TỐNG THỊ THẢO

TOÁN ỨNG DỤNG

NĂM 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VN

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Tống Thị Thảo

GIẢI TÍCH PHÂN THỨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BẬC PHÂN SỐ TRONG KHÔNG GIAN SOBOLEV BẬC PHÂN SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VN

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Tống Thị Thảo

GIẢI TÍCH PHÂN THỨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BẬC PHÂN SỐ TRONG KHÔNG GIAN SOBOLEV BẬC PHÂN SỐ

Chuyên ngành : Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC :
PGS.TS. Hoàng Thế Tuấn

Hà Nội - 2022

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận văn này là sự tìm tòi, học hỏi, trau dồi kiến thức của bản thân dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy Hoàng Thế Tuấn. Mọi kết quả nghiên cứu cũng như ý tưởng của tác giả khác, nếu có đều được trích dẫn cụ thể. Tôi xin chịu trách nhiệm về những lời cam đoan.

Hà Nội, tháng 10 năm 2022

Học viên

Tống Thị Thảo

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, tôi xin được tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất của mình tới PGS.TS. Hoàng Thế Tuấn, người thầy đã trực tiếp hướng dẫn và giúp đỡ tôi tìm ra đề tài luận văn cũng như định hình hướng nghiên cứu. Không chỉ là người hướng dẫn khoa học tận tâm, thầy còn cho tôi những lời khuyên, động viên, khích lệ giúp tôi trưởng thành hơn trong cuộc sống.

Tôi xin chân thành cảm ơn anh Hà Đức Thái đang làm nghiên cứu sinh tại Viện Toán học đã hướng dẫn, góp ý và giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình tôi đọc tài liệu và làm luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Trung tâm Quốc tế Đào tạo và Nghiên cứu Toán học, Viện Toán học đã hỗ trợ tài chính giúp tôi hoàn thành hai năm học thạc sĩ.

Trong thời gian học tập tại Viện Toán học, tôi đã nhận được nhiều sự quan tâm, góp ý, hỗ trợ quý báu của các thầy cô, anh chị và bạn bè. Tôi xin được chân thành chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các thầy cô, anh chị và bạn bè.

Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn Viện Toán học và cơ sở đào tạo là Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi về môi trường học tập cho tôi trong suốt quá trình thực hiện Luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin tỏ lòng biết ơn vô hạn tới mẹ tôi: bà Tống Thị Tưởng, người luôn kiên nhẫn và thương yêu tôi vô điều kiện.

Danh sách các ký hiệu

Ký hiệu	**Tên gọi**
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{C}$	tập hợp các số phức
$\mathbb{Z}_+$	tập hợp các số nguyên không âm
$\|\cdot\|$	chuẩn của một vectơ hoặc ma trận
$C([a,b])$	không gian các hàm liên tục trên $[a,b]$
$C^k([a,b])$	không gian các hàm có đạo hàm cấp k liên tục trên $[a,b]$
$C_c(\Omega)$	không gian các hàm liên tục và có giá compact trong Ω
$C_c^k(\Omega)$	không gian các hàm khả vi liên tục k lần
	và có giá compact trong Ω
$C_c^\infty(\Omega)$	không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong Ω
D_t^α	đạo hàm Riemann-Liouville
d_t^α	đạo hàm Caputo
$\mathcal{D}(A)$	miền của toán tử tuyến tính A
$\lfloor\cdot\rfloor$	hàm sàn
X'	không gian đối ngẫu của không gian Banach X
A'	toán tử tuyến tính đối ngẫu của toán tử tuyến tính A

Cho $f:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, và $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ là đa chỉ số. Ta ký hiệu

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1} f}{\partial x_1^{\alpha_1}} \quad \frac{\partial^{\alpha_2} f}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d} f}{\partial x_d^{\alpha_d}}(x).$$

Mục lục

Lời mở đầu

Tổng quan tình hình nghiên cứu và sự cần thiết tiến hành nghiên cứu

Trong luận văn này chúng tôi giới thiệu về phép tính vi - tích phân phân thứ và phương trình vi phân bậc phân số dựa trên cơ sở của lý thuyết toán tử trong không gian Sobolev bậc phân số. Cách tiếp cận này mở rộng các khái niệm đạo hàm Caputo và Riemann - Liouville cổ điển trong không gian Sobolev bậc phân số (bao gồm cả các số âm). Nó cho phép chúng ta nghiên cứu một cách thống nhất phép tính vi - tích phân phân thứ và phương trình vi phân bậc phân số theo thời gian.

Phương trình vi phân bậc phân số là một lý thuyết toán học được sử dụng để mô tả các hiện tượng, quá trình tiến hóa mà trạng thái của chúng phụ thuộc vào toàn bộ lịch sử trước đó. Trong 30 năm trở lại đây, cùng với sự phát triển của máy tính điện tử và các phương pháp số, lý thuyết này đã tìm thấy ứng dụng rộng rãi của mình trong giải quyết các vấn đề nảy sinh từ cuộc sống và các ngành khoa học khác như cơ học, vật lý, hóa học, tài chính, tâm lý học, v.v.

Công trình mang tính hệ thống đầu tiên đề cập tới các ứng dụng của giải tích phân thứ là [1]. Trong cuốn sách này, các tác giả đã giới thiệu nhiều ý tưởng, phương pháp và ứng dụng của giải tích phân thứ dưới nhiều góc độ thực tế. Sau [1], nhiều chuyên khảo trình bày cơ sở lý luận của lý thuyết này được xuất bản. Ở đây chúng tôi giới thiệu đến người đọc quan tâm một số tài liệu tiêu biểu trong số đó: S. Samko, O. Marichev và A. Kilbas [2], R. Gorenflo và S. Vesella [3], K. Miller và B. Ross [4]. Ngoài ra, gần đây có thêm các đóng góp của I. Podlubny [5], K. Diethelm [6], V.

Lakshmikantham, S. Leela và J. Vasundhara Devi [7], B. Bandyopadhyay và S. Kamal [8].

Ngoài những kiến thức đã được đúc kết trong các chuyên khảo nói trên, trong những năm gần đây đã có hàng ngàn bài báo về phương trình vi phân bậc phân số đã ra đời (theo trang Mathscienet của Hội toán học Mỹ, có khoảng 3500 công bố liên quan đến lĩnh vực này trong 5 năm vừa). Các công trình này liên quan sự tồn tại, tính duy nhất, dáng điệu tiệm cận, quá trình rẽ nhánh của nghiệm, lý thuyết điều khiển, các phương pháp giải gần đúng nghiệm và vấn đề sử dụng phương trình bậc phân số để giải các bài toán thực tế.

Sau đây chúng tôi điểm qua đóng góp của một số nhóm nghiên cứu tiêu biểu trên thế giới. Một trong những kết quả đầu tiên và quan trọng về các phương trình đạo hàm riêng bậc phân số là của Giáo sư A. Kochubei (Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Ucraina) và cộng sự. Sử dụng hàm H, phương pháp đông cứng hệ số và lược đồ Levi, họ đã chỉ ra sự tồn tại nghiệm cổ điển của bài toán Cauchy cho các phương trình khuếch tán thời gian phân thứ.

Nhóm nghiên cứu thành công nhất về phương trình bậc phân số là của Giáo sư L. Cafferelli (The University of Texas at Austin, Mỹ). Họ đã thu được những kết quả quan trọng về Định lý Evans-Krylov cho các phương trình phi tuyến đầy đủ không địa phương, dáng điệu nghiệm của phương trình porous medium với khuếch tán phân thứ, tính chính quy nghiệm của bài toán Obstacle phân thứ parabolic, tính chất địa phương của nghiệm cho các phương trình elliptic nửa tuyến tính phân thứ với các kì dị cô lập, bài toán parabolic với đạo hàm thời gian phân thứ. Các kết quả của nhóm Cafferelli chủ yếu liên quan đến các toán tử phân thứ theo không gian.

Nhóm của Giáo sư R. Zacher (Ulm University, Đức) nghiên cứu nghiệm yếu của các phương trình đạo hàm riêng với thời gian phân thứ và thu được nhiều kết quả quan trọng liên quan đến sự tồn tại, duy nhất nghiệm, dáng điệu tiệm cận, ước lượng tối ưu, tính chính quy của các nghiệm, tính ổn định, không ổn định và sự bùng nổ của loại nghiệm này.

Cũng liên quan đến vấn đề nghiên cứu nghiệm yếu, nhóm của Giáo sư Jian Guo Liu (Duke University, Mỹ) xây dựng một lý thuyết tổng quát cho các tích phân và đạo hàm bậc phân số Caputo. Trên cơ sở đó, họ nghiên cứu các mô hình vật lý mô tả bởi các phương trình với toán tử đạo hàm không địa phương.

Về khía cạnh giải gần đúng, nhóm của Giáo sư W. Mclean (New South Wale University, Úc) cho nhiều kết quả thú vị và quan trọng.

Nhóm của Giáo sư M. Yamamoto (The University of Tokyo, Nhật) xét các bài toán ngược của các phương trình đạo hàm riêng thời gian phân thứ.

Sử dụng Định lý nội suy Marcinkiewicz, Định lý Calderón-Zygmund, lý thuyết nhiễu và định lý điểm bất động, nhóm của Giáo sư Kyeong Hun Kim (Korea University, Hàn Quốc) chứng minh được sự tồn tại, tính duy nhất và các ước lượng cho các nghiệm suy rộng trong không gian Sobolev đối với một số lớp phương trình đạo hàm riêng với đạo hàm bậc phân số theo thời gian và hệ số đo được tương đối tổng quát.

Ở Việt Nam hiện cũng có một số nhóm nghiên cứu về phương trình vi phân bậc phân số. Giáo sư Vũ Ngọc Phát và các học trò nghiên cứu bài toán điều khiển, sự tồn tại nghiệm, tính ổn định thời gian hữu hạn đối với phương trình vi phân bậc phân số có trễ. Gần đây, Giáo sư Đinh Nho Hào và các cộng sự triển khai nghiên cứu về bài toán ngược cho các phương trình đạo hàm riêng thời gian phân thứ và thu được một số kết quả ban đầu.

Tại Đại học Sư phạm Hà Nội, nhóm Phó Giáo sư Trần Đình Kế và Giáo sư Cung Thế Anh nghiên cứu phương trình vi phân bậc phân số trong các không gian trừu tượng, phương trình bao hàm thức phân thứ. Tại Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh, nhóm Giáo sư Đặng Đức Trọng nghiên cứu bài toán tồn tại nghiệm nhẹ của các phương trình đạo hàm riêng phân thứ với điều kiện cuối, điều kiện biên hỗn hợp, bài toán chỉnh hóa hệ số của các phương trình đạo hàm riêng bậc phân số.

Từ năm 2014 tới nay, nhóm Giáo sư Nguyễn Đình Công, Phó Giáo sư

Đoàn Thái Sơn nghiên cứu về lý thuyết định tính của phương trình vi phân phân thứ. Đóng góp của nhóm tập chung vào các hướng sau: sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm, tính ổn định, tính hút của hệ, sự tồn tại của các đa tạp bất biến ổn định, vấn đề sinh hệ động lực của các phương trình vi phân phân thứ.

Mặc dù đã có rất nghiều nghiên cứu về phương trình vi phân bậc phân số đã được xuất bản. Sự phát triển của lĩnh vực này còn ở giai đoạn sơ khai. Nguyên nhân là do nhân suy biến trong biểu diễn của tích phân bậc phân số làm cho nghiệm của các phương trình này có nhiều tính chất khác cơ bản với nghiệm của các phương trình vi phân thường. Vì vậy, cần có thêm nhiều nghiên cứu chuyên sâu để phân tích sự phụ thuộc vào trí nhớ của các quá trình sinh bởi các nghiệm của chúng.

Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Hiểu và vận dụng được các kết quả chính trong tiền ấn phẩm của Giáo sư M. Yamamoto "Fractional calculus and time-fractional diferential equations: revisit and construction of a theory" (xem tại [9]).

Chúng tôi quan tâm đến phép tính vi - tích phân phân thứ, phương trình vi phân bậc phân số, các không gian Sobolev bậc không nguyên và lý thuyết toán tử.

Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng các công cụ và kiến thức của phép tính vi - tích phân cổ điển, phép biến đổi tích phân, giải tích phân thứ, lý thuyết các không gian Sobolev bậc không nguyên và các nguyên lý từ giải tích hàm.

Cấu trúc và dự kiến kết quả đạt được của luận văn

Ngoài phần Danh sách các ký hiệu, Lời mở đầu, Lời cảm ơn, Lời cam đoan, Kết luận và Tài liệu tham khảo, Luận văn được chia thành ba chương.

- Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.
- Chương 2: Xây dựng một định nghĩa mở rộng cho khái niệm đạo hàm bậc phân số dưới cách nhìn của lý thuyết toán tử và đưa ra một số tính chất của đạo hàm bậc phân số.

- Chương 3: Bài toán giá trị đầu cho phương trình vi phân bậc phân số.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng ta trình bày tóm tắt một số kiến thức đã biết về không gian Lebesgue L^p, các bất đẳng thức Hölder, bất đẳng thức Young và định nghĩa tích chập. Không gian Sobolev-Slobodeckij, hàm Gamma và hàm Beta cũng được giới thiệu. Ngoài ra, chúng ta cũng đưa vào đây định nghĩa hàm Mittag-Leffler hai tham số và dáng điệu tiệm cận của nó.

1.1 Không gian L^p và các bất đẳng thức

Định nghĩa 1.1 (Không gian L^p [10])**.** *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và $1 \leq p < \infty$. Ta định nghĩa không gian $L^p(\Omega)$ là không gian các hàm f đo được trên Ω thỏa mãn*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Ta định nghĩa không gian $L^\infty(\Omega)$ là không gian các hàm f đo được trên Ω thoả mãn

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty,$$

trong đó ess sup $|f| := \inf\{M > 0 : \mu(x \in \Omega : |f(x)| > M) = 0\}$ với μ là độ đo Lebesgue.

Trong không gian L^p ta đồng nhất hai hàm bằng nhau hầu khắp nơi.

Định nghĩa 1.2 (Không gian L^p_{loc} [10]). *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Ta định nghĩa không gian $L^p_{loc}(\Omega)$ là không gian các hàm f đo được trên Ω sao cho với mọi tập mở $K \subset \Omega$ thoả mãn K compact trong Ω thì $f \in L^p(K)$.*

Định lý 1.3 (Định lý hội tụ đơn điệu [10]). *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy hàm trong không gian $L^1(\Omega)$ thoả mãn*

(i) $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ *h.k.n trong Ω với mọi $k \in \mathbb{N}$.*

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x)dx < \infty$.

Khi đó $f_n(x)$ hội tụ h.k.n trong Ω khi $n \to \infty$. Ta đặt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

h.k.n trong Ω thì $f \in L^1(\Omega)$ và

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Định lý 1.4 (Định lý hội tụ chặn [10]). *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy hàm trong không gian $L^1(\Omega)$ thoả mãn*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *h.k.n trong Ω khi $n \to \infty$.*

(ii) Tồn tại một hàm $g \in L^1(\Omega)$ thoả mãn $|f_n(x)| \leq g(x)$ h.k.n trong Ω với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó $f \in L^1(\Omega)$ và

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Bổ đề 1.5 (Bổ đề Fatou [10]). *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy hàm trong không gian $L^1(\Omega)$ thoả mãn*

(i) $f_n(x) \geq 0$ *h.k.n trong Ω với mọi $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x)dx < \infty$.

Ta đặt

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

với hầu khắp x trong Ω.
Khi đó $f \in L^1(\Omega)$ và

$$\int_\Omega f(x)dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Định lý 1.6 (Định lý Fubini [10])**.** *Cho Ω_1 là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và Ω_2 là tập mở trong $\mathbb{R}^m$. Giả sử $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Khi đó, với hầu khắp $x \in \Omega_1$,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ và } \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

Tương tự, với hầu khắp $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ và } \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Hơn nữa ta có

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Định lý 1.7 (Định lý Tonelli [10])**.** *Cho Ω_1 là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và Ω_2 là tập mở trong $\mathbb{R}^m$ và $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ là một hàm đo được thoả mãn*

(i) $\int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty$ với hầu khắp x trong Ω_1.

(ii) $\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy\right) dx < \infty$.

Khi đó $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Định lý 1.8 (Bất đẳng thức Hölder [11])**.** *Giả sử $f \in L^p(\Omega)$ và $g \in L^{p'}(\Omega)$ với $1 \le p \le \infty$ và p' số liên hợp Hölder của p, tức là $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Khi đó*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Định nghĩa 1.9 (Định nghĩa tích chập [10])**.** *Cho f, g là các hàm đo được từ $\mathbb{R}^d$ vào $\mathbb{R}$. Chúng ta định nghĩa tích chập của f và g như sau:*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy.$$

Định lý 1.10 (Bất đẳng thức Young [10]). *Giả sử* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *và* $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ *với* $1 \le p < \infty$, $1 \le q \le \infty$. *Khi đó* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ *và*

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)},$$

với $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \ge 0$.

Mệnh đề 1.11 (xem Mệnh đề IV.19 trong [10]). *Cho* $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ *và* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. *Khi đó* $(f * g)(x)$ *luôn được xác định với mọi* $x \in \mathbb{R}^d$ *và*

$$f * g \in C(\mathbb{R}^d).$$

Mệnh đề 1.12 (xem Mệnh đề IV.20 trong [10]). *Cho* $f \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$ *với* $k \in \mathbb{N}$ *và* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. *Khi đó* $(f * g)(x)$ *luôn được xác định với mọi* $x \in \mathbb{R}^d$ *và* $f * g \in C(\mathbb{R}^d)$. *Hơn nữa*

$$D^\alpha (f * g) = (D^\alpha f) * g,$$

với mọi $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$ *thoả mãn* $|\alpha| \le k$.
Nói riêng, nếu $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ *và* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ *thì* $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Hệ quả 1.13 (xem Hệ quả IV.23 trong [10]). *Cho* Ω *là một tập mở trong* $\mathbb{R}^d$. *Khi đó* $C^\infty_c(\Omega)$ *là trù mật trong* $L^p(\Omega)$ *với mọi* $1 \le p < \infty$.

1.2 Không gian Sobolev-Slobodeckij

Định nghĩa 1.14 (Đạo hàm yếu [11]). *Cho* Ω *là tập mở trong* $\mathbb{R}^n$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *và* $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ *là một đa chỉ số, ta nói* g *là đạo hàm yếu bậc* α *của* f, *ký hiệu là* $D^\alpha f$, *nếu*

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\varphi, \text{ với mọi } \varphi \in C^\infty_c(\Omega).$$

Định nghĩa 1.15 (Không gian Sobolev-Slobodeckij [12]). *Cho* Ω *là tập mở trong* $\mathbb{R}^n$, $1 \le p < \infty$, $\theta \in (0,1)$ *và* $f \in L^p(\Omega)$, *nửa chuẩn Slobodeckij được định nghĩa như sau:*

$$[f]_{\theta,p,\Omega} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{\theta p + n}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cho $s > 0$ không nguyên và $1 \leq p < \infty$. Không gian Sobolev-Slobodeckij $W^{s,p}(\Omega)$ được định nghĩa như sau:

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ f \in W^{\lfloor s \rfloor,p}(\Omega) : \sup_{|\alpha| = \lfloor s \rfloor} [D^\alpha f]_{s-\lfloor s \rfloor,p,\Omega} < \infty \right\},$$

cùng với chuẩn

$$\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \|f\|_{W^{\lfloor s \rfloor,p}(\Omega)} + \sup_{|\alpha| = \lfloor s \rfloor} [D^\alpha f]_{s-\lfloor s \rfloor,p,\Omega}.$$

1.3 Hàm Gamma và hàm Beta

Định nghĩa 1.16 (Hàm Gamma [13]). *Hàm Gamma, ký hiệu $\Gamma(\cdot)$, được định nghĩa như sau:*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \ \alpha > 0.$$

Định nghĩa 1.17 (Hàm Beta [14]). *Hàm Beta, ký hiệu là $B(\cdot,\cdot)$, được định nghĩa như sau:*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \ p,q > 0.$$

Khi đó ta có mối liên hệ giữa hàm Beta và hàm Gamma như sau:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \ p,q > 0.$$

1.4 Hàm Mittag-Leffler

Định nghĩa 1.18 (Hàm Mittag-Leffler hai tham số [9]). *Cho $\alpha, \beta > 0$, hàm Mittag-Leffler hai tham số $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định như sau:*

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Chúng ta giới thiệu các kết quả về dáng điệu tiệm cận của hàm Mittag-Leffler hai tham số như sau:

Bổ đề 1.19 (xem Mệnh đề 4.1 trong [9])**.** *Cho trước* $0 < \alpha < 1$, $T > 0$ *và* $\lambda > -\Lambda_0$, $\Lambda_0 > 0$. *Khi đó tồn tại hằng số* $C_1 = C_1(\alpha, \Lambda_0, T) > 0$ *và* $C_2 = C_2(\alpha) > 0$ *sao cho*

$$\left|E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)\right| \leq \begin{cases} C_1 & \text{với } 0 \leq t \leq T \text{ và } -\Lambda_0 \leq \lambda < 0, \\ \frac{C_2}{1+\lambda t^\alpha} & \text{với } t \geq 0 \text{ và } \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Bổ đề 1.20 (xem Mệnh đề 4.1 trong [9])**.** *Cho trước* $0 < \alpha < 1$, $T > 0$ *và* $\lambda > -\Lambda_0$, $\Lambda_0 > 0$. *Khi đó tồn tại hằng số* $C_3 = C_3(\alpha, \Lambda_0, T) > 0$ *và* $C_4 = C_4(\alpha) > 0$ *sao cho*

$$\left|t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)\right| \leq \begin{cases} C_3 & \text{với } 0 \leq t \leq T \text{ và } -\Lambda_0 \leq \lambda < 0, \\ \frac{C_4}{1+\lambda t^{\alpha+1}} & \text{với } t \geq 0 \text{ và } \lambda \geq 0. \end{cases}$$

CHƯƠNG 2

ĐỊNH NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM BẬC PHÂN SỐ ∂_t^α VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA ĐẠO HÀM BẬC PHÂN SỐ

Trong chương này, dựa trên bài báo của M. Yamamoto [9] chúng ta mở rộng d_t^α dưới dạng toán tử là đẳng cấu trong các không gian Sobolev. Từ đó, chúng ta đưa ra một số tính chất của đạo hàm bậc phân số. Cuối cùng, chúng ta xây dựng các đạo hàm bậc phân số của hàm Mittag-Leffler.

2.1 Giới thiệu về các không gian hàm và toán tử

Ta định nghĩa các toán tử tích phân Riemann-Liouville bậc $\alpha > 0$ như sau:

$$\begin{cases} (J^\alpha v)(t) & := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds, \quad 0 < t < T, \quad \mathcal{D}(J^\alpha) = L^1(0,T), \\ (J_\alpha v)(t) & := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (\xi - t)^{\alpha-1} v(\xi) d\xi, \quad 0 < t < T, \quad \mathcal{D}(J_\alpha) = L^1(0,T). \end{cases} \tag{2.1}$$

Bổ đề 2.1. *Cho $\alpha, \beta > 0$. Khi đó*

$$J^{\alpha}(J^{\beta}v) = J^{\alpha+\beta}v,\ \ J_{\alpha}(J_{\beta}v) = J_{\alpha+\beta}v \ \text{ với } v \in L^1(0,T).$$

Chứng minh. Đầu tiên, chúng ta có

$$J^{\alpha}(J^{\beta}v(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} v(\tau) d\tau ds.$$

Sử dụng Định lí Fubini để thay đổi thứ tự tính tích phân ta thu được

$$\begin{aligned} J^{\alpha}(J^{\beta}v(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \int_{\tau}^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} v(\tau) d\tau ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t v(\tau) \int_{\tau}^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} ds d\tau. \end{aligned}$$

Đổi biến $u = \frac{s-\tau}{t-\tau}$ chúng ta có

$$J^{\alpha}(J^{\beta}v(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t v(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du d\tau.$$

Vì

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du = B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Do đó

$$J^{\alpha}(J^{\beta}v(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t v(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = J^{\alpha+\beta}v(t).$$

Tiếp theo, chúng ta có

$$J_{\alpha}(J_{\beta}v(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_t^T (\xi-t)^{\alpha-1} \int_{\xi}^T (\eta-\xi)^{\beta-1} v(\eta) d\eta d\xi.$$

Sử dụng Định lí Fubini để thay đổi thứ tự tính tích phân ta thu được

$$\begin{aligned} J_{\alpha}(J_{\beta}v(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_t^T \int_t^{\eta} (\xi-t)^{\alpha-1}(\eta-\xi)^{\beta-1} d\eta d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_t^T v(\eta) \int_t^{\eta} (\xi-t)^{\alpha-1}(\eta-\xi)^{\beta-1} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Đổi biến $u = \frac{\xi-t}{\eta-t}$ chúng ta có

$$J_{\alpha}(J_{\beta}v(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_t^T v(\eta)(\eta-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du d\eta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_t^T v(\eta)(\eta - t)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_t^T (\eta - t)^{\alpha+\beta-1} v(\eta) d\eta.$$

Do đó

$$J_\alpha(J_\beta(v))(t) = J_{\alpha+\beta} v(t).$$

□

Ta định nghĩa toán tử $\tau : L^2(0,T) \longrightarrow L^2(0,T)$ cho bởi

$$(\tau v)(t) := v(T-t),\ v \in L^2(0,T). \tag{2.2}$$

Khi đó dễ thấy rằng τ là một đẳng cấu từ $L^2(0,T)$ vào chính nó.

Trong suốt luận văn, chúng ta gọi K là đẳng cấu giữa hai không gian Banach X và Y nếu ánh xạ K là song ánh và tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho $C^{-1}\|Kv\|_Y \le \|v\|_X \le C\|Kv\|_Y$ với mọi $v \in X$. Trong đó $\|.\|_X$ và $\|.\|_Y$ lần lượt là các chuẩn trong X và Y.
Đặt

$$
\begin{aligned}
{}_0C^1[0,T] &:= \{v \in C^1[0,T];\ v(0) = 0\},\\
{}^0C^1[0,T] &:= \{v \in C^1[0,T]; v(T) = 0\} = \tau\ ({}_0C^1[0,T]).
\end{aligned}
$$

Với $0 < \alpha < 1$, $p = 2$ không gian Sobolev - Slobodecki $H^\alpha(0,T)$ với chuẩn được định nghĩa như sau:

$$\|v\|_{H^\alpha(0,T)} := \left(\|v\|^2_{L^2(0,T)} + \int_0^T \int_0^T \frac{|v(t) - v(s)|^2}{|t-s|^{1+2\alpha}} dt ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chúng ta đặt

$$H_\alpha(0,T) := \overline{{}_0C^1[0,T]}^{H^\alpha(0,T)},\ {}^\alpha H(0,T) := \overline{{}^0C^1[0,T]}^{H^\alpha(0,T)}. \tag{2.3}$$

Dễ thấy $H_0(0,T) = L^2(0,T)$ và ${}^0H(0,T) = L^2(0,T)$.

Mệnh đề 2.2. *Cho $0 < \alpha < 1$. Khi đó*

(i)

$$H_\alpha(0,T) = \begin{cases} H^\alpha(0,T),\ 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \\ \left\{v \in H^{\frac{1}{2}}(0,T);\ \int_0^T \frac{|v(t)|^2}{t} dt < \infty\right\},\ \alpha = \frac{1}{2}, \\ \left\{v \in H^\alpha(0,T); v(0) = 0\right\},\ \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Hơn nữa, chuẩn trong trong $H_\alpha(0,T)$ tương đương với

$$\|v\|_{H_\alpha(0,T)} = \begin{cases} \|v\|_{H^\alpha(0,T)},\ \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ \left(\|v\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(0,T)} + \int_0^T \frac{|v(t)|^2}{t} dt\right)^{\frac{1}{2}},\ \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(ii) Tương tự ta có

$$^\alpha H(0,T) = \begin{cases} H^\alpha(0,T),\ 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \\ \left\{v \in H^{\frac{1}{2}}(0,T);\ \int_0^T \frac{|v(t)|^2}{T-t} dt < \infty\right\},\ \alpha = \frac{1}{2}, \\ \left\{v \in H^\alpha(0,T); v(T) = 0\right\},\ \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Hơn nữa, chuẩn trong trong $^\alpha H(0,T)$ tương đương với

$$\|v\|_{H_\alpha(0,T)} = \begin{cases} \|v\|_{^\alpha H(0,T)},\ \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ \left(\|v\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(0,T)} + \int_0^T \frac{|v(t)|^2}{T-t} dt\right)^{\frac{1}{2}},\ \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2.2 Sự mở rộng của d_t^α lên $H_\alpha(0,T)$: bước trung gian

Mệnh đề 2.3. *Cho $0 < \alpha < 1$. Khi đó*

$$J^\alpha : L^2(0,T) \longrightarrow H_\alpha(0,T),$$

là một đẳng cấu. Nói riêng, $H_\alpha(0,T) = J^\alpha(L^2(0,T))$.

Ví dụ 2.4. Theo Mệnh đề 2.3, chúng ta sẽ kiểm tra rằng

$$f(t) = t^\beta \in H_\alpha(0,T) \text{ nếu } \beta > \alpha - \frac{1}{2}.$$

Thật vậy, đặt $\gamma := \beta - \alpha$ thì $\gamma > \frac{-1}{2}$ và do đó $g(t) = t^\gamma \in L^2(0,T)$. Khi đó

$$J^\alpha(g)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\gamma ds.$$

Đổi biến $u = \dfrac{s}{t}$, ta có:

$$\begin{aligned} J^\alpha(g)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-ut)^{\alpha-1}(ut)^\gamma t du \\ &= \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\gamma (1-u)^{\alpha-1} du \\ &= \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha)} B(\gamma+1,\alpha) \\ &= \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} t^\beta. \end{aligned}$$

Do đó $f(t) = J^\alpha \left(\dfrac{\Gamma(\gamma+\alpha+1)}{\Gamma(\gamma+1)} g \right)$. Mà $\dfrac{\Gamma(\gamma+\alpha+1)}{\Gamma(\gamma+1)} g \in J^\alpha L^2(0,T)$ nên $f \in H_\alpha(0,T)$.

Định nghĩa 2.5.

$$\partial_t^\alpha := (J^\alpha)^{-1} = J^{-\alpha} \text{ với } \mathcal{D}(\partial_t^\alpha) = H_\alpha(0,T) = J^\alpha L^2(0,T). \tag{2.4}$$

Bản chất của sự mở rộng này là chúng ta định nghĩa ∂_t^α là nghịch đảo của đẳng cấu J^α từ $L^2(0,T)$ vào $H_\alpha(0,T)$. Sau này, chúng ta sẽ thường tìm g sao cho $J^\alpha g = v$, như trong Ví dụ 2.4.

Mệnh đề 2.6. *Tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho*

$$C^{-1} \|v\|_{H_\alpha(0,T)} \le \|\partial_t^\alpha v\|_{L^2(0,T)} \le C \|v\|_{H_\alpha(0,T)},$$

với mọi $v \in H_\alpha(0,T)$.

Chứng minh. Xét $v \in H_\alpha(0,T)$ bất kỳ. Khi đó tồn tại $u \in L^2(0,T)$ sao cho $J^\alpha u = v$.

Mặt khác $J^\alpha : L^2(0,T) \longrightarrow H_\alpha(0,T)$ là một đẳng cấu nên tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho:

$$C^{-1}\|J^\alpha u\|_{H_\alpha(0,T)} \leq \|u\|_{L^2(0,T)} \leq C\|J^\alpha u\|_{H_\alpha(0,T)}.$$

Ta có $\partial_t^\alpha v = \partial_t^\alpha(J^\alpha u) = (J^\alpha)^{-1}(J^\alpha u) = u$. Do đó

$$C^{-1}\|v\|_{H_\alpha(0,T)} \leq \|\partial_t^\alpha v\|_{L^2(0,T)} \leq C\|v\|_{H_\alpha(0,T)}.$$

$\square$

Ví dụ 2.7. Chúng ta quay trở lại với Ví dụ 2.4. Cho $\alpha \in (0,1),\ \beta > \alpha - \frac{1}{2}$. Khi đó $v(t) = t^\beta \in H_\alpha(0,T)$ và

$$J^\alpha t^{\beta-\alpha} = \frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)} t^\beta.$$

Do đó

$$\left((J^\alpha)^{-1} t^\beta\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.$$

Suy ra

$$\partial_t^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} \in L^2(0,T).$$

Tuy nhiên nếu $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ thì $\beta \leq 0$ và khi đó $\frac{d}{dt}t^\beta = \beta t^{\beta-1} \notin L^1(0,T)$. Do đó $d_t^\alpha v$ không thể định nghĩa trực tiếp.

Mệnh đề 2.8. *Với $\alpha, \beta \geq 0$ sao cho $\alpha - \beta < 1$ thì*

$$J^{-\alpha} J^\beta = J^{-\alpha+\beta} \quad \textit{trên} \quad \mathcal{D}(J^{-\alpha+\beta}).$$

Trong đó

$$\mathcal{D}\left(J^{-\alpha+\beta}\right) = \begin{cases} L^2(0,T) & \textit{nếu } -\alpha+\beta \geq 0, \\ H_{\alpha-\beta}(0,T) & \textit{nếu } -1 < -\alpha+\beta < 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Giả sử $-\alpha + \beta \geq 0$. Nếu $\alpha = \beta$, thì $J^{-\alpha}J^\alpha = I$ là toán tử đồng nhất trên $L^2(0,T)$ nên kết luận là hiển nhiên.
Nếu $\beta > \alpha$. Đặt $\gamma := \beta - \alpha > 0$. Khi đó, với mọi $v \in L^2(0,T)$, ta có

$$J^{-\alpha}(J^\beta v) = J^{-\alpha}\left(J^{\alpha+\gamma} v\right)$$

$$= J^{-\alpha}\left(J^{\alpha}(J^{\gamma}v)\right)$$
$$= \left(J^{-\alpha}J^{\alpha}\right)(J^{\gamma}v)$$
$$= J^{\gamma}v = J^{-\alpha+\beta}v.$$

Như vậy $J^{-\alpha}J^{\beta} = J^{-\alpha+\beta}$ trên $L^2(0,T)$.

Tiếp theo, giả sử $-1 < -\alpha+\beta < 0$. Xét $v \in H_{\alpha-\beta}(0,T)$ bất kì. Vì $J^{\alpha-\beta} : L^2(0,T) \longrightarrow H_{\alpha-\beta}(0,T)$ là song ánh nên tồn tại $w \in L^2(0,T)$ sao cho $v = J^{\alpha-\beta}w$. Suy ra

$$J^{-\alpha}J^{\beta}v = J^{-\alpha}J^{\beta}\left(J^{\alpha-\beta}w\right) = J^{-\alpha}\left(J^{\beta+(\alpha-\beta)}w\right) = J^{-\alpha}J^{\alpha}w = w.$$

Mặt khác, vì $v = J^{\alpha-\beta}w$ nên $w = \left(J^{\alpha-\beta}\right)^{-1}v = J^{-\alpha+\beta}v$.
Do đó $J^{-\alpha}J^{\beta} = J^{-\alpha+\beta}$ với mỗi $v \in H_{\alpha-\beta}(0,T)$. □

Nhắc lại

$$D_t^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}v(s)ds,$$
$$d_t^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\frac{dv}{ds}(s)ds.$$

Mệnh đề 2.9. *Cho $\alpha \in (0,1)$. Khi đó*

$$\partial_t^{\alpha}v = D_t^{\alpha}v = d_t^{\alpha}v \quad \textit{với mọi } v \in {}_0C^1[0,T], \tag{2.6}$$

và

$$\partial_t^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}v(s)ds = D_t^{\alpha}v(t) \ \textit{ với mọi } v \in H_{\alpha}(0,T). \tag{2.7}$$

Chứng minh. Đầu tiên, chúng ta chứng minh $D_t^{\alpha}v = d_t^{\alpha}v$ với mọi $v \in {}_0C^1[0,T]$. Ta có

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha}v(s)ds = \frac{-(t-s)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}v(s)\bigg|_0^t + \int_0^t \frac{(t-s)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}v'(s)ds$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^t (t-s)^{-\alpha+1}v'(s)ds.$$

Áp dụng quy tắc Lebnitz, ta thu được

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}v'(s)ds = \int_0^t (t-s)^{-\alpha}v'(s)ds.$$

Suy ra $D_t^\alpha v(t) = d_t^\alpha v(t)$.

Vì ${}_0C^1[0,T] \subset H_\alpha(0,T)$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\partial_t^\alpha v = D_t^\alpha v \text{ với mọi } v \in H_\alpha(0,T).$$

Xét $v \in H_\alpha(0,T)$. Khi đó tồn tại $u \in L^2(0,T)$ sao cho $J^\alpha u = v$ hay $u = J^{-\alpha}v = \partial_t^\alpha v$.

Ta có:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha v(t) &= \frac{d}{dt}J^{1-\alpha}v(t) \\ &= \frac{d}{dt}\left(J^{1-\alpha}(J^\alpha u)\right)(t) \\ &= \frac{d}{dt}Ju(t) \\ &= \frac{d}{dt}\int_0^t u(s)ds = u(t). \end{aligned}$$

Suy ra $\partial_t^\alpha v = D_t^\alpha v$. □

2.3 Định nghĩa của ∂_t^α: hoàn thành mở rộng của d_t^α

Bằng cách định nghĩa hiện tại của ∂_t^α, chúng ta hiểu rằng $\partial_t^\alpha 1 = 0$ với $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, nhưng không thể định nghĩa được $\partial_t^\alpha 1$ với $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ do

$$\begin{cases} 1 \in H_\alpha(0,T) = \mathcal{D}\left(\partial_t^\alpha\right), \ 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \\ 1 \notin \mathcal{D}\left(\partial_t^\alpha\right), \ \frac{1}{2} \le \alpha < 1. \end{cases}$$

Tuy nhiên, $d_t^\alpha 1 = 0$ và $D_t^\alpha 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ với mọi $\alpha \in (0,1)$. Điều này cho thấy rằng sự mở rộng hiện tại của ∂_t^α là chưa đủ. Do đó chúng ta tiếp tục mở rộng định nghĩa của ∂_t^α để có thể định nghĩa được $\partial_t^\alpha v$ trong các không gian tổng quát hơn, chẳng hạn như $L^2(0,T)$. Chúng ta bắt đầu với mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.10. *Cho $0 < \alpha < 1$ và $0 \leq \beta < 1$. Khi đó $J_\alpha : {}^\beta H(0,T) \longrightarrow {}^{\alpha+\beta}H(0,T)$ là một đẳng cấu.*

Chứng minh. Xét $u \in {}^\beta H(0,T) \subset L^2(0,T)$. Khi đó tồn tại duy nhất $u_1 \in L^2(0,T)$ sao cho $u = \tau(u_1)$, hay $u(t) = u_1(T-t)$ với mọi $t \in [0,T]$. Ta có

$$
\begin{aligned}
J_\alpha u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (s-t)^{\alpha-1} u(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (s-t)^{\alpha-1} u_1(T-s) ds \\
&= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T-t}^0 (T-\xi-t)^{\alpha-1} u_1(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T-t} (T-\xi-t)^{\alpha-1} u_1(\xi) d\xi \\
&= (J^\alpha u_1)(T-t) = \tau\left(J^\alpha u_1\right)(t).
\end{aligned}
$$

Mà $\tau,\ J^\alpha$ là đẳng cấu. Do đó J_α là một đẳng cấu. $\square$

Ký hiệu $(J^\alpha)'$ và $(J_\alpha)'$ lần lượt là toán tử đối ngẫu của J^α và J_α. Gọi $H_{-\alpha}(0,T)$ và ${}^{-\alpha}H(0,T)$ lần lượt là không gian đối ngẫu của $H_\alpha(0,T)$ và ${}^\alpha H(0,T)$. Khi đó ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.11. *Cho $\alpha > 0$ và $\beta \geq 0$ thỏa mãn $\alpha + \beta < 1$. Khi đó:*

(i) $(J^\alpha)' : H_{-\alpha-\beta}(0,T) \longrightarrow H_{-\beta}(0,T)$ là một đẳng cấu. Đặc biệt, $(J^\alpha)' : H_{-\alpha}(0,T) \longrightarrow L^2(0,T)$ là một đẳng cấu.

(ii) $(J_\alpha)' : {}^{-\alpha-\beta}H(0,T) \longrightarrow {}^{-\beta}H(0,T)$ là một đẳng cấu. Đặc biệt, $(J_\alpha)' : {}^{-\alpha}H(0,T) \longrightarrow L^2(0,T)$ là một đẳng cấu.

(iii) Với mọi $v \in L^2(0,T)$ ta có

$$J^\alpha v = (J_\alpha)' v.$$

Chứng minh. (i) Chúng ta nhắc lại rằng

$$J^\alpha : H_\beta(0,T) \longrightarrow H_{\alpha+\beta}(0,T),$$

là một đẳng cấu theo Mệnh đề 2.8. Do đó $(J^\alpha)' : H_{-\alpha-\beta}(0,T) \longrightarrow H_{-\beta}(0,T)$ là một đẳng cấu.

(ii) Theo Mệnh đề 2.10, $J_\alpha : {}^\beta H(0,T) \longrightarrow {}^{\alpha+\beta}H(0,T)$ là một đẳng cấu. Do đó $(J_\alpha)' : {}^{-\alpha-\beta}H(0,T) \longrightarrow {}^{-\beta}H(0,T)$ là một đẳng cấu.

(iii) Với mọi $u, v \in L^2(0,T)$ bất kỳ, ta có

$$\big((J_\alpha)'v, w\big)_{{}^{-\alpha}H(0,T)\times H^\alpha(0,T)} = (J_\alpha w, v)_{L^2(0,T)\times L^2(0,T)},$$

trong đó $(\cdot,\cdot)_{L^2(0,T)}$ là tích vô hướng trong $L^2(0,T)$. Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$(J^\alpha v, w)_{L^2(0,T)} = (J_\alpha w, v)_{L^2(0,T)} \ \text{ với mọi } \ w \in L^2(0,T).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
(J^\alpha v, w)_{L^2(0,T)} &= \int_0^T J^\alpha v(t) w(t) dt \\
&= \int_0^T \int_0^t \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds w(t) dt \\
&= \int_0^T \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_s^T (t-s)^{\alpha-1} w(t) dt \right) v(s) ds \\
&= \int_0^T J_\alpha w(s) v(s) ds \\
&= (J_\alpha w, v)_{L^2(0,T)}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$(J^\alpha v, w)_{L^2(0,T)} = (J_\alpha w, v)_{L^2(0,T)} \ \text{ với mọi } \ w \in L^2(0,T).$$

Do đó

$$J^\alpha = (J_\alpha)' \text{ trong } L^2(0,T).$$

$\square$

Bây giờ chúng ta có thể định nghĩa $J'_\alpha u$ cho $u \in L^1(0,T)$ như sau: Chọn $\gamma > 0$ sao cho $\frac{1}{2} < \alpha + \gamma < 1$. Khi đó từ phép nhúng Sobolev ta có

$${}^{\alpha+\gamma}H(0,T) \hookrightarrow H^{\alpha+\gamma}(0,T) \hookrightarrow C[0,T].$$

Do đó, $u \in L^1(0,T)$ bất kỳ có thể được coi là một phần tử trong $\left({}^{\alpha+\gamma}H(0,T)\right)'$ $= {}_{-\alpha-\gamma}H(0,T)$ như sau:

$$\begin{array}{rcrcl} u & : & {}^{\alpha+\gamma}H(0,T) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \varphi & \longmapsto & \int_0^T u(t)\varphi(t)dt. \end{array}$$

Định nghĩa được xác định bởi vì

$$\begin{aligned} \left|\langle u,\varphi\rangle_{-\alpha-\gamma H(0,T)\times^{\alpha+\gamma}H(0,T)}\right| &\le \int_0^T |u(t)||\varphi(t)|dt \\ &\le \sup_{t\in[0,T]} |\varphi(t)| \int_0^T |u(t)|dt \\ &= \|u\|_{L^1(0,T)}\|\varphi\|_{C[0,T]} \\ &\le C\|u\|_{L^1(0,T)}\|\varphi\|_{\alpha+\gamma H(0,T)}. \end{aligned}$$

Hơn nữa ta có $\|u\|_{-\alpha-\gamma H(0,T)} \le C\|u\|_{L^1(0,T)}$, nên $L^1(0,T) \subset \mathcal{D}(J'_\alpha) = {}^{-\alpha-\gamma}H(0,T)$. Khi đó chúng ta có thể cải thiện Mệnh đề 2.11 như sau:

Mệnh đề 2.12. *Ta có*

$$J'_\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)ds,\ 0<t<T, \quad \textit{với mọi} \ \ u\in L^1(0,T). \tag{2.8}$$

Chúng ta có thể viết lại công thức (2.8) *như sau* $J'_\alpha = J^\alpha$ *trong* $L^1(0,T)$.

Chứng minh. Chọn $\gamma > \frac{1}{2}$. Khi đó $\alpha+\gamma > \frac{1}{2}$, với mọi $v \in L^1(0,T)$ ta có

$$L^1(0,T) \subset^{-\alpha-\gamma} H(0,T) \text{ và } \|v\|_{-\alpha-\gamma H(0,T)} \le C\|v\|_{L^1(0,T)}.$$

Xét $u \in L^1(0,T)$ bất kỳ. Vì $L^2(0,T)$ trù mật trong $L^1(0,T)$ nên tồn tại $u_n \subset L^2(0,T)$ sao cho $u_n \to u$ trong $L^1(0,T)$ khi $u \to \infty$. Theo Mệnh đề 2.11, ta có $J'_\alpha u_n = J^\alpha u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. (*)

Theo Mệnh đề 2.11 $(J_\alpha)' : {}^{-\alpha-\gamma}H(0,T) \longrightarrow {}^{-\gamma}H(0,T)$ là một đẳng cấu, nên tồn tại hằng số C sao cho

$$\left\|J'_\alpha(u_n-u)\right\|_{-\gamma H(0,T)} \le C\left\|u_n-u\right\|^{-\alpha-\gamma} H(0,T) \le C\left\|u_n-u\right\|_{L^1(0,T)}.$$

Mà $\|u_n-u\|_{L^1(0,T)} \to 0$ khi $n\to\infty$ nên $J'_\alpha u_n \longrightarrow J'_\alpha u$ trong ${}^{-\gamma}H(0,T)$. (**)

Mặt khác, với $u \in L^1(0,T)$, áp dụng bất đẳng thức Young cho tích chập ta có

$$\begin{aligned}
\left\| J^\alpha u_n - J^\alpha u \right\|_{L^1(0,T)} &= \left\| J^\alpha (u_n - u) \right\|_{L^1(0,T)} \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{\alpha-1} * (u_n - u) \right\|_{L^1(0,T)} \\
&\leq \left\| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{\alpha-1} \right\|_{L^1(0,T)} \left\| u_n - u \right\|_{L^1(0,T)} \\
&= C \left\| u_n - u \right\|_{L^1(0,T)} .
\end{aligned}$$

Suy ra $J^\alpha u_n \longrightarrow J^\alpha u$ trong $L^1(0,T)$, hay $J^\alpha u_n \longrightarrow J^\alpha u$ trong ${}^{-\gamma}H(0,T)$. Kết hợp với (*) và (**) ta có $J'_\alpha u = J^\alpha u$. $\square$

Định nghĩa 2.13. *Cho $\alpha \in (0,1)$, chúng ta định nghĩa*

$$\partial_t^\alpha := \left(J'_\alpha\right)^{-1} \quad \text{với} \;\; \mathcal{D}\left(\partial_t^\alpha\right) = H_\beta(0,T) \;\; \text{hoặc} \;\; \mathcal{D}\left(\partial_t^\alpha\right) = {}^{-\beta}H(0,T). \quad (2.9)$$

Từ định nghĩa trên và Mệnh đề 2.11 ta có định lý sau.

Định lý 2.14. *Cho $\alpha > 0$ và $\beta \geq 0$ thỏa mãn $\alpha + \beta < 1$. Khi đó $\partial_t^\alpha : {}^{-\beta}H(0,T) \longrightarrow {}^{-\alpha-\beta}H(0,T)$ và $\partial_t^\alpha : H_{\alpha+\beta}(0,T) \longrightarrow H_\beta(0,T)$ đều là các đẳng cấu.*

Ví dụ 2.15. Với $0 < \alpha < 1$. Chọn $\gamma > 0$ sao cho $\frac{1}{2} < \alpha + \gamma < 1$ ta xét ∂_t^α với $\mathcal{D}(\partial_t^\alpha) = {}^{-\gamma-\alpha}H(0,T) \supset L^1(0,T)$. Khi đó $1 \in \mathcal{D}(\partial_t^\alpha)$, và ta có

$$\partial_t^\alpha 1 = D_t^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}.$$

Thật vậy, vì $\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \in L^1(0,T)$, theo Mệnh đề 2.12 ta có

$$\begin{aligned}
J'_\alpha\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}\right) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} ds\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-ut)^{\alpha-1} (ut)^{-\alpha} t du \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{-\alpha} du
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} B(\alpha, 1-\alpha) = 1.$$

Do đó, từ định nghĩa ta có $\partial_t^\alpha 1 = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$.

Mệnh đề 2.16. *Cho* $0 < \alpha < 1$. *Khi đó*

$$\partial_t^\alpha u(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds \right) \quad \textit{trong} \quad (C_0^\infty(0,T))',$$

với mọi $u \in L^1(0,T)$, *trong đó* $\dfrac{d}{dt}$ *là đạo hàm yếu.*

Chứng minh. Với mọi $u \in L^1(0,T)$, $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ chúng ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} < \partial_t^\alpha u, \varphi > &= \left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds \right), \varphi \right\rangle \\ &= (-1) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\langle \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds, \varphi'(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Chọn $\gamma > 0$ sao cho $\frac{1}{2} < \alpha + \gamma < 1$. Khi đó $L^1(0,T) \subset {}^{-\alpha-\gamma}H(0,T)$.

Do ${}_0C^1[0,T]$ trù mật trong $L^1(0,T)$, nên tồn tại $u_n \in {}_0C^1[0,T]$, $n \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n \to u$ trong $L^1(0,T)$ khi $n \to \infty$. Lại có $L^1(0,T) \subset^{-\alpha-\gamma} H(0,T)$, nên $u_n \to u \in^{-\alpha-\gamma} H(0,T)$.

Theo Định lý 2.14 có $\partial_t^\alpha : {}^{-\alpha-\gamma}H(0,T) \longrightarrow {}^{-\gamma-2\alpha}H(0,T)$ là đẳng cấu. Do đó tồn tại hằng số C sao cho

$$\left\| \partial_t^\alpha (u_n - u) \right\|_{^{-\gamma-2\alpha}H(0,T)} \le C \left\| u_n - u \right\|_{^{-\gamma-\alpha}H(0,T)}.$$

Suy ra $\partial_t^\alpha u_n \longrightarrow \partial_t^\alpha u$ trong ${}^{-2\alpha-\gamma}H(0,T)$. Vì $C_0^\infty(0,T) \subset {}^{2\alpha+\gamma}H(0,T)$ nên ${}^{-2\alpha-\gamma}H(0,T) \subset (C_0^\infty(0,T))'$ và

$$\begin{aligned} \|w\|_{(C_0^\infty[0,T])'} &= \sup_{\varphi \in C_0^\infty[0,T],\ \|\varphi\|=1} \left\langle w, \varphi \right\rangle \\ &\le \sup_{\varphi \in ^{\gamma+2\alpha}H(0,T),\ \|\varphi\|=1} \left\langle w, \varphi \right\rangle = \|w\|_{^{-\gamma-2\alpha}H(0,T)}. \end{aligned}$$

Suy ra $\partial_t^\alpha u_n \longrightarrow \partial_t^\alpha u$ trong $(C_0^\infty[0,T])'$.

Mặt khác, theo Mệnh đề 2.9, ta có $\partial_t^\alpha u_n = D_t^\alpha u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Lại có $L^1(0,T) \subset (C_0^\infty[0,T])'$ suy ra $\partial_t^\alpha u_n = \partial_t^\alpha u$ trong $(C_0^\infty[0,T])'$.

Do đó

$$D_t^\alpha u_n \longrightarrow \partial_t^\alpha u \text{ trong } (C_0^\infty[0,T])'. \tag{2.10}$$

Ta chỉ cần chứng minh $D_t^\alpha u_n \longrightarrow D_t^\alpha u$ trong $(C_0^\infty[0,T])'$.
Với mọi $\varphi \in C_0^\infty[0,T]$, ta có

$$\begin{aligned}
< D_t^\alpha u_n, \varphi > &= \left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u_n(s)ds\right), \varphi \right\rangle \\
&= (-1)\left\langle \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u_n(s)ds, \varphi'(t) \right\rangle \\
&= \int_0^T \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u_n(s)ds\varphi'(t)dt.
\end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$< D_t^\alpha u, \varphi >= \int_0^T \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}uds\varphi'(t)dt.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
| < D_t^\alpha u_n - D_t^\alpha u, \varphi > | &= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^T \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(u_n-u)ds\varphi'(t)dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^T \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{\alpha-1} * (u_n-u)(t)\varphi(t)dt \right. \\
&\leq \|\varphi\|_{C_0^\infty(0,T)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\| t^{\alpha-1} * (u_n-u) \right\|_{L^1(0,T)} \\
&\leq \frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(1-\alpha)} \|\varphi\|_\infty \|u_n-u\|_{L^1(0,T)}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$D_t^\alpha u_n \longrightarrow D_t^\alpha u \;\text{ trong } (C_0^T[0,T])'. \tag{2.11}$$

Từ (2.10) và (2.11) ta được

$$\partial_t^\alpha u = D_t^\alpha u \text{ trong } (C_0^T[0,T])'.$$

$\square$

Mệnh đề trên giúp chúng ta tính toán được $u \in L^1(0,T)$ thỏa mãn $\partial_t^\alpha u = f$ ngay cả khi $f \in L^1(0,T)$.

Ví dụ 2.17. a) Với mỗi $t_0 \in (0,T)$ hàm Heaviside được định nghĩa như sau:

$$h_{t_0}(t) := \begin{cases} 0, & t \le t_0, \\ 1, & t > t_0\ . \end{cases}$$

Với mọi $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ bất kỳ, ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt} h_{t_0}(t)\varphi(t)dt &= -\int_0^T h_{t_0}(t)\varphi'(t)dt \\ &= -\int_0^{t_0} h_{t_0}(t)\varphi'(t)dt - \int_{t_0}^T h_{t_0}(t)\varphi'(t)dt \\ &= -\int_{t_0}^T \varphi'(t)dt = \varphi(t_0) =< \delta_{t_0}, \varphi >\ . \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{d}{dt}h_{t_0}(t) = \delta_{t_0}(t)$: hàm Dirac tại t_0 trong $\Big(C_0^\infty(0,T)\Big)'$.
Do $h_{t_0}(t) \in L^1(0,T)$, áp dụng Mệnh đề 2.16, ta được:

$$\partial_t^\alpha h_{t_0}(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha} h_{t_0}(s)ds.$$

Với $t \le t_0$ thì $\int_0^t (t-s)^{-\alpha} h_{t_0}(s)ds = 0$.
Với $t > t_0$ thì

$$\begin{aligned} &\int_0^t (t-s)^{-\alpha} h_{t_0}(s)ds = \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} ds \\ &= -\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{t_0}^t = \frac{(t-t_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Đặt

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha} h_{t_0}(s)ds.$$

Như vậy

$$g(t) = \begin{cases} 0, \text{ nếu } t \le t_0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)}(t-t_0)^{1-\alpha}, \text{ nếu } t > t_0. \end{cases}$$

Với mọi $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ ta có:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}g(t)\varphi(t)dt = -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{t_0}^T (t-t_0)^{1-\alpha}\varphi'(t)dt$$
$$= -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}(t-t_0)^{1-\alpha}\varphi(t)\Bigg|_{t_0}^T$$
$$+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{t_0}^T (1-\alpha)(t-t_0)^{-\alpha}\varphi(t)dt$$
$$= \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{t_0}^T (t-t_0)^{-\alpha}\varphi(t)dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^T (t-t_0)^{-\alpha}\varphi(t)dt.$$

Do đó

$$\partial_t^\alpha h_{t_0}(t) = \begin{cases} 0, \text{ nếu } t \le t_0, \\ \dfrac{(t-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \text{ nếu } t > t_0. \end{cases}$$

Tiếp theo, với mọi $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$, ta có:

$$\left\langle \partial_t^\alpha h_{t_0}, \varphi \right\rangle = \int_0^T \partial_t^\alpha h_{t_0}(t)\varphi(t)dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^T (t-t_0)^{-\alpha}\varphi(t)dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{(t-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\varphi(t)\Bigg|_{t_0}^T - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{t_0}^T (t-t_0)^{1-\alpha}\varphi'(t)dt$$
$$= \frac{-1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{t_0}^T (t-t_0)^{1-\alpha}\varphi'(t)dt.$$

Do đó

$$\lim_{\alpha\to 1^-}\left\langle \partial_t^\alpha h_{t_0}, \varphi \right\rangle = -\int_{t_0}^T \frac{d\varphi}{dt}(t)dt = \varphi(t_0) = \left\langle \delta_{t_0}, \varphi \right\rangle.$$

Suy ra $\lim_{\alpha\to 1^-} \partial_t^\alpha h_{t_0} = \delta_{t_0}$ trong $C_0^\infty(0,T)$.

b) Ta có

$$\partial_t^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)}t^{\beta-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,\ \beta > -1$$

trong ${}^{-\alpha-\gamma}H(0,T)$ với $\alpha+\gamma>\frac{1}{2}$.
Với $\beta>-1$ suy ra $t^\beta\in L^1(0,T)$, áp dụng Mệnh đề 2.16 ta có

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha t^\beta &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}s^\beta ds\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}t^{\beta-\alpha+1}B(1-\alpha,\beta+1)\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2-\alpha+\beta)}t^{\beta-\alpha+1}\right)\end{aligned}$$

Đặt $\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2-\alpha+\beta)}t^{\beta-\alpha+1}=g(t)$, với mọi $\varphi\in C_0^\infty(0,T)$, ta có

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{d}{dt}g,\varphi\right\rangle = -<g,\varphi'>\\ &= -\int_0^t \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2-\alpha+\beta)}t^{\beta-\alpha+1}\varphi'(t)dt\\ &= -\int_a^b \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2-\alpha+\beta)}t^{\beta-\alpha+1}\varphi'(t)dt,\ \Big(supp\ \varphi\subset[a,b]\subset(0,t)\Big)\\ &= -\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2-\alpha+\beta)}t^{\beta-\alpha+1}\varphi(t)\Big|_a^b + \frac{(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2-\alpha+\beta)}\int_a^b t^{\beta-\alpha}\varphi(t)dt\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2-\alpha+\beta)(\beta-\alpha+1)}\int_0^t t^{\beta-\alpha}\varphi(t)dt\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)}<t^{\beta-\alpha},\varphi>,\ \text{với mọi } \varphi\in C_0^\infty(0,T).\end{aligned}$$

Khi đó $\frac{d}{dt}g=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)}t^{\beta-1}$ trong $\Big(C_0^\infty(0,T)\Big)'$.
Như vậy

$$\partial_t^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)}t^{\beta-1}\text{ trong }\Big(C_0^\infty(0,T)\Big)'.$$

2.4 Một số tính chất cơ bản của đạo hàm bậc phân số

Định lý 2.18. *Cho $\alpha,\beta\in(0,1)$ thỏa mãn $\alpha+\beta<1$. Khi đó*

$$\partial_t^\alpha(\partial_t^\beta v)=\partial_t^{\alpha+\beta}v \text{ với mọi } v\in H_{\alpha+\beta}(0,T).$$

Chứng minh. Ta có $\partial_t^\alpha = (J^\alpha)^{-1}$ khi $\mathcal{D}(\partial_t^\alpha) = H_\alpha(0,T)$ với $\alpha \in (0,1)$. Xét $v \in H_{\alpha+\beta}(0,T)$ bất kỳ. Đặt $w = J^{-\beta}v$ thì $w \in H_\alpha(0,T)$. Khi đó $J^{-\alpha}J^{-\beta}v = J^{-\alpha}w$ và

$$J^{-(\alpha+\beta)}v = J^{-(\alpha+\beta)}J^\beta w = J^{-(\alpha+\beta)+\beta}w = J^{-\alpha}w.$$

Do đó $J^{-\alpha}J^{-\beta}v = J^{-(\alpha+\beta)}v$ với mọi $v \in H_{\alpha+\beta}(0,T)$. □

Chúng ta định nghĩa biến đổi Laplace như sau:

$$(Lv)(p) = \widehat{v}(p) := \lim_{T\to\infty}\int_0^T v(t)e^{-pt}dt$$

nếu $\int_0^\infty v(t)e^{-pt}dt < \infty$.

Bổ đề 2.19. *Cho $w \in L^2(0,T)$ với mọi $T > 0$. Nếu tồn tại $\widehat{|w|}(p)$ với $p > p_0$ thì*

$$\left(\widehat{J^\alpha w}\right)(p) = p^{-\alpha}\widehat{w}(p), \quad p > p_0.$$

Chứng minh. Chúng ta nhắc lại

$$J^\alpha w(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}w(s)ds, \text{ với mọi } w \in L^2(0,T).$$

Đặt

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}, & t > 0,\\ 0, & t \le 0,\end{cases}$$

thì $g \in L^1(0,T), \forall T > 0$. Suy ra

$$J^\alpha w(t) = g * w(t) \in L^2(0,T), \text{ với mọi } T > 0.$$

Theo giải thiết tồn tại $\widehat{|w|}$ nên ta có

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-pt}w(t)dt = \widehat{w}(p), \quad p > p_0.$$

Chọn $T > 0$ bất kỳ. Khi đó $w \in L^2(0,T)$ và

$$\int_0^T e^{-tp}J^\alpha w(t)dt = \int_0^T e^{-pt}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}w(s)ds\right)dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T w(s) \left(\int_s^T e^{-pt}(t-s)^{\alpha-1} dt \right) ds.$$

Đổi biến $\xi := (t-s)p$, ta có

$$\int_s^T e^{-pt}(t-s)^{\alpha-1} dt = \int_0^{(T-s)p} e^{-\epsilon - sp} \left(\frac{\epsilon}{p} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{p} d\epsilon$$
$$= p^{-\alpha} e^{-ps} \int_0^{(T-s)p} \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi.$$

Do đó

$$\int_0^T e^{-tp} J^\alpha w(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} p^{-\alpha} \int_0^T e^{-ps} w(s) \left(\int_0^{(T-s)p} \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi \right) ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} p^{-\alpha} \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-ps} w(s) \left(\int_0^{(T-s)p} \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi \right) ds$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} p^{-\alpha} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-ps} w(s) \left(\int_0^{(T-s)p} \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi \right) ds$$
$$=: I_1 + I_2$$

Chúng ta thấy rằng

$$\int_0^{(T-s)p} \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi \le \int_0^\infty \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi = \Gamma(\alpha).$$

Khi đó, vì$\int_0^\infty e^{-pt}|w(t)|dt$ tồn tại nên ta có

$$|I_1| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} p^{-\alpha} \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-ps} w(s) \left(\int_0^{(T-s)p} \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi \right) ds \right|$$
$$\le C p^{-\alpha} \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-ps} |w(s)| ds \quad \longrightarrow 0 \quad \text{khi } T \to \infty$$

Với $0 < s < \frac{T}{2}$ ta có

$$\frac{T}{2} p < (T-s)p < Tp.$$

Khi đó

$$\int_0^{\frac{Tp}{2}} \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi \le \int_0^{(T-s)p} \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi \le \int_0^{Tp} \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi,$$

suy ra

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^{(T-s)p}\xi^{\alpha-1}e^{-\xi}d\xi=\int_0^{\infty}\xi^{\alpha-1}e^{-\xi}d\xi=\Gamma(\alpha)\qquad \text{với } 0<s<\frac{T}{2}$$

Mặt khác $\int_0^{+\infty}e^{-sp}w(s)ds<+\infty, \forall p>p_0$. Do đó

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}I_2&=\lim_{T\to\infty}\int_0^{\frac{T}{2}}e^{-ps}w(s)\left(\int_0^{(T-s)p}\xi^{\alpha-1}e^{-\xi}d\xi\right)ds\\&=\Gamma(\alpha)\int_0^{\infty}e^{-ps}w(s)ds\\&=\frac{p^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}w(s)e^{-ps}\Gamma(\alpha)ds=p^{-\alpha}\widehat{w}(p),\quad p>p_0.\end{aligned}$$

Như vậy

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}e^{-pt}\left(J^{\alpha}w\right)(t)dt=\lim_{T\to\infty}(I_1+I_2)=p^{-\alpha}\widehat{w}(p),\quad p>p_0,$$

hay

$$\left(\widehat{J^{\alpha}w}\right)(p)=p^{-\alpha}\widehat{w}(p),\quad p>p_0.$$

$\square$

Định lý 2.20 (Biến đổi Laplace của $\partial_t^{\alpha}v$). *Cho $u\in H_{\alpha}(0,T)$ với $T>0$ bất kỳ. Nếu tồn tại $\left(\widehat{|\partial_t^{\alpha}u|}\right)(p)$ với $p>p_0$ là hằng số dương thì tồn tại $\widehat{u}(p)$ với $p>p_0$ và*

$$\widehat{\partial_t^{\alpha}u}(p)=p^{\alpha}\widehat{u}(p),\quad p>p_0.$$

Chứng minh. Vì $u\in H_{\alpha}(0,T)$ với bất kỳ $T>0$, khi đó tồn tại duy nhất $w_T\in L^2(0,T)$ sao cho $J^{\alpha}w_T=u$ trên $L^2(0,T)$.
Dễ thấy rằng nếu $T_1<T_2$ thì $w_{T_1}=w_{T_2}$ trên $L^2(0,T)$. Do đó chúng ta định nghĩa:

$$\begin{aligned}\omega:[0,\infty)&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\omega(t)=\omega_T(t),\end{aligned}$$

với $T>t$. Khi đó với $w\in L^2(0,T)$, với mọi $T>0$ và $J^{\alpha}w=u$ trên $L^2(0,T)$, với mọi $T>0$. Tức là $J^{\alpha}w=u(t)$ h.k.n trên $(0,\infty)$. Suy ra $\partial_t^{\alpha}u(t)=w(t)$ h.k.n trên $(0,\infty)$.

Vì $\partial_t^\alpha u(t) = w(t)$ với $t > 0$ và $|\widehat{\partial_t^\alpha u}|(p)$ tồn tại với $p > p_0$, ta có $|\widehat{w}|(p)$ tồn tại với $p > p_0$.
Áp dụng Bổ đề 2.19 ta có $\left|\widehat{J^\alpha w}\right|$ tồn tại với $\forall p > p_0$ và

$$\left(\widehat{J^\alpha w}\right)(p) = p^{-\alpha}\widehat{w}(p), \quad p > p_0.$$

Do đó

$$\widehat{u}(p) = p^{-\alpha}\widehat{\partial_t^\alpha u}(p), \quad p > p_0.$$

□

Hệ quả 2.21. *Cho $u \in H_\alpha(0,T)$ với $T > 0$. Nếu $\partial_t^\alpha u \in L^r(0,\infty)$, $r \geq 1$ thì*

$$\widehat{\partial_t^\alpha u}(p) = p^\alpha \widehat{u}(p), \quad p > p_0.$$

Định lý 2.22. *Cho $\alpha \in (0,1)$. Khi đó*

(i) $J^\alpha(u * g) = (J^\alpha u) * g$ *với* $u \in L^1(0,T)$ *và* $g \in L^1(0,T)$.

(ii) $\|u * g\|_{H_\alpha(0,T)} \leq C\|u\|_{H_\alpha(0,T)}\|g\|_{L^1(0,T)}$ *với* $u \in H_\alpha(0,T)$ *và* $g \in L^1(0,T)$.

(iii) $\partial_t^\alpha(u * g) = (\partial_t^\alpha u) * g$ *với* $u \in H_\alpha(0,T)$ *và* $g \in L^1(0,T)$.

Chứng minh. (i) Với mọi $u, g \in L^1(0,T)$ ta có

$$\begin{aligned}
J^\alpha(u * g)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_0^s u(s-\xi)g(\xi)d\xi\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g(\xi)\left(\int_\xi^t (t-s)^{\alpha-1}u(s-\xi)ds\right)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g(\xi)\left(\int_0^{t-\xi} (t-\xi-\eta)^{\alpha-1}u(\eta)d\eta\right)d\xi \\
&= \int_0^t g(\xi)(J^\alpha u)(t-\xi)d\xi \\
&= (g * J^\alpha u)(t),\ 0 < t < T.
\end{aligned}$$

(ii) Xét $u \in H_\alpha(0,T)$, khi đó tồn tại $w \in L^2(0,T)$ sao cho $u = J^\alpha w$ trên $(0,T)$ và $\|w\|_{L^2(0,T)} \le C\|u\|_{H_\alpha(0,T)}$. Áp dụng Định lý 2.19 ta thu được

$$u * g = J^\alpha w * g = J^\alpha(w * g).$$

Vì $w \in L^2(0,T)$ và $g \in L^1(0,T)$ suy ra $w * g \in L^2(0,T)$. Do đó $J^\alpha(w * g) \in H_\alpha(0,T)$ và

$$\begin{aligned}\left\|J^\alpha(w * g)\right\|_{H^\alpha(0,T)} &\le C\|w * g\|_{L^2(0,T)}\\ &\le C\|w\|_{L^2(0,T)}\|g\|_{L^1(0,T)}\\ &\le C\|u\|_{H^\alpha(0,T)}\|g\|_{L^1(0,T)}.\end{aligned}$$

(iii) Xét $u \in H_\alpha(0,T)$, khi đó tồn tại $w \in L^2(0,T)$ sao cho $u = J^\alpha w$ trên $(0,T)$, suy ra $\partial_t^\alpha u = w$ trên $(0,T)$.
Vì $w \in L^2(0,T), g \in L^1(0,T)$ suy ra $w * g \in L^2(0,T)$.
Áp dụng (i), ta có

$$J^\alpha(w * g) = J^\alpha w * g = u * g.$$

Kết hợp với $w * g \in L^2(0,T), w * g \in H_\alpha(0,T)$ ta có $\partial_t^\alpha(u * g) = w * g = \partial_t^\alpha u * g$.

□

Định lý 2.23. *Cho $\gamma > \frac{1}{2}$ và $\beta + \gamma > \frac{1}{2}$. Khi đó, $\partial_t^\beta : {}^{-\gamma}H(0,T) \longrightarrow {}^{-\beta-\gamma}H(0,T)$, ta có*

$$\partial_t^\beta v * u = \partial_t^\beta(v * u),$$

với mọi $u \in L^1(0,T)$ và $v \in L^1(0,T)$ thỏa mãn $\partial_t^\beta v \in L^1(0,T)$.

Chứng minh. Theo bất đẳng thức Young ta có $\partial_t^\beta v * u \in L^1(0,T)$. Áp dụng Mệnh đề 2.12, ta có

$$J'_\beta(\partial_t^\beta v * u) = J^\beta(\partial_t^\beta v * u).$$

Áp dụng Định lý 2.22, ta có

$$J^\beta(\partial_t^\beta v * u) = (J^\beta \partial_t^\beta v) * u.$$

Vì $\partial_t^\beta v \in L^1(0,T)$, sử dụng Định nghĩa 2.13, và Mệnh đề 2.12 một lần nữa suy ra

$$J^\beta \partial_t^\beta v = J'_\beta \partial_t^\beta v = J'_\beta (J'_\beta)^{-1} v = v.$$

Do đó, $J'_\beta(\partial_t^\beta v * u) = v * u$. Suy ra $\partial_t^\beta (v * u) = \partial_t^\beta v * u$. □

2.5 Các đạo hàm bậc phân số của hàm Mittag - Leffler

Mệnh đề 2.24. *Cho trước* $0 < \alpha < 1$, $T > 0$ *và* $\lambda > -\Lambda_0$, $\lambda > 0$. *Khi đó*

(i) Với mọi $\lambda > -\Lambda_0$ *ta có* $E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) - 1 \in H_\alpha(0,T)$ *và*

$$\partial_t^\alpha (E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) - 1) = -\lambda E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha),\ t > 0.$$

(ii) Với mọi $\lambda > -\Lambda_0$ *ta có* $tE_{\alpha,2}(-\lambda t^\alpha) - t \in H_\alpha(0,T)$ *và*

$$\partial_t^\alpha (tE_{\alpha,2}(-\lambda t^\alpha) - t) = -\lambda t E_{\alpha,2}(-\lambda t^\alpha),\ t > 0.$$

Chứng minh. (i) Ta có

$$J^\alpha[-\lambda E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[-\lambda E_{\alpha,1}(-\lambda s)^\alpha]ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[-\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda s^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\right]ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{k+1}}{\Gamma(\alpha k+1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\alpha k} ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{k+1}}{\Gamma(\alpha k+1)}\int_0^1 (t-ut)^{\alpha-1} (ut)^{\alpha k} t du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{k+1}}{\Gamma(\alpha k+1)}\int_0^1 t^{\alpha(k+1)} (1-u)^{\alpha-1} (ut)^{\alpha k} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{k+1}}{\Gamma(\alpha k+1)}\int_0^1 t^{\alpha(k+1)} B(\alpha k+1, \alpha)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{k+1} t^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} - 1$$
$$= E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) - 1.$$

Do $-\lambda E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) \in L^2(0,T)$ nên $E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) - 1 \in H_\alpha(0,T)$ và

$$\partial_t^\alpha (E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) - 1) = -\lambda E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha).$$

(ii) Ta có:

$$J^\alpha \left[-\lambda t E_{\alpha,2}\left(-\lambda t^\alpha\right)\right](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(-\lambda s E_{\alpha,2}\left(-\lambda s^\alpha\right)\right) ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^l (t-s)^{\alpha-1} \left[-\lambda s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda s)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+2)} ds\right]$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{\alpha k+1}}{\Gamma(\alpha k+2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\alpha k+1} ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{\alpha k+1}}{\Gamma(\alpha k+2)} t^{\alpha(k|1)+1} B(\alpha k+2, \alpha)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{k+1} t^{\alpha(k+1)+1}}{\Gamma[(\alpha(k+1)+2)]}$$
$$= t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\lambda t^\alpha\right)^{k+1}}{\Gamma[(\alpha(k+1)+2)]}$$
$$= t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\lambda t^\alpha\right)^{k}}{\Gamma(\alpha k+2)} - 1\right]$$
$$= t E_{\alpha,2}\left(-\lambda t^\alpha\right) - t.$$

Vì $-\lambda t E_{\alpha,2}(-\lambda t^\alpha) \in L^2(0,T)$ nên $t E_{\alpha,2}(-\lambda t^\alpha) - t \in H^\alpha(0,T)$ và

$$\partial_t^\alpha [t E_{\alpha,2}(-\lambda t^\alpha) - t] = -\lambda t E_{\alpha,2}(-\lambda t^\alpha).$$

□

Với $f \in L^2(0,T)$, ta đặt

$$(B_\lambda f)(t) := \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-s)^\alpha) f(s) ds. \tag{2.16}$$

Khi đó ta có kết quả sau:

Mệnh đề 2.25. *Cho $f \in L^2(0,T)$. Khi đó*

$$B_\lambda f \in H_\alpha(0,T) \quad \text{và} \quad \partial_t^\alpha (B_\lambda f)(t) = -\lambda (B_\lambda f)(t) + f(t), \quad 0 < t < T.$$

Hơn nữa, tồn tại hằng số $C_5 = C_5(\alpha, \Lambda_0, T) > 0$ và $C_6 = C_6(\alpha, T) > 0$ sao cho

$$\begin{cases} \|B_\lambda f\|_{H_\alpha(0,T)} \le C_5(\alpha, \Lambda_0, T) \|f\|_{L^2(0,T)}, \ \forall f \in L^2(0,T), \ \lambda > -\Lambda_0, \\ \|B_\lambda f\|_{H_\alpha(0,T)} \le C_6(\alpha, T) \|f\|_{L^2(0,T)}, \ \forall f \in L^2(0,T), \ \lambda \ge 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Ta có

$$J^\alpha[-\lambda(B_\lambda f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [-\lambda (B_\lambda f)(s)] ds$$

$$= \frac{-\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(s-\xi)^\alpha] f(\xi) d\xi ds$$

$$= \frac{-\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\xi) \int_\xi^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(s-\xi)^\alpha] ds d\xi.$$

Ta xét

$$\begin{aligned} I &= \frac{-\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_\xi^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(s-\xi)^\alpha] ds \\ &= \frac{-\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_\xi^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\xi)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda)^k (s-\xi)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} ds \\ &= \frac{-\lambda}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_\xi^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\xi)^{\alpha+\alpha k-1} ds. \end{aligned}$$

Đổi biến $u := \dfrac{s-\xi}{t-\xi}$, ta được

$$\begin{aligned} I &= \frac{-\lambda}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\alpha k + 2\alpha - 1} (t-\xi)^{\alpha k + 2\alpha - 1} du \\ &= \frac{-\lambda}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} (t-\xi)^{\alpha k + 2\alpha - 1} B(\alpha k + \alpha, \alpha) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\lambda)^{k+1} (t-\xi)^{\alpha(k+1)+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\alpha)} \\ &= (t-\xi)^{\alpha-1} \left[\sum_{k=0}^\infty \frac{[-\lambda(t-\xi)^\alpha]^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right] \end{aligned}$$

$$= (t-\xi)^{\alpha-1}\left[E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\xi)^\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right].$$

Như vậy

$$\begin{aligned}J^\alpha[-\lambda(B_\lambda f)](t) &= \int_0^t f(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}\left[E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\xi)^\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right]d\xi \\ &= B_\lambda f(t) - J^\alpha f(t),\end{aligned}$$

suy ra

$$J^\alpha(-\lambda(B_\lambda f) + f)(t) = B_\lambda f(t).$$

Vì $-\lambda(B_\lambda f) + f \in L^2(0,T)$ nên $B_\lambda f \in H_\alpha(0,T)$ và áp dụng $\partial_t^\alpha = (J^\alpha)^{-1}$ ta được

$$\partial_t^\alpha(B_\lambda f) = -\lambda B_\lambda f + f \text{ trên } (0,T).$$

Theo Mệnh đề 2.6, ta có:

$$\begin{aligned}\|B_\lambda f\|_{H_\alpha(0,T)} &\le C\left\|\partial_t^\alpha(B_\lambda f)\right\|_{L^2(0,T)} \\ &= C\left\|\lambda B_\lambda f + f\right\|_{L^2(0,T)} \\ &\le C(\|\lambda B_\lambda f\| + \|f\|)_{L^2(0,T)} \\ &\le C\left(\left\|\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^2)\right\|_{L^1(0,T)}\|f\|_{L^2(0,T)} + \|f\|_{L^2(0,T)}\right) \\ &= C\left(\left\|\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)\right\|_{L^1(0,T)} + 1\right)\|f\|_{L^2(0,T)}.\end{aligned}$$

Trường hợp 1: Với $\lambda \ge 0$. Ta có

$$\Big(E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha\Big)'(t) = -\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)$$

và $E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) > 0$, $E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha) > 0$ với mọi $t > 0$. Do đó

$$\begin{aligned}\left\|\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)\right\|_{L^1(0,T)} &= \int_0^T \lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)dt \\ &= -E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)\Big|_0^T \\ &= -E_{\alpha,1}(-\lambda T^\alpha) + 1 \le 1.\end{aligned}$$

Trường hợp 2: Với $-\Lambda_0 < \lambda < 0$. Ta có

$$\begin{aligned}\left\|\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha})\right\|_{L^1(0,T)} &= |\lambda|\int_0^T t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha})dt\\ &\le |\Lambda_0|C_1\int_0^T t^{\alpha-1}dt\\ &= |\Lambda_0|C_1\frac{T^{\alpha}}{\alpha}.\end{aligned}$$

Chọn $C_5(\alpha,\Lambda_0,T) = C|\Lambda_0|C_1\frac{T^{\alpha}}{2}+1$, $C_6(\alpha,T)=2C$ ta thu được:

$$\begin{cases}\|B_\lambda f\|_{H_\alpha(0,T)} \le C_5(\alpha,\Lambda_0,T)\,\|f\|_{L^2(0,T)}\,,\ \forall f\in L^2(0,T),\ \lambda > -\Lambda_0,\\ \|B_\lambda f\|_{H_\alpha(0,T)} \le C_6(\alpha,T)\,\|f\|_{L^2(0,T)}\,,\ \forall f\in L^2(0,T),\ \lambda \ge 0.\end{cases}$$

$\square$

CHƯƠNG 3

BÀI TOÁN GIÁ TRỊ ĐẦU CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BẬC PHÂN SỐ

Trong chương này, chúng ta xét bài toán giá trị đầu sau:

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha (u-a)(t) = -\lambda u(t) + f(t), \quad 0 < t < T \\ u - a \in H_\alpha(0,T) \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ $\lambda > 0,\ T > 0$ lớn tùy ý.

Vì $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ nên với mọi $v \in H_\alpha(0,T)$ thì $v \in H^\alpha(0,T) \subset C^1([0,T])$ và $v(0) = 0$. Do đó $u - a \in H_\alpha(0,T) \subset {}_0C^1([0,T])$ và suy ra $u(0) = a$ nên đây được gọi là bài toán Cauchy.

Định lý 3.1. *Cho $f \in L^2(0,T)$. Khi đó tồn tại duy nhất nghiệm $u = u(t) \in L^2(0,T)$ cho bài toán giá trị đầu (3.1). Hơn nữa*

$$u(t) = aE_{\alpha,1}\left(-\lambda t^\alpha\right) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda(t-s)^\alpha\right) f(s)ds,\ 0 < t < T. \tag{3.2}$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh bài toán có duy nhất nghiệm trong $L^2(0,T)$.

Giả sử $u_1, u_2 \in L^2(0,T)$ là hai nghiệm của bài toán (3.1). Vì $u_1 - a, u_2 - a \in H_\alpha(0,T)$. Khi đó

$$\partial_t^\alpha (u_i - a) = (J^\alpha)^{-1}(u_i - a),\ i = 1, 2.$$

Áp dụng Mệnh đề 2.3 ta có

$$u_i - a = J^\alpha(-\lambda u_i + f) \text{ trên } H_\alpha(0,T).$$

Đặt $w = u_1 - u_2$ ta có $w = (u_1 - a) - (u_2 - a) \in H_\alpha(0,T) \subset L^2(0,T)$.

Hơn nữa

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha(u_1 - a)(t) = -\lambda u_1(t) + f(t) \\ \partial_t^\alpha(u_2 - a)(t) = -\lambda u_2(t) + f(t), \end{cases}$$

suy ra $\partial_t^\alpha[(u_1-a)-(u_2-a)](t) = -\lambda[u_1(t)-u_2(t)]$, hay $\partial_t^\alpha w(t) = -\lambda w(t)$.

Suy ra

$$w(t) = -\lambda J^\alpha w(t) = \frac{-\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s)ds,$$

hay

$$\begin{aligned} |w(t)| &\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |t-s|^{\alpha-1}|w(s)|ds, \\ &= \lambda J^\alpha |w|(t). \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề Gronwall, ta được $|w(t)| \leq 0$ h.k.n trên $(0,T)$ suy ra $w = 0$ h.k.n trên $(0,T)$ hay $u_1 = u_2$ h.k.n trên $(0,T)$. Như vậy $u_1 = u_2$ trong $L^2(0,T)$.

Cuối cùng, chúng ta chứng minh $u(t)$ ở công thức (3.2) là nghiệm của bài toán (3.1).

Ta có

$$u(t) - a = a[E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) - 1] + (B_\lambda f)(t),$$

trong đó $(B_\lambda f)(t)$ được định nghĩa trong công thức (2.16).

Áp dụng Mệnh đề 2.24 và Mệnh đề 2.25 ta được

$$E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) - 1,\ B_\lambda f(t) \in H_\alpha(0,T).$$

Do đó $u(t) - a \in H_\alpha(0,T)$. Hơn nữa, áp dụng Mệnh đề 2.24 và Mệnh đề 2.25 ta thu được

$$\partial_t^\alpha(u-a)(t) = a(-\lambda)E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) - \lambda(B_\lambda f)(t) + f(t)$$

$$= -\lambda[aE_{-\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) + B_\lambda f(t)] + f(t)$$
$$= -\lambda u(t) + f(t).$$

Như vậy, u là nghiệm của bài toán (3.1). □

Tiếp theo, chúng ta xét bài toán (3.1) cho $f \in {}^{-\alpha}H(0,T)$ như sau:

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha (u-a)(t) = -\lambda u(t) + f(t), \quad 0 < t < T, \\ u - a \in L^2(0,T). \end{cases} \tag{3.3}$$

Đầu tiên, chúng ta mở rộng toán tử B_λ lên không gian ${}^{-\alpha}H(0,T)$ như dưới đây.

Mệnh đề 3.2. *Toán tử B_λ có thể được mở rộng thành $S_\lambda : {}^{-\alpha}H(0,T) \longrightarrow L^2(0,T)$ như sau: Với $f \in {}^{-\alpha}H(0,T)$ và $f \notin L^2(0,T)$ và tồn tại dãy $\{f_n\}_n \in L^2(0,T)$ sao cho $f_n \longrightarrow f$ trong ${}^{-\alpha}H(0,T)$. Khi đó*

$$\lim_{m,n\to\infty} \|B_\lambda f_n - B_\lambda f_m\|_{L^2(0,T)} = 0, \tag{3.4}$$

tức là tồn tại $\lim_{n\to\infty} B_\lambda f_n$ trong $L^2(0,T)$, hơn nữa giới hạn này không phụ thuộc vào việc chọn $\{f_n\}_n$. Do đó, đặt

$$S_\lambda f := \lim_{n\to\infty} B_\lambda f_n \text{ trong } L^2(0,T).$$

Khi đó ta cũng có

$$\partial_t^\alpha (S_\lambda f) = -\lambda S_\lambda f + f \text{ trong } {}^{-\alpha}H(0,T). \tag{3.5}$$

Chứng minh. Vì $f \in {}^{-\alpha}H(0,T)$ và $L^2(0,T)$ trù mật trong ${}^{-\alpha}H(0,T)$, chúng ta có thể chọn dãy $\{f_n\}_n \in L^2(0,T), n \in \mathbb{N}$ sao cho $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ trong $L^2(0,T)$. Từ Mệnh đề 2.25 với mọi $g \in L^2(0,T)$ ta có $B_\lambda g \in H_\alpha(0,T) \subset L^2(0,T)$ và

$$|B_\lambda g(t)| \le \max_{t\in[0,T]} |E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)| \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right|$$
$$\le C|J^\alpha g(t)| \text{ h.k.n trên } [0,T].$$

Do đó

$$\begin{aligned}\|B_\lambda g\|_{L^2(0,T)} &= \int_0^T |B_\lambda g(t)|^2 dt \\ &\le C\int_0^T |J^\alpha g(t)|^2 dt \\ &= C\,\|J^\alpha g\|_{L^2(0,T)}\,.\end{aligned}$$

Mặt khác $J^\alpha g \in H_\alpha(0,T) \subset L^2(0,T) \subset L^1(0,T)$ và áp dụng Mệnh đề 2.12 ta có

$$J^\alpha g(t) = (J_\alpha)' g(t), \text{ h.k.n trên } (0,T).$$

Suy ra $\|B_\lambda g\|_{L^2(0,T)} \le C\,\|J'_\alpha g\|_{L^2(0,T)}$.

Do đó với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\|B_\lambda f_n - B_\lambda f_m\|_{L^2(0,T)} \le C\,\|J'_\alpha(f_n - f_m)\|_{L^2(0,T)}\,.$$

Theo Mệnh đề 2.11 có $J'_\alpha :^{-\alpha} H(0,T) \longrightarrow L^2(0,T)$ là đẳng cấu nên $\|J'_\alpha(f_n - f_m)\|_{L^2(0,T)} \le C\,\|f_n - f_m\|_{^{-\alpha}H(0,T)}$, suy ra

$$\|B_\lambda f_n - B_\lambda f_m\|_{L^2(0,T)} \le C\,\|f_n - f_m\|_{^{-\alpha}H(0,T)}\,.$$

Do $f_n \longrightarrow f$ trong ${}^{-\alpha}H(0,T)$ khi $n \to \infty$ nên $\{f_n\}_n$ là dãy Cauchy trong ${}^{-\alpha}H(0,T)$. Do đó

$$\lim_{m,n\to\infty} \|B_\lambda f_n - B_\lambda f_m\|_{^{-\alpha}H(0,T)} = 0.$$

Điều này suy ra

$$\lim_{m,n\to\infty} \|B_\lambda f_n - B_\lambda f_m\|_{L^2(0,T)} = 0.$$

Giả sử các dãy $\{f_n\}_n$ và $\{g_n\}_n \subset L^2(0,T)$ sao cho $f_n \longrightarrow f$ trong ${}^{-\alpha}H(0,T)$ và $g_n \longrightarrow g$ trong ${}^{-\alpha}H(0,T)$, suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\|_{^{-\alpha}H(0,T)} = 0,$$

và

$$\|B_\lambda f_n - B_\lambda g_n\|_{L^2(0,T)} = \|B_\lambda(f_n - g_n)\|_{L^2(0,T)}$$

$$\leq C \left\| (J_\alpha)'(f_n - g_n) \right\|_{L^2(0,T)}$$
$$\leq C \left\| f_n - g_n \right\|_{{}^{-\alpha}H(0,T)}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \|B_\lambda f_n - B_\lambda g_n\| = 0.$$

Do đó $\lim_{n\to\infty} B_\lambda f_n$ không phụ thuộc vào việc chọn $\{f_n\}_n$.
Đặt $S_\lambda f = \lim_{n\to\infty} B_\lambda f_n$ trong $L^2(0,T)$. Theo Mệnh đề 2.25, ta có

$$\partial_t^\alpha (B_\lambda f_n) = -\lambda B_\lambda f_n + f_n \quad \text{trong } L^2(0,T), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$B_\lambda f_n = -\lambda J'_\alpha B_\lambda f_n + J'_\alpha f_n \ \text{ trong } L^2(0,T) \text{ với } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \left\| (J_\alpha)' f_n - (J_\alpha)' f \right\|_{L^2(0,T)} &= \left\| J_\alpha{}'(f_n - f) \right\|_{L^2(0,T)} \\ &\leq C \left\| f_n - f \right\|_{{}^{-\alpha}H(0,T)} \\ \Longrightarrow \left\| (J_\alpha)' f_n - (J_\alpha)' f \right\|_{L^2(0,T)} &\to 0 \text{ khi } n \to \infty. \end{aligned}$$

Như vậy trong $L^2(0,T)$ ta có

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} J_\alpha{}' f_n = J_\alpha{}' f. \tag{2}$$

Tiếp theo, ta có

$$\begin{aligned} \left\| J_\alpha{}' B_\lambda f_n - J_\alpha{}' S_\lambda f \right\|_{L^2(0,T)} &= \left\| J_\alpha{}'(B_\lambda f_n - S_\lambda f) \right\|_{L^2(0,T)} \\ &\leq C \left\| B_\lambda f_n - S_\lambda f \right\|_{{}^{-\alpha}H(0,T)} \\ &\leq C \left\| B_\lambda f_n - S_\lambda f \right\|_{L^2(0,T)}. \end{aligned}$$

Suy ra $\|J_\alpha{}' B_\lambda f_n - J_\alpha{}' S_\lambda f\|_{L^2(0,T)} \to 0$ khi $n \to \infty$.

Do đó trong $L^2(0,T)$

$$\lim_{n\to\infty} J_\alpha{}' B_\lambda f_n = J_\alpha{}' S_\lambda f. \tag{3}$$

Từ $(1), (2), (3)$ cho $n \to \infty$ ta thu được $S_\lambda f = -\lambda J_\alpha{}' S_\lambda f + J_\alpha{}' f = J_\alpha{}'(-\lambda S_\lambda f + f)$. Suy ra $\partial_t^\alpha (S_\lambda f) = -\lambda S_\lambda f + f$ trong ${}^{-\alpha}H(0,T)$. $\square$

Định lý 3.3. *Cho trước* $0 < \alpha < 1$ *và* $f \in {}^{-\alpha}H(0,T)$, *tồn tại duy nhất nghiệm* $u \in L^2(0,T)$ *của* (3.3). *Hơn nữa, tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho*

$$\|u - a\|_{L^2(0,T)} \leq C\left(|a| + \|f\|_{{}^{-\alpha}H(0,T)}\right).$$

Chứng minh. Giả sử $u_1, u_2 \in L^2(0,T)$ là nghiệm của bài toán (3.3). Đặt $w := u_1 - u_2 \in L^2(0,T)$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha (u_1 - a)(t) = -\lambda u_1(t) + f(t) \\ \partial_t^\alpha (u_2 - a)(t) = -\lambda u_2(t) + f(t), \end{cases}$$

suy ra $\partial_t^\alpha[(u_1-a)-(u_2-a)](t) = -\lambda[u_1(t)-u_2(t)]$, hay $\partial_t^\alpha w(t) = -\lambda w(t)$. Do đó $w(t) = -\lambda(J_\alpha)' w(t)$.
Mặt khác, $w \in L^2(0,T) \subset L^1(0,T)$, áp dụng Mệnh đề 2.12 ta được

$$w(t) = -\lambda J^\alpha w(t) = \frac{-\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s) ds.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |w(t)| &\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |w(s)| ds \\ &= \lambda J^{-\alpha} |w|. \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề Gronwall, ta được $|w(t)| \leq 0$ h.k.n trên $(0,T)$. Suy ra $w = 0$ h.k.n trên $(0,T)$. Hay $u_1 = u_2$ h.k.n trên $(0,T)$.
Như vậy $u_1 = u_2$ trong $L^2(0,T)$.

Tiếp theo, chúng ta chứng minh $u(t) = aE_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) + S_\lambda f(t)$ là nghiệm của (3.3).
Thật vậy, $S_\lambda f \in L^2(0,T)$ suy ra $u \in L^2(0,T)$ hay $u - a \in L^2(0,T)$. Hơn nữa, ta có

$$\partial_t^\alpha (u - s)(t) = a\partial_t^\alpha (E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) - 1) + \partial_t^\alpha (S_\lambda f)(t).$$

Áp dụng Mệnh đề 2.24 và Mệnh đề 3.2, ta có

$$\partial_t^\alpha (u - s)(t) = a(-\lambda) E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) - \lambda S_\lambda f(t) + f(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lambda\Big(aE_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) + S_\lambda f(t)\Big) + f(t) \\
&= -\lambda u(t) + f(t).
\end{aligned}
$$

Do đó u là nghiệm của bài toán (3.3).

Ta có $\|S_\lambda f\|_{L^2(0,T)} = \lim_{n\to\infty} \|B_\lambda f_n\|_{L^2(0,T)}$. Tương tự trong chứng minh Mệnh đề 3.2 ta có

$$
\begin{aligned}
\|B_\lambda f_n\|_{L^2(0,T)} &\le C \left\|(J_\alpha)' f_n\right\|_{L^2(0,T)} \\
&\le C \|f_n\|_{{}^{-\alpha}H(0,T)},
\end{aligned}
$$

nên

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|B_\lambda f_n\|_{L^2(0,T)} &\le C \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{{}^{-\alpha}H(0,T)} \\
&= C \|f\|_{{}^{-\alpha}H(0,T)}.
\end{aligned}
$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
\|u - a\|_{L^2(0,T)} &= \left\|a(E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) - 1) + S_\lambda f\right\|_{L^2(0,T)} \\
&\le |a| \left\|E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) - 1\right\|_{L^2(0,T)} + \|S_\lambda f\|_{L^2(0,T)} \\
&\le C(|a| + \|f\|_{{}^{-\alpha}H(0,T)}).
\end{aligned}
$$

□

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, dựa trên việc hiểu thấu đáo bài báo Giáo sư M. Yamamoto, chúng ta đã trình bày được các nội dung chính sau

1. Giới thiệu về phép tính vi-tích phân phân thứ và phương trình vi phân bậc phân số dựa trên cơ sở của lý thuyết toán tử trong không gian Sobolev bậc phân số.

2. Mở rộng các khái niệm đạo hàm Caputo và Riemann-Liouville cổ điển trong không gian Sobolev bậc phân số (bao gồm cả các số âm).

3. Nghiên cứu một cách thống nhất phép tính vi-tích phân phân thứ và phương trình vi phân bậc phân số theo thời gian.

Tài liệu tham khảo

[1] K.B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus.* Academic Press, New York, 1974.

[2] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[3] R. Gorenflo, S. Vessella, *Abel Integral Equations: Analysis and Applications.* Lecture Notes in Mathematics, 1461. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[4] K.S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* John Wiley and Sons Inc., New York, 1993.

[5] I. Podlubny, *Fractional Differential equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of Their Applications.* Mathematics in Science and Engineering, 198. Academic Press, Inc., CA, 1999.

[6] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type.* Lecture Notes in Mathematics, 2004. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[7] V. Lekshmikantham, S. Leela, J. Vasundhara Devi, *Theory of Fractional Dynamical Systems.* Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2009.

[8] B. Bandyopadhyay, S. Kamal, *Stabilization and Control of Fractional Order Systems: A Sliding Mode Approach.* Lecture Notes in Electrical Engineering, 317. Springer, 2015.

[9] M. Yamamoto, *Fractional calculus and time-fractional diferential equations: revisit and construction of a theory.* `https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.08769`.

[10] Haim Brezis. *Giải tích hàm: lý thuyết và ứng dụng.* Nguyễn Thành Long và Nguyễn Hội Nghĩa dịch, NXB ĐHQG tp. HCM, 2002.

[11] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998.

[12] L.N. Slobodeckij, Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary value problems of partial differential equations, *Leningrad. Gos. Ped. Inst. Ucep. Zap.,* 197, (1958), 54–112.

[13] Davis, Philip J. (1972), 6. Gamma function and related functions, in Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A. (eds.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover Publications.

[14] R.A. Askey, R. Roy. (2010), Beta function, in Olver, Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert, Charles W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press.