}y + m_1(t)| e^{-y^2} dy, \text{ với } y = \frac{x_1 - m_1(t)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}m_0^2(t)}}{2\pi} \left[\int_{-\frac{m_1(t)}{\sqrt{2}}}^{+\infty} (\sqrt{2}y + m_1(t)) \cdot e^{-y^2} dy + \int_{-\infty}^{-\frac{m_1(t)}{\sqrt{2}}} (\sqrt{2}y + m_1(t)) \cdot e^{-y^2} dy \right] \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}m_0^2(t)}}{\pi} \left\{ e^{-\frac{1}{2}m_1(t)^2} + \sqrt{2}m_1(t) \int_0^{\frac{m_1(t)}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}m_0^2(t)}}{\pi} \left\{ e^{-\frac{1}{2}m_1(t)^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} m_1(t) \operatorname{erf} \left[\frac{m_1(t)}{\sqrt{2}} \right] \right\}.$$

□

Từ định lý trên ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.11. Cho vector $v(t) = (f_0(t), f_1(t), \dots, f_n(t))^T$, và $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T$ là phân phối chuẩn nhiều chiều với kì vọng $m = (m_0, m_1, \dots, m_n)^T$ và ma trận covariance C . Xét hàm ngẫu nhiên có dạng $\sum_{i=0}^n a_i f_i(t)$ với kì vọng $\mu(t) = m_0 f_0(t) + \dots + m_n f_n(t)$ và ma trận covariance C . Kì vọng số nghiệm thực của phương trình $\sum_{i=0}^n a_i f_i(t) = 0$ trên khoảng $[a, b]$ là

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \|\gamma'(t)\| e^{-\frac{1}{2}m_0(t)^2} \left\{ e^{-\frac{1}{2}m_1(t)^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} m_1(t) \operatorname{erf} \left[\frac{m_1(t)}{\sqrt{2}} \right] \right\} dt,$$

với

$$\omega(t) = C^{1/2}v(t), \gamma(t) = \frac{\mu(t)}{\|\omega(t)\|}, m_0(t) = \frac{\mu(t)}{\|\omega(t)\|}, m_1(t) = \frac{m'_0(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Chứng minh. Ta thấy phương trình $a \cdot v = 0$ tương đương với phương trình $C^{-1/2}a \cdot C^{1/2}v = 0$. Do đó ta đưa được phương trình $\sum_{i=0}^n a_i f_i(t) = 0$ về dạng phương trình ngẫu nhiên với các hệ số được lấy từ phân phối chuẩn nhiều chiều với kì vọng $C^{-1/2}m$ và ma trận covariance I .

Vì $\frac{\mu(t)}{\|\omega(t)\|} = \gamma(t) \cdot C^{-1/2}m$ và $\frac{m'_0(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \gamma'(t) \cdot \frac{C^{-1/2}m}{\|\gamma'(t)\|}$ nên từ Định lý 2.10 ta có kì vọng số nghiệm thực của phương trình $\sum_{i=0}^n a_i f_i(t) = 0$ trên khoảng $[a, b]$ là

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \|\gamma'(t)\| e^{-\frac{1}{2}m_0(t)^2} \left\{ e^{-\frac{1}{2}m_1(t)^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} m_1(t) \operatorname{erf} \left[\frac{m_1(t)}{\sqrt{2}} \right] \right\} dt.$$

□

2.3.3 Ví dụ về đa thức ngẫu nhiên với các hệ số là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn và kì vọng khác không

Ví dụ 2.12. Cho $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phân phối chuẩn tắc và các hàm $f_i(t) = t^i, i = 0, \dots, n$.

Xét đa thức ngẫu nhiên bậc chẵn

$$\sum_{i=0}^n \left(\sqrt{C_n^i} \xi_i + m_i \right) t^i. \quad (2.15)$$

Khi đó

$$C = \text{diag} [C_n^i]$$

và

$$v(t) = (1, t, \dots, t^n)^T.$$

Do đó

$$\omega(t) = C^{1/2} v(t) = \left(\sqrt{C_n^0}, \sqrt{C_n^1} t, \dots, \sqrt{C_n^n} t^n \right)^T.$$

Suy ra

$$\|\omega(t)\|^2 = \sum_{i=0}^n C_n^i t^{2i} = (1 + t^2)^n,$$

hay là $\|\omega(t)\| = (1 + t^2)^{n/2}$.

Chọn

$$m_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \text{ lẻ} \\ m \cdot C_{n/2}^{i/2} & \text{nếu } i \text{ chẵn.} \end{cases}$$

Khi đó

$$\mu(t) = \sum_{i=0}^n m_i t^i = \sum_{k=0}^{n/2} m \cdot t^{2k} C_{n/2}^k = m(1 + t^2)^{n/2}$$

Suy ra

$$m_0(t) = \frac{\mu(t)}{\|\omega(t)\|} = m \text{ và } m_1(t) = 0.$$

Lúc này, áp dụng Mệnh đề 2.11 ta có mật độ của các nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên (2.15) là

$$\rho(t) = \frac{1}{\pi} \|\gamma'(t)\| e^{-\frac{1}{2}m^2}.$$

Chẳng hạn, nếu $n = 2$ thì ta có đa thức sau:

$$(\xi_0 + m) + \xi_1 \sqrt{2}t + (\xi_2 + m)t^2. \quad (2.16)$$

Lúc này $v(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix}^T$ và $C = \text{diag}[C_2^i]$, với $i = 0, 1, 2$.

Ta thấy rằng

$$\|\omega(t)\|^2 = \sum_{i=0}^2 C_2^i t^{2i} = (1 + t^2)^2$$

và

$$\mu(t) = \sum_{i=0}^2 m_i t^i = m(1 + t^2).$$

Suy ra

$$m_0(t) = \frac{\mu(t)}{\|\omega(t)\|} = m \text{ và } m_1(t) = 0.$$

Do đó mật độ số nghiệm thực của đa thức (2.16) là

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{\pi} \|\gamma'(t)\| e^{-\frac{1}{2}m^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [v^T(x) C v(y)] \Big|_{y=x=t} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}m^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \left(\sum_{k=0}^2 C_2^k x^k y^k \right) \Big|_{y=x=t} \right]^{1/2} e^{-\frac{1}{2}m^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log (1 + xy) \Big|_{y=x=t} \right]^{1/2} e^{-\frac{1}{2}m^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{(1+t)^2} e^{-\frac{1}{2}m^2}. \end{aligned}$$

Đây chính là phân phối Cauchy, tức là, $\arctan(t)$ có phân phối đều trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Theo Mệnh đề 2.11, ta có kì vọng số nghiệm thực của đa thức (2.16) là

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N_{\mathbb{R}} &= \int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{(1+t)^2} e^{-\frac{1}{2}m^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-\frac{1}{2}m^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du, \text{ với } u = \arctan(t) \\ &= \sqrt{2} e^{-m^2/2}. \end{aligned}$$

Chú ý: Viết lại phương trình $(\xi_0 + m) + \xi_1 \sqrt{2}t + (\xi_2 + m)t^2 = 0$ dưới dạng $(1 + \frac{\xi_2}{m})t^2 + \frac{\xi_1 \sqrt{2}}{m}t + (1 + \frac{\xi_0}{m}) = 0$.

Khi $m \rightarrow \infty$, phương trình trên trở thành

$$t^2 + 1 = 0.$$

Do phương trình $t^2 + 1 = 0$ vô nghiệm thực nên ta kì vọng số nghiệm thực của đa thức (2.16) hội tụ tới 0.

Nhận xét: Hàm mật độ cho trường hợp các hệ số của đa thức có kì vọng $m \neq 0$ bằng $e^{-\frac{1}{2}m^2}$ lần hàm mật độ cho trường hợp các hệ số của đa thức có kì vọng 0.

Ví dụ 2.13. (Chuỗi lũy thừa ngẫu nhiên)

Cho vector $v(t) = (1, t, t^2, \dots)^T$, và $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, với a_i là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn tắc. Xét chuỗi lũy thừa

$$(a_0 + m_0) + (a_1 + m_1)t + (a_2 + m_2)t^2 + \dots, \quad (2.17)$$

trong đó $m_{2i} = m$ và $m_{2i+1} = 0$. Trong trường hợp này $C = \text{diag}[1]$ và tương tự như trường hợp của chuỗi (1.38),

$$v^T(x)Cv(y) = \frac{1}{1 - xy}.$$

Do đó mật độ số nghiệm thực của chuỗi (2.17) là

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{\pi} \|\gamma'(t)\| e^{-\frac{1}{2}m^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log [v^T(x)Cv(y)] \Big|_{y=x=t} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}m^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{1}{1 - xy} \Big|_{y=x=t} \right]^{1/2} e^{-\frac{1}{2}m^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - t^2} e^{-\frac{1}{2}m^2}. \end{aligned}$$

Như vậy, kì vọng số nghiệm thực của nghiệm của chuỗi (2.17) trên bất kì đoạn $[a, b]$ thuộc đoạn $(-1, 1)$ là

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N_{[a,b]} &= \int_a^b \rho(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - t^2} e^{-\frac{1}{2}m^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{(1+a)(1-b)}{(1-a)(1+b)} e^{-\frac{1}{2}m^2}. \end{aligned}$$

Kết luận: Như vậy, từ kết quả về kì vọng số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên có các hệ số là các biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn, ta cũng có thể mở rộng cho trường hợp phân phối bất kì và đa tạp nhiều chiều.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Các kết quả nghiên cứu chính của luận văn bao gồm:

1. Chúng tôi nghiên cứu về hướng tiếp cận hình học cho kì vọng số nghiệm thực của đa thức ngẫu nhiên được Alan Edelman and Eric Kostlan giới thiệu trong bài báo [3]. Từ đó chúng tôi chứng minh công thức Kac - Rice bằng góc nhìn hình học và sau đó đưa ra một số mô hình về đa thức ngẫu nhiên mà có thể sử dụng công thức này để tính kì vọng số nghiệm thực.
2. Nghiên cứu về kì vọng số nghiệm thực cho các trường hợp nhiều chiều, cụ thể là với đa tạp tổng quát và hệ phương trình ngẫu nhiên.

Dựa vào các kết quả đã đạt được, một số hướng đi tiếp theo mà luận văn có thể phát triển như sau:

1. Tính chính xác kì vọng số nghiệm thực của các dạng đa thức khác, ví dụ như mô hình đa thức Schehr - Majumdar bằng cách sử dụng công thức Kac - Rice.
2. Mở rộng cho các không gian phức tạp hơn, như không gian p-adic trong Số học.

Tài liệu tham khảo

- [1] M.A. Lohe and A. Thilagam, 2005, Weyl - ordered polynomials in fractional - dimensional quantum mechanics, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(2), pp. 461.
- [2] Grégory Schehr and Satya N. Majumdar, 2009, Condensation of the Roots of Real Random Polynomials on the real Axis, *Journal of Statistical Physics*, 135, pp. 587-598.
- [3] Alan Edelman and Eric Kostlan, January 1995, How many zeros of random polynomials are real?, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 32(1), pp. 1-37.
- [4] Kambiz Farahmand, 1998, *Topics in random polynomials*, Longman, England.
- [5] L.A. Santaló, 1976, *Integral geometry and geometric probability (Encyclopedia of mathematics and its applications ; v. 1 : Section, Probability)*, Addison-Wesley Pub. Co., United States.
- [6] E. Wegert and L.N. Trefethen, 1994, From the Buffon needle problem to the Kreiss matrix theorem, *The American Mathematical Monthly*, 101(2), pp. 132-139.
- [7] A. T. Bharucha-reid and M. Sambandham, 1986, *Random polynomials*, Academic press, Orlando.
- [8] J.E. Wilkins, 1988, An asymptotic expansion for the expected number of real roots of a random polynomial, *Proceedings of American Mathematical Society*, 103(4), pp. 1249-1258.

- [9] Grégory Schehr and Satya N. Majumdar, 2008, Real roots of random polynomials and zero crossing properties of diffusion equation, *Journal of Statistical Physics*, 132, pp. 235–273.
- [10] Terence Tao and Van Vu, 2014, Local universality of zeroes of random polynomials, *International Mathematics Research Notices*, 2015(13), pp. 5053–5139.
- [11] John M. Lee, 2010, *Introduction to Topological Manifolds - Second Edition*, Springer - Verlag, New York.
- [12] A. Edelman, E. Kostlan and M. Shub, 1994, How many eigenvalues of a random matrix are real?, *Journal of the American Mathematical Society*, 7(1), pp. 247-267.
- [13] Michael Shub and Steve Smale, 1993, Complexity of Bezout's Theorem II Volumes and Probabilities, *Computational Algebraic Geometry, Progress in Mathematics*, 109, pp. 267-285.
- [14] V. H. Can - M. H. Duong - V. H. Pham, 2020, On the expected number of real roots of random polynomials arising from evolutionary game theory.
- [15] A. Edelman, 1992, On the distribution of a scaled condition number, *Mathematics of computation*, 58(197), pp. 185-190.