BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VN**

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Đặng Minh Hiếu

HIỆN TƯỢNG BÙNG NỔ NGHIỆM TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CHO PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT PHI TUYẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2022

ĐẶNG MINH HIẾU **TOÁN ỨNG DỤNG** **NĂM 2022**

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VN

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Đặng Minh Hiếu

HIỆN TƯỢNG BÙNG NỔ NGHIỆM TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CHO PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT PHI TUYẾN

Chuyên ngành : Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

1. TS. Dương Giao Kỵ
2. PGS. TS. Hoàng Thế Tuấn

Hà Nội - 2022

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những gì viết trong luận văn là sự tìm tòi, học hỏi, trau dồi kiến thức của bản thân dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy Dương Giao Kỵ và thầy Hoàng Thế Tuấn. Mọi kết quả nghiên cứu cũng như ý tưởng của tác giả khác, nếu có đều được trích dẫn cụ thể. Đề tài luận văn này cho đến nay chưa được bảo vệ tại bất kì một hội đồng bảo vệ luận văn thạc sĩ nào và cũng chưa hề được công bố trên bất kì một phương tiện nào. Tôi xin chịu trách nhiệm về những lời cam đoan.

Hà Nội, tháng 10 năm 2022

Học viên

Đặng Minh Hiếu

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, tôi xin được tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất của mình tới TS. Dương Giao Kỵ, người thầy đã định hướng và giúp đỡ tôi tìm ra đề tài luận văn cũng như định hình hướng nghiên cứu. Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình trong một thời gian dài của thầy. Mặc dù tôi và thầy gặp khó khăn về mặt địa lý, nhưng thầy đã luôn quan tâm, cố gắng hết sức để giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới PGS.TS. Hoàng Thế Tuấn, người thầy đồng hướng dẫn của tôi, thầy góp ý và giúp đỡ tôi rất nhiều trong những lúc tôi gặp khó khăn nhất khi đang học tập tại Viện Toán học, cũng như trong quá trình làm luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Quỹ Đổi mới sáng tạo VinIF đã hỗ trợ tài chính giúp tôi hoàn thành hai năm học thạc sỹ. Bên cạnh đó, trong quá trình học tập, nghiên cứu và thực hiện luận văn, tôi còn nhận được nhiều sự quan tâm, góp ý, hỗ trợ quý báu của các thầy cô, anh chị và bạn bè trong và ngoài Viện Toán học.

Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn sự giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi về môi trường học tập của nơi đào tạo là Viện Toán học và cơ sở đào tạo là Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam trong suốt quá trình thực hiện luận văn này.

Tôi xin tỏ lòng biết ơn vô hạn tới mẹ tôi: bà Phạm Thị Cẩm, mẹ của tôi luôn kiên nhẫn và thương yêu tôi vô điều kiện.

Cuối cùng tôi xin gửi bản luận văn này đến hai bác: bà Phạm Thị Thơi và ông Phạm Văn Khiêm, người mà tôi luôn coi là bố mẹ thứ hai của tôi. Con xin cảm ơn bố mẹ đã luôn yêu thương và che chở cho con trong suốt chặng đường đã qua.

Danh sách các ký hiệu

Ký hiệu	**Tên gọi**
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\|\cdot\|$	chuẩn của một vectơ hoặc ma trận
$\|\cdot\|_{L^2_\rho}$	chuẩn trong không gian L^2_ρ
$C([a,b])$	không gian các hàm liên tục trên $[a,b]$
$C_c^\infty(\Omega)$	không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong Ω
L^∞	không gian các hàm khả tích bậc vô hạn
Δ	toán tử Laplace
$O(.)$	vô cùng bé cùng bậc
$o(.)$	vô cùng bé bậc lớn hơn

Mục lục

Lời mở đầu

Tổng quan tình hình nghiên cứu và sự cần thiết tiến hành nghiên cứu:

Tình hình nghiên cứu trên thế giới và ở Việt Nam: Về hướng nghiên cứu này, có TS. Dương Giao Kỵ, Đại học An Giang - ĐHQG TP Hồ Chí Minh đã mở rộng và phát triển phương pháp [1] đến các mô hình tổng quát hơn và có nhiều ứng dụng trong vật lý, sinh học và kỹ thuật, xem tại [2]. Gần với lĩnh vực này, cũng có nhóm nghiên cứu của TS. Phan Quốc Hưng tại Đại học Duy Tân về việc thiết lập các ước lượng tỷ lệ bùng nổ cho phương trình truyền nhiệt và các định lý kiểu Liouville cho các nghiệm bùng nổ, xem tại [3]; nhóm của PGS. TS Lê Xuân Trường tại Đại học Kinh tế TP. Hồ Chí Minh nghiên cứu về sự tồn tại các nghiệm bùng nổ cho lớp phương trìnnh tiến hóa dạng p-Laplacian, xem tại [4].

Trên thế giới, chúng ta nhóm nghiên cứu của Giáo sư Hatem Zaag, Đại học Sorbonne Paris Nord chuyên gia hàng đầu về lĩnh vực xây dựng nghiệm kỳ dị cho phương trình truyền nhiệt và truyền sóng với các công trình [1],[5] nhóm nghiên cứu của TS. Tej-Eddine Ghoul và TS. Nguyễn Văn Tiên tại ĐH New York Abu Dhabi với các công trình [6],[7], TS. Nejla Nouaili với các công trình [8],[9].

Hướng nghiên cứu này nhận được sự quan tâm của cộng đồng toán học hơn 20 năm qua và ngày càng mở rộng đến nhiều mô hình gần với thực tế hơn, từ đó thể hiện tính mạnh mẽ của phương pháp trên. Do đó, chúng tôi chọn để nghiên cứu phương pháp này và phát triển nó đến các mô hình tổng quát hơn và gần với thực tế hơn.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

Bài toán xây dựng nghiệm bùng nổ cho phương trình truyền nhiệt, phổ của toán tử tuyến tính, lý thuyết bậc tô-pô.

Nội dung nghiên cứu:

Trong luận văn này chúng tôi xét bài toán

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x)|u|^{p-1}u, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T), \\ u(0) = u_0\,(0) \in L^\infty\,(\mathbb{R})\,, \end{cases} \tag{0.1}$$

ở đây chúng ta xét $p > 1$, và $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi bị chặn. Khi đó, mô hình từ trong [1], tương ứng với $f \equiv 1$. Với giả thiết f khả vi và bị chặn, $f(0) = a > 0$, chúng tôi mong muốn mở rộng phương pháp của [1] để xây dựng nghiệm bùng nổ cho (0.1), với giả thiết tổng quát hơn.

Cấu trúc và dự kiến kết quả đạt được của luận văn:

Ngoài phần Danh sách các ký hiệu, Lời mở đầu, Lời cảm ơn, Lời cam đoan, Kết luận và Tài liệu tham khảo, Luận văn được chia thành ba chương.

- Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị.
- Chương 2: Phương trình truyền nhiệt với hệ số phi tuyến hằng.
- Chương 3: Phương trình truyền nhiệt với hệ số phi tuyến không hằng.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này chúng ta sẽ giới thiệu một số kiến thức cơ bản để phục vụ cho các chứng minh trong các chương sau.

1.1 Đa thức Hermite

Chúng ta xét không gian $L^2_\rho(\mathbb{R})$ được định nghĩa như sau:

$$L^2_\rho(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}) : \int\limits_{\mathbb{R}} \big(f(y)\big)^2 \rho(y)\, dy < \infty \right\}, \tag{1.1}$$

với hàm trọng ρ

$$\rho(y) = \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4}}}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.2}$$

Chúng ta xét các đa thức Hermite được định nghĩa như sau:

$$h_m(y) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{m!}{n!(m-2n)!}(-1)^n y^{m-2n}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Dễ thấy $h_0 = 1, h_1 = y$,$h_2 = y^2 - 2, h_3 = y^3 - 6y$. Đặc biệt, chúng ta có đẳng thức sau:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} h_n(x)h_m(x)\rho(x)dx = 2^n n!\delta_{nm}, \quad \text{với } m.n \in \mathbb{N},$$

ở đây với hàm δ_{nm} là ký hiệu Kronecker delta, được xác định như sau:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } m \neq n, \\ 1, & \text{nếu } m = n. \end{cases}$$

Hơn thế nữa, chúng ta cũng chứng minh được $\big\{h_m(y)\big\}_{m\geq 0}$ là cơ sở cho $L^2_\rho(\mathbb{R})$. Khi đó với mỗi $v(y) \in L^2_\rho(\mathbb{R})$ thì v có biểu diễn duy nhất như sau:

$$v(y) = v_0h_0(y) + v_1h_1(y) + v_2h_2(y) + \sum_{j\geq 3} v_jh_j(y). \tag{1.4}$$

Định nghĩa 1.1. *Chúng ta định nghĩa hàm cắt χ_0 như sau:*
$\chi_0 \in C^\infty\big([0,\infty), [0,1]\big)$, $\chi_0 \equiv 1$ *trên* $[0,1]$ *và* $\chi_0 \equiv 0$ *trên* $[2,\infty)$.

Đặt $\chi(y,s) = \chi_0\left(\frac{|y|}{K\sqrt{s}}\right)$, khi đó chúng ta biểu diễn v như sau:

$$v = \chi v + (1-\chi)v = v_b(y) + v_e(y) = \left(\sum_{i=0}^{2} v_ih_i(y) + v_-(y)\right) + v_e(y). \tag{1.5}$$

Chúng ta cũng định nghĩa $P_\beta(v)$ là phép chiếu của v lên h_β như sau:

$$P_\beta(v) = \int v\frac{h_\beta}{\|h_\beta\|_{L^2_\rho}}\rho dy, \quad \forall \beta \in \mathbb{N}.$$

Chú ý rằng v_- trong công thức (1.5) được xác định như sau:

$$v_- = \sum_{|\beta|\geq 3} h_\beta P_\beta(v_b) \text{ trong } L^2_p.$$

1.2 Nửa nhóm cho toán tử Laplace

Chúng ta xét bài toán

$$\begin{cases} \partial_t u &= \Delta u, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \text{ trong } \Omega_0. \end{cases}$$

Khi đó, tồn tại nửa nhóm giải tích $\left\{e^{t\delta}, t > 0\right\}$ sao cho nghiệm u được biểu diễn như sau:

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0, \quad t > 0.$$

Đặc biệt, tồn tại $G_\Omega \in C^\infty$ dương và $G_\Omega : \Omega\times\Omega\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ (nhân nhiệt Dirichlet) sao cho $\left(e^{-t\Delta}f\right)(x) = \int_\Omega G_\Omega(x,y,t)f(y)dy$ với mọi $f \in L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$ (chỉ số phụ Ω trong G_Ω sẽ thường được bỏ qua). Thêm vào đó, chúng ta có

$$G_{\Omega_1}(x,y,t) \le G_{\Omega_2}(x,y,t),$$

bất kỳ $\Omega_1 \subset \Omega_2$ và $x, y \in \Omega_1$, và $G_\Omega(x,y,t) = G_\Omega(y,x,t)$ với mọi $x,y \in \Omega$ và $t > 0$. Nếu $\Omega = \mathbb{R}^n$, thì $G_{\mathbb{R}^n}(x,y,t) = G(x-y,t)$, ở đó

$$G(x,t) = G_t(x) := (4\pi t)^{-n/2}e^{-x^2/4t},$$

là nhân nhiệt Gauss, do đó $e^{-t\Delta}f = G_t * f$. Chú ý rằng các hàm G_t thỏa mãn tính chất nửa nhóm đối với tích chập

$$G_{t+s} = G_t * G_s, \quad s,t > 0.$$

Chúng ta thấy rằng nếu $\lambda > \sigma(-A_2)$ và $B_\lambda := (\lambda + A_2)^{-1}$ thì $B_\lambda = \int_0^t e^{-\lambda t}e^{-tA_2}dt$ và

$$K_{\Omega,\lambda}(x,y) := \int_0^t e^{-\lambda t}G_\Omega(x,y,t)dt,$$

là nhân của toán tử B_λ, đó là $B_\lambda f(x) = \int_\Omega K_{\Omega,\lambda}(x,y)f(y)dy$. Chú ý rằng với mỗi $f \in L^2(\Omega)$, $B_\lambda f$ là nghiêm duy nhất của bài toán.

Mệnh đề 1.2. *Cho* $\left(e^{-t\Delta}\right)_{t\ge0}$ *là nửa nhóm nhiệt trong* $\mathbb{R}^n$ *và* $G_t(x) = G(x,t)$ *là nhân nhiệt Gauss. Chúng ta có các tính chất sau:*

a) $\|G_t\|_1 = 1$ *với mọi* $t > 0$.

b) Nếu $\Phi \in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ *và* $\Phi \ge 0$ *thì* $e^{-t\Delta}\Phi \ge 0$ *và* $\left\|e^{-t\Delta}\Phi\right\|_1 = \|\Phi\|_1$.

c) Nếu $1 \le q \le \infty$ *thì* $\left\|e^{-t\Delta}\Phi\right\|_q \le \|\Phi\|_q$ *với mọi* $t > 0$.

d) Nếu $1 \le p < q \le \infty$ *và* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ *thì* $\left\|e^{-t\Delta}\Phi\right\|_q \le (4\pi t)^{-n/(2r)}\|\Phi\|_p$ *với mọi* $t > 0$.

e) Đối với bất kỳ miền tùy ý $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, xác nhận rằng (c) và (d) vẫn đúng nếu $e^{-t\Delta}$ được thay thế bằng nửa nhóm nhiệt Dirichlet trong Ω.

Chứng minh. Chúng ta có thể xem chứng minh tại Mệnh đề 48.4* trong [10]. □

1.3 Nửa nhóm cho toán tử Fokker-Planck

Chúng ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} \partial_s q &= \mathcal{L}q, \quad s > \sigma \\ q(\sigma) &= q_\sigma, \end{cases}$$

ở đây $\mathcal{L} = \Delta - \frac{1}{2}y \cdot \nabla + 1$.
Nghiệm q được biểu diễn như sau:

$$q(s) = e^{(s-\sigma)\mathcal{L}} q_\sigma, \quad s > \sigma,$$

ở đây $e^{(s-\sigma)\mathcal{L}}$ là nửa nhóm sinh bởi toán tử $\mathcal{L}$.

Thật vậy, chúng ta có

$$e^{t\mathcal{L}} f = \int e^{t\mathcal{L}}(y,x) f(x) dy,$$

ở đây

$$e^{t\mathcal{L}}(y,x) = \frac{e^t}{\left(4\pi\left(1-e^{-t}\right)\right)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{\left| y e^{-\frac{t}{2}} - x \right|^2}{4\left(1-e^{-t}\right)} \right].$$

Theo Định nghĩa 1.8 của $\mathcal{K}$, chúng ta sử dụng biểu diễn Feynman-Kac cho $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K}(s,\sigma,y,x) = e^{(s-\sigma)\mathcal{L}}(y,x) \int d\mu_{yx}^{s-\sigma}(\omega) e^{\int_0^{s-\sigma} \alpha(\omega(\tau),\sigma+\tau) d\tau},$$

trong đó $d\mu_{yx}^{s-\sigma}$ là độ đo dao động trên các đường liên tục $\omega : [0, s-\sigma] \to \mathbb{R}^N$ với $\omega(0) = x, \omega(s-\sigma) = y$, tức là phép đo xác suất Gauss với nhân hiệp phương sai

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\tau,\tau'\right) &= \omega_0(\tau)\omega_0\left(\tau'\right) \\ &\quad + 2\left(e^{-\frac{1}{2}\left|\tau-\tau'\right|} - e^{-\frac{1}{2}\left|\tau+\tau'\right|} + e^{-\frac{1}{2}\left|2(s-\sigma)+\tau-\tau'\right|} - e^{-\frac{1}{2}\left|2(s-\sigma)-\tau-\tau'\right|}\right), \end{aligned}$$

dẫn đến $\int d\mu_{yx}^{s-\sigma}(\omega)\omega(\tau) = \omega_0(\tau)$, với

$$\omega_0(\tau) = \left[\sinh\left(\frac{s-\sigma}{2}\right)\right]^{-1}\left[y\sinh\left(\frac{\tau}{2}\right) + x\sinh\left(\frac{s-\sigma-\tau}{2}\right)\right].$$

Bổ đề 1.3. *Với mọi $s \geq \sigma$ đủ lớn thỏa mãn $\sigma \leq s \leq 2\sigma$ và với mọi $(y,x) \in \mathbb{R}^N$, chúng ta có*

a) $|\mathcal{K}(s,\sigma,y,x)| \leq Ce^{(s-\sigma)\mathcal{L}}(y,x)$.

b) $\mathcal{K}(s,\sigma,y,x) = e^{(s-\sigma)\mathcal{L}}(y,x)\big(1 + P_2(y,x) + P_4(y,x)\big)$, *trong đó*

$$\big|P_2(y,x)\big| \leq \frac{C(s-\sigma)}{s}(1+|y|+|x|)^2,$$

và

$$\big|P_4(y,x)\big| \leq \frac{C(s-\sigma)(1+s-\sigma)}{s^2}(1+|y|+|x|)^4.$$

c) $\|\mathcal{K}(s,\sigma)(1-\chi)\|_{L^\infty} \leq Ce^{-\frac{(s-\sigma)}{p}}$ *với* $p > 1$.

Chứng minh. Chúng ta có thể tham khảo chứng minh trong Bổ đề C.1 [11]. □

Bây giờ chúng ta xét phương trình vi phân sau:

$$\partial_s q = (\mathcal{L} + \mathcal{V})\, q + B(q) + R(y,s), \tag{1.6}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \Delta - \frac{1}{2}y\cdot\nabla + 1,\\ \mathcal{V}(y,s) &= p\left(\varphi^{p-1} - \frac{1}{p-1}\right),\\ B(q) &= (\varphi+q)^p - \varphi^p - p\varphi^{p-1}q,\\ R(y,s) &= \Delta\varphi - \frac{1}{2}y\nabla\varphi - \frac{\varphi}{p-1} + \varphi^p - \partial_s\varphi. \end{aligned}$$

Với mỗi $s \geq \sigma \geq s_0$ thì phương trình (1.6) được viết dưới dạng tích phân như sau:

$$q(s) = \mathcal{K}(s,\sigma)q(\sigma) + \int_\sigma^s \mathcal{K}(s,\tau)\big[B(q)\tau + R(s,\tau)\big]d\tau, \tag{1.7}$$

ở đó $\big\{\mathcal{K}(s,\sigma)\big\}_{s\geq\sigma}$ được định nghĩa bởi

$$\begin{cases} \partial_s\mathcal{K}(s,\sigma) = (\mathcal{L}+\mathcal{V})\,\mathcal{K}(s,\sigma), \quad s>\sigma, \\ \mathcal{K}(\sigma,\sigma) = Id. \end{cases} \tag{1.8}$$

Chúng ta có thể xem thêm tại [12].

Bổ đề 1.4. *Tồn tại $K^*\geq 1$ sao cho với mọi $K\geq K^*$ và $l^*>0$, tồn tại $s^*(K,l^*)$ với mọi $\sigma\geq s^*$ và $v\in L^\infty$ thỏa mãn*

$$\sum_{j=0}^{2}\big|v_j(\sigma)\big| + \left\|\frac{v_-(\sigma)}{1+|y|^3}\right\|_{L^\infty} + \big\|v_e(\sigma)\big\|_{L^\infty} < \infty. \tag{1.9}$$

Khi đó với bất kỳ $s\in[\sigma,\sigma+l^*]$ hàm $\theta(s)=\mathcal{K}(s,\sigma)v$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\theta_-(y,s)}{1+|y|^3}\right\|_{L^\infty} &\leq C\frac{e^{(s-\sigma)}\Big((s-\sigma)^2+1\Big)}{s}\Big(\big|v_0(\sigma)\big|+\big|v_1(\sigma)\big|+\sqrt{s}\,\big|v_2(\sigma)\big|\Big)\\ &\quad + Ce^{-\frac{s-\sigma}{2}}\left\|\frac{v_-(\sigma)}{1+|y|^3}\right\|_{L^\infty} + C\frac{e^{-(s-\sigma)^2}}{s^{\frac{3}{2}}}\big\|v_e(\sigma)\big\|_{L^\infty},\end{aligned} \tag{1.10}$$

và

$$\begin{aligned}\big\|\theta_e(s)\big\|_{L^\infty} \leq Ce^{s-\sigma}&\left(\sum_{j=0}^{2}s^{\frac{j}{2}}\big|v_j(\sigma)\big| + s^{\frac{3}{2}}\left\|\frac{v_-(\sigma)}{1+|y|^3}\right\|_{L^\infty}\right)\\ &+ Ce^{-\frac{s-\sigma}{p}}\big\|v_e(\sigma)\big\|_{L^\infty}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Chứng minh. Xem tại Bổ đề 2.7 trong [11]. □

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT PHI TUYẾN VỚI HỆ SỐ PHI TUYẾN HẰNG

2.1 Giới thiệu vấn đề

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu phương trình truyền nhiệt phi tuyến

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + |u|^{p-1}u, \quad p > 1, \\ u(x,0) = u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{2.1}$$

ở đây $p > 1$, $u(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $t \geq 0$. Phương trình trên được sử dụng như là mô hình chuẩn trong nghiên cứu sự đốt cháy, sự truyền và khuếch tán nhiệt. (xem thêm tại [1]).

Dựa vào lý thuyết nửa nhóm giải tích $\left(\left\{e^{t\Delta}\right\}_{t>0}\right)$, chúng ta có thể chứng minh rằng phương trình (2.1) đặt chỉnh địa phương trong $L^\infty(\mathbb{R})$. Hơn nữa, với mỗi $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, một trong hai mệnh đề sau đúng:

(i) Nghiệm toàn cục $u(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ với mọi $t \in [0, \infty)$.

(ii) Nghiệm bùng nổ trong thời gian hữu hạn, tức là tồn tại $T_{\max} \in (0, \infty)$, sao cho $u(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ với mọi $t \in [0, T_{\max})$ và

$$\left\| u\left(t\right) \right\|_{L^\infty} \to \infty \text{ khi } t \to T_{\max}. \tag{2.2}$$

Khi hiện tượng (2.2) xảy ra, người ta quan tâm đến việc nghiệm bùng nổ với tốc độ như thế nào? Và quan trọng hơn là dáng điệu bùng nổ của nghiệm có thể được mô tả hay không?

Sau đây chúng ta trình bày lại kết quả trong [1] chứng minh tồn tại nghiệm bùng nổ trong thời gian hữu hạn và mô tả dáng điệu tiệm cận nghiệm gần miền bùng nổ nghiệm.

Định lý 2.1. *Tồn tại $T_0 > 0$ sao cho với mỗi $T \in (0, T_0]$ tồn tại giá trị ban đầu $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ sao cho phương trình* (2.1) *có nghiệm duy nhất $u(\cdot, t)$ trên $[0, T)$. Đặc biệt nghiệm bùng nổ tại gốc tọa độ trong thời gian hữu hạn T, và ta có dáng điệu tiệm cận sau:*

$$\left\| (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(\cdot, t) - \varphi_0 \left(\frac{|\cdot|}{\sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|}} \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{\sqrt{|\ln(T-t)|}}, \tag{2.3}$$

ở đây

$$\varphi_0(z) = \left(p - 1 + \frac{(p-1)^2}{4p} |z|^2 \right)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Nhận xét 2.2. Từ (2.3) chúng ta thấy rằng

$$u(0, t) \sim \kappa (T-t)^{-\frac{1}{p-1}} \text{ khi } t \to T,$$

với $\kappa = (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}$.
Hơn nữa $u(\cdot, t) \to u^*(\cdot) \in C^2(\mathbb{R} \backslash \{0\})$ khi $t \to T$, đều trên mỗi tập con compact của $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ và dáng điệu của u^* gần điểm bùng nổ như sau:

$$u^*(x) \sim \left[\frac{(p-1)^2}{8p} \frac{|x|^2}{|\ln|x||} \right]^{-\frac{1}{p-1}} \text{ khi } x \to 0.$$

Độc giả có thể tham khảo thêm chứng minh trong [13].

2.2 Lập luận hình thức

Trong phần này chúng ta đưa ra lập luận hình thức để giải thích cho việc tìm ra ước lượng trong (2.3).

Đặt $T > 0$ và ta xét u là một nghiệm của phương trình (2.1). Sử dụng phép biến đổi đồng dạng

$$w(y,s) = (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(x,t) \text{ với } y = \frac{x}{\sqrt{T-t}} \text{ và } s = -\log(T-t). \quad (2.4)$$

Từ (2.1) chúng ta suy ra w thỏa mãn phương trình sau:

$$\partial_s w = \Delta w - \frac{1}{2} y \nabla w - \frac{w}{p-1} + |w|^{p-1} w. \quad (2.5)$$

Kết quả từ [14] chúng ta có

$$w(y,s) \to \pm\kappa \text{ khi } s \to \infty,$$

đều trên mỗi tập compact $\{|y| \leq K, K > 0\}$, ở đây κ được định nghĩa bởi

$$\kappa = \left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (2.6)$$

Chú ý rằng chúng ta có dấu $\pm$ do tính đối xứng của phương trình (2.1). Không giảm tính tổng quát, chúng ta có thể xét $w \to \kappa$ khi $s \to \infty$. Chúng ta đặt

$$\bar{w} = w - \kappa,$$

điều này dẫn đến $\bar{w} \to 0$ khi $s \to \infty$. Sử dụng (2.5) chúng ta suy ra

$$\partial_s \bar{w} = \mathcal{L}\bar{w} + \bar{B}(\bar{w}), \quad (2.7)$$

ở đây

$$\mathcal{L} = \Delta - \frac{1}{2} y \nabla + 1, \quad (2.8)$$

$$\bar{B}(\bar{w}) = (\bar{w} + \kappa)^p - \kappa^p - p\kappa^{p-1}\bar{w}. \quad (2.9)$$

Đặc biệt, khi $|\bar{w}| \leq 1$ phần phi tuyến $\bar{B}(\bar{w})$ trong (2.7) được đánh giá như sau:

$$\left| \bar{B}(\bar{w}) - \frac{p}{2\kappa}\bar{w}^2 \right| \lesssim \bar{w}^3. \quad (2.10)$$

Chúng ta có toán tử $\mathcal{L}$ tự đồng dạng trong $D(\mathcal{L}) \subset L^2_\rho(\mathbb{R})$

$$\langle \mathcal{L}f, g\rangle_{L^2_\rho} = \langle f, \mathcal{L}g\rangle_{L^2_\rho}, \quad (2.11)$$

ở đây $L^2_\rho(\mathbb{R})$ được định nghĩa tại (1.1). Đặc biệt, phổ của $\mathcal{L}$ rời rạc và được định nghĩa như sau:

$$spec(\mathcal{L}) = \left\{1 - \frac{m}{2} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Tương ứng với các giá trị riêng $1 - \frac{m}{2}$, chúng ta có các hàm riêng tương ứng là các đa thức Hermite được cho bởi (1.3),
và

$$\mathcal{L}h_m = \left(1 - \frac{m}{2}\right) h_m.$$

Với mỗi $\bar{w} \in L^2_\rho(\mathbb{R})$ chúng ta biểu diễn như sau:

$$\bar{w}(\cdot, s) = \bar{w}_0(s)h_0 + \bar{w}_1(s)h_1 + \bar{w}_2(s)h_2 + \sum_{j\geq 3} \bar{w}_j(s)h_j. \tag{2.12}$$

Sử dụng lập luận từ [15] đủ để chúng ta xét $\bar{w}$ có dạng

$$\bar{w}(\cdot, s) = \bar{w}_0(s)h_0 + \bar{w}_2(s)h_2. \tag{2.13}$$

Do chúng ta giả thiết $\bar{w} \to 0$ trong L^2_ρ khi $s \to \infty$, nên $\bar{w}_0$ và $\bar{w}_2 \to 0$ khi $s \to \infty$. Chúng ta sử dụng phép chiếu lên h_0 và h_2 cho phương trình (2.13) cùng với đánh giá (2.10) chúng ta suy ra được hệ phương trình vi phân cho $\bar{w}_0$ và $\bar{w}_1$ như sau:

$$\begin{cases} \bar{w}_0' = \frac{\langle \partial_s \bar{w}, h_0\rangle}{\|h_0\|_{L^2_\rho}} = \bar{w}_0 + \frac{p}{2\kappa}\left(\bar{w}_0^2 + 8\bar{w}_2^2\right) + O\left(\left|\bar{w}_0^3\right| + \left|\bar{w}_2^3\right|\right), \\ \bar{w}_2' = \frac{\langle \partial_s \bar{w}, h_2\rangle}{\|h_2\|_{L^2_\rho}} = 0 + \frac{p}{\kappa}\left(\bar{w}_0\bar{w}_2 + 4\bar{w}_2^2\right) + O\left(\left|\bar{w}_0^3\right| + \left|\bar{w}_2^3\right|\right). \end{cases}$$

Tiếp theo chúng ta giả thiết thêm rằng

$$|\bar{w}_0| \ll |\bar{w}_2|,$$

khi đó $\bar{w}_0$ và $\bar{w}_2$ có dáng điệu như sau:

$$\begin{cases} \bar{w}_0 = -\dfrac{\kappa}{4ps^2} + o\left(\dfrac{1}{s^2}\right), \\ \bar{w}_2 = -\dfrac{\kappa}{4ps} + o\left(\dfrac{1}{s}\right), \end{cases}$$

khi $s \to \infty$. Cuối cùng chúng ta tìm được dáng điệu cho w

$$w(y,s) = \kappa - \frac{\kappa}{4ps}(y^2 - 2) + o\left(\frac{1}{s}\right) \text{ trong } L^2_\rho \text{ khi } s \to \infty. \tag{2.14}$$

Do khai triển trên cho w chỉ đúng trong L^2_ρ nên chúng ta không thể thấy được hình dạng của nghiệm khi s tiến ra vô cùng. Tuy nhiên, khai triển trên cho chúng ta thấy hình dạng (nếu có) sẽ dựa trên biến

$$z = \frac{y}{\sqrt{s}}.$$

Do đó, chúng ta giả sử w được khai triển hình thức

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi_j(z)}{s^j}.$$

Thay vào (2.5) chúng ta được $\varphi_0(z)$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2} z \cdot \nabla\varphi_0 + \frac{\varphi_0}{p-1} - {\varphi_0}^p = 0.$$

Phương trình vi phân cho chúng ta nghiệm

$$\varphi_0(z) = \left(p - 1 + b_0|z|^2\right)^{-\frac{1}{p-1}},$$

với b_0 là một hằng số nào đó. Hơn thế nữa, so sánh bậc tiếp theo trong khi triển chuỗi cho w chúng ta được

$$\varphi_1(0) = \frac{\kappa}{2ps}.$$

Khi đó, chúng ta kết nối với khai triển (2.14) và suy ra

$$b_0 = \frac{(p-1)^2}{4p}.$$

Cuối cùng chúng ta đưa ra được một lập luận hình thức để giải thích việc tìm ra xấp xỉ φ_0. Cụ thể hơn chúng ta có

$$w(y,s) \approx \varphi_0(z) + \frac{\kappa}{2ps} \text{ khi } s \to \infty, \tag{2.15}$$

với $z = \frac{y}{\sqrt{s}}$.

2.3 Xây dựng bài toán

Chúng ta dựa trên kết quả hình thức (2.15) để định nghĩa xấp xỉ

$$\varphi(y,s)=\varphi_0(y,s)+\frac{\kappa}{2ps}. \tag{2.16}$$

Và bài toán tuyến tính hóa được xét là

$$w(y,s)=\varphi(y,s)+q(y,s), \tag{2.17}$$

với $q(y,s)$ thỏa mãn

$$\partial_s q=(\mathcal{L}+\mathcal{V})\,q+B(q)+R(y,s), \tag{2.18}$$

trong đó $\mathcal{L}$ được định nghĩa tại (2.8) và

$$\mathcal{V}(y,s)=p\left(\varphi^{p-1}-\frac{1}{p-1}\right), \tag{2.19}$$

$$B(q)=(\varphi+q)^p-\varphi^p-p\varphi^{p-1}q, \tag{2.20}$$

$$R(y,s)=\Delta\varphi-\frac{1}{2}y\nabla\varphi-\frac{\varphi}{p-1}+\varphi^p-\partial_s\varphi. \tag{2.21}$$

Nhận xét 2.3. Từ Bổ đề 2.7 chúng ta nhận thấy rằng: trên $\left\{|y|>K\sqrt{s}\right\}$ ta có $\mathcal{V}<-1$. Do $\mathcal{L}$ có giá trị riêng lớn nhất là 1 nên $\mathcal{L}+\mathcal{V}$ có phổ âm trên miền $\left\{|y|>K\sqrt{s}\right\}$. Do đó bài toán điều khiển q tương đối dễ dàng. Tuy nhiên trên miền $\left\{|y|\le K\sqrt{s}\right\}$, $\mathcal{V}\to 0$ trong L^2_ρ, khi đó $\mathcal{L}+\mathcal{V}$ có một phần phổ dương nên bài toán điều khiển tương đối phức tạp.

Bây giờ, chúng ta biểu diễn q như sau:

$$q(y,s)=q_b(y,s)+q_e(y,s),$$

với $q_b=\chi q$ và $q_e=(1-\chi)\,q$. Thêm vào đó, $q_b\in L^\infty\subset L^2_p$, nên chúng ta biểu diễn như sau:

$$q_b(y,s)=\sum_{i=0}^{2}q_i(s)h_i(y)+q_-(y,s).$$

Cuối cùng, chúng ta được

$$q\,(y,s)=\sum_{i=0}^{2}q_i(s)h_i(y)+q_-(y,s)+q_e(y,s). \tag{2.22}$$

2.4 Xây dựng tập co

Định nghĩa 2.4. *Với số $A \geq 1$, với mọi $s > 1$, chúng ta định nghĩa tập co $V_A(s)$ là tập các hàm $q \in L^\infty(\mathbb{R})$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} \left|q_i(s)\right| &\leq As^{-2}, i = 0, 1, \\ \left|q_2(s)\right| &\leq A^2 (\ln s)\, s^{-2}, \\ \left|q_-(y,s)\right| &\leq A\left(1 + |y|^3\right) s^{-2}, \\ \left|q_e(s)\right| &\leq A^2 s^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nhận xét 2.5. Chúng ta thấy rằng nếu $q \in V_A(s)$ với mọi $s \geq 1$, thì

$$\left\|q(\cdot, s)\right\|_{L^\infty} \leq \frac{CA^2}{\sqrt{s}}, \quad \forall s \geq 1.$$

Và điều này kết luận hoàn toàn Định lý 2.1, xem tại mục 2.7.

2.5 Một vài ước lượng và khai triển cơ bản

Trong phần này chúng ta trình bày một vài đánh giá cũng như khai triển cơ bản, phục vụ cho chứng minh ở Chương 2.

Bổ đề 2.6. *Với s đủ lớn, với mọi $A > 0$, nếu $q(s) \in V_A(s)$ thì*

$$\left|q(y,s)\right| \leq CA^2 s^{-2} \ln s \left(1 + |y|^3\right), \tag{2.23}$$

và

$$\left|q(y,s)\right| \leq CA^2 s^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.24}$$

Chứng minh. Tham khảo chứng minh trong Bổ đề 3.8 của [1]. □

Bổ đề 2.7. *Xét $\mathcal{V}$ định nghĩa tại* (2.19)*, khi đó $\mathcal{V}$ có các tính chất sau:*

(i) $\mathcal{V}(\cdot, s) \to 0$, *trong* L^2_ρ *khi* $s \to \infty$.

(ii) Với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $K_\epsilon > 0$ và $s_\epsilon > 0$ sao cho với mọi y thỏa mãn $\frac{|y|}{\sqrt{s}} \geq K_\epsilon$ và $s \geq s_\epsilon$ thì

$$\left|\mathcal{V}(y,s) - \left(-\frac{p}{p-1}\right)\right| < \epsilon.$$

(iii) Khai triển Taylor cho $\mathcal{V}$: Chúng ta có khi s đủ lớn, thì với mọi $y \in \mathbb{R}$:

$$\left|\mathcal{V}(y,s)\right| \leq \frac{C(1+|y|^2)}{s}, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

và

$$\mathcal{V}(y,s) = -\frac{\left(|y|^2 - 2\right)}{4s} + \tilde{\mathcal{V}}(y,s),$$

với $\tilde{\mathcal{V}}(y,s) \leq C\left(\frac{1+|y|^4}{s^2}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. + Chứng minh (i): Trước tiên chúng ta chứng minh

$$\left\|\varphi^{p-1} - \varphi_0^{p-1}\right\|_{L^2_\rho} \to 0 \text{ khi } s \to \infty. \tag{2.25}$$

Thật vậy, chúng ta có

$$\varphi^{p-1} - \varphi_0^{p-1} = \left(\varphi_0 + \frac{\kappa}{2ps}\right)^{p-1} - \varphi_0^{p-1} = \varphi_0^{p-1}\left[\left(1 + \frac{\kappa}{2ps\varphi_0}\right)^{p-1} - 1\right].$$

Xét hàm $f(x) = (1+x)^\alpha - 1$ với $\alpha > 0$, chúng ta có

$$f(x) = \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)(1+\xi)^{\alpha-2}x^2}{2},$$

với ξ là số nằm nữa 0 và x. Nếu $|x| < \frac{1}{4}$ thì

$$\left|f(x)\right| \leq C_1(\alpha)\left|x\right|,$$

với $C_1(\alpha)$ là hằng số dương theo α. Nếu $x \geq \frac{1}{4}$, chúng ta có đánh giá sau:

$$\left|f(x)\right| = |x|^\alpha \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha - \frac{1}{x^\alpha}\right|$$

$$\leq |x|^\alpha \left(\left| \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right|^\alpha + \left| \frac{1}{x} \right|^\alpha \right)$$
$$\leq (5^\alpha + 4^\alpha) |x|^\alpha,$$

vậy với mọi $x > 0$ thì

$$\big| f(x) \big| \leq C(\alpha) \left(|x| + |x|^\alpha \right),$$

với $C(\alpha)$ là hằng số dương theo α. Áp dụng bất đẳng thức trên chúng ta được

$$\begin{aligned} \left| \varphi^{p-1} - \varphi_0^{p-1} \right| &\leq C(p) \varphi_0^{p-1} \left[\left(\frac{\kappa}{2ps\varphi_0} \right)^{p-1} + \left(\frac{\kappa}{2ps\varphi_0} \right) \right] \\ &= C(p) \left[\left(\frac{\kappa}{2ps} \right)^{p-1} + \frac{\kappa}{2ps} \varphi_0^{p-2} \right]. \end{aligned}$$

Chúng ta có nhận xét sau:

$$\varphi_0 = \left(p - 1 + \frac{(p-1)^2}{4p} \frac{|y|^2}{s} \right)^{-\frac{1}{p-1}} \leq (p-1)^{-\frac{1}{p-1}} = \kappa,$$

với mọi y và $s \geq 1$.
Nếu $p \geq 2$ thì

$$\left| \varphi^{p-1} - \varphi_0^{p-1} \right| \leq C(p) \left(\left(\frac{\kappa}{2ps} \right)^{p-1} + \frac{\kappa^{p-1}}{2ps} \right),$$

khi đó

$$\begin{aligned} \left\| \varphi^{p-1} - \varphi_0^{p-1} \right\|_{L^2_\rho} &= \sqrt{\int \left(\varphi^{p-1} - \varphi_0^{p-1} \right)^2 \rho(y) dy} \\ &\leq C(p) \left(\left(\frac{\kappa}{2ps} \right)^{p-1} + \frac{\kappa^{p-1}}{2ps} \right) \sqrt{\int \rho(y) dy} \\ &= C(p) \left(\left(\frac{\kappa}{2ps} \right)^{p-1} + \frac{\kappa^{p-1}}{2ps} \right) \to 0 \text{ khi } s \to \infty. \end{aligned}$$

Nếu $1 < p < 2$, chúng ta có

$$\left| \varphi^{p-1} - \varphi_0^{p-1} \right|^2 \leq C(p) \left[\left(\frac{\kappa}{2ps} \right)^{2(p-1)} + \frac{\kappa}{2ps} \varphi_0^{2(p-2)} \right].$$

Mà

$$\varphi_0^{2(p-2)} = \varphi_0^{2(p-1)}\varphi_0^{-2} \leq \kappa^{2(p-1)}\left(p-1+\frac{(p-1)^2}{4p}\frac{|y|^2}{s}\right)^{\frac{2}{p-1}}$$
$$\leq C(\kappa,p)\left(1+|y|^{\frac{4}{p-1}}\right),$$

với mọi $s \geq 1$, suy ra

$$\int \varphi_0^{p-2}\rho(y)dy \leq C\left(\kappa,p\right)\int\left(1+|y|^{\frac{4}{p-1}}\right)\rho(y)dy \leq C,$$

với hằng số $C > 0$. Từ đây ta có được $\left\|\varphi^{p-1}-\varphi_0^{p-1}\right\|_{L^2_\rho} \to 0$ khi $s \to \infty$ với $1 < p < 2$. Hay với mọi $p > 1$ thì

$$\left\|\varphi^{p-1}-\varphi_0^{p-1}\right\|_{L^2_\rho} \to 0 \text{ khi } s \to \infty.$$

Tiếp theo chúng ta chứng minh

$$\left\|\varphi_0^{p-1}-\frac{1}{p-1}\right\|_{L^2_\rho} \to 0 \text{ khi } s \to \infty, \tag{2.26}$$

thật vậy

$$\left|\varphi_0^{p-1}-\frac{1}{p-1}\right| = \left|\frac{1}{p-1+\frac{(p-1)^2}{4p}\frac{|y|^2}{s}}-\frac{1}{p-1}\right|$$
$$= \left|\frac{\frac{|y|^2}{s}}{4p+(p-1)\frac{|y|^2}{s}}\right|$$
$$= \frac{1}{s}\frac{|y|^2}{4p+(p-1)\frac{|y|^2}{s}} \leq \frac{1}{s}\frac{|y|^2}{4p},$$

suy ra

$$\left\|\varphi_0^{p-1}-\frac{1}{p-1}\right\|_{L^2_\rho} \leq \frac{1}{4ps}\sqrt{\int |y|^4\rho(y)dy} \leq \frac{C}{4ps} \to 0 \text{ khi } s \to \infty.$$

Vậy chúng ta có

$$\left\|\varphi^{p-1}-\frac{1}{p-1}\right\|_{L^2_\rho} \to 0 \text{ khi } s \to \infty,$$

hay

$$\left\|\mathcal{V}(y,s)\right\|_{L^2_\rho} \to 0 \text{ khi } s \to \infty.$$

+ Chứng minh (ii): Dễ dàng suy ra từ định nghĩa của $\mathcal{V}$.

+ Chứng minh (iii): Đặt $\alpha(Z,s) = \mathcal{V}(y,s)$, với $Z = \dfrac{|y|^2}{s}$.

Khai triển Taylor cho $\alpha(Z,s)$ gần $Z=0$, chúng ta được

$$\alpha(Z,s) = \alpha(0,s) + \frac{\partial \alpha}{\partial Z}(0,s)\, Z + O(Z^2).$$

Chúng ta tính $\alpha(0,s)$

$$\begin{aligned}
\alpha(0,s) =& p\left(\varphi_0(0) + \frac{\kappa}{2ps}\right)^{p-1} - \frac{p}{p-1}\\
=& p\left(\kappa + \frac{\kappa}{2ps}\right)^{p-1} - \frac{p}{p-1}\\
=& p\kappa^{p-1}\left(1 + \frac{1}{2ps}\right)^{p-1} - \frac{p}{p-1}\\
=& \frac{p}{p-1}\left(1 + \frac{p-1}{2ps} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right) - \frac{p}{p-1}\\
=& \frac{1}{2s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right),
\end{aligned}$$

vậy $\alpha(0,s) = \dfrac{1}{2s} + O\left(\dfrac{1}{s^2}\right)$. Chúng ta tính $\dfrac{\partial \alpha}{\partial Z}(0,s)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial Z}(0,s) =& p(p-1)\frac{\partial \varphi_0}{\partial Z}(0)\left(\varphi_0(0) + \frac{\kappa}{2ps}\right)^{p-2}\\
=& \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2ps}\right)^{p-2} = -\frac{1}{4}\left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right) = -\frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{s}\right),
\end{aligned}$$

vậy $\dfrac{\partial \alpha}{\partial Z}(0,s) = -\dfrac{1}{4} + O\left(\dfrac{1}{s}\right)$. Từ đây chúng ta có

$$\left|\alpha(Z,s) + \frac{1}{4s}\left(|y|^2 - 2\right)\right| \le \frac{C}{s^2}\left(1 + |y|^4\right).$$

□

Bổ đề 2.8. *Xét $B(q)$ được định nghĩa bởi (2.20), với $|q| < 1$ thì khi đó*

$$\left|B(q)\right| \le C|q|^{\min(2,p)}. \tag{2.27}$$

Đặc biệt nếu s đủ lớn và $q(s) \in V_A(s)$ thì chúng ta có

$$\left|\chi(y,s)B(q)\right| \le C|q|^2. \tag{2.28}$$

Chứng minh. + Chứng minh (2.27): Chúng ta có

$$\left|B(q)\right| = |\varphi|^p \left|\left(1+\frac{q}{\varphi}\right)^p - 1 - p\frac{q}{\varphi}\right|,$$

tương tự Bổ đề (2.7), chúng ta đánh giá được:

$$\begin{aligned}\left|B(q)\right| &\le C(p)\varphi^p \left(\left|\frac{q}{\varphi}\right|^2_{\left\{\left|\frac{q}{\varphi}\right|\le\frac14\right\}} + \left|\frac{q}{\varphi}\right|^p_{\left\{\left|\frac{q}{\varphi}\right|>\frac14\right\}}\right)\\ &= C(p)\left(\varphi^{p-2}|q|^2 + |q|^p\right),\end{aligned}$$

Trường hợp 1: Với $p > 2$, ta có $\varphi \le \kappa + \frac{\kappa}{2p}$ với mọi $s \ge 1$, vậy nên

$$\left|B(q)\right| \le C|q|^2,$$

với $|q| < 1$.

Trường hợp 2: Với $1 < p \le 2$, chúng ta có:

$$\left|B(q)\right| \le C(p)\left[\left(\left|\frac{q}{\varphi}\right|^{2-p}_{\left\{\left|\frac{q}{\varphi}\right|\le\frac14\right\}}\right)|q|^p + |q|^p\right] \le C|q|^p.$$

Từ hai trường hợp trên chúng ta chứng minh được (2.27).

+ Chứng minh (2.28): Chúng ta xét với $p < 2$. Nếu $\chi(y,s) = 0$ thì hiển nhiên bất đẳng thức trên là đúng, giờ chúng ta xét với $|y| \le 2K\sqrt{s}$. Đặt $f(t) = (\varphi + tq)^p$, khai triển Taylor cho $f(t)$, chúng ta được

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \int_0^t f''(\theta)(t-\theta)d\theta,$$

suy ra

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 f''(\theta)(1-\theta)d\theta.$$

Nên chúng ta được

$$f(1) - f(0) - f'(0) = \int_0^1 f''(\theta)(1-\theta)d\theta.$$

Từ đó chúng ta có

$$B(q) = p(p-1)q^2 \int_0^1 (\varphi + \theta q)^{p-2}(1-\theta)d\theta.$$

Do vậy, chúng ta được ước lượng sau:

$$\chi(y,s)\left|B(q)\right| \leq C\chi(y,s)|q|^2 \int_0^1 (1-\theta)|\varphi + \theta q|^{p-2}d\theta,$$

lại có

$$\chi(y,s)|\varphi + \theta q|^{p-2} \leq \chi(y,s)\big(|\varphi| + |q|\big)^{p-2}, \text{ vì } p < 2.$$

Mặt khác $q \in V_A(s)$ nên với s đủ lớn thì $\left|q(y,s)\right| \leq \dfrac{1}{2}\varphi_0\left(2K\right)$ và chúng ta có φ_0 là hàm nghịch biến nên

$$\varphi = \varphi_0(z) + \frac{\kappa}{2ps} \leq \varphi_0(2K), \qquad \text{với } z = \frac{|y|}{\sqrt{s}} \leq 2K.$$

Đến đây chúng ta có

$$\chi(y,s)|\varphi + \theta q|^{p-2} \leq \left(\varphi_0(2K) + \frac{1}{2}\varphi_0(2K)\right)^{p-2} \leq C(K).$$

Trong trường hợp $p \geq 2$, chúng ta đã chứng minh ở phía trên. □

Bổ đề 2.9. *Xét $R(y,s)$ được định nghĩa tại (2.21), nếu s đủ lớn thì tồn tại hằng số $C > 0$, để*

$$\left|R(y,s)\right| \leq \frac{C}{s}. \tag{2.29}$$

Đặc biệt khi s đủ lớn, thì

$$R(y,s) = \frac{c_p}{s^2} + O\left(\frac{1+|y|^4}{s^3}\right), \quad \forall\, |y| \le 2K\sqrt{s}. \tag{2.30}$$

Chứng minh. + Chứng minh (2.29): Dựa vào định nghĩa của φ tại (2.16), chúng ta đưa ra được các đẳng thức sau:

$$\Delta\varphi = -\frac{p-1}{2ps}\varphi_0^p + \frac{(p-1)^2}{4ps^2}y^2\varphi_0^{2p-1},$$
$$\partial_s\varphi = \frac{-\kappa}{2ps^2} + \frac{p-1}{4ps^2}y^2\varphi_0^p$$

và

$$\begin{aligned}\varphi^p - \frac{\varphi}{p-1} - \frac{1}{2}y\nabla\varphi &= \left[\varphi_0 + \frac{\kappa}{2ps}\right]^p - \frac{\kappa}{2p(p-1)s} + \left(\frac{p-1}{4ps}y^2\varphi_0^p - \frac{\varphi_0}{p-1}\right)\\ &= \left[\left(\varphi_0 + \frac{\kappa}{2ps}\right)^p - \varphi_0^p\right] - \frac{\kappa}{2p(p-1)s}.\end{aligned}$$

Chúng ta thấy rằng với $p > 1$ thì $\left|\frac{y^2}{s}\varphi_0^p\right| \le C$, $\left|\frac{y^2}{s}\varphi_0^{2p-1}\right| \le C$ với mọi $y \in \mathbb{R}^N$. Suy ra $|\Delta\varphi| \le \frac{C}{s}$ và $|\partial_s\varphi| \le \frac{C}{s}$.
Mặt khác, tương tự Bổ đề 2.8, chúng ta có đánh giá sau:

$$\left|\left(\varphi_0 + \frac{\kappa}{2ps}\right)^p - \varphi_0^p\right| \le \frac{C}{s},$$

suy ra $\left|\varphi^p - \frac{\varphi}{p-1} - \frac{1}{2}y\nabla\varphi\right| \le \frac{C}{s}$.
Vậy tồn tại hằng số $C > 0$ và s đủ lớn để

$$\left|R(y,s)\right| \le \frac{C}{s}.$$

+ Chứng minh (2.30): Khai triển Taylor theo biến $Z = \dfrac{|y|^2}{s}$ cho hàm

$$\left(p - 1 + \frac{(p-1)^2}{4p}\frac{|y|^2}{s}\right)^{\frac{-p}{p-1}},$$

khi $|Z| \le 2K$, chúng ta có

$$\left|\left(p - 1 + \frac{(p-1)^2}{4p}\frac{|y|^2}{s}\right)^{\frac{-p}{p-1}} - \frac{\kappa}{p-1} + \frac{\kappa}{4(p-1)}\frac{|y|^2}{s}\right|$$

$$\leq C\left(\frac{1+|y|^4}{s^2}\right), \quad \forall\,|y| \leq 2K\sqrt{s}.$$

Khi đó

$$\left|-\frac{p-1}{2ps}\left(p-1+\frac{(p-1)^2}{4p}\frac{|y|^2}{s}\right)^{\frac{-p}{p-1}}+\frac{\kappa}{2ps}-\frac{\kappa}{8p}\frac{|y|^2}{s^2}\right| \leq C\left(\frac{1+|y|^4}{s^3}\right),$$

tiếp tục chúng ta ước lượng cho

$$\left|\frac{(p-1)^2|y|^2}{4ps^2}\left(p-1+\frac{(p-1)^2}{4p}\frac{|y^2|}{s}\right)^{\frac{-(2p-1)}{p-1}}-\frac{(p-1)^2|y|^2}{4ps^2}(p-1)^{\frac{-(2p-1)}{p-1}}\right|$$
$$\leq C\left(\frac{1+|y|^4}{s^3}\right),$$

hay

$$\left|\Delta\varphi+\frac{\kappa}{2ps}-\frac{\kappa}{8p}\frac{|y|^2}{s^2}-\frac{\kappa}{4p}\frac{|y|^2}{s^2}\right| \leq C\left(\frac{1+|y|^4}{s^3}\right). \tag{2.31}$$

Chúng ta đánh giá cho $\partial_s\varphi$

$$\left|-\partial_s\varphi-\frac{\kappa}{2ps^2}+\frac{\kappa}{4p}\frac{|y|^2}{s^2}\right| \leq C\left(\frac{1+|y|^4}{s^3}\right), \tag{2.32}$$

tiếp tục đánh giá cho $Q(Z,s)=\varphi^p-\frac{\varphi}{p-1}-\frac{1}{2}y\nabla\varphi$, với $Z=\frac{|y|^2}{s}$, ta được

$$\left|Q(Z,s)+\frac{\kappa}{2p(p-1)s}-\frac{\kappa}{2(p-1)s}+\frac{\kappa}{8p}\frac{|y|^2}{s^2}-\frac{\kappa}{8ps^2}\right|$$
$$\leq C\left(\frac{1+|y|^4}{s^3}\right). \tag{2.33}$$

Cộng các bất đẳng thức (2.31), (2.32), (2.33), chúng ta được

$$\left|R(y,s)-\frac{5\kappa}{8ps^2}\right| \leq C\left(\frac{1+|y|^4}{s^3}\right), \tag{2.34}$$

tới đây chúng ta chọn $c_p=\dfrac{5\kappa}{8p}$, khi đó chúng ta chứng minh xong (2.30).

$\square$

2.6 Sự rút gọn đến bài toán hữu hạn chiều

Dựa vào Nhận xét 2.5, chúng ta cần chứng minh tồn tại nghiệm q cho bài toán (2.22) thỏa mãn

$$q(s) \in V_A(s), \quad \forall s \geq 1.$$

Đầu tiên chúng ta xây dựng hàm giá trị ban đầu như sau:

Định nghĩa 2.10 (Xây dựng hàm giá trị ban đầu). *Cho $A \geq 1$, $s_0 = -\log T > 1$ và $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$, chúng ta định nghĩa*

$$\psi := \psi_{(s_0,d_0,d_1)}(y) = \frac{A}{s_0^2}(d_0 + d_1 y)\,\chi(2y, s_0). \tag{2.35}$$

Mệnh đề 2.11 (Tính chất của hàm giá trị ban đầu). *Với mọi $K \geq 1$ và $A \geq 1$, chúng ta xác định $s_1 \geq 1$ sao cho với mọi $s_1 \geq s_0$ thì những điều sau là đúng với $\psi := \psi_{(s_0,d_0,d_1)}$:*

(i) Tồn tại $\mathcal{D}_{s_0} \subset [-2,2]^2$ sao cho hàm

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (d_0, d_1) &\mapsto (\psi_0, \psi_1)(s_0), \end{aligned}$$

là affine, song ánh từ $\mathcal{D}_{s_0}$ đến $\hat{V}_A(s_0)$, trong đó

$$\hat{V}_A(s) = \left[\frac{-A}{s^2}, \frac{A}{s^2}\right]^2.$$

(ii) Với mọi $(d_{s_0}, d_{s_1}) \in \mathcal{D}_{s_0}$, $\psi \in V_A(s_0)$. Chính xác hơn, chúng ta có

$$|\psi_m| \leq \frac{A}{s_0^2}, m = 0,1, \quad |\psi_2| \leq \frac{1}{s_0^2},$$
$$\left\|\frac{\psi_-(\cdot)}{1+|y|^3}\right\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{s_0^2}, \quad \psi_e(\cdot) = 0,$$

và

$$\|\psi(\cdot)\|_{W^{1,\infty}} \leq \frac{1}{s_0}.$$

Chứng minh. + Chứng minh (i): Chúng ta có

$$
\begin{aligned}
\psi_1 =& \frac{1}{2}\int \psi h_1(y)\rho(y)dy = \frac{A}{2s_0^2}\int (d_0 + d_1 y)\,\chi(2y,s_0)y\rho(y)dy\\
=& \frac{A}{2s_0^2}\left[d_0\int y\chi(2y,s_0)\rho(y)dy + d_1\int y^2\chi(2y,s_0)\rho(y)dy\right]\\
=& \frac{A}{2s_0^2}d_1\int y^2\chi(2y,s_0)\rho(y)dy \qquad (\text{vì } y\chi(2y,s_0)\rho(y) \text{ là hàm lẻ}),
\end{aligned}
$$

chúng ta xét

$$
\begin{aligned}
\psi_1 - d_1\frac{A}{s_0^2} =& d_1\frac{A}{2s_0^2}\left(\int y^2\chi(2y,s_0)\rho(y)dy - 2\right)\\
=& d_1\frac{A}{2s_0^2}\int\left(y^2\chi(2y,s_0) - 2\right) \qquad (\text{vì } \int\rho(y)dy = 1\ )\\
=& d_1\frac{A}{2s_0^2}\left(\int y^2\left(\chi(2y,s_0)-1\right)\rho(y)dy + \int\left(y^2-2\right)\rho(y)\right),
\end{aligned}
$$

vì

$$
\int\left(y^2-2\right)\rho(y)dy = \int h_2(y)h_0(y)\rho(y)dy = 0,
$$

nên chúng ta có

$$
\psi_1 - d_1\frac{A}{s_0^2} = d_1\frac{A}{2s_0^2}\int y^2\left(\chi(2y,s_0)-1\right)\rho(y)dy.
$$

Mặt khác

$$
0 \le \left(1-\chi(2y,s_0)\right)\rho(y) \le Ce^{-s_0}\sqrt{\rho(y)}.
$$

Nên chúng ta có

$$
\left|\int y^2\left(\chi(2y,s_0)-1\right)\rho(y)dy\right| \le Ce^{-s_0}.
$$

Từ đó suy ra

$$
\psi_1 = d_1\left(\frac{A}{s_0^2} + O(e^{-s_0})\right),
$$

tương tự chúng ta tính được

$$
\psi_0 = d_0\left(\frac{A}{s_0^2} + O(e^{-s_0})\right).
$$

Bây giờ chúng ta sẽ điều khiển d_0, d_1 sao cho ψ_0, ψ_1 thuộc vào tập $\hat{V}_A(s_0)$, vậy chúng ta cho

$$\begin{aligned}
&|\psi_0| \le \frac{A}{s_0^2}\\
&\Leftrightarrow \left| d_0 \left(\frac{A}{s_0^2} + O(e^{-s_0}) \right) \right| \le \frac{A}{s_0^2}\\
&\Leftrightarrow |d_0| \le \frac{\frac{A}{s_0^2}}{\frac{A}{s_0^2} + O(e^{-s_0})} \quad (\text{ vì } \frac{A}{s_0^2} > 0).
\end{aligned}$$

Vậy chọn $\mathcal{D}_{s_0} = \left[\frac{-\frac{A}{s_0^2}}{\frac{A}{s_0^2} + O(e^{-s_0})}, \frac{\frac{A}{s_0^2}}{\frac{A}{s_0^2} + O(e^{-s_0})} \right]$ để với mọi $d_0, d_1 \in \mathcal{D}_{s_0}$ thì $\psi_0, \psi_1 \in \hat{V}_A(s_0)$.

Mặt khác

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\frac{A}{s_0^2}}{\frac{A}{s_0^2} + O(e^{-s_0})} \right| < 2 \Leftrightarrow \frac{A}{s_0^2} < 2 \left(\frac{A}{s_0^2} + O(e^{-s_0}) \right)&\\
\Leftrightarrow \frac{A}{s_0^2} > O(e^{-s_0}) \quad (\text{luôn đúng}),&
\end{aligned}$$

thế nên $\mathcal{D}_{s_0} \subset [-2, 2]^2$, và ta kết thúc chứng minh (i) ở đây.

+ Chứng minh (ii): Chúng ta có $\chi(2y, s_0) \left(1 - \chi(y, s_0)\right) = 0$ nên $\psi_e = 0$. Chúng ta dễ đánh giá được $|\psi_2| \le C \left(|d_0| + |d_1|\right) e^{-s_0}$, mà

$$\begin{aligned}
\psi_- =& \psi - \psi_0 - \psi_1 y - \psi_2(y^2 - 2)\\
=& \frac{A}{s_0^2} (d_0 + d_1 y) \chi(2y, s_0) - d_0 \left(\frac{A}{s_0^2} + O(e^{-s_0}) \right)\\
&- d_1 \left(\frac{A}{s_0^2} + O(e^{-s_0}) \right) - \psi_2(y^2 - 2)\\
=& \frac{d_0 A}{s_0^2} \left(1 - \chi(2y, s_0)\right) + \frac{d_1 A}{s_0^2} \left(1 - \chi(2y, s_0)\right) y\\
&- (d_0 + d_1) O(e^{-s_0}) - \psi_2(y^2 - 2).
\end{aligned}$$

Vì $e^{-s_0} < \frac{1}{s_0^2}$ với s_0 đủ lớn, nên chúng ta có đánh giá sau:

$$|\psi_-| \le \frac{CA}{s_0^2} \left(|d_0| + |d_1|\right) \left(1 + |y|^3\right),$$

hay

$$\left\|\frac{\psi_-}{1+|y|^3}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \frac{CA}{s_0^2}\left(|d_0|+|d_1|\right).$$

Vậy chúng ta đã chứng minh xong cho (ii) và cũng kết thúc chứng minh cho Mệnh đề 2.11. □

Mệnh đề 2.12. *Tồn tại $K_2 \ge 1$ và $A_2 \ge 1$ sao cho với mọi $K \ge K_2$, $A \ge A_2$ và $l^* > 0$, tồn tại $s_2(A, K, l^*) > 1$ sao cho với mọi $\sigma \ge s_0 \ge s_2$ thì những điều sau là đúng:*
Giả sử $q(s) \in V_A(s)$ với mọi $s \in [\sigma, \sigma + l]$ với $l \in [0, l^*]$. Nếu $\sigma = s_0$, chúng ta giả sử rằng $q(u, s_0) = \psi(s_0, d_0, d_1, y)$, với $(d_0, d_1) \in \mathcal{D}_{s_0}$.
Khi đó với mọi $s \in [\sigma, \sigma + l]$, chúng ta có các tính chất sau:

1.

$$\left|\partial_s q_m(s) - \left(1 - \frac{m}{2}\right) q_m(s)\right| \le \frac{C}{s^3}, \quad m = 0, 1. \tag{2.36}$$

và

$$\left|\partial_s q_2(s) + \frac{2}{s} q_2(s)\right| \le \frac{C}{s^3}. \tag{2.37}$$

2. • *Nếu $\sigma > s_0$, thì chúng ta có*

$$\left\|\frac{\theta_-(\cdot, s)}{1+|y|^3}\right\|_{L^\infty} \le \frac{C}{s^2}\left(A^2\left(e^{-(s-\sigma)^2} + (s-\sigma)^2 + 1\right) + s - \sigma\right), \tag{2.38}$$

và

$$\|q_e\|_{L^\infty} \le \frac{C}{\sqrt{s}}\left((s-\sigma) + A^2 e^{-\frac{s-\sigma}{p}} A + A e^{s-\sigma}\right).$$

• *Nếu $\sigma = s_0$, thì chúng ta có*

$$\left\|\frac{q_-(y, s)}{1+|y|^3}\right\|_{L^\infty} \le \frac{C}{s^2}\left(1 + s - s_0\right), \tag{2.39}$$

và

$$\|q_e\|_{L^\infty} \le \frac{C}{\sqrt{s}}\left(1 + s - s_0\right). \tag{2.40}$$

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng minh bất đẳng thức (2.36).
Chúng ta có

$$q_m(s) = \int \chi(y,s) q h_m(y)\rho(y)dy,$$

nên

$$\begin{aligned}\partial_s q_m =& \int \big(\partial_s \chi(y,s)\big)\, h_m q\rho(y)dy + \int \chi(y,s)\,(\partial_s q)\, h_m \rho(y)dy\\ :=& I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Chúng ta xét

$$\begin{aligned}I_1 =& \int \big(\partial_s \chi(y,s)\big)\, h_m q\rho(y)dy\\ =& \int \left(\partial_s \chi_0\left(\frac{|y|}{K\sqrt{s}}\right)\right) q h_m \rho(y)dy\\ =& \frac{-1}{2Ks^{\frac{3}{2}}} \int \left({\chi'}_0\left(\frac{|y|}{K\sqrt{s}}\right)\right) |y|\, q h_m \rho(y)dy,\end{aligned}$$

chúng ta thấy $\left|{\chi'}_0\left(\frac{|y|}{K\sqrt{s}}\right)\right| \le C 1_{\left\{K\sqrt{s}<|y|<2K\sqrt{s}\right\}}$ nên $|I_1| \le Ce^{-s}$.
Chúng ta xét

$$\begin{aligned}I_2 =& \int \chi(y,s)\,(\partial_s q)\, h_m \rho(y)dy\\ =& \int \chi(y,s)\big(\mathcal{L}q + Vq + B(q) + R\big)\, h_m\rho(y)dy. \qquad (2.41)\end{aligned}$$

Sử dụng đẳng thức sau:

$$\mathcal{L}(\chi h_m) = \left(1-\frac{m}{2}\right)\chi h_m + (\Delta\chi)\left(2\nabla h_m - \frac{y}{2}h_m\right), \quad m = 0,1,$$

chúng ta suy ra

$$\begin{aligned}\int \chi\,(\mathcal{L}q) h_m \rho dy =& \int \mathcal{L}(\chi h_m) q\rho dy = \left(1-\frac{m}{2}\right)\int \chi q h_m \rho dy + O(e^{-s})\\ =& \left(1-\frac{m}{2}\right) q_m(s) + O(e^{-s}), \quad m = 0,1.\end{aligned}$$

Vậy chúng ta có

$$\int \chi\,(\mathcal{L}q)h_m\rho dy = \left(1-\frac{m}{2}\right)q_m(s)+O(e^{-s}),\quad m=0,1. \tag{2.42}$$

Áp dụng các Bổ đề 2.6, 2.7, 2.9 và đẳng thức (2.42) ta chứng minh được đẳng thức (2.36). Tương tự ta chứng minh được đẳng thức (2.37).
Bây giờ ta chứng minh ý thứ 2 trong mệnh đề (2.12). Chúng ta sử dụng dạng tích phân cho phương trình (2.18)(xem tại (1.6)). Đầu tiên chúng ta lấy $K \geq K^*$ và $\sigma \geq s_3(K,l^*) \geq s^*(K,l^*)$ đủ lớn (với s^* và K^* được cho trong Mệnh đề 1.4), do đó

$$\text{nếu } \sigma \leq \tau \leq s \leq \sigma+\ell^* \text{ thì } \frac{1}{s} \leq \frac{1}{\tau} \leq \frac{1}{\sigma} \leq \frac{2}{s}. \tag{2.43}$$

Bước 1: Ước lượng cho $\mathcal{K}(s,\sigma)q(\sigma)$

Chúng ta sử dụng $q(\sigma)\in V_A(\sigma)$ và (2.43) chúng ta có

$$\left|q_0(\sigma)\right| \leq \frac{A}{\sigma^2} \leq \frac{CA}{s^2},\quad \left|q_1(\sigma)\right| \leq \frac{A}{\sigma^2} \leq \frac{CA}{s^2},$$

$$\left|q_2(\sigma)\right| \leq \frac{A^2\ln\sigma}{\sigma^2} \leq \frac{CA^2\ln s}{s^2},\quad \left\|\frac{q_-(\cdot,\sigma)}{1+|y|^3}\right\|_{L^\infty} \leq \frac{A}{\sigma^2} \leq \frac{CA}{s^2},$$

$$\text{và } \left\|q_e(\sigma)\right\|_{L^\infty} \leq \frac{A^2}{\sqrt{\sigma}} \leq \frac{CA^2}{\sqrt{s}}.$$

Áp dụng (1.10) và (1.11) với $v=q(\sigma)$ và $\theta(s)=\mathcal{K}(s,\sigma)v$, chúng ta thấy rằng

$$\left\|\frac{\theta_-(\cdot,s)}{1+|y|^3}\right\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{s^2}\left(A^2e^{-(s-\sigma)^2}+Ae^{-\frac{s-\sigma}{2}}+A^2\left((s-\sigma)^2+1\right)\right), \tag{2.44}$$

và

$$\left\|\theta_e(s)\right\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{s}}\left(A^2e^{s-\sigma}+Ae^{-\frac{s-\sigma}{p}}\right). \tag{2.45}$$

Nếu $\sigma=s_0$ thì chúng ta thu được đánh giá tốt hơn bởi Mệnh đề 2.11 như sau:

$$\left\|\frac{\theta_-(\cdot,s)}{1+|y|^3}\right\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{s^2}, \tag{2.46}$$

và

$$\left\|\theta_e(s)\right\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{s}}. \tag{2.47}$$

Bước 2: Ước lượng cho $\int\limits_{\sigma}^{s} \mathcal{K}(s,\tau)\left(B(q)+R\right)(\tau)\, d\tau$

Ta đặt $v(\tau) = (B(q)+R)(\tau)$. Từ Bổ đề 2.9, chúng ta có

$$\left\|R(\cdot,\tau)\right\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\tau} \leq \frac{2C}{s},\ \left\|R_e(\cdot,\tau)\right\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{s}$$

$$\left|R(y,\tau) - \frac{a_0}{\tau^2}\right| \leq \frac{C(1+|y|^3)}{s^3}, \quad \forall\,|y| \leq 2K\sqrt{s}, \tag{2.48}$$

$$\left|R(y,\tau)\right| \leq \frac{C(1+|y|^3)}{s^2}, \quad \forall\,|y| \geq K\sqrt{s}, \tag{2.49}$$

từ đó dẫn tới

$$\left|R_-(y,\tau)\right| \leq \frac{C(1+|y|^3)}{s^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2.50}$$

Dựa vào Bổ đề 2.6 và Bổ đề 2.8, chúng ta có với s đủ lớn thì

$$\left|B(q)(y,\tau)\right| \leq \frac{C(1+|y|^3)}{s^2}, \quad \left|B(q)(y,\tau)\right| \leq \frac{C}{s}. \tag{2.51}$$

Từ các bất đẳng thức (2.48), (2.50) và (2.51) chúng ta có

$$\left|v_0(\tau)\right| \leq \frac{C}{s},\ \left|v_m(\tau)\right| \leq \frac{C}{s^2}, \quad m = 1,2 \tag{2.52}$$

$$\text{và } \left|v_-(y,\tau)\right| \leq \frac{C\left(1+|y|^3\right)}{s^2} \text{ và } \left|v_e(y,\tau)\right| \leq \frac{C}{s}. \tag{2.53}$$

Chúng ta nhắc lại rằng $s - \tau \leq s - \sigma \leq l \leq l^*$, áp dụng Bổ đề 1.4 chúng ta có

$$\left|\theta_-(y,s,\tau)\right| \leq \frac{C}{s^2}\left(1+|y|^3\right) \text{ và } \left\|\theta_e(\cdot,s,\tau)\right\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{s}} \tag{2.54}$$

với s đủ lớn.

Bây giờ chúng ta có biến đổi như sau:

$$\left(\int\limits_{\sigma}^{s} \mathcal{K}(s,\tau)\left(B(q)+R\right)(\tau)\, d\tau\right)_-$$

$$
\begin{aligned}
=& P_-\left(\chi(s)\int_\sigma^s \mathcal{K}(s,\tau)\big(B(q)+R\big)(\tau)\,d\tau\right)\\
=& P_-\left(\int_\sigma^s \chi(s)\mathcal{K}(s,\tau)\big(B(q)+R\big)(\tau)\,d\tau\right)\\
=& P_-\left(\int_\sigma^s \chi(s)\theta(s,\tau)d\tau\right)\\
=& P_-\left(\int_\sigma^s \left(\sum_{j=0}^{2}\theta_j(s,\tau)h_j+\theta_-(s,\tau)\right)d\tau\right)\\
=& P_-\left(\int_\sigma^s \theta_-(s,\tau)d\tau\right),
\end{aligned}
$$

vì

$$
P_-\left(\int_\sigma^s \sum_{j=0}^{2}\theta_j(s,\tau)h_jd\tau\right)=0,
$$

trong đó

$$
\theta(s,\tau)=\mathcal{K}(s,\tau)\big(B(q)+R\big)(\tau).
$$

Chúng ta thấy rằng, nếu $\big|g(y)\big|\le m\left(1+|y|^3\right)$ thì suy ra

$$
\big|P_-(g)(y)\big|\le Cm\left(1+|y|^3\right).
$$

Sử dụng (2.54), chúng ta được

$$
\left|\int_\sigma^s \theta_-(s,\tau)d\tau\right|\le \frac{C(s-\sigma)}{s^2}\left(1+|y|^3\right),
$$

hay

$$
\left|\left(\int_\sigma^s \mathcal{K}(s,\tau)\big(B(q)+R\big)(\tau)\,d\tau\right)_-\right|\le \frac{C(s-\sigma)}{s^2}\left(1+|y|^3\right). \tag{2.55}
$$

Tương tự, chúng ta có

$$\left(\int_{\sigma}^{s} \mathcal{K}(s,\tau)\big(B(q)+R\big)(\tau)\,d\tau\right)_e$$
$$= \big(1-\chi(s)\big)\int_{\sigma}^{s} \mathcal{K}(s,\tau)\big(B(q)+R\big)(\tau)\,d\tau$$
$$= \int_{\sigma}^{s} \big(1-\chi(s)\big)\mathcal{K}(s,\tau)\big(B(q)+R\big)(\tau)\,d\tau = \int_{\sigma}^{s} \theta_e(s,\tau)d\tau.$$

Áp dụng (2.54) chúng ta được

$$\left\|\left(\int_{\sigma}^{s} \mathcal{K}(s,\tau)\big(B(q)+R\big)(\tau)\,d\tau\right)_e\right\|_{L^\infty} \le \frac{C(s-\sigma)}{\sqrt{s}}. \tag{2.56}$$

Cộng bất đẳng thức (2.45) với (2.55) và bất đẳng thức (2.47) với (2.56) chúng ta chứng minh xong Mệnh đề 2.12. □

Mệnh đề 2.13. *Tồn tại $K_3 > 0$ và $A_3 > 0$ sao cho với mọi $K \ge K_3$ và $A \ge A_3$, tồn tai $s_3(A,K) \ge 1$ sao cho với mọi $s_0 \ge s_3$, chúng ta giả sử các giả thiết sau là đúng:*

(i) Hàm giá trị ban đầu ψ_{d_0,d_1}, thỏa mãn Mệnh đề 2.11.

(ii) $q(s) \in V_A(s)$, với mọi $s \in [s_0, s^*]$, với $s^* \ge s_0$.

Khi đó chúng ta có những ước lượng sau cho bất kỳ $s \in [s_0, s^*]$:

$$\big|q_2(s)\big| \le \frac{A^2 \ln s}{2s^2}, \left\|\frac{q(\cdot,s)}{1+|y|^3}\right\|_{L^\infty} \le \frac{A}{2s^2}, \text{ và } \big\|q_e(\cdot,s)\big\|_{L^\infty} \le \frac{A^2}{2\sqrt{s}}.$$

Chứng minh. Vì đánh giá cho q_- cũng giống với đánh giá của q_e nên trước tiên, chúng ta sẽ đánh giá cho q_-.

Đánh giá cho q_-:

Chúng ta xét $K \ge K_2$, $A \ge A_2$, $l^* = \ln A$ và $s_0 \ge s_2(A,K,l^*)$, ở đó K_2, A_2, s_3 được cho trong Mệnh đề 2.12. Khi đó, chúng ta giả sử rằng các giả thiết $i)$ và $ii)$ trong Mệnh đề 2.13 là đúng, với $s^* \geq s_0$. Chúng ta xét hai trường hợp sau:

+ Nếu $s - s_0 \leq \ln A$, trong Mệnh đề 2.12 chúng ta chọn $l = s - s_0$ và $\sigma = s_0$. Theo Mệnh đề 2.12, chúng ta có

$$\left\| \frac{q_-(\cdot, s)}{1 + |y|^3} \right\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{s^2}(1 + \ln A) \leq \frac{A}{2s^2},$$

với điều kiện $A \geq A_{3,1}$, với $A_{3,1} \geq 1$.

+ Nếu $s - s_0 \geq \ln A$, theo Mệnh đề 2.12, chúng ta chọn $\sigma = s - \ln A$, $l = \ln A \,(= l^*)$, và khi đó

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\theta_-(\cdot, s)}{1 + |y|^3} \right\|_{L^\infty} &\leq \frac{C}{s^2}\left(A^2 e^{-(\ln A)^2} + A e^{-\frac{\ln A}{2}} + A^2 \left((\ln A)^2 + 1 \right) + \ln A \right) \\ &\leq \frac{A}{2s^2},\end{aligned}$$

với điều kiện $A \geq A_{3,2}$, với $A_{3,2} \geq 1$.

Chúng ta chọn $A_3 = \max\left(A_2, A_{3,1}, A_{3,2}\right)$, khi đó với mọi $A \geq A_3$ thì

$$\left\| \frac{\theta_-(\cdot, s)}{1 + |y|^3} \right\|_{L^\infty} \leq \frac{A}{2s^2}. \tag{2.57}$$

Đánh giá cho q_2:

Vì $q \in V_A(s)$ với mọi $s \in [s_0, s^*]$, thế nên chúng ta giả sử rằng $q_2(s^*)$ chạm biên của tập $V_A(s^*)$, tức là

$$\left|q_2(s^*)\right| = \frac{A^2 \ln(s^*)}{(s^*)^2} \text{ và } \left|q_2(s)\right| < \frac{A^2 \ln(s)}{s^2}, \quad \forall s \in [s_0, s^*)\,.$$

Không làm mất tính tổng quát, chúng ta giả sử $q_2(s^*) > 0$, khi đó theo Mệnh đề 2.12 chúng ta có

$$\partial_s q_2(s^*) \leq \frac{C}{(s^*)^2} - \frac{2}{s^*} q_2(s^*) = \frac{C}{(s^*)^2} - \frac{2A^2 \ln(s^*)}{(s^*)^3}$$

Chọn $A^2 > C$, khi đó

$$\partial_s q_2(s^*) < \frac{A^2}{(s^*)^2} - \frac{2A^2 \ln(s^*)}{(s^*)^3}. \tag{2.58}$$

Mặt khác

$$\partial_s q_2(s^*) = \partial_s \left(\frac{A^2 \ln (s^*)}{(s^*)^2} \right) = \frac{A^2}{(s^*)^3} - \frac{2A^2 \ln(s^*)}{(s^*)^3}, \tag{2.59}$$

từ (2.58) và (2.59) chúng ta thấy mâu thuẫn. Tức $q_2(s^*)$ không thể chạm biên của tập $V_A(s^*)$. $\square$

Mệnh đề 2.14. *Chúng ta giả sử tồn tại các tham số $K \geq 1$, $A \geq 1$ và $s_0(A, K) \geq 1$ sao cho các giả thiết sau là đúng:*

a) Hàm giá trị ban đầu $q = \psi(s_0, d_0, d_1)$ thỏa mãn Mệnh đề 2.11, với $(d_0, d_1) \in \mathcal{D}_{s_0}$,

b) $q(s) \in V_A(s)$, với mọi $s \in [s_0, s_*]$, với $s_* \geq s_0$ với

$$q(s_*) \in \partial V_A(s_*).$$

Khi đó, chúng ta có

(i) (Giảm số chiều hữu hạn): $\big(q_0(s_*), q_1(s_*)\big) \in \partial \hat{V}_A(s_*)$, với tập $\hat{V}_A(s)$ được định nghĩa trong Mệnh đề 2.11.

(ii) Tồn tại $\nu_0 > 0$ sao cho với mọi $\nu \in (0, \nu_0)$ thì

$$(q_0, q_1)(s_* + \nu) \notin \hat{V}_A(s_* + \nu), \tag{2.60}$$

tức là

$$q(s_* + \nu) \notin V_A(s_* + \nu).$$

Chứng minh. + Chứng minh (i): Dựa vào Mệnh đề 2.13, chúng ta thấy rằng chỉ có $q_0(s_*)$ và $q_1(s_*)$ có thể chạm vào biên của $\hat{V}_A(s_*)$.

+ Chứng minh (ii): Vì $\big(q_0(s_*), q_1(s_*)\big) \in \partial \hat{V}_A(s_*)$ nên chúng ta giả sử $\big|q_0(s_*)\big| = \frac{A}{s_*^2}$. Khi đó $q_0(s_*) = \sigma_0 \frac{A}{s_*^2}$, với $\sigma_0 \in \{-1, 1\}$. Chúng ta xét $\sigma_0 = -1$ (trường hợp $\sigma_0 = 1$ làm tương tự), lúc đó

$$q_0(s_*) = -\frac{A}{s_*^2} \Leftrightarrow q_0(s_*) + \frac{A}{s_*^2} = 0.$$

Chúng ta đi chứng minh

$$\frac{d}{ds}\left(q_0(s) + \frac{A}{s^2}\right)\bigg|_{s=s_*} < 0,$$

để tồn tại hằng số $\delta > 0$ đủ nhỏ sao cho hàm $q_0(s) + \frac{A}{s^2}$ là hàm giảm, với mọi $s \in [s_* - \delta, s_* + \delta]$.

Thật vậy, dựa vào Mệnh đề 2.12 chúng ta có

$$\left| q_0{}'(s_*) + \frac{A}{s_*^2} \right| \le \frac{C}{s_*^3} \le \frac{C}{s_*^2} \Rightarrow q_0{}'(s_*) \le \frac{C - A}{s_*^2}.$$

Chọn $A = 2C$, chúng ta có

$$q_0{}'(s_*) < 0 < \frac{2A}{s_*^3} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{A}{s^2}\right)\bigg|_{s=s_*},$$

hay

$$\frac{d}{ds}\left(q_0(s) + \frac{A}{s^2}\right)\bigg|_{s=s_*} < 0.$$

Chúng ta suy ra

$$q_0(s_* + \delta) + \frac{A}{(s_* + \delta)^2} < q_0(s_*) + \frac{A}{(s_*)^2} = 0.$$

Khi đó, suy ra

$$q_0(s_* + \delta) < -\frac{A}{(s_* + \delta)^2},$$

tức là $q_0(s_* + \delta) \in \hat{V}_A(s_* + \delta)$.

$\square$

Mệnh đề 2.15. *Tồn tại $A, K \ge 1$, $\tilde{s}(A, K) \ge 1$ đủ lớn sao cho với mọi $s_0 \ge \tilde{s}(A, K)$ tồn tại $(d_0, d_1) \in \mathbb{R}^2$ sao cho với hàm giá trị ban đầu $\psi(s_0, d_0, d_1)$ được cho bởi Mệnh đề 2.11 nghiệm của phương trình* (2.22) *tồn tại với mọi $s \in [s_0, \infty)$ và thỏa mãn*

$$q(s) \in V_A(s), \quad \forall s \in [s_0, \infty).$$

Chứng minh. Chúng ta giả sử phản chứng rằng tồn tại $s(d_0, d_1) \geq s_0$ với $(d_0, d_1) \in \mathcal{D}_{s_0}$, để

$$q(s(d_0, d_1)) \notin V_A\left(s(d_0, d_1)\right),$$

vì $q(s_0) \in V_A(s_0)$ (theo Mệnh đề 2.11), thế nên tồn tại $s_* < \infty$ sao cho

$$s_* = \sup\left\{s_1 \geq s_0 : q(s) \in V_A(s), \quad \forall s \in [s_0, s_1]\right\}. \tag{2.61}$$

Theo tính liên tục của q theo s thì $q(s_*) \in \partial V_A(s_*)$. Theo Mệnh đề 2.14, chúng ta thấy rằng

$$(q_0, q_1)(s_*) \in \partial \hat{V}_A(s_*).$$

Chúng ta định nghĩa hàm Γ như sau:

$$\begin{aligned} &\Gamma : \mathcal{D}_{s_0} \to \partial[-1,1]^2 \\ &(d_0, d_1) \mapsto \Gamma(d_0, d_1) = \frac{s_*^2}{A}(q_0, q_1)(s_*). \end{aligned}$$

Chú ý rằng, chúng ta có những tính chất sau:

(i) Γ là một hàm liên tục từ $\mathcal{D}_{s_0}$ đến $\partial[-1,1]^2$.

(ii) Từ ý *(ii)* của Mệnh đề 2.14, chúng ta thấy rằng $q(s)$ phải rời khỏi $V_A(s)$, tại $s = s_0$, vì thế $s_* = s_0$. Do đó $\Gamma|_{\partial \mathcal{D}_{s_0}}$ đồng phôi với ánh xạ đồng nhất, điều này là mâu thuẫn nhờ vào lý thuyết bậc tô-pô.

□

2.7 Chứng minh Định lý 2.1

Trong phần này chúng ta đưa ra chứng minh cho Định lý 2.1.

Chứng minh. Bây giờ chúng ta xét tham số dương A, K và $\tilde{s}(A, K)$ sao cho Mệnh đề 2.15 đúng. Khi đó với mọi $s \in [s_0, +\infty)$ ta có $q(s) \in V_A(s)$. Khi đó, chúng ta được

$$\|q(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{\sqrt{s}}.$$

Từ (2.17) và (2.16) suy ra

$$\left\| w(y,s) - \varphi_0\left(\frac{|y|}{\sqrt{s}}\right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{\sqrt{s}}.$$

Thêm vào đó, sử dụng phép đổi biến đồng dạng (2.4) chúng ta suy ra kết luận cho (3.3) và từ đánh giá (3.3) chúng ta suy ra nghiệm bùng nổ trong thời gian hữu hạn $T = e^{-s_0}$. Cuối cùng chúng ta kết thúc chứng minh cho Định lý 2.1. □

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT VỚI HỆ SỐ PHI TUYẾN KHÔNG HẰNG

3.1 Giới thiệu vấn đề

Trong chương này, chúng ta sẽ mở rộng kết quả từ Chương 2 cho phương trình tổng quát sau:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + f(x)|u|^{p-1}u, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{3.1}$$

với $p > 1$ và f thỏa mãn

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \text{ và } f(0) = a > 0. \tag{3.2}$$

Chúng ta có thể thấy rằng $f(x)$ là hàm khả vi và bị chặn, $f(0) = a > 0$. Chúng ta xây dựng nghiệm bùng nổ cho (3.1), và sau đây là kết quả chính:

Định lý 3.1. *Tồn tại $T_0 > 0$ sao cho với mỗi $T \in (0, T_0]$ tồn tại giá trị ban đầu $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ sao cho phương trình (3.1) có nghiệm duy nhất $u(\cdot,t)$ trên $[0,T)$. Đặc biệt nghiệm bùng nổ tại gốc tọa độ trong thời gian hữu hạn T, và chúng ta có dáng điệu tiệm cận sau:*

$$\left\| (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(\cdot,t) - a^{-\frac{1}{p-1}} \varphi_0 \left(\frac{|\cdot|}{\sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|}} \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$\leq \frac{C}{\sqrt{|\ln(T-t)|}}, \tag{3.3}$$

ở đây

$$\varphi_0(z) = \left(p - 1 + \frac{(p-1)^2}{4p}|z|^2\right)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

3.2 Lập luận hình thức

Trong phần này, chúng ta đưa ra sự tiếp cận hình thức để tìm ra dáng điệu nghiệm bùng nổ của phương trình (3.1).
Trước tiên thông qua khai triển Taylor cho $f(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ tại $x = 0$ chúng ta được

$$f(x) = a + O\left(|x|\right) \text{ khi } x \to 0. \tag{3.4}$$

Thay vào phương trình (3.1) chúng ta viết như sau:

$$\partial_t u = \Delta u + a|u|^{p-1}u + \left(f(x) - a\right)\left(|x|\right)|u|^{p-1}u,$$

ở đây chúng ta có

$$f(x) - a = O\left(|x|\right).$$

Bây giờ chúng ta xét một phủ cho $\mathbb{R}$ như sau: với $K > 0$, $\epsilon_0 > 0$ và $t \in [0, T)$ ở đây $T > 0$ đủ nhỏ cho trước, chúng ta định nghĩa

$$P_1(t) = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq K\sqrt{(T-t)\left|\ln(T-t)\right|}\right\},$$

$$P_2(t) = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{K\sqrt{(T-t)\left|\ln(T-t)\right|}}{4} \leq |x| \leq \varepsilon_0\right\},$$

$$P_3(t) = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{\varepsilon_0}{4}\right\}.$$

Chúng ta thấy rằng

$$\mathbb{R} = P_1(t) \cup P_2(t) \cup P_3(t), \quad \forall t \in [0, T). \tag{3.5}$$

(i) Dáng điệu nghiệm trên $P_1(t)$

Chúng ta thấy trên miền này

$$|x| \leq K\sqrt{(T-t)\left|\ln(T-t)\right|} \to 0 \text{ khi } t \to T.$$

Đổi biến $y = \dfrac{x}{\sqrt{T-t}}$, $s = -\ln(T-t)$, lúc đó

$$f(x) - a = O\left(e^{\frac{-s}{2}}\sqrt{s}\right). \tag{3.6}$$

Chúng ta định nghĩa

$$\tilde{u}(x,t) = a^{\frac{1}{p-1}} u(x,t), \quad a = f(0), \tag{3.7}$$

khi đó

$$\partial_t \tilde{u} = \Delta \tilde{u} + |\tilde{u}|^{p-1}\tilde{u} + a^{-1}\left(f(x) - a\right)|\tilde{u}|^{p-1}\tilde{u}. \tag{3.8}$$

Đổi biến $w(y,s) = (T-t)^{\frac{1}{p-1}}\tilde{u}(x,t)$, lúc đó $w(y,s)$ thỏa mãn phương trình sau:

$$\begin{aligned}\partial_s w = \Delta w - \frac{1}{2}y \cdot \nabla w - \frac{w}{p-1} + |w|^{p-1}w \\ + a^{-1}\left(f\left(ye^{-\frac{s}{2}}\right) - a\right)|w|^{p-1}w.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Đặt

$$\tilde{f}(y,s) = a^{-1}\left(f\left(ye^{-\frac{s}{2}}\right) - a\right). \tag{3.10}$$

Khi đó phương trình (3.9) được viết lại như sau:

$$\partial_s w = \Delta w - \frac{1}{2}y \cdot \nabla w - \frac{w}{p-1} + |w|^{p-1}w + \tilde{f}(y,s)|w|^{p-1}w. \tag{3.11}$$

Chú ý từ (3.6) chúng ta có

$$\tilde{f}(y,s) = O\left(e^{-\frac{s}{2}}\sqrt{s}\right) \text{ khi } s \to \infty.$$

Chúng ta giới thiệu hàm cắt $\chi_1(y,s)$ như sau:

$$\chi_1(y,s) = \chi_0\left(\frac{|y|}{Ks}\right), \tag{3.12}$$

với hàm χ_0 đã được giới thiệu trong Định nghĩa 1.1.
Đặt

$$\tilde{w}\left(y,s\right)=\chi_1\left(y,s\right)w\left(y,s\right), \tag{3.13}$$

khi đó trên $P_1(t)$ ta có $\tilde{w}\left(y,s\right)=w(y,s)$ với $s\geq 1$.
Từ phương trình (3.11) chúng ta có

$$\partial_s\tilde{w}=\Delta\tilde{w}-\frac{1}{2}y\cdot\nabla\tilde{w}+\frac{\tilde{w}}{p-1}+|\tilde{w}|^{p-1}\tilde{w}+\tilde{g}\left(y,s,w\right), \tag{3.14}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(y,s,w\right)=&\left(\partial_s\chi_1\right)w-\left(\Delta\chi_1\right)w-2\left(\nabla\chi_1\right)\left(\nabla w\right)\\&+\frac{1}{2}y\cdot\left(\nabla\chi_1\right)w+\chi_1|w|^{p-1}w-|\tilde{w}|^{p-1}\tilde{w}+\tilde{f}(y,s)|w|^{p-1}w.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Từ định nghĩa của χ_1, chúng ta thấy

$$|\tilde{g}|\lesssim e^{-\epsilon s}\text{ với }\epsilon>0\text{ đủ nhỏ}$$

trên $P_1(t)$.
Do đó $\tilde{g}$ là một nhiễu nhỏ không đáng kể trong (3.14). Khi đó, dựa vào mục 2.2 chúng ta có

$$\tilde{w}(y,s)\approx\varphi_0(z)+\frac{\kappa}{2ps}\text{ khi }s\to\infty, \tag{3.16}$$

với

$$z=\frac{y}{\sqrt{s}}=\frac{x}{\sqrt{\left(T-t\right)\left|\ln\left(T-t\right)\right|}},$$

và

$$\varphi_0(y,s)=\left(p-1+\frac{\left(p-1\right)^2}{4p}\cdot\frac{|y|^2}{s}\right)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

(ii) Dáng điệu nghiệm $P_2(t)$
Chúng ta định nghĩa $t(x_0)$ bởi

$$|x_0|=\frac{K\sqrt{\left(T-t\left(x_0\right)\right)\left|\ln\left(T-t\left(x_0\right)\right)\right|}}{4},$$

với $t(x_0) \to T$ khi $x_0 \to 0$ và $t(x_0) < T$.
Chúng ta đặt

$$U(x_0, \xi, \tau) = \big(T - t(x_0)\big)^{\frac{1}{p-1}} \tilde{u}(x, t), \tag{3.17}$$

ở đó

$$\begin{cases} x = x_0 + \xi\sqrt{T - t(x_0)}, & \xi \in \mathbb{R} \\ t = t(x_0) + \tau\big(T - t(x_0)\big), & \tau \in \Big[-\frac{t(x_0)}{T - t(x_0)}, 1\Big). \end{cases}$$

Từ phương trình (3.1), chúng ta được $U(x_0, \xi, \tau)$ thỏa mãn phương trình sau:

$$\partial_\tau U = \Delta_\xi U + |U|^{p-1}U + \hat{f}(x_0, \xi)\,|U|^{p-1}U, \tag{3.18}$$

với

$$\hat{f}(x_0, \xi) = a^{-1}\left(f\left(x_0 + \xi\sqrt{T - t(x_0)}\right) - a\right).$$

Chúng ta định nghĩa

$$\hat{\mathcal{U}}(\tau) = \Big((p-1)(1-\tau) + bK^2\Big)^{-\frac{1}{p-1}}, \tag{3.19}$$

khi đó dựa vào [16], chúng ta có

$$U(x_0, \xi, \tau) \sim \hat{\mathcal{U}}(\tau), \text{ với } \tau = \frac{t - t(x_0)}{T - t(x_0)} \text{ và } |\xi| \le \alpha_0\sqrt{\Big|\ln\big(T - t(x_0)\big)\Big|}. \tag{3.20}$$

(iii) Đánh giá tiệm cận trong miền $P_3(t)$

Trên miền này dựa vào tính chính quy parabolic chúng ta điều khiển nghiệm là một nhiễu nhỏ của giá trị ban đầu như sau:

$$\big|u(x, t) - u_0(x)\big| \le \eta \text{ với } \eta > 0 \text{ đủ nhỏ}, \tag{3.21}$$

với mọi $x \in P_3(t)$.

3.3 Xây dựng bài toán

Chúng ta dựa trên kết quả hình thức (3.16) để định nghĩa

$$\varphi(y,s) = \varphi_0(y,s) + \frac{\kappa}{2ps}. \tag{3.22}$$

Sau đây chúng ta xét bài toán tuyến tính hóa

$$\tilde{w}(y,s) = \varphi(y,s) + q(y,s), \tag{3.23}$$

với $q(y,s)$ thỏa mãn

$$\partial_s q = (\mathcal{L} + \mathcal{V})\, q + B(q) + R(y,s) + \tilde{g}(y,s,\varphi + q), \tag{3.24}$$

với $\mathcal{L}$, $\mathcal{V}$, $B(q)$, $R(y,s)$ đã được định nghĩa lần lượt ở (2.8), (2.19), (2.20), (2.21), và $\tilde{g}$ đã được định nghĩa trong (3.15).

3.4 Xây dựng tập co

Định nghĩa 3.2. *Xét T, K, ϵ_0, α_0, A, δ_0, C_0, η_0 là các số dương, $t \in [0,T)$ với $T > 0$. Chúng ta định nghĩa*

$$S(T, K, \alpha_0, A, \delta_0, C_0, \eta_0, t) \quad (\textit{viết tắt là } S(t)),$$

là tập con của $C^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, chứa tất cả các hàm u thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) ***Ước lượng trên*** *$P_1(t)$: Ta có $q(s) \in V_A(s)$, $q(s)$ được giới thiệu ở (2.18), với $s = -\ln(T-t)$ và $V_A(s)$ là tập con của mọi hàm $q \in L^\infty$, thỏa mãn những ước lượng sau:*

$$\begin{aligned}
\left|q_i(s)\right| &\le A s^{-2}, i = 0, 1,\\
\left|q_2(s)\right| &\le A^2 (\ln s)\, s^{-2},\\
\left|q_-(y,s)\right| &\le A\left(1 + |y|^3\right) s^{-2},\\
\left|q_e(s)\right| &\le A^2 s^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

(ii) ***Ước lượng trên*** *$P_2(t)$: Với mọi $|x| \in \left[\frac{K}{4}\sqrt{(T-t)\left|\ln(T-t)\right|}, \varepsilon_0\right]$, $\tau(x,t) = \frac{t-t(x)}{T-t(x)}$ và $|\xi| \le \alpha_0\sqrt{\left|\ln\varrho(x)\right|}$, với $\varrho(x) = T - t(x)$, ta có*

$$\left|U\left(x,\xi,\tau(x,t)\right) - \hat{\mathcal{U}}\left(x,\tau(x,t)\right)\right| \le \delta_0, \tag{3.25}$$

ở đó U và $\hat{\mathcal{U}}$ đã được định nghĩa lần lượt trong trong (3.17),(3.19).

(iii) ***Ước lượng trên*** *$P_3(t)$: Với mọi $x \in P_3(t)$, chúng ta có*

$$\left|u(x,t) - u(x,0)\right| \le \eta_0 \text{ với } \eta_0 > 0 \text{ đủ nhỏ.}$$

Nhận xét 3.3. Như trong Chương 2, để có kết luận Định lý 3.1, chúng ta chỉ việc điều khiển nghiệm u sao cho

$$u(t) \in S(t), \quad \forall t \in [0,T).$$

3.5 Xây dựng hàm giá trị ban đầu

Trong phần này chúng ta hướng đến xây dựng hàm giá trị ban đầu $u_0 \in S(0)$ cho phương trình (3.1). Chúng ta xét χ_1, χ_0 đã được định nghĩa trong (3.12). Tiếp theo chúng ta giới thiệu H^*.

$$H^*(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{b_0}{2}\dfrac{|x|^2}{\left|\ln|x|\right|}\right]^{-\frac{1}{p-1}}, & |x| \le \dfrac{1}{2}, \\ 0, \quad |x| \ge 1, \end{cases} \tag{3.26}$$

chúng ta thấy rằng $H^*(x) \in C^\infty\left(\mathbb{R}\setminus\{0\}\right)$ và $b_0 = \frac{(p-1)^2}{4p}$.
Lấy $(d_0, d_1) \in \mathbb{R}^2$, bây giờ chúng ta định nghĩa hàm giá trị ban đầu như sau:

$$u_{d_0,d_1}(0) = T^{-\frac{1}{p-1}}\left[\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{T}}, -\ln s_0\right) + (d_0 + d_1\cdot z)\,\chi_0\left(\frac{|z|}{\frac{K}{32}}\right)\right]\chi_1(x)$$

$$+H^*(x)\left(1-\chi_1(x)\right), \tag{3.27}$$

trong đó $z = \frac{x}{\sqrt{T|\ln T|}}$, $s_0 = -\ln T$, còn φ, χ_0, χ_1, H^* đã được định nghĩa trong (3.22), (3.12), (3.26).

Đặt

- $\tilde{u}_{d_0,d_1}(0) = a^{\frac{1}{p-1}} u\left(x,t\right) \chi_1(x,0) u_{d_0,d_1}(0)$.
- $q_{d_0,d_1}(y_0,s_0) = w(y_0,s_0) - \varphi(y_0,s_0)$, ở đó $y_0 = \dfrac{x}{\sqrt{T}}$.

Mệnh đề 3.4. *Tồn tại hằng số $K_1 > 0$ sao cho $\forall K \geq K_1$ và $\delta_1 > 0$, chúng ta tìm được $C_1(K) > 0$ và $\alpha_1(K,\delta_1) > 0$ để $\forall \alpha_0 \in (0,\alpha_1]$, tồn tại $\epsilon_1(K,\delta_1,\alpha_0) > 0$ sao cho $\forall \epsilon_0 \in (0,\epsilon_1]$ và $A \geq 1$, chúng ta có được $T_1(K,\delta_2,\epsilon_0,A,C_1) > 0$ đủ nhỏ, để $\forall T \leq T_1$, $s_0 = |\ln T|$ và hàm giá trị ban đầu $u_{d_0,d_1}(0)$ định nghĩa tại (3.27), ta có các khẳng định sau:*

(I) *Với mọi $|d_0|, |d_1| \leq 2$, hàm giá trị ban đầu $u_{d_0,d_1}(0)$ thỏa mãn các ước lượng sau:*

(i) Các ước lượng trong $P_1(0)$: chúng ta có $q_{d_0,d_1}(s_0) \in V_A(s_0)$ và

$$\left|q_0\left(s_0\right)\right| \leq \frac{A}{s_0^2}, \quad \left|q_1\left(s_0\right)\right| \leq \frac{A}{s_0^2}, \quad \left|q_2\left(s_0\right)\right| \leq \frac{\ln s_0}{s_0^2},$$
$$\left|q_-\left(y,s_0\right)\right| \leq \frac{1}{s_0^2}\left(|y|^3+1\right) \text{ và } q_e \equiv 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

(ii) Các ước lượng trong $P_2(0)$: với mọi $|x| \in \left[\frac{K_0}{4}\sqrt{T|\ln T|}, \epsilon_0\right]$, $\tau_0(x) = -\frac{t(x)}{\varrho(x)}$ và $|\xi| \leq \alpha_0\sqrt{|\ln \varrho(x)|}$, chúng ta có

$$\left|U\left(x,\xi,\tau_0(x)\right) - \hat{\mathcal{U}}\left(\tau_0(x)\right)\right| \leq \delta_2,$$

trong đó $\varrho(x) = T - t(x)$.

(II) *Tồn tại tập $\mathcal{D}_{s_0} \subset [-2,2]^2$ sao cho nếu chúng ta xác định ánh xạ sau:*

$$\Gamma : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$(d_0,d_1) \mapsto \left(q_0,q_1\right)\left(s_0\right),$$

khi đó, Γ là tuyến tính, song ánh từ $\mathcal{D}_A$ tới $\hat{\mathcal{V}}_A\left(s_0\right)$, ở đó $\hat{\mathcal{V}}_A(s)$ đã được định nghĩa bởi

$$\hat{\mathcal{V}}_A(s) = \left[-\frac{A}{s^2}, \frac{A}{s^2}\right]^2.$$

Hơn nữa, chúng ta có

$$\Gamma|_{\partial\mathcal{D}_A} \subset \partial\hat{\mathcal{V}}_A(s_0)$$

và

$$\deg\left(\Gamma|_{\partial\mathcal{D}_A}\right) \neq 0.$$

Chứng minh. Hoàn toàn tương tự Mệnh đề 3.1 trong [16]. □

3.6 Chứng minh Định lý 3.1

Trong phần này chúng ta đưa ra chứng minh cho Định lý 3.1. Trước tiên chúng ta đưa ra mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.5 (Sự tồn tại nghiệm thuộc $S(t)$)**.** *Tồn tại các tham số dương $T, K, \epsilon_0, \alpha_0, A, \delta_0, C_0, \eta_0$, và một cặp $(d_0, d_1) \in \mathbb{R}^2$ sao cho phương trình (3.8) với hàm giá trị ban đầu $u_{d_0,d_1}(0)$, có nghiệm duy nhất trên $[0, T)$ và $u(t) \in S(t)$, với mọi $t \in [0, T)$, với $S(t)$ đã được định nghĩa trong Định nghĩa 3.2.*

Chứng minh. Tương tự như chứng minh cho Mệnh đề 2.15. Kết quả của Mệnh đề 3.5 được suy ra từ Mệnh đề 3.6 ở Mục 3.7. Bây giờ chúng ta sử dụng kết quả của Mệnh đề 3.8 để chứng minh cho Định lý 3.1.

Chứng minh Định lý 3.1

Từ Mệnh đề 3.5, tồn tại các tham số dương $T, K, \epsilon_0, \alpha_0, A, \delta_0, C_0, \eta_0$ sao cho tồn tại hàm giá trị ban đầu $u_{d_0,d_1}(0)$ để

$$u(t) \in S(t), \quad \forall t \in [0, T).$$

Sử dụng mục (i) trong Định nghĩa 3.2, định nghĩa của χ_1 tại (3.12) chúng ta suy ra

$$\left|(T-t)^{\frac{1}{p-1}}u(x,t) - a^{-\frac{1}{p-1}}\varphi_0\left(\frac{|x|}{\sqrt{(T-t)\left|\ln(T-t)\right|}}\right)\right| \leq \frac{CA}{\sqrt{\left|\ln(T-t)\right|}}, \tag{3.28}$$

với mọi

$$|x| \leq \frac{K}{2}\sqrt{T-t}\ln(T-t)\,.$$

Ngược lại nếu

$$|x| \geq \frac{K}{2}\sqrt{T-t}\ln(T-t)\,,$$

sử dụng mục (i) và (ii) trong Định nghĩa 3.2, chúng ta được

$$\left|(T-t)^{\frac{1}{p-1}}u(\cdot,t)\right| \lesssim \frac{1}{\sqrt{\left|\ln(T-t)\right|}}, \tag{3.29}$$

và

$$\varphi_0\left(\frac{|x|}{\sqrt{(T-t)\left|\ln(T-t)\right|}}\right) \lesssim \frac{1}{\sqrt{\left|\ln(T-t)\right|}}. \tag{3.30}$$

Do đó chúng ta cũng có

$$\left|(T-t)^{\frac{1}{p-1}}u(x,t) - \varphi_0\left(\frac{|x|}{\sqrt{(T-t)\left|\ln(T-t)\right|}}\right)\right| \leq \frac{C}{\sqrt{\left|\ln(T-t)\right|}}. \tag{3.31}$$

Cuối cùng suy ra kết luận (3.3).
Từ (3.3) chúng ta thấy

$$u(0,t) \sim \kappa\big[f(0)\big]^{-\frac{1}{p-1}}(T-t)^{-\frac{1}{p-1}} \text{ khi } t \to T, \tag{3.32}$$

khi đó nghiệm bùng nổ tại gốc tọa độ. Về tính duy nhất của điểm bùng nổ là hệ quả trực tiếp từ định nghĩa của $S(t)$ trong Định nghĩa 3.2. Cuối cùng chúng ta chứng minh được hoàn toàn Định lý 3.1. □

3.7 Sự rút gọn đến bài toán hữu hạn chiều

Rút gọn thành bài toán hữu hạn chiều: trong bước này chúng ta suy ra rằng điều khiển của $u(t) \in S(t)$ với $t \in [0,T)$ được rút gọn thành điều khiển hàm biến đổi $q(s)$ sao cho hai thành phần đầu tiên $(q_0, q_1)(s)$ nằm trong tập $\hat{\mathcal{V}}_A(s)$, trong đó $s = -\ln(T-t)$. Chính xác hơn thì chúng ta xem mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.6. *Tồn tại các hằng số $T > 0, K > 0, \epsilon_0 > 0, \alpha_0 > 0, A > 0, \delta_0 > 0, C_0 > 0$ và $\eta_0 > 0$ sao cho: Nếu u là một nghiệm của phương trình* (3.1) *trong khoảng $[0, t_1]$, với mọi $t_1 \in (0, T)$, ứng với hàm giá trị ban đầu u_{d_0,d_1} được định nghĩa tại* (3.27)*, $(d_0, d_1) \in \mathcal{D}_{s_0}$ với $\mathcal{D}_{s_0}$ được xác định tại Mệnh đề 3.4. Chúng ta giả sử rằng $u \in S(t)$ với mọi $\forall t \in [0, t_1]$ và $u \in \partial S(t_1)$ (xem định nghĩa của $S(t) = S(T, K, \epsilon_0, \alpha_0, A, \delta_0, C_0, \eta_0, t)$ trong Định nghĩa 3.2 và tập $\mathcal{D}_{s_0}$ được cho trong Mệnh đề 3.4). Thì các mệnh đề sau là đúng:*

(i) Chúng ta có $(q_0, q_1)(s_1) \in \partial\hat{\mathcal{V}}_A(s_1)$, trong đó $(q_0, q_1)(s)$ là các thành phần của $q(s)$ và $q(s)$ là biến đổi của hàm u và $s_1 = \ln(T - t_1)$.

(ii) Tồn tại $\nu_0 > 0$ sao cho $\forall \nu \in (0, \nu_0)$ chúng ta có

$$(q_0, q_1)(s_1 + \nu) \notin \hat{\mathcal{V}}_A(s_1 + \nu).$$

Từ kết quả, tồn tại $\nu_1 > 0$ sao cho

$$u \notin S(t_1 + \nu), \forall \nu \in (0, \nu_1).$$

Chứng minh. Tương tự như chứng minh cho Mệnh đề 2.14. Kết quả của Mệnh đề 3.6 được suy ra từ các đánh giá tiên nghiệm từ Mệnh đề 3.8, 3.9 và 3.10 ở phần sau. □

Sau đây chúng ta có các đánh giá tiên nghiệm dùng để chứng minh cho Mệnh đề 3.6. Trước tiên chúng ta có bổ đề sau:

Bổ đề 3.7. *Tồn tại $K_2 > 0, A_2 > 0$ sao cho $\forall K \geq K_2, A \geq A_2$ và $l^* > 0$, $\exists T_2(K_0, A, l^*)$ sao cho $\forall \epsilon_0 > 0, \alpha_0 > 0, \delta_0 > 0, \eta_0 > 0, C_0 > 0, T \leq T_2$ và bất kỳ $l \in [0, l^*]$, các điều kiện sau là đúng: giả sử rằng chúng ta có những điều kiện sau:*

- *Chúng ta xét hàm giá trị ban đầu $u(0) = u_{d_0,d_1}(0)$, được cho bởi* (3.27) *và $(d_0, d_1) \in \mathcal{D}_{s_0}$, được cho bởi mệnh đề* (3.4) *sao cho $(q_0, q_1)(s_0)$*

thuộc vào $\hat{\mathcal{V}}_A(s_0)$*, ở đó* $s_0 = -\ln T, \hat{\mathcal{V}}_A(s)$ *và* q_0, q_1 *là các thành phần của* $q_{d_0,d_1}(s_0)$*, là một biến đổi của hàm* u*.*

- *Chúng ta có* $u \in S(T, K, \epsilon_0, \alpha_0, A, \delta_0, C_0, \eta_0, t)$ *với mọi* $t \in \left[T - e^{-\sigma}, T - e^{-(\sigma+l)}\right]$*, với* $\sigma \geq s_0$ *và* $l \in [0, l^*]$*.*

Khi đó, chúng ta có các đánh giá sau:

(i) Với mọi $s \in [\sigma, \sigma + l]$*, chúng ta có*

$$\left|q_0'(s) - q_0(s)\right| + \left|q_1'(s) - \frac{1}{2}q_1(s)\right| \leq \frac{C}{s^2},$$

và

$$\left|q_2'(s) + \frac{2}{s}q_2(s)\right| \leq \frac{CA}{s^3}.$$

(ii) Điều khiển $q_-(s)$*: với mọi* $s \in [\sigma, \sigma + l], y \in \mathbb{R}$ *chúng ta có hai trường hợp sau:*

- *Trong trường hợp* $\sigma \geq s_0$ *:*

$$\left|q_-(y, s)\right| \leq C\left(Ae^{-\frac{s-\sigma}{2}} + A^2e^{-(s-\sigma)^2} + (s - \sigma)\right)\frac{(1 + |y|^3)}{s^2},$$

- *Trong trường hợp* $\sigma = s_0$

$$\left|q_-(y, s)\right| \leq C(1 + (s - \sigma))\frac{(1 + |y|^3)}{s^2}$$

(iv) Điều khiển phần bên ngoài q_e*: với mọi* $s \in [\sigma, \sigma + \lambda]$*, chúng ta có hai trường hợp sau:*

- *Trong trường hợp* $\sigma \geq s_0$ *:*

$$\left\|q_e(., s)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\left(A^2e^{-\frac{s-\sigma}{2}} + Ae^{(s-\sigma)} + 1 + (s - \sigma)\right)\frac{1}{\sqrt{s}},$$

- *Trong trường hợp* $\sigma = s_0$*:*

$$\left\|q_e(., s)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(1 + (s - \sigma))\frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Chứng minh. Tương tự như Mệnh đề 2.12. □

Mệnh đề 3.8 (Các đánh giá nghiệm trong $P_1(t)$)**.** *Tồn tại* $K_3 \geq 1$ *và* $A_3 \geq 1$ *sao cho với mọi* $\geq K_3, A \geq A_3, \epsilon_0 > 0, \alpha_0 > 0, \delta_0 \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}(0), C_0 > 0, \eta_0 > 0$*, tồn tại* $T_3\left(K, \epsilon_0, \alpha_0, A, \delta_0, C_0, \eta_0\right)$ *sao cho với mọi* $T \leq T_3$*, những điều sau là đúng: Nếu u là nghiệm của phương trình* (3.1) *thỏa mãn* $u \in S\left(T, K, \epsilon_0, \alpha_0, A, \delta_0, C_0, \eta_0, t\right)$ *với mọi* $t \in [0, t_3]$ *với* $t_3 \in [0, T)$*, và hàm giá trị ban đầu* $u(0) = u_{d_0,d_1}$ *với* $d_0, d_1 \in \mathcal{D}_{s_0}$*, thì với mọi* $s \in \left[-\ln T, -\ln\left(T - t_3\right)\right]$*, chúng ta có các đánh giá sau:*

$$\left|q_2(s)\right| \leq \frac{A^2 \ln s}{2s^2}, \quad \left\|\frac{q_-(.,s)}{1+|y|^3}\right\|_{L^\infty} \leq \frac{A}{2s^2}, \text{ và } \left\|q_e(s)\right\|_{L^\infty} \leq \frac{A^2}{2\sqrt{s}}.$$

Chứng minh. Hoàn toàn tương tự như Mệnh đề 2.13. □

Mệnh đề 3.9 (Các đánh giá nghiệm trong $P_2(t)$)**.** *Tồn tại* $K_4 > 0$ *và* $A_4 > 0$ *sao cho với mọi* $K \geq K_4, A \geq A_4$*, tồn tại* $\delta_4 \leq \frac{1}{2}\hat{\mathcal{U}}(0)$ *và* $C_4\left(K, A\right)$ *sao cho với mọi* $\delta_0 \leq \delta_4, C_0 \geq C_4$ *tồn tại* $\alpha_4\left(K, \delta_0\right)$ *sao cho với mọi* $\alpha_0 \leq \alpha_4$*, tồn tại* $\epsilon_4\left(K, \delta_0, C_0\right) > 0$ *sao cho với mọi* $\epsilon_0 \leq \epsilon_4$*, tồn tại* $T_4\left(\epsilon_0, A, \delta_0, C_0\right) > 0$ *sao cho với mọi* $T \leq T_4$ *chúng ta có những điều sau: chúng ta giả sử rằng có* $u \in S\left(T, K, \epsilon_0, \alpha_0, A, \delta_0, C_0, t\right)$ *với mọi* $t \in [0, t_4]$ *với* $t_4 \in [0, T)$*, khi đó*
với mọi $|x| \in \left[\frac{K_0}{4}\sqrt{\left(T - t_*\right)\left|\ln\left(T - t_*\right)\right|}, \epsilon_0\right], |\xi| \leq \alpha_0\sqrt{|\ln \varrho(x)|}$
và $\tau \in \left[\max\left(-\frac{t(x)}{\varrho(x)}, 0\right), \frac{t_4 - t(x)}{\varrho(x)}\right]$*, chúng ta có*

$$\left|U\left(x, \xi, \tau_*\right) - \hat{\mathcal{U}}\left(x, \xi, \tau_*\right)\right| \leq \frac{\delta_0}{2},$$

ở đó $\varrho(x) = T - t(x)$*.*

Chứng minh. Xem chứng minh trong Mệnh đề 4.2 trong [16]. □

Mệnh đề 3.10 (Các đánh giá nghiệm trong $P_3(t)$)**.** *Cho* $K > 0, \epsilon_0 > 0, \alpha_0 > 0, A > 0, \delta_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\hat{\mathcal{U}}(0)\right], C_0 > 0, \eta_0 > 0$*. Khi đó, tồn tại* $T_5\left(\eta_0\right) > 0$ *sao cho với mọi* $T \leq T_5$*, những điều sau là đúng: chúng ta giả sử rằng u là một nghiệm của phương trình* (3.1) *trên* $[0, t_5]$ *với* $t_5 < T$*, và* $u \in S\left(t\right)$*,* $\forall t \in [0, t_5]$ *ứng với hàm giá trị ban đầu* $u_0 = u_{d_0,d_1}$ *với* $|d_0|, |d_1| \leq 2$*. Khi đó, với mọi* $|x| \geq \frac{\epsilon_0}{4}$ *và* $t \in (0, t_5]$ *ta có:*

$$|u(x,t) - u_0(x)| \leq \frac{\eta_0}{2}.$$

Chứng minh. Xem chứng minh Mệnh đề 4.6 trong [16]. $\square$

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, chúng tôi đã đạt được 2 kết quả sau

1. Hiểu được phương pháp xây dựng nghiệm bùng nổ trong công trình [1] và rút ngắn một số chứng minh nhờ vào các đánh giá mới từ [11].
2. Chứng minh một kết quả mới với mô hình (3.1) trong đó f khả vi và bị chặn, $f(0) = a \in \mathbb{R}_+^*$.

Tài liệu tham khảo

[1] F. Merle and H. Zaag. Stability of the blow-up profile for equations of the type $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$. *Duke Math. J.*, 86(1):143–195, 1997.

[2] G. K. Duong, N. Nouaili, and H. Zaag. Refined asymptotic for the blow-up solution of the complex ginzburg-landau equation in the subcritical cases. *Ann. I. H. Poincaré - AN*, 2021. to appear.

[3] Q. H. Phan. Singularity and blow-up estimates via liouville-type theorems for hardyhénon parabolic equations. *J. Evol. Equ.*, 13(2):411 – 442, 2013.

[4] C. N. Le and X. T. Le. Global solution and blow-up for a class of pseudo p-laplacian evolution equations with logarithmic nonlinearity. *Comput. Math. Appl.*, 73(9):2076 – 2091, 2017.

[5] T. Ghoul, V. T. Nguyen, and H. Zaag. Blowup solutions for a nonlinear heat equation involving a critical power nonlinear gradient term. *J. Diff. Eqs*, No 8:4517–4564, 2017.

[6] T. Ghoul, V. T. Nguyen, and H. Zaag. Construction and stability of blowup solutions for a non-variational semilinear parabolic system. *submitted:*, 2016.

[7] G. K. Duong, V. T. Nguyen, and H. Zaag. Construction of a stable blowup solution with a prescribed behavior for a non-scaling invariant semilinear heat equation. *Tunisian J. Math*, 2019.

[8] G. K. Duong, N Nouaili, and H. Zaag. Construction of blow-up solutions for the complex ginzburg-landau equation with critical parameters. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2022.

[9] N. Nouaili and H. Zaag. Profile for a simultaneously blowing up solution to a complex valued semilinear heat equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 40(7):1197–1217, 2015.

[10] P. Quittner and P. Souplet. *Superlinear parabolic problems*. Birkhäuser Verlag, 2007. Blow-up, global existence and steady states.

[11] V. T. Nguyen and H. Zaag. Finite degrees of freedom for the refined blow-up profile for a semilinear heat equation. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup*, 50:5:1241–1282, 2017.

[12] J. Bricmont and A. Kupiainen. Universality in blow-up for nonlinear heat equations. *Nonlinearity*, 7(2):539–575, 1994.

[13] H. Zaag. Blow-up results for vector-valued nonlinear heat equations with no gradient structure. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 15(5):581–622, 1998.

[14] Y. Giga and R. V. Kohn. Nondegeneracy of blowup for semilinear heat equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(6):845–884, 1989.

[15] S. Tayachi and H. Zaag. Existence of a stable blow-up profile for the nonlinear heat equation with a critical power nonlinear gradient term. *Trans. Amer. Math. Soc*, 317:5899–5972, 2019.

[16] G. K. Duong and H. Zaag. Profile of a touch-down solution to a nonlocal mems model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 29(07):1279–1348, 2019.