BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Nguyễn Xuân Quý

PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TRỰC GIAO CHUẨN (POD) VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG CHO PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ: TOÁN HỌC

Hà Nội - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Nguyễn Xuân Quý

PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TRỰC GIAO CHUẨN (POD) VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG CHO PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 8460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ : TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC :

GS.TSKH Đinh Nho Hào

Hà Nội - 2022

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những gì được trình bày trong luận văn là sự tự tìm tòi, học hỏi, trau dồi kiến thức của bản thân dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy Đinh Nho Hào. Mọi kết quả nghiên cứu cũng như ý tưởng của tác giả khác đã được công bố, nếu có được sử dụng trong luận văn này đều được trích dẫn cụ thể. Đề tài luận văn này cho đến nay chưa được bảo vệ tại bất kì một hội đồng bảo vệ luận văn thạc sĩ nào. Tôi xin chịu trách nhiệm về những lời cam đoan.

Hà Nội, tháng 10 năm 2022

Học viên

Nguyễn Xuân Quý

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin chân thành tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất của mình tới GS.TSKH Đinh Nho Hào, người thầy đã trực tiếp hướng dẫn và giúp đỡ tôi tìm ra đề tài luận văn cũng như định hướng nghiên cứu. Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình trong một thời gian tương đối dài của thầy. Thầy đã luôn quan tâm, giúp đỡ, khích lệ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi, Nguyễn Xuân Quý được tài trợ bởi Tập đoàn Vingroup-Công ty CP và hỗ trợ bởi Chương trình học bổng thạc sĩ, tiến sĩ trong nước của Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VINIF), Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn, mã số VINIF.2021.ThS.VTH.05. Xin gửi lời biết ơn đến sự hỗ trợ đầy ý nghĩa từ quý học bổng đã hỗ trợ tài chính giúp tôi hoàn thành hai năm học thạc sỹ vừa qua.

Tôi xin gửi lời cảm ơn Trung tâm Quốc tế Đào tạo và Nghiên cứu Toán học, Viện Toán học và cơ sở đào tạo là Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã tạo điều kiện thuận lợi về môi trường học tập và nghiên cứu. Bên cạnh đó, trong quá trình học tập, nghiên cứu và thực hiện luận văn, tôi còn nhận được nhiều sự quan tâm, góp ý, hỗ trợ quý báu từ các quý thầy cô, anh chị và bạn bè trong và ngoài Viện Toán học.

Đặc biệt, tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và người thân, những người đã luôn hỗ trợ, động viên và cổ vũ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu, đặc biệt trong thời gian hoàn thành luận văn.

Danh sách hình vẽ

Danh sách bảng

Mục lục

Mở đầu

Mục đích và đối tượng nghiên cứu luận văn

Chúng ta đang sống trong thời đại của internet, WiFi, ứng dụng di động, Facebook, Twitters, Instagram, ,... tất cả những chúng có một điểm chung là đều xử lý dữ liệu kỹ thuật số và do máy tính tạo ra. Có một cái tên khá phổ biến hiện nay dành cho không gian ảo của tất cả những thứ này đó là *dữ liệu lớn* (big data). Các kích thước của không gian dữ liệu lớn ngày càng tăng với tốc độ cấp số nhân. Vấn đề lớn chẳng hạn như phân tích, xử lý hiệu quả, lưu trữ, khai thác, dự đoán, mô phỏng, nén và mã hóa hoặc giải mã dữ liệu lớn đã trở thành vấn đề quan tâm lớn đến công nghệ đương đại.

Phân tích trực giao chuẩn (Proper Orthogonal Decomposition, thường gọi ngắn gọn là POD) là một phương pháp số cho phép giảm độ phức tạp của các mô phỏng trên máy tính như động lực học chất lỏng tính toán và phân tích cấu trúc (như mô phỏng va chạm). Điển hình trong phân tích Động lực học chất lỏng và tua bin, nó được sử dụng để thay thế các phương trình Navier-Stokes bằng các mô hình đơn giản hơn để giải [1].

POD về một lớp thuật toán được gọi là giảm thứ tự mô hình (hay nói ngắn gọn là giảm mô hình). Về cơ bản, nó thực hiện là xây dựng một mô hình dựa trên dữ liệu mô phỏng với số chiều ít hơn, hay nói ngắn gọn là đơn giản hơn. Trên phương diện này, nó có thể được liên kết với lĩnh vực học máy [2]. Thực tế, POD là phương pháp tìm ra một hệ trực chuẩn gồm ℓ phần tử (ta gọi là *cơ sở POD hạng* ℓ), sau đó POD kết hợp với phương pháp Galerkin (ta gọi là phương pháp *POD-Galerkin*) để xây dựng và giải mô hình giảm số chiều dựa trên cơ sở POD đã có.

Mục đích của luận văn này là giới thiệu phương pháp POD và ứng dụng của phương pháp này để giải xấp xỉ một số bài toán trong phương trình đạo hàm riêng (PDE) trong khoa học và kỹ thuật. Nhà toán học ứng dụng, nhà khoa học, và các kỹ sư luôn xử lý dữ liệu lớn. Dữ liệu thường bắt nguồn từ đâu? Chúng chủ yếu đến từ các bài toán và lời giải của các phương trình hệ thống vật lý. Một số lượng lớn các phương trình mô hình hóa là các PDE. Do đó, các phương pháp và thuật toán hiệu quả để xử lý và tái nhu cầu giải quyết những dữ liệu như vậy là rất nhiều. Mục tiêu chính là phát triển một phương pháp luận có thể giúp giải quyết những thách thức trong việc xử lý các tập dữ liệu lớn và tăng tốc độ giải PDE phụ thuộc vào thời gian.

Lược sử sơ lược về sự phát triển của POD

Phương pháp phân tích trực giao (POD) có một lịch sử lâu dài. Tiền thân của POD là phương pháp vector riêng do K. Pearson [3] khởi xướng từ năm 1901 để chọn những thành phần chính trong một lượng dữ liệu lớn. Tuy nhiên, phương pháp ảnh tức thời (snapshots) cho POD mới được Sirovich [4] khởi xướng vào năm 1987. Phương pháp này được phát triển cho nhiều bài toán trong các lĩnh vực khác nhau, như xử lý tín hiệu và nhận dạng mẫu, thống kê, thủy động học, khí tượng, kỹ thuật y sinh,...

Một thời gian dài kể từ năm 1987, phương pháp POD chủ yếu được sử dụng để thực hiện phân tích thành phần chính (PCA) trong tính toán thống kê. Đặc biệt, phương pháp POD-Galerkin bắt đầu được áp dụng vào xây dựng mô hình bậc số chiều cho PDEs, được đề xuất trong công trình xuất sắc năm 2001 và 2002 bởi Kunisch và Volkwein [5, 6]. Từ thời điểm đó trở đi, cơ sở giảm hoặc giảm mô hình của các phương pháp tính toán số dựa trên POD cho PDE đã trải qua một số phát triển nhanh chóng, cái tiến hiệu suất cho các giải pháp số cho PDE. Phương pháp xây dựng mô hình với bậc nhỏ dựa trên cơ sở POD ngày càng được ứng dụng vào nhiều mô hình trong nhiều lĩnh vực trong cuộc sống như y tế [7], địa chất [8, 9],...

Xây dựng và giải mô hình giảm số chiều dựa trên phương pháp POD-Galerkin cho bài toán parabolic được Kunisch – Volkwein công bố với các ước tính sai số được trình bày trong [5, 6]. Cách xây dựng cơ sở POD cũng như xây dựng mô hình giảm số chiều cho một số PDE trong $\mathbb{R}^n$ được Volkwein và các đồng tác giả trình bày trong [10]. Nhiều bài báo, tài liệu những năm gần đây càng hoàn thiện dần về mặt lý thuyết xây dựng cơ sở POD, chứng minh độ hiệu quả và ứng dụng phương pháp POD-Galerkin một cách linh hoạt, sáng tạo hơn vào các loại PDE khác như hệ hỗn hợp eliptic-parabolic, tiêu biểu phải kể đến như [11].

Bố cục luận văn

Bài luận văn tập trung vào hai nội dung nghiên cứu chính là: Thứ nhất, giới thiệu phương pháp POD và một số tính chất của nó và thứ hai, ứng dụng để giải một số bài toán trong phương trình đạo hàm riêng. Nội dung kiến thức chủ yếu tham khảo hai bài báo [5, 6], được chia thành 5 chương:

Chương 0: Mô tả các kiến thức cần chuẩn bị về đại số tuyến tính, phương trình đạo hàm riêng và giải tích hàm.

Chương 1: Tổng quan về phương pháp POD gồm hai phiên bản rời rạc và liên tục. Đồng thời phát biểu mối liên hệ giữa chúng và mối liên hệ giữa POD và SVD trong $\mathbb{R}^n$.

Chương 2 và *Chương 3*: Giới thiệu cách xây dựng cơ sở POD bằng các snapshot cho bởi phương trình tiến hóa tuyến tính và phi tuyến. Đồng thời trình bày hai lược đồ là Euler-POD-Galerkin lùi và Crank-Nicolson-POD-Galerkin để giải mô hình giảm số chiều cho hai dạng bài toán phương trình tiến hóa parabolic tuyến tính và phi tuyến, đánh giá sai số của mỗi lược đồ.

Chương 4: Trình bày kết quả giải số cho hai phương trình Burgers 2D và phương trình truyền nhiệt thông qua giải mô hình giảm số chiều được xây dựng bởi cơ sở POD với các snapshot được xây dựng bởi phương pháp phần tử hữu hạn. So sánh sai số giữa thực tế với ước lượng sai số lý thuyết được trình bày ở Chương 2 và Chương 3.

CHƯƠNG 0

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

0.1 Đại số tuyến tính

Định nghĩa 0.1. *(SVD) Cho ma trận $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ với $m \geq n$. Phân tích giá trị kì dị (Singular Value Decomposition, viết tắt là SVD) của A là ma trận A được viết dưới dạng*

$$A = U\Sigma V^*,$$

trong đó U và V là hai ma trận unitar và Σ là ma trận đường chéo. Nếu $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ và $\Sigma \in \mathbb{C}^{m\times n}$ thì $A = U\Sigma V^*$ được gọi là SVD đầy đủ của A. Nếu $U \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ và $\Sigma \in \mathbb{C}^{n\times n}$ thì $A = U\Sigma V^*$ được gọi là SVD rút gọn của A.

Định lý 0.2. *([12], trang 29) Mọi ma trận $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ đều có SVD. Hơn thế nữa, các giá trị kỳ dị σ_j được xác định duy nhất. Nếu A là ma trận vuông và các giá trị σ_j là khác nhau thì các vector kỳ dị trái và phải $\{v_j\}, \{u_j\}$ xác định duy nhất (sai khác nhân tử có module bằng 1).*

Định lý 0.3. *([12], trang 33-34) Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, chuẩn $\|\cdot\|_2$ trong không gian ma trận cỡ $m \times n$ được xác định như sau*

$$\|A\|_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}},$$

trong đó $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^k}$ là chuẩn Euclid trong $\mathbb{R}^k$. Giả sử SVD của A là $U\Sigma V^*$

với $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{\min(m,n)})$ *thỏa mãn* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$. *Khi đó* $\|A\|_2 = \sigma_1$.

Định lý 0.4. *([12], trang 33-34) Cho ma trận* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Nếu* $A = A^*$ *thì các giá trị kì dị của* A *là giá trị tuyệt đối của các giá trị riêng của* A.

Định lý 0.5. *([13], trang 471-472) Cho ma trận* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$. *Giả sử rằng* A *có* m *giá trị riêng thực được sắp xếp theo thứ tự giảm dần* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_m$. *Bất kì* $x \in \mathbb{R}^m$ *và* $x \neq 0$, *thương Rayleigh* $\dfrac{x^T S x}{x^T x}$ *có giá trị nhỏ nhất bằng* λ_m *và đạt giá trị lớn nhất bằng* λ_1.

0.2 Phương trình đạo hàm riêng

Cho $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở và bị chặn. Kí hiệu

$$\int_\Omega \varphi(x)dx$$

là tích phân Lebesgue của $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Định nghĩa 0.6. *Cho* $1 \leq p \leq \infty$, *ta đặt*

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p} \text{ với } 1 \leq p < \infty$$

và

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} = \text{esssup}\{|\varphi(x) \mid x \in \Omega|\} \text{ với } p = \infty.$$

Không gian định chuẩn Lebesgue $L^p(\Omega)$ *với chuẩn* $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ *được định nghĩa như sau*

$$L^p(\Omega) = \{\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ là Lebesgue đo được và } \|\varphi\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}.$$

Đặc biệt, nếu $p = 2$ *thì* $L^2(\Omega)$ *là không gian Hilbert. Ngoài ra, giả sử* X *là một không gian định chuẩn, hằng số* $T > 0$ *và hàm số* $\varphi\colon [0,T] \to X$ *là hàm khả tích theo nghĩa Bochner. Ta đặt*

$$\|\varphi\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|\varphi(t)\|_X^p dt\right)^{1/p} \text{ nếu } 1 \leq p < \infty.$$

Khi đó không gian định chuẩn Bochner-Lebesgue $L^p(0,T;X)$, $1 \le p < \infty$ với chuẩn $\|\cdot\|_{L^p(0,T;X)}$ được định nghĩa

$$L^p(0,T;X) = \{\varphi\colon [0,T] \to X \mid \varphi \text{ đo được và } \|\varphi\|_{L^p(0,T;X)} < \infty\}.$$

Định nghĩa 0.7. *Với bất kì $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, ta kí hiệu*

$$\operatorname{supp}(f) = \operatorname{cl}(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}),$$

trong đó, $\operatorname{cl}(A)$ là bao đóng của A trong $\mathbb{R}^n$ với mọi tập hợp $A \subset \mathbb{R}^n$. Không gian $C_0^\infty(\Omega)$ được định nghĩa như sau

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(\varphi) \text{ là tập compact trong } \Omega\}.$$

Hơn nữa, tập các hàm khả tích địa phương $L^1_{loc}(\Omega)$ được định nghĩa

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid \varphi \in L^1(\mathcal{K}) \text{ với bất kì tập compact } \mathcal{K} \subset \Omega\}.$$

Định nghĩa 0.8. *(Đạo hàm yếu) Cho $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n)$ là một đa chỉ số các số nguyên không âm. Đặt $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Bất kì hàm $f \in C^\infty(\Omega)$, ta kí hiệu $D^\alpha f$ cho đạo hàm riêng*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

với $x = (x_1, .., x_n) \in \Omega$. Một hàm $\varphi \in L^1_{loc}(\Omega)$ được gọi là có đạo hàm yếu $D^\alpha_w \varphi = \phi$ nếu $\phi \in L^1_{loc}(\Omega)$ thỏa mãn

$$\int_\Omega \phi\psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \varphi D^\alpha \psi dx \text{ với mọi } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Định nghĩa 0.9. *(Đạo hàm thời gian yếu [14]) Cho X là không gian Hilbert. Đạo hàm yếu theo thời gian của hàm $u\colon [0,T] \to X$ là hàm được kí hiệu bởi $u_t \in L^2(0,T;X^*)$ (hoặc $\dot{u} \in L^2(0,T;X^*)$) sao cho*

$$\forall \phi \in C_0^\infty([0,T]) : \int_{[0,T]} u\phi' dt = -\int_{[0,T]} u_t \phi dt.$$

Định lý 0.10. *([15]) Cho $T > 0$ và không gian Hilbert X, không gian định chuẩn $W(0,T;X)$ được định nghĩa bởi*

$$W(0,T;X) = \left\{\varphi \in L^2(0,T;X) : \varphi_t \in L^2\left(0,T;X^*\right)\right\}$$

với chuẩn

$$\|\varphi\|_{W(0,T;X)} = \Big(\|\varphi\|^2_{L^2(0,T;X)} + \|\varphi_t\|^2_{L^2(0,T;X^*)}\Big)^{1/2}.$$

Không gian $W(0,T;X)$ *là không gian Hilbert và* $W(0,T;X) \hookrightarrow C([0,T);X)$.

Định nghĩa 0.11. *Cho* k *là số nguyên không âm và* $\varphi \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Giả sử rằng* φ *có đạo hàm yếu* $D^\alpha_w\varphi$ *với mọi đa chỉ số* α *sao cho* $|\alpha| \le k$. *Khi đó chuẩn Sobolev của* φ *được cho bởi*

$$\|\varphi\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \Bigg(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha_w\varphi\|^p_{L^p(\Omega)}\Bigg)^{1/p} \quad \text{với } p \in [1,\infty)$$

và

$$\|\varphi\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha_w\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{với } p = \infty.$$

Không gian Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ *được định nghĩa*

$$W^{k,p}(\Omega) = \big\{\varphi \in L^1_{loc}(\Omega) \mid \|\varphi\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \infty \text{ với } p \in [1,\infty]\big\}.$$

Trường hợp đặc biệt, $p = 2$, *ta kí hiệu* $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$. *Khi đó*

$$H^1(\Omega) = \big\{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \partial_j\varphi \in L^2(\Omega)\ (j \in \{1,...,n\})\big\}.$$

Hơn nữa, ta thường kí hiệu cho một không gian Sobolev khác

$$W^{k,p}_0(\Omega) \text{ là bao đóng của } C^\infty_0(\Omega) \text{ trong } W^{k,p}(\Omega).$$

Với $p = 2, k = 1$, *ta kí hiệu* $H^1_0(\Omega) = W^{1,2}_0(\Omega)$.

Định lý 0.12. *(Bất đẳng thức Poincaré) Nếu* Ω *là tập bị chặn, tồn tại hằng số* $C = C(\Omega)$ *sao cho bất đẳng thức sau xảy ra*

$$\forall\varphi \in H^1_0(\Omega),\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Định lý 0.13. *(Định lý nhúng [16]) Không gian Sobolev* $H^1(\Omega)$ *là không gian Hilbert, tách được. Cho số nguyên* $k \ge 1$ *và* $1 \le p < \infty$. *Khi đó*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

trong đó $1/q + 1/p = 1$. *Với trường hợp đặc biệt* $k = 1$ *và* $p = 2$ *ta có dãy các không gian*

$$H^2(\Omega) \cup H^1_0(\Omega) \hookrightarrow H^1_0(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega),$$

trong đó $H^{-1}(\Omega)$ *là không gian đối ngẫu của* $H^1(\Omega)$ *và mỗi phép nhúng đều liên tục.*

0.3 Giải tích hàm

Định lý 0.14. *(Hilbert-Schmidt [17]) Tập hợp Λ tất cả các giá trị riêng khác 0 của một toán tử compact tự liên hiệp $A \in \mathcal{L}(H)$ trong không gian Hilbert H là hữu hạn hoặc đếm được. Nếu đếm được thì tập hợp đó tạo thành một dãy hội tụ về 0.*

Định lý 0.15. *(Toán tử compact Kolmogorov [18]) Cho $\mathcal{B}$ là tập con của $L^p(\mathbb{R}^n)$ với $p \in [1, \infty)$. Tập $\mathcal{B}$ là tiền compact khi và chỉ khi các điều kiện sau xảy ra:*

1. *$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\|f(x-h) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{B}, \forall h$ thỏa mãn $|h| < \delta$.*
2. *$\lim\limits_{r \to \infty} \displaystyle\int_{|x|>r} |f|^p$ hội tụ đều về 0 trên $\mathcal{B}$.*

Định lý 0.16. *(Lax-Mingram [19]) Cho X là một không gian Hilbert với chuẩn là $\|\cdot\|_X$ và tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ và giả sử rằng A là dạng song tuyến tính và L là hàm tuyến tính thỏa mãn các tính chất sau:*

1. *A là đối xứng, có nghĩa là $A(v, w) = A(w, v), \forall w, v \in X$.*
2. *A là X-elliptic, có nghĩa $\exists\ \alpha > 0$ sao cho $A(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2, \forall v \in X$.*
3. *A liên tục, có nghĩa $\exists\ C \in \mathbb{R}$ sao cho $|A(u, v)| \leq C \|u\|_X \|v\|_X$ với mọi $u, v \in X$.*
4. *L liên tục, có nghĩa $\exists\ K \in \mathbb{R}$ sao cho $|L(u)| \leq K \|u\|_X, \forall u \in X$. Khi đó tồn tại duy nhất $u \in X$ sao cho $A(u, v) = L(v), \forall v \in X$ và ta có ước lượng $\|u\|_X \leq M/\alpha$.*

Định lý 0.17. *(Bất đẳng thức Young [20]) Với mọi $a, b \geq 0$, $\varepsilon > 0$ và với mọi $p \in (1, \infty)$ ta có*

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{b^q}{q \varepsilon^{q/p}},$$

trong đó $q = p/(p-1)$.

Định lý 0.18. *(Điểm bất động Schauder [21]) Cho* $(X, \|\cdot\|)$ *là một không gian Banach trên* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *hoặc* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*) và* $S \subset X$ *là tập khác rỗng, lồi, đóng và bị chặn. Khi đó bất kì toán tử compact* $A \colon S \to S$ *đều có ít nhất một điểm bất động.*

Định lý 0.19. *(Phân tích phổ của toán tử compact [22]) Cho* X, Y *là hai không gian Hilbert. Toán tử* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *compact, tự liên hợp và* $(A_n)_n \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *là dãy gồm các toán tử compact, tự liên hợp sao cho* $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0$*. Tập các giá trị riêng* Λ *của* A *gồm các* $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$ *được sắp xếp theo thứ tự giảm dần về 0. Giả sử tồn tại* $k \in \mathbb{N}$ *sao cho* $\lambda_k, \lambda_{k+1} \in \Lambda$ *và* $\lambda_k \neq \lambda_{k+1}$*. Khi đó với mọi* $i \in \{1, .., k\}$*, ta có*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^i = \lambda_i,$$

trong đó λ_n^i *là giá trị riêng thứ i trong dãy giá trị riêng giảm dần của* A_n*.*

CHƯƠNG 1

PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TRỰC GIAO CHUẨN (POD)

Cho X là không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ và chuẩn $\|\cdot\|_X$. Giả sử rằng $y(t), t \in [0,T]$ là một quá trình diễn ra trong thời gian từ $t_1 = 0$ đến thời điểm cuối T (quá trình này thường được biểu thị thông qua một phương trình vi phân hoặc một phương trình đạo hàm riêng). Cho trước số $n \in \mathbb{N}$ đặt

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$$

là một lưới trên $[0,T]$. Để đơn giản hóa bản trình bày, lưới thời gian được giả định có kích thước bước lưới cố định $\Delta t = T/(n-1)$. Khi đó $t_j = (j-1)\Delta t,\ \forall j = 1,\ldots,n.$

Giả thiết rằng các ảnh chụp nhanh (ta gọi là snapshots) $y_j = y(t_j) \in X$ là các giá trị hoặc hình ảnh thu được tại các thời gian cụ thể t_j, ta kí hiệu

$$\mathcal{V} = \operatorname{span}\{y_1,\ldots,y_n\}$$

là không gian con sinh bởi các snapshot $\{y_j\}_{j=1}^n$. Ta giả sử rằng ít nhất một trong số các snapshot khác 0. Kí hiệu $\{\psi_k\}_{k=1}^d$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{V}$ với $d = \dim\mathcal{V}$. Khi đó mỗi snapshot có thể biểu diễn

$$y_j = \sum_{k=1}^{d} \langle y_j, \psi_k\rangle_X \psi_k \text{ với mọi } j = 1,\ldots,n. \tag{1.1}$$

Phương pháp phân tích trực giao chuẩn (POD) bản chất là tìm một cơ sở trực chuẩn sao cho với bất kì $\ell \in \{1, \ldots, d\}$ cho trước thì trung bình sai số bình phương giữa các phần tử $y_j, 1 \le j \le n$ và tổng riêng ℓ phần tử của (1.1) là nhỏ nhất:

$$\min_{\{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left\| y_j - \sum_{i=1}^{\ell} \langle y_j, \psi_i \rangle_X \psi_i \right\|_X^2 \qquad (P_{\min}^{\ell})$$
$$\text{sao cho } \langle \psi_i, \psi_j \rangle_X = \delta_{ij} \text{ với } 1 \le i \le \ell, 1 \le j \le i.$$

Nghiệm $\{\psi_k\}_{k=1}^{\ell}$ của $(P_{\min}^{\ell})$ được gọi là cơ sở POD rank ℓ.

Nhận xét 1.1. Ta định nghĩa

$$\mathcal{I}_n(y, \psi_1, .., \psi_\ell) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left\| y_j - \sum_{i=1}^{\ell} \langle y_j, \psi_i \rangle_X \psi_i \right\|_X^2$$

và

$$\mathcal{I}(y, \psi_1, .., \psi_\ell) = \int_0^T \left\| y(t) - \sum_{i=1}^{\ell} \langle y(t), \psi_i \rangle_X \psi_i \right\|_X^2 dt.$$

Khi đó, với mọi $y \in C([0, T]; X)$ ta có được $\lim\limits_{n \to \infty} T\mathcal{I}_n(y) = \mathcal{I}(y)$.

1.1 Phương pháp POD rời rạc

Biến đổi cơ bản ta chuyển bài toán tối ưu $(P_{\min}^{\ell})$ sang bài toán tối ưu cực đại tương đương

$$\max_{\{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{\ell} \langle y_j, \psi_i \rangle_X \right|^2 \qquad (P_{\max}^{\ell})$$
$$\text{sao cho } \langle \psi_i, \psi_j \rangle_X = \delta_{ij} \text{ với } 1 \le i \le \ell, 1 \le j \le i.$$

Trước hết ta xét bài toán sau

$$\max_{\{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \langle y_j, \psi \rangle_X \right|^2 \text{ thỏa mãn } \|\psi\|_X = 1. \qquad (P_{\max}^{1})$$

Bài toán tối ưu có ràng buộc $(P_{\max}^{1})$ có thể được giải quyết bằng cách xem xét các điều kiện cần đạo hàm bậc nhất bằng 0. Xét $\mathcal{L} : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm Lagrange ứng với ($P^1_{\max}$) được định nghĩa bởi

$$\mathcal{L}(u,\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left|\langle y_j, u\rangle_X\right|^2 + \lambda\left(1 - \|u\|_X^2\right) \text{ với } (u,\lambda) \in X \times \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Giả sử $u \in X$ là nghiệm của ($P^1_{\max}$). Khi đó, điều kiện cần là đạo hàm bậc nhất theo bất kì hướng $\varphi \in X$ đều bằng 0, tức là

$$\frac{d}{d\delta}\mathcal{L}(u+\delta\varphi,\lambda)|_{\delta=0} = 0 \text{ với mọi } \varphi \in X.$$

Từ (1.2) ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\delta}\mathcal{L}(u+\delta\varphi,\lambda)|_{\delta=0}\\
&= \frac{d}{d\delta}\Big[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle y_j, u+\delta\varphi\rangle_X\langle y_j, u+\delta\varphi\rangle_X - \lambda\langle u+\delta\varphi, u+\delta\varphi\rangle_X\Big]_{\delta=0}\\
&= 2\Big[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle y_j,\varphi\rangle_X\langle y_j,u\rangle_X - \lambda\langle u,\varphi\rangle_X\Big]\\
&= 2\Big[\langle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle y_j,u\rangle_X y_j,\varphi\rangle_X - \lambda\langle u,\varphi\rangle_X\Big].
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\langle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle y_j,u\rangle_X y_j,\varphi\rangle_X - \lambda\langle u,\varphi\rangle_X = 0, \forall\varphi \in X. \quad (1.3)$$

Ta định nghĩa toán tử tuyến tính bị chặn $\mathcal{Y}_n : \mathbb{R}^n \to X$ bởi

$$\mathcal{Y}_n v = \sum_{j=1}^{n} v_j y_j \quad \text{với } v \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó $v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n$. Toán tử liên hiệp $\mathcal{Y}_n^* : X \to \mathbb{R}^n$ được cho bởi

$$\mathcal{Y}_n^* z = \left(\langle z, y_1\rangle_X, \ldots, \langle z, y_n\rangle_X\right)^\top \quad \text{với } z \in X.$$

Dẫn đến $\mathcal{R}_n = \dfrac{1}{n}\mathcal{Y}_n\mathcal{Y}_n^* \in \mathcal{L}(X)$ và $\mathcal{K}_n = \dfrac{1}{n}\mathcal{Y}_n^*\mathcal{Y}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ xác định như sau

$$\mathcal{R}_n z = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle z, y_j\rangle_X\, y_j \text{ mọi } z \in X \text{ và } (\mathcal{K}_n)_{ij} = \frac{1}{n}\langle y_j, y_i\rangle_X. \quad (1.4)$$

Kết hợp (1.3), ta có

$$\langle \mathcal{R}_n u, \varphi \rangle_X = \lambda \langle u, \varphi \rangle_X \text{ với mọi } \varphi \in X.$$

Suy ra nghiệm tối ưu u của bài toán $(P^1_{\max})$ thỏa mãn

$$\mathcal{R}_n u = \lambda u.$$

Để ý rằng $\mathcal{R}_n = \dfrac{1}{n}\mathcal{Y}_n\mathcal{Y}_n^* \in \mathcal{L}(X)$ là toán tử tự liên hợp, bị chặn và nửa xác định dương trên X. Hơn nữa, vì $\operatorname{Im}\mathcal{R}_n \subset \mathcal{V} = \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\}$ nên $\operatorname{Im}\mathcal{R}_n$ có hữu hạn chiều. Do đó, $\mathcal{R}_n$ là một toán tử compact. Theo định lý Hilbert-Schmidt, tồn tại một hệ cơ sở trực chuẩn $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ của X và một dãy $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ số thực không âm sao cho

$$\mathcal{R}_n\psi_i = \lambda_i\psi_i, \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d > 0, \text{ và } \lambda_i = 0 \text{ với } i > d.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\psi_1, \cdot) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left|\langle y_j, \psi_1\rangle_X\right|^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \langle y_j, \psi_1\rangle_X \langle y_j, \psi_1\rangle_X \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle \langle y_j, \psi_1\rangle_X y_j, \psi_1\right\rangle_X = \frac{1}{n}\langle\sum_{j=1}^{n}\langle y_j, \psi_1\rangle_X y_j, \psi_1\rangle_X \\
&= \frac{1}{n}\langle \mathcal{Y}_n\mathcal{Y}_n^*\psi_1, \psi_1\rangle_X = \langle \mathcal{R}_n\psi_1, \psi_1\rangle_X = \lambda_1.
\end{aligned}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh ψ_1 là nghiệm tối ưu của $(P^1_{\max})$. Giả sử $\tilde{u} \in X$ là một vector bất kì thỏa mãn $\|\tilde{u}\|_X = 1$. Vì $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ là hệ cơ sở trực chuẩn trong X, nên ta có

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \tilde{u}, \psi_i\rangle_X \psi_i,$$

trong đó $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle \tilde{u}, \psi_i\rangle_X\right|^2 = 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\tilde{u}, \cdot) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left|\langle y_j, \tilde{u}\rangle_X\right|^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left|\langle y_j, \sum_{i=1}^{\infty}\langle \tilde{u}, \psi_i\rangle_X \psi_i\rangle_X\right|^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left|\langle y_j, \sum_{i=1}^{\infty}\langle \tilde{u}, \psi_i\rangle_X \psi_i\rangle_X\right|^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left(\langle y_j, \langle \tilde{u}, \psi_i\rangle_X \psi_i\rangle_X \langle y_j, \langle \tilde{u}, \psi_k\rangle_X \psi_k\rangle_X\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\langle y_j,\psi_i\rangle_X \langle y_j,\psi_k\rangle_X \langle \tilde{u},\psi_i\rangle_X \langle \tilde{u},\psi_k\rangle_X\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\langle y_j,\psi_i\rangle_X y_j}_{=\lambda_i\psi_i}, \psi_k\rangle_X \langle \tilde{u},\psi_i\rangle_X \langle \tilde{u},\psi_k\rangle_X \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(\underbrace{\langle \lambda_i\psi_i,\psi_k\rangle_X}_{=\lambda_i\delta_{ik}} \langle \tilde{u},\psi_i\rangle_X \langle \tilde{u},\psi_k\rangle_X) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i \left|\langle \tilde{u},\psi_i\rangle_X\right|^2 \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle \tilde{u},\psi_i\rangle_X\right|^2 = \lambda_1\|\tilde{u}\|_X^2 = \lambda_1.
\end{aligned}
$$

Tóm lại, ψ_1 là nghiệm tối ưu của $(P^1_{\max})$ và argmax $(P^1_{\max}) = \lambda_1$. Tổng quát, ta có định lý sau.

Định lý 1.2. *Cơ sở POD hạng $\ell \leq d$ là nghiệm bài toán tối ưu $(P^\ell_{\max})$ được cho bởi*

$$\mathcal{R}_n\psi_i = \lambda_i\psi_i \text{ với mọi } i = 1, ..., \ell,$$

trong đó $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_d > 0$ là các giá trị riêng dương của $\mathcal{R}_n$ và $\psi_i \in X,\ i \in \{1, .., d\}$ là các vector riêng tương ứng của λ_i.

Chứng minh. Ta chứng minh dựa vào quy nạp theo ℓ. Bằng lập luận phía trên, trường hợp $\ell = 1$, nghiệm bài toán tối ưu $(P^\ell_{\max})$ chính là ψ_1 thỏa mãn

$$\mathcal{R}_n\psi_1 = \lambda_1\psi_1.$$

Giả sử với $\ell \geq 1$, ta có $\{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$ là cơ sở POD hạng ℓ, tức là nghiệm của bài toán tối ưu $(P^\ell_{\max})$ thỏa mãn

$$\mathcal{R}_n\psi_i = \lambda_i\psi_i \text{ với mọi } i \in \{1, ..., \ell\}.$$

Khi đó nghiệm của bài toán $P^{\ell+1}_{\max}$ là $(\psi_1, ..., \psi_\ell, u)$ với u là nghiệm bài toán tối ưu sau

$$
\begin{gathered}
\max_{u\in X}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\langle y_j, u\rangle_X\right|^2 \\
\text{thỏa mãn } \langle \psi_i, u\rangle_X = 0 \text{ với } 1 \leq i \leq \ell \text{ và } \|u\|_X = 1.
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

Vì hệ các vector riêng $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ tạo nên hệ cơ sở trực chuẩn của X. Do đó, nếu $\langle u, \psi_i \rangle_X = 0$ với $1 \le i \le \ell$ thì u có dạng

$$u = \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \langle u, \psi_i \rangle_X \psi_i.$$

Với giả thiết $\|u\|_X = 1$ ta suy ra $\sum_{\ell+1}^{\infty} |\langle \psi_i, u \rangle_X|^2 = 1$. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left| \langle y_j, u \rangle_X \right|^2 &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left| \langle y_j, \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \langle u, \psi_i \rangle_X \psi_i \rangle_X \right|^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \sum_{k=\ell+1}^{\infty} \left(\langle y_j, \langle u, \psi_i \rangle_X \psi_i \rangle_X \langle y_j, \langle u, \psi_k \rangle_X \psi_k \rangle_X \right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \sum_{k=\ell+1}^{\infty} \left(\langle y_j, \psi_i \rangle_X \langle y_j, \psi_k \rangle_X \langle u, \psi_i \rangle_X \langle u, \psi_k \rangle_X \right) \\
&= \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \sum_{k=\ell+1}^{\infty} (\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \langle y_j, \psi_i \rangle_X y_j}_{=\lambda_i \psi_i}, \psi_k \rangle_X \langle u, \psi_i \rangle_X \langle u, \psi_k \rangle_X) \\
&= \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \sum_{k=\ell+1}^{\infty} (\underbrace{\langle \lambda_i \psi_i, \psi_k \rangle_X}_{=\lambda_i \delta_{ik}} \langle u, \psi_i \rangle_X \langle u, \psi_k \rangle_X) \\
&= \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \lambda_i \left| \langle u, \psi_i \rangle_X \right|^2 \le \lambda_{\ell+1} \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \left| \langle u, \psi_i \rangle_X \right|^2 = \lambda_{\ell+1}.
\end{aligned}$$

Hơn nữa, từ định nghĩa của $\mathcal{R}_n$, dẫn đến

$$\lambda_i \psi_i = \mathcal{R}_n \psi_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \psi_i, y_j \rangle_X y_j.$$

Suy ra

$$\lambda_i = \langle \lambda_i \psi_i, \psi_i \rangle_X = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left| \langle \psi_i, y_j \rangle_X \right|^2 .$$

Như vậy, $\psi_{\ell+1}$ là nghiệm tối ưu của (1.5). Do đó nghiệm của bài toán $P_{\max}^{\ell+1}$ là $(\psi_1, ..., \psi_\ell, \psi_{\ell+1})$. $\square$

Hệ quả 1.3. *Ma trận tương quan* $K = \mathcal{K}_n$ *ứng với các snapshot* $\{y_j\}_{j=1}^{n}$*, với* $K_{ij} = \dfrac{1}{n} \langle y_j, y_i \rangle_X$ *là ma trận nửa xác định dương, tự liên hợp, có hạng* *là d. Khi đó tồn tại $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_d > 0$ là các giá trị riêng dương của K và $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^n$ là các vector riêng tương ứng. Cơ sở POD hạng $\ell \leq d$ được cho bởi*

$$\psi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{j=1}^{n} (v_k)_j \, y_j,$$

trong đó $(v_k)_j$ là thành phần thứ j của vector riêng v_k. Hơn nữa, ta có công thức sai số

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left\| y_j - \sum_{k=1}^{\ell} \langle y_j, \psi_k \rangle_X \, \psi_k \right\|_X^2 = \sum_{k=\ell+1}^{d} \lambda_k.$$

Chứng minh. Ta có $\mathcal{R}_n$ và $\mathcal{K}_n$ có cùng tập giá trị riêng khác 0. Bất kì giá trị riêng $\lambda_k \neq 0$ của $\mathcal{K}_n$ và v_k là vector riêng tương ứng của λ_k, ta đặt

$$\psi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{j=1}^{n} (v_k)_j \, y_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \mathcal{Y}_n v_k.$$

Khi đó

$$\mathcal{Y}_n^* \psi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \mathcal{Y}_n^* \mathcal{Y}_n v_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \mathcal{K}_n v_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \lambda_k v_k = \sqrt{\lambda_k} v_k.$$

Suy ra

$$\mathcal{Y}_n \mathcal{Y}_n^* \psi_k = \mathcal{Y}_n \sqrt{\lambda_k} v_k = \sqrt{\lambda_k} \mathcal{Y}_n v_k = \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_k} \psi_k = \lambda_k \psi_k.$$

Dẫn đến ψ_k là vector riêng ứng với giá trị riêng λ_k của $\mathcal{R}_n$. Vậy nên $\{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$ là cơ sở POD của $(P_{\min}^{\ell})$.

Ngoài ra, vì

$$\lambda_i = \langle \lambda_i \psi_i, \psi_i \rangle_X = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \langle \psi_i, y_j \rangle_X \right|^2 \text{ với mọi } i,$$

nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \|y_j\|_X^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle \psi_i, y_j \rangle_X \psi_i \Big\|_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big| \sum_{i=1}^{\infty} \langle \psi_i, y_j \rangle_X \Big|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \langle \psi_i, y_j \rangle_X \right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big\|y_j-\sum_{k=1}^{\ell}\left\langle y_j,\psi_k\right\rangle_X\psi_k\big\|_X^2\\
&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\langle y_j-\sum_{k=1}^{\ell}\left\langle y_j,\psi_k\right\rangle_X\psi_k, y_j-\sum_{k=1}^{\ell}\left\langle y_j,\psi_k\right\rangle_X\psi_k\Big\rangle_X\\
&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|y_j\|_X^2-\sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\langle\psi_i,y_j\rangle_X\right|^2=\sum_{k=1}^{d}\lambda_k-\sum_{k=1}^{\ell}\lambda_k=\sum_{k=\ell+1}^{d}\lambda_k.
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

1.2 Phương pháp POD liên tục

Phần này sẽ giới thiệu phiên bản liên tục của phương pháp POD. Cho $y:[0,T]\to X$ là một hàm liên tục. Cơ sở POD với hạng ℓ là nghiệm của bài toán tối tiểu sau

$$\begin{aligned}
&\min_{\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_\ell\in X}\int_0^T\big\|y(t)-\sum_{i=1}^{\ell}\left\langle y(t),\tilde{u}_i\right\rangle_X\tilde{u}_i\big\|_X^2dt\\
&\text{sao cho } \left\langle\tilde{u}_i,\tilde{u}_j\right\rangle_X=\delta_{ij}, \text{ với mọi } 1\le i,j\le\ell.
\end{aligned}\tag{$\hat{P}^\ell_{\min}$}$$

Ta có thể chuyển bài toán tối tiểu $(\hat{P}^\ell_{\min})$ thành bài toán cực đại tương đương

$$\begin{aligned}
&\max_{\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_\ell\in X}\int_0^T\big|\sum_{i=1}^{\ell}\left\langle y(t),\tilde{u}_i\right\rangle_X\big|^2dt\\
&\text{sao cho } \left\langle\tilde{u}_i,\tilde{u}_j\right\rangle_X=\delta_{ij}, \text{ với mọi } 1\le i,j\le\ell.
\end{aligned}\tag{$\hat{P}^\ell_{\max}$}$$

Để giải quyết bài toán $(\hat{P}^\ell_{\max})$, tương tự phần POD rời rạc, trước hết ta xét trường hợp $\ell=1$

$$\max_{\tilde{u}\in X}\int_0^T\left|\langle y(t),\tilde{u}\rangle_X\right|^2dt \text{ sao cho } \|\tilde{u}\|_X^2=1.\tag{$\hat{P}^1_{\max}$}$$

Xét hàm Lagrange $\mathcal{L}:X\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ứng với bài toán $(\hat{P}^1_{\max})$

$$\mathcal{L}(u,\lambda)=\int_0^T\left|\langle y(t),u\rangle_X\right|^2dt+\lambda\left(1-\|u\|_X^2\right) \text{ với } (u,\lambda)\in X\times\mathbb{R}.$$

Giả sử $u \in X$ là nghiệm của $(\hat{P}^1_{\max})$. Khi đó, đạo hàm bậc nhất theo bất kì hướng $\varphi \in X$ tại u bằng 0. Từ định nghĩa hàm $\mathcal{L}$, dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\delta}\mathcal{L}(u+\delta\varphi,\lambda)|_{\delta=0} \\
&= \frac{d}{d\delta}\Big[\int_0^T \langle y(t), u+\delta\varphi\rangle_X \langle y(t), u+\delta\varphi\rangle_X dt - \lambda\langle u+\delta\varphi, u+\delta\varphi\rangle\Big]_{\delta=0} \\
&= 2\Big[\int_0^T \langle y(t),\varphi\rangle_X \langle y(t), u\rangle_X dt - \lambda\langle u,\varphi\rangle_X\Big] \\
&= 2\Big[\Big\langle \int_0^T \langle y(t), u\rangle_X y(t),\varphi\rangle_X dt - \lambda\langle u,\varphi\Big\rangle_X\Big].
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\Big\langle \int_0^T \langle y(t), u\rangle_X y(t),\varphi\Big\rangle_X dt - \lambda\langle u,\varphi\rangle_X = 0,\ \forall\varphi \in X.$$

Do đó,

$$\int_0^T \langle y(t), u\rangle_X y(t) dt = \lambda u. \tag{1.7}$$

Ta định nghĩa toán tử tuyến tính bị chặn $\mathcal{Y} : L^2(0,T;\mathbb{R}) \to X$ bởi

$$\mathcal{Y}\varphi = \int_0^T \varphi(t)y(t)dt \text{ với mọi } \varphi \in L^2(0,T;\mathbb{R}) \tag{1.8}$$

và toán tử liên hiệp $\mathcal{Y}^* : X \to L^2(0,T;\mathbb{R})$ được cho bởi

$$(\mathcal{Y}^* z)(t) = \langle z, y(t)\rangle_X \text{ với mọi } z \in X. \tag{1.9}$$

Khi đó $\mathcal{R} = \mathcal{Y}\mathcal{Y}^* \in \mathcal{L}(X)$ xác định như sau

$$\mathcal{R}u = \int_0^T \langle y(t), u\rangle_X y(t) dt \text{ với mọi } u \in X. \tag{1.10}$$

Bổ đề 1.4. *Toán tử $\mathcal{R}$ là tuyến tính, bị chặn. Ngoài ra,*

1. *$\mathcal{R}$ không âm: $\langle \mathcal{R}u, u\rangle_X \geq 0$ với mọi $u \in X$.*

2. *$\mathcal{R}$ tự liên hợp: $\langle \mathcal{R}u, \tilde{u}\rangle_X = \langle u, \mathcal{R}\tilde{u}\rangle_X$ với mọi $u, \tilde{u} \in X$.*

Chứng minh. Với bất kì $u, \tilde{u} \in X$ và $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\alpha u + \tilde{\alpha}\tilde{u}) &= \int_0^T \langle y(t), \alpha u + \tilde{\alpha}\tilde{u}\rangle_X y(t)dt \\
&= \int_0^T (\alpha\langle y(t), u\rangle_X + \tilde{\alpha}\langle y(t), \tilde{u}\rangle_X)\, y(t)dt \\
&= \alpha\int_0^T \langle y(t), u\rangle_X y(t)\mathrm{d}t + \tilde{\alpha}\int_0^T \langle y(t), \tilde{u}\rangle_X y(t)dt \\
&= \alpha\mathcal{R}u + \tilde{\alpha}\mathcal{R}\tilde{u},
\end{aligned}$$

do đó $\mathcal{R}$ tuyến tính. Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}u\|_X &\leq \int_0^T \|\langle y(t), u\rangle_X y(t)\|_X\, dt = \int_0^T |\langle y(t), u\rangle_X|\, \|y(t)\|_X dt \\
&\leq \int_0^T \|y(t)\|_X^2 \|u\|_X dt = \left(\int_0^T \|y(t)\|_X^2 dt\right)\|u\|_X = \|y\|^2_{L^2(0,T;X)}\|u\|_X
\end{aligned}$$

với bất kì $u \in X$. Vì $y \in C\left([0,T];X\right) \subset L^2\left(0,T;X\right)$, chuẩn $\|y\|_{L^2(0,T;X)}$ bị chặn. Cho nên, $\mathcal{R}$ là toán tử bị chặn. Hơn nữa

$$\langle \mathcal{R}u, u\rangle_X = \left\langle \int_0^T \langle y(t), u\rangle_X y(t)dt, u\right\rangle_X = \int_0^T |\langle y(t), u\rangle_X|^2\, dt \geq 0$$

với mọi $u \in X$, nên $\mathcal{R}$ không âm. Cuối cùng, ta có

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}u, \tilde{u}\rangle_X &= \int_0^T \langle y(t), u\rangle_X \langle y(t), \tilde{u}\rangle_X dt = \left\langle \int_0^T \langle y(t), \tilde{u}\rangle_X y(t)dt, u\right\rangle_X \\
&= \langle \mathcal{R}\tilde{u}, u\rangle_X = \langle u, \mathcal{R}\tilde{u}\rangle_X
\end{aligned}$$

với mọi $u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^m$, nên $\mathcal{R}$ tự liên hiệp. □

Vì $y \in C([0,T];V)$, theo định lý toán tử compact Kolmogorov trong $L^2(0,T;\mathbb{R})$ nên $\mathcal{Y}^* : X \to L^2(0,T;\mathbb{R})$ là toán tử compact. Tính bị chặn của $\mathcal{Y}$ suy ra $\mathcal{R}$ là toán tử compact. Khi đó theo định lý Hilbert-Schmidt tồn tại một cơ sở trực chuẩn $\{\psi_i^\infty\}_{i\in\mathbb{N}}$ của X và dãy $\{\lambda_i^\infty\}_{i\in\mathbb{N}}$ các số thực không âm thỏa mãn

$$\mathcal{R}\psi_i^\infty = \lambda_i^\infty\psi_i^\infty, \quad \lambda_1^\infty \geq \lambda_2^\infty \geq \cdots \text{ và } \lambda_i^\infty \to 0 \text{ khi } i \to \infty.$$

Hơn nữa,

$$\int_0^T |\langle y(t), \psi_i^\infty\rangle_X|^2\, dt = \int_0^T \langle\langle y(t), \psi_i^\infty\rangle_X\, y(t), \psi_i^\infty\rangle_X\, dt$$

$$= \langle \mathcal{R}\psi_i^\infty, \psi_i^\infty \rangle_X = \lambda_i^\infty,$$

với $i \in \mathbb{N}$. Nếu $\tilde{u}$ bất kì thuộc X với $\|\tilde{u}\|_X = 1$, ta có thể biểu diễn

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \tilde{u}, \psi_i^\infty \rangle_X \, \psi_i^\infty,$$

trong đó $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle \tilde{u}, \psi_i^\infty \rangle|^2 = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\langle y(t), \tilde{u} \rangle_X|^2 \, dt &= \int_0^T \Big| \langle y(t), \sum_{i=1}^{\infty} \langle \tilde{u}, \psi_i^\infty \rangle_X \, \psi_i^\infty \rangle_X \Big|^2 dt \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T |\langle y(t), \langle \tilde{u}, \psi_i^\infty \rangle_X \, \psi_i^\infty \rangle_X|^2 \, dt \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \tilde{u}, \psi_i^\infty \rangle_X|^2 \int_0^T |\langle y(t), \psi_i^\infty \rangle_X|^2 \, dt \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \tilde{u}, \psi_i^\infty \rangle_X|^2 \, \lambda_i^\infty \le \lambda_1^\infty \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \tilde{u}, \psi_i^\infty \rangle_X|^2 = \lambda_1^\infty.
\end{aligned}$$

Vì vậy ψ_1^∞ là nghiệm tối ưu của bài toán ($\hat{P}^1_{\max}$). Tổng quát, ta có định lý sau.

Định lý 1.5. *Cho $y \in C([0,T]; X)$. Toán tử tuyến tính, bị chặn, không âm, tự liên hợp compact $\mathcal{R}$ được định nghĩa tại (1.10). Khi đó cơ sở POD hạng ℓ là nghiệm của bài toán tối tiểu ($\hat{P}^\ell_{\min}$) là ℓ vector riêng $\{\psi_i^\infty\}_{i=1}^{\ell}$ của $\mathcal{R}$ ứng với ℓ giá trị riêng lớn nhất $\lambda_1^\infty \ge \ldots \ge \lambda_\ell^\infty \ge \lambda_{\ell+1}^\infty \ge \ldots$*

Chứng minh. Cách chứng minh hoàn toàn tương tự như POD rời rạc, ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo ℓ. Trường hợp $\ell = 1$, theo lý luận ở phía trên thì nghiệm bài toán tối ưu ($\hat{P}^1_{\max}$) chính là ψ_1^∞ thỏa mãn

$$\mathcal{R}\psi_1^\infty = \lambda_1^\infty \psi_1^\infty.$$

Giả sử định lý đúng với $\ell \ge 1$, tức là $\{\psi_i^\infty\}_{i=1}^{\ell}$ là cơ sở POD hạng ℓ thỏa mãn

$$\mathcal{R}\psi_i^\infty = \lambda_i^\infty \psi_i^\infty \text{ với mọi } i \in \{1, ..., \ell\}.$$

Nhận xét rằng nghiệm của bài toán $\hat{P}^{\ell+1}_{\max}$ là $(\psi_1^\infty, ..., \psi_\ell^\infty, u)$ với u là nghiệm bài toán tối ưu sau

$$\begin{aligned} &\max_{u\in X} \int_0^T \left|\langle y(t), u\rangle_X\right|^2 dt \\ &\text{thỏa mãn } \langle \psi_i^\infty, u\rangle_X = 0 \text{ với } 1 \le i \le \ell \text{ và } \|u\|_X = 1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

trong đó, $\{\psi_i^\infty\}_{i=1}^{\ell}$ là nghiệm của bài toán $\hat{P}^{\ell}_{\max}$. Vì hệ các vector riêng $\{\psi_i^\infty\}_{i=1}^{\infty}$ tạo nên hệ cơ sở trực chuẩn của X, do đó, nếu $\langle \psi_i^\infty, u\rangle_X = 0$ với mọi $1 \le i \le \ell$ thì u có dạng

$$u = \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \langle \psi_i^\infty, u\rangle_X \psi_i^\infty.$$

Với giả thiết $\|u\|_X = 1$, suy ra $\sum_{\ell+1}^{\infty} \left|\langle \psi_i, u\rangle_X\right|^2 = 1$. Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^T \left|\langle y(t), u\rangle_X\right|^2 &= \int_0^T \Big|\Big\langle y_j, \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \big\langle u, \psi_i^\infty\big\rangle_X \psi_i^\infty\Big\rangle_X\Big|^2 dt \\ &= \int_0^T \sum_{i=\ell+1}^{\infty}\sum_{k=\ell+1}^{\infty} \Big(\langle y(t), \langle u, \psi_i^\infty\rangle_X \psi_i^\infty\rangle_X \langle y(t), \langle u, \psi_k^\infty\rangle_X \psi_k^\infty\rangle_X\Big) dt \\ &= \int_0^T \sum_{i=\ell+1}^{\infty}\sum_{k=\ell+1}^{\infty} \left(\langle y(t), \psi_i^\infty\rangle_X \langle y(t), \psi_k^\infty\rangle_X \langle u, \psi_i^\infty\rangle_X \langle u, \psi_k^\infty\rangle_X\right) dt \\ &= \sum_{i=\ell+1}^{\infty}\sum_{k=\ell+1}^{\infty} \Big(\underbrace{\int_0^T \langle y(t), \psi_i^\infty\rangle_X\, y(t) dt}_{=\lambda_i^\infty \psi_i^\infty}, \psi_k^\infty\rangle_X \langle u, \psi_i^\infty\rangle_X \langle u, \psi_k^\infty\rangle_X\Big) dt \\ &= \sum_{i=\ell+1}^{\infty}\sum_{k=\ell+1}^{\infty} \big(\underbrace{\langle \lambda_i^\infty \psi_i^\infty, \psi_k^\infty\rangle_X}_{=\lambda_i^\infty \delta_{ik}} \langle u, \psi_i^\infty\rangle_X \langle u, \psi_k^\infty\rangle_X\big) \\ &= \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \lambda_i^\infty \left|\langle u, \psi_i^\infty\rangle_X\right|^2 \le \lambda_{\ell+1}^\infty \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \left|\langle u, \psi_i^\infty\rangle_X\right|^2 = \lambda_{\ell+1}^\infty \|u\|_X^2 = \lambda_{\ell+1}^\infty. \end{aligned}$$

Từ định nghĩa của $\mathcal{R}$ dẫn đến

$$\lambda_i^\infty \psi_i^\infty = \mathcal{R}\psi_i^\infty = \int_0^T \langle y(t), \psi_i^\infty\rangle_X y(t) dt.$$

Do đó

$$\lambda_i^\infty = \langle \lambda_i^\infty \psi_i^\infty, \psi_i^\infty\rangle_X = \int_0^T \left|\langle y(t), \psi_i^\infty\rangle_X\right|^2 dt. \tag{1.12}$$

Vậy nên $\psi_{\ell+1}^{\infty}$ là nghiệm của bài toán (1.11). Suy ra $(\psi_1^{\infty}, ..., \psi_{\ell}^{\infty}, \psi_{\ell+1}^{\infty})$ là nghiệm của bài toán $(\hat{P}_{\max}^{\ell+1})$. $\square$

Với bất kì $i \in \{j \in \mathbb{N} : \lambda_j^{\infty} > 0\}$ ta đặt

$$v_i^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^{\infty}}} \mathcal{Y}^* \psi_i^{\infty} \in L^2(0, T; \mathbb{R}),$$

nên

$$v_i^{\infty}(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^{\infty}}} \langle \psi_i^{\infty}, y(t) \rangle_X \text{ với mọi } t \in [0, T].$$

Từ định nghĩa của $\mathcal{Y}$ và $\mathcal{Y}^*$ tại (1.8) và (1.9), đặt $\mathcal{K} = \mathcal{Y}^* \mathcal{Y} \in \mathcal{L}\left(L^2(0, T; \mathbb{R})\right)$. Khi đó

$$\mathcal{K}\varphi = \int_0^T \langle y(s), y(t) \rangle_X \varphi(s) ds \text{ với } \varphi \in L^2(0, T; \mathbb{R}). \tag{1.13}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
(\mathcal{K} v_i^{\infty})(t) &= \int_0^T \langle y(s), y(t) \rangle_X v_i^{\infty}(s) ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^{\infty}}} \left\langle \int_0^T \langle \psi_i^{\infty}, y(s) \rangle_X y(s) ds, y(t) \right\rangle_X \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^{\infty}}} \langle \mathcal{R} \psi_i^{\infty}, y(t) \rangle_X = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^{\infty}}} \langle \mathcal{R} \psi_i^{\infty}, y(t) \rangle_X = \lambda_i^{\infty} v_i^{\infty}(t),
\end{aligned}$$

với mọi $t \in [0, T]$. Điều đó dẫn đến v_i^{∞} là các giá trị riêng của $\mathcal{K}$ với $i \in \mathbb{N}$ sao cho $\lambda_i^{\infty} > 0$. Tổng quát hóa ta có hệ quả sau.

Hệ quả 1.6. *Xét toán tử tuyến tính tương quan $K = \mathcal{K}$ được định nghĩa tại (1.13) với hàm $y(t) \in C([0, T]; X)$. Khi đó toán tử K nửa xác định dương, tự liên hợp, và compact. Đặt*

$$\mathcal{V} = \operatorname{span}\{y(t) \mid t \in [0, T]\}$$

là không gian sinh bởi các giá trị $y(t), t \in [0, T]$. Giả sử v_k^{∞} là vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_k^{\infty} > 0$ của K, trong đó

$$\lambda_1^{\infty} \geq \lambda_2^{\infty} \geq ... \geq \lambda_k^{\infty} \geq \lambda_{k+1}^{\infty} \geq ...$$

Khi đó, cơ sở POD hạng ℓ ứng với bài toán $(\hat{P}^{\ell}_{\min})$ được cho bởi

$$\psi_k^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^{\infty}}}\mathcal{Y}v_k^{\infty}.$$

Hơn nữa, ta có công thức sai số

$$\int_0^T \|y(t) - \sum_{i=1}^{\ell} \langle y(t), \psi_i^{\infty}\rangle_X \psi_i^{\infty}\|_X^2 dt = \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \lambda_i^{\infty}.$$

Chứng minh. Lập luận hoàn toàn tương tự như Hệ quả 1.3. □

1.3 Mối liên hệ giữa POD rời rạc và POD liên tục

Từ định nghĩa của $\mathcal{R}_n$ và $\mathcal{R}$ tại (1.4) và (1.10), ta thấy $\mathcal{R}_n$ và $\mathcal{R}$ đều là các toán tử tuyến tính bị chặn, tự liên hiệp và compact. Giả thiết rằng

$$\mathcal{R}_n\psi_i^n = \lambda_i^n\psi_i^n,\ \lambda_1^n \geq \dots \lambda_\ell^n \geq \dots \lambda_{d(n)}^n > \lambda_{d(n)+1}^n = \dots = 0, \tag{1.14}$$

$$\mathcal{R}\psi_i^{\infty} = \lambda_i^{\infty}\psi_i^{\infty},\ \lambda_1^{\infty} \geq \dots \lambda_\ell^{\infty} \geq \dots \lambda_d^{\infty} \geq \lambda_{d+1}^{\infty} \geq \dots \geq 0. \tag{1.15}$$

Bổ đề 1.7. *Cho X là một không gian Hilbert thực, $u \in X$ bất kì sao cho $\|u\|_X = 1$. Giả sử hàm $y \in C([0,T];X)$ có đạo hàm yếu $\dot{y} \in L^2(0,T,X)$. Khi đó*

$$\left\|\mathcal{R}u - \left(\frac{Tn}{n-1}\mathcal{R}_n\right)u\right\|_X \leq \Delta t\left(T^{1/2}\|y\|^2_{C([0,T];X)}|\dot{y}\|_{L^2(0,T,X)} + \|y\|^2_{C([0,T];X)}\right).$$

Chứng minh. Với mỗi $u \in X$ sao cho $\|u\|_X = 1$, ta xét hàm số $F_u : [0,T] \to X$ cho bởi

$$F_u(t) = \langle y(t), u\rangle_X y(t) \ \text{ với } t \in [0,T].$$

Từ định nghĩa $\mathcal{R}$ và $\mathcal{R}_n$ dẫn đến

$$\mathcal{R}u = \int_0^T F_u(t)dt = \sum_{j=1}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} F_u(t)dt$$

và

$$\begin{aligned}\frac{Tn}{n-1}\mathcal{R}_n u &= \Delta t \sum_{j=1}^{n} F_u(t_j)\\ &= \frac{\Delta t}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(F_u(t_j)+F_u(t_{j+1})) + \frac{\Delta t}{2}\left(F_u(t_1)+F_u(t_n)\right).\end{aligned}$$

Ngoài ra ta có

$$\|F_u(t)\|_X \le |\langle y(t), u\rangle_X|\, \|y(t)\|_X \le \|y(t)\|_X^2.$$

Từ đó suy ra

$$\|F_u\|_{L^2(0,T,X)} \le \left(\int_0^T \|F_u(t)\|_X^2 dt\right)^{1/2} \le \sqrt{T}\,\|y\|^2_{C([0,T];X)}.$$

Mặt khác, vì

$$\dot{F}_u(t) = \langle \dot{y}(t), u\rangle_X y(t) + \langle y(t), u\rangle_X \dot{y}(t) \quad \text{với } t \in [0,T]$$

nên

$$\|F_u\|^2_{L^2(0,T,X)} \le 4\int_0^T \left(\|y(t)\|_X\|\dot{y}(t)\|_X\right)^2 dt \le 4\|y\|^2_{C([0,T];X)}\|\dot{y}\|^2_{L^2(0,T,X)}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\int_{t_j}^{t_{j+1}} F_u(t)dt &= \frac{1}{2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(F_u(t_j) + \int_{t_j}^{t}\dot{F}_u(s)ds\big)dt\\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{t_{j+1}}^{t_{j+1}} \big(F_u(t_j) + \int_{t_{j+1}}^{t}\dot{F}_u(s)ds\big)dt\\ &= \frac{\Delta t}{2}\left(F_u(t_j) + F_u(t_{j+1})\right)\\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(\int_{t_j}^{t}\dot{F}_u(s)ds + \int_{t_{j+1}}^{t}\dot{F}_u(s)ds\big)dt.\end{aligned}$$

Điều đó dẫn đến

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{R}u - \frac{Tn}{n-1}\mathcal{R}_n u\right\|_X &\le \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\|\int_{t_j}^{t_{j+1}} \big(\int_{t_j}^{t}\dot{F}_u(s)ds + \int_{t_{j+1}}^{t}\dot{F}_u(s)ds\big)dt\|_X\\ &\quad + \frac{\Delta t}{2}\|F_u(t_1) + F_u(t_n)\|_X\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \Big(\int_{t_j}^{t} \|\dot{F}_u(s)\|_X ds + \int_{t}^{t_{j+1}} \|\dot{F}_u(s)\|_X ds\Big) dt$$
$$+ \frac{\Delta t}{2}\left(\|F_u(t_1)\|_X + \|F_u(t_n)\|_X\right)$$
$$\leq \frac{\Delta t}{2} T^{1/2}\Big(\int_0^T \|\dot{F}_u(s)\|_X^2 ds\Big)^{1/2} + \Delta t\|y\|^2_{C([0,T];X)}$$
$$\leq \Delta t\frac{T^{1/2}}{2}\|\dot{F}_u\|_{L^2(0,T,X)} + \Delta t\|y\|^2_{C([0,T];X)}$$
$$\leq \Delta t\left(T^{1/2}\|y\|_{C([0,T];X)}\|\dot{y}\|_{L^2(0,T,X)} + \|y\|^2_{C([0,T];X)}\right).$$

Từ đó bổ đề được chứng minh. □

Hệ quả 1.8. *Giả sử hàm số $y \in C([0,T];X)$ sao cho đạo hàm yếu $\dot{y} \in L^2(0,T,X)$. Khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{R} - T\mathcal{R}_n\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Chứng minh. Điều này dễ đạt được thông qua Bổ đề 1.7

$$\|T\mathcal{R}_n - \mathcal{R}\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\|u\|_X=1} \|(T\mathcal{R}_n)u - \mathcal{R}u\|_X$$
$$\leq \sup_{\|u\|_X=1}\left(\frac{(n-1)}{n}\Big\|\Big(\frac{nT}{n-1}\mathcal{R}_n\Big)u - \mathcal{R}u\Big\|_X + \frac{1}{n}\|\mathcal{R}u\|_X\right)$$
$$\leq \Delta t\hat{C} + \frac{1}{n}\|R\|_{\mathcal{L}(X)} \overset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

trong đó $\hat{C} = T^{1/2}\|y\|_{C([0,T];X)}\|\dot{y}\|_{L^2(0,T,X)} + \|y\|^2_{C([0,T];X)}$. □

Định lý 1.9. *Giả sử $\mathcal{R}_n$ và $\mathcal{R}$ được định nghĩa như (1.4) và (1.10). Cho $\{(\psi_i^n, \lambda_i^n)\}_{i=1}^{\infty}$ và $\{(\psi_i^{\infty}, \lambda_i^{\infty})\}_{i=1}^{\infty}$ là các cặp vector riêng và giá trị riêng cho tại (1.14) và (1.15). Giả sử ℓ là số tự nhiên thỏa mãn $\lambda_\ell \neq \lambda_{\ell+1}$ Khi đó ta có*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\lambda_i^n - \frac{\lambda_i^{\infty}}{T}\right| = 0,\ \forall 1 \leq i \leq \ell \text{ và } \lim_{n\to\infty}\sum_{i=\ell+1}^{\infty}\left(\lambda_i^n - \frac{\lambda_i^{\infty}}{T}\right) = 0$$

Hơn nữa, nếu $\lambda_i^{\infty} \neq \lambda_{i+1}^{\infty}$ với mọi $i = 1, ..., \ell$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_i^n \pm \psi_i^{\infty}\|_X = 0, \quad \text{với mọi } 1 \leq i \leq \ell$$

và

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=\ell+1}^{\infty}\left|\langle y_1,\psi_i^n\rangle_X\right|^2=\sum_{i=\ell+1}^{\infty}\left|\langle y_1,\psi_i^\infty\rangle_X\right|^2,$$

trong đó $\lim\limits_{n\to\infty}\|\psi_i^n\pm\psi_i^\infty\|_X=0$ *có nghĩa là* $\lim\limits_{n\to\infty}\|\psi_i^n+\psi_i^\infty\|_X=0$ *hoặc* $\lim\limits_{n\to\infty}\|\psi_i^n-\psi_i^\infty\|_X=0.$

Chứng minh. Từ (1.6) ta được

$$\frac{T}{n}\sum_{j=1}^{n}\|y\left(t_j\right)\|_X^2=\sum_{i=1}^{\infty}T\lambda_i^n \text{ với mọi } n\in\mathbb{N}.$$

Để ý rằng với $y\in C([0,T],X)$

$$\frac{T}{n}\sum_{j=1}^{n}\|y\left(t_j\right)\|_X^2\to\int_0^T\|y(t)\|_X^2dt \text{ khi } n\to\infty.$$

Điều đó dẫn đến

$$\sum_{i=1}^{\infty}T\lambda_i^n\to\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^\infty \text{ khi } n\to\infty. \tag{1.16}$$

Vì $\lambda_\ell^\infty\neq\lambda_{\ell+1}^\infty$, kết hợp với $\lim\limits_{n\to\infty}\|\mathcal{R}-T\mathcal{R}_n\|_{\mathcal{L}(X)}=0$, ta có

$$\lambda_i^n\to\frac{\lambda_i^\infty}{T}\quad \text{ với } 1\le i\le\ell \text{ khi } n\to\infty.$$

Từ (1.16) ta suy ra

$$\sum_{i=\ell+1}^{\infty}T\lambda_i^n\to\sum_{i=\ell+1}^{\infty}\lambda_i^\infty \text{ khi } n\to\infty.$$

Bất kì $i\in\{1,...,\ell\}$ ta có

$$\psi_i^n=\sum_{j=1}^{\infty}\left\langle\psi_i^n,\psi_j^\infty\right\rangle_X\psi_j^\infty.$$

Bởi vì $\lim\limits_{n\to\infty}\|\mathcal{R}-T\mathcal{R}_n\|_{\mathcal{L}(X)}=0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}\|\mathcal{R}\psi_i^n-T\mathcal{R}_n\psi_i^n\|_X=0$. Suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^\infty\left\langle\psi_i^n,\psi_j^\infty\right\rangle_X\psi_j^\infty-T\lambda_i^n\sum_{j=1}^{\infty}\left\langle\psi_i^n,\psi_j^\infty\right\rangle_X\psi_j^\infty\|_X^2=0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{j=1}^{\infty} \left(\lambda_j^{\infty} - T\lambda_i^n\right) \left\langle \psi_i^n, \psi_j^{\infty} \right\rangle_X \psi_j^{\infty} \Big\|_X^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Big| \left(\lambda_j^{\infty} - T\lambda_i^n\right) \left\langle \psi_i^n, \psi_j^{\infty} \right\rangle_X \Big|^2 = 0.$$

Nếu giả thiết $\lambda_i^{\infty} \neq \lambda_{i+1}^{\infty}$ với mọi $i = 1, ..., \ell$, kết hợp với $\lim\limits_{n\to\infty} T\lambda_i^n = \lambda_i^{\infty}$, $\forall i = 1, ..., \ell$, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \psi_i^n, \psi_j^{\infty} \right\rangle_X = 0 \text{ mọi } j \neq i.$$

Mà $\|\psi_i^n\|_X = 1$ nên $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \Big| \left\langle \psi_i^n, \psi_j^{\infty} \right\rangle_X \Big|^2 = 1$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \left\langle \psi_i^n, \psi_i^{\infty} \right\rangle_X = \pm 1$. Điều đó dẫn đến

$$\lim_{n\to\infty} \psi_i^n = \pm \psi_i^{\infty}.$$

Nhắc lại $y_1 = y(t_1) = y(0)$ nên $y_1 \in \operatorname{span}\{y_j\}_{j=1}^n$ với mọi n và

$$\|y_1\|_X^2 = \sum_{i=1}^{d(n)} \left|\langle y_1, u_i^n \rangle_X\right|^2.$$

Vì vậy, với $\ell < d(n)$, kết hợp $\|y_1\|_X^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle y_1, \psi_i^{\infty} \rangle_X\right|^2$ ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{i=\ell+1}^{d(n)} \left|\langle y_1, \psi_i^n \rangle_X\right|^2 =& \sum_{i=1}^{d(n)} \left|\langle y_1, \psi_i^n \rangle_X\right|^2 - \sum_{i=1}^{\ell} \left|\langle y_1, \psi_i^n \rangle_X\right|^2 + \sum_{i=1}^{\ell} \left|\langle y_1, \psi_i^{\infty} \rangle_X\right|^2 \\
&+ \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \left|\langle y_1, \psi_i^{\infty} \rangle_X\right|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle y_1, \psi_i^{\infty} \rangle_X\right|^2 \\
=& \sum_{i=1}^{\ell} \left(\left|\langle y_1, \psi_i^{\infty} \rangle_X\right|^2 - \left|\langle y_1, \psi_i^n \rangle_X\right|^2 \right) + \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \left|\langle y_1, \psi_i^{\infty} \rangle_X\right|^2.
\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{i=\ell+1}^{d(n)} \left|\langle y_1, \psi_i^n \rangle_X\right|^2 = \sum_{i=\ell+1}^{\infty} \left|\langle y_1, \psi_i^{\infty} \rangle_X\right|^2$. $\square$

1.4 Mối liên hệ giữa POD và SVD trong $\mathbb{R}^n$

Cho $Y = [y_1, \ldots, y_n]$ là ma trận thực cỡ $m \times n$ hạng $d \leq \min\{m, n\}$ với các cột $y_j \in \mathbb{R}^m, 1 \leq j \leq n$. Cho $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là ma trận đối xứng, xác định dương. Chúng ta xét không gian Euclid $\mathbb{R}^m$ với tích vô hướng có trọng W

$$\langle u, \tilde{u} \rangle_W = u^T W \tilde{u} = \langle u, W\tilde{u} \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle Wu, \tilde{u} \rangle_{\mathbb{R}^m} \text{ với } u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^m. \quad (1.17)$$

Khi đó $\|u\|_W = \sqrt{\langle u, u \rangle_W}$ với $u \in \mathbb{R}^m$ là chuẩn trong không gian Euclid $\mathbb{R}^m$ với trọng W. Đặc biệt, nếu ta chọn $W = I$, tích vô hướng (1.17) đồng nhất với tích vô hướng Euclid thông thường.

Bây giờ ta thay bài toán $(P^1_{\max})$ bằng

$$\max_{u \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \langle y_j, u \rangle_W \right|^2 \text{ thỏa mãn } \|u\|_W = 1. \quad (P^1_W)$$

Cũng như bài toán $(P^1_{\max})$, bài toán có ràng buộc (P^1_W) được giải bằng phương pháp Lagrange. Xét hàm Lagrangian $\mathcal{L} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \langle y_j, u \rangle_W \right|^2 + \lambda \left(1 - \|u\|^2_W \right) \text{ với } (u, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}.$$

Giả sử $u \in \mathbb{R}^m$ là nghiệm của (P^1_W). Khi đó, điều kiện cần là

$$\nabla \mathcal{L}(u, \lambda) \stackrel{!}{=} 0 \text{ trong } \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}.$$

Vì W đối xứng nên ta được

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i}(u, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} Y^T_{j\nu} W_{\nu k} u_k \Big|^2 + \lambda \left(1 - \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu W_{\nu k} u_k \right) \right) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} Y^T_{j\nu} W_{\nu k} u_k \right) \left(\sum_{\mu=1}^{m} Y^T_{j\mu} W_{\mu i} \right) \\
&\quad - \lambda \left(\sum_{\nu=1}^{m} u_\nu W_{\nu i} + \sum_{k=1}^{m} W_{ik} u_k \right) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{m} W_{i\mu} \sum_{j=1}^{n} Y_{\mu j} Y^T_{j\nu} W_{\nu k} u_k - 2\lambda \sum_{k=1}^{m} W_{ik} u_k \\
&= 2 \left(\frac{1}{n} W Y Y^T W u - \lambda W u \right)_i
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\nabla_u \mathcal{L}(u,\lambda) = 2\left(\frac{1}{n}WYY^TWu - \lambda Wu\right) \stackrel{!}{=} 0 \text{ trong } \mathbb{R}^m.$$

Phương trình trên dẫn đến bài toán giá trị riêng

$$\frac{1}{n}(WY)(WY)^T u = \lambda W u. \tag{1.18}$$

Vì W đối xứng và xác định dương, W có phân tích dạng giá trị riêng $W = QDQ^T$, trong đó $D = \operatorname{diag}(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ chứa các giá trị riêng $\eta_1 \geq \ldots \geq \eta_m > 0$ của W và $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là ma trận trực giao. Ta định nghĩa

$$W^\alpha = Q\operatorname{diag}(\eta_1^\alpha, \ldots, \eta_m^\alpha)\, Q^T \text{ với } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Để ý rằng $(W^\alpha)^{-1} = W^{-\alpha}$ và $W^{\alpha+\beta} = W^\alpha W^\beta$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, ta có

$$\langle u, \tilde{u}\rangle_W = \left\langle W^{1/2}u, W^{1/2}\tilde{u}\right\rangle_{\mathbb{R}^m} \text{ với } u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^m,$$

suy ra $\|u\|_W = \left\|W^{1/2}u\right\|_{\mathbb{R}^m}$ với $u \in \mathbb{R}^m$. Ta đặt $\bar{u} = W^{1/2}u \in \mathbb{R}^m$ và $\bar{Y} = \frac{1}{\sqrt{n}}W^{1/2}Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ và nhân hai vế của (1.18) với $W^{-1/2}$ ta đưa về bài toán giá trị riêng, vector riêng

$$\bar{Y}\bar{Y}^T\bar{u} = \lambda\bar{u} \text{ trong } \mathbb{R}^k.$$

Từ điều kiện $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(u,\lambda) \stackrel{!}{=} 0$ trong $\mathbb{R}$, ràng buộc $\|u\|_W = 1$ có thể biểu diễn

$$\|\bar{u}\|_{\mathbb{R}^m} = 1.$$

Tương tự như trong quá tình giải quyết bài toán $(P^1_{\max})$, từ điều kiện tối ưu bậc nhất của (P^1_W) ta suy ra được nghiệm của bài toán cực đại (P^1_W) là

$$u_1 = W^{-1/2}\bar{u}_1,$$

trong đó $\bar{u}_1$ là vector riêng của $\bar{Y}\bar{Y}^T$ ứng với giá trị riêng lớn nhất λ_1 với $\|\bar{u}_1\|_{\mathbb{R}^m} = 1$. Nếu sử dụng phương phân tích giá trị kỳ dị SVD thì vector u_1 cũng có thể được xác định bằng cách giải bài toán giá trị riêng

$$\bar{Y}^T\bar{Y}\bar{v}_1 = \lambda_1\bar{v}_1, \tag{1.19}$$

trong đó $\bar{Y}^T\bar{Y} = Y^TWY$, và ta đặt

$$u_1 = W^{-1/2}\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}W^{-1/2}\bar{Y}\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}Y\bar{v}_1.$$

Cũng như các phần trước, ta xây dựng cơ sở POD bằng cách tiếp tục tìm vectơ thứ hai $u \in \mathbb{R}^m$ với ràng buộc $\langle u, u_1\rangle_W = 0$ và $\|u\|_W = 1$ sao cho cực đại $\sum_{j=1}^n \left|\langle y_j, u\rangle_W\right|^2$. Tổng quát hóa, ta có định lý sau.

Định lý 1.10. *Cho $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ có hạng $d \leq \min\{m, n\}, W$ là ma trận đối xứng, xác định dương, $\bar{Y} = \frac{1}{\sqrt{n}}W^{1/2}Y$ và $\ell \in \{1, \ldots, d\}$. Hơn nữa, cho $\bar{Y} = \bar{U}\Sigma\bar{V}^T$ là phân tích giá trị kì dị (SVD) của $\bar{Y}$, trong đó $\bar{U} = [\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}, \bar{V} = [\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận trực chuẩn và ma trận đường chéo Σ có dạng*

$$\bar{U}^T\bar{Y}\bar{V} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

trong đó $D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$. Khi đó nghiệm của

$$\max_{\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_\ell \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{n} \left|\langle y_j, \tilde{u}_i\rangle_W\right|^2 \text{ với } \langle \tilde{u}_i, \tilde{u}_j\rangle_W = \delta_{ij},\ \forall 1 \leq i, j \leq \ell \qquad (P_W^\ell)$$

được cho bởi các vector $u_i = W^{-1/2}\bar{u}_i, i = 1, \ldots, \ell$.

Chứng minh. Sử dụng các lập luận và phương pháp quy nạp tương tự như trong chứng minh Định lý 1.2. □

Nhận xét 1.11. Từ phân tích SVD và $\bar{Y}^T\bar{Y} = \frac{1}{n}Y^TWY$ cơ sở POD $\{u_i\}_{i=1}^\ell$ hạng ℓ có thể được xác định như sau: Giải bài toán giá trị riêng $n \times n$

$$\frac{1}{n}Y^TWY\bar{v}_i = \lambda_i\bar{v}_i \text{ với } i = 1, \ldots, \ell$$

và đặt

$$u_i = W^{-1/2}\bar{u}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}W^{-1/2}\left(\bar{Y}\bar{v}_i\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}Y\bar{v}_i,$$

với $i = 1, \ldots, \ell$. Khi đó

$$\langle u_i, u_j\rangle_W = u_i^TWu_j = \frac{\delta_{ij}\lambda_j}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}} \quad \text{với } 1 \leq i, j \leq \ell.$$

Đối với việc áp dụng POD cho các vấn đề cụ thể, việc lựa chọn ℓ khi xây dựng cơ sở POD chắc chắn có vai trò rất quan trọng đối với việc áp dụng POD sau này. Tuy nhiên, dường như không có quy tắc tiên nghiệm chung nào có sẵn. Thay vào đó, sự lựa chọn ℓ dựa trên các cân nhắc kinh nghiệm kết hợp với việc quan sát tỷ lệ

$$\mathcal{E}(\ell) = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i}$$

Ta cũng thường gọi phương pháp POD bằng những cái tên khác như Principal Component Analysis (PCA) và Karhunen-Loève Decomposition.

Nhận xét 1.12. Với giả thiết W là ma trận đối xứng xác định dương, W luôn có phân tích Cholesky $W = LL^T$, trong đó L là ma trận vuông, tam giác dưới. Chính vì vậy ta có thể thay ma trận $\bar{Y}$ trong Định lý 1.10 bằng $\bar{Y} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} L^T Y$. Khi đó ta có phân tích POD của $\bar{Y} = \bar{U}\Sigma\bar{V}^T$, trong đó $\bar{U} = [\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}, \bar{V} = [\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận trực chuẩn và ma trận đường chéo Σ. Khi đó vector thứ i trong cơ sở POD u_i được xác định bởi nghiệm của bài toán tối tiểu (P_W^ℓ) có thể được xác định bởi

$$u_i = (L^T)^{-1}\bar{u}_i \text{ hoặc } u_i = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Y \bar{v}_i.$$

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG PHÁP POD-GALERKIN CHO PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HÓA TUYẾN TÍNH

Cho V và H là các không gian Hilbert thực, tách được. Giả sử rằng V trù mật trong H với phép nhúng liên tục, bên cạnh đó ta đồng nhất H và không gian liên hợp của nó H^*, từ đó ta có

$$V \hookrightarrow H = H^* \hookrightarrow V^*,$$

với mỗi phép nhúng là trù mật. Đặc biệt, tồn tại hằng số $\alpha > 0$ sao cho

$$\|\varphi\|_H^2 \leq \alpha \|\varphi\|_V^2 \text{ với mọi } \varphi \in V. \tag{2.1}$$

Cho $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ là song tuyến tính đối xứng, liên tục và V-elliptic, có nghĩa là tồn tại hằng số $\beta > 0$ và $\kappa > 0$ sao cho

$$|a(\varphi, \psi)| \leq \beta \|\varphi\|_V \|\psi\|_V \text{ với mọi } \varphi, \psi \in V \tag{2.2}$$

và

$$a(\varphi, \varphi) \geq \kappa \|\varphi\|_V^2 \text{ với mọi } \varphi \in V. \tag{2.3}$$

Giả sử rằng $\phi \in H$ và $f \in C([0, T]; H)$. Khi đó bài toán

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\langle u(t), \varphi\rangle_H + a(u(t), \varphi) = \langle f(t), \varphi\rangle_H, \forall \varphi \in V, t \in (0, T) \\ \text{và} \quad &\langle u(0), \chi\rangle_H = \langle \phi, \chi\rangle_H \text{ với mọi } \chi \in H \end{aligned} \tag{2.4}$$

có duy nhất nghiệm $u \in W(0,T;V)$. Hơn nữa, nếu $\phi \in V$, thì $u \in C([0,T];V)$ và $u_t \in C([0,T];H)$, [23].

2.1 Xây dựng cơ sở POD

Xuyên suốt phần này ta giả thiết $u \in C([0,T];V)$ là nghiệm của (2.4) với $\phi \in V$. Lấy $m \in \mathbb{N}$, xét bước lưới thời gian $\Delta t = \frac{T}{m}$ và lưới $\{t_k\}$ của $[0,T]$ với $t_k = k\Delta t, k = 0, \ldots, m$. Ta đặt $n = 2m+1$ và chọn

$$y_j = u\left(t_{j-1}\right), j = 1, \ldots, m+1$$

và

$$y_j = \bar{\partial} u\left(t_{j-m-1}\right), j = m+2, \ldots, 2m+1,$$

với

$$\bar{\partial} u\left(t_k\right) = \frac{u\left(t_k\right) - u\left(t_{k-1}\right)}{\Delta t}.$$

Dựa vào giả thiết $u \in C([0,T];V)$, ta xây dựng các snapshot $\{y_j\}_{j=1}^n$ thuộc vào không gian V. Khi đó ta có thể xây dựng hai cơ sở POD khác nhau dựa trên các snapshot đó bằng phương pháp POD rời rạc

$$\min_{\{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \|y_j - \sum_{i=1}^{\ell} \left\langle y_j, \psi_i \right\rangle_X \psi_i\|_X^2 \qquad (P_{\min}^{\ell_*})$$

$$\text{thỏa mãn } \left\langle \psi_i, \psi_j \right\rangle_X = \delta_{ij} \quad \text{với } 1 \le i \le \ell, 1 \le j \le i$$

ứng với hai trường hợp $X = V$ và $X = H$. Trước hết ta xét $X = V$ và kí hiệu cơ sở POD tương ứng là $\{\tilde{\psi}_k\}_{k=1}^d$. Theo Hệ quả 1.3, với bất kì $\ell < d$, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2m+1} \sum_{j=0}^{m} \|u\left(t_j\right) - \sum_{k=1}^{\ell} \langle u\left(t_j\right), \tilde{\psi}_k \rangle_V \tilde{\psi}_k\|_V^2 \\
&+ \frac{1}{2m+1} \sum_{j=1}^{m} \|\bar{\partial} u\left(t_j\right) - \sum_{k=1}^{\ell} \langle \bar{\partial} u\left(t_j\right), \tilde{\psi}_k \rangle_V \tilde{\psi}_k\|_V^2 = \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

trong đó $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^n$ là các giá trị riêng của ma trận tương quan K với các phần tử $K_{ij} = \frac{1}{2m+1} \left\langle y_j, y_i \right\rangle_V$. Không gian sinh bởi ℓ vector đầu tiên của cơ sở POD được kí hiệu $\tilde{V}^{\ell}$.

Nhận xét 2.1. So với phương pháp POD trình bày ở Chương 1, cách xây dựng cơ sở POD cho phương trình tiến hóa parabolic có một chút khác biệt khi các đạo hàm rời rạc $\bar{\partial} u\left(t_k\right)$ được bao gồm trong trong không gian các snapshot $\{u\left(t_{j-1}\right)\}_{j=1}^{m+1}$. Việc các snapshot chứa hay không chứa các đạo hàm rời rạc $\bar{\partial} u\left(t_k\right)$ không ảnh hưởng đến cách xây dựng cơ sở POD, tuy nhiên sẽ ảnh hưởng ít nhiều đến sai số khi ta xây dựng và giải quyết mô hình giảm số chiều (ta có thể thấy rõ điều đó thông qua hai phương trình Burgers 2D và truyền nhiệt trình bày ở phần 4.3). $\left\{\bar{\partial} u\left(t_k\right)\right\}_{j=1}^{m}$ được bao gồm trong tập các snapshot hay không sẽ có tác động trong quá trình đánh giá sai số.

Nếu $\left\{\bar{\partial} u\left(t_k\right)\right\}_{j=1}^{m}$ được bao gồm trong các snapshot, vì

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2m+1}\sum_{j=0}^{m}\|u\left(t_j\right)-\sum_{k=1}^{\ell}\langle u\left(t_j\right),\tilde{\psi}_k\rangle_V\tilde{\psi}_k\|_V^2\\&+\frac{1}{2m+1}\sum_{j=1}^{m}\|\bar{\partial} u\left(t_j\right)-\sum_{k=1}^{\ell}\langle\bar{\partial} u\left(t_j\right),\tilde{\psi}_k\rangle_V\tilde{\psi}_k\|_V^2=\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k\end{aligned}$$

nên

$$\frac{1}{2m+1}\sum_{j=1}^{m}\|\bar{\partial} u\left(t_j\right)-\sum_{k=1}^{\ell}\langle\bar{\partial} u\left(t_j\right),\tilde{\psi}_k\rangle_V\tilde{\psi}_k\|_V^2\leq\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k.$$

Lại có $m\geq 1$ nên $1/(2m+1)\geq 1/(3m)$, suy ra

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\|\bar{\partial} u\left(t_j\right)-\sum_{k=1}^{\ell}\langle\bar{\partial} u\left(t_j\right),\tilde{\psi}_k\rangle_V\tilde{\psi}_k\|_V^2\leq 3\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k \tag{2.6}$$

Mặt khác, nếu chỉ có các snapshot $y_j=u\left(t_{j-1}\right)$ với $j=1,\ldots,m+1$, ta có kết quả thay thế cho (2.5) là

$$\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\|u\left(t_j\right)-\sum_{k=1}^{\ell}\langle u\left(t_j\right),\tilde{\psi}_k\rangle_V\tilde{\psi}_k\|_V^2=\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k$$

và (2.6) sẽ thay bởi ước lượng

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\|\bar{\partial} u\left(t_j\right)-\sum_{k=1}^{\ell}\langle\bar{\partial} u\left(t_j\right),\tilde{\psi}_k\rangle_V\tilde{\psi}_k\|_V^2$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\|\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{\Delta t}-\sum_{k=1}^{\ell}\langle\frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{\Delta t},\tilde{\psi}_k\rangle_V\tilde{\psi}_k\|_V^2$$
$$\leq \frac{8}{(m+1)(\Delta t)^2}\sum_{j=0}^{m}\left(\|u(t_j)-\sum_{k=1}^{\ell}\langle u(t_j),\tilde{\psi}_k\rangle_V\tilde{\psi}_k\|_V^2\right)=\frac{8}{(\Delta t)^2}\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k.$$

Đại lượng $(\Delta t)^{-2}$ ở vế bên phải sẽ không có lợi trong khi ước lượng sai số.

Cách xây dựng cơ sở POD thứ hai được thực hiện bằng cách cho $X = H$ và kí hiệu cơ sở POD tương ứng là $\{\hat{\psi}_k\}_{k=1}^d$. Khi đó (2.5) được thay thế bởi

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2m+1}\sum_{j=0}^{m}\|u(t_j)-\sum_{k=1}^{\ell}\langle u(t_j),\hat{\psi}_k\rangle_H\hat{\psi}_k\|_H^2\\&+\frac{1}{2m+1}\sum_{j=1}^{m}\|\bar{\partial}u(t_j)-\sum_{k=1}^{\ell}\langle\bar{\partial}u(t_j\rangle,\hat{\psi}_k\rangle_H\hat{\psi}_k\|_H^2=\sum_{k=\ell+1}^{d}\hat{\lambda}_k\end{aligned}\tag{2.7}$$

với mọi $\ell \leq d$. Ở đây, $\hat{\lambda}_k, k = 1, \ldots, d$, là các giá trị riêng của ma trận tương quan $\bar{K}$ với các phần tử $\bar{K}_{ij} = \frac{1}{2m+1}\langle y_j, y_i\rangle_H$. Kí hiệu $\hat{V}^\ell$ là không gian con sinh bởi $\hat{\psi}_1, \ldots, \hat{\psi}_\ell$.

Trong quá trình làm việc, ta kí hiệu $\{\psi_k\}_{k=1}^{\ell}$ và $V^\ell = \operatorname{span}\{\psi_1, \ldots, \psi_\ell\}$ nếu ta không phân biệt rạch ròi giữa hai cơ sở POD nói trên. Lưu ý rằng

$$V^d = \mathcal{V} = \operatorname{span}\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}.$$

Để cho thuận tiện ta kí hiệu ma trận khối lượng

$$M = ((M_{ij})) \in \mathbb{R}^{d\times d} \text{ với } M_{ij} = \langle\psi_j, \psi_i\rangle_H$$

và ma trận độ cứng

$$S = ((S_{ij})) \in \mathbb{R}^{d\times d} \text{ với } S_{ij} = \langle\psi_j, \psi_i\rangle_V.$$

Ma trận khối lượng M ứng với cơ sở POD trong H cũng như ma trận độ cứng S ứng với cơ sở POD trong V sẽ trở thành ma trận đơn vị. Ngoài ra, ta nhận xét rằng $\{\psi_1, \ldots, \psi_\ell\}$ là hệ độc lập tuyến tính nên M, S là hai ma trận vuông đối xứng, hạng đầy đủ.

Bổ đề 2.2. *Với mọi $u \in \mathcal{V}$ ta có*

$$\|u\|_H \le \sqrt{\|M\|_2 \left\|S^{-1}\right\|_2}\|u\|_V \text{ và } \|u\|_V \le \sqrt{\|S\|_2 \left\|M^{-1}\right\|_2}\|u\|_H$$

ở đây $\|\cdot\|_2$ được định nghĩa $\|B\|_2 = \sup\limits_{\|x\|_{\mathbb{R}^d}=1} \|Bx\|_{\mathbb{R}^d}$ với mọi ma trận vuông B cấp d và $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ là chuẩn Euclid trong $\mathbb{R}^d$.

Chứng minh. Ta giả sử $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_d > 0$ là các giá trị riêng của S. Vì S là ma trận đối xứng xác định dương nên $\|S\|_2 = \lambda_1$. Tương tự, giả sử $\mu_1 \ge \mu_2 \ge .. \ge \mu_d > 0$ là các giá trị riêng của M. Khi đó $\|M\|_2 = \mu_1$. Lấy $u \in \mathcal{V}$ bất kì, khi đó ta có biểu diễn

$$u = \sum_{k=1}^{d} \langle u, \psi_k \rangle_X \psi_k.$$

Đặt $x = \left(\langle u, \psi_1 \rangle_X, \ldots, \langle u, \psi_d \rangle_X\right)^T \in \mathbb{R}^d$ ta có

$$\|x\|_{\mathbb{R}^d} \le \|S^{-1}\|_2 x^T S x.$$

Thật vậy, với $x \neq 0$, ta có thương Rayleigh $\dfrac{x^T S x}{x^T x}$ có giá trị nhỏ nhất bằng λ_d. Mặt khác, chuẩn của $\|S^{-1}\|_2$ chính bằng $\dfrac{1}{\lambda_d}$. Vậy $\|x\|_{\mathbb{R}^d} \le \|S^{-1}\|_2 x^T S x$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\|u\|_H^2 = x^T M x &\le \|M\|_2 x^T x \\ &\le \left\|S^{-1}\right\|_2 \|M\|_2 x^T S x = \left\|S^{-1}\right\|_2 \|M\|_2 \|u\|_V^2.\end{aligned}$$

Đẳng thức thứ hai chứng minh tương tự. □

2.2 Phương pháp Euler-POD-Galerkin lùi

Để phát biểu về phương pháp Galerkin Euler-POD lùi cho (2.4), ta giới thiệu phép chiếu Ritz $P^\ell : V \to V^\ell$ được xác định bởi qua biểu thức

$$a\left(P^\ell u, \psi\right) = a(u, \psi) \text{ với mọi } \psi \in V^\ell,$$

trong đó $u \in V$. Khi đó từ (2.2) và (2.3) là toán tử tuyến tính P^ℓ xác định và bị chặn:

$$\left\|P^\ell u\right\|_V \le \frac{\beta}{\kappa}\|u\|_V \text{ với mọi } u \in V.$$

Bổ đề 2.3. *Với mọi $\ell \in \{1, \ldots, d\}$ toán tử chiếu P^ℓ thỏa mãn*

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left\|u\left(t_k\right)-P^\ell u\left(t_k\right)\right\|_V^2 \leq \frac{3\beta^2}{\kappa^2}\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k \tag{2.8}$$

và

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left\|u\left(t_k\right)-P^\ell u\left(t_k\right)\right\|_V^2 \leq \frac{3\beta^2\|S\|_2}{\kappa^2}\sum_{k=\ell+1}^{d}\hat{\lambda}_k, \tag{2.9}$$

trong đó $\tilde{\lambda}_k$ và $\hat{\lambda}_k$ lần lượt là các giá trị riêng của ma trận tương quan K với các phần tử $\frac{1}{2m+1}\left\langle y_j, y_i\right\rangle_V$ và $\frac{1}{2m+1}\left\langle y_j, y_i\right\rangle_H$.

Chứng minh. Với bất kì $u \in \mathcal{V}$, từ (2.2) và (2.3), ta có

$$\begin{aligned}\kappa\left\|u-P^\ell u\right\|_V^2 &\leq a\left(u-P^\ell u, u-P^\ell u\right)\\ &= a\left(u-P^\ell u, u-\psi\right) \quad \text{với mọi } \psi \in V^\ell.\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\left\|u-P^\ell u\right\|_V \leq \frac{\beta}{\kappa}\|u-\psi\|_V \text{ với mọi } \psi \in V^\ell. \tag{2.10}$$

Từ (2.10), (2.7) và Bổ đề 2.2, ta đạt được

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left\|u\left(t_k\right)-P^\ell u\left(t_k\right)\right\|_V^2 &\leq \frac{\beta^2}{\kappa^2 m}\sum_{k=1}^{m}\left\|u\left(t_k\right)-\sum_{i=1}^{\ell}\langle u\left(t_k\right), \hat{\psi}_i\rangle_H\hat{\psi}_i\right\|_V^2\\ \leq \frac{3\beta^2\|S\|_2}{\kappa^2(2m+1)}\sum_{k=1}^{m}\left\|u\left(t_k\right)-\sum_{i=1}^{\ell}\langle u\left(t_k\right), \hat{\psi}_i\rangle_H\hat{\psi}_i\right\|_H^2 &\leq \frac{3\beta^2\|S\|_2}{\kappa^2}\sum_{k=\ell+1}^{d}\hat{\lambda}_k,\end{aligned}$$

ta được ước lượng (2.9). Tương tự ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left\|u\left(t_k\right)-P^\ell u\left(t_k\right)\right\|_V^2 &\leq \frac{\beta^2}{\kappa^2 m}\sum_{k=1}^{m}\left\|u\left(t_k\right)-\sum_{i=1}^{\ell}\langle u\left(t_k\right), \hat{\psi}_i\rangle_H\hat{\psi}_i\right\|_V^2\\ \leq \frac{3\beta^2}{\kappa^2(2m+1)}\sum_{k=1}^{m}\left\|u\left(t_k\right)-\sum_{i=1}^{\ell}\langle u\left(t_k\right), \hat{\psi}_i\rangle_H\hat{\psi}_i\right\|_V^2 &\leq \frac{3\beta^2}{\kappa^2}\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k.\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. $\square$

Hệ quả 2.4. *Ta có ước lượng cho đạo hàm rời rạc*

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left\|\bar{\partial}u\left(t_k\right)-P^\ell\bar{\partial}u\left(t_k\right)\right\|_V^2\leq\frac{3\beta^2}{\kappa^2}\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k \tag{2.11}$$

và

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left\|\bar{\partial}u\left(t_k\right)-P^\ell\bar{\partial}u\left(t_k\right)\right\|_V^2\leq\frac{3\beta^2\|S\|_2}{\kappa^2}\sum_{k=\ell+1}^{d}\hat{\lambda}_k. \tag{2.12}$$

Chứng minh. Chứng minh tương tự Bổ đề 2.3. □

Bây giờ ta sẽ trình bày phương pháp Galerkin Euler-POD lùi cho bài toán (2.4): xác định một dãy $\{U_k\}_{k=0}^m$ trong V^ℓ thỏa mãn

$$\begin{gathered}\langle U_0,\psi\rangle_H=\langle\phi,\psi\rangle_H\\ \text{và}\\ \left\langle\bar{\partial}U_k,\psi\right\rangle_H+a\left(U_k,\psi\right)=\left\langle f\left(t_k\right),\psi\right\rangle_H\end{gathered} \tag{2.13}$$

với mọi $\psi\in V^\ell$ và mọi $k=1,\dots,m$. Ở đây, đạo hàm rời rạc $\bar{\partial}U_k$ được xác định bằng biểu thức

$$\bar{\partial}U_k=\frac{U_k-U_{k-1}}{\Delta t}.$$

Định lý 2.5. *Tồn tại duy nhất nghiệm $\{U_k\}_{k=0}^m$ trong V^ℓ của bài toán (2.13). Hơn nữa,*

$$\|U_k\|_H\leq\left(\frac{1}{1+\gamma\frac{T}{m}}\right)^k\|\phi\|_H+\frac{1-e^{-\frac{\gamma kT}{m}}}{\gamma}\|f\|_{C([0,T];H)}$$

với mọi $k=0,\dots,m$ và $\gamma=\kappa/\alpha$.

Chứng minh. Biến đổi (2.13) ta được

$$\langle U_k,\psi\rangle_H+\Delta ta\left(U_k,\psi\right)=\left\langle\Delta tf\left(t_k\right)+U_{k-1},\psi\right\rangle_H. \tag{2.14}$$

Cũng từ điều kiện ban đầu của (2.13), U_0 được xác định duy nhất

$$U_0=\sum_{i=1}^{\ell}\left\langle\psi_i,\phi\right\rangle\psi_i.$$

Ta chứng minh (2.13) có duy nhất nghiệm bằng phương pháp quy nạp. Giả sử U_{k-1}, $k \geq 1$ được xác định duy nhất. Đặt

$$A(u, w) = \langle u, w \rangle + \Delta t a(u, w).$$

Vì a đối xứng, liên tục và V-elliptic nên A cũng đối xứng, liên tục và V^ℓ-elliptic. Theo Định lý Lax-Mingram, tồn tại duy nhất $U_k \in V^\ell$ thỏa mãn (2.14). Vậy (2.13) có duy nhất nghiệm $\{U_k\}_{k=0}^m$.

Lấy hàm thử $\psi = U_k$ trong (2.13), kết hợp (2.1) và (2.3) ta được

$$(1 + \gamma\Delta t) \|U_k\|_H \leq \|U_{k-1}\|_H + \Delta t \|f(t_k)\|_H .$$

Cộng các bất đẳng thức theo k, dẫn đến

$$\|U_k\|_H \leq \left(\frac{1}{1+\gamma\Delta t}\right)^k \|U_0\|_H + \Delta t \|f\|_{C([0,T];H)} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{1+\gamma\Delta t}\right)^j .$$

Để ý rằng $(1 + \gamma\Delta t)^k \leq e^{\gamma k \Delta t}$. Điều đó suy ra

$$\Delta t \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{1+\gamma\Delta t}\right)^j = \Delta t \frac{1-\zeta^k}{\zeta^{-1}-1} = \frac{1-\zeta^k}{\gamma} \leq \frac{1-e^{-\gamma k\Delta t}}{\gamma}$$

trong đó đặt $\zeta = 1/(1+ \gamma\Delta t)$. Ngoài ra, chọn $\psi = U_0$ trong (2.13), ta có

$$\|U_0\|_H^2 = \langle U_0, U_0\rangle_H = \langle \phi, U_0\rangle_H \leq \|\phi\|_H \|U_0\|_H.$$

Vậy nên

$$\|U_0\|_H \leq \|\phi\|_H. \tag{2.15}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Tiếp theo, mục đích của chúng ta là ước lượng thành phần sai số

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|U_k - u(t_k)\|_H^2 ,$$

trong đó $u(t_k)$ là nghiệm của (2.4) tại thời điểm cụ thể $t = t_k$ với $k = 1, \ldots, m$. Xuyên suốt quá trình đánh giá, ta sử dụng phân tách

$$U_k - u(t_k) = U_k - P^\ell u(t_k) + P^\ell u(t_k) - u(t_k) = \vartheta_k + \varrho_k$$

với $\vartheta_k = U_k - P^\ell u(t_k)$ và $\varrho_k = P^\ell u(t_k) - u(t_k)$. Điều đó dẫn đến

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|U_k - u(t_k)\|_H^2 \le \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\vartheta_k\|_H^2 + \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\varrho_k\|_H^2. \tag{2.16}$$

Từ (2.1) và Bổ đề 2.3, ta có

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\varrho_k\|_H^2 \le \frac{3\alpha\beta^2}{\kappa^2}\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k \tag{2.17}$$

và

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\varrho_k\|_H^2 \le \frac{3\alpha\beta^2\|S\|_2}{\kappa^2}\sum_{k=\ell+1}^{d}\hat{\lambda}_k, \tag{2.18}$$

với $\tilde{\lambda}_k$ và $\hat{\lambda}_k$ lần lượt là kí hiệu của các giá trị riêng của mà trận tương quan các phần tử $K_{ij} = \frac{1}{2m+1}\langle y_j, y_i\rangle_V$ và $K_{ij} = \frac{1}{2m+1}\langle y_j, y_i\rangle_H$.
Kí hiệu $\bar{\partial}\vartheta_k = (\vartheta_k - \vartheta_{k-1})/\Delta t, k = 1, \ldots, m$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\left\langle\bar{\partial}\vartheta_k, \psi\right\rangle_H + a(\vartheta_k, \psi) = \left\langle\frac{\vartheta_k - \vartheta_{k-1}}{\Delta t}, \psi\right\rangle_H + a(\vartheta_k, \psi)\\
&= \left\langle\bar{\partial}U_k - \bar{\partial}P^\ell u(t_k), \psi\right\rangle_H + a\left(U_k - P^\ell u(t_k), \psi\right)\\
&= \left\langle\bar{\partial}U_k, \psi\right\rangle_H + a(U_k, \psi) - \left\langle\bar{\partial}P^\ell u(t_k), \psi\right\rangle_H - a\left(P^\ell u(t_k), \psi\right)\\
&= \langle f(t_k\rangle, \psi)_H - \left\langle\bar{\partial}P^\ell u(t_k), \psi\right\rangle_H - a(u(t_k), \psi) = \langle v_k, \psi\rangle_H,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

trong đó

$$v_k = u_t(t_k) - \bar{\partial}P^\ell u(t_k) = u_t(t_k) - \bar{\partial}u(t_k) + \bar{\partial}u(t_k) - \bar{\partial}P^\ell u(t_k).$$

Đặt $w_k = u_t(t_k) - \bar{\partial}u(t_k)$ và $z_k = \bar{\partial}u(t_k) - P^\ell\bar{\partial}u(t_k)$. Suy ra $v_k = z_k + w_k$.
Chọn $\psi = \vartheta_k \in V^\ell$ trong (2.19) ta đạt được

$$\|\vartheta_k\|_H^2 - \langle\vartheta_k, \vartheta_{k-1}\rangle_H + \Delta t a(\vartheta_k, \vartheta_k) \le \Delta t\|v_k\|_H\|\vartheta_k\|_H$$

Kết hợp (2.1) và (2.3) ta có đánh giá

$$\|\vartheta_k\|_H \le \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{\alpha}\Delta t}\left(\|\vartheta_{k-1}\|_H + \Delta t\|v_k\|_H\right).$$

Cộng vế theo vế các biểu thức theo k dẫn đến

$$\|\vartheta_k\|_H \le \left(\frac{1}{1 + \frac{\kappa}{\alpha}\Delta t}\right)^k\|\vartheta_0\|_H + \Delta t\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{1 + \frac{\kappa}{\alpha}\Delta t}\right)^{k-j+1}\|v_j\|_H.$$

Đặt $\gamma = \dfrac{\kappa}{\alpha} > 0$, ta được

$$\|\vartheta_k\|_H^2 \leq 2\left(\frac{1}{1+\gamma\Delta t}\right)^{2k} \|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{2T^2}{m^2}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{1+\gamma\Delta t}\right)^{k-j+1} \|v_j\|_H\right)^2.$$

Để ngắn gọn, ta kí hiệu $\zeta = \frac{1}{1+\gamma\Delta t}$. Do

$$\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{2m} = (1+\gamma\Delta t)^{2m} = \left(1 + \frac{2\gamma T}{2m}\right)^{2m} \leq e^{2\gamma T}$$

nên ta có $1 - \zeta^{2m} \leq 1 - e^{-2\gamma T}$ và

$$\frac{2}{m}\frac{\zeta^2 - \zeta^{2m+2}}{1-\zeta^2} = \frac{2}{m}\frac{1-\zeta^{2m}}{\zeta^{-2}-1} \leq \frac{2}{m}\frac{1-\zeta^{2m}}{2\gamma\Delta t} \leq \frac{1-e^{-2\gamma T}}{\gamma T}.$$

Kết hợp với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\vartheta_k\|_H^2 &\leq \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\zeta^{2k}\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{2T^2}{m^3}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}\zeta^{k-j+1}\|v_j\|_H\right)^2 \\
&\leq \frac{2}{m}\frac{\zeta^2-\zeta^{2m+2}}{1-\zeta^2}\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{2T^2}{m^3}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}\zeta^{2(k-j+1)}\sum_{j=1}^{k}\|v_j\|_H^2\right) \\
&= \frac{1-e^{-2\gamma T}}{\gamma T}\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{2T^2}{m^3}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}\zeta^{2j}\sum_{j=1}^{k}\|v_j\|_H^2\right) \\
&\leq \frac{1-e^{-2\gamma T}}{\gamma T}\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{T^2}{m}\sum_{j=1}^{m}\|v_j\|_H^2\sum_{k=1}^{m}\frac{2}{m^2}\frac{\zeta^2-\zeta^{2k+2}}{1-\zeta^2} \\
&\leq \frac{1-e^{-2\gamma T}}{\gamma T}\left(\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{T^2}{m}\sum_{k=1}^{m}\|v_k\|_H^2\right).
\end{aligned}$$

Giả sử rằng $u_{tt} \in L^2(0,T;H)$. Ta đánh giá đại lượng $\|v_k\|_H^2 = \|w_k + z_k\|_H^2$. Từ định nghĩa của w_k, ta có

$$\begin{aligned}
w_k &= u_t(t_k) - \frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{\Delta t}\left(\Delta t u_t(t_k) - (u(t_k) - u(t_{k-1}))\right) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(s - t_{k-1})\, u_{tt}(s)ds.
\end{aligned}$$

Dẫn đến

$$\sum_{k=1}^{m} \|w_k\|_H^2 \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-1})^2 \, dt \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_{tt}(t)\|_H^2 dt$$
$$= \frac{\Delta t}{3} \int_0^T \|u_{tt}(t)\|_H^2 \, dt.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy $\|v_k\|_H^2 \le 2\|w_k\|_H^2 + 2\|z_k\|_H^2$ và $\Delta t = \dfrac{T}{m}$ suy ra

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|\vartheta_k\|_H^2 \le C\Bigg(\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{2T^3}{3m^2} \int_0^T \|u_{tt}(t)\|_H^2 \, dt + \frac{2T^2}{m} \sum_{k=1}^{m} \|z_k\|_H^2 \Bigg),$$

với $C = \frac{1-e^{-2\gamma T}}{\gamma T}$. Nếu ta chọn cơ sở POD trong V thì theo (2.11)

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|z_k\|_H^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left\|\bar{\partial} u(t_k) - P^\ell \bar{\partial} u(t_k)\right\|_H^2 \le \frac{3\alpha\beta^2}{\kappa^2} \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k. \quad (2.20)$$

Ngược lại, nếu cơ sở POD được chọn trong H ta có

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|z_k\|_H^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left\|\bar{\partial} u(t_k) - P^\ell \bar{\partial}_u(t_k)\right\|_H^2 \le \frac{3\alpha\beta^2 \|S\|_2}{\kappa^2} \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k. \quad (2.21)$$

Cộng các vế lại ta được hai ước lượng

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|\vartheta_k\|_H^2 \le C\Bigg(\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{2(\Delta t)^2}{3} \|u_{tt}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \frac{6\alpha\beta^2 T^2}{\kappa^2} \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k \Bigg) \quad (2.22)$$

và

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|\vartheta_k\|_H^2 \le C\Bigg(\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{2(\Delta t)^2}{3} \|u_{tt}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \frac{6\alpha\beta^2 T^2 \|S\|_2}{\kappa^2} \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k \Bigg) \quad (2.23)$$

ứng với lần lượt hai cơ sở POD $\{\tilde{\psi}_k\}_{k=1}^d$ và $\{\hat{\psi}_k\}_{k=1}^d$. Từ (2.17), (2.18) và (2.22), (2.23) ta có kết quả sau.

Định lý 2.6. *Cho u và $\{U_k\}_{k=0}^m$ lần lượt là nghiệm của (2.4) và (2.13), giả sử rằng $u_{tt} \in L^2(0,T;H)$. Khi đó tồn tại hằng số $C > 0$ phụ thuộc vào $u, \alpha, \beta, \kappa, T$, nhưng độc lập với ℓ và m, sao cho*

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \|u(t_k) - U_k\|_H^2 \le C\Bigg(\left\|\phi - P^\ell \phi\right\|_H^2 + \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k + (\Delta t)^2\Bigg)$$

và

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \|u(t_k) - U_k\|_H^2 \le C\Bigg(\left\|\phi - P^\ell \phi\right\|_H^2 + \|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k + (\Delta t)^2\Bigg)$$

trong đó S là ma trận độ cứng.

Chứng minh. Từ (2.4) ta có

$$\langle u(t_0) - \phi, \chi\rangle_H = 0, \text{ với mọi } \chi \in H.$$

Nên $\langle u(t_0) - \phi, u(t_0) - \phi\rangle_H = 0$. Suy ra $u(t_0) = \phi$. Ta lại có

$$2\langle U_0, P^\ell u(t_0)\rangle_H = \|U_0\|_H^2 + \|P^\ell u(t_0)\|_H^2 - \|U_0 - P^\ell u(t_0)\|_H^2$$

và

$$2\langle u(t_0), P^\ell u(t_0)\rangle_H = \|u(t_0)\|_H^2 + \|P^\ell u(t_0)\|_H^2 - \|u(t_0) - P^\ell u(t_0)\|_H^2.$$

Hơn nữa, theo (2.13), ta có $\langle U_0, \chi\rangle_H = \langle u(t_0), \chi\rangle_H, \forall \chi \in V^\ell$. Do đó

$$\langle U_0, P^\ell u(t_0)\rangle_H = \langle u(t_0), P^\ell u(t_0)\rangle_H.$$

Điều này dẫn đến

$$\|U_0\|_H^2 - \|U_0 - P^\ell u(t_0)\|_H^2 = \|u(t_0)\|_H^2 - \|u(t_0) - P^\ell u(t_0)\|_H^2.$$

Từ (2.15), ta có $\|U_0\|_H \le \|u(t_0)\|_H$, kéo theo

$$\|U_0 - P^\ell u(t_0)\|_H \le \|u(t_0) - P^\ell u(t_0)\|_H.$$

Vậy nên

$$\|\vartheta_0\|_H \le \left\|\phi - P^\ell \phi\right\|_H. \tag{2.24}$$

Nếu cơ sở POD trong V, kết hợp (2.16), (2.17) và (2.22) ta được

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|u(t_k)-U_k\|_H^2 \le c(T)\Big(\left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H^2 + \frac{2(\Delta t)^2}{3}\|u_{tt}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \frac{6\alpha\beta}{\kappa}\left(1+T^2\right)\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k\Big),$$

với $c(T)=\frac{\left(1-e^{-2\gamma T}\right)}{\gamma T}$. Đặt

$$C = \max\left\{c(T), \frac{2}{3}c(T)\|u_{tt}\|_{L^2(0,T;H)}^2, \frac{6\alpha\beta c(T)}{\kappa}\left(1+T^2\right)\right\}$$

chỉ phụ thuộc vào α, β, κ và T. Khi đó

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|u(t_k)-U_k\|_H^2 \le C\Bigg(\left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H^2 + (\Delta t)^2 + \sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k\Bigg). \tag{2.25}$$

Nếu cơ sở POD được lấy trong H, từ (2.16), (2.18) và (2.23) ta cũng được kết quả tương tự như (2.25), ta chỉ cần thay $\tilde{\lambda}_k$ bằng $\|S\|_2\hat{\lambda}_k$. □

Nhận xét 2.7. Từ (2.25) cho thấy ảnh hưởng của $\left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H$ trong ước lượng giảm khi $T\to\infty$. Thành phần đứng trước $\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k$ sẽ tăng nếu T tăng. Tuy nhiên, ta để ý rằng các giá trị $\tilde{\lambda}_k$ và $\hat{\lambda}_k$ cũng phụ thuộc vào T.

Nhận xét 2.8. Với giả thiết ban đầu $\phi\in\mathcal{V}$, vì $\phi = u(t_0)$ là một trong những snapshot, nên ta có thể ước lượng $\|\phi - P^\ell\phi\|_H$. Từ (2.5), (2.7) và (2.10) ta có được

$$\left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H^2 \le \frac{\alpha\beta^2}{\kappa^2}\left\|\phi - \sum_{k=1}^{\ell}(\phi,\psi_k)_X\psi_k\right\|_V^2 \le (2m+1)\frac{\alpha\beta^2}{\kappa^2}\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k$$

cũng như

$$\left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H^2 \le \frac{\alpha\beta^2}{\kappa^2}\left\|\phi - \sum_{k=1}^{\ell}(\phi,\psi_k)_X\psi_k\right\|_V^2 \le (2m+1)\|S\|_2\frac{\alpha\beta^2}{\kappa^2}\sum_{k=\ell+1}^{d}\hat{\lambda}_k.$$

Vì vậy, nếu chọn $\ell = d$, từ (2.25) ta được

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|u(t_k)-U_k\|_H^2 \le \frac{2}{3}c(T)(\Delta t)^2\|u_{tt}\|_{L^2(0,T;H)}^2 \text{ với } c(T)=\frac{\left(1-e^{-2\gamma T}\right)}{\gamma T}.$$

2.3 Lược đồ Crank-Nicolson-POD-Galerkin

Lược đồ Galerkin Crank-Nicolson-POD cho bài toán (2.4) được phát biểu qua bài toán: Tìm $\{U_k\}_{k=0}^m$ trong V^ℓ thỏa mãn

$$\begin{aligned} &\langle U_0, \psi\rangle_H = \langle \phi, \psi\rangle_H \\ \text{và} \\ &\left\langle \bar{\partial} U_k, \psi\right\rangle_H + \frac{1}{2} a\left(U_k + U_{k-1}, \psi\right) = \left\langle f\left(t_k - \frac{\Delta t}{2}\right), \psi\right\rangle_H \end{aligned} \tag{2.26}$$

với mọi $\psi \in V^\ell$ và $k = 1, \ldots, m$.

Định lý 2.9. *Tồn tại duy nhất nghiệm $\{U_k\}_{k=0}^m$ trong V^ℓ của bài toán (2.26). Hơn nữa, ta có đánh giá*

$$\|U_k\|_H \le \|\phi\|_H + T\|f\|_{C([0,T];H)} \quad \text{với } k = 0, \ldots, m.$$

Chứng minh. Ta chứng minh (2.26) có nghiệm $\{U_k\}_{k=0}^m$ tồn tại duy nhất bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy, ta thấy U_0 được xác định duy nhất

$$U_0 = \sum_{k=1}^{\ell} \langle \phi, \psi_k\rangle\, \psi_k.$$

Giả sử U_{k-1} được xác định duy nhất với $k \ge 1$. Với bất kì $\psi \in V^\ell$, từ (2.26) ta có

$$\langle U_k, \psi\rangle_H + \frac{\Delta t}{2} a\left(U_k, \psi\right) = \left\langle U_{k-1} + f\left(t_k - \frac{\Delta t}{2}\right), \psi\right\rangle_H - \frac{\Delta t}{2} a\left(U_{k-1}, \psi\right). \tag{2.27}$$

Đặt

$$A(u,v) = (u,v)_H + \frac{\Delta t}{2} a\left(u, v\right),\ u, v \in V^\ell.$$

Bởi vì dạng song tuyến tính a đối xứng, liên tục, V-elliptic nên A cũng là dạng song tuyến tính, đối xứng, liên tục và V^ℓ-elliptic. Theo Định lý Lax-Mingram, tồn tại duy nhất nghiệm U_k của (2.27). Do đó (2.26) có nghiệm duy nhất $\{U_k\}_{k=0}^m$. Thay $\psi = U_k + U_{k-1}$ vào (2.26), ta được

$$\|U_k\|_H^2 - \|U_{k-1}\|_H^2 \le \Delta t \left\| f\left(t_k - \frac{\Delta t}{2}\right)\right\|_H \|U_k + U_{k-1}\|_H.$$

Do đó

$$\|U_k\|_H \leq \|U_{k-1}\|_H + \Delta t \big\| f\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big)\big\|_H.$$

Cộng các biểu thức theo giá trị của k và kết hợp (2.15), ta được kết quả

$$\|U_k\|_H \leq \|U_0\|_H + \Delta t \sum_{j=1}^{k} \big\| f\big(t_j - \frac{\Delta t}{2}\big)\big\|_H \leq \|\phi\|_H + T\|f\|_{C([0,T];H)}.$$

Định lý được chứng minh. □

Để đánh giá được sai số ta sẽ xét một giả thiết được áp đặt lên nghiệm u của (2.4) và dạng song tuyến tính a.

$$(\mathbf{H}) \begin{cases} \text{Tồn tại không gian con } W \text{ của } V \text{ với phép nhúng liên tục và} \\ \text{một hằng số } \hat{C} > 0 \text{ sao cho } u \in W^{2,2}(0,T;W) \text{ và} \\ a(\varphi,\psi) \leq \hat{C}\|\varphi\|_W \|\psi\|_H \text{ với mọi } \varphi \in W, \psi \in V. \end{cases}$$

Ví dụ 2.10. Cho $W = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), V = H_0^1(\Omega), H = L^2(\Omega)$, với Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^l$ và

$$a(\varphi,\psi) = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi dx \text{ với mọi } \varphi, \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Ta có $a(\varphi,\psi) \leq \|\varphi\|_W \|\psi\|_H$ với mọi $\varphi \in W, \psi \in V$ và bất đẳng thức trong $(\mathbf{H})$ xảy ra với $\hat{C} = 1$.

Định lý 2.11. *Cho u và $\{U_k\}_{k=0}^m$ lần lượt là nghiệm của (2.4) và (2.26). Giả sử rằng $(\mathbf{H})$ xảy ra và $u_{ttt} \in L^2(0,T;H)$. Khi đó tồn tại hằng số $C > 0$ phụ thuộc vào $u, \alpha, \beta, \kappa, T$ và $\hat{C}$, nhưng độc lập với ℓ và m sao cho*

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \|u(t_k) - U_k\|_H^2 \leq C\bigg(\big\|\phi - P^\ell\phi\big\|_H^2 + \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k + (\Delta t)^4 \bigg)$$

và

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \|u(t_k) - U_k\|_H^2 \leq C\bigg(\big\|\phi - P^\ell\phi\big\|_H^2 + \|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k + (\Delta t)^4 \bigg),$$

trong đó S là ma trận độ cứng.

Chứng minh. Đại lượng ϱ_k đã được ước lượng ở (2.17) và (2.18). Ta có

$$\begin{aligned}
&\left\langle \bar{\partial}\vartheta_k, \psi \right\rangle_H + \frac{1}{2}a\left(\vartheta_k + \vartheta_{k-1}, \psi\right) \\
&= \langle w_k + z_k, \psi \rangle_H + \frac{1}{2}a\Big(2u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big) - u\left(t_k\right) - u\left(t_{k-1}\right), \psi\Big),
\end{aligned}$$

trong đó w_k và z_k được cho bởi

$$w_k = u_t\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big) - \bar{\partial}u\left(t_k\right) \text{ và } z_k = \bar{\partial}u\left(t_k\right) - P^{\ell}\bar{\partial}u\left(t_k\right).$$

Thật vậy, với mọi $\psi \in V^{\ell}$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \bar{\partial}\vartheta_k, \psi \right\rangle_H + \frac{1}{2}a\left(\vartheta_k + \vartheta_{k-1}, \psi\right) \\
&= \left\langle \frac{\vartheta_k - \vartheta_{k-1}}{\Delta t}, \psi \right\rangle_H + \frac{1}{2}a\left(\vartheta_k + \vartheta_{k-1}, \psi\right) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\left\langle \big(U_k - P^{\ell}u(t_k)\big) - \big(U_{k-1} - P^{\ell}u(t_{k-1})\big), \psi \right\rangle_H + \frac{1}{2}a\left(\vartheta_k + \vartheta_{k-1}, \psi\right) \\
&= \left\langle \bar{\partial}U_k, \psi \right\rangle_H - \left\langle \bar{\partial}P^{\ell}u(t_k), \psi \right\rangle_H + \frac{1}{2}a\left(\vartheta_k, \psi\right) + \frac{1}{2}a\left(\vartheta_{k-1}, \psi\right) \\
&= \left\langle f(t_k - \frac{\Delta t}{2}), \psi \right\rangle_H - \left\langle \bar{\partial}P^{\ell}u(t_k), \psi \right\rangle_H - \frac{1}{2}a\left(u(t_k) + u(t_{k-1}), \psi\right) \\
&= \langle w_k + z_k, \psi \rangle_H + \frac{1}{2}a\Big(2u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big) - u\left(t_k\right) - u\left(t_{k-1}\right), \psi\Big).
\end{aligned}$$

Chọn $\psi = \vartheta_k + \vartheta_{k-1}$, kết hợp giả thiết (**H**), ta được

$$\begin{aligned}
\left\langle \bar{\partial}\vartheta, \vartheta_k + \vartheta_{k-1} \right\rangle_H &\leq \left(\|\vartheta_k\|_H + \|\vartheta_{k-1}\|_H\right)\left(\|w_k\|_H + \|z_k\|_H\right) \\
&\quad + \left(\|\vartheta_k\|_H + \|\vartheta_{k-1}\|_H\right)\left(\frac{\hat{C}}{2}\int_{t_k - \frac{\Delta t}{2}}^{t_k}\int_{t - \frac{\Delta t}{2}}^{t} \|u_{tt}(s)\|_W \, ds dt\right).
\end{aligned}$$

Ta lại có

$$\left\langle \bar{\partial}\vartheta, \vartheta_k + \vartheta_{k-1} \right\rangle_H = \frac{1}{\Delta t}\left(\|\vartheta_k\|_H + \|\vartheta_{k-1}\|_H\right)\left(\|\vartheta_k\|_H - \|\vartheta_{k-1}\|_H\right) \quad (2.28)$$

và tích phân từng phần

$$\begin{aligned}
\int_{t_k - \frac{\Delta t}{2}}^{t_k}\int_{t - \frac{\Delta t}{2}}^{t} \|u_{tt}(s)\|_W \, ds dt &= (t - \alpha)\int_{t - \frac{\Delta t}{2}}^{t} \|u_{tt}(s)\|_W \, ds \Big|_{t_k - \frac{\Delta t}{2}}^{t_k} \\
&\quad - \int_{t_k - \frac{\Delta t}{2}}^{t_k} (t - \alpha)\Big(\|u_{tt}(t)\|_W - \big\|u_{tt}\big(t - \frac{\Delta}{2}\big)\big\|_W\Big) dt.
\end{aligned}$$

Chọn $\alpha = t_k - \dfrac{\Delta t}{2}$ và $z = t - \dfrac{\Delta t}{2}$. Khi đó

$$\int_{t_k-\frac{\Delta t}{2}}^{t_k}\int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t}\|u_{tt}(s)\|_W\,dsdt = \frac{\Delta t}{2}\int_{t_k-\frac{\Delta t}{2}}^{t_k}\|u_{tt}(s)\|_W\,ds$$
$$+\int_{t_{k-1}}^{t_k-\frac{\Delta t}{2}}(z+\Delta t-t_k)\Big(\|u_{tt}(z)\|_W - \big\|u_{tt}\big(z+\frac{\Delta}{2}\big)\big\|_W\Big)dz.$$

Vì $\dfrac{\Delta}{2} \geq z+\Delta t - t_k \geq 0$ với mọi $z \in [t_{k-1}, t_k - \frac{\Delta t}{2}]$ nên

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k-\frac{\Delta t}{2}}(z+\Delta t-t_k)\Big(\|u_{tt}(z)\|_W - \big\|u_{tt}\big(z+\frac{\Delta}{2}\big)\big\|_W\Big)dt$$
$$\leq \int_{t_{k-1}}^{t_k-\frac{\Delta t}{2}}(z+\Delta t-t_k)\left(\|u_{tt}(z)\|_W\right)dz \leq \frac{\Delta}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k-\frac{\Delta t}{2}}\left(\|u_{tt}(z)\|_W\right)dz.$$

Do đó

$$\int_{t_k-\frac{\Delta t}{2}}^{t_k}\int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t}\|u_{tt}(s)\|_W\,dsdt \leq \frac{\Delta}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\|u_{tt}(z)\|_W\right)dz. \tag{2.29}$$

Từ (2.28) và (2.29) ta suy ra

$$\|\vartheta_k\|_H \leq \|\vartheta_{k-1}\|_H + \Delta t\Big(\|w_k\|_H + \|z_k\|_H + \frac{\hat{C}\Delta t}{4}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u_{tt}(t)\|_W\,dt\Big).$$

Cộng tất cả các bất đẳng thức theo k ta được

$$\|\vartheta_k\|_H \leq \|\vartheta_0\|_H + \Delta t\sum_{j=1}^{k}\left(\|w_j\|_H + \|z_j\|_H\right) + \frac{\hat{C}(\Delta t)^2}{4}\int_0^{t_k}\|u_{tt}(t)\|_W\,dt.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta thấy

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\vartheta_k\|_H^2 \leq 3\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{3(\Delta t)^2}{m}\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{k}\|w_j\|_H + \|z_j\|_H\Big)^2$$
$$+\frac{3\hat{C}^2(\Delta t)^4}{16m}\sum_{k=1}^{m}\Big(\int_0^T\|u_{tt}(t)\|_W\,dt\Big)^2$$
$$\leq 3\|\vartheta_0\|_H^2 + 6(\Delta t)^2\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\Big(\|w_j\|_H^2 + \|z_j\|_H^2\Big)$$
$$+\frac{3\hat{C}^2T(\Delta t)^4}{16}\int_0^T\|u_{tt}(t)\|_W^2\,dt$$

$$= 3\|\vartheta_0\|_H^2 + 6m(\Delta t)^2 \sum_{j=1}^{m} \Big(\|w_j\|_H^2 + \|z_j\|_H^2\Big)$$
$$+ \frac{3\hat{C}^2 T(\Delta t)^4}{16} \int_0^T \|u_{tt}(t)\|_W^2\, dt.$$

Từ (2.20) và (2.21) ta có được

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \|z_k\|_H^2 \le \frac{3\alpha\beta^2}{\kappa^2} \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k$$

nếu cơ sở POD được xây dựng trong V và

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \|z_k\|_H^2 \le \frac{3\alpha\beta^2\|S\|_2}{\kappa^2} \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k$$

nếu cơ sở POD thuộc vào H. Ngoài ra, ta có

$$(\Delta t)^2 \sum_{k=1}^{m} \|w_k\|_H^2 = \sum_{k=1}^{m} \Big\|u(t_k) - u(t_{k-1}) - \Delta t u_t\Big(t_{k-\frac{1}{2}}\Big)\Big\|_H^2$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{4}\Big\| \int_{t_{k-1}}^{t_k - \frac{\Delta t}{2}} (s - t_{k-1})^2 u_{ttt}(s) ds + \int_{t_k - \frac{\Delta t}{2}}^{t_k} (s - t_k)^2 u_{ttt}(s) ds \Big\|_H^2$$
$$\le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2}\Bigg(\Big\| \int_{t_{k-1}}^{t_k - \frac{\Delta t}{2}} (s - t_{k-1})^2 u_{ttt}(s) ds \Big\|_H^2 + \Big\| \int_{t_k - \frac{\Delta t}{2}}^{t_k} (s - t_k)^2 u_{ttt}(s) ds \Big\|_H^2 \Bigg)$$
$$\le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2}\Bigg(\frac{(\Delta t)^5}{32} \int_{t_{k-1}}^{t_k - \frac{\Delta t}{2}} \|u_{ttt}(s)\|_H^2\, ds + \frac{(\Delta t)^5}{32} \int_{t_k - \frac{\Delta t}{2}}^{t_k} \|u_{ttt}(s)\|_H^2\, ds \Bigg)$$
$$\le \frac{1}{64}(\Delta t)^5 \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_{ttt}(s)\|_H^2\, ds.$$

Điều đó dẫn đến

$$(\Delta t)^2 \sum_{k=1}^{m} \|w_k\|_H^2 \le \frac{1}{64}(\Delta t)^5 \int_0^T \|u_{ttt}(s)\|_H^2\, ds. \tag{2.30}$$

Vì vậy, với $C^* = \max\left(\frac{3}{32}T, \frac{3}{16}\hat{C}^2 T\right)$ ta có

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \|\vartheta_k\|_H^2 \le 3\,\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{18\alpha\beta^2 T^2}{\kappa^2} \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k \tag{2.31}$$
$$+ C^*(\Delta t)^4 \Big(\|u_{ttt}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|u_{tt}\|_{L^2(0,T;W)}^2 \Big)$$

và

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\vartheta_k\|_H^2 \le 3\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{18\alpha\beta^2T^2\|S\|_2}{\kappa^2}\sum_{k=\ell+1}^{d}\hat{\lambda}_k + C^*(\Delta t)^4\left(\|u_{ttt}\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|u_{tt}\|^2_{L^2(0,T;W)}\right) \tag{2.32}$$

ứng với lần lượt hai trường hợp cơ sở POD được xây dựng trong V và H.

Xét trường hợp cơ sở POD trong V, kết hợp (2.16), (2.17) và (2.31) ta có

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|U_k - u(t_k)\|_H^2 \le 6\left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H^2 + \frac{6\alpha\beta^2}{\kappa^2}(1+6T^2)\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k + 2C^*(\Delta t)^4\left(\|u_{ttt}\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|u_{tt}\|^2_{L^2(0,T;W)}\right).$$

Tương tự nếu cơ sở POD trong H, kết hợp (2.16), (2.18) và (2.32) ta được

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|U_k - u(t_k)\|_H^2 \le 6\left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H^2 + \frac{6\alpha\beta^2}{\kappa^2}(1+6T^2)\|S\|_2\sum_{k=\ell+1}^{d}\hat{\lambda}_k + 2C^*(\Delta t)^4\left(\|u_{ttt}\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|u_{tt}\|^2_{L^2(0,T;W)}\right).$$

Đặt

$$C = \max\left\{6; \frac{6\alpha\beta^2}{\kappa^2}(1+6T^2); 2C^*(\|u_{ttt}\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|u_{tt}\|^2_{L^2(0,T;W)})\right\}$$

chỉ phụ thuộc vào phụ thuộc vào $u, \alpha, \beta, \kappa, T, \hat{C}$, độc lập với ℓ và m. Lúc đó

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|U_k - u(t_k)\|_H^2 \le C\big(\left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H^2 + \sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k + (\Delta t)^4\big)$$

nếu ta xây dựng cơ sở POD trong V và

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|U_k - u(t_k)\|_H^2 \le C\big(\left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H^2 + \|S\|_2\sum_{k=\ell+1}^{d}\hat{\lambda}_k + (\Delta t)^4\big)$$

nếu ta xét cơ sở POD trong H. □

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG PHÁP POD-GALERKIN CHO PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HÓA PHI TUYẾN

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu về áp dụng POD liên quan đến bài toán tiến hóa phi tuyến trừu tượng. Ta tiếp tục giả sử rằng V và H là hai không gian Hilbert thực sao cho V trù mật trong H với phép nhúng compact. Dạng song tuyến tính $a : V \times V \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi tích vô hướng trong V, nghĩa là

$$\langle \varphi, \psi \rangle_V = a(\varphi, \psi) \quad \text{với mọi } \varphi, \psi \in V. \tag{3.1}$$

Chuẩn trong V được xác định $\| \cdot \|_V = \sqrt{a(\cdot, \cdot)}$. Khi đó dạng song tuyến tính a liên tục và V-elliptic đều với hằng số bằng 1, nghĩa là

$$|a(\varphi, \psi)| \leq \beta \|\varphi\|_V \|\psi\|_V \quad \text{với } \beta = 1.$$

và

$$|a(\varphi, \varphi)| \geq \kappa \|\varphi\|_V^2 \quad \text{với } \kappa = 1.$$

Ngoài ra, vì phép nhúng V vào H là liên tục nên tồn tại $\alpha > 0$ sao cho

$$\|\varphi\|_H^2 \leq \alpha \|\varphi\|_V^2, \ \forall \varphi \in V. \tag{3.2}$$

Ta định nghĩa toán tử tuyến tính A liên kết với a:

$$\langle A\varphi, \psi\rangle_{V^*,V} = a(\varphi, \psi) \ \text{ với mọi } \varphi, \psi \in V,$$

trong đó $\langle \cdot, \cdot\rangle_{V^*,V}$ biểu thị tích vô hướng giữa V và liên hợp của nó. Khi đó A là đẳng cấu từ V vào V^*. Ngoài ra, A có thể là toán tử tuyến tính tự liên hợp nhưng không nhất thiết bị chặn trong H với miền

$$D(A) = \{\varphi \in V : A\varphi \in H\}.$$

Từ sự đồng nhất giữa H và đối ngẫu H^* của nó, dẫn đến

$$D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H = H^* \hookrightarrow V^*,$$

mỗi phép nhúng là liên tục và trù mật, trong đó $D(A)$ là không gian định chuẩn với chuẩn

$$\|\varphi\|_{D(A)} = \|\varphi\|_V + \|A\varphi\|_H.$$

Xét toán tử tuyến tính liên tục $R : V \to V^*$, ánh xạ $D(A)$ vào H và thỏa mãn

$$\begin{aligned} \|R\varphi\|_H &\le c_R\|\varphi\|_V^{1-\delta_1}\|A\varphi\|_H^{\delta_1} \ \text{ với mọi } \varphi \in D(A), \\ |\langle R\varphi, \varphi\rangle_{V^*,V}| &\le c_R\|\varphi\|_V^{1+\delta_2}\|\varphi\|_H^{1-\delta_2} \ \text{ với mọi } \varphi \in V \end{aligned} \tag{3.3}$$

với hệ số $c_R > 0$ và với $\delta_1, \delta_2 \in [0, 1)$. Ta cũng giả sử rằng $A + R$ là V-elliptic; có nghĩa là tồn tại hằng số $\eta > 0$ sao cho

$$a(\varphi, \varphi) + \langle R\varphi, \varphi\rangle_{V^*,V} \ge \eta\|\varphi\|_V^2 \ \text{ với mọi } \varphi \in V. \tag{3.4}$$

Hơn nữa, cho $B : V \times V \to V^*$ là dạng song tuyến tính liên tục $D(A)\times D(A)$ vào H sao cho tồn tại hằng số $c_B > 0$ và $\delta_3, \delta_4, \delta_5 \in [0, 1)$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} \langle B(\varphi, \psi), \psi\rangle_{V^*,V} &= 0, \\ |\langle B(\varphi, \psi), \phi\rangle_{V^*,V}| &\le c_B\|\varphi\|_H^{\delta_3}\|\varphi\|_V^{1-\delta_3}\|\psi\|_V\|\phi\|_V^{\delta_3}\|\phi\|_H^{1-\delta_3}, \\ \|B(\varphi, \chi)\|_H + \|B(\chi, \varphi)\|_H &\le c_B\|\varphi\|_V\|\chi\|_V^{1-\delta_4}\|A\chi\|_H^{\delta_4}, \\ \|B(\varphi, \chi)\|_H &\le c_B\|\varphi\|_H^{\delta_5}\|\varphi\|_V^{1-\delta_5}\|\chi\|_V^{1-\delta_5}\|A\chi\|_H^{\delta_5} \end{aligned} \tag{3.5}$$

với mọi $\varphi, \psi, \phi \in V$, với mọi $\chi \in D(A)$. Để đơn giản về mặt kí hiệu, ta đặt $B(\varphi) = B(\varphi, \varphi)$ với $\varphi \in V$.

Cho $f \in L^2(0,T;H)$ và $\phi \in V$ ta xét phương trình tuyến hóa phi tuyến

$$\frac{d}{dt}\langle u(t),\varphi\rangle_H + a(u(t),\varphi) + \langle B(u(t)) + Ru(t),\varphi\rangle_{V^*,V} = \langle f(t),\varphi\rangle_H \quad (3.6)$$

với mọi $\varphi \in V$, hầu khắp $t \in (0,T]$ và

$$\langle u(0),\chi\rangle_H = \langle \phi,\chi\rangle_H \quad \text{với mọi } \chi \in H.$$

Định lý sau phát biểu về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của (3.6).

Định lý 3.1. *Giả sử rằng điều kiện (3.3) đến(3.5) thỏa mãn. Khi đó với mọi $f \in L^2(0,T;H)$ và $\phi \in V$ tồn tại duy nhất nghiệm của (3.6) thỏa mãn*

$$u \in C([0,T];V) \cap L^2(0,T;D(A)) \cap H^1(0,T;H).$$

Chứng minh. Tương tự như Định lý 2.1 trong [24], trang 111. □

Ví dụ về phương trình tiến hóa phi tuyến có dạng nêu trên.

Ví dụ 3.2 (*Navier-Stokes hai chiều*). Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ với biên Γ và cho $T > 0$. Phương trình Navier-Stokes hai chiều được cho bởi

$$\begin{aligned} \varrho\,(u_t + (u\cdot\nabla)u) - \nu\Delta u + \nabla p \ &= f \text{ trong } Q = (0,T)\times\Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \ \text{ trong } Q, \end{aligned} \quad (3.7)$$

trong đó $\varrho > 0$ là mật độ của chất lưu, $\nu > 0$ là độ nhớt động học, f được biểu diễn như độ lớn của nguồn và

$$(u\cdot\nabla)u = \left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^\top.$$

Các ẩn số là trường vận tốc $u = (u_1, u_2)$ và áp suất p. Kết hợp với điều kiện biên

$$u = u_d \ \text{ trên } \Sigma = (0,T)\times\Gamma$$

và điều kiện ban đầu

$$u(0,\cdot) = u_0 \ \text{ trong } \Omega.$$

Trong [24], trang 104-107 và 116-117 cho ta cách viết (3.7) dưới dạng của (3.6).

Bổ đề 3.3. *Với mọi $a, b \geq 0$ và $M \geq 0$, $N > 0$ là hai số cho trước. Tồn tại hai hằng số $\mu_1 > 0$ chỉ phụ thuộc vào M, N sao cho*

$$Mab \leq Na^2 + \mu_1 b^2.$$

Bổ đề 3.4. *Với mọi $a, b, c \geq 0$, $\delta \in [0, 1)$. Khi đó với $M \geq 0$, $N > 0$ là hai số cho trước. Tồn tại hai hằng số $\mu_1 > 0$ và $\mu_2 > 0$ chỉ phụ thuộc vào M, N và δ sao cho*

$$Ma^\delta b^{1-\delta} c \leq Na^2 + \mu_1 b^2 + \mu_2 c^2.$$

Chứng minh. Nếu $\delta = 0$, ta quay lại với Bổ đề 3.3. Ta xét với trường hợp $\delta > 0$. Chọn $p = 2/\delta > 2$ và $\varepsilon = N/p$. Khi đó theo bất đẳng thức Young, ta được

$$\begin{aligned} Ma^\delta b^{1-\delta} c &\leq \frac{\varepsilon (a^\delta)^p}{p} + \frac{(Mb^{1-\delta} c)^q}{q \varepsilon^{p/q}} \\ &= Na^2 + \frac{(Mb^{1-\delta} c)^q}{q \varepsilon^{p/q}} \end{aligned}$$

với $q = p/(p-1) < 2$. Đặt $m = 2/q > 1$ và $n = 2/(q - q\delta)$, khi đó

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{q}{2} + \frac{q - q\delta}{2} = \frac{q(p-1)}{p} = 1.$$

Áp dụng lần nữa bất đẳng thức Young, ta có

$$\begin{aligned} \frac{(Mb^{1-\delta} c)^q}{q \varepsilon^{p/q}} &\leq \frac{M^q}{q \varepsilon^{p/q}} \left(\frac{(c^q)^m}{m} + \frac{(b^{q(1-\delta)})^n}{n} \right) \\ &= \frac{M^q}{q \varepsilon^{p/q}} \left(\frac{c^2}{m} + \frac{b^2}{n} \right). \end{aligned}$$

Đặt $\mu_1 = \dfrac{M^q}{nq\varepsilon^{p/q}}$ và $\mu_2 = \dfrac{M^q}{mq\varepsilon^{p/q}}$. Khi đó $\mu_1, \mu_2 > 0$ và chỉ phụ thuộc vào M, N và δ sao cho $Ma^\delta b^{1-\delta} c \leq Na^2 + \mu_1 b^2 + \mu_2 c^2$. □

Để xây dựng các giản đồ POD-Galerkin cho bài toán (3.6), cách xây dựng cơ sở POD tương tự như Chương 2, mục 2.1. Vì vậy, các biểu thức đánh giá trong mục 2.1 vẫn còn thỏa mãn.

3.1 Phương pháp Euler-POD-Galerkin lùi

Trong phần này ta tập trung ước lượng sai số của phương pháp Galerkin POD khi áp dụng cho (3.6) kết hợp với phương pháp Euler lùi.
Ta xét mô hình giảm số chiều dựa trên phương pháp Galerkin POD: Tìm $\{U_k\}_{k=0}^m$ trong V^ℓ thỏa mãn

$$\begin{aligned}&\langle U_0, \psi\rangle_H = \langle \phi, \psi\rangle_H,\\ &\left\langle \bar{\partial} U_k, \psi\right\rangle_H + a\left(U_k, \psi\right) + \left\langle B\left(U_k\right) + RU_k, \psi\right\rangle_{V^*,V} = \left\langle f\left(t_k\right), \psi\right\rangle_H\end{aligned} \tag{3.8}$$

với mọi $\psi \in V^\ell$ và $k = 1, \ldots, m$. Đạo hàm rời rạc $\bar{\partial} U_k$ được cho bởi

$$\bar{\partial} U_k = \frac{U_k - U_{k-1}}{\Delta t}.$$

Định lý sau phát biểu về sự tồn tại nghiệm $\{U_k\}_{k=0}^m$ của (3.8).

Định lý 3.5. *Tồn tại nghiệm $\{U_k\}_{k=0}^m$ của (3.8). Hơn nữa, ta có đánh giá*

$$\|U_k\|_H^2 \le \left(\frac{1}{1+\gamma\Delta t}\right)^k \|\phi\|_H^2 + \frac{1 - e^{-\gamma k \Delta t}}{\gamma} \|f\|_{C([0,T];H)}^2 \tag{3.9}$$

với mọi $k = 1, \ldots, m$, trong đó $\gamma = \eta/\alpha$ với α, η lần lượt được định nghĩa tại (3.2) và (3.4).

Chứng minh.

Tồn tại: Ta chứng minh tồn tại nghiệm $\{U_k\}_{k=0}^m$ của (3.8) bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy, $U_0 = \sum_{i=1}^\ell \langle \phi, \psi_i\rangle \psi_i$ được xác định duy nhất. Giả sử U_{k-1} tồn tại với $k \ge 1$. Ta chứng minh U_k tồn tại bằng định lý điểm bất động Schauder. Xét ánh xạ $\mathcal{T}_k : V^\ell \to V^\ell, k = 1, \ldots, m$ được định nghĩa như sau: với mỗi $w \in V^\ell$ ta đặt $z = \mathcal{T}_k w$ với $z \in V^\ell$ là nghiệm

$$\langle z, \psi\rangle_H + \Delta t \left(a(z, \psi) + \langle B(w, z) + Rz, \psi\rangle_{V^*,V}\right) = \langle \Delta t f\left(t_k\right) + Y_{k-1}, \psi\rangle_H \tag{3.10}$$

với mọi $\psi \in V^\ell$. Dạng song tuyến tính

$$\langle \cdot, \cdot\rangle_H + \Delta t \left(a(\cdot, \cdot) + \langle B(w, \cdot) + R(\cdot), \cdot\rangle_{V^*,V}\right)$$

là liên tục và V^ℓ-elliptic bởi các điều kiện (3.2) đến (3.5). Theo định lý Lax-Milgram tồn tại duy nhất z là nghiệm của (3.10). Do đó ánh xạ $\mathcal{T}_k$ được xác định. Nhận xét rằng điểm bất động của $\mathcal{T}_k$ là nghiệm U_k của (3.8). Lấy $\psi = z$ trong (3.10), kết hợp các điều kiện (3.2) và (3.4) ta được

$$\|z\|_V \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta}\big(\|f(t_k)\|_H + \frac{1}{\Delta t}\|U_{k-1}\|_H \big). \tag{3.11}$$

Ta đặt

$$M_k = \left\{ w \in V^\ell : \|w\|_V \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta}\big(\|f(t_k)\|_H + \frac{1}{\Delta t}\|U_{k-1}\|_H \big) \right\} \subset V^\ell.$$

Từ (3.11) ta thấy rẳng $\mathcal{T}_k$ ánh xạ từ M_k vào chính nó. Vì M_k là hình cầu đóng trong V^ℓ, do đó tập M_k bị chặn, đóng và lồi, hơn nữa ảnh của $\mathcal{T}_k$ hữu hạn chiều, nên $\mathcal{T}_k$ là compact. Do đó, tồn tại U_k là bất động của $\mathcal{T}_k$. Vì vậy, tồn tại nghiệm $\{U_k\}_{k=0}^m$ của (3.8).

Ước lượng U_k: Để có ước lượng (3.9), trong (3.8) ta cho $\psi = U_k$. Ta có

$$2\langle \varphi - \psi, \varphi\rangle_H = \|\varphi\|_H^2 - \|\psi\|_H^2 + \|\varphi - \psi\|_H^2 \quad \text{với mọi } \varphi, \psi \in H. \tag{3.12}$$

Kết hợp với các điều kiện (3.3) đến (3.5)ta được

$$\|U_k\|_H^2 - \|U_{k-1}\|_H^2 + \|U_k - U_{k-1}\|_H^2 + 2\eta\Delta t\,\|U_k\|_V^2 \leq 2\Delta t\,\|f(t_k)\|_H\,\|U_k\|_H.$$

Sử dụng (3.5), (3.2) và bất đẳng thức Young, dẫn đến

$$\|U_k\|_H^2 + \|U_k - U_{k-1}\|_H^2 + \eta\Delta t\,\|U_k\|_V^2 \leq \|U_{k-1}\|_H^2 + \frac{\alpha\Delta t}{\eta}\|f(t_k)\|_H^2.$$

Từ đó suy ra

$$(1 + \gamma\Delta t)\,\|U_k\|_H^2 \leq \|U_{k-1}\|_H^2 + \frac{\Delta t}{\gamma}\|f(t_k)\|_H^2,$$

trong đó $\gamma = \eta/\alpha$. Điều đó cho thấy

$$\|U_k\|_H^2 \leq \frac{1}{1+\gamma\Delta t}\|U_{k-1}\|_H^2 + \frac{\Delta t}{\gamma(1+\gamma\Delta t)}\|f(t_k)\|_H^2.$$

Cộng vế theo vế các biểu thức trên theo k ta được

$$\|U_k\|_H^2 \le \left(\frac{1}{1+\gamma\Delta t}\right)^k \|U_0\|_H^2 + \frac{\Delta t}{\gamma}\|f\|^2_{C([0,T];H)} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{1+\gamma\Delta t}\right)^j. \tag{3.13}$$

Đặt $\zeta = 1/(1+\gamma\Delta\tau)$. Ta có

$$\Delta t \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{1+\gamma\Delta t}\right)^j = \Delta t \frac{1-\zeta^k}{\zeta^{-1}-1} = \frac{1-\zeta^k}{\gamma} \le \frac{1-e^{-\gamma k\Delta t}}{\gamma}. \tag{3.14}$$

Ngoài ra, vì $\langle U_0, \psi\rangle_H = \langle \phi, \psi\rangle_H$ với mọi $\psi \in V^\ell$ nên

$$\|U_0\|_H^2 \le \|\phi\|_H \|U_0\|_H \Longrightarrow \|U_0\|_H \le \|\phi\|_H .$$

Kết hợp với (3.13), (3.14) ta có kết quả tại (3.9). □

Hơn nữa, nếu Δt đủ nhỏ thì dãy $\{U_k\}_{k=0}^m$ là nghiệm của (3.8) được xác định duy nhất ([5], trang 510). Tiếp theo của chúng ta là ước lượng trung bình sai số

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \|U_k - u(t_k)\|_H^2 ,$$

trong đó $u(t_k)$ là nghiệm của (3.6) tại những thời điểm $t = t_k, k = 1, \ldots, m$.

Nhắc lại, ta vẫn sử dụng phân tích

$$U_k - u(t_k) = U_k - P^\ell u(t_k) + P^\ell u(t_k) - u(t_k) = \vartheta_k + \varrho_k, \tag{3.15}$$

với $\vartheta_k = U_k - P^\ell u(t_k)$ và $\varrho_k = P^\ell u(t_k) - u(t_k)$.

Bổ đề 3.6. *Giả sử u và $\{U_k\}_{k=0}^m$ lần lượt là nghiệm của (3.6) và (3.8). Giả thiết rằng Δt đủ nhỏ và $u_{tt} \in L^2(0,T,H)$. Khi đó tồn tại hằng số $C > 0$ độc lập với m và ℓ sao cho*

$$\|\vartheta_k\|_H^2 \le C\left(\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{\Delta t^2}{3}\|u_{tt}\|^2_{L^2(0,T;H)} + 3T(\alpha+1), \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k \right)$$

với mọi $1 \le k \le m$ nếu cơ sở POD được xây dựng trong V hoặc

$$\|\vartheta_k\|_H^2 \le C\left(\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{\Delta t^2}{3}\|u_{tt}\|^2_{L^2(0,T;H)} + 3T(\alpha+1)\|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k \right),$$

với mọi $1 \le k \le m$ nếu cơ sở POD được xét trong H.

Chứng minh. Ta tiếp tục sử dụng kí hiệu $\bar{\partial}\vartheta_k = ((\vartheta_k - \vartheta_{k-1}))/\delta\tau_k$ với mọi $k = 1, \ldots, m$. Ta có

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \bar{\partial}\vartheta_k, \psi \right\rangle_H + a\left(\vartheta_k, \psi\right) + \left\langle R\vartheta_k, \psi \right\rangle_{V^*,V} \\
&= \left\langle \bar{\partial}U_k - \bar{\partial}P^\ell u(t_k), \psi \right\rangle_H + a\left(U_k - P^\ell y(t_k), \psi\right) + \left\langle RU_k - RP^\ell u(t_k), \psi \right\rangle_{V^*,V} \\
&= \left\langle f(t_k), \psi \right\rangle_H - \left\langle B(U_K) + RP^\ell u(t_k), \psi \right\rangle_{V^*,V} - \left\langle \bar{\partial}P^\ell u(t_k), \psi \right\rangle_H - a\left(u(t_k), \psi\right) \\
&= \left\langle v_k, \psi \right\rangle_H + \left\langle B\left(u\left(t_k\right)\right) - B\left(U_k\right) + R\left(u\left(t_k\right) - P^\ell u\left(t_k\right)\right), \psi \right\rangle_{V^*,V},
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

trong đó

$$
v_k = u_t\left(t_k\right) - \bar{\partial}P^\ell u\left(t_k\right) = u_t\left(t_k\right) - \bar{\partial}u\left(t_k\right) + \bar{\partial}u\left(t_k\right) - \bar{\partial}P^\ell u\left(t_k\right).
$$

Đặt $w_k = u_t\left(t_k\right) - \bar{\partial}u\left(t_k\right)$ và $z_k = \bar{\partial}u\left(t_k\right) - \bar{\partial}P^\ell u\left(t_k\right)$. Chọn $\psi = \vartheta_k \in V^\ell$ trong (3.16), sử dụng điều kiện (3.4) và biểu diễn (3.12) ta được

$$
\begin{aligned}
&\left\|\vartheta_k\right\|_H^2 - \left\|\vartheta_{k-1}\right\|_H^2 + \left\|\vartheta_k - \vartheta_{k-1}\right\|_H^2 + 2\eta\Delta t\left\|\vartheta_k\right\|_V^2 \\
&\leq 2\Delta t\Big(\left\|v_k\right\|_H\left\|\vartheta_k\right\|_H + \left|\left\langle B\left(u\left(t_k\right)\right) - B\left(U_k\right), \vartheta_k\right\rangle_{V^*,V}\right| + \left\|R\varrho_k\right\|_{V^*}\left\|\vartheta_k\right\|_V\Big).
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Theo Bổ đề 3.3, tồn tại $c_0 > 0$ phụ thuộc vào $\|R\|_{\mathcal{L}(V,V^*)}$ và η sao cho

$$
\left\|R\varrho_k\right\|_{V^*}\left\|\vartheta_k\right\|_V \leq \|R\|_{\mathcal{L}(V,V^*)}\left\|\varrho_k\right\|_V\left\|\vartheta_k\right\|_V \leq \frac{\eta}{4}\left\|\vartheta_k\right\|_V^2 + c_0\left\|\varrho_k\right\|_V^2.
\tag{3.18}
$$

Nhấn mạnh rằng

$$
\begin{aligned}
B\left(u\left(t_k\right)\right) - B\left(U_k\right) = &-B\left(u\left(t_k\right), U_k - u\left(t_k\right)\right) - B\left(U_k - u\left(t_k\right)\right) \\
&- B\left(U_k - u\left(t_k\right), u\left(t_k\right)\right).
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Áp dụng các điều kiện (3.5), (3.2) và Bổ đề 3.4, tồn tại hai hằng số $c_1, c_2 > 0$ thỏa mãn

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\langle B\left(u\left(t_k\right), U_k - u\left(t_k\right)\right), \vartheta_k\right\rangle_{V^*,V}\right| = \left|\left\langle B\left(u\left(t_k\right), \varrho_k\right), \vartheta_k\right\rangle_{V^*,V}\right| \\
&\leq c_B\alpha^{\delta_3/2}\|u\|_{C([0,T];V)}\left\|\varrho_k\right\|_V\left\|\vartheta_k\right\|_H^{1-\delta_3}\left\|\vartheta_k\right\|_V^{\delta_3} \\
&\leq \frac{\eta}{4}\left\|\vartheta_k\right\|_V^2 + c_1\left\|\vartheta_k\right\|_H^2 + c_2\left\|\varrho_k\right\|_V^2.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Hơn nữa, kết hợp điều kiện (3.5), (3.2) và Bổ đề 3.4, tồn tại hai hằng số $c_3, c_4 > 0$ sao cho

$$\begin{aligned}
&| \langle B\left(U_k - u\left(t_k\right), u\left(t_k\right)\right), \vartheta_k \rangle_{V^*,V} | \\
&= | \langle B\left(\vartheta_k, u\left(t_k\right)\right) + B\left(\varrho_k, u\left(t_k\right)\right), \vartheta_k \rangle_{V^*,V} | \\
&\le c_B \|u\|_{C([0,T];V)} \left(\|\vartheta_k\|_H \|\vartheta_k\|_V + \alpha^{\delta_3/2} \|\varrho_k\|_V \|\vartheta_k\|_H^{1-\delta_3} \|\vartheta_k\|_V^{\delta_3} \right) \\
&\le \frac{\eta}{4} \|\vartheta_k\|_V^2 + c_3 \|\vartheta_k\|_H^2 + c_4 \|\varrho_k\|_V^2 .
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Từ định nghĩa phép chiếu P^ℓ ứng với dạng song tuyến tính $a(u,v) = \langle u, v \rangle_V$ ta được $\left\langle P^\ell u, \psi \right\rangle_V = \langle u, \psi \rangle_V$ với mọi $\psi \in V^\ell$, suy ra

$$\|P^\ell u\|_V \le \|u\|_V, \quad \text{với mọi } u \in V. \tag{3.22}$$

Vì $u \in C([0,T];V)$ nên $\|\varrho_k\|_V \le \|P^\ell u(t_k)\|_V + \|u(t_k)\|_V \le 2\|u\|_{C([0,T];V)}$. Kết hợp với (3.2), ta có

$$\|\varrho_k\|_H^{\delta_3} \|\varrho_k\|_V^{1-\delta_3} \le \alpha^{\delta_3/2} \|\varrho_k\|_V \le 2\alpha^{\delta_3/2} \|u\|_{C([0,T];V)}.$$

Do đó tồn tại $c_5 > 0$ chỉ phụ thuộc vào u và α sao cho

$$\max_{1 \le k \le m} \left(\|\varrho_k\|_H^{\delta_3} \|\varrho_k\|_V^{1-\delta_3}, \|\varrho_k\|_V \right) \le c_5. \tag{3.23}$$

Từ (3.5) và (3.15) dẫn đến

$$\langle B\left(U_k - u\left(t_k\right)\right), \vartheta_k \rangle_{V^*,V} = \langle B\left(\vartheta_k, \varrho_k\right) + B\left(\varrho_k, \varrho_k\right), \vartheta_k \rangle_{V^*,V} . \tag{3.24}$$

Từ (3.23), (3.24), Bổ đề 3.3 và Bổ đề 3.4 tồn tại $c_6, c_7 > 0$ sao cho

$$\begin{aligned}
&|\langle B\left(U_k - u\left(t_k\right)\right), \vartheta_k \rangle_{V^*,V}| \\
&\le c_B c_5 \left(\|\vartheta_k\|_H \|\vartheta_k\|_V + \|\varrho_k\|_V \|\vartheta_k\|_H^{1-\delta_3} \|\vartheta_k\|_V^{\delta_3} \right) \\
&\le \frac{\eta}{4} \|\vartheta_k\|_V^2 + c_6 \|\vartheta_k\|_H^2 + c_7 \|\varrho_k\|_V^2 .
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Kết hợp (3.17) đến (3.25) và $v_k = w_k + z_k$ ta được

$$\|\vartheta_k\|_H^2 \le \|\vartheta_{k-1}\|_H^2 + \Delta t \left(\|w_k\|_H^2 + \|z_k\|_H^2 + c_8 \|\vartheta_k\|_H^2 + c_9 \|\varrho_k\|_V^2 \right), \tag{3.26}$$

trong đó $c_8 = 2 + 2(c_1 + c_3 + c_6)$ và $c_9 = 2(c_0 + c_2 + c_4 + c_7)$. Ta chọn Δt đủ nhỏ $\Delta t \le \dfrac{1}{2c_8}$. Khi đó

$$0 < 1 - 2c_8\Delta t \le 1 - c_8\Delta t \text{ và } 1 - c_8\Delta t \ge 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{1 - c_8\Delta t} = \frac{1 - c_8\Delta t + c_8\Delta t}{1 - c_8\Delta t} = 1 + \frac{c_8\Delta t}{1 - c_8\Delta t} \le 1 + 2c_8\Delta t.$$

Từ (3.26), dẫn đến

$$\|\vartheta_k\|_H^2 \le (1 + 2c_8\Delta t)\left(\|\vartheta_{k-1}\|_H^2 + \Delta t\left(\|w_k\|_H^2 + \|z_k\|_H^2 + c_9\|\varrho_k\|_V^2\right)\right).$$

Cộng các vế theo k và kết hợp $k\Delta t \le m\Delta t = T$, ta được

$$\begin{aligned}
\|\vartheta_k\|_H^2 &\le (1 + 2c_8\Delta t)^k \Big(\|\vartheta_0\|_H^2 + \sum_{j=1}^k \Delta t\big(\|w_j\|_H^2 + \|z_j\|_H^2 + c_9\|\varrho_j\|_V^2\big)\Big) \\
&\le e^{2c_8\Delta t k}\Big(\|\vartheta_0\|_H^2 + \sum_{j=1}^k \Delta t\big(\|w_j\|_H^2 + \|z_j\|_H^2 + c_9\|\varrho_k\|_V^2\big)\Big) \\
&\le e^{2c_8 T}\Big(\|\vartheta_0\|_H^2 + \sum_{j=1}^k \Delta t\big(\|w_j\|_H^2 + \|z_j\|_H^2 + c_9\|\varrho_k\|_V^2\big)\Big).
\end{aligned}$$

Như các phần trước, ta sẽ ước lượng các phần tử w_j và z_j

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^k \Delta t\|w_j\|_H^2 &= \sum_{j=1}^k \Delta t\left\|u_t(t_j) - \bar{\partial}u(t_j)\right\|_H^2 \\
&= \sum_{j=1}^k \frac{1}{\Delta t}\|\Delta t u_t(t_j) - (u(t_j) - u(t_{j-1}))\|_H^2 \\
&= \sum_{j=1}^k \frac{1}{\Delta t}\left\|\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s - t_{j-1})\,u_{tt}(s)ds\right\|_H^2 \\
&\le \sum_{j=1}^k \frac{1}{\Delta t}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s - t_{j-1})^2 ds\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|u_{tt}(s)\|_H^2 ds \\
&= \sum_{j=1}^k \frac{\Delta t^2}{3}\|u_{tt}\|_{L^2(t_{j-1},t_j;H)}^2 \le \frac{\Delta t^2}{3}\|u_{tt}\|_{L^2(0,T;H)}^2.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Vì hằng số liên tục và V-elliptic là $\beta = \kappa = 1$ nên từ Bổ đề 2.3 ta có

$$\Delta t \sum_{j=1}^{k} \|\varrho_k\|_V^2 \leq \frac{T}{m} \sum_{j=1}^{m} \|\varrho_k\|_V^2 \leq 3T \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k$$

nếu cơ sở POD được xây dựng trong V và

$$\Delta t \sum_{j=1}^{k} \|\varrho_k\|_V^2 \leq \frac{T}{m} \sum_{j=1}^{m} \|\varrho_k\|_V^2 \leq 3T\|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k$$

nếu cơ sở POD được xây dựng trong H. Tương tự, Hệ quả 2.4 cho ta

$$\Delta t \sum_{j=1}^{k} \|z_j\|_H^2 \leq \frac{T}{m} \sum_{j=1}^{m} \left\|\bar{\partial} u(t_i) - \bar{\partial} P^\ell u(t_i)\right\|_H^2 \leq 3T\alpha \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k$$

hoặc

$$\Delta t \sum_{j=1}^{k} \|z_j\|_H^2 \leq \frac{T}{m} \sum_{j=1}^{m} \left\|\bar{\partial} u(t_i) - \bar{\partial} P^\ell u(t_i)\right\|_H^2 \leq 3T\alpha\|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k$$

lần lượt ứng với cơ sở POD được xây dựng trong V và H. Do đó

$$\begin{aligned}\|\vartheta_k\|_H^2 &\leq e^{2c_8T}\Bigg(\|\vartheta_0\|_H^2 + \sum_{j=1}^{k} \Delta t \left(\|w_j\|_H^2 + \|z_j\|_H^2 + c_9 \|\varrho_k\|_V^2\right) \Bigg)\\ &\leq e^{2c_8T}\Bigg(\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{\Delta t^2}{3} \|u_{tt}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + 3T(\alpha+1) \sum_{j=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_j\Bigg).\end{aligned}$$

hoặc

$$\begin{aligned}\|\vartheta_k\|_H^2 &\leq e^{2c_8T}\Bigg(\|\vartheta_0\|_H^2 + \sum_{j=1}^{k} \Delta t \left(\|w_j\|_H^2 + \|z_j\|_H^2 + c_9 \|\varrho_k\|_V^2\right) \Bigg)\\ &\leq e^{2c_8T}\Bigg(\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{\Delta t^2}{3} \|u_{tt}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + 3T(\alpha+1)\|S\|_2 \sum_{j=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_j\Bigg).\end{aligned}$$

Từ đó bổ đề được chứng minh. □

Định lý 3.7. *Giả sử u và $\{U_k\}_{k=0}^m$ lần lượt là nghiệm của (3.6) và (3.8). Giả thiết rằng Δt đủ nhỏ và $u_{tt} \in L^2(0,T,H)$. Khi đó tồn tại hằng số $\tilde{C} > 0$ độc lập với m và ℓ sao cho*

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|U_k - u(t_k)\|_H^2 \leq \tilde{C}\Bigg(\left\|\phi - P^\ell \phi\right\|_H^2 + \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k + (\Delta t)^2\Bigg)$$

và

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|Y_k - y(t_k)\|_H^2 \le \tilde{C}\Bigg(\left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H^2 + \|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k + (\Delta t)^2\Bigg).$$

Chứng minh. Ta có

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|U_k - u(t_k)\|_H^2 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\vartheta_k + \varrho_k\|_H^2 \le \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\vartheta_k\|_H^2 + \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\varrho_k\|_H^2.$$

Xét trường hợp cơ sở POD được xây dựng trong V. Theo Bổ đề 3.6, tồn tại $C > 0$ độc lập với m và ℓ sao cho

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\vartheta_k\|_H^2 \\
&\le \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m} C\Bigg(\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{\Delta t^2}{3}\|u_{tt}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + 3T(\alpha+1)\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k\Bigg) \\
&= 2C\Bigg(\|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{\Delta t^2}{3}\|u_{tt}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + 3T(\alpha+1)\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k\Bigg).
\end{aligned}$$

Hơn nữa, ta lại có

$$\frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\varrho_k\|_H^2 \le 2\alpha\sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k.$$

Chứng minh tương tự (2.24), ta được

$$\|\vartheta_0\|_H^2 \le \left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H^2.$$

Đặt $\tilde{C} = \max\left\{C, \frac{2}{3}e^{2c_8T}\|u_{tt}\|_{L^2(0,T;H)}^2, 6Te^{2c_8T}(\alpha+1) + 2\alpha\right\}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|Y_k - y(t_k)\|_H^2 &\le \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\vartheta_k\|_H^2 + \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\varrho_k\|_H^2 \\
&\le \tilde{C}\Bigg(\left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H^2 + \sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k + (\Delta t)^2\Bigg).
\end{aligned}$$

Ta cũng có kết quả tương tự khi cơ sở POD được xét trong H

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|Y_k - y(t_k)\|_H^2 \le \tilde{C}\Bigg(\left\|\phi - P^\ell\phi\right\|_H^2 + \|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k + (\Delta t)^2\Bigg).$$

Ta có điều phải chứng minh. □

3.2 Lược đồ Crank-Nicolson-POD-Galerkin

Với u là nghiệm của (3.6), ta giả sử các giả thiết sau thỏa mãn

A1. $u_{ttt} \in L^2(0,T;H)$.

A2. Tồn tại không gian định chuẩn W với phép nhúng liên tục vào V và hằng số $\hat{C} > 0$ thỏa mãn $u \in W^{2,2}(0,T;W)$ và

$$a(\varphi,\psi) \leq \hat{C}\|\varphi\|_H\|\psi\|_W \quad \text{với mọi } \varphi \in V \text{ và } \psi \in W. \tag{3.28}$$

A3. $u \in W^{2,2}(0,T;V)$.

Lược đồ Crank-Nicolson-POD-Galerkin cho bài toán (3.6) được phát biểu thông qua bài toán: Tìm $\{U_k\}_{k=0}^m$ trong V^ℓ thỏa mãn

$$\begin{aligned} &\langle \bar{\partial} U_k, \psi\rangle_H + \frac{1}{2}a(U_k + U_{k-1}, \psi) \\ &+ \langle B(\frac{U_k+U_{k-1}}{2}) + R(\frac{U_k+U_{k-1}}{2}), \psi\rangle_{V^*,V} = \langle f(t_k - \frac{\Delta t}{2}), \psi\rangle_H \end{aligned} \tag{3.29}$$

và $\langle U_0, \psi\rangle_H = \langle \phi, \psi\rangle_H$, với mọi $\psi \in V^\ell$ và $k = 1,\dots,m$. Đạo hàm rời rạc $\bar{\partial} U_k$ được cho bởi

$$\bar{\partial} U_k = \frac{U_k - U_{k-1}}{\Delta t}.$$

Định lý 3.8. *Tồn tại nghiệm $\{U_k\}_{k=0}^m$ của (3.29). Hơn nữa, ta có ước lượng sau:*

$$\|U_k\|_H \leq \|U_0\|_H + T\|f\|^2_{C([0,T];H)}, \ \forall k = 1,2,..,m. \tag{3.30}$$

Chứng minh.
Tồn tại. Cũng như các phần trước, ta sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh sự tồn tại nghiệm $\{U_k\}_{k=0}^m$ của (3.29). $U_0 = \sum_{i=1}^\ell \langle \phi, \psi_i\rangle \psi_i$ được xác định duy nhất. Giả sử U_{k-1} được xác định với $k \geq 1$. Biểu thức cho tại (3.29) được viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned} &2\langle \frac{U_k+U_{k-1}}{2}, \psi\rangle_H + a(\frac{U_k+U_{k-1}}{2}, \psi) \\ &+ \langle B(\frac{U_k+U_{k-1}}{2}) + R(\frac{U_k+U_{k-1}}{2}), \psi\rangle_{V^*,V} = \langle f(t_k - \frac{\Delta t}{2}) + 2U_{k-1}, \psi\rangle_H \end{aligned} \tag{3.31}$$

Xét ánh xạ $\mathcal{T}_k : V^\ell \to V^\ell$ được định nghĩa bởi $z = \mathcal{T}_k w$ với $z \in V^\ell$ là nghiệm của

$$\begin{aligned}2\langle z, \psi\rangle_H + \Delta t\big(a(z, \psi) + \langle B(w, z) + Rz, \psi\rangle_{V^*,V}\big) \\ = \langle \Delta t f(t_k - \frac{\Delta t}{2}) + 2U_{k-1}, \psi\rangle_H,\end{aligned} \tag{3.32}$$

với mọi $\psi \in V^\ell$. Dạng song tuyến tính

$$2\langle \cdot, \cdot\rangle_H + \Delta t\left(a(\cdot, \cdot) + \langle B(w, \cdot) + R(\cdot), \cdot\rangle_{V^*,V}\right)$$

là liên tục và V^ℓ-elliptic. Theo định lý Lax-Milgram tồn tại duy nhất z là nghiệm của (3.32) nên ánh xạ $\mathcal{T}_k$ được xác định. Hơn nữa, ta thấy rằng điểm bất động của $\mathcal{T}_k$ cũng là nghiệm của (3.31). Lấy $\psi = z$ trong (3.31) và sử dụng các điều kiện (3.2) và (3.4) ta được

$$\|z\|_V \le \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta}(\|f(t_k)\|_H + \frac{2}{\Delta t}\|U_{k-1}\|_H). \tag{3.33}$$

Ta đặt

$$M_k = \{w \in V^\ell : \|w\|_V \le \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta}(\|f(t_k)\|_H + \frac{2}{\Delta t}\|U_{k-1}\|_H)\} \subset V^\ell.$$

Từ (3.33) ta thấy rằng $\mathcal{T}_k$ đi từ M_k vào chính nó. Vì M_k là hình cầu đóng trong V^ℓ, do đó tập M_k bị chặn, đóng và lồi. Vì ảnh của $\mathcal{T}_k$ hữu hạn chiều, nên $\mathcal{T}_k$ là compact. Do đó, tồn tại điểm cố định $\frac{U_k+U_{k-1}}{2}$ dựa theo định lý điểm bất động định lý Schauder. Từ đó ta xác định được điểm U_k.

Ước lượng U_k. Chọn $\psi = \frac{U_k+U_{k-1}}{2}$ trong (3.29), ta được

$$\frac{1}{2}\left(\|U_k\|_H^2 - \|U_{k-1}\|_H^2\right) + \eta\Delta t\left\|\frac{U_k + U_{k-1}}{2}\right\|_V^2 \le \Delta t\|f(t_k - \frac{\Delta t}{2})\|_H\left\|\frac{U_k + Y_{k-1}}{2}\right\|_H.$$

Từ đó dẫn đến

$$(\|U_k\|_H - \|U_{k-1}\|_H)(\|U_k\|_H + \|U_{k-1}\|_H) \le \Delta t\big\|f(t_k - \frac{\Delta t}{2})\big\|_H(\|U_k\|_H + \|U_{k-1}\|_H). \tag{3.34}$$

Suy ra

$$\|U_k\|_H \le \|U_{k-1}\|_H + \Delta t\big\|f\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big)\big\|_H.$$

Kéo theo

$$\|U_k\|_H \le \|U_{k-1}\|_H + \Delta t\|f\|_{C([0,T];H)},\ \forall k = 1, 2, .., m.$$

Cộng vế theo vế các biểu thức trên theo k, ta được

$$\|U_k\|_H \le \|U_0\|_H + k\Delta t\|f\|_{C([0,T];H)},\ \forall k = 1, 2, .., m. \tag{3.35}$$

Vì $\Delta t = T/m$ nên

$$\|U_k\|_H \le \|U_0\|_H + T\|f\|_{C([0,T];H)},\ \forall k = 1, 2, .., m.$$

Định lý được chứng minh. □

Giả thiết rằng (3.29) có nghiệm duy nhất. Ta có bổ đề sau.

Bổ đề 3.9. *Giả sử u và $\{U_k\}_{k=0}^m$ lần lượt là nghiệm của (3.6) và (3.29). Giả thiết rằng Δt đủ nhỏ và các giả thiết A1,A2 và A3 thỏa mãn. Khi đó tồn tại hằng số $C > 0$ độc lập với m và ℓ sao cho*

$$\|\vartheta_k\|_H^2 \le C(\|\vartheta_0\|_H^2 + (\Delta t)^4 + \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k),$$

với mọi $1 \le k \le m$ nếu cơ sở POD xét trong V và

$$\|\vartheta_k\|_H^2 \le C(\|\vartheta_0\|_H^2 + (\Delta t)^4 + \|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k),$$

với mọi $1 \le k \le m$ nếu trường hợp cơ sở POD được xây dựng trong H.

Chứng minh. Ta sử dụng kí hiệu $\bar{\partial}\vartheta_k = (\vartheta_k - \vartheta_{k-1})/\Delta t, \forall k = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \bar{\partial}\vartheta_k, \psi \right\rangle_H + a\Big(\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}, \psi\Big) + \Big\langle R\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}, \psi \Big\rangle_{V^*,V} \\
&= \left\langle \bar{\partial}U_k - \bar{\partial}P^\ell u(t_k), \psi \right\rangle_H + \frac{1}{2}a\left(U_k + U_{k-1}, \psi\right) - \frac{1}{2}a\left(P^\ell\left(u(t_k) + u(t_{k-1})\right), \psi\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\langle R\left(U_k + U_{k-1}\right), \psi \right\rangle_{V^*,V} - \frac{1}{2}\left\langle RP^\ell\left(u(t_k) + u(t_{k-1})\right), \psi \right\rangle_{V^*,V} \\
&= \Big\langle f\Big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\Big), \psi \Big\rangle_H - \Big\langle B\Big(\frac{U_k + U_{k-1}}{2}\Big), \psi \Big\rangle_{V^*,V} - \left\langle \bar{\partial}P^\ell u(t_k), \psi \right\rangle_H \\
&\quad - a\Big(\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2}, \psi\Big) - \frac{1}{2}\left\langle RP^\ell\left(u(t_k) + u(t_{k-1})\right), \psi \right\rangle_{V^*,V} \\
&= \left\langle v_k, \psi \right\rangle_H + a\left(u_k, \psi\right) + \Big\langle B\Big(u\Big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\Big)\Big) - B\Big(\frac{U_k + U_{k-1}}{2}\Big), \psi \Big\rangle_{V^*,V} + \left\langle Rr_k, \psi \right\rangle_{V^*,V},
\end{aligned}$$

trong đó

$$v_k = u_t\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big) - \bar{\partial} P^\ell u\,(t_k) = u_t\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big) - \bar{\partial} u\,(t_k) + \bar{\partial} u\,(t_k) - \bar{\partial} P^\ell u\,(t_k)\,,$$
$$u_k = u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2},$$
$$r_k = u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big) - P^\ell\big(\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2}\big).$$

Thay $\psi = \frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2} \in V^\ell$, sử dụng điều kiện (3.4) ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\|\vartheta_k\|_H^2 - \|\vartheta_{k-1}\|_H^2\right) + \eta\Delta t \Big\|\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_V^2 \\
&\le \Delta t \Bigg(\|v_k\|_H \Big\|\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_H + \Big|\Big\langle B\big(u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big)\big) - B\big(\frac{U_k + U_{k-1}}{2}\big), \frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\rangle_{V^*,V}\Big| \\
&\quad + \hat{C}\|u_k\|_W \Big\|\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_H + \|Rr_k\|_{V^*} \Big\|\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_V \Bigg).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Theo Bổ đề 3.3, tồn tại $c_0 > 0$ phụ thuộc $\|R\|_{\mathcal{L}(V,V')}$ và η sao cho

$$\begin{aligned}
\|Rr_k\|_{V'} \Big\|\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_V &\le \|R\|_{\mathcal{L}(V,V')} \|r_k\|_V \Big\|\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_V \\
&\le \frac{\eta}{4}\Big\|\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_V^2 + c_0 \|r_k\|_V^2\,.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Nhấn mạnh rằng

$$\begin{aligned}
B\big(u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big)\big) - B\big(\frac{U_k + U_{k-1}}{2}\big) &= -B\big(u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big), \frac{U_k + U_{k-1}}{2} - u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big)\big) \\
&\quad - B\big(\frac{U_k + U_{k-1}}{2} - u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big)\big) \\
&\quad - B\big(\frac{U_k + U_{k-1}}{2} - u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big), u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big)\big).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Từ các điều kiện (3.5), (3.2) và Bổ đề 3.4, tồn tại hai hằng số $c_1, c_2 > 0$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big\langle B\big(u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big), \frac{U_k + U_{k-1}}{2} - u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big)\big), \frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\rangle_{V^*,V}\Big| \\
&= \Big|\Big\langle B\big(u\big(t_k - \frac{\Delta t}{2}\big), r_k\big), \frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\rangle_{V^*,V}\Big| \\
&\le c_B \alpha^{\delta_3/2} \|u\|_{C([0,T];V)} \|r_k\|_V \Big\|\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_H^{1-\delta_3} \Big\|\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_V^{\delta_3} \\
&\le \frac{\eta}{4}\Big\|\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_V^2 + c_1\Big\|\frac{\vartheta_k + \vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_H^2 + c_2 \|r_k\|_V^2\,.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Kết hợp điều kiện (3.5), (3.1), Bổ đề 3.3 và Bổ đề 3.4, tồn tại hằng số $c_3, c_4 > 0$ sao cho

$$\begin{aligned}
&\big|\big\langle B\big(\frac{U_k+U_{k-1}}{2}-u\big(t_k-\frac{\Delta t}{2}\big)\big),\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\rangle_{V^*,V}\big| \\
&=\big|\big\langle B\big(\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2},u\big(t_k-\frac{\Delta t}{2}\big)\big)+B\big(-r_k,u\big(t_k-\frac{\Delta t}{2}\big)\big),\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\rangle_{V^*,V}\big| \\
&\le c_B\|u\|_{C([0,T];V)}\Bigg(\big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\|_H\big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\|_V \\
&\qquad\qquad+\alpha^{\delta_3/2}\|r_k\|_V\big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\|_H^{1-\delta_3}\big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\|_V^{\delta_3}\Bigg) \\
&\le\frac{\eta}{4}\big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\|_V^2+c_3\big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\|_H^2+c_4\|r_k\|_V^2.
\end{aligned}\tag{3.40}$$

Từ (3.22), ta có $\|P^\ell u\|_V\le\|u\|_V$ với mọi $u\in V$. Vì $u\in C([0,T];V)$ nên

$$\|r_k\|_V\le\big\|u\big(t_k-\frac{\Delta}{t}\big)\big\|_V+\frac{\|u(t_k)+u(t_{k-1})\|_V}{2}\le 2\|u\|_{C([0,T];V)}.$$

Điều đó dẫn đến

$$\|r_k\|_H^{\delta_3}\|r_k\|_V^{1-\delta_3}\le\alpha^{\delta_3/2}\|r_k\|_V\le 2\alpha^{\delta_3/2}\|u\|_{C([0,T];V)}.$$

Suy ra tồn tại $c_5>0$ sao cho

$$\max_{1\le k\le m}\Big(\|r_k\|_H^{\delta_3}\|r_k\|_V^{1-\delta_3},\|r_k\|_V\Big)\le c_5.\tag{3.41}$$

Từ (3.5) và (3.15) dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\big\langle B\big(\frac{U_k+U_{k-1}}{2}-u\big(t_k-\frac{\Delta t}{2}\big),u\big(t_k-\frac{\Delta t}{2}\big)\big),\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\rangle_{V^*,V} \\
&=\big\langle B\big(\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2},r_k\big)+B(r_k,r_k),\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\rangle_{V^*,V}.
\end{aligned}\tag{3.42}$$

Kết hợp (3.41), (3.42), Bổ đề 3.3 và Bổ đề 3.4, tồn tại hai hằng số $c_6, c_7>0$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}
&\Big|\big\langle B\big(\frac{U_k+U_{k-1}}{2}-u\big(t_k-\frac{\Delta t}{2}\big),u\big(t_k-\frac{\Delta t}{2}\big)\big),\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\rangle_{V^*,V}\Big| \\
&\le c_Bc_5\Bigg(\big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\|_H\big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\|_V+\|r_k\|_V\big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\|_H^{1-\delta_3}\big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\|_V^{\delta_3}\Bigg) \\
&\le\frac{\eta}{4}\big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\|_V^2+c_6\big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\big\|_H^2+c_7\|r_k\|_V^2.
\end{aligned}\tag{3.43}$$

Ngoài ra ta có

$$\hat{C}\|u_k\|_W\Big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_H \le c_{10}\|u_k\|_W^2 + \Big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_H^2, \tag{3.44}$$

với $c_{10} = \dfrac{\hat{C}}{4}$. Đặt $w_k = u_t(t_k - \frac{\Delta t}{2}) - \bar{\partial}u\,(t_k)$ và $z_k = \bar{\partial}u\,(t_k) - \bar{\partial}P^\ell u\,(t_k)$. Từ định nghĩa v_k ta được $v_k = w_k + z_k$. Điều đó kéo theo

$$\|v_k\|_H\Big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_H \le \|w_k\|_H^2 + \|z_k\|_H^2 + \frac{1}{2}\Big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_H^2. \tag{3.45}$$

Biểu thức ở (3.36) đến (3.45) kéo theo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\vartheta_k\|_H^2 \le \frac{1}{2}\|\vartheta_{k-1}\|_H^2 + \Delta t\bigg(&\|w_k\|_H^2 + \|z_k\|_H^2\\ &+ c_8\Big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_H^2 + c_9\|r_k\|_V^2 + c_{10}\|u_k\|_W^2\bigg),\end{aligned} \tag{3.46}$$

trong đó $c_8 = \dfrac{3}{2} + c_1 + c_3 + c_6$ và $c_9 = c_0 + c_2 + c_4 + c_7$. Ta lại có

$$r_k = u_k - \varrho_k - \varrho_{k-1}.$$

Ta suy ra $\|r_k\|_V^2 \le 2\|u_k\|_V^2 + 4\|\varrho_k\|_V^2 + 4\|\varrho_{k-1}\|_V^2$. Hơn nữa, vì

$$\Big\|\frac{\vartheta_k+\vartheta_{k-1}}{2}\Big\|_H^2 \le \frac{1}{2}\|\vartheta_k\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\vartheta_{k-1}\|_H^2$$

nên

$$\begin{aligned}(1-c_8\Delta t)\|\vartheta_k\|_H^2 \le (1+c_8\Delta t)\|\vartheta_{k-1}\|_H^2 + 2\Delta t\Big(&\|w_k\|_H^2 + \|z_k\|_H^2\\ &+c_9\left(2\|u_k\|_V^2 + 4\|\varrho_k\|_V^2 + 4\|\varrho_{k-1}\|_V^2\right) + c_{10}\|u_k\|_W^2\Big).\end{aligned} \tag{3.47}$$

Giả sử rằng chọn $\Delta t \le \dfrac{1}{2c_8}$, khi đó $1 - c_8\Delta t \ge 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra

$$\frac{1}{1-c_8\Delta t} = \frac{1-c_8\Delta t + c_8\Delta t}{1-c_8\Delta t} = 1 + \frac{c_8\Delta t}{1-c_8\Delta t} \le 1 + 2c_8\Delta t.$$

Từ (3.47) ta có

$$\|\vartheta_k\|_H^2 \le (1+2c_8\Delta t)^2\big(\|\vartheta_{k-1}\|_H^2 + 2\Delta t\big(\|w_k\|_H^2 + \|z_k\|_H^2$$

$$+ c_9 \left(2\|u_k\|_V^2 + 4\|\varrho_k\|_V^2 + 4\|\varrho_{k-1}\|_V^2\right) + c_{10}\|u_k\|_W^2\big)\big).$$

Cộng các vế theo k ta được

$$\begin{aligned}
\|\vartheta_k\|_H^2 \le (1+2c_8\Delta t)^{2k} \cdot \Bigg(\|\vartheta_0\|_H^2 + \sum_{j=1}^{k} 2\Delta t \left(\|w_j\|_H^2 + \|z_j\|_H^2\right) \\
+ \sum_{j=1}^{k} 4c_9\Delta t\|u_j\|_V^2 + \sum_{j=1}^{k} 2c_{10}\Delta t\|u_j\|_W^2 + \sum_{j=0}^{k} 16c_9\Delta t\|\varrho_j\|_V^2\Bigg) \\
\le e^{4c_8\Delta t k} \cdot \Bigg(\|\vartheta_0\|_H^2 + \sum_{j=1}^{k} 2\Delta t \left(\|w_j\|_H^2 + \|z_j\|_H^2\right) \\
+ \sum_{j=1}^{k} 4c_9\Delta t\|u_j\|_V^2 + \sum_{j=1}^{k} 2c_{10}\Delta t\|u_j\|_W^2 + \sum_{j=0}^{k} 16c_9\Delta t\|\varrho_j\|_V^2\Bigg)
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$-2u_k = -2u\left(t_k - \frac{\Delta t}{2}\right) + u(t_k) + u(t_{k-1}) = \int_{t_k-\Delta/2}^{t_k}\int_{t-\Delta/2}^{t} u_{tt}(s)ds.$$

Tương tự (2.29), ta có

$$\int_{t_k-\Delta/2}^{t_k}\int_{t-\Delta/2}^{t} \|u_{tt}(s)\|_W ds \le \frac{\Delta t}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_{tt}(z)\|_W dz.$$

Suy ra

$$\|u_k\|_W \le \frac{\Delta t}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_{tt}(z)\|_W dz \Rightarrow \|u_k\|_W^2 \le \frac{(\Delta t)^3}{4}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_{tt}(z)\|_W^2 dz.$$

Tương tự ta cũng có

$$\|u_k\|_V \le \frac{\Delta t}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_{tt}(z)\|_V dz \Rightarrow \|u_k\|_V^2 \le \frac{(\Delta t)^3}{4}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_{tt}(z)\|_V^2 dz.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
\|\vartheta_k\|_H^2 \le e^{4c_8\Delta t k} \cdot \Bigg(\|\vartheta_0\|_H^2 + \sum_{j=1}^{k} 2\Delta t \left(\|w_j\|_H^2 + \|z_j\|_H^2\right) \\
+ c_9(\Delta t)^4 \int_0^{t_k} \|u_{tt}(z)\|_V^2 dz + \frac{c_{10}}{2}(\Delta t)^4 \int_0^{t_k} \|u_{tt}(z)\|_W^2 dz + \sum_{j=0}^{k} 16c_9\Delta t\|\varrho_j\|_V^2\Bigg).
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự (2.30), dẫn đến

$$\sum_{j=1}^{k} \|w_j\|_H^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \|w_j\|_H^2 \leq \frac{(\Delta t)^3}{64} \int_0^T \|u_{ttt}(s)\|_H^2 ds.$$

Hơn nữa, ta có đánh giá

$$\Delta t \sum_{j=1}^{k} \|z_j\|_H^2 \leq \frac{T}{m} \sum_{j=1}^{m} \left\|\bar{\partial} u\left(t_i\right) - \bar{\partial} P^\ell u\left(t_i\right)\right\|_H^2 \leq 3T\alpha \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k$$

nếu cơ sở POD được dựng trong V, hoặc

$$\Delta t \sum_{j=1}^{k} \|z_j\|_H^2 \leq \frac{T}{m} \sum_{j=1}^{m} \left\|\bar{\partial} u\left(t_i\right) - \bar{\partial} P^\ell u\left(t_i\right)\right\|_H^2 \leq 3T\alpha \|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k$$

nếu cơ sở POD được xét trong H. Tương tự, ta có ước lượng

$$\Delta t \sum_{j=0}^{k} \|\varrho_k\|_V^2 \leq \frac{T}{m} \sum_{j=0}^{m} \|\varrho_k\|_V^2 \leq 3T \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k$$

và

$$\Delta t \sum_{j=0}^{k} \|\varrho_k\|_V^2 \leq \frac{T}{m} \sum_{j=0}^{m} \|\varrho_k\|_V^2 \leq 3T\|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k$$

ứng với lần lượt ứng hai trường hợp cơ sở POD trong V và H. Do đó

$$\begin{aligned}\|\vartheta_k\|_H^2 \leq e^{4c_8T} \cdot \Bigg(& \|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{(\Delta t)^4}{32}\|u_{ttt}\|_{L^2(0,T,H)}^2 + c_9(\Delta t)^4 \|u_{tt}\|_{L^2(0,t_k,V)}^2 \\ & + \frac{c_{10}}{2}(\Delta t)^4 \|u_{tt}\|_{L^2(0,t_k,W)}^2 + (16c_9 + 2\alpha)3T \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k\Bigg)\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\|\vartheta_k\|_H^2 \leq e^{4c_8T} \cdot \Bigg(& \|\vartheta_0\|_H^2 + \frac{(\Delta t)^4}{32}\|u_{ttt}\|_{L^2(0,T,H)}^2 + c_9(\Delta t)^4 \|u_{tt}\|_{L^2(0,t_k,V)}^2 \\ & + \frac{c_{10}}{2}(\Delta t)^4 \|u_{tt}\|_{L^2(0,t_k,W)}^2 + (16c_9 + 2\alpha)3T\|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k\Bigg).\end{aligned}$$

Đặt

$$C = e^{4c_8T} \max \Big\{1, \frac{1}{32}\|u_{ttt}\|_{L^2(0,T,H)}^2 + c_9 \|u_{tt}\|_{L^2(0,T,V)}^2$$

$$+ \frac{c_{10}}{2} \|u_{tt}\|^2_{L^2(0,T,W)}, (16c_9 + 2\alpha)3T\}$$

độc lập với ℓ và m. Từ đó

$$\|\vartheta_k\|^2_H \le C\big(\|\vartheta_0\|^2_H + (\Delta t)^4 + \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k\big)$$

nếu cơ sở POD được xây dựng trong V và

$$\|\vartheta_k\|^2_H \le C\big(\|\vartheta_0\|^2_H + (\Delta t)^4 + \|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k\big)$$

nếu trường hợp cơ sở POD được xây dựng trong H. □

Định lý 3.10. *Giả sử u và $\{U_k\}_{k=0}^m$ lần lượt là nghiệm của (3.6) và (3.29). Giả thiết rằng Δt đủ nhỏ và các giả thiết A1, A2 và A3 thỏa mãn. Khi đó tồn tại hằng số $\tilde{C} > 0$ độc lập với m và ℓ sao cho*

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \|U_k - u(t_k)\|^2_H \le \tilde{C}\big(\|\phi - P^\ell\phi\|^2_H + (\Delta t)^4 + \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k\big)$$

và

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \|U_k - u(t_k)\|^2_H \le \tilde{C}\big(\|\phi - P^\ell\phi\|^2_H + (\Delta t)^4 + \|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k\big)$$

với mọi $1 \le k \le m$, lần lượt ứng với cơ sở POD trong V và H.

Chứng minh. Nếu cơ sở POD được xét trong V, ta có

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \|U_k - u(t_k)\|^2_H = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \|\vartheta_k + \varrho_k\|^2_H \le \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m} \|\vartheta_k\|^2_H + \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m} \|\varrho_k\|^2_H.$$

Theo Bổ đề 3.9, tồn tại hằng số $C > 0$ độc lập với ℓ và m sao cho

$$\begin{aligned}\frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m} \|\vartheta_k\|^2_H &\le \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m} C\big(\|\vartheta_0\|^2_H + (\Delta t)^4 + \sum_{j=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_j\big)\\ &\le 2C\big(\|\vartheta_0\|^2_H + (\Delta t)^4 + \sum_{j=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_j\big).\end{aligned}$$

Hơn nữa, vì $\dfrac{2}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\|\varrho_k\|_H^2 \le 2\alpha \sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k$ và $\|\vartheta_0\|_H^2 \le \big\|\phi - P^\ell\phi\big\|_H^2$ nên với $\tilde{C} = 2C + 2\alpha$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|U_k - u(t_k)\|_H^2 &\le \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\vartheta_k\|_H^2 + \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}\|\varrho_k\|_H^2\\ &\le \tilde{C}\big(\,\big\|\phi - P^\ell\phi\big\|_H^2 + \sum_{k=\ell+1}^{d}\tilde{\lambda}_k + (\Delta t)^2\big).\end{aligned}$$

Tương tự nếu cơ sở POD được xây dựng trong H ta được

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|U_k - u(t_k)\|_H^2 \le \tilde{C}\big(\,\big\|\phi - P^\ell\phi\big\|_H^2 + (\Delta t)^4 + \|S\|_2\sum_{k=\ell+1}^{d}\hat{\lambda}_k\big).$$

Định lý được chứng minh. □

CHƯƠNG 4

GIẢI SỐ CHO MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP POD

Chương này trình bày một số ví dụ về tính gần đúng nghiệm của các phương trình parabol bằng phương pháp POD-Galerkin. Ngoài ra, ta có thể so sánh sai số khi cơ sở POD trên V và trên H với hai trường hợp các snapshot chứa và không chứa đạo hàm rời rạc. Sai số ghi nhận được đối chiếu với các kết quả có được trong các Định lý 2.6 ở Chương 2 và Định lý 3.7 ở Chương 3. Một số kết quả giải số ứng dụng phương pháp POD-Galerkin tương tự được trình bày tại [6, 25, 26, 27],... Trong quá trình lập trình tác giả có tham khảo mã code ở `https://www.janheiland.de/post/fenics-burger-pod-dmd/`. Mã nguồn được sử dụng trong luận văn này có thể tham khảo tại `https://github.com/Quy97/THESIS-MASTER`.

4.1 Xây dựng các snapshot

Các snapshot được xây dựng bằng phương pháp phần tử hữu hạn với bậc tự do dof với trường thời gian rời rạc có N_t điểm trên lưới thời gian.

Không gian phần tử hữu hạn cho bởi

$$V^h = \text{span}\,\{\varphi_1, \dots, \varphi_{dof}\} \subset H^1(\Omega).$$

Khi đó nghiệm xấp xỉ bằng phương pháp phần tử hữu hạn u_{FE} được tính thông qua tổ hợp tuyến tính các $\{\varphi_i\}_{i=1}^{dof}$. Tồn tại ma trận các hệ số $U \in \mathbb{R}^{dof \times N_t}$ sao cho

$$u_{FE}\,(t_{j-1}) = u^N\,(t_{j-1}) = \sum_{i=1}^{dof} U_{ij}\varphi_i \text{ với } j = 1, \dots, N_t.$$

Ta xây dựng các snapshot như sau

$$y_j^h = \sum_{i=1}^{dof} Y_{ij}\varphi_i \;\; \text{mọi } j = 1, \dots, M_t$$

trong đó $M_t = 2N_t - 1$, $Y \in \mathbb{R}^{dof \times M_t}$ được cho bởi

$$Y_{\cdot,j} = U_{\cdot,j} \;\; \text{mọi } j = 1, \dots, N_t$$

và

$$Y_{\cdot,j+N_t} = \frac{1}{\Delta t}\left(Y_{\cdot,j+1} - Y_{\cdot,j}\right) \;\; \text{mọi } j = 1, \dots, N_t - 1.$$

Bây giờ ta xét không gian Euclidean $\mathbb{R}^m$ với trọng W, dựa vào nhận xét 1.12, ta có thuật toán tìm cơ sở POD như sau:

1. Phân tích SVD cho ma trận $\dfrac{1}{\sqrt{n}}L^TY = USV^*$ với $W = LL^T$ là phân tích Cholesky của W,
2. Đặt U_ℓ là ma trận ℓ cột đầu tiên của ma trận U,
3. Các vector trong cơ sở POD hạng ℓ tương ứng là các cột của ma trận $(L^T)^{-1}U_\ell$.

4.2 Mô hình giảm số chiều cho hệ động lực

Trước hết, ta xét hệ động lực không tuyến tính. Với $T > 0$ ta xem bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= Ay(t) + f(t, y(t)) \;\; \text{với mọi } t \in (0, T], \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

trong đó $y_0 \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là ma trận cho trước, $f : [0,T]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Giả sử rằng (4.1) có nghiệm duy nhất ([23]). Sau đây ta giới thiệu mô hình giảm số chiều với POD ứng với bài toán (4.1). Giả thiết rằng ta đã xác định cơ sở POD bậc ℓ là $\{\psi_j\}_{j=1}^{\ell}$ với rank $\ell \in \{1,\dots,m\}$ trong $\mathbb{R}^m$ với trọng W. Khi đó ta có biểu diễn

$$y^\ell(t) = \sum_{j=1}^{\ell} \underbrace{\langle y^\ell(t), \psi_j\rangle_W}_{=:\mathrm{y}_j^\ell(t)} \psi_j \quad \text{với mọi } t \in [0,T], \tag{4.2}$$

trong đó các hệ số Fourier y_j^ℓ, $1 \le j \le \ell$, là các hàm từ $[0,T]$ vào $\mathbb{R}$. Bởi vì

$$y(t) = \sum_{j=1}^{m} \langle y(t), \psi_j\rangle_W \psi_j \quad \text{với mọi } t \in [0,T]$$

nên $y^\ell(t)$ có thể xây dựng để xấp xỉ $y(t)$ với $\ell < m$. Thay (4.2) vào (4.1) dẫn đến

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\ell} \dot{\mathrm{y}}_j^\ell(t)\psi_j = \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{y}_j^\ell(t) A\psi_j + f\left(t, y^\ell(t)\right) \quad \text{với mọi } t \in (0,T], \\ &\sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{y}_j^\ell(0)\psi_j = y_0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Kết hợp (4.3) và $\langle \psi_j, \psi_i\rangle_W = \delta_{ij}$ ta được

$$\dot{\mathrm{y}}_i^\ell(t) = \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{y}_j^\ell(t)\langle A\psi_j, \psi_i\rangle_W + \left\langle f\left(t, y^\ell(t)\right), \psi_i\right\rangle_W \tag{4.4}$$

với $1 \le i \le \ell$ và $t \in (0,T]$. Ta đặt

$$\mathrm{A} = ((\mathrm{a}_{ij})) \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell} \text{ với } \mathrm{a}_{ij} = \langle A\psi_j, \psi_i\rangle_W,$$

ánh xạ vector

$$\mathrm{y}^\ell = \left(\mathrm{y}_1^\ell \cdots \mathrm{y}_\ell^\ell\right)^T : [0,T] \to \mathbb{R}^\ell$$

và thành phần không tuyến tính $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_\ell)^T : [0,T]\times\mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell$ cho bởi

$$F_i(t,\mathrm{y}) = \left\langle f\big(t, \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{y}_j\psi_j\big), \psi_i\right\rangle_W \text{ với } t \in [0,T] \text{ và } \mathrm{y} = (\mathrm{y}_1,\dots,\mathrm{y}_\ell) \in \mathbb{R}^\ell.$$

Khi đó (4.4) có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} &\dot{\mathrm{y}}^\ell(t) = \mathrm{A}\mathrm{y}^\ell(t) + \mathrm{F}\left(t, \mathrm{y}^\ell(t)\right) \quad \text{với } t \in (0,T] \\ &\mathrm{y}^\ell(0) = \mathrm{y}_0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

trong đó $\mathrm{y}_0 = (\langle y_0, \psi_1\rangle_W, \cdots, \langle y_0, \psi_\ell\rangle_W) \in \mathbb{R}^\ell$.

Hệ (4.5) được gọi là hình chiếu POD-Galerkin của (4.1). Trong trường hợp $\ell \ll m$, hệ ℓ chiều (4.5) là mô hình giảm số chiều của (4.1).

4.3 Ứng dụng POD vào một số phương trình đạo hàm riêng

Phương trình Burgers 2D

Đối với một thông số độ nhớt nhất định ν và trong thời gian $t > 0$, chúng tôi xem xét phương trình 2D Burgers trên hình vuông $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$

$$\begin{gathered} u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u = 0 \ \text{ trong } Q = (0,T) \times \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 \ \text{ trong } Q \end{gathered} \tag{4.6}$$

với điều kiện biên Neumann bằng không và điều kiện ban đầu

$$u\,|_{t=0}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\left(4x_1^2 + 2x_2^2\right)}.$$

Nghiệm yếu của (4.6) được cho bởi

$$\int_\Omega u_t \cdot v dx + \nu \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot v dx = 0, \tag{4.7}$$

với mọi $v \in H^1(\Omega)$. Trong quá trình lập trình, tác giả sử dụng một số thư viện có sẵn trong Python trên Google Colab, đặc biệt mô đun *dolfin* là giao diện Python cho *FEniCS* ([28]). Ngoài ra, mô đun *ldfnp_ext_cholmod* là một trình tối ưu hóa sự phân tích Cholesky của mô đun *sksparse*. Nó có sẵn trên github[1] và trở lại thư viện *numpy*, trong trường hợp *sksparse* không khả dụng.

[1] `https://github.com/highlando/spacetime_galerkin_pod/blob/master/multidim_galerkin_pod/ldfnp_ext_cholmod.py`

Chúng tôi đã tính toán nghiệm gần đúng cho phương trình Burgers bằng cách sử dụng lược đồ phần tử hữu hạn Euler-POD-Galerkin lùi. Đầu tiên, lưới được định nghĩa - ở đây lưới có được bằng cách chia hình vuông $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ thành các tam giác bằng nhau và được điều khiển bởi tham số N. Ta chọn giá trị $N = 50$ và các hàm cơ sở trong không gian phần tử hữu hạn có bậc hai và liên tục toàn cục, khi đó bậc từ do là $dof = 20402$. Ngoài ra T và Δt được chọn lần lượt là 0.8 và 0.008 với $N_t = 101$ điểm lưới và giả thiết độ nhớt $\nu = 10^{-4}$. Đặt

$$V^h = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{dof}\} \subset H^1(\Omega)$$

là không gian các phần tử hữu hạn. Ta xấp xỉ nghiệm $u(t, x)$ của (4.6) bằng $u^N(t, x) \in V^h$

$$u_{FE}(t_{j-1}) = u^N(t_{j-1}) = \sum_{i=1}^{dof} U_{ij}\varphi_i \text{ với mọi } j = 1, \ldots, N_t.$$

Ta thế $u^N(t, x)$ vào (4.7) ta được

$$\int_\Omega u_t^N \cdot \varphi_i dx + \nu \int_\Omega \nabla u^N \nabla \varphi_i dx + \int_\Omega (u^N \cdot \nabla) u^N \cdot \varphi_i dx = 0. \tag{4.8}$$

Đặt

$$u^N(t, x) = \sum_{i=1}^{dof} \mathrm{u}_i^N(t)\varphi_i(x) \text{ với mọi } (t, x) \in \bar{Q} = [0, T] \times \Omega.$$

Ta định nghĩa ma trận khối lượng $M \in \mathbb{R}^{dof \times dof}$

$$M_{ij} = \int_\Omega \varphi_j \varphi_i dx \text{ với mọi } i, j \in \{1, 2, .., dof\}, \tag{4.9}$$

ma trận $A \in \mathbb{R}^{dof \times dof}$ sao cho $A = \dfrac{1}{\nu} S$ với

$$S_{ij} = \int_\Omega \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i dx \text{ với mọi } i, j \in \{1, 2, .., dof\}, \tag{4.10}$$

và vector ứng với thành phần phi tuyến $BN(\mathrm{u}^N(t)) \in \mathbb{R}^{dof}$ xác định bởi

$$BN(\mathrm{u}^N(t))_i = \int_\Omega (u^N \cdot \nabla) u^N \cdot \varphi_i dx \text{ với mọi } 1 \le i \le dof.$$

Hàm vector $\mathrm{u}^N(t)$ cho bởi $\mathrm{u}^N(t) = \left(\mathrm{u}_i^N(t)\right)_{1\le i\le dof}$, từ (4.8), ta suy ra

$$M\mathrm{u}_t^N(t) + A\mathrm{u}^N(t) + BN(\mathrm{u}^N(t)) = 0. \tag{4.11}$$

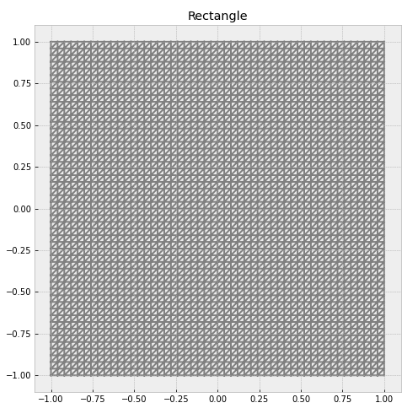
Mặt khác, nếu ta phân rã thời gian với bước nhảy Δt, lưới $\{t_k\}$ được xác định bởi $t_k = t_{k-1} + \Delta t$ với $k = 1, ..., N_t$ và $t_0 = 0$. Ta kí hiệu $\mathrm{u}^{N,k} = \mathrm{u}^N(t_k)$ và áp dụng phương pháp Euler lùi với xấp xỉ của đạo hàm

$$M\mathrm{u}_t^N(t) = M\frac{\mathrm{u}^N(t_k) - \mathrm{u}^N(t_{k-1})}{\Delta t}$$

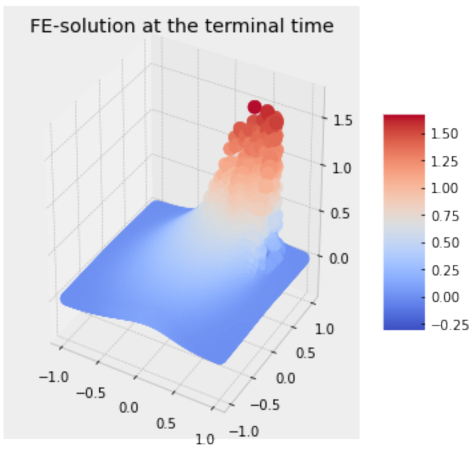
ta được

$$M\mathrm{u}^{N,k} + \Delta t A\mathrm{u}^{N,k} + \Delta t BN(\mathrm{u}^{N,k}) = M\mathrm{u}^{N,k-1}. \tag{4.12}$$

Lưới cũng như nghiệm tính theo phương pháp phần tử hữu hạn tại thời điểm T được biểu diễn trong hình 4.1. Ngoài ra, 6 snapshot tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$ được biểu diễn trong hình 4.2. Vì M là ma trận đối xứng, xác định dương, hệ (4.11) có dạng



(a) Miền Ω và lưới.



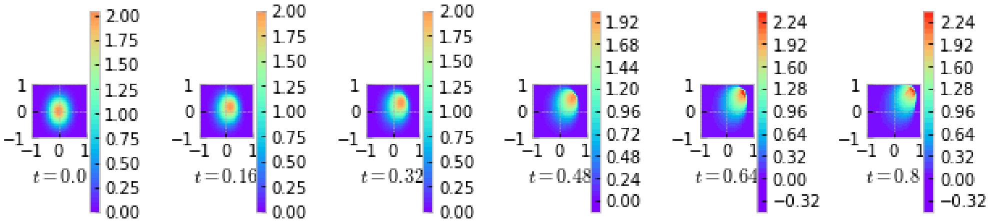
(b) Nghiệm tại thời gian T.

Hình 4.1: Lưới của miền Ω và nghiệm phương trình Burgers 2D giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn tại thời điểm T.

$$\mathrm{u}_t^N(t) = M^{-1}\left(-A\mathrm{u}^N(t) - BN(\mathrm{u}^N(t))\right). \tag{4.13}$$

Nhận xét rằng M có kích thước lớn $dof \times dof$ nên thay vì tính trực tiếp M^{-1}, ta có thể sử dụng phân tích Cholesky của M ([12])

$$M = LL^T, \text{ trong đó } L \text{ là ma trận tam giác dưới.}$$



Hình 4.2: Nghiệm phương trình Burgers 2D giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn tại thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$.

Ta xây dựng mô hình giảm số chiều ứng với hệ cho ở (4.13) ứng với hai trường hợp trong $H = L^2(\Omega)$ và $V = H^1(\Omega)$. Các snapshot được xây dựng tương tự như trình bày trong phần 5.1. Dựa vào tỉ lệ $\mathcal{E}(\ell) = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i}$, ta chọn xây dựng cơ sở POD hạng $\ell = 30$.

Đối với trường hợp cơ sở POD được xây dựng trong H, chọn $W = M$, ta được mô hình giảm số chiều của (4.13)

$$u_t^{red}(t) = -A_{red} u^{red}(t) - BN_{red}\left(u^{red}(t)\right),$$

trong đó $A_{red} = \left((a_{ij}^{red})\right) \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ với $a_{ij}^{red} = \langle A\psi_j, \psi_i \rangle_{\mathbb{R}^m}$ và vector thành phần phi tuyến $BN_{red}\left(u^{red}(t)\right)$ được định nghĩa

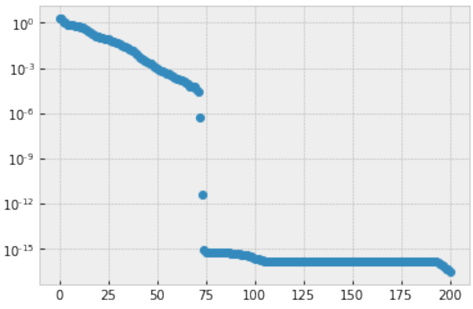
$$BN_{red}\left(u^{red}(t)\right)_i = \left\langle BN(\Psi_\ell u^{red}(t)), \psi_i \right\rangle,$$

với Ψ_ℓ là ma trận có ℓ cột ứng với ℓ cột đầu tiên của ma trận Ψ với $\Psi \in \mathbb{R}^{dof \times d}$ là ma trận hệ số của cơ sở POD trong không gian V^h

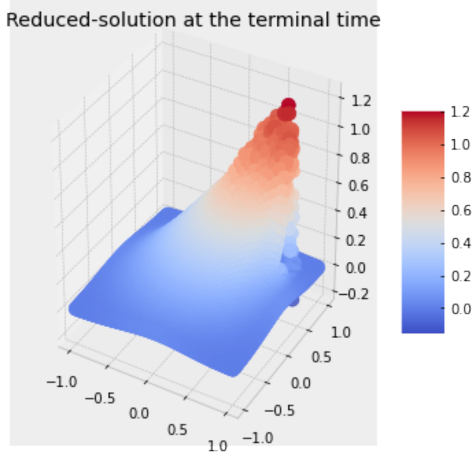
$$\psi_k = \sum_{i=1}^{dof} \Psi_{ik} \varphi_i \text{ với } k = 1, \ldots, d.$$

Sự biến thiên của các giá trị riêng $\hat{\lambda}_i$ và nghiệm phương trình Burgers 2D thông qua mô hình giảm số chiều tại thời điểm T được biểu diễn qua hình 4.3(a) và 4.3(b) (các snapshot chứa đạo hàm rời rạc) hoặc hình 4.3(c) và 4.3(d) (các snapshot không chứa đạo hàm rời rạc).

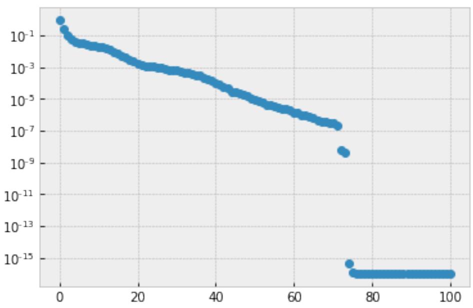
Nghiệm giải bằng mô hình giảm số chiều với cơ sở PO trong H tại thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84$ và $T = 0.8\}$ ứng với hai trường hợp các snapshot chứa và không chứa đạo hàm rời rạc được cho ở hình 4.4.



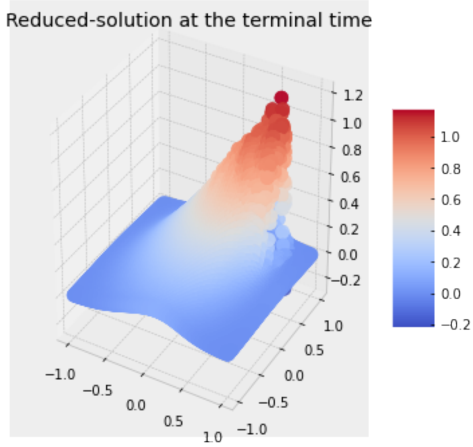
(a)



(b)

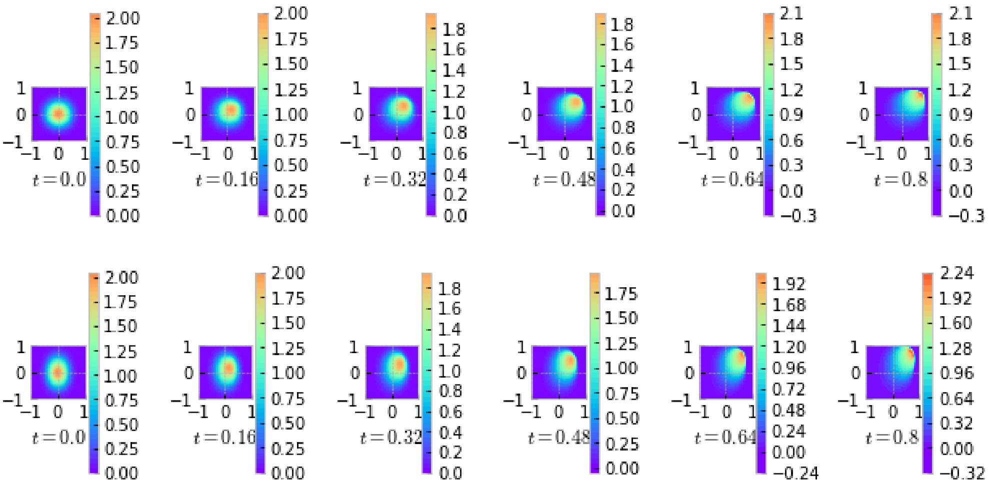


(c)



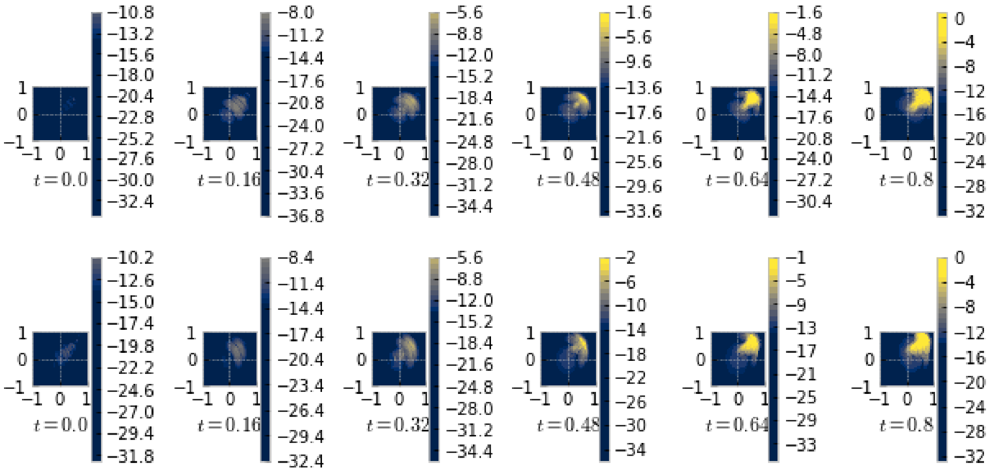
(d)

Hình 4.3: Sự biến thiên các giá trị riêng và nghiệm phương trình Burgers 2D thông qua mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong H tại thời điểm T.



Hình 4.4: Nghiệm của phương trình Burgers 2D được tính bởi mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong H tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$.

Ngoài ra, sai số giữa nghiệm giải thông qua mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong $L^2(\Omega)$ so với các snapshot ban đầu tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$ thể hiện trong hình 4.5 lần lượt ứng với hai trường hợp khi có hoặc không có đạo hàm rời rạc trong các snapshot, trong đó các vùng màu càng sáng thì sai số càng lớn.



Hình 4.5: Sai số giữa nghiệm của phương trình Burgers 2D giải bằng mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong H so với các snapshot tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$.

Trường hợp cơ sở POD được xây dựng trong V, khi xây dựng mô hình giảm số chiều, ta chọn trong $W = M + S$, trong đó M và S là hai ma trận được định nghĩa tại (4.9) và (4.10).

$$u_t^{red}(t) = -A_{red} u^{red}(t) - BN_{red}\left(u^{red}(t)\right),$$

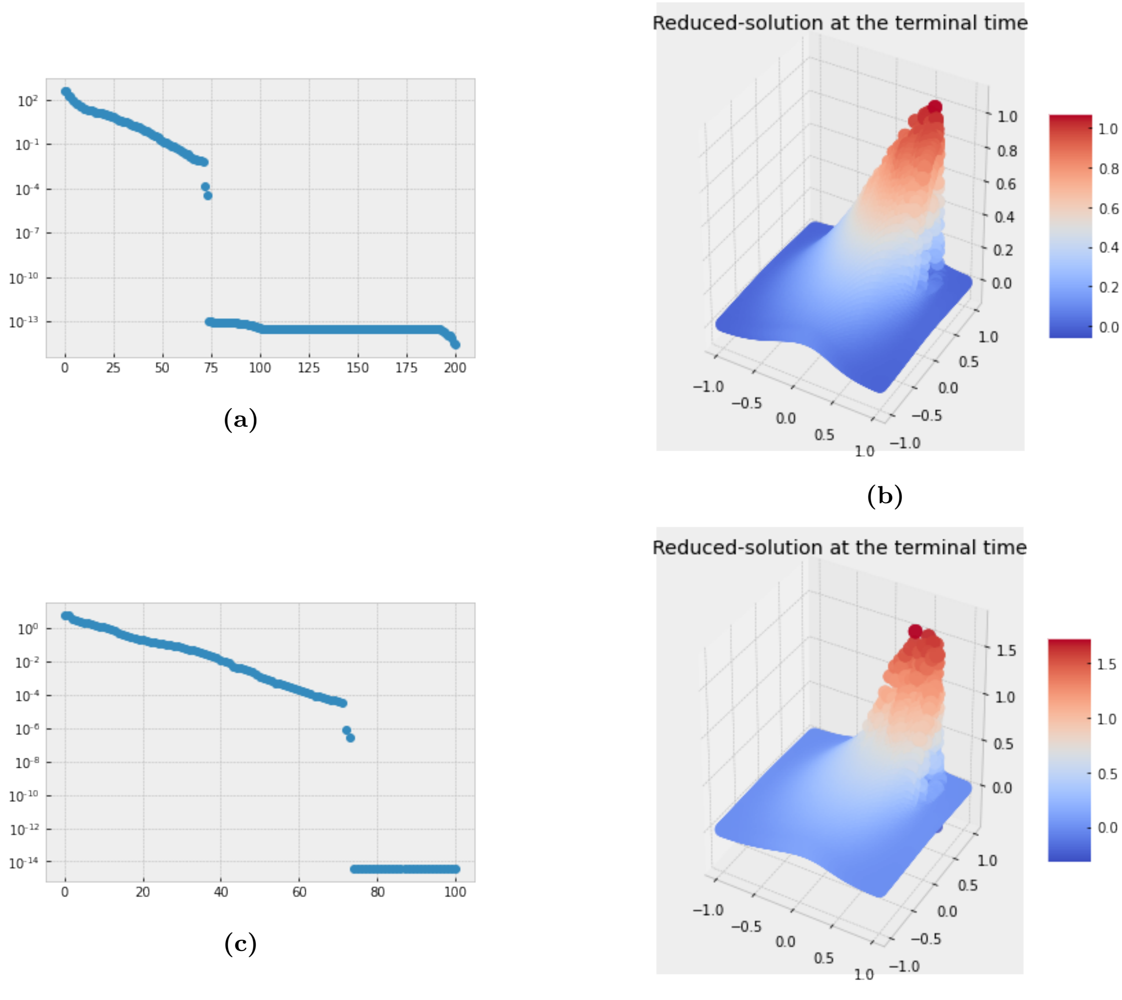
trong đó $A_{red} = \left((a_{ij}^{red})\right) \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ với $a_{ij}^{red} = \langle A\psi_j, \psi_i\rangle_{\mathbb{R}^m} + \left\langle SM^{-1}A\psi_j, \psi_i\right\rangle_{\mathbb{R}^m}$ và vector thành phần phi tuyến $BN_{red}\left(u^{red}(t)\right)$ được định nghĩa

$$BN_{red}\left(u^{red}(t)\right)_i = \left\langle M^{-1}BN(\Psi_\ell u^{red}(t)), \psi_i\right\rangle_W,$$

trong đó Ψ_ℓ là ma trận có ℓ cột ứng với ℓ cột đầu tiên của ma trận Ψ với $\Psi \in \mathbb{R}^{dof \times d}$ là ma trận hệ số của cơ sở POD trong không gian V^h

$$\psi_k = \sum_{i=1}^{dof} \Psi_{ik}\varphi_i \text{ với } k = 1, \ldots, d.$$

Sự biến thiên của các giá trị riêng $\tilde{\lambda}_k$ và nghiệm tại thời điểm cuối T được thể hiện trong hình 4.6(a) và 4.6(b) nếu có đạo hàm rời rạc trong các snapshot, ngược lại nếu các snapshot không chứa đạo hàm rời rạc sẽ được biểu diễn ở hình 4.6(c) và 4.6(d).

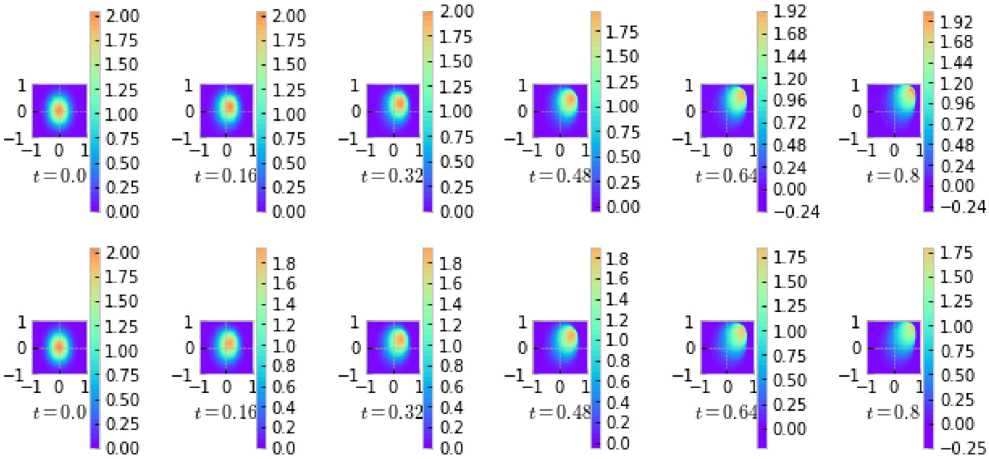


(a) **(b)** **(c)** **(d)**

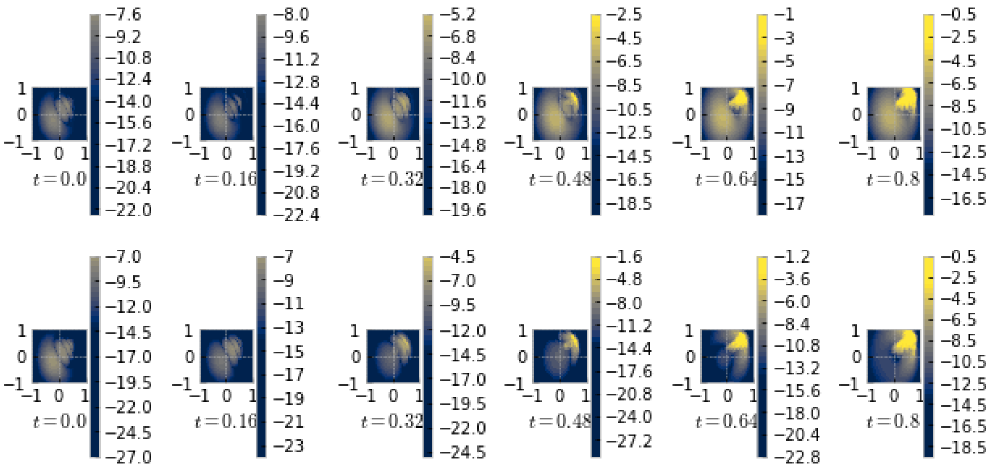
Hình 4.6: Sự biến thiên các giá trị riêng và nghiệm phương trình Burgers 2D thông qua mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong V tại thời điểm T.

Nghiệm của mô hình giảm số chiều với cơ sở POD xây dựng trong $H^1(\Omega)$ tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$ được biểu diễn như trong hình 4.7 lần lượt ứng với hai trường hợp chứa và không chứa đạo hàm rời rạc trong các snapshot.

Sai số giữa nghiệm giải bằng mô hình giảm số chiều được xây dựng dựa trên cơ sở POD trong $H^1(\Omega)$ và các snapshot được ghi nhận bởi phương pháp phần tử hữu hạn tại cùng thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$ được thể hiện trong hình 4.8 lần lượt ứng với khi có hoặc không có đạo hàm rời rạc trong các snapshot. Độ sáng càng lớn sai số càng nhiều.



Hình 4.7: Nghiệm của phương trình Burgers 2D được tính bởi mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong V tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$.



Hình 4.8: Sai số giữa nghiệm của phương trình Burgers 2D giải bằng mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong V so với các snapshot tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$.

Tổng kết lại, bằng hình ảnh ghi lại được một số thời điểm và hình ảnh sai số, có thể thấy nghiệm giải thông qua mô hình giảm số chiều bằng phương pháp Euler-POD-Galerkin lùi 'khá giống' với các snapshot được ghi nhận ban đầu. Để biết độ hiệu quả khi áp dụng phương pháp Euler-POD-Galerkin lùi trong việc giải mô hình giảm số chiều cho bài toán Burgers 2D, trong trường hợp cơ sở POD được xây dựng trong $L^2(\Omega$ hay $H^1(\Omega)$ và trong trường hợp có hay không có đạo hàm rời rạc $\bar{\partial} u\,(t_k)$ trong các snapshot, ta cần ước tính đại lượng

$$\varepsilon = \frac{1}{N_t - 1} \sum_{k=1}^{N_t - 1} \|u_{FE}(t_k) - U_k\|_H^2.$$

Kết quả có được thông qua bảng sau đây.

	$\mathcal{E}(\ell) = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i}$	$\|\phi - P^\ell \phi\|_H$	ε
Cơ sở POD trong V	0.9875092	$1.92\ .10^{-2}$	0.0034006
Cơ sở POD trong H	0.9976546	$1.486\ .10^{-3}$	0.0024969
Cơ sở POD trong V, chứa $\bar{\partial} u\,(t_k)$	0.99641666	$1.429\ .10^{-2}$	0.0050252
Cơ sở POD trong H, chứa $\bar{\partial} u\,(t_k)$	0.98047622	$6.448\ .10^{-4}$	0.0023472

Bảng 4.1: Bảng sai số giữa nghiệm của phương trình Burgers 2D thông qua mô hình giảm số chiều được giải bằng phương pháp Euler-POD-Galerkin lùi so với các snapshot.

Nhận xét 4.1. Nếu đạo hàm rời rạc $\bar{\partial} u\,(t_k)$ được chứa trong các snapshot, theo Định lý 3.7, tồn tại $\tilde{C}$ độc lập với m và ℓ sao cho

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|U_k - u(t_k)\|_H^2 \le \tilde{C} \Big(\left\|\phi - P^\ell \phi\right\|_H^2 + \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k + (\Delta t)^2 \Big)$$

và

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|U_k - u(t_k)\|_H^2 \le \tilde{C} \Big(\left\|\phi - P^\ell \phi\right\|_H^2 + \|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k + (\Delta t)^2 \Big)$$

lần lượt ứng với hai trường hợp cơ sở POD được xây dựng trong V và H. Dựa vào bảng 4.1 và sự thay đổi của các giá trị riêng ở các hình 4.3 và hình 4.6, ta thấy các đại lượng $\|\phi - P^\ell \phi\|_H$ và $\sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k$ là hai đại lượng không quá nhỏ, cỡ 10^{-4} đến 10^{-2}. Từ đó sai số thực tế cho ở bảng 4.1 phù hợp với hai ước lượng trên.

Phương trình truyền nhiệt

Tiếp đến, ta xét đến là phương trình truyền nhiệt trong môi trườn có hằng số truyền nhiệt ν trên hình vuông $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ bị khoét lỗ tròn bán kính 0.5.

$$\begin{aligned} u_t - \nu \Delta u = 0 &\ \text{ trong } Q = (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 &\ \text{ trong } Q, \end{aligned} \tag{4.14}$$

với điều kiện biên Neumann bằng không và điều kiện ban đầu

$$u\,|_{t=0}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3e^{-\left(4x_1^2+2x_2^2\right)} \\ e^{-\left(2x_1^2+4x_2^2\right)} \end{bmatrix}.$$

Nghiệm yếu của (4.14) được cho bởi

$$\int_\Omega u_t \cdot v dx + \nu \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = 0 \quad \text{với mọi } v \in H^1(\Omega). \tag{4.15}$$

Ta vẫn dùng phương pháp phần tử hữu hạn để xây dựng các snapshot và sử dụng lược đồ Galerkin Euler-POD lùi để xét và giải mô hình giảm số chiều. Không gian phần tử hữu hạn ta chọn có bậc tử do là $dof = 16470$. Ngoài ra, ta vẫn giả sử $T = 0.8$ và Δt được chọn là 0.008 với $N_t = 101$ điểm lưới và $\nu = 0.02$. Tương tự như ví dụ phương trình Burgers 2D, ta xấp xỉ nghiệm $u(t, x)$ của (4.14) bằng $u^N(t, x) \in V^h$ với

$$V^h = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{dof}\} \subset H^1(\Omega)$$

là không gian các phần tử hữu hạn.

$$u_{FE}(t_{j-1}) = u^N(t_{j-1}) = \sum_{i=1}^{dof} U_{ij}\varphi_i \text{ với } j = 1, \ldots, N_t.$$

Thế $u^N(t, x)$ vào (4.15) ta được

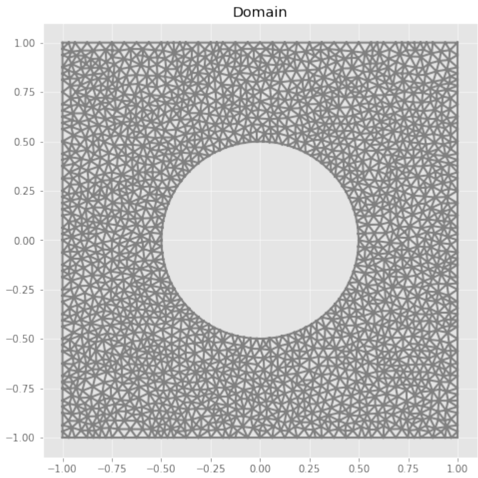
$$\int_\Omega u_t^N \cdot \varphi_i dx + \nu \int_\Omega \nabla u^N \nabla \varphi_i dx = 0. \tag{4.16}$$

Vì $u^N(t, x) \in V^h$ nên ta có biểu diễn

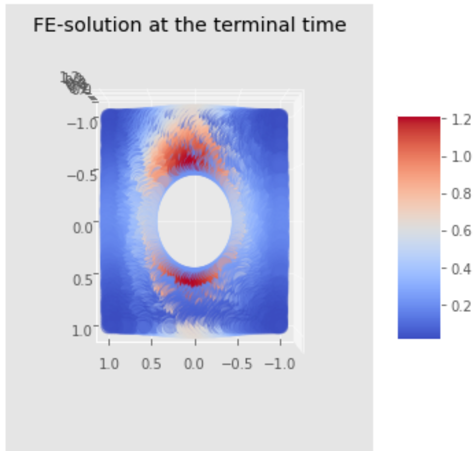
$$u^N(t, x) = \sum_{i=1}^{dof} \mathrm{u}_i^N(t)\varphi_i(x), \quad \text{với mọi } (t, x) \in \bar{Q} = [0, T] \times \Omega.$$

Ta định nghĩa ma trận khối lượng M và ma trận A như (4.9) và (4.10). Đặt $\mathrm{u}^N(t)$ là hàm vector được định nghĩa bởi $\mathrm{u}^N(t) = \left(\mathrm{u}_i^N(t)\right)_{1\le i\le dof}$. Kết hợp với (4.16), ta suy ra

$$M\mathrm{u}_t^N(t) + A\mathrm{u}^N(t) = 0. \tag{4.17}$$

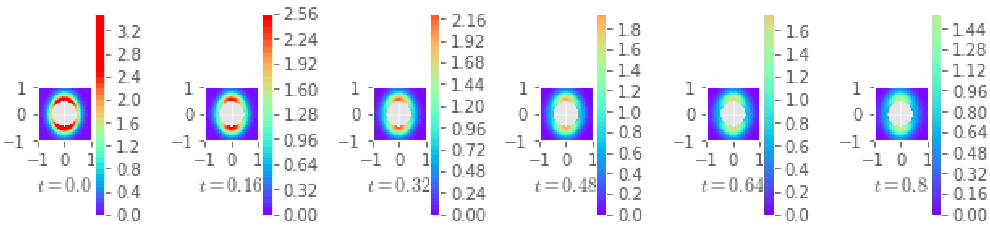


(a) Miền và lưới Ω.



(b) Nghiệm tại thời gian T.

Hình 4.9: Lưới của miền Ω và nghiệm phương trình truyền nhiệt giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn tại thời điểm T.



Hình 4.10: Nghiệm phương trình truyền nhiệt bằng phương pháp phần tử hữu hạn tại thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$.

Lưới của Ω và nghiệm của (4.17) trong không gian phần tử hữu hạn được biểu diễn trong hình 4.9. Ngoài ra, 6 snapshot tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$ được biểu diễn trong hình 4.10.

Từ định tính đối xứng và xác định dương của ma trận M, kết hợp (4.17), ta suy ra được

$$\mathrm{u}_t^N(t) = -M^{-1}A\mathrm{u}^N(t).$$

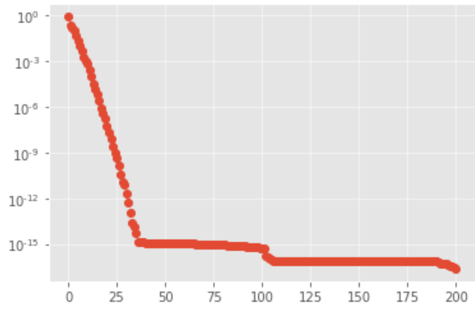
Cũng như ví dụ trước nếu $M \in \mathbb{R}^{dof \times dof}$ có cỡ lớn nên việc tính M^{-1} rất khó khăn, ta có thể giả quyết khó khăn này bằng cách sử dụng phân tích Cholesky của M.

Tiếp theo, ta xây dựng mô hình giảm số chiều cho hệ (4.17) ứng với hai trường hợp cơ sở POD được lấy trong $H = L^2(\Omega)$ và $V = H^1(\Omega)$. Dựa vào tỉ lệ $\mathcal{E}(\ell) = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i}$, ta chọn xây dựng cơ sở POD hạng $\ell = 5$.

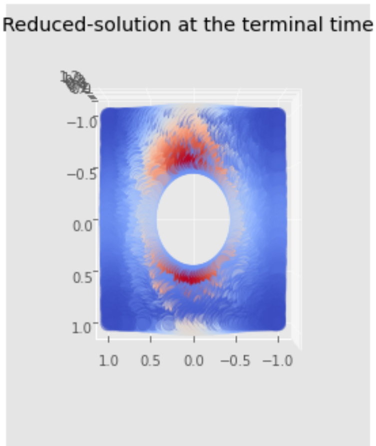
Đối với trường hợp cơ sở POD được xây dựng trong H, chọn $W = M$, ta được mô hình giảm số chiều của (4.17)

$$u_t^{red}(t) = -A_{red}u^{red}(t), \tag{4.18}$$

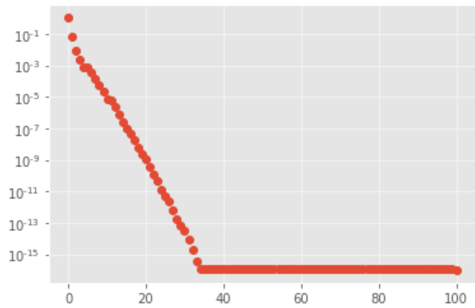
trong đó $A_{red} = \big((a_{ij}^{red})\big) \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$ với $a_{ij}^{red} = \langle A\psi_j, \psi_i\rangle_{\mathbb{R}^m}$.



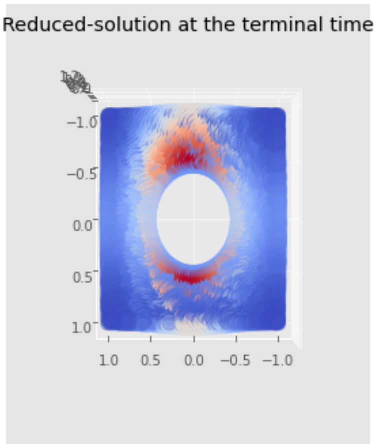
(a)



(b)



(c)

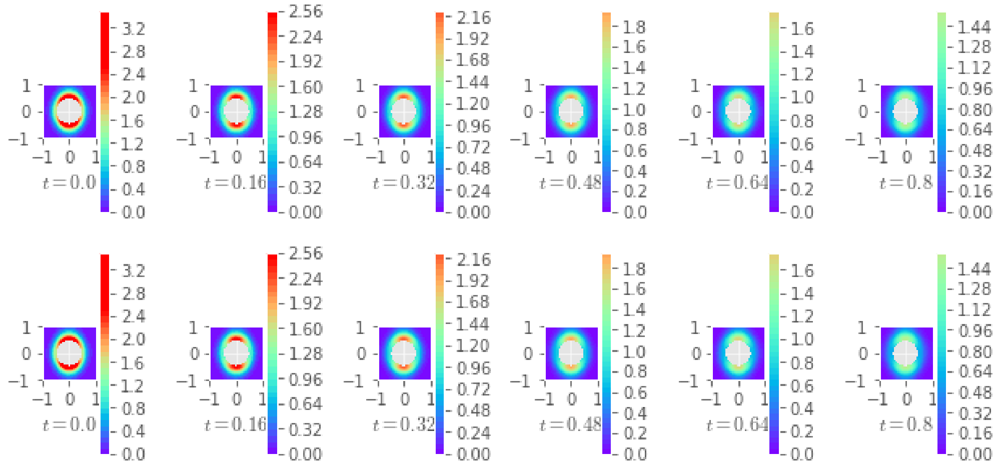


(d)

Hình 4.11: Sự biến thiên các giá trị riêng và nghiệm phương trình truyền nhiệt thông qua mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong H tại thời điểm T.

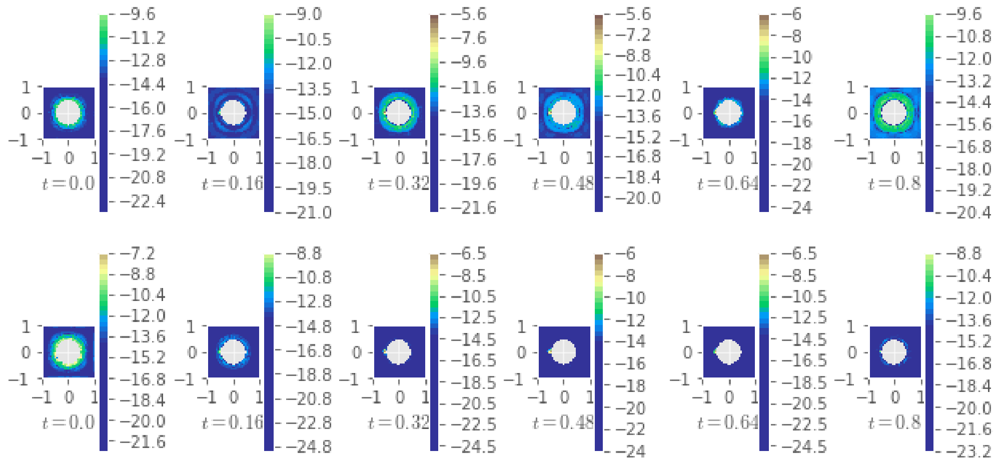
Sự biến thiên của các giá trị riêng $\hat{\lambda}_i$ và nghiệm tại thời điểm T của mô hình giảm số chiều bằng cách sử dụng POD được biểu diễn qua hình 4.11(a) và 4.11(b) nếu các snapshot chứa đạo hàm rời rạc, ngược lại sự thay đổi của các giá trị riêng $\hat{\lambda}_i$ và nghiệm tại thời điểm T của mô hình giảm số chiều được biểu diễn qua hình 4.11(c) và 4.11(d).

Ngoài ra, ta cũng có thể nghiệm của mô hình giảm số chiều với cơ sở trong $L^2(\Omega)$ tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$ được biểu diễn trong hình 4.12.



Hình 4.12: Nghiệm của phương trình truyền nhiệt được tính bởi mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong H tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$.

Sai số giữa nghiệm mô hình giảm số chiều của phương trình truyền nhiệt bằng phương pháp Galerkin Euler-POD lùi so với các snapshot tại cùng một thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$ lần lượt ứng với khi hai trường hợp có hoặc không có đạo hàm rời rạc trong các snapshot cho bởi trong hình 4.13. Màu sắc càng sáng thì sai số càng lớn.



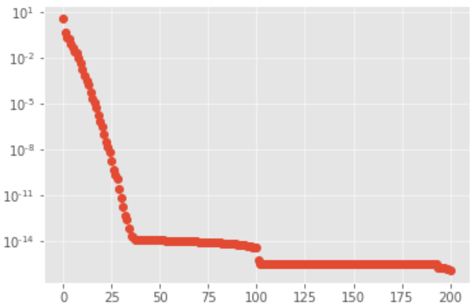
Hình 4.13: Sai số giữa nghiệm phương trình truyền nhiệt giải bằng mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong H so với các snapshot tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$.

Trường hợp cơ sở POD được xây dựng trong V, khi xây dựng mô hình giảm số chiều, ta chọn trong $W = M + S$, trong đó M và S là hai ma trận được định nghĩa tại (4.9) và (4.10), ta được mô hình giảm số chiều của (4.17)

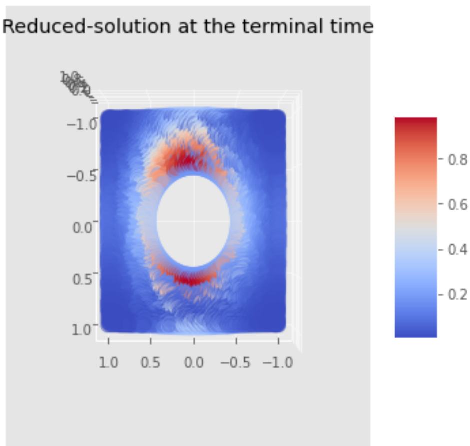
$$u_t^{red}(t) = -A_{red} u^{red}(t), \tag{4.19}$$

trong đó $A_{red} = \big((a_{ij}^{red})\big) \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ với $a_{ij}^{red} = \langle A\psi_j, \psi_i \rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle SM^{-1}A\psi_j, \psi_i \rangle_{\mathbb{R}^m}$.

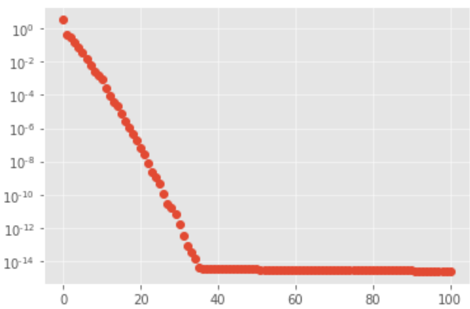
Sự biến thiên của các giá trị riêng $\tilde{\lambda}_k$ và nghiệm tại thời điểm cuối T của mô hình giảm số chiều được thể hiện trong hình 4.14(a) và 4.14(b) nếu đạo hàm rời rạc được xét trong các snapshot, ngược lại nếu các snapshot chứa đạo hàm rời rạc thì sự thay đổi của các giá trị riêng $\tilde{\lambda}_k$ và nghiệm tại thời điểm cuối T được thể hiện trong hình 4.14(c) và 4.14(d).



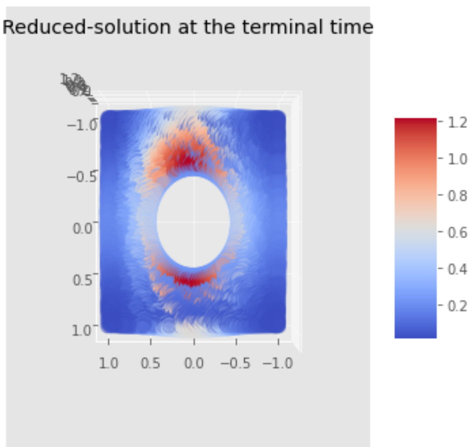
(a)



(b)



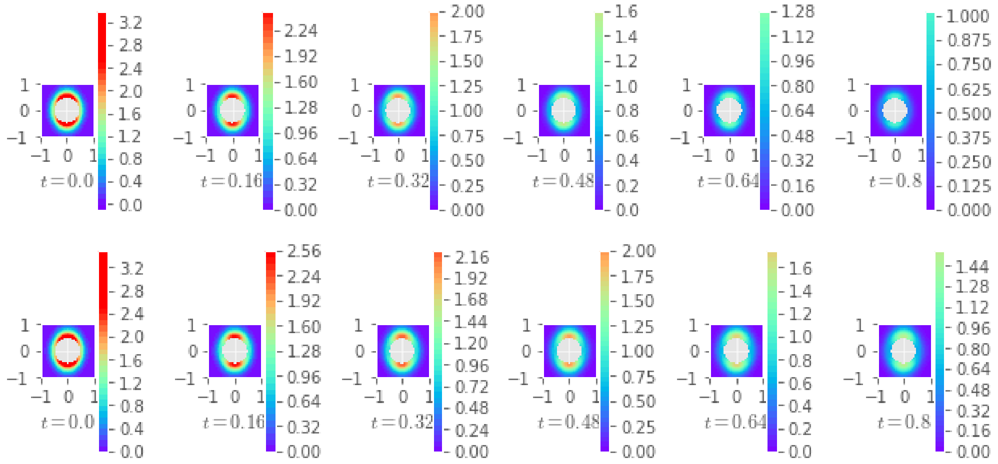
(c)



(d)

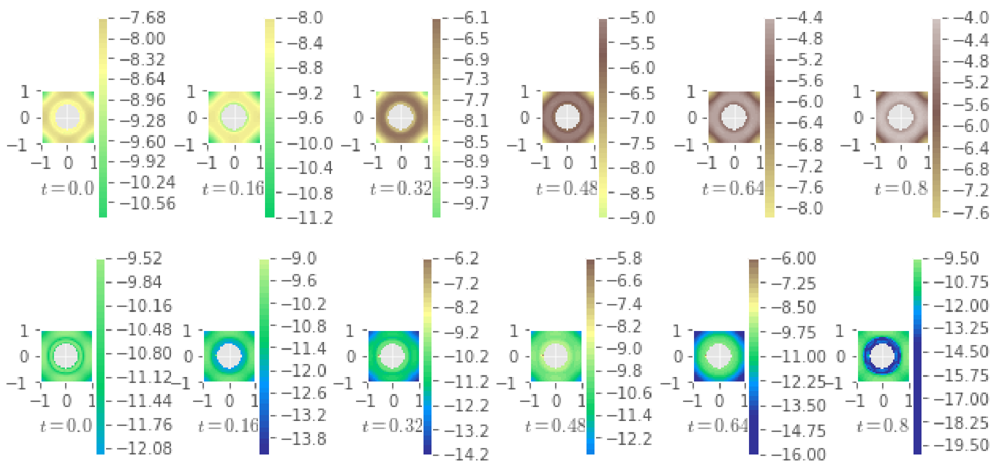
Hình 4.14: Sự biến thiên các giá trị riêng và nghiệm phương trình truyền nhiệt thông qua mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong V tại thời điểm T.

Nghiệm của của phương trình truyền nhiệt thông qua mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong V tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$ được biểu diễn trong hình 4.15.



Hình 4.15: Nghiệm của phương trình truyền nhiệt được tính bởi mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong V tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$.

Sai số giữa nghiệm của phương trình truyền nhiệt thông qua mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong V so với các snapshot tại cùng một thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$ được minh họa trong hình 4.16 lần lượt ứng với khi có hoặc không có đạo hàm rời rạc trong các snapshot.



Hình 4.16: Sai số giữa nghiệm của phương trình truyền nhiệt giải bằng mô hình giảm số chiều với cơ sở POD trong V so với các snapshot tại các thời điểm $t \in \{0, 0.16, 0.32, 0.48, 0.84, T = 0.8\}$.

Tổng kết lại, thông qua các hình ảnh trên, có thể thấy nghiệm được giải thông qua mô hình giảm số chiều của phương trình truyền nhiệt bằng phương pháp Euler-POD-Galerkin lùi 'khá giống' với các snapshot được ghi nhận ban đầu. Để kiểm chứng độ hiệu quả khi áp dụng phương pháp Euler-POD-Galerkin lùi trong việc giải mô hình giảm số chiều cho bài toán truyền nhiệt, trong trường hợp cơ sở POD được xây dựng trong $L^2(\Omega$ hay $H^1(\Omega)$ và trong trường hợp có hay không đạo hàm rời rạc $\bar{\partial}u\,(t_k)$ trong các snapshot, ta cần xem xét đại lượng sai số trung bình

$$\varepsilon = \frac{1}{N_t - 1} \sum_{k=1}^{N_t-1} \|u_{FE}(t_k) - U_k\|_H^2.$$

Kết quả có được thông qua bảng sau đây.

	$\mathcal{E}(\ell) = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i}$	$\|\phi - P^\ell \phi\|_H$	ε
Cơ sở POD trong V	0.98634394	$1.936\ .10^{-2}$	0.00024572
Cơ sở POD trong H	0.99884188	$4.861\ .10^{-3}$	$1.86911085\ .10^{-6}$
Cơ sở POD trong V, chứa $\bar{\partial}u\,(t_k)$	0.97669692	$5.398\ .10^{-2}$	0.03903926
Cơ sở POD trong H, chứa $\bar{\partial}u\,(t_k)$	0.97016779	$2.224\ .10^{-3}$	$1.34314460\ .10^{-5}$

Bảng 4.2: Bảng sai số giữa nghiệm của phương trình truyền nhiệt thông qua mô hình giảm số chiều được giải bằng phương pháp Euler-POD-Galerkin lùi so với các snapshot.

Nhận xét 4.2. Nếu đạo hàm rời rạc $\bar{\partial}u\,(t_k)$ được chứa trong các snapshot, theo Định lý 2.6 phát biểu cho phương trình tiến hóa tuyến tính, tồn tại C độc lập với m và ℓ sao cho

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|U_k - u(t_k)\|_H^2 \leq C\Big(\left\|\phi - P^\ell \phi\right\|_H^2 + \sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k + (\Delta t)^2 \Big)$$

và

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|U_k - u(t_k)\|_H^2 \leq C\Big(\left\|\phi - P^\ell \phi\right\|_H^2 + \|S\|_2 \sum_{k=\ell+1}^{d} \hat{\lambda}_k + (\Delta t)^2 \Big)$$

lần lượt ứng với hai trường hợp cơ sở POD được xây dựng trong V và H. Dựa vào bảng 4.2 và sự thay đổi của các giá trị riêng ở các hình 4.11 và hình 4.14, ta thấy các lượng $\sum_{k=\ell+1}^{d} \tilde{\lambda}_k$ là hai đại lượng khá nhỏ, trong đó $\tilde{\lambda}_{\ell+1}$ khoảng 10^{-3} đến 10^{-4} và tốc độ giảm của dãy $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i=1}^{d}$ rất nhanh. Ngoài ra đại lượng $\|\phi - P^{\ell}\phi\|_H$ cũng cho thấy sự ảnh hưởng đến đại lượng ε, khi qua bảng 4.2 thấy nếu giá trị $\|\phi - P^{\ell}\phi\|_H$ lớn thì ε cũng tăng theo, điều đó khá thích hợp với hai biểu thức đánh giá trên.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Các kết quả nghiên cứu chính của luận văn bao gồm:

1. Tổng quan về phương pháp POD: định nghĩa, tính chất, mối liên hệ giữa phiên bản rời rạc và liên tục, đặc biệt là mối liên hệ giữa POD và SVD trong $\mathbb{R}^n$.

2. Đưa ra các định lý đánh giá sai số khi sử dụng phương pháp POD-Galerkin kết hợp với một số phương pháp số khác như phương pháp Euler lùi hay Crank-Nicolson để xây dựng và giải các bài toán giảm số chiều cho các bài toán tiến hóa tuyến tính và phi tuyến thuộc loại parabolic.

3. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng đối chiếu kết quả giữa sai số giữa mô hình giảm số chiều bằng phương pháp Galerkin POD và bài toán ban đầu trong thực nghiệm và lý thuyết thông qua hai hai phương trình Burgers 2D và truyền nhiệt. Chứng tỏ tính hữu hiệu của POD trong một số bài toán của phương trình đạo hàm riêng.

Dựa vào các kết quả đã đạt được, một số hướng đi tiếp theo mà luận văn có thể phát triển như sau:

1. Ngoài hai lược đồ Euler-POD-Galerkin lùi và Crank-Nicolson-POD-Galerkin được trình bày trong luận văn này, ta có thể kết hợp Galerkin POD với một số phương pháp số thương dùng như Runge-Kutta bậc 3, bậc 4. Trong quá trình lập trình, đã cho thấy kết quả tương đối tốt nếu kết hợp phương pháp POD-Galerkin với Runge-Kutta bậc 3 cho hai phương trình Burgers 2D và phương trình truyền nhiệt.

2. Áp dụng phương pháp POD-Galerkin cho một số bài toán dạng elliptic hoặc hệ kết hợp elliptic và parabolic.

Tài liệu tham khảo

[1] G. Berkooz, P. Holmes, and J. L. Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25:539–575, 1993.

[2] S. L. Brunton and J. N. Kutz. *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. Cambridge University Press, 2019.

[3] K. Pearson. LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine Series 1*, 2:559–572, 2010.

[4] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45:561–571, 1987.

[5] K. Kunisch and S. Volkwein. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40:492–515, 2002.

[6] K. Kunisch and S. Volkwein. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems. *Numerische Mathematik*, 90:117–148, 2001.

[7] R. Hadjria, N. Mechbal, and M. Verge. Proper orthogonal decomposition applied to structural health monitoring. *International Conference on Communications, Computing and Control Applications (CCCA)*, 2011.

[8] Zhenhua Di, Zhendong Luo, Zhenghui Xie, Aiwen Wang, and I. M. Navon. An optimizing implicit difference scheme based on proper orthogonal decomposition for the two-dimensional unsaturated soil water flow equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 68:1324–1340, 2011.

[9] Federica Tubino, Luigi Carassale, and Giovanni Solari. Seismic response of multi-supported structures by proper orthogonal decomposition. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 32:1639–1654, 2003.

[10] S. Volkwein, M. Kahlbacher, K. Kunisch, and F. Tröltzsch. Proper orthogonal decomposition: Theory and reduced-order modelling. Konstanz, Germany, 2008. Lecture Notes: [Online]. Available: math.uni-konstanz.de.

[11] Goong Chen and Zhendong Luo. *Proper Orthogonal Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Elsevier, Academic Press, San Diego, United States, 2019.

[12] L. N. Trefethen and David Bau III. *Numerical Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1997.

[13] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 3rd edition, 1996.

[14] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society, USA, 1998.

[15] Robert Dautray and J. L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Volume 5 Evolution Problems I*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2000.

[16] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 2 edition, 2003.

[17] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. Analysis of Operators*, volume 4. Academic Press, San Diego, California, 1978.

[18] Grzegorz Lewicki. Kolmogorov's type criteria for spaces of compact operators. *Journal of Approximation Theory*, 64:181–202, 1991.

[19] Kôsaku Yosida. *Functional Analysis.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1968.

[20] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis: Eine anwendungsorientierte Einführung.* Springer, 1992.

[21] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 1977.

[22] Tosio Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[23] Amnon Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations (Applied Mathematical Sciences)*, volume 44. Springer Verlag, New York, 1992.

[24] Roger Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, volume 68. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1988.

[25] J. A. Atwell and B. B. King. Proper orthogonal decomposition for reduced basis feedback controllers for parabolic equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 33:1–19, 2001.

[26] J. A. Atwell and B. B. King. Reduced order controllers for spatially distributed systems via proper orthogonal decomposition. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26:128–151, 2004.

[27] C. W. Rowley. Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15:997–1013, 2005.

[28] Anders Logg, Kent-Andre Mardal, and Garth Wells. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method : The FEniCS Book*, volume 84. Springer, Berlin, 2012.