

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC  
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

**HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ**

-----



**TRẦN TUẤN LONG**

**NGHIÊN CỨU PHÁT TRIỂN TÍNH CHẤT TRỰC GIAO  
ÁP DỤNG TRONG PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH  
VÀ DAO ĐỘNG PHI TUYẾN**

**LUẬN ÁN TIẾN SỸ  
NGÀNH KỸ THUẬT CƠ KHÍ VÀ CƠ KỸ THUẬT**

**Hà Nội – 2023**

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC  
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

**HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ**

-----



**TRẦN TUẤN LONG**

**NGHIÊN CỨU PHÁT TRIỂN TÍNH CHẤT TRỰC GIAO  
ÁP DỤNG TRONG PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH  
VÀ DAO ĐỘNG PHI TUYẾN**

Chuyên ngành: **Cơ kỹ thuật**

Mã số: **9 52 01 01**

**LUẬN ÁN TIẾN SỸ  
NGÀNH KỸ THUẬT CƠ KHÍ VÀ CƠ KỸ THUẬT**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:**

1. GS. TSKH. Nguyễn Đông Anh
2. PGS. TS. Nguyễn Xuân Thành

**Hà Nội – 2023**

**LỜI CAM ĐOAN**

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn và giúp đỡ định hướng trực tiếp từ GS. TSKH. Nguyễn Đông Anh và PGS. TS. Nguyễn Xuân Thành. Các số liệu và kết quả được trình bày trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố ở bất kỳ công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh

**Trần Tuấn Long**

## LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của **GS. TSKH Nguyễn Đông Anh và PGS. TS. Nguyễn Xuân Thành**. Tác giả xin được gửi lời cảm ơn, biết ơn chân thành và sâu sắc đến các Thầy hướng dẫn, những người đã tận tâm chỉ bảo, định hướng và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án này.

Tác giả xin được gửi lời cảm ơn chân thành đến GS. Issac Elishakoff vì những kiến thức khoa học và hỗ trợ tác giả trong quá trình học tập và hoàn thành luận án.

Trong quá trình học tập, nghiên cứu và thực hiện luận án, tác giả đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ, tạo điều kiện của Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Cơ học, Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Tôi xin được bày tỏ sự biết ơn chân thành về sự giúp đỡ, tạo điều kiện này.

Tôi xin được cảm ơn các đồng nghiệp Nguyễn Tây Anh, Nguyễn Ngọc Linh, Nguyễn Cao Thắng, Phạm Mạnh Thắng đã hỗ trợ và cùng tham gia đóng góp, hỗ trợ tôi trong quá trình nghiên cứu và thực hiện luận án.

Tôi xin được bày tỏ sự cảm ơn đến Ban giám hiệu và đồng nghiệp tại Trường Cao đẳng Xây dựng Công trình đô thị, Trung tâm Đào tạo nghề Xây dựng Việt Đức đã tạo điều kiện cho tôi trong quá trình học tập và hoàn thiện luận án.

Tôi xin được cảm ơn gia đình, người thân và bạn bè đã luôn hỗ trợ, động viên tôi trong suốt thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả

**Trần Tuấn Long**

## MỤC LỤC

<b>LỜI CAM ĐOAN .....</b>	<b>iii</b>
<b>LỜI CẢM ƠN .....</b>	<b>iv</b>
<b>MỤC LỤC .....</b>	<b>v</b>
<b>DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CÁC CHỮ VIẾT TẮT.....</b>	<b>viii</b>
<b>DANH MỤC CÁC BẢNG .....</b>	<b>xi</b>
<b>DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ, ĐỒ THỊ .....</b>	<b>xii</b>
<b>MỞ ĐẦU .....</b>	<b>1</b>
<b>Chương 1. TỔNG QUAN VỀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI VÀ DAO ĐỘNG PHI TUYẾN HỆ MỘT BẬC TỰ DO.....</b>	<b>8</b>
1.1 Ổn định đàn hồi.....	8
1.2 Mô hình mát ổn định.....	11
1.3 Các bài toán ổn định đàn hồi.....	16
1.3.1 Thanh hai đầu liên kết bản lề (P-P) .....	16
1.3.2 Thanh hai đầu liên kết ngàm (C-C) .....	17
1.3.3 Thanh một đầu liên kết ngàm và một đầu tự do (C-F) .....	17
1.3.4 Thanh một đầu ngàm và một đầu liên kết bản lề (C-P).....	17
1.4 Bài toán dao động phi tuyến.....	17
1.4.1 Phân loại dao động phi tuyến.....	18
1.4.2 Hệ cơ học một bậc tự do phi tuyến.....	18
1.4.3 Một số hệ dao động phi tuyến thường gặp .....	18
1.5 Một số phương pháp gần đúng giải phương trình vi phân.....	21
1.5.1 Phương pháp biến phân Rayleigh – Ritz .....	21
1.5.2 Phương pháp số dư trọng số .....	24
1.5.3 Sự khác nhau giữa các phương pháp số dư trọng số .....	24
1.5.4 Phương pháp Galerkin và tính trực giao của phần dư phương trình với các hàm thử .....	28
1.6 Kết luận chương 1 .....	33
<b>Chương 2. PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA TƯƠNG ĐƯƠNG .....</b>	<b>34</b>
2.1 Giới thiệu.....	34
2.2 Phương pháp tuyến tính hóa tương đương cho hệ một bậc tự do.....	37
2.2.1 Dựa trên tiêu chuẩn kinh điển.....	40

2.2.2	Dựa trên tiêu chuẩn cực tiểu sai số thể năng .....	41
2.2.3	Dựa trên tiêu chuẩn tuyến tính hóa tương đương có điều chỉnh.....	41
2.2.4	Dựa trên tiêu chuẩn tuyến tính hóa từng phần.....	43
2.3	Tiêu chuẩn đối ngẫu của phương pháp tuyến tính hóa tương đương.....	43
2.4	Tiêu chuẩn tuyến tính hóa đối ngẫu có trọng số .....	45
2.4.1	Ý tưởng cơ bản của tiêu chuẩn đối ngẫu .....	45
2.4.2	Tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số.....	47
2.5	Kết luận chương 2 .....	54
<b>Chương 3. PHÁT TRIỂN TÍNH CHẤT TRỰC GIAO ÁP DỤNG TRONG PHÂN TÍCH BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH.....</b>		<b>55</b>
3.1	Giới thiệu.....	55
3.2	Áp dụng tiêu chuẩn đối ngẫu cho bài toán ổn định đàn hồi.....	56
3.2.1	Thanh hai đầu liên kết bản lề đơn giản (P-P) .....	56
3.2.2	Thanh hai đầu liên kết ngàm (C-C) .....	59
3.2.3	Thanh một đầu liên kết ngàm, một đầu tự do (C-F) .....	60
3.2.4	Thanh một đầu liên kết ngàm, một đầu liên kết bản lề (C-P).....	62
3.3	Chọn trọng số $p$ với bài toán ổn định đàn hồi .....	63
3.3.1	Phương pháp Galerkin .....	64
3.3.2	Tiêu chuẩn đối ngẫu.....	64
3.4	Phép lấy trung bình cục bộ có trọng số .....	66
3.5	Phát triển tính chất trực giao trong phương pháp Galerkin với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số .....	70
3.6	Mất ổn định đàn hồi của cột Euler với tiết diện không đổi.....	72
3.7	Mất ổn định đàn hồi của cột Euler với tiết diện thay đổi.....	78
3.7.1	Chuyển đổi cột có tiết diện thay đổi thành cột tương đương.....	78
3.7.2	Áp dụng với bài toán mất ổn định đàn hồi có tiết diện thay đổi.....	80
3.8	Thảo luận về kết quả phát triển tính chất trực giao dựa vào kỹ thuật WLA...85	
3.9	Kết luận chương 3 .....	87
<b>Chương 4. PHÁT TRIỂN TÍNH CHẤT TRỰC GIAO ÁP DỤNG TRONG PHÂN TÍCH BÀI TOÁN DAO ĐỘNG PHI TUYẾN .....</b>		<b>89</b>
4.1	Giới thiệu.....	89
4.2	Tuyến tính hóa đối ngẫu áp dụng cho các hệ dao động tiền định phi tuyến ...89	
4.2.1	Tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số.....	89

4.2.2	Chọn trọng số cho hệ động lực học tiền định .....	91
4.3	Áp dụng tuyến tính hóa đối ngẫu trong phân tích dao động tự do phi tuyến..	95
4.3.1	Qui trình tuyến tính hóa đối ngẫu .....	95
4.3.2	Bài toán 1: Dao động với lực phục hồi bậc phân số .....	96
4.3.3	Bài toán 2: Dao động điều hòa Duffing.....	99
4.3.4	Bài toán 3: Dao động phi tuyến có khả năng mở rộng hữu hạn .....	101
4.3.5	Bài toán 4: Dao động kiểu Duffing.....	104
4.4	Kết luận chương 4 .....	110
	<b>KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO.....</b>	<b>111</b>
	<b>DANH MỤC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ.....</b>	<b>113</b>
	<b>TÀI LIỆU THAM KHẢO .....</b>	<b>114</b>

## DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CÁC CHỮ VIẾT TẮT

Chữ viết tắt	Tiếng Việt	Tiếng Anh
$\alpha, \gamma, C, D, t, u, v$	các hằng số	
$a_i$	bậc tự do tổng quát	general degrees of freedom
$b_i, k_j$	hệ số tuyến tính hóa	
$b, b_{tt}, k$	hệ số cản, hệ số cản của lực cản tuyến tính và hệ số độ cứng tuyến tính hóa tương đương	
$\Delta V$	thể tích thay đổi trong quá trình gia tải.	
$D, D_S$	toán tử vi phân	
$E[.], \langle \blacksquare \rangle$	toán tử kỳ vọng	
$E, EI:$	Module đàn hồi, độ cứng chống uốn	
ELM	phương pháp tuyến tính hóa tương đương	equivalent linearization method
$e(x), e(x, \dot{x})$	phương trình sai số (phần dư)	
$e_{df}, e_{dr}$	sai số tiến, lùi	
FE	phần tử hữu hạn	finite element
FEM	phương pháp phần tử hữu hạn	finite element method
$f_i$	các hàm chuỗi nhất định	
$f, T$	tần số dao động, chu kỳ dao động	
$f(t), \xi(t)$	hàm kích động, hàm kích động ngoài ngẫu nhiên ồn trắng Gauss	
FPK	phương trình FPK	Fokker – Planck – Kolgomorov
GCA	phương pháp Galerkin với phép lấy trung bình thông thường	Galerkin method with conventional averaging
GWLA	phương pháp Galerkin với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số	Galerkin method with weighted local averaging
$\Gamma$	hàm Euler Gamma	
$g_{pt}(x, \dot{x})$	là hàm của các lực cản và đàn hồi phi tuyến	
$G(v)$	là hàm phi tuyến phụ thuộc vận tốc và hướng của vận tốc	
$\gamma, h$	hệ số độ cứng của lực đàn hồi phi tuyến, hệ số cản	
$h, c_3, \sigma$	là các số thực dương	
$k, k_{tt}:$	độ cứng của lò xo, hằng số phương trình vi phân, hệ số độ cứng của lực đàn hồi tuyến tính	
$k_{CA}^{var}, k_{WLA}^{var}$	hệ số tuyến tính hóa tương đương trong trường hợp cột có tiết diện thay đổi xác định theo phép lấy trung bình thông thường CA và theo WLA	
$k_{CA}^{exp}, k_{WLA}^{exp}$	hệ số tuyến tính hóa tương đương trong trường hợp cột có tiết diện thay đổi theo hàm mũ xác định theo CA, theo theo WLA	



$k^{var}$	hệ số tuyến tính hóa tương đương trong trường hợp cột có tiết diện thay đổi	
$k_{CA}^{pow}, k_{WLA}^{pow}$	hệ số tuyến tính hóa tương đương trong trường hợp cột với mô-men quán tính được cho bởi hàm lũy thừa xác định theo CA và theo WLA	
$k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k, b, k_c, k_{rc}$	các hệ số tuyến tính hóa	
$k_{tb}$	hệ số tuyến tính hóa trung bình	
$k_{ts}$ và $k_d, \lambda_d$ và $\lambda_{ts}$	hệ số tuyến tính hóa, hệ số trở về	
$\lambda, \lambda_c, \gamma_1$	hệ số trở về	
$\mathcal{L}(u)$	$\mathcal{L}$ là toán tử vi phân, trên miền $u$	
$M_0$	mô-men uốn đều liên kết	
$m$	khối lượng	
$N_x, P$	lực dọc trục	
ODE	phương trình vi phân thường	ordinary differential equation
$p, p_1, p_2$	trọng số chuẩn hóa	
$P_{cr}$	lực tới hạn Euler	
$P_{cr}^E, P_{cr}^G, P_{cr}^{dn}$	lực tới hạn Euler, lực tới hạn gần đúng tính theo phương pháp Galerkin, tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số.	
$p^{const}$	tải trọng tới hạn không thứ nguyên của cột có tiết diện không đổi	
$P_{GCA}^{const}, P_{GWLA}^{const}, P_{SGWLA}^{const}$	tải trọng tới hạn xấp xỉ của cột có tiết diện không đổi được xác định bởi GCA, GWLA và SGWLA	
$p^{exp}, p^{pow}$	tải trọng tới hạn không thứ nguyên của cột có tiết diện biến thiên theo hàm mũ và hàm lũy thừa	
$P_{exact}^{exp}, P_{exact}^{pow}$	tải trọng tới hạn chính xác được trong trường hợp tiết diện biến thiên theo hàm mũ và hàm lũy thừa	
$P_{GWLA}^{var}$	tải trọng tới hạn xấp xỉ của cột có tiết diện thay đổi được xác định bởi GWLA	
$P_{GWLA}^{exp,CA}, P_{GWLA}^{exp,WLA}$	tải trọng tới hạn xấp xỉ của cột có tiết diện thay đổi được xác định bởi GWLA với hệ số tuyến tính hóa $k_{CA}^{exp}$ và hệ số tuyến tính hóa $k_{WLA}^{exp}$	
$P_{GWLA}^{pow,CA}, P_{GWLA}^{pow,WLA}$	tải trọng tới hạn xấp xỉ của cột có tiết diện thay đổi được xác định bởi GWLA với hệ số tuyến tính hóa $k_{CA}^{pow}$ và hệ số tuyến tính hóa $k_{WLA}^{pow}$	
$\Pi_p$	hàm thế năng	
$q$	áp lực bên ngoài, hoặc lực phân bố theo đường thẳng, diện tích, thể tích	
$r^2, \mu$	hệ số tương quan hay mức độ phụ thuộc tuyến tính	
$R_\Gamma, R, R_S$	phần dư, phần dư trong miền, phần dư trên biên	residual

$S_o$ và $S_f(\omega)$	hàm mật độ phổ	
$S_{kd}, S_d$	tiêu chuẩn kinh điển, tiêu chuẩn đối ngẫu	
SGWLA	PP Galerkin đơn giản hóa với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số	simplified Galerkin method with weighted local averaging
$u(t)$	kích động ngoài	
$u_{ap}, y_{app}, \tilde{u}$	các nghiệm, các hàm xấp xỉ	
$u = u(x)$	các biến phụ thuộc	
$V_0$	thể tích ban đầu	
$W_i$	hàm trọng số	
$w, y$	hàm chuyển vị, phương trình đường đàn hồi	
WDC	tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số	weighted dual criterion
WLA	trung bình cục bộ có trọng số	weighted local averaging
WRM	phương pháp số dư trọng số	weighted residual methods
$\omega_0, \omega_e, \bar{\omega}$	là tần số dao động tự do, chính xác, xấp xỉ	
$\omega_c, \omega_{aw}, \omega_{as}, \omega_{PEM}$ $\omega_{hb}, \omega_{lhb}, \omega_{d2}$	tần số dao động xấp xỉ thu được từ tiêu chuẩn kinh điển, tiêu chuẩn trung bình có trọng số, phương pháp tiệm cận, phương pháp tham số mở rộng, phương pháp cân bằng điều hòa bậc thấp nhất, phương pháp cân bằng điều hòa tuyến tính, tiêu chuẩn đối ngẫu	
$x, \dot{x}, \ddot{x}$	giá trị chuyển vị, vận tốc, gia tốc	
$\langle x^2 \rangle, \langle \dot{x}^2 \rangle$	giá trị trung bình bình phương của dịch chuyển và vận tốc	
$y'', y'$	độ võng, góc xoay của dầm Euler	

## DANH MỤC CÁC BẢNG

Bảng 1.1. Kết quả tính toán ví dụ Hình 1.10 .....	27
Bảng 1.2. Tổng hợp kết quả thanh C-P theo phương pháp Galerkin.....	30
Bảng 2.3. Đáp ứng trung bình bình phương: $\omega_0 = 1$ , $h = 0,5$ , $\sigma = 2$ , $\gamma$ thay đổi...47	
Bảng 3.1. Lực tới hạn $P_{cr}^G$ và sai số với các hàm $f_i$ khác nhau.....	57
Bảng 3.2. Lực tới hạn $P_{cr}^{dn}$ và sai số với $y(x) = x(l - x)$ .....	58
Bảng 3.3. Lực tới hạn $P_{cr}^{dn}$ và sai số với $y(x)$ khác nhau .....	58
Bảng 3.4. Lực tới hạn $P_{cr}^{dn}$ và sai số khi xét hàm $f_3$ với các hàm trọng số $p_i(r)$ .....	64
Bảng 3.5. Lực tới hạn $P_{cr}^{dn}$ và sai số với các hàm $f_j$ và các hàm trọng số $p_i(r)$ .....	65
Bảng 3.6. Các bài toán ổn định với điều kiện biên khác nhau và các hàm thử .....	75
Bảng 3.7. Tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa nhận được bởi GWLA và SGWLA, GCA và nghiệm chính xác cho bốn loại cột khác nhau có tiết diện không đổi. ....	78
Bảng 3.8. Các hệ số tương đương cho cột có mô-men quán tính theo hàm mũ .....	81
Bảng 3.9. Tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa, nhận được bởi GWLA, GCA và nghiệm chính xác với bốn loại cột có mô-men quán tính theo hàm số mũ .....	82
Bảng 3.10. Hệ số tương đương của cột có mô-men quán tính thay đổi ( $a = 1$ ).....	83
Bảng 3.11. Hệ số tương đương của cột có mô-men quán tính thay đổi ( $a = 2$ ).....	83
Bảng 3.12. Tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa nhận được bởi GWLA, GCA và nghiệm chính xác với bốn loại cột có mô-men quán tính thay đổi tuyến tính ( $a = 1$ ).....	84
Bảng 3.13. Tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa nhận được bởi GWLA, GCA và nghiệm chính xác với bốn loại cột có mô-men quán tính thay đổi bậc hai ( $a = 2$ ).....	84
Bảng 4.1. Sai số của các tần số xấp xỉ .....	98
Bảng 4.2. Sai số của các tần số xấp xỉ .....	101
Bảng 4.3. Sai số của các tần số xấp xỉ .....	103
Bảng 4.4. Các sai số của các tần số xấp xỉ với $n=1$ .....	106
Bảng 4.5. Các sai số của các tần số xấp xỉ với $n=2$ .....	107
Bảng 4.6. Các sai số của các tần số xấp xỉ với $n=3$ .....	108

## DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ, ĐỒ THỊ

<i>Hình 1.1.</i> Đặc điểm của các vị trí cân bằng tĩnh .....	9
<i>Hình 1.2.</i> Mất ổn định loại 1 .....	12
<i>Hình 1.3.</i> Mất ổn định loại 2 .....	12
<i>Hình 1.4.</i> Mất ổn định nhiều loạn hữu hạn .....	13
<i>Hình 1.5.</i> Đường cong chuyển vị – tải trọng với dạng mất ổn định phân nhánh.....	14
<i>Hình 1.6.</i> Các bài toán ổn định Euler .....	16
<i>Hình 1.7.</i> Hệ cơ học 1 bậc tự do phi tuyến.....	18
<i>Hình 1.8.</i> Mô hình hệ một bậc tự do chuyển động có ma sát .....	19
<i>Hình 1.9.</i> Hàm thế năng dạng giếng đơn và giếng đôi.....	20
<i>Hình 1.10.</i> Thanh đàn hồi tiết diện không đổi chịu tải trọng dọc trục $P$ và lực thay đổi tuyến tính dọc trục $q = cx$ , $c$ là hằng số .....	27
<i>Hình 2.1.</i> a) Thay thế chiều đi hình tròn $C$ bằng hình vuông $EFGH$ ; b) Thay thế chiều về hình vuông $MNPQ$ bằng hình tròn $C$ ; c) Thay thế đối ngẫu hình tròn $C$ bằng hình vuông $ABCD$ .....	49
<i>Hình 3.1</i> Đồ thị của hàm số a) $f(r)$ và b) $r^{f(r)}$ trong khoảng $[0, 1]$ và với các giá trị khác nhau của $\alpha = 0, 0.5, 1$ .....	68
<i>Hình 3.2.</i> Tải trọng tới hạn đã được chuẩn hóa, $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$ bởi GWLA, dưới dạng một hàm của $r$ với $r \in 0,1$ và ba giá trị của $\alpha: 0, 0,5$ và $1$ so sánh với giá trị chính xác, $P_{exact}^{const}$ , cho cột có tiết diện không đổi: a) P-P, b) C-P, c) C-C và d) C-F.....	76
<i>Hình 3.3.</i> Tải trọng tới hạn cục bộ đã được chuẩn hóa, nhận được bởi GWLA phụ thuộc vào $\alpha$ , $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$ , với $r \in 0,1$ , giá trị trung bình toàn cục của $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$ , $P_{GWLA}^{const}$ , và tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa từ GCA, $P_{GCA}^{const}$ , so với giá trị chính xác, $P_{exact}^{const}$ , với cột có tiết diện không đổi: a) P-P, b) C-P, c) C-C và d) C-F.....	77
<i>Hình 4.1.</i> Đồ thị của họ đường cong $p_n$ và $1 - p_n$ với $r^2$ .....	93
<i>Hình 4.2.</i> Tần số xấp xỉ và sai số với các giá trị $n$ khác nhau .....	97
<i>Hình 4.3.</i> Các tần số xấp xỉ và sai số với các giá trị của $a$ khác nhau .....	100
<i>Hình 4.4.</i> Các tần số xấp xỉ và sai số với các giá trị của $a$ khác nhau .....	103
<i>Hình 4.5.</i> Các tần số xấp xỉ và sai số với $n = 1$ , $\omega_0 = 1$ và giá trị $a, \gamma$ khác nhau	105
<i>Hình 4.6.</i> Các tần số xấp xỉ và sai số với $n = 2$ , $\omega_0 = 1$ và giá trị $a, \gamma$ khác nhau	105
<i>Hình 4.7.</i> Các tần số xấp xỉ và sai số với $n = 3$ , $\omega_0 = 1$ và giá trị $a, \gamma$ khác nhau	108

## MỞ ĐẦU

### 1. Lý do lựa chọn đề tài

Trong lĩnh vực xây dựng và tính toán kết cấu, ổn định là tính chất quan trọng của công trình thể hiện qua khả năng giữ được vị trí ban đầu hoặc giữ được dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng tương ứng với các tải trọng tác dụng. Các bài toán ổn định kết cấu được bắt đầu từ nghiên cứu thực nghiệm do Piter Musschenbroek công bố năm 1729, ông đã đi đến kết luận rằng lực tới hạn tỷ lệ nghịch với bình phương chiều dài thanh. Sau đó bằng phân tích toán học Leonhard Euler cũng nhận được kết quả như vậy. Bước chuyển của công trình từ trạng thái ổn định sang trạng thái không ổn định gọi là mất ổn định. Giới hạn ban đầu hay trạng thái đầu tiên của bước chuyển đó gọi là *trạng thái tới hạn* của công trình. Tải trọng tương ứng với trạng thái tới hạn gọi là *tải trọng tới hạn*. Với khái niệm về ổn định cũng cần phân biệt hai trường hợp là mất ổn định về vị trí và mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng.

Hiện tượng mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng xảy ra khi tải trọng còn nhỏ tương ứng với dạng biến dạng ban đầu của vật thể nhưng buộc phải chuyển sang dạng biến dạng mới khác. Trong những tình huống này, dạng biến dạng ban đầu không thể hiện sự cân bằng giữa các ngoại lực và nội lực mà chỉ có thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng mới, nó khác với dạng biến dạng ban đầu về tính chất hoặc khi giảm tải trọng. Hiện tượng thứ hai là mất ổn định về mặt vị trí, điểm khác với mất ổn định về dạng cân bằng là đối tượng nghiên cứu là tuyệt đối cứng và sự cân bằng chỉ xét với ngoại lực so với mất ổn định về mặt vị trí là xét cả ngoại lực và nội lực.

Trong hầu hết các kết cấu hoặc các cấu kiện, sự mất ổn định có liên quan đến xu hướng thay đổi về tính chất và chuyển từ trạng thái chịu lực này sang trạng thái chịu lực khác. Ví dụ, một cột dài, mảnh dẹt chịu lực dọc trục, ở trạng thái tới hạn sẽ đi từ trạng thái chịu nén thuần túy sang trạng thái nén và uốn kết hợp. Để giải quyết các bài toán ổn định của hệ kết cấu, chúng ta đưa bài toán ban đầu về bài toán trị riêng và có nhiều phương pháp được đề xuất như: phương pháp cổ điển hay phương pháp phân nhánh, phương pháp cân bằng và phương pháp tĩnh.

Trong phân tích và tính toán bài toán ổn định, với thanh tiết diện không đổi đã được nhiều tác giả nghiên cứu, nội dung nghiên cứu khá đầy đủ. Tuy nhiên bài toán ổn định với thanh có tiết diện thay đổi là một bài toán khó giải quyết, chưa được quan tâm nhiều mặc dù được áp dụng rộng rãi trong xây dựng công trình vì có những ưu điểm về mặt kinh tế và kỹ thuật (như thanh có tiết diện thay đổi dạng bậc thang, thanh có mặt cắt biến đổi liên tục, thanh có tiết diện thay đổi theo một hàm số...).

Cũng giống như hiện tượng mất ổn định thì hiện tượng dao động cũng là một trong hiện tượng xảy ra phổ biến trong tự nhiên. Nó xuất hiện trong các lĩnh vực như vật lý, hóa học, sinh học, kinh tế và kỹ thuật. Các bài toán quan trọng hay gặp trong các lĩnh vực này là bài toán dao động ngẫu nhiên phi tuyến của các hệ động lực. Trong thực tế, những hệ dao động ngẫu nhiên phi tuyến là các kết cấu xây dựng, nhà cao tầng hay những cây cầu dây văng chịu tác động của tải trọng gió hay kích động động đất, các công trình cảng sông, cảng biển hay những giàn khoan chịu tác động của các tải trọng sóng hay cũng có thể là dao động của các máy trong các nhà máy xí nghiệp trong quá trình hoạt động của chúng. Nhiều mô hình toán học được đề xuất để giải quyết các bài toán này. Các phương trình chi phối trong hệ động lực phi tuyến thường ở một trong hai dạng: phương trình phi tuyến yếu và phương trình phi tuyến mạnh. Trong những thập kỷ gần đây, phương trình phi tuyến yếu được quan tâm nghiên cứu và phát triển với nhiều phương pháp giải khác nhau. Có thể kể đến một trong những phương pháp phổ biến nhất là phương pháp tuyến tính hóa tương đương (PPTHTĐ) hay phương pháp tuyến tính hóa thống kê [1].

Về cơ bản, dao động có thể chia thành dao động tuyến tính và dao động phi tuyến. Thực tế, hầu hết tất cả các dao động của các hệ kỹ thuật đều là phi tuyến, dao động tuyến tính chỉ là sự lý tưởng hóa một hiện tượng dao động mà chúng ta gặp. Một hiện tượng dao động phi tuyến thường được mô tả về mặt toán học bởi một hoặc một số phương trình vi phân thường hoặc đạo hàm riêng phi tuyến. Không giống như bài toán dao động tuyến tính, khi mà nghiệm chính xác của bài toán có thể dễ dàng tìm được, bài toán dao động phi tuyến đa phần không có nghiệm chính xác. Chỉ một lớp rất nhỏ của bài toán dao động phi tuyến là có lời giải chính xác. Các phương pháp số được xem là một công cụ hiệu quả để phân tích đáp ứng của các bài toán dao động phi tuyến. Tuy nhiên, một nhược điểm thường thấy của các phương pháp số đó là mối quan hệ biên độ - tần số của dao động, đặc trưng quan trọng nhất của bài toán dao

động phi tuyến, thường không thể tìm được nếu sử dụng các phương pháp số. Do vậy, việc đề xuất các phương pháp gần đúng cho chúng ta một công cụ hữu hiệu để có thể quan sát được đầy đủ một hiện tượng dao động phi tuyến.

Trong lĩnh vực phân tích số, phương pháp Galerkin là một lớp các phương pháp để chuyển đổi một bài toán toán tử liên tục (chẳng hạn như một phương trình vi phân) đến một bài toán rời rạc. Về nguyên tắc, đó là tương đương với việc áp dụng phương pháp biến đổi các tham số với một hàm không gian, bằng cách chuyển đổi các phương trình thành một công thức dạng yếu (weak). Thông thường công thức đó sau đó áp dụng một số ràng buộc trong hàm không gian để mô tả không gian với một tập hữu hạn các hàm cơ bản. Cách tiếp cận này thường được gắn với nhà toán học Nga - Boris Galerkin nhưng phương pháp này được phát hiện bởi nhà toán học người Thụy Sĩ Walther Ritz, người mà Galerkin đề cập. Thông thường khi đề cập đến một phương pháp Galerkin, người ta cũng đặt tên cùng với phương pháp xấp xỉ điển hình được sử dụng, chẳng hạn như phương pháp Bubnov-Galerkin (sau tên Ivan Bubnov), phương pháp Petrov-Galerkin (sau Georgii I. Petrov hoặc phương pháp Ritz-Galerkin (sau tên Walther Ritz). Các ví dụ về phương pháp Galerkin là: Phương pháp số dư trọng số, một phương pháp phổ biến tính toán ma trận độ cứng tổng thể trong phương pháp phần tử hữu hạn; Phương pháp phần tử biên để giải phương trình tích phân; Phương pháp không gian con Krylov. Phương pháp Bubnov-Galerkin là một trong những phương pháp gần đúng phổ biến nhất và sử dụng chung trong nhiều lĩnh vực của cơ học ứng dụng và có thể được sử dụng các hệ bảo toàn và không bảo toàn, hệ tuyến tính và phi tuyến. Ý tưởng này được rõ ràng đề nghị đầu tiên vào năm 1913 bởi Bubnov [2], trong khi bài báo đầu tiên cùng với những ví dụ chi tiết được viết vào năm 1915 bởi Galerkin [3]. Năm 1937 Duncan [4] là người đầu tiên công bố việc xem xét toàn diện của phương pháp trong tài liệu nói về phương pháp này. Trong bối cảnh này, phương pháp Bubnov-Galerkin cũng được biết đến như một phương pháp số dư trọng số [5]. Một trong những ứng dụng của phương pháp Galerkin là phân tích các bài toán dao động phi tuyến bằng cách chuyển đổi các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến thành các phương trình vi phân thông thường.

Mặc dù phương pháp này có thể được sử dụng cho cả hai hệ tuyến tính và phi tuyến, sự chính xác của phương pháp giảm khi các phi tuyến trở nên lớn hơn. Elishakoff [6] kết nối phương pháp Bubnov-Galerkin với phương pháp tuyến tính hóa

tương đương. Trong số các phương pháp giải tích gần đúng có thể kể đến đó là phương pháp tuyến tính hóa tương đương (the Equivalent Linearization method - ELM) [7], đây là một cách tiếp cận rất đơn giản nhưng đem lại hiệu quả trong phân tích các bài toán dao động phi tuyến. Mặc dù vậy, khi xem xét các phương pháp giải tích gần đúng khác, phương pháp tuyến tính hóa tương đương với cách lấy trung bình cổ điển vẫn tồn tại yếu điểm đó là khi tính phi tuyến của bài toán tăng lên thì kết quả của phương pháp này thường không chính xác, có nhiều trường hợp sai số không thể chấp nhận được. Để khắc phục nhược điểm này, năm 2015, Anh [8] đã đề xuất một phương pháp lấy trung bình mới thay thế cách sử dụng giá trị trung bình cổ điển bằng trung bình có trọng số. Cách tiếp cận này đã khắc phục được phần nào nhược điểm của phương pháp tuyến tính hóa tương đương với phép lấy trung bình cổ điển. [9].

Đối với các khảo sát giải tích, nhiều nỗ lực đã được đưa ra để cải thiện độ chính xác của nghiệm gần đúng bậc nhất của phương pháp Galerkin, vì lời giải này thường nhận được ở dạng tường minh và/hoặc dạng đơn giản. Khi đó, một câu hỏi xuất hiện là liệu ta có thể cải thiện độ chính xác của các nghiệm xấp xỉ của phương pháp Galerkin khi thực hiện quy trình Galerkin và các hàm thử hay không. Đặc điểm cơ bản của phương pháp Galerkin là **dựa trên tính trực giao của phần dư với mỗi hàm thử**; tuy nhiên, **tính trực giao lại phụ thuộc vào toán tử lấy trung bình tác động lên phần dư**. Do đó, để có được các nghiệm xấp xỉ khác bằng cách sử dụng cùng một quy trình Galerkin và các hàm thử, ta có thể sửa đổi toán tử lấy trung bình. Để khảo sát vấn đề này, ta có thể sử dụng hướng tiếp cận đối ngẫu được trình bày và phát triển gần đây trong [10], [11].

Dựa trên khái niệm về đối ngẫu này, Anh. [10] đề xuất xem xét ở mức độ toàn cục đối với tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình cục bộ của phương pháp tuyến tính hóa tương đương ngẫu nhiên. Phân tích bằng số của một số hệ phi tuyến điển hình chịu kích thích của ồn trắng cho thấy độ chính xác của tiêu chuẩn đề xuất này được cải thiện đáng kể so với tiêu chí sai số bình phương bình quân cổ điển. Một số biểu thức xấp xỉ của tỷ số điều chỉnh tối ưu của thiết bị TMD được gắn với một kết cấu tuyến tính có cản đã được đề xuất [11] bằng cách sử dụng phương pháp tuyến tính hóa tương đương được cải tiến theo tiêu chuẩn đối ngẫu. Tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số của phương pháp tuyến tính hóa tương đương cũng được Linh [12] áp dụng



để phân tích mô-men đáp ứng bậc 2 của dao động phi tuyến chịu kích thích ngẫu nhiên.

Nhằm **cải tiến độ chính xác của nghiệm xấp xỉ** bậc nhất của phương pháp Galerkin cũng như **phát triển tính chất trực giao**. Ứng dụng vào một số bài toán điển hình về **ổn định đàn hồi của cột** và tính toán với **tiết diện không đổi và tiết diện thay đổi** là một bài toán cần được quan tâm. Tác giả nhận thấy việc **cải tiến tính trực giao** thông qua phát triển phương pháp tuyến tính hóa đối ngẫu với một trọng số cho **các hệ động tiên định phi tuyến** bằng phương pháp thay thế tương đương của một hàm phi tuyến bằng một hàm tuyến tính sử dụng phương pháp đối ngẫu với hai phép thay thế lượt đi và lượt về sẽ có hiệu quả trong việc giảm được sai số so với các phương pháp khác. Ngoài ra, tác giả xem xét thêm hướng nghiên cứu lựa chọn thêm một trọng số kết nối hai hàm mục tiêu được khảo sát và áp dụng để **phân tích tần số của dao động tự do phi tuyến**, gắn với một số nghiên cứu điển hình để có thể xác minh độ chính xác và ảnh hưởng của phi tuyến tính đến hiệu quả của kỹ thuật được đề xuất.

Với những phân tích ở trên, tác giả đã lựa chọn đề tài: “*Nghiên cứu phát triển tính chất trực giao áp dụng trong phân tích ổn định và dao động phi tuyến*” để làm đề tài nghiên cứu.

## 2. Mục tiêu của luận án

Phát triển tính chất trực giao của phương pháp số dư trọng số (cụ thể là phương pháp Galerkin) với trung bình thông thường và áp dụng tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số của phương pháp tuyến tính hóa tương đương cho bài toán ổn định đàn hồi.

Giải quyết bài toán chọn một hàm trọng số cụ thể trong số lớp các hàm trọng số một tham số và phát triển tính chất trực giao bằng cách đề xuất xây dựng một trung bình cục bộ có trọng số mới ứng dụng vào phương pháp Galerkin và kết hợp với phương pháp bình phương tối thiểu khảo sát bài toán ổn định với thanh có tiết diện không đổi và có tiết diện thay đổi.

Đề xuất một công cụ tính toán thay thế mới và hiệu quả để tính toán kỹ thuật trong việc thiết kế các hệ kết cấu với các tiết diện thay đổi

Xây dựng qui trình, phát triển tính chất trực giao thông qua phương pháp tuyến tính hóa đối ngẫu một trọng số cho các hệ động tiên định phi tuyến và áp dụng để

phân tích tần số của dao động tự do phi tuyến một số trường hợp điển hình và so sánh kết quả một số phương pháp gần đúng để đánh giá hiệu quả của phương pháp đề xuất.

### 3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận án nghiên cứu tính chất trực giao trong các phương pháp gần đúng và tập trung vào **phương pháp Galerkin** áp dụng trong phân tích **bài toán ổn định đàn hồi**, tính toán, phân tích với các trường hợp cơ bản và xem xét đến **tải trọng tới hạn** của các trường hợp cụ thể đồng thời so sánh đánh giá tính hiệu quả của các phương pháp gần đúng được cải thiện từ phương pháp Galerkin. Phát triển tính chất trực giao bằng cách ứng dụng phương pháp Galerkin với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số (Galerkin method with weighted local averaging - GWLA) và phương pháp Galerkin đơn giản hóa với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số (simplified Galerkin method with weighted local averaging - SGWLA) để xác định tải trọng tới hạn của cột với các điều kiện biên khác nhau trong hai trường hợp tiết diện không đổi và tiết diện thay đổi để chứng minh sự hiệu quả của phương pháp tính toán thay thế.

Luận án nghiên cứu và phân tích bài toán **dao động tự do phi tuyến**, phát triển tính chất trực giao, xây dựng qui trình tuyến tính hóa và tính toán **tần số dao động tự do** một số dao động phi tuyến cơ bản như: dao động phi tuyến với lực phục hồi bậc phân số, dao động Duffing, dao động phi tuyến có khả năng mở rộng hữu hạn, dao động phi tuyến kiểu Duffing và đánh giá hiệu quả của phương pháp đề xuất.

Luận án tập trung phát triển tính trực giao áp dụng vào **phương pháp tuyến tính hóa tương đương đối ngẫu** và **phương pháp trung bình cục bộ có trọng số**. Trong phương pháp này, ngoài việc sử dụng nhiều hàm thử khác nhau để đánh giá độ chính xác, xây dựng và chọn các trọng số, thì với phương pháp phương pháp WLA, GWLA luận án tiếp cận theo hướng sử dụng một hàm thử nhưng cải thiện độ chính xác so với các phương pháp khác cũng sử dụng hàm thử tương tự.

### 4. Phương pháp nghiên cứu

Luận án sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết, nghiên cứu tài liệu tổng hợp và phân tích các nghiên cứu ở trong nước và ngoài nước.

Luận án sử dụng phương pháp giải tích, phương pháp hình học giải tích để phân tích tính chất trực giao, đặc điểm cơ bản của tiêu chuẩn đối ngẫu, tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số và đề xuất, xây dựng tiêu chuẩn trung bình cục bộ có trọng số mới gắn với hàm trọng số trong phương pháp đề xuất.

Luận án kết hợp phương pháp số sử dụng các câu lệnh có sẵn trong MATLAB, lập trình trong Mathematica để khảo sát các bài toán ổn định và dao động phi tuyến.

## 5. Bố cục của luận án

Luận án gồm phần mở đầu, 04 chương, phần kết luận, danh mục các công trình đã công bố của tác giả liên quan đến luận án, tài liệu tham khảo. Trong đó nội dung chính của các chương như sau:

Phần mở đầu nêu lên tính cấp thiết của đề tài nghiên cứu, mục đích, nội dung, đối tượng, phạm vi và phương pháp nghiên cứu của luận án.

Chương 1: “**Tổng quan về các phương pháp giải bài toán ổn định đàn hồi và dao động phi tuyến hệ một bậc tự do**”. Trình bày các mô hình ổn định, các bài toán ổn định đàn hồi, bài toán dao động phi tuyến một bậc tự do và một số hệ dao động phi tuyến thường gặp đồng thời tổng quan về các phương pháp giải bài toán ổn định và dao động phi tuyến, các phương pháp tính toán gần đúng phương pháp số dư trọng số, Galerkin và phân tích tính chất trực giao trong các phương pháp này.

Chương 2: “**Phương pháp tuyến tính hóa tương đương**”, trình bày các phương pháp tuyến tính hóa tương đương và phân tích ưu nhược điểm của các phương pháp, ý tưởng tuyến tính hóa đối ngẫu có trọng số cho bài toán ổn định và bài toán dao động phi tuyến làm cơ sở phát triển tính chất trực giao áp dụng trong chương 3, chương 4.

Chương 3: “**Phát triển tính chất trực giao áp dụng trong phân tích bài toán ổn định**”. Phát triển tính chất trực giao thông qua tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số (WDC) và bằng phép lấy trung bình cục bộ có trọng số (WLA) tại một giá trị cục bộ  $r$  với một hàm cục bộ là  $r^{f(r)}$ . Áp dụng tuyến tính hóa đối ngẫu có trọng số, GWLA, SGWLA, chọn hàm trọng số, khảo sát số với các bài toán ổn định đàn hồi tiết diện không đổi, tiết diện thay đổi và kết luận về hiệu quả của kỹ thuật được đề xuất.

Chương 4: “**Phát triển tính chất trực giao áp dụng trong phân tích bài toán dao động phi tuyến**”. Xây dựng cơ sở lý thuyết, phát triển tính chất trực giao, xây dựng qui trình tuyến tính hóa và khảo sát số với các bài toán dao động ổn định phi tuyến và kết luận về hiệu quả của kỹ thuật tính toán được đề xuất.

Kết luận và đóng góp mới của luận án và hướng nghiên cứu tiếp theo.

Danh sách các công trình đã công bố có liên quan đến nội dung luận án

Các tài liệu trích dẫn trong luận án trình bày trong phần tài liệu tham khảo.

# CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN VỀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI VÀ DAO ĐỘNG PHI TUYẾN HỆ MỘT BẬC TỰ DO

## 1.1 Ổn định đàn hồi

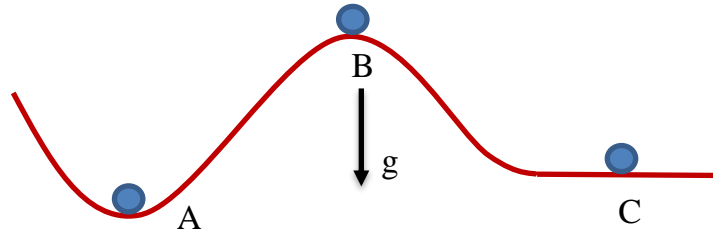
Tính chất ổn định của công trình sẽ thay đổi khi tăng giá trị của các tải trọng tác dụng trên công trình và tính chất đó có thể mất đi thì lúc đó công trình không còn khả năng chịu tải trọng và được gọi là “*không ổn định*”. Vị trí của công trình hoặc dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng của công trình sẽ ở hai khả năng ổn định hoặc không ổn định

Vị trí của công trình hay dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng công trình được gọi là *ổn định* dưới tác dụng của tải trọng trong trường hợp công trình có một độ lệch rất nhỏ ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu hoặc dạng cân bằng ban đầu do một nguyên nhân bất kỳ khác với tải trọng đã có (còn được gọi là nhiễu) và khi loại bỏ nguyên nhân đó đi thì công trình sẽ có khuynh hướng quay trở về trạng thái ban đầu. Với các nguyên nhân gây ra cho công trình các biến dạng đàn hồi hay đàn dẻo, công trình sẽ phục hồi trạng thái ban đầu hoàn toàn hoặc không hoàn toàn.

Ngược lại khi vị trí của công trình hay dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng của công trình được gọi là *không ổn định* dưới tác dụng của tải trọng lúc này có một độ lệch rất nhỏ khỏi vị trí cân bằng ban đầu hoặc dạng cân bằng ban đầu do nguyên nhân bất kỳ khác với tải trọng đã có và sau khi không còn nguyên nhân đó thì công trình sẽ không trở lại trạng thái ban đầu. Đặc biệt, trong trường hợp này độ lệch của công trình không có khuynh hướng giảm dần mà có thể tiếp tục thay đổi tăng cho đến khi công trình đạt đến một vị trí mới hoặc dạng cân bằng mới.

Hiện tượng mất ổn định về vị trí xảy ra khi cả công trình được xem là tuyệt đối cứng, nó không giữ được vị trí ban đầu mà buộc phải chuyển sang vị trí khác. Hiện tượng ổn định và mất ổn định về vị trí được minh họa trong Hình 1.1. [13] thông qua các vị trí khác nhau của viên bi. Có thể thấy viên bi vẫn cân bằng ở cả ba vị trí, song có sự khác nhau cơ bản giữa ba trường hợp đó khi có một tác nhân bất kỳ đưa viên bi lệch khỏi vị trí cân bằng ban đầu với dịch chuyển vô cùng bé rồi thả ra. Vị trí A được gọi là cân bằng ổn định (với thế năng hòn bi là cực tiểu tại vị trí này), vị trí B được gọi là cân bằng không ổn định (với thế năng của bi là cực đại), vị trí C là vị trí được gọi là cân bằng phiếm định (với thế năng của hòn bi là không đổi). Trong trường hợp này, trạng thái cân bằng ổn định ở mức nhỏ nếu tổng thế năng là tối thiểu. Cách

tiếp cận này hoàn toàn tương đương với cách tiếp cận động học (được Whittaker đưa ra trong [14]) đối với các hệ bảo toàn, và nó được biết đến như là phương pháp năng lượng, định nghĩa về sự ổn định này cần được chú ý đặc biệt và nó sẽ là cũng là một phương pháp được xem xét chi tiết trong bài toán ổn định.



*Hình 1.1. Đặc điểm của các vị trí cân bằng tĩnh*

Các bài toán mất ổn định của cấu kiện đã được nghiên cứu trong nhiều thế kỷ gần đây. Tuy nhiên việc xem xét vấn đề mất ổn định thông qua các phân tích lý thuyết của các cấu kiện như vậy (cột dài) mới chỉ được thực hiện khoảng hai trăm năm trước.

Khi xem xét trạng thái cân bằng của hệ ta cần phải xét tới trạng thái cân bằng đó là trạng thái cân bằng ổn định hay là trạng thái không ổn định. Trong lịch sử công trình bị phá hoại do mất ổn định được thống kê khá nhiều và trong sự phát triển của công nghệ xây dựng đã ghi nhận không ít tai nạn nghiêm trọng xảy ra ở nhiều nước (kể cả các nước phát triển) vì nguyên nhân thiết kế nhưng không xem xét và tính đến đầy đủ các phản ứng động cũng như tính đến sự mất ổn định. Có nhiều vật liệu đã được sử dụng trong những kết cấu hiện đại như kết cấu nhà cao tầng như thép và các hợp kim với cường độ cao. Các vật liệu tổng hợp sử dụng cho các silo, bể chứa, các cầu vượt sóng, vỏ tàu thủy và thân máy bay dẫn đến phải sử dụng các cấu kiện thanh, thanh thành mỏng, tấm và vỏ mỏng chịu nén và hình dạng của các cấu kiện này tất yếu dẫn đến hiện tượng mất ổn định đàn hồi trở thành những bài toán được đặc biệt cần quan tâm. Trong tài liệu [15] cho thấy nhiều công trình bị sập đổ do mất ổn định: cầu đường sắt ở Kevđa – Nga năm 1875, dàn cầu Québec ở Canada, năm 1907, cầu Tacoma ở Mỹ bị phá hủy tháng 11/1940 do bị mất ổn định vì tác dụng của gió.

Phân tích lý thuyết đầu tiên là do Leonhard Euler. Một số nghiên cứu tiếp theo trong thế kỷ 18 và 19 có liên quan đến các nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm về các bài toán ổn định là Fr. Engesser, Bresse, G.H. Bryan, Considère, W. Fairbairn,

A.G Greenhill, F. Jasinski, Lagrange, và M. Lévy. Một tài liệu tổng quan giá trị về các bài toán ổn định được đưa ra bởi Hoff (1956) [16] và Timoshenko (1953) [17].

Các bài toán về ổn định của các kết cấu đã được nghiên cứu bằng nhiều phương pháp, chẳng hạn như phương pháp năng lượng [18], phương pháp lập biến phân [19], [20], phương pháp nhiễu loạn đồng luân [21], [22] và phương pháp cầu phương vi phân [23]. Một phương pháp mới để phân tích uốn và mất ổn định của các tấm nano hình chữ nhật được kê đơn giản đã được đề xuất bởi Mousavi và cộng sự [24]. Một bài trình bày đầy đủ về dạng mạnh của phương trình chi phối hệ và các điều kiện biên được thiết lập dựa trên chuỗi vô hạn các phương trình cấu thành phi cục bộ cải tiến. Bán kính hội tụ cho chuỗi được tính toán để đảm bảo các phân tích là hợp lệ và đáng tin cậy. Nghiên cứu về mất ổn định của các cột là trọng tâm nghiên cứu của nhiều nhà nghiên cứu và trở nên có hệ thống hơn trong suốt những thập kỷ qua. Các phương pháp giải bài toán ổn định được trình bày trong [13] gồm các nhóm phương pháp chính là Phương pháp tĩnh học, Phương pháp động lực học, Phương pháp năng lượng.

Với nhóm phương pháp tĩnh học bản chất là tạo cho hệ một dạng cân bằng lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu, sau đó tìm trị số lực tới hạn, xác định từ phương trình đặc trưng (hay còn gọi là phương trình cân bằng ổn định). Để giải các phương trình này chúng ta sẽ sử dụng phương pháp thiết lập và giải phương trình vi phân, phương pháp lực, phương pháp chuyển vị hoặc phương pháp hỗn hợp, phương pháp thông số ban đầu, phương pháp dây xích, phương pháp sai phân hữu hạn, phương pháp nghiệm đúng dần, phương pháp giải đúng dần tại từng thời điểm và phương pháp Bubnov-Galerkin. Nhược điểm khi áp dụng phương pháp tĩnh học để tìm nghiệm chính xác cho các bài toán ổn định thường gặp nhiều khó khăn, và có thể không thể thực hiện được.

Với nhóm phương pháp động lực học, cách giải quyết dựa trên việc thiết lập và giải phương trình dao động riêng của hệ, sau đó tìm lực tới hạn bằng cách xem xét tính chất nghiệm của chuyển động: trong trường hợp dao động của hệ có biên độ tăng không ngừng theo thời gian lúc này dạng cân bằng ban đầu là không ổn định; trong trường hợp ngược lại, nếu hệ luôn dao động bé quanh vị trí cân bằng ban đầu hoặc tắt dần thì lúc này đó là ổn định.

Với nhóm phương pháp năng lượng, cách tiếp cận của phương pháp là giả thiết trước dạng biến dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu. Sau đó,

thiết lập biểu thức thể năng biến dạng và công của ngoại lực để có phương trình điều kiện tới hạn của hệ và tìm giá trị của lực tới hạn bằng cách áp dụng các phương pháp năng lượng sau: nguyên lý Lejeune-Dirichlet, phương pháp Rayleigh-Ritz, phương pháp Timoshenko. Ta nhận thấy với giả thiết biến dạng của hệ nên kết quả lực tới hạn tìm được thường là gần đúng và cho kết quả lớn hơn giá trị của lực tới hạn chính xác. Do đó mức độ chính xác của kết quả theo các phương pháp năng lượng phụ thuộc vào khả năng phán đoán biến dạng của hệ ở trạng thái lệch: hàm chuyển vị được chọn càng gần với đường đàn hồi thực của thanh thì kết quả càng chính xác. Với cách tiếp cận này thì hàm chuyển vị chọn trước thỏa mãn càng nhiều điều kiện biên hình học và tĩnh học càng tốt nhưng ít nhất phải thỏa mãn điều kiện biên tĩnh học.

Cách tiếp cận của ba loại phương pháp (phương pháp tĩnh; phương pháp động; phương pháp năng lượng) là khác nhau nhưng cho cùng một kết quả đối với hệ bảo toàn. Tuy nhiên, đối với hệ không bảo toàn thì các phương pháp tĩnh và các phương pháp năng lượng dẫn đến kết quả không chính xác, lúc này ta phải sử dụng các phương pháp động lực học.

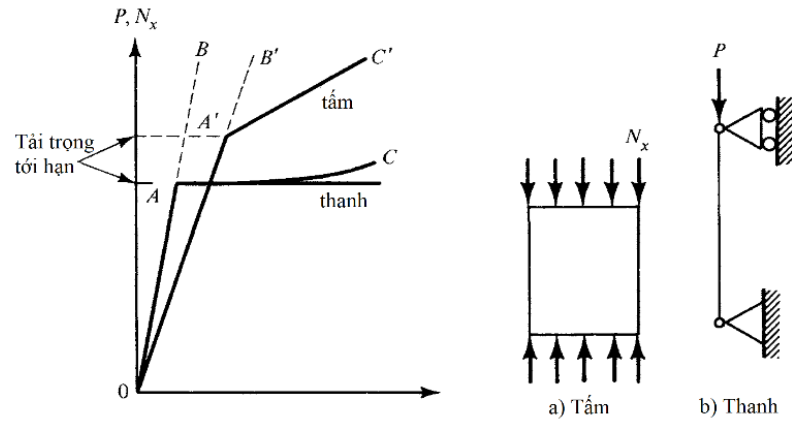
Việc xác định khả năng chịu tải thực tế của một cấu kiện đòi hỏi phải phân tích độ ổn định chi tiết về mặt lý thuyết và tính toán. Các khía cạnh khác nhau của lý thuyết chung về ổn định đàn hồi với nhiều bài toán cụ thể có thể được tìm thấy trong nhiều sách và tài liệu tổng quan [13], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31].

## 1.2 Mô hình mất ổn định

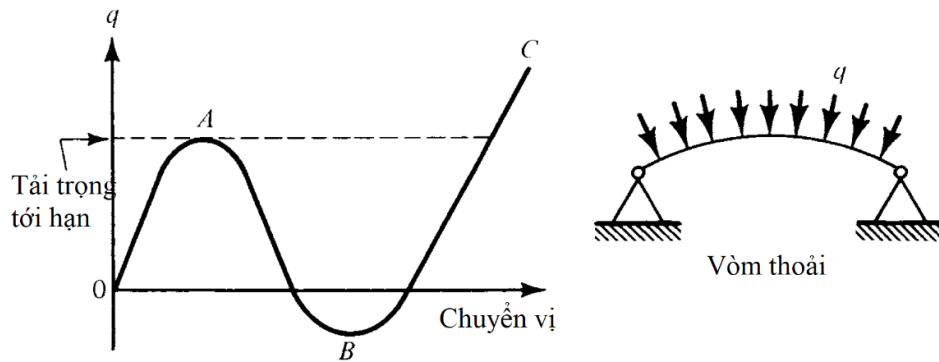
Khi các nguyên nhân tác dụng tĩnh với độ lớn mà tại đó mất ổn định xảy ra, kết cấu đàn hồi đạt đến trạng thái cân bằng mà khác biệt rõ rệt với trạng thái cân bằng trước đó một cách đột ngột. Khi điều này xảy ra, chúng ta nói rằng kết cấu đàn hồi đã bị “oằn” hay “lệch” (buckled). Vì có những cách khác nhau để có thể đạt được dạng cân bằng mới, việc mất ổn định, cong, mất ổn định có thể được phân loại bằng cách sử dụng các tính từ thích hợp thay cho từ “buckled - instability, buckling - unstable,”.

Loại mất ổn định đầu tiên được nghiên cứu và được chú ý nhiều là mất ổn định loại 1 hay cổ điển hoặc phân nhánh. Đặc trưng của loại mất ổn định này là khi tải trọng vượt qua giá trị tới hạn của nó, kết cấu đi từ trạng thái cân bằng ổn định đến trạng thái cân bằng rất gần với không ổn định. Như đã trình bày ở rất nhiều tài liệu, ổn định của các cột thẳng dài chịu lực dọc trục, các tấm mỏng chịu tải trọng dọc tấm, và các vành trụ là các ví dụ điển hình của các dạng mất ổn định này (Hình 1.2).

Mất ổn định loại 2 (snapthrough buckling) là hiện tượng được đặc trưng bởi một bước nhảy có thể nhìn thấy và đột ngột từ trạng thái cân bằng đến một trạng thái cân bằng khác có chuyển vị lớn hơn chuyển vị ở trạng thái cân bằng đầu tiên (các trạng thái cân bằng không liên kết). Các ví dụ thường gặp thuộc loại này. (Hình 1.3)



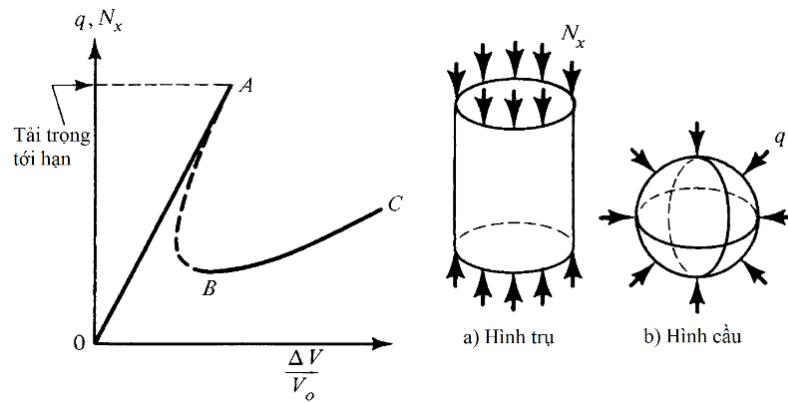
Hình 1.2. Mất ổn định loại 1



Hình 1.3. Mất ổn định loại 2

Một loại mất ổn định khác mà Libove [32] gọi là sự mất ổn định chuyển vị hữu hạn. Đối với một số kết cấu, sự mất độ cứng sau khi mất ổn định quá lớn đến mức trạng thái cân bằng mất ổn định chỉ có thể được duy trì bằng cách trở về mức tải trọng trước đó. Các ví dụ điển hình của loại này là các vỏ hình trụ mỏng dưới sự nén dọc trục và mất ổn định hoàn toàn, hình cầu, vỏ mỏng dưới áp lực đều từ bên ngoài. (Hình 1.4), Trong Hình 1.4a,  $N_x$  biểu thị tải trọng dọc trục tác dụng trên mỗi chiều dài đơn vị, trong Hình 1.4b,  $q$  biểu thị áp lực đều bên ngoài,  $V_0$  thể tích ban đầu của hình cầu và  $\Delta V$  thể tích thay đổi trong quá trình gia tải. Dạng mất ổn định này được đặt tên như vậy vì với một chuyển vị hữu hạn trong lúc chịu tải tựa tĩnh có thể buộc trạng thái chuyển từ một dạng cân bằng cân bằng ổn định đến một trạng thái cân bằng mất ổn định không liên kết trước khi đạt đến tải trọng tới hạn cổ điển,  $P_{cr}$ .





Hình 1.4. Mất ổn định nhiễu loạn hữu hạn

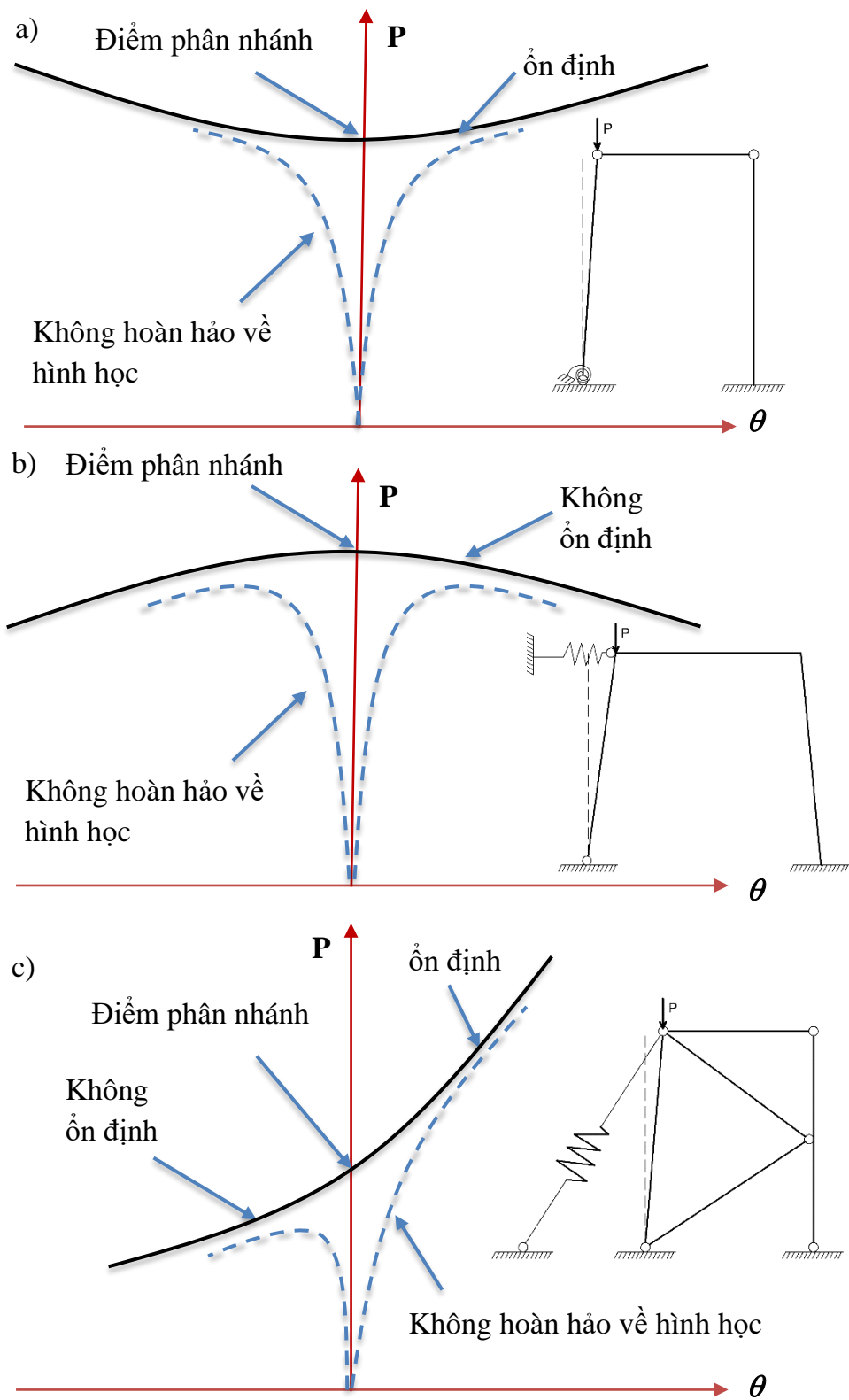
Những thảo luận ở trên cho thấy rằng có một số điểm tương đồng giữa mất ổn định chuyển vị hữu hạn và mất ổn định loại 2. Chú ý rằng, đối với nhiều hệ thì cần phải sử dụng lý thuyết phi tuyến để đánh giá các điều kiện tới hạn và/hoặc giải thích hiện tượng mất ổn định.

Phân tiếp theo minh họa các kiểu mất ổn định gồm dạng phân nhánh ổn định hay mất ổn định loại 1 (Hình 1.2), mất ổn định loại 2 (Hình 1.3) và phân nhánh không ổn định (Hình 1.4). Khi nghiên cứu các bài toán ổn định, ta phải luôn xem xét các đặc trưng của tải trọng.

Cho đến nay, các loại mất ổn định khác nhau của hệ bảo toàn dưới tác dụng tựa tĩnh của các nguyên nhân ngoài đã được nghiên cứu. Một số nghiên cứu khác cũng đã đề cập đến bài toán ổn định của hệ không bảo toàn. Ngoài ra, bài toán mất ổn định dưới tác dụng động cũng đã được đề cập. Một lớp lớn các bài toán như vậy, trong đó tải trọng thay đổi dạng sin theo thời gian, đã được nghiên cứu bởi Bolotin [33]. Các nghiên cứu trên được giới hạn trong các hệ bảo toàn với các cơ hệ đơn giản. Một số nghiên cứu cũng xét ảnh hưởng của các khuyết tật hình học và tải trọng lệch tâm đến phản ứng của hệ. Đối với một số mô hình, cả hai lý thuyết chuyển vị nhỏ (tuyến tính) và chuyển vị lớn (phi tuyến) được sử dụng để so sánh. Trong [13] một góc lệch nhỏ ban đầu  $\theta_0$  và việc sử dụng phân tích  $\theta$  lớn trên hệ khiếm khuyết về hình học. Kết quả là thể hiện rõ trong Hình 1.5a. Tuy nhiên, có thể thấy rằng các khiếm khuyết hình học nhỏ có thể gây ra việc giảm đáng kể tải trọng như Hình 1.5b hoặc Hình 1.5c.

Ổn định của kết cấu sau phân nhánh được nghiên cứu lần đầu tiên bởi Koiter [34] và các công thức sau đó đã được đưa ra bởi Sewell [35] và Thompson [36]. Pope

và Thompson [35] cho thấy điểm phân nhánh có thể xác định chính xác (với hệ đàn hồi phức tạp) bằng một dạng phân tích biến dạng hữu hạn của Rayleigh-Ritz.



Hình 1.5. Đường cong chuyển vị – tải trọng với dạng mất ổn định phân nhánh

Trong tính toán, phân tích bậc nhất là phân tích trong đó tất cả các phương trình cân bằng và động học được viết với hình dạng ban đầu hoặc không bị biến dạng

của kết cấu. Phân tích bậc hai là phân tích trong đó các phương trình cân bằng và động học được viết đối với dạng hình học hiện tại hoặc biến dạng của kết cấu. Bởi vì tất cả các kết cấu biến dạng dưới tải trọng, phương pháp phân tích có tính đến biến dạng kết cấu trong công thức của nó sẽ thể hiện biến dạng thực tế của kết cấu. Tuy nhiên, do tính đơn giản của nó, phân tích cấp một thường được thực hiện thay cho phân tích cấp hai. Mặc dù kết quả không chính xác so với phân tích bậc hai, nhưng đủ chính xác cho mục đích thiết kế nếu độ võng hoặc biến dạng của kết cấu là nhỏ.

Phân tích ổn định là một loại phân tích bậc hai, trong đó hệ đang xem xét chịu lực nén [37], [38], [30]. Nếu lực hoặc ứng suất đủ lớn, hiện tượng gọi là mất ổn định hoặc dạng lệch có thể xảy ra. Khi mất ổn định hoặc đạt tới tải tới hạn, hệ kết cấu mất độ cứng, thay đổi dạng biến dạng và mất khả năng chịu tải tác dụng. Bài toán tính toán tải trọng tới hạn này được gọi là bài toán trị riêng. Tải trọng tới hạn của hệ và dạng mất ổn định được lấy ở dạng giá trị riêng thấp nhất và hàm riêng tương ứng của phương trình.

Các cấu kiện thẳng đứng có chiều dài lớn hơn đáng kể so với kích thước tiết diện của chúng thường được gọi là cột. Các bộ phận kết cấu này thường chịu lực nén dọc trục và là các bộ phận chịu tải quan trọng trong kết cấu. Do đó, sự hiểu biết về ứng xử của chúng là rất quan trọng đối với sự an toàn tổng thể của một kết cấu. Các cột thường có thể là ngắn, trung bình và dài, tùy thuộc vào tỷ lệ chiều dài của chúng với các kích thước tiết diện và được xác định theo tiêu chuẩn kết cấu. Cột có thể bị hỏng do lỗi vật liệu hoặc do mất ổn định hoặc lệch. Ở các cột dài, hiện tượng mất ổn định có thể xảy ra khi vật liệu vẫn còn đàn hồi ở tất cả các thớ của mặt cắt ngang.

Tải trọng dọc trục tối đa mà một cột có thể chịu được khi nó sắp bị mất ổn định được gọi là tải trọng tới hạn hoặc tải trọng mất ổn định. Mặc dù hai thuật ngữ này được sử dụng thay thế cho nhau, nhưng có một sự khác biệt giữa hai thuật ngữ này [39]. Tải trọng tới hạn là tải trọng đạt được về mặt lý thuyết đối với kết cấu lý tưởng, trong khi tải trọng mất ổn định là tải trọng thực tế thu được đối với kết cấu thực. Một cột thẳng chịu tác dụng của một lực dọc trục nhỏ  $P$  vẫn thẳng và chỉ bị dịch chuyển dọc trục. Dạng thẳng của trạng thái cân bằng đàn hồi này là ổn định vì độ lệch do một lực nhỏ tạo ra sẽ biến mất khi lực bên bị loại bỏ. Nếu tăng dần lực dọc trục  $P$ , thì sẽ đạt được điều kiện khi một lực ngang nhỏ sẽ tạo ra một chuyển vị và sẽ không biến mất khi bỏ lực ngang. Điều này xảy ra vì cột ở vị trí thẳng cân bằng trở nên không ổn

định. Lực dọc trục nhỏ nhất mà tại đó xảy ra được gọi là tải trọng tới hạn. Giá trị lực dọc trục này tại đó một cột có thể duy trì trạng thái cân bằng ở vị trí thẳng cũng như ở vị trí hơi lệch được gọi là điểm phân nhánh (xem hình Hình 1.5).

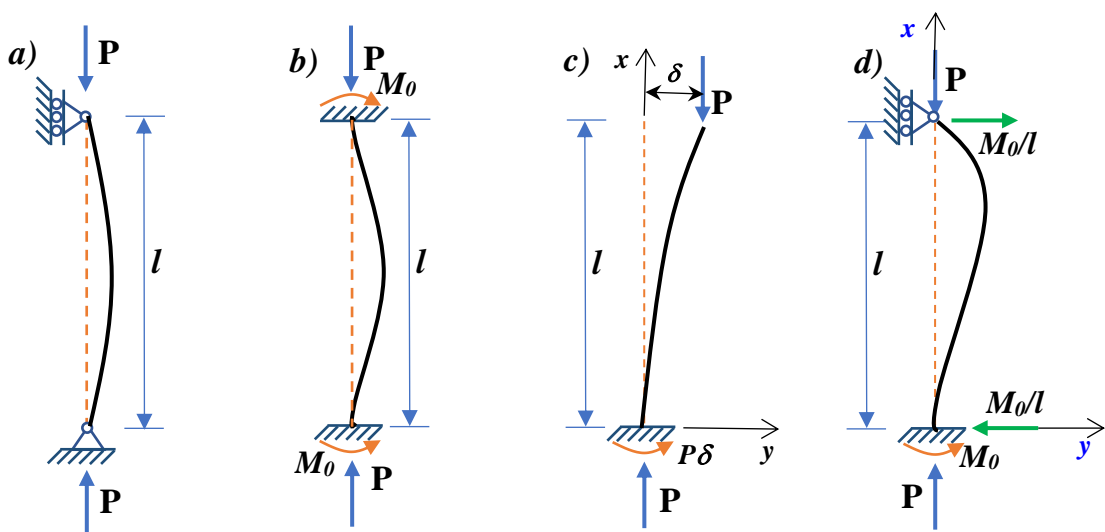
### 1.3 Các bài toán ổn định đàn hồi

Cột là những cấu kiện cơ bản được sử dụng nhiều nhất, do đó có rất nhiều nghiên cứu có liên quan đến tính ổn định đàn hồi của cột với các đặc trưng khác nhau về hình dạng, vật liệu, và về các ứng xử tĩnh và động của chúng. Nghiên cứu đầu tiên về ổn định đàn hồi được thực hiện bởi Leonhard Euler. Ông đã đưa ra phương trình cân bằng và tải trọng mất ổn định của một cột đàn hồi chịu nén [40]. Các nghiệm chính xác về mất ổn định của các cấu kiện bao gồm nhiều trường hợp khác nhau về cột, dầm, vòm, dầm bo, bản và vỏ có tiết diện thay đổi, với lực dọc biến thiên và các điều kiện biên khác nhau được trình bày trong cuốn sách của Wang CM, Wang CY và Reddy [41].

#### 1.3.1 Thanh hai đầu liên kết bản lề (P-P)

Xét bài toán Euler [15] với thanh chịu tải trọng như Hình 1.6 a, với giả thiết mặt cắt ngang không đổi và được làm từ vật liệu đồng nhất và: hai đầu bản lề (1 gối tựa cố định và 1 gối tựa di động); thanh thẳng và chịu lực  $P$  dọc trục thanh; vật liệu tuân theo định luật Hooke; Lực tới hạn trong trường hợp P – P này

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 9,8696 \frac{EI}{l^2} \quad (1.1)$$



Hình 1.6. Các bài toán ổn định Euler

Giá trị của  $P$  trong phương trình (1.1) được gọi là lực Euler, là giá trị nhỏ nhất mà có thể giữ được trạng thái cân bằng (neutral equilibrium) của cột mà cột vẫn thẳng, và khi vượt quá giá trị này cột chuyển từ trạng thái ổn định sang trạng thái mất ổn định. Và lực Euler được gọi là **lực tới hạn** của cột trong bài toán ổn định ( $P_{cr}$ ).

### 1.3.2 Thanh hai đầu liên kết ngàm (C-C)

Cho thanh chịu lực như *Hình 1.6b*, xuất hiện mô-men uốn  $M_0$  ở hai đầu, với lực tới hạn trong trường hợp này là [15]:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2} \quad (1.2)$$

Từ phương trình (1.2), cho thấy rằng lực tới hạn của bất kỳ trường hợp liên kết nào có thể thu được từ một cột Euler tương đương. Chiều dài của cột Euler tương đương được gọi là chiều dài hiệu quả của thanh.

### 1.3.3 Thanh một đầu liên kết ngàm và một đầu tự do (C-F)

Cho thanh chịu lực một đầu ngàm và một đầu tự do như *Hình 1.6c*, có một chuyển vị  $\delta$  ở đầu tự do và một mô-men  $P\delta$  tại đầu ngàm. Chiều cao hiệu quả tương đương của cột Euler là  $2l$ , và lực tới hạn của thanh một đầu ngàm, một đầu tự do là:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad (1.3)$$

### 1.3.4 Thanh một đầu ngàm và một đầu liên kết bản lề (C-P)

Cho cột chịu lực như *Hình 1.6d*, với mô-men  $M_0$  tại đầu ngàm và lực cắt có độ lớn  $M_0/l$  tại mỗi đầu của thanh. Giá trị lực tới hạn trường hợp thanh một đầu ngàm một đầu bản lề (C-P) cho bởi phương trình:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7l)^2} \quad (1.4)$$

## 1.4 Bài toán dao động phi tuyến

Hầu hết các bài toán thực tế trong kỹ thuật cũng như những hiện tượng trong cuộc sống về cơ bản là phi tuyến và chúng được mô tả bằng các phương trình phi tuyến. Thông thường ta đơn giản hóa các hiện tượng phi tuyến thành các hiện tượng tuyến tính để làm dễ hiểu hơn và dễ giải thích hơn. Nhưng để nghiên cứu sâu hơn, các hiện tượng phi tuyến nên được coi là các bài toán phi tuyến. Vì vậy, việc nghiên cứu các bài toán phi tuyến rất quan trọng không chỉ trong tất cả các lĩnh vực vật lý

mà còn trong kỹ thuật và các ngành khác. Đặc biệt, việc phân tích dao động dựa trên các mô hình toán học phi tuyến đòi hỏi các phương pháp phù hợp.

#### 1.4.1 Phân loại dao động phi tuyến

Trong cơ học kỹ thuật, dao động phi tuyến được phân loại theo một số cách khác nhau gồm có các loại dao động sau: dao động tự do, dao động cưỡng bức, dao động không cản, dao động không cản, dao động có cản, dao động tiền định, dao động ngẫu nhiên, dao động của hệ một bậc tự do, dao động của hệ nhiều bậc tự do, dao động của hệ vô hạn bậc tự do (hệ liên tục).

#### 1.4.2 Hệ cơ học một bậc tự do phi tuyến

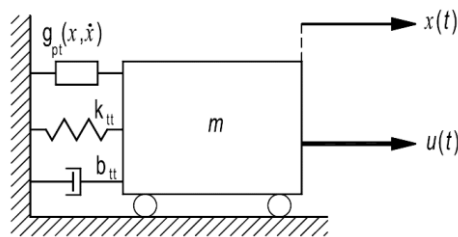
Xét chuyển động của hệ cơ học một bậc tự do như Hình 1.7 được mô tả bởi phương trình

$$m\ddot{x} + b_{tt}\dot{x} + k_{tt}x + g_{pt}(x, \dot{x}) = u(t) \quad (1.5)$$

trong đó  $x$ ,  $\dot{x}$  và  $\ddot{x}$  lần lượt là dịch chuyển, vận tốc và gia tốc của dao động,  $m$  là khối lượng,  $b_{tt}$  là hệ số cản của lực cản tuyến tính,  $k_{tt}$  là hệ số độ cứng của lực đàn hồi tuyến tính,  $g_{pt}(x, \dot{x})$  là hàm của các lực cản và đàn hồi phi tuyến,  $u(t)$  là kích động ngoài. Đặt  $2h = b_{tt}/m$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k_{tt}/m}$ ,  $g(x, \dot{x}) = g_{pt}(x, \dot{x})/m$ ,  $f(t) = u(t)/m$ , phương trình (1.5) biểu diễn dưới dạng phương trình vi phân bậc hai là

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2x + g(x, \dot{x}) = f(t) \quad (1.6)$$

trong đó  $\omega_0$  là tần số dao động tự do của hệ tuyến tính khi  $g(x, \dot{x}) = 0$ .



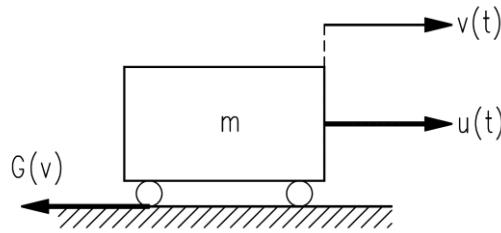
Hình 1.7. Hệ cơ học 1 bậc tự do phi tuyến

#### 1.4.3 Một số hệ dao động phi tuyến thường gặp

##### 1.4.3.1 Hệ dao động Lutes Sarkani

Bài toán chuyển động của một vật có ma sát, vận tốc  $v$  của xe trên đường như mô hình Hình 1.8 có thể được mô tả bởi phương trình vi phân bậc nhất

$$m\dot{v} + G(v) = u(t) \quad (1.7)$$



*Hình 1.8. Mô hình hệ một bậc tự do chuyển động có ma sát*

Xét trường hợp  $G(v)$  là hàm phi tuyến phụ thuộc vận tốc và hướng của vận tốc, phương trình (1.7) được biểu diễn dưới dạng

$$\dot{v} + \gamma|v|^a \text{sgn}(v) = f(t) \quad (1.8)$$

Phương trình (1.8) còn được gọi là dao động Lutes Sarkani [1] với  $a$  và  $\gamma$  là những số thực dương,  $f(t)$  là kích động bên ngoài (hàm điều hòa với bài toán tiên định hoặc với bài toán ngẫu nhiên là quá trình ồn trắng Gauss có mật độ phổ  $S_0 = \text{const}$ , khi đó dao động Lutes Sarkani đại diện cho một lớp hệ ngẫu nhiên phi tuyến.

#### 1.4.3.2 Hệ dao động Van der pol

Hệ dao động Van der pol [42] được mô tả bởi phương trình sau

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (1.9)$$

trong đó  $\alpha, \gamma, \omega_0$  là những số thực dương,  $f(t)$  là kích động bên ngoài (hàm điều hòa hoặc là quá trình ồn trắng ồn trắng Gauss với cường độ đơn vị)

#### 1.4.3.3 Hệ dao động có cản phi tuyến bậc ba

Hệ dao động có thành phần cản phi tuyến bậc ba có phương trình sau:

$$\ddot{x} + 2h(\dot{x} + \gamma \dot{x}^3) + \omega_0^2 x = f(t) \quad (1.10)$$

trong đó  $h, \gamma, \omega_0$  là những số thực dương,  $f(t)$  là kích động bên ngoài (hàm điều hòa hoặc quá trình ồn trắng ồn trắng Gauss trung bình không. Hệ này không có nghiệm chính xác.

#### 1.4.3.4 Hệ dao động đàn hồi phi tuyến theo qui luật mũ

Hệ dao động đàn hồi phi tuyến theo qui luật mũ được mô tả bởi

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^a = f(t) \quad (1.11)$$

trong đó  $h, \gamma, \omega_0, \sigma, a$  là các số thực dương, thành phần lực đàn hồi phi tuyến  $\gamma x^a$  là hàm lẻ,  $f(t)$  là kích động bên ngoài (hàm điều hòa hoặc là quá trình ồn trắng ồn trắng Gauss).

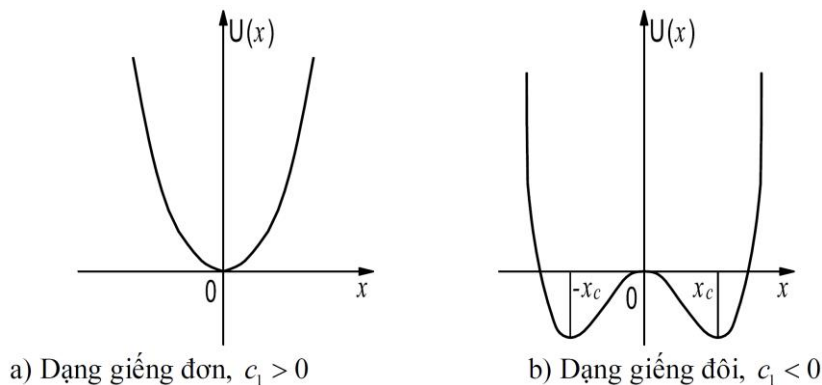
#### 1.4.3.5 Hệ dao động Duffing

Hệ dao động Duffing [42] được mô tả bởi phương trình

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + c_1 x + c_3 x^3 = f(t) \quad (1.12)$$

trong đó  $h, c_3, \sigma$  là các số thực dương,  $f(t)$  là kích động bên ngoài (hàm điều hòa hoặc là quá trình ồn trắng ồn trắng Gauss).

Khi  $c_1 > 0$ , dao động Duffing có một điểm cân bằng, đường cong thế năng  $U(x)$  của hệ có dạng giếng đơn đối xứng qua  $x = 0$ . Khi  $c_1 < 0$  dao động có hai điểm cân bằng, đường cong thế năng  $U(x)$  tương ứng có dạng giếng đôi đối xứng qua  $x = 0$  và đạt cực tiểu tại  $x = \pm x_c = \pm \sqrt{k_3/k_1}$  như mô tả ở Hình 1.9



Hình 1.9. Hàm thế năng dạng giếng đơn và giếng đôi

#### 1.4.3.6 Hệ dao động Atlik-Utku

Hệ dao động Atlik-Utku được mô tả bởi phương trình

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \gamma x^3 = f(t) \quad (1.13)$$

trong đó  $h, \gamma$  là các hằng số dương,  $f(t)$  là kích động bên ngoài (hàm điều hòa hoặc là quá trình ồn trắng ồn trắng Gauss).



#### 1.4.3.7 Dao động với lực phục hồi bậc phân số

Dao động này thuộc lớp bài toán dao động phi tuyến thuần túy [43]. Với hệ động lực này, phương trình chi phối hệ có dạng

$$\ddot{x} + c^2 x|x|^{n-1} = 0; c > 0, n > 1. \quad (1.14)$$

#### 1.4.3.8 Dao động điều hòa Duffing

Dao động này cũng thuộc lớp các dao động tự do phi tuyến trong đó lực phục hồi là một hàm hữu tỉ chưa tối giản [44]. Phương trình chi phối hệ là:

$$\ddot{x} + \frac{x^3}{1+x^2} = 0 \quad (1.15)$$

#### 1.4.3.9 Dao động phi tuyến có khả năng mở rộng hữu hạn

Phương trình dao động với lực phục hồi là một hàm hữu tỉ tối giản [45] là

$$\ddot{x} + \frac{x}{1-x^2} = 0 \quad (1.16)$$

#### 1.4.3.10 Dao động kiểu Duffing

Dao động kiểu Duffing đại diện cho một lớp các bài toán dao động phi tuyến với các hàm phục hồi dạng hàm lẻ. Phương trình có dạng

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^{2n+1} = 0, n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.17)$$

Trong phạm vi của luận án, tác giả lựa chọn các dao động tự do để khảo sát tần số dao động riêng và để xác minh độ chính xác và ảnh hưởng của tính phi tuyến tính đến hiệu quả của phương pháp đề xuất được trình bày trong Chương 4.

## 1.5 Một số phương pháp gần đúng giải phương trình vi phân

### 1.5.1 Phương pháp biến phân Rayleigh – Ritz

Trong cơ học kết cấu, phiếm hàm được sử dụng phổ biến nhất là thế năng (potential energy), phiếm hàm này thường thể hiện dưới dạng tích phân. Khi nhắc đến phương pháp biến phân, chúng ta tìm kiếm các giá trị của bậc tự do làm cho các phiếm hàm này dừng hoặc tối thiểu. Các phiếm hàm cung cấp một kỹ thuật mạnh mẽ để tạo ra các xấp xỉ phần tử hữu hạn (finite element – FE).

Có thể tránh việc phải giải các phương trình vi phân bằng cách áp dụng phương pháp Rayleigh-Ritz cho một phiếm hàm, chẳng hạn như  $\Pi_P$ , mà mô tả mô hình toán

học. Kết quả là một mô hình thay thế có số lượng hữu hạn bậc tự do và được mô tả bởi các phương trình đại số thay vì phương trình vi phân. Một nghiệm Rayleigh-Ritz hiếm khi chính xác nhưng nó sẽ chính xác hơn khi có nhiều bậc tự do được sử dụng.

Xét một chất rắn đàn hồi, xác định dịch chuyển và ứng suất được tạo ra bởi tải trọng. Nói chung, một điểm có các thành phần chuyển vị  $u, v$  và  $w$ . Một nghiệm Rayleigh-Ritz bắt đầu với các trường xấp xỉ cho các thành phần này. Mỗi trường là một chuỗi, hay được gọi là hàm của tọa độ,  $f_i = f_i(x, y, z)$  nhân với biên độ  $a_i$  có giá trị chưa được xác định,  $a_i$  có thể được gọi là tọa độ tổng quát, bậc tự do tổng quát.

$$u = \sum_{i=1}^l a_i f_i ; \quad v = \sum_{i=l+1}^m a_i f_i ; \quad w = \sum_{i=m+1}^n a_i f_i \quad (1.18)$$

Mỗi hàm  $f_i = f_i(x, y, z)$  phải được chấp nhận; nghĩa là, mỗi  $f_i$  phải đáp ứng các điều kiện tương thích và các điều kiện biên thiết yếu. Có thể  $f_i$  bất kỳ không thỏa mãn các điều kiện biên thứ yếu, nhưng làm như vậy sẽ mang lại một xấp xỉ chính xác hơn cho một số lượng bậc tự do nhất định. Thông thường, nhưng không nhất thiết,  $f_i$  là đa thức, tự động đáp ứng các điều kiện tương thích.

Hàm  $\Pi_p$  là một hàm số của  $D_i$  hay  $\Pi_p = \Pi_p(D_1, D_2, \dots, D_n)$ . Áp dụng nguyên lý thế năng dừng ta có:

$$d\Pi_p = 0 \text{ với } d\Pi_p = \frac{\partial \Pi_p}{\partial D_1} dD_1 + \frac{\partial \Pi_p}{\partial D_2} dD_2 + \dots + \frac{\partial \Pi_p}{\partial D_n} dD_n \quad (1.19)$$

Bậc tự do của bài toán là  $n$  biên độ  $a_i$ .  $\Pi_p$  trở thành một hàm của bậc tự do  $a_i$ , giống như  $\Pi_p$  là một hàm của các bậc tự do  $D_i$  trong phương trình (1.19). Theo nguyên lý thế năng dừng, hệ cân bằng được xác định bởi  $n$  các phương trình đại số sau:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial a_i} = 0 \text{ với } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.20)$$

Sau đó, giải phương trình (1.19) với các giá trị của  $a_i$ , trường chuyển vị của (1.18) được xác định. Đạo hàm trường chuyển vị thu được biến dạng và thông qua mối quan hệ biến dạng-ứng suất ta có trường ứng suất tương ứng.

Việc giải bài toán trải qua hai bước, đầu tiên là thiết lập một họ các hàm thử của nghiệm có thể chấp nhận được. Bước hai là áp dụng một tiêu chuẩn (ở đây là tiêu

chuẩn thể năng dừng đối với  $\Pi_p$ ) để chọn dạng tốt nhất của họ các hàm. Khi các tiêu chuẩn được áp dụng thì đó chính là các phương pháp số dư trọng số

Các ứng dụng chính xác của nguyên lý năng lượng dừng với hệ liên tục đòi hỏi sử dụng các tính toán của các biến thể. Cách tiếp cận với bài toán tìm các dạng cân bằng của kết cấu có hai điểm hạn chế. *Thứ nhất*, các phép tính biến phân được sử dụng là quá phức tạp để giải quyết bài toán thông thường. *Thứ hai*, chỉ có các phương trình vi phân và không thu được nghiệm chính xác của nó. Tuy vậy, có một phương pháp mà dựa vào nguyên lý thể năng có thể được áp dụng xấp xỉ; gọi là phương pháp Rayleigh-Ritz [15], không có hai nhược điểm nói trên. Trong phương pháp này, người ta giả định một hình dạng phù hợp với sự biến dạng của hệ và do đó làm giảm nó từ một hệ vô hạn bậc tự do thành một hệ hữu hạn bậc tự do. Nguyên lý thể năng dừng sau đó trực tiếp dẫn đến các hệ cân bằng, và chỉ tính toán các vi phân thường trong quá trình tính toán.

Một ví dụ xác định lực tới hạn của thanh một đầu ngàm, một đầu tự do như Hình 1.6c. Bài toán tìm lực tới hạn [15] là kết quả tương đương tìm hình dạng của chuyển vị mà cân bằng vẫn xảy ra và bài toán này được giải quyết từ điều kiện tổng thể năng của dạng biến dạng đầu tiên. Đường cong biến dạng được giả thiết dưới dạng đa thức  $y = A + Bx + Cx^2$ , hai hằng số của biểu thức này được tính toán từ các điều kiện biên tại đầu ngàm của thanh, ta có lực tới hạn là

$$P = \frac{3EI}{l^2} \quad (1.21)$$

So sánh với nghiệm chính xác lực Euler là  $\pi^2 EI/4l^2$ , ta **thấy sai số là 21,6%**

Lực nén dọc chính xác sẽ có được nếu một chuỗi vô hạn chuyển vị được giả thiết. Một nghiệm tốt hơn với phương trình (1.21) với số tham số tăng từ 1 lên 2 trong hàm chuyển vị giả thiết (hàm thứ). Với  $y = Cx^2 + Dx^3$ , ta có lực tới hạn sẽ là

$$2,4859 = \frac{Pl^2}{EI} \rightarrow P_{cr} = 2,4859 \frac{EI}{l^2}$$

Giá trị này sai số với giá trị chính xác của Euler là **hơn 1%**, chúng ta thấy sự gia tăng đáng kể về độ chính xác đạt được bằng cách tăng số lượng các số hạng trong hàm chuyển vị giả thiết. Nói chung, dạng chuyển vị sẽ phức tạp hơn khi thêm nhiều số hạng để có được một kết quả rất chính xác.

### 1.5.2 Phương pháp số dư trọng số

Biểu thức toán học của một bài toán vật lý có dạng, trong miền V:

$$Du - f = 0 \quad (1.22)$$

Ví dụ: với một trạng thái truyền nhiệt đều trong vật liệu đẳng hướng không có sự phát sinh nhiệt bên trong, D là toán tử vi phân,  $u$  là nhiệt độ T, và  $f = 0$ . Bài toán biểu diễn trong dạng mạnh bởi phương trình (1.22) và điều kiện biên xấp xỉ, đơn giản là phương trình vi phân thỏa mãn tại mọi điểm bên trong và điều kiện biên tại mỗi điểm ở biên. Một hàm xấp xỉ  $\tilde{u}$  sẽ không thỏa mãn tại mọi điểm của phương trình (1.22). Vì vậy số dư  $R = R(x)$  trong miền V:

$$R = D\tilde{u} - f \quad (1.23)$$

Lấy  $\tilde{u}$  là tổ hợp tuyến tính của các hàm đơn giản, điển hình  $\tilde{u}$  là một đa thức  $n$  số hạng trong đó số hạng thứ  $i$  là nhân với bậc tự do tổng quát  $a_i$ . Với  $n$  giá trị của  $a_i$  được chọn để  $R$  là nhỏ. Theo phương pháp số dư trọng số, giá trị của  $a_i$  thỏa mãn biểu thức của phương trình chi phối trong dạng yếu của chúng

$$\int W_i R dV = 0 \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.24)$$

trong đó mỗi  $W_i = W_i(x)$  là một hàm trọng số. Trong phương pháp số dư trọng số Galerkin, mỗi  $W_i$  là **trực giao** với  $a_i$  tương ứng trong  $\tilde{u}$ . Các phương pháp số dư trọng số khác sẽ được thảo luận chi tiết ở mục sau.

### 1.5.3 Sự khác nhau giữa các phương pháp số dư trọng số

Để giải thích ngắn gọn phương pháp số dư trọng số (weighted residual methods - WRM), chúng ta giải thích định nghĩa “số dư, phần dư – residual” bao gồm phần dư trên biên. Với phương pháp Galerkin, biên phần dư không được thể hiện rõ bởi vì tích phân từng phần liên quan đến điều kiện biên tự nhiên. Giả sử rằng, nghiệm xấp xỉ  $\tilde{u}$  là một hàm tọa độ  $x$  và bậc tự do tổng quát  $n$ .  $\{a\} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$ , những giá trị số này đã được xác định. Ta có

$$R = R(\{a\}, x) = D\tilde{u} - f \quad (\text{phần dư trong miền V}) \quad (1.25)$$

$$R_S = R_S(\{a\}, x) = D_S\tilde{u} - g \quad (\text{phần dư trên biên S của V}) \quad (1.26)$$

trong đó  $D_S$  là một toán tử vi phân. Chúng ta tìm kiếm phần dư nhỏ nhất theo một vài định nghĩa, trong khi các phương trình đủ để giải với  $n$  giá trị của  $a_i$ . Trong số các phương pháp số dư trọng số, phương pháp Galerkin là phương pháp được biết đến nhiều nhất.

Trong phương pháp “*án định điểm*” – (*collocation or point collocation*), phần dư được đặt giá trị 0 tại  $n$  vị trí  $x_i$

$$R(\{a\}, x_i) = 0 \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, j-1 \quad (1.27)$$

$$R_S(\{a\}, x_i) = 0 \quad \text{với } i = j, j+1, \dots, n \quad (1.28)$$

Khi  $j < n$ , các điều kiện khác trên biên  $S$  là không xuất hiện. Sự phân bố các điểm sắp xếp gần như đều hoặc có thể dày đặc trong một miền quan trọng nhất.

Trong phương pháp “*miền con*”, hoặc gọi là “*án định miền con*”, tích phân của phần dư trên  $n$  phần vi phân của  $V$  và  $S$  là được cho bằng 0.

$$\int R(\{a\}, x) dV_i = 0, \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, j-1 \quad (1.29)$$

$$\int R_S(\{a\}, x) dS_i = 0, \quad \text{với } i = j, j+1, \dots, n \quad (1.30)$$

Trong phương pháp “*bình phương nhỏ nhất*”, còn gọi là “*bình phương nhỏ nhất liên tục*”, các  $a_i$  được chọn để tối thiểu một hàm  $I$

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.31)$$

Với hàm  $I$  được hình thành bởi tích phân của bình phương phần dư

$$I = \int [R(\{a\}, x)]^2 dV + \alpha \int [R_S(\{a\}, x)]^2 dS \quad (1.32)$$

Trong đó  $\alpha$  là một hệ số tùy ý mà thỏa mãn để thu được thứ nguyên thuần nhất, và cũng thỏa mãn như một số phạt (penalty number). Các giá trị  $\alpha$  càng lớn phản ánh mức độ quan trọng  $R_S$  với  $R$ .

Trong “*bình phương án định nhỏ nhất*”, cũng gọi là “*bình phương điểm nhỏ nhất*” và “*án định vượt quá - overdetermined collocation*”. Từ (1.31), nhưng  $I$  được mô tả như là tổng của bình phương phần dư tại  $m$  điểm, với  $m > n$ :

$$I = \sum_{i=1}^{j-1} [R(\{a\}, x_i)]^2 + \alpha \sum_{i=j}^n [R_S(\{a\}, x_i)]^2 \quad (1.33)$$

Phương trình (1.33) thu được  $n$  phương trình với  $n$  hệ số  $a_i$ , thậm chí khi  $m > n$ . Nếu  $m = n$  phương pháp trở về phương pháp ấn định điểm đơn giản.

*Nhận xét:* tính chất chung của phương pháp Galerkin và phương pháp số dư trọng số MWR khác được mô tả bằng phương trình

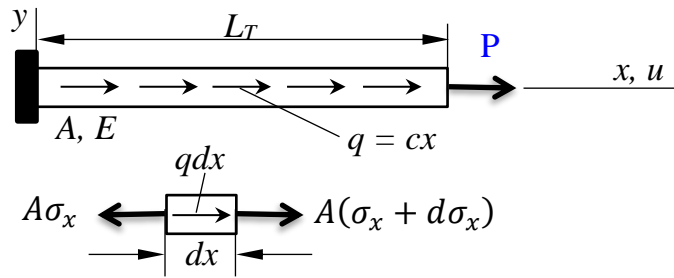
$$\int W_i R_\Gamma d\Gamma = 0 \quad (1.34)$$

trong đó  $R_\Gamma$  đại diện cho  $R$  (và cũng cho  $R_S$ ) và  $\Gamma$  đại diện cho  $V$  (và cũng cho  $S$ ). **Tính trực giao** thể hiện trong công thức (1.34) và các **phương pháp số dư trọng số khác nhau trong việc định nghĩa hàm  $W_i$** . Trong phương pháp Galerkin  $W_i = \partial \tilde{u} / \partial a_i$ . Trong “*phương pháp ấn định*” và “*phương pháp miền phụ*”,  $W_i$  là delta đơn vị hay các hàm bước mà khác không tại các điểm chắc chắn hay chính xác trên miền con. Trong “*phương pháp bình phương nhỏ nhất*”  $W_i = \partial R / \partial a_i$ . Phương trình (1.34) chỉ ra rằng phần dư  $R_\Gamma$ , trọng số bởi thừa số  $W_i$ , có một giá trị trung bình không trên miền  $\Gamma$ . Thu được một nghiệm từ phương trình (1.34) tương tự với thu được nghiệm từ biểu thức biến phân  $\delta \Pi = 0$  trong một bài toán mà hàm  $\Pi$  khả dụng.

Tất cả phương pháp số dư trọng số thu được một phương trình đại số dạng  $[A]\{a\} = \{c\}$ , để giải các  $a_i$  trong hàm xấp xỉ  $\tilde{u}$ . Thiết lập các phương trình là tuyến tính nếu  $D$  là toán tử tuyến tính. Trong phương pháp Bubnov-Galerkin và tất cả các phương pháp bình phương nhỏ nhất, ma trận hệ số  $[A]$  là đối xứng. Phương pháp sắp xếp, miền con, và Bubnov-Galerkin có thể tạo ra một ma trận  $[A]$  bất đối xứng. Trừ khi  $\tilde{u}$  nghiệm chính xác, một hàm  $\tilde{u}$  đã cho sẽ khác nhau với sự lựa chọn khác nhau của các điểm sắp xếp, miền con, hay  $\alpha$  trong phương trình (1.32), (1.33).

Trong phương pháp bình phương nhỏ nhất có khuynh hướng tạo ra một tình trạng xấu của ma trận  $A$ , và mặc dù cho phép “*điều chỉnh*” bởi hệ số  $\alpha$ , nghiệm cũng có thể ảnh hưởng khá lớn bởi phần dư thứ yếu. Bởi vì trọng số là  $W_i = \partial R / \partial a_i$ , cả hai  $R$  và  $W_i$  chứa đạo hàm cùng bậc. Vì vậy, trong phương pháp bình phương nhỏ nhất liên tục, tích phân từng phần không thể giảm bậc của vi phân trong các tích phân. Vậy nếu đạo hàm bậc  $2m$  xuất hiện trong  $R$ , hình thành công thức FE yêu cầu  $\tilde{u}$  thể

hiện các phân tử liên tục của đạo hàm bậc  $2m - 1$ . Bậc của phân tử liên tục có thể giảm từ việc xây dựng lại công thức khi thiết lập các phương trình vi phân bậc nhất.



Hình 1.10. Thanh đàn hồi tiết diện không đổi chịu tải trọng dọc trục  $P$  và lực thay đổi tuyến tính dọc trục  $q = cx$ ,  $c$  là hằng số

Bài toán như Hình 1.10 [46] với kết quả thể hiện trong từ Bảng 1.1, trường hợp đặc biệt  $P = 0$  và giá trị đơn vị của  $A, E, c$  và  $L_T$ . Có thể nói rằng một hàm  $\tilde{u}$  đã cho, kết quả khác nhau khi chọn điểm sắp xếp và các miền con khác nhau.

Bảng 1.1. Kết quả tính toán ví dụ Hình 1.10

Số lượng và vị trí	Nghiệm chính xác	Phương pháp án định điểm	Phương pháp miền phụ và bình phương tối thiểu	Phương pháp án định điểm bình phương tối thiểu	Phương pháp pháp Galerkin
$u$ tại $x=L_T/2$	0,2292	0,1250	0,1875	0,2500	0,2292
$u$ tại $x=L_T$	0,3333	0,1667	0,2500	0,3333	0,3333
$u$ tại $x=0$	0,5000	0,3333	0,5000	0,6667	0,5833
$u'$ tại $x=L_T/2$	0,3750	0,1667	0,2500	0,3333	0,3333
$u'$ tại $x=L_T$	0	0	0	0	0,0833

Phương pháp Galerkin thể hiện **tính trực giao** các hàm trọng số  $W_i$  với các hệ số  $a_i$ , được biết đến là phương pháp Bubnov – Galerkin (được gọi chung là phương pháp Galerkin). Có một biến thể của phương pháp Galerkin được gọi là phương pháp Petrov-Galerkin, trong đó một vài hoặc tất cả của  $W_i$  là được chọn khác nhau khi trực giao với  $a_i$ , điều này cho một kết quả khác với kết quả thu được từ một hàm (nếu hàm này tồn tại). Phương pháp Petrov-Galerkin thường được dùng trong cơ học chất lỏng.

Nếu một hàm có thể được xây dựng mà thu được từ phương trình vi phân chính của bài toán, thì **phương pháp Galerkin và phương pháp Rayleigh-Ritz thu được cùng một kết quả khi cả hai sử dụng cùng một hàm xấp xỉ  $\tilde{u}$** . Dễ dàng thấy từ ví dụ cho ở Hình 1.10 và một so sánh về kết quả trên với kết quả xấp xỉ được cho trong [46], phương pháp Galerkin phù hợp với kết quả bài toán thu được bằng phương pháp

Rayleigh-Ritz. Phương pháp Galerkin là một trong nhiều phương pháp số dư trọng số, tất cả các phương pháp này nhằm chọn các tham số trong hàm thử xấp xỉ để thu được kết quả gần đúng tốt nhất.

#### 1.5.4 Phương pháp Galerkin và tính trực giao của phần dư phương trình với các hàm thử

Sử dụng phương pháp gần đúng Rayleigh – Ritz trong phân tích ổn định. Một kỹ thuật tương tự thu được nghiệm xấp xỉ là phương pháp Galerkin. Khác biệt chính giữa hai phương pháp này là **phương pháp Galerkin giải quyết trực tiếp từ phương trình vi phân** trong khi **phương pháp Rayleigh-Ritz tập trung vào năng lượng** của hệ [15]. Với yêu cầu tổng thế năng thanh hai đầu bản lề có giá trị tối thiểu, ta có

$$\int_0^l (EIy^{(IV)} + Py'')(\delta y)dx + [(EIy'')(\delta y')]_0^l = 0 \quad (1.35)$$

Số hạng đầu tiên trong biểu thức này chứa vế trái của phương trình vi phân nhân với dịch chuyển nhỏ tùy ý của hàm chuyển vị. Số hạng thứ hai chứa các điều kiện biên của thanh.

Có thể xấp xỉ chuyển vị của cột bằng một loạt gồm  $n$  hàm độc lập  $g_i(x)$  nhân với hệ số không xác định ( $a_i$ ).

$$y_{app} = a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + \dots + a_n g_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(x) \quad (1.36)$$

Với mỗi hàm  $g_i(x)$  thỏa mãn điều kiện biên hình học và tự nhiên, thì số hạng thứ hai trong phương trình (1.35) biến mất khi thay  $y$  bằng  $y_{app}$ . Để làm cho số hạng thứ nhất trong phương trình (1.35) bằng với 0, các hệ số  $a_i$  sẽ được chọn mà  $y_{app}$  thỏa mãn phương trình vi phân. Thực hiện thay thế, trong đó tạo ra vế trái của phương trình vi phân khi thay thế  $y$  bằng  $Q$  và được định nghĩa:

$$Q = EI \frac{d^4}{dx^4} + P \frac{d^2}{dx^2} \quad (1.37)$$

Và thay thế hàng loạt hàm xấp xỉ chuyển vị của cột bằng  $\phi$

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i g_i(x) \quad (1.38)$$

Từ phương trình (1.35) nghiệm xấp xỉ  $y_{app}$  có dạng:



$$\int_0^l Q(\phi) (\delta\phi) dx = 0 \quad (1.39)$$

Từ đó  $\phi$  là hàm của  $n$  tham số  $a_i$ ,

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial\phi}{\partial a_2} \delta a_2 + \dots + \frac{\partial\phi}{\partial a_n} \delta a_n \\ &= g_1(x) \delta a_1 + g_2(x) \delta a_2 + \dots + g_n(x) \delta a_n \\ &= \sum_{i=1}^n g_i(x) \delta a_i \end{aligned} \quad (1.40)$$

Từ mối quan hệ này, phương trình (1.39) có thể được viết lại

$$\int_0^l Q(\phi) \sum_{i=1}^n g_i(x) \delta a_i dx = 0 \quad (1.41)$$

Giả sử rằng  $n$  hàm  $g_i(x)$  sử dụng với xấp xỉ  $y$  là độc lập với nhau, phương trình (1.41) có thể giống nhau với mỗi số hạng bằng không trong  $n$  số hạng của phương trình đều bằng không. Như vậy

$$\int_0^l Q(\phi) g_i(x) \delta a_i dx = 0, \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n$$

Do  $a_i$  là tùy ý

$$\int_0^l Q(\phi) g_i(x) dx = 0, \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.42)$$

Các mối quan hệ được cho bởi phương trình (1.42) được gọi là phương trình **Galerkin**. Đối với một bài toán nhất định bất kỳ hàm chuyển vị giả định mà phù hợp với các điều kiện biên và phương trình Galerkin sẽ là một nghiệm gần đúng của bài toán. Phương trình này **thể hiện tính trực giao** giữa  $n$  hàm thử và phần dư. Nếu có  $n$  số hạng trong hàm chuyển vị giả định, sẽ có  $n$  phương trình cho bởi (1.42). Trong một bài toán cân bằng các phương trình  $n$  có thể được giải quyết cho  $n$  hệ số chưa biết trong các hàm chuyển vị giả định. Trong một bài toán uốn dọc tuyến tính các phương trình  $n$  sẽ là thuần nhất, và lực tới hạn có được bằng cách thiết lập các định thức của chúng bằng không.

Để minh họa việc sử dụng phương pháp Galerkin để tính lực tới hạn của thanh một đầu ngàm một đầu bản lề như *Hình 1.6d*. Bước đầu tiên là chọn một hình dạng chuyển vị thỏa mãn các điều kiện biên. Một hàm như vậy thường có thể thu được bằng cách lấy lũy thừa hàng loạt và ước lượng nhiều hằng số tùy ý nhất có thể từ các

điều kiện biên. Ta thu được đường cong biến dạng phù hợp với thanh một đầu ngàm một đầu bản lề theo phương trình (1.43). Hàm này thỏa mãn tất cả điều kiện biên của thanh một đầu ngàm, một đầu bản lề và sẽ được sử dụng như một hàm để xấp xỉ với đường biến dạng của thanh này.

$$y = A(xl^3 - 3lx^3 + 2x^4) \quad (1.43)$$

Bước hai trong phương pháp Galerkin là thiết lập trạng thái cân bằng bằng cách cho hàm giả thiết thỏa mãn phương trình (1.42). Nếu  $\phi$  được cho bởi biểu thức trong (1.43) thì  $Q(\phi)$  phù hợp với (1.37) ta có

$$Q(\phi) = A[48EI + P(24x^2 - 18lx)] \quad (1.44)$$

Từ phương trình (1.38) ta có

$$g(x) = xl^3 - 3lx^3 + 2x^4$$

Thay thế hai biểu thức này vào (1.42) ta có:

$$\int_0^l A[48EI (xl^3 - 3lx^3 + 2x^4) + P(24l^3x^3 - 72x^5l + 48x^6 - 18l^4x^2 + 54l^2x^4 - 36lx^5)]dx = 0 \quad (1.45)$$

Tích phân xác định này cho ta

$$A \left( \frac{36EI l^5}{5} - \frac{12Pl^7}{35} \right) = 0 \Rightarrow P_{cr}^G = \frac{21EI}{l^2} \quad (1.46)$$

*Bảng 1.2. Tổng hợp kết quả thanh C-P theo phương pháp Galerkin*

TT	Dạng W (EI=1)	Giá trị lực tới hạn		Sai số (%)
		P <sub>Ole</sub>	P <sub>Galerkin</sub>	P <sub>Ole</sub> - P <sub>Galerkin</sub>
1	$3x^2(l-x)M/4l$	<b>20,1906</b>	21,0000	<b>4,2595</b>
2	$3x^3(l-x)M/4l$		32,8000	62,8434
3	$x^2(l-x)(3l-2x)M/4$		22,4211	11,3147
4	$3x^4(l-x)M/4l$		47,1429	<b>134,052</b>
5	$x^2(7l^3-9xl^2-2x^3)M/10$		21,8042	8,25201
6	$3x^4(3l-2x)(l-x)M/4$		33,1189	64,4274
7	$x^3(7l^3-9xl^2-2x^3)M/10$		34,5291	71,4279

Khi so sánh với giá trị chính xác của lực tới hạn Euler từ kết quả của (1.4) là  $20,1906EI/l^2$  với sai số 4,0087962%. Tính toán tương tự với các hàm thỏa mãn điều kiện biên trong Bảng 1.2.

Như vậy, phương pháp Galerkin thuộc vào hướng tiếp cận số dư có trọng số, trong khi phương pháp Rayleigh-Ritz đó là dựa trên hướng tiếp cận kiểu biến phân [47]. Hướng tiếp cận số dư có trọng số và mối quan hệ của nó với hướng tiếp cận biến phân, có thể tham khảo các phân tích tổng quan chi tiết của Finlayson và Scriven [48], và Leipholz [49]. Barati và Zenkour [50] đã nghiên cứu ứng xử dao động tự do của vỏ composite dạng nano xếp được gia cường bằng các phiến nhỏ graphene. Lớp vỏ gia cường được mô hình hóa thông qua lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và phương pháp Galerkin được triển khai để nhận được các tần số dao động riêng. Sofiyev [51] thiết lập phương trình chuyển động của dao động động tự do phi tuyến của các vỏ trụ trục hướng có vật liệu cơ tính biến thiên (FGM) mà có xét đến các ứng suất cắt bằng việc sử dụng lý thuyết vỏ phi tuyến.

Đối với khía cạnh tính toán số, đầu tiên ta chú ý đến sự hội tụ của phương pháp [52], [53]. Một phương pháp nút biên Galerkin đã được Li và Zhu [54] đề xuất để giải các bài toán giá trị biên. Đã có các phân tích lý thuyết và hội tụ của phương pháp này. Ding và cộng sự. [55] đã khảo sát sự hội tụ của phương pháp Galerkin đối với phản ứng động của một dầm đàn hồi nằm trên nền phi tuyến với cản nhớt, khi chịu tải trọng tập trung di động. Sự phụ thuộc của độ hội tụ của phương pháp Galerkin vào các điều kiện biên, chiều dài nhịp và các tham số của hệ khác đã được nghiên cứu. Nhiều nghiên cứu khác nhau về phương pháp Galerkin đã được phát triển để tăng tốc độ hội tụ của các nghiệm xấp xỉ. Nếu phương trình chi phối hệ được cho trước, độ chính xác của phương pháp Galerkin được xác định bởi quy trình Galerkin đã dùng và bởi các hàm thử được chọn. Gần đây, Elishakoff và cộng sự [56] chỉ ra rằng, đối với một dầm đơn giản có tiết diện giạt cấp, chịu tải trọng phân bố đều, việc triển khai cẩn thận phương pháp Galerkin sẽ hội tụ đến nghiệm chính xác, trong khi đó việc triển khai Galerkin đơn thuần thì không hội tụ về nghiệm chính xác. Tác giả Issac Elishakoff và Damien Boutur [57] trình bày một số trở ngại của phương pháp Galerkin liên quan đến ổn định của cột có tiết diện thay đổi dạng bậc thang với mô men quán tính thay đổi được biểu diễn dưới dạng hàm tổng quát có kể đến sự xuất

hiện các đạo hàm của hàm Delta Dirac trong phương trình chi phối hệ. Trong [57] cũng có nhắc đến các nghiên cứu về phương pháp Galerkin và đối với các dầm có tiết diện thay đổi nhiều bước, một số nghiệm đóng và kỹ thuật tính toán trình bày trong bài báo của Failla [58], Skrinar [59], và Cheng và cộng sự [60]. Một số công trình nghiên cứu về áp dụng phương pháp Galerkin cụ thể là: Bert và cộng sự [61] so sánh hiệu quả của các kỹ thuật tính toán khác nhau, Elishakoff và Zingales [62] đã minh họa sự hội tụ của phương pháp Galerkin cho nghiệm chính xác bằng cách tính tổng các chuỗi vô hạn. Lal và Yu [63] đã áp dụng phương pháp Galerkin cho các bài toán động, Laura và Cortinez [64] xử lý các lũy thừa không nguyên trong các hàm thử và tối ưu hóa liên quan của trị riêng, Meirovitch và Kwak [65] và Prasad và Krishna Murthy [66] phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin cho các bài toán dao động và Flax [67] ước tính tần số tự nhiên của dầm và tấm có tiết diện thay đổi.

Trong công trình đã công bố số [3], số [4] của nhóm tác giả đề xuất một phương pháp phần tử hữu hạn thời gian bậc cao dựa trên công thức biến thiên xác định tương đương với dạng phương trình chi phối mạnh thông thường trong động lực học kết cấu cũng là một dạng phương trình điều chỉnh trong phương pháp số dư trọng số, trong đó hàm trọng số phụ thuộc vào thời gian.

Ví dụ, đối với kết cấu trong bài toán một chiều, toán tử lấy trung bình thông thường được sử dụng chính là phép tích phân trên toàn toàn bộ chiều dài kết cấu. Vì lý do này, phép lấy trung bình thông thường có thể được coi là phép lấy trung bình toàn cục. Khi sử dụng hướng tiếp cận đối ngẫu, có thể thay vì sử dụng toán tử lấy trung bình toàn cục, thì ta có thể xem xét toán tử lấy trung bình cục bộ và tích hợp nó vào phương pháp Galerkin. Dựa trên khái niệm về đối ngẫu này, Anh và cộng sự [10] đề xuất xem xét ở mức độ toàn cục đối với tiêu chí sai số bình phương bình quân cục bộ của phương pháp tuyến tính hóa tương đương ngẫu nhiên. Phân tích bằng số của một số hệ phi tuyến điển hình chịu kích thích của ồn trắng cho thấy độ chính xác của tiêu chí đề xuất này được cải thiện đáng kể so với tiêu chí sai số bình phương bình quân cổ điển. Một số biểu thức xấp xỉ của tỷ số điều chỉnh tối ưu của thiết bị TMD được gắn với một kết cấu tuyến tính có cơ bản đã được đề xuất [11] bằng cách sử dụng phương pháp tuyến tính hóa tương đương được cải tiến theo tiêu chuẩn đối ngẫu. Phương pháp tuyến tính hóa tương đương và tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số được trình bày ở Chương 2.

## 1.6 Kết luận chương 1

1. Chương 1 trình bày các mô hình mất ổn định và lý giải về tải trọng tới hạn cũng như đường cong giữa chuyển vị và tải trọng dạng mất ổn định phân nhánh đồng thời các phương pháp giải bài toán ổn định đã được biết đến như: a) Phương pháp tĩnh học; b) Phương pháp động lực học; c) Phương pháp năng lượng. Tóm tắt các bài toán ổn định đàn hồi và bài toán dao động dao động một bậc tự do phi tuyến và một số hệ dao động phi tuyến thường gặp.

2. Chương này trình bày tổng quan về các phương pháp giải các bài toán ổn định đàn hồi và nghiệm chính xác của các bài toán này đồng thời cũng chỉ ra tính chất chung của các phương pháp gần đúng cụ thể là Rayleigh-Ritz, các phương pháp số dư trọng số (MWR) và sự khác nhau của các phương pháp và đặc biệt là tổng quan các nghiên cứu áp dụng gần đúng bằng phương pháp Galerkin – là phương pháp gần đúng khá hiệu quả và đơn giản trong tính toán và thể hiện qua tính trực giao giữa phần dư với hàm thử và tác giả nhận thấy có thể sửa đổi toán tử lấy trung bình chính là tính chất trực giao và có thể cải thiện độ chính xác của nghiệm gần đúng.

3. Với một số nghiên cứu trước đây về bài toán ổn định với tiết diện thay đổi cũng là một đối tượng để tác giả nghiên cứu và đề xuất một công cụ tính toán hiệu quả hơn và kết quả của chương này để làm cơ sở so sánh với việc phương pháp tuyến tính hóa đối ngẫu có trọng số được trình bày ở Chương 2 và phát triển tính chất trực giao đề xuất ở Chương 3 với các bài toán ổn định để xác định lực tới hạn đồng thời phát triển tính chất trực giao thông qua cách tiếp cận mới của tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số của tuyến tính hóa tương đương cho hệ dao động phi tuyến để xác định tần số dao động tự do sẽ được trình bày ở Chương 4.

## CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA TƯƠNG ĐƯƠNG

### 2.1 Giới thiệu

Trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật, kinh tế và logistics, thường cần giải quyết các bài toán tối ưu hóa đa mục tiêu (multi-objective optimization - MOO) trong đó việc ra quyết định theo nhiều tiêu chí cần được thực hiện với sự hiện diện đồng thời của hai hoặc nhiều mục tiêu. Các kết quả được đề cập đến nhất có thể được tìm thấy bằng cách sử dụng các triết lý khác nhau. Trong số các phương pháp MOO [68], [69], phương pháp tổng có trọng số tiếp tục là một trong những phương pháp đơn giản nhất và được sử dụng rộng rãi nhất để chuyển đổi bài toán ban đầu với đa mục tiêu thành bài toán tối ưu hóa đơn mục tiêu, còn được gọi là phương pháp tiếp cận theo tỷ lệ. Trong phương pháp tổng có trọng số [70], một tập hợp các mục tiêu được chia tỷ lệ thành một mục tiêu duy nhất bằng cách nhân từng mục tiêu với một trọng số tương đối liên quan đến từng thuộc tính. Đã có nhiều cách tiếp cận khác nhau để xác định trọng số, được thể hiện trong các tổng quan toàn diện [71], [72], [73], [74]. Từ đó, cần lưu ý từ một cuộc thảo luận quan trọng do Marler và Arora [71] cung cấp: *“Giá trị của một trọng số có ý nghĩa không chỉ so với các trọng số khác mà còn liên quan đến hàm mục tiêu tương ứng của nó. Đây là một ý tưởng phản biện, mặc dù nó thường bị bỏ qua”*.

Mặt khác, các bài toán MOO luôn gắn liền với các mô hình cụ thể trong các lĩnh vực nói trên, chúng thường được mô tả bởi các hệ động học. Thực tế là các hệ động học phi tuyến là vấn đề chính cần quan tâm vì tính phi tuyến vốn có trong hầu hết các hệ thực. Tuy nhiên, không nhiều hệ động lực học phi tuyến có lời giải chính xác [75], [76]. Do đó, trước tiên người ta nên áp dụng một phương pháp để ước tính hay xấp xỉ các đáp ứng. Trong số các phương pháp phân tích gần đúng, tuyến tính hóa tương đương là một trong những cách tiếp cận đơn giản nhất để thực hiện điều này. Sự khởi đầu của phương pháp có liên quan đến nghiên cứu của Kryloff và Bogoliubov trong [75], trong đó hệ phi tuyến một bậc tự do được thay thế bằng một hệ tuyến tính với hệ số tuyến tính hóa tương đương phụ thuộc vào biên độ của đáp ứng. Ý tưởng hiệu quả này sau đó đã được tổng quát hóa thành công cho trường hợp của hệ phi tuyến ngẫu nhiên bởi Caughey [7] người đã đề xuất bình phương trung bình của sai số thay thế. Đề xuất này đã dẫn đến một bài toán tối ưu hóa đơn mục

tiêu, toàn cục được điều chỉnh bởi ý tưởng thay thế tương đương, trong đó sai số trung bình bình phương chính xác là hàm đơn mục tiêu duy nhất và hệ số tuyến tính hóa tương đương là các biến quyết định. Dựa trên các lợi thế toán học của tuyến tính hóa tương đương, một loạt các tiêu chuẩn đã được phát triển với các kỹ thuật mới và cải tiến, sáng tạo. Vài năm một lần, có những bản tóm tắt toàn diện về những thành tựu mới trong việc tuyến tính hóa tương đương ngẫu nhiên, đáng chú ý trong số đó là các đánh giá của Spanos [77], Roberts [78], Socha and Soong [79], Socha [80], [81], Falsone and Ricciardi [82], Elishakoff [5], Proppe và cộng sự [83], Crandall [84], Elishakoff and Crandall [85].

Có thể thấy rằng sự tiến triển của tuyến tính hóa tương đương ngẫu nhiên mạnh hơn nhiều so với tuyến tính hóa tương đương tiền định. Trên thực tế, trong cùng khoảng thời gian, chỉ có một số phát triển đáng chú ý về tuyến tính hóa tương đương tiền định, chẳng hạn như các tiêu chuẩn được đề xuất bởi Adelberg and Denman [86], Sinha and Srinivasan [87], Agrwal and Denman [88], Anh và cộng sự [89], Chattopadhyay and Chakraborty [90], Beléndez et al. [91]. Các ứng dụng của tuyến tính hóa tương đương cho cả trường hợp phi tuyến tiền định và ngẫu nhiên đã được chỉ ra rằng các tiêu chuẩn đó có kết quả tốt với độ chính xác nhất định và một số mức phi tuyến. Tuy nhiên, việc tập trung vào độ chính xác và ảnh hưởng của tính phi tuyến đến hiệu quả của các tiêu chuẩn vẫn chưa được nghiên cứu kỹ. Bên cạnh đó, các tiêu chuẩn có xu hướng bị giới hạn chỉ có một hàm đơn mục tiêu.

Một cách hiểu mới về ý tưởng thay thế tương đương trong việc xử lý trực tiếp một đại lượng đặc trưng của tính phi tuyến gần đây đã được trình bày trong [8], [10], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98]. Đó là tính đối ngẫu của các quá trình thay thế tương đương. Thật vậy, cách tiếp cận đối ngẫu gợi ý rằng việc thay thế hệ phi tuyến ban đầu bằng một hệ tuyến tính tương đương, còn được gọi là sự thay thế lượt đi, cần được xem xét cùng với sự thay thế lượt về từ hệ tuyến tính tương đương sang hệ phi tuyến ban đầu. Kỹ thuật kết hợp tuyến tính hóa tương đương này được gọi là tuyến tính hóa tương đương đối ngẫu. Phương pháp tiếp cận đối ngẫu lần đầu tiên được Anh [92], [95], đề xuất, và sau đó được Anh và cộng sự phát triển. thành một số tiêu chuẩn đối ngẫu, [8], [10], [93], [94], [96], [97], [98] áp dụng trong tuyến tính hóa tương đương ngẫu nhiên. Việc hiện thực hóa các tiêu chuẩn này, có thể được coi là một dạng tổng quát, là tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số (the weighted dual criterion - WDC)

[96], [97]. Theo cách tiếp cận vô hướng hóa MOO, WDC sử dụng tổng có trọng số để kết hợp hai hàm mục tiêu của các sai số thay thế bình phương trung bình lượt đi và lượt về thành một hàm mục tiêu tổ hợp vô hướng. Ngoài ra, cần chỉ ra rằng hệ số tương quan bình phương đã được biết đến trong toán học, xuất hiện tự nhiên trong các công thức của WDC, có thể được sử dụng để đánh giá tính phi tuyến của phần tử phi tuyến gốc đối với phần tử tuyến tính hóa tương đương.

Trong những năm gần đây, một xu hướng mạnh mẽ với mối quan tâm rất lớn đến các vật liệu và kết cấu mới. Điều này dẫn đến việc nghiên cứu nhiều hệ động lực học phức tạp trong đó việc phân tích tần số của dao động tự do phi tuyến là cần thiết. Có rất nhiều phương pháp giải tích xấp xỉ được phát triển và sử dụng để giải quyết bài toán này. Chattopadhyay và Chakraborty đề xuất tính giá trị bình phương trung bình của sai số thay thế đơn giản trong giới hạn  $[0, 2\pi]$  thay vì  $[0, 2\pi/\Omega]$  như thông thường [90]. Beléndez và cộng sự đã xây dựng một công thức thực nghiệm xấp xỉ cho chu kỳ của dao động phi tuyến bảo toàn bằng cách kết hợp tuyến tính hóa của phương trình chi phối hệ với sự mở rộng phân tích tiệm cận của chu kỳ chính xác đối với biên độ nhỏ [91]. Một kỹ thuật tuyến tính hóa tương đương với trung bình có trọng số đã được đề xuất trong [89] để phân tích một số hệ dao động phi tuyến. Tiêu chuẩn trung bình có trọng số sau đó đã được Hiếu và cộng sự áp dụng thành công cho nhiều loại hệ phi tuyến. [99], [100], [101], [102]. Bên cạnh đó, một số phát triển gần đây về kỹ thuật tiệm cận và những phát triển mới liên quan đến phân tích tần số có thể được tìm thấy trong các khảo sát của Bayat và cộng sự [103], hoặc chuyên khảo của Cveticanin [43]. Điều đó chỉ ra rằng các phương pháp tiệm cận nâng cao không chỉ hữu ích cho các phương trình phi tuyến yếu mà còn cho các phương trình phi tuyến mạnh. Điển hình, có thể kể đến phương pháp nhiễu loạn đồng vị (the homotopy perturbation method - HPM) được đề xuất bởi He [104], trong đó tần số xấp xỉ được suy ra từ một phương trình đồng dạng được xây dựng bởi tổng có trọng số của toán tử vi phân và hàm phân tích, và trọng số chuẩn hóa còn được gọi là tham số tương đồng được sử dụng làm tham số mở rộng của tần số xấp xỉ. Phương pháp cân bằng điều hòa (the harmonic balance method - HBM) là một quy trình khác để xác định tần số xấp xỉ của các nghiệm tuần hoàn bằng cách sử dụng biểu diễn chuỗi Fourier được thu gọn, chẳng hạn như công trình của Mickens [105]. Một bước tiến của phương pháp này bằng cách áp đặt tuyến tính hóa của phương trình chi phối hệ để



tránh việc giải các hệ phương trình có tính phi tuyến rất phức tạp đã được thực hiện bởi Lim and Wu [44], Febbo [45].

Chương này trình bày các phương pháp tuyến tính hóa tương đương cho hệ một bậc tự do trong mục 2.2 với các hệ số tuyến tính hóa ta có các phiên bản khác nhau dựa trên tiêu chuẩn kinh điển, tiêu chuẩn cực tiểu sai số thế năng, tiêu chuẩn tuyến tính hóa tương đương có điều chỉnh, tiêu chuẩn tuyến tính hóa từng phần. Sự phát triển của tiêu chuẩn đối ngẫu và ứng dụng của nó được trình bày trong 2.3. Sự hình thành và ý tưởng của tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số và các tính chất của nó được trình bày chi tiết trong 2.4. Kết luận của Chương 2 trình bày trong 2.5

## 2.2 Phương pháp tuyến tính hóa tương đương cho hệ một bậc tự do

Hệ một bậc tự do được xem là trường hợp riêng của hệ nhiều bậc tự do. Tuy nhiên trường hợp hệ một bậc tự do lại rất quan trọng và rất được quan tâm nghiên cứu. Xét dao động của hệ một bậc tự chịu kích động ngẫu nhiên ồn trắng có phương trình như sau:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x + g(x, \dot{x}) = f(t) \quad (2.1)$$

trong đó hàm  $f(t)$  là một kích động ngoài ngẫu nhiên ồn trắng Gaussian có trung bình không, hàm phi tuyến  $g(x, \dot{x})$  phụ thuộc vào hai đối số là tọa độ của vị trí  $x$  và vận tốc  $\dot{x}$ , có thể gồm nhiều thành phần biểu diễn dưới dạng

$$g(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^M g_i(x, \dot{x}) + \sum_{j=1}^N g_j(x, \dot{x}) \quad (2.2)$$

với  $g_i(x, \dot{x})$  là hàm lẻ của  $\dot{x}$  đại diện cho thành phần lực cản phi tuyến thứ  $i$ ,  $g_j(x, \dot{x})$  là hàm lẻ của  $x$  đại diện cho thành phần lực đàn hồi phi tuyến thứ  $j$ .

Đáp ứng của hệ phi tuyến (2.1) còn gọi là nghiệm xấp xỉ, giá trị trung bình bình phương của dịch chuyển và vận tốc được xác định theo phương trình Fokker – Planck – Kolgomorov (FPK) là

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{2(2h + b)(\omega_0^2 + k)} \quad (2.3)$$

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{2(2h + b)}$$

Vì hệ phi tuyến (2.1) được thay thế bằng một hệ tuyến tính nên có thể áp dụng nguyên lý chồng chất cho việc thay thế hàm phi tuyến (2.2) như sau [106]

$$\begin{aligned}
g_i(x, \dot{x}) &\rightarrow b_i \dot{x}; \quad g_j(x, \dot{x}) \rightarrow k_j x \\
\sum_{i=1}^M g_i(x, \dot{x}) &\rightarrow b \dot{x} = \sum_{i=1}^M b_i \dot{x} \\
\sum_{j=1}^N g_j(x, \dot{x}) &\rightarrow k x = \sum_{j=1}^N k_j x
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Phương trình tuyến tính hóa tương đương của phương trình phi tuyến (2.1) có dạng đơn giản hơn như sau:

$$\ddot{x} + (2h + b)\dot{x} + (\omega_0^2 + k)x = f(t) \tag{2.5}$$

trong đó  $b$  và  $k$  còn được gọi là các hệ số cản và hệ số độ cứng tuyến tính hóa tương đương, còn  $b_i$  và  $k_j$  gọi là các hệ số tuyến tính hóa thành phần tương ứng. Hai hệ số  $b, k$  được tìm từ tiêu chuẩn tuyến tính hóa. Cụ thể trong trường hợp này ta có tiêu chuẩn sau đây

$$e_1 = E[(g(x, \dot{x}) - b\dot{x} - kx)^2] \rightarrow \min \tag{2.6}$$

Tiêu chuẩn (2.6) được gọi là tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình đối với hệ một bậc tự do. Nó dẫn đến hệ hai phương trình với ẩn số  $b, k$

$$\frac{\partial e_1}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial e_1}{\partial k} = 0 \tag{2.7}$$

Giải hệ (2.6), (2.7) với chú ý rằng  $E[x, \dot{x}] = 0$  ta được

$$b = \frac{E[\dot{x}g]}{E[\dot{x}^2]}; \quad k = \frac{E[xg]}{E[x^2]} \tag{2.8}$$

Từ phương trình tuyến tính hóa, các quá trình  $x$  và  $\dot{x}$  là các quá trình chuẩn. Do đó các mô-men bậc lẻ đều bằng không, các mô-men  $E[\dot{x}g]$  và  $E[xg]$  đều biểu diễn qua được các mô-men bậc hai của  $x$  và  $\dot{x}$ . Hệ (2.8) lập thành một hệ hai phương trình nhưng lại có bốn ẩn bao gồm  $b, k, E[\dot{x}^2], E[x^2]$ . Để đóng kín hệ này ta cần tới hai phương trình nữa. Dựa vào ma trận của phổ đầu ra áp dụng cho hệ một bậc tự do, ta có hai phương trình sau đây để đóng kín hệ (2.8).

$$E([x^2]) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_f(\omega) d\omega}{(2h + b)^2 \omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2 - k)^2} \tag{2.9}$$

$$E([\dot{x}^2]) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 S_f(\omega) d\omega}{(2h + b)^2 \omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2 - k)^2} \quad (2.10)$$

trong đó  $S_f(\omega)$  là hàm mật độ phổ của kích động ngoài  $f(t)$ . Với kích động ồn trắng ta có  $S_f(\omega) = S_0 = const$ . Phương trình vi phân bậc hai (2.1) có thể được chuyển đổi về hệ phương trình trạng thái bao gồm hai phương trình vi phân bậc nhất.

$$\begin{cases} dx = \dot{x} dt \\ d\dot{x} = -(2h\dot{x} + \omega_0^2 x + g(x, \dot{x})) dt + \sigma \xi(t) \end{cases} \quad (2.11)$$

gọi là dạng phương trình vi phân ngẫu nhiên Ito. Hàm mật độ xác suất của đáp ứng của phương trình Ito (2.11) có thể xác định bằng phương trình FPK dừng (Phương trình FPK được đặt tên theo Fokker (1914), Planck (1917), Kolgomorov (1931) [107] có dạng là

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i(x) p(x)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [K_{ij}(x) p(x)] = 0 \quad (2.12)$$

với các hệ số dịch chuyển và hệ số khuếch tán tương ứng là (n=2)

$$\begin{aligned} a_1 = \dot{x}, a_2 = -(2h\dot{x} + \omega_0^2 x + g(x, \dot{x})) &= 0 \\ K_{11} = 0, K_{21} = \sigma^2 & \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vì hệ (2.11) có các thành phần lực đàn hồi, lực cản và kích động không phụ thuộc trực tiếp vào thời gian, nên hàm mật độ xác suất của đáp ứng ở trạng thái bình ổn thỏa mãn điều kiện dừng. Do vậy, hàm mật độ xác suất dừng  $p(x, \dot{x})$  của hệ phương trình (2.11) được xác định bằng phương trình FPK dừng (2.12) và (2.13).

Khi đã tìm được hàm mật độ xác suất  $p(x, \dot{x})$  của dịch chuyển và vận tốc thì các đặc trưng xác suất khác của chúng hoàn toàn có thể xác định được như các mô-men, hàm tương quan hay mật độ phổ.

Đối với trường hợp hệ có n bậc tự do thì phương trình Ito (2.11) sẽ bao gồm 2n phương trình vi phân bậc nhất và số chiều của hàm mật độ xác suất tương ứng là 2n, việc giải phương trình FPK dừng (2.12) trở nên khó khăn. Ngay cả đối với trường hợp hệ có một bậc tự do như (2.11) thì không phải lúc nào cũng thu được hàm mật độ xác suất hai chiều, cụ thể là khi hàm  $g(x, \dot{x})$  chứa thành phần cản phi tuyến. Mặc dù có nhiều hạn chế song phương trình FPK vẫn đóng một vai trò rất quan trọng trong lý thuyết dao động ngẫu nhiên vì có thể cung cấp hàm mật độ xác suất chính xác. Do đó, kết quả thu được từ phương pháp này được thường sử dụng để làm cơ sở đối chiếu với kết quả của các phương pháp xấp xỉ khác.

Việc xấp xỉ tuyến tính cho thấy hiệu quả khi các đặc trưng xác suất của đáp ứng được giới hạn ở việc phân tích các mô men, đặc biệt là mô men bậc hai vì các mô men bậc cao của quá trình Gauss được biểu diễn qua mô men bậc hai. Ngoài ra, nhờ sự đơn giản hóa này nên các tiêu chuẩn tuyến tính hóa thường được biểu diễn dưới dạng trung bình bình phương theo đó kết hợp với các công thức nghiệm trong (2.3) sẽ thu được các phương trình đại số để xác định được các hệ số cản và hệ số độ cứng tuyến tính tương đương. Vì những lí do này, phương pháp tuyến tính hóa tương đương ngẫu nhiên còn có tên gọi là tuyến tính hóa tương đương Gauss.

Có thể nói rằng, mục tiêu của những cải tiến và phát triển đối với phương pháp tuyến tính hóa tương đương là xác định các hệ số tuyến tính hóa, theo một nghĩa xác suất nào đó, để có thể thu được trung bình bình phương hay phương sai xấp xỉ gần với nghiệm chính xác nhất. Sau đây sẽ giới thiệu tiêu chuẩn kinh điển và một số tiêu chuẩn tuyến tính hóa được đề xuất của phương pháp này.

### 2.2.1 Dựa trên tiêu chuẩn kinh điển

Xuất phát từ sai số phương trình của (2.1) và (2.5) là

$$e(x, \dot{x}) = g(x, \dot{x}) - b\dot{x} - kx \quad (2.14)$$

Có thể thấy ý nghĩa vật lý của cách thay thế này là các hệ (2.1) và (2.5) tương đương về lực. Sai số phương trình (2.14) được biểu diễn bằng sai số của phép thay thế hàm phi tuyến bằng hàm tuyến tính tương đương. Tiêu chuẩn kinh điển [7] đề nghị xác định các hệ số tuyến tính hóa  $b, k$  bằng điều kiện cực tiểu hóa trung bình bình phương của (2.14) theo  $b$  và  $k$ . Biểu diễn của tiêu chuẩn kinh điển là

$$S_{kd}(b, k) = \langle e^2(x, \dot{x}) \rangle = \langle (g(x, \dot{x}) - b\dot{x} - kx)^2 \rangle \rightarrow \min_{b, k} \quad (2.15)$$

Điều kiện cực tiểu trong (2.15) dẫn tới

$$\frac{\partial S_{kd}(b, k)}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial S_{kd}(b, k)}{\partial k} = 0 \quad (2.16)$$

Để đơn giản các đáp ứng  $x, \dot{x}$  được giả thiết là độc lập  $\langle x\dot{x} \rangle = 0$ , giải hệ phương trình (2.16) thu được

$$b = \frac{\langle x \cdot g(x, \dot{x}) \rangle}{\langle \dot{x}^2 \rangle}, \quad k = \frac{\langle x \cdot g(x, \dot{x}) \rangle}{\langle x^2 \rangle} \quad (2.17)$$

Trường hợp hàm phi tuyến  $g(x, \dot{x})$  không có dạng giải tích, ví dụ như đối với các hệ trễ, thì có thể lấy tích phân trực tiếp các mô-men liên kết này theo hàm mật độ

xác suất giả thiết. Khi thay các hệ số tuyến tính hóa trong (2.17) vào công thức (2.3), thu được phương trình phi tuyến đại số của các đáp ứng xấp xỉ. Spanos [77] có nhận xét là “*kết quả xác định bằng tiêu chuẩn kinh điển thường nhỏ hơn kết quả xác định bằng phương pháp FPK hay phương pháp mô phỏng Monte Carlo khoảng 20%*”.

Dựa trên nhận xét này, có thể thấy rằng hệ số tuyến tính hóa xác định bằng tiêu chuẩn kinh điển quá lớn dẫn tới sai số lớn của hệ tuyến tính tương đương. Nói một cách khác, nếu một tiêu chuẩn tuyến tính hóa nào khác có thể tạo ra hệ số tuyến tính hóa nhỏ hơn so với của tiêu chuẩn kinh điển thì sẽ có khả năng thu được kết quả chính xác hơn. Điều này mở ra việc mở rộng và phát triển tính trực giao hay nói cách khác là cải tiến trung bình bình phương từ tiêu chuẩn kinh điển sẽ có những kết quả tốt hơn so với kết quả từ tiêu chuẩn kinh điển.

### 2.2.2 Dựa trên tiêu chuẩn cực tiểu sai số thế năng

Elishakoff và Zhang [108] đã đề xuất tiêu chuẩn tuyến tính hóa dựa trên thế năng tích trữ trong phần tử đàn hồi phi tuyến

$$U(x) = \int_0^x g(\alpha) d\alpha \quad (2.18)$$

Trong trường hợp này, hàm phi tuyến trong phương trình (2.1) có dạng  $g(x, \dot{x}) = g(x)$ . Hệ số tuyến tính hóa  $k$  từ phương trình (2.5) được xác định từ điều kiện cực tiểu trung bình bình phương sai số của thế năng  $U(x)$  của phần tử phi tuyến và  $kx^2/2$  là thế năng của phần tử tuyến tính tương đương,

$$\left\langle \left[ U(x) - \frac{1}{2} kx^2 \right]^2 \right\rangle \rightarrow \min_k \quad (2.19)$$

Từ tiêu chuẩn (2.19) ta có

$$k = \frac{2\langle x^2 U(x) \rangle}{3\langle x^4 \rangle} = \frac{2\langle x^2 U(x) \rangle}{3\langle x^2 \rangle^2} \quad (2.20)$$

Từ phương trình (2.20) khi áp dụng với một số hệ đàn hồi phi tuyến cho kết quả tương đối tốt. Tuy vậy, với các hệ có cản phi tuyến thì không cho kết quả tốt.

### 2.2.3 Dựa trên tiêu chuẩn tuyến tính hóa tương đương có điều chỉnh

Tác giả Anh và Di Paola [109] đã áp dụng cách tiếp cận tuyến tính hóa tương đương Gauss có điều chỉnh dựa trên nhận định sự thay thế hệ phi tuyến gốc bằng một hệ tuyến tính cho thấy rằng nó đã làm giảm mức độ phi tuyến, để thu được nghiệm chính xác hơn ta xem xét mức độ phi tuyến giảm như thế nào. Từ đó, Anh và Di Paola

đã cải tiến bằng việc thay các số hạng phi tuyến ban đầu bởi các số hạng phi tuyến có bậc cao hơn trước khi thực hiện việc tuyến tính hóa.

Giả sử hàm phi tuyến trong phương trình (2.1) có dạng  $g(x, \dot{x}) = g(x)$ , các bước thay thế từ tiêu chuẩn tuyến tính hóa tương đương Gauss có điều chỉnh như sau

$$g(x) \rightarrow k_1 g(x) \frac{g(x)}{x} \rightarrow k_2 g(x) \rightarrow kx \quad (2.21)$$

trong đó các hệ số  $k_1$ ,  $k_2$  và hệ số tuyến tính hóa  $k$  được xác định theo từ sai số trung bình bình phương nhỏ nhất

$$\begin{aligned} \langle (g(x) - k_1 g^2(x)/x)^2 \rangle &\rightarrow \min_{k_1} \\ \langle (k_1 (g^2(x)/x)g(x) - k_2 g(x))^2 \rangle &\rightarrow \min_{k_2} \\ \langle (k_2 g(x) - kx)^2 \rangle &\rightarrow \min_k \end{aligned} \quad (2.22)$$

Từ (2.22) thu được các kết quả

$$k_1 = \frac{\langle g^3(x)/x \rangle}{\langle g^4(x)/x^2 \rangle} \quad (2.23)$$

$$k_2 = k_1 \frac{\langle g^3(x)/x \rangle}{\langle g^2(x) \rangle} \quad (2.24)$$

$$k = \frac{\langle g^3(x)/x \rangle \langle g^3(x)/x \rangle \langle xg(x) \rangle}{\langle g^4(x)/x^2 \rangle \langle g^2(x) \rangle \langle x^2 \rangle} \quad (2.25)$$

Phương trình (2.21) được gọi là tiêu chuẩn tuyến tính hóa điều chỉnh một bước, tiêu chuẩn này cho kết quả tốt với một số dao động phi tuyến trong [109], [6]. Sau đó Elishakoff và các cộng sự [6] đã phát triển tiêu chuẩn của hai tác giả Anh và Di Paola và phát triển từ điều chỉnh một bước sang điều chỉnh hai bước như sau:

$$\begin{aligned} g(x) \rightarrow k_1 g(x) \frac{g(x)}{x} \rightarrow k_2 g(x) \left[ \frac{g(x)}{x} \right]^2 \rightarrow k_3 g(x) \frac{g(x)}{x} \\ \rightarrow k_4 g(x) \rightarrow kx \end{aligned} \quad (2.26)$$

trong đó các hệ số  $k_1, k_2, k_3, k_4, k$  được xác định theo sai số trung bình bình phương nhỏ nhất. Sau đó, các tác giả áp dụng các bước tuyến tính hóa theo (2.26) cho dao động Lutes and Sarkani thu được kết quả tốt hơn với sai số khoảng 14.56% so với 25.82% của tiêu chuẩn tuyến tính hóa điều chỉnh một bước (2.21) ở trường hợp tính phi tuyến khá lớn, tuy nhiên khi áp dụng cho một số dao động khác thì kết quả không tốt hơn so với tiêu chuẩn tuyến tính hóa điều chỉnh một bước.

### 2.2.4 Dựa trên tiêu chuẩn tuyến tính hóa từng phần

Để giới thiệu về tiêu chuẩn tuyến tính hóa từng phần do Elishakoff và Cai [110] đề xuất, xét trường hợp hàm phi tuyến của dao động (2.5) có dạng  $g(x, \dot{x}) = g_1(x, \dot{x}) + g_2(x)$ . Các tác giả chỉ thay thành phần phi tuyến đại diện cho lực cản bằng thành phần tuyến tính,  $g_1(x, \dot{x}) = b\dot{x}$ , dẫn tới phương trình

$$\ddot{x} + (2h + b)\dot{x} + g_2(x) = \sigma \xi(t) \quad (2.27)$$

Phương trình (2.27) có hàm mật độ xác suất chính xác theo công thức

$$\begin{aligned} p(x, \dot{x}) &= C \cdot \exp \left[ -\frac{4h}{\sigma^2} H(x, \dot{x}) \right] \\ &= C \cdot \exp \left[ -\frac{4h}{\sigma^2} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \int_0^x g(u) du \right) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Hệ số tuyến tính hóa  $b$  được xác định từ điều kiện sai số nhỏ nhất

$$b = \frac{\langle x g_1(x, \dot{x}) \rangle}{\langle \dot{x}^2 \rangle} \quad (2.29)$$

Tiêu chuẩn của Elishakoff và Cai được biết đến như một trường hợp riêng của phương pháp tuyến tính hóa tương đương, đã cải thiện độ chính xác của nghiệm xấp xỉ so với tiêu chuẩn kinh điển. Tuy nhiên, tiêu chuẩn này không áp dụng được cho hệ phi tuyến nhiều bậc tự do vì hệ đàn hồi phi tuyến chỉ có nghiệm giải tích chính xác của hàm mật độ xác suất một chiều và hai chiều thu được từ phương trình FPK.

### 2.3 Tiêu chuẩn đối ngẫu của phương pháp tuyến tính hóa tương đương

Khi xem xét lý thuyết về dao động ngẫu nhiên, cách tiếp cận tuyến tính hóa tương đương ngẫu nhiên thay thế hệ phi tuyến bằng hệ tuyến tính tương đương là cách tiếp cận phổ biến vì cách thay thế này vẫn duy trì các tính chất quan trọng của hệ phi tuyến gốc. Phương pháp này đã được nhiều công trình đánh giá [84], [85], và được tóm tắt từ một số chuyên khảo của Roberts và Spanos [42] và Socha [111]. Khi khảo sát sự hiệu quả và tính linh hoạt của phương pháp tuyến tính hóa ngẫu nhiên, Elishakoff và Crandall đã nhận xét rằng phương pháp này cho phép thu được giả thiết về phản ứng của hệ khi không có các nghiệm chính xác, ngược lại với kỹ thuật nhiễu loạn, việc thực hiện nó không đòi hỏi độ nhỏ của tham số, mặt khác, không giống như mô phỏng Monte Carlo, nó không liên quan đến khối lượng tính toán lớn. Mặc dù độ chính xác có thể không được cao, nhưng điều này được khắc phục bằng thực tế là bản

thân sự kích thích ngẫu nhiên không cần phải biết chính xác [85]. Canor et al. [112] cũng đã có nhận xét: Từ việc thực hiện dễ dàng và nhanh chóng, nên tuyến tính hóa tương đương đã trở thành một phương pháp gần đúng rất phổ biến để phân tích các hệ phi tuyến với mức độ phi tuyến lớn.

Nhiều nhà nghiên cứu đã sử dụng phương pháp tuyến tính hóa tương đương trong các công trình công bố của mình ví dụ như một cách tiếp cận phân tích dựa trên tuyến tính hóa tương đương được phát triển trong [113], [114] để phân tích các máy thu năng lượng phi tuyến dưới các kích thích ngẫu nhiên, hệ dao động phi tuyến của máy bay được nghiên cứu trong [115], [116], một cách tiếp cận dựa trên phương pháp tuyến tính hóa tương đương được đề xuất trong [117] để xác định nghiệm phân tích gần đúng để tối ưu hóa  $H_{\infty}$  của bộ hấp thụ rung động ba yếu tố được gắn vào kết cấu sơ cấp được giảm chấn. Jalali đã đề xuất trong [118] một phương pháp tuyến tính hóa tương đương các lực phục hồi phi tuyến trong đó các nghiên cứu bằng số cho thấy phương pháp được đề xuất là hiệu quả trong việc phân tích các hệ kích động phi tuyến yếu. Silva-Gonzalez và cộng sự [119] áp dụng phương pháp tuyến tính tương đương ngẫu nhiên khảo sát các hệ kết cấu phi tuyến không đàn hồi dưới tác động địa chấn. Su và các cộng sự [120] dựa trên phương pháp tuyến tính hóa tương đương đã phát triển một quy trình hiệu quả áp dụng với các hệ phi tuyến chịu các kích thích ngẫu nhiên tại các vị trí khác nhau. Khi nghiên cứu bức xạ nhiệt của các vệ tinh nhỏ với mô hình một nút tác giả đã áp dụng phương pháp tuyến tính hóa tương đương để khảo sát [121]. Trong [122] sử dụng mô hình phân phối hỗn hợp Gaussian phát triển phương pháp tuyến tính hóa tương đương để phân tích dao động ngẫu nhiên phi tuyến.

Điều cốt yếu của phương pháp tuyến tính hóa tương đương là làm thế nào để tìm ra các hệ số tuyến tính hóa cho một hệ phi tuyến đã cho. Trong tài liệu [7], một số tiêu chuẩn của tuyến tính hóa tương đương đã được đề xuất để xác định các hệ số tuyến tính hóa trong đó phiên bản gốc là tiêu chuẩn thông thường giúp giảm thiểu bình phương trung bình của sai số phương trình. Mặc dù có những ưu điểm đã nói ở trên, nhưng nhược điểm chính của tiêu chuẩn này là độ chính xác của nó giảm khi độ phi tuyến ngày càng tăng, trong nhiều trường hợp, nó dẫn đến các sai số không thể chấp nhận được. Do đó, các tiêu chuẩn tuyến tính hóa tương đương khác nhau đã được phát triển để cải thiện độ chính xác của một nghiệm gần đúng, xem ví dụ [1] [84], [111], [123].



Gần đây, một tiêu chuẩn đối ngẫu đã được đề xuất trong [92], [93] trong đó các hệ số tuyến tính hóa được xác định từ sự thay thế đối ngẫu liên quan đến việc thay thế lượt đi và lượt về. Áp dụng tiêu chuẩn đối ngẫu cho ba hệ phi tuyến là hệ dao động Duffing, Van der Pol và Lutes Sarkani đã cho thấy độ chính xác được cải thiện của các nghiệm gần đúng cho các trường hợp trong đó mức độ phi tuyến ở mức trung gian [93], [124]. Một lý do có thể thực tế là việc thay thế chuyển tiếp và trả lại sẽ có các vai trò khác nhau trong việc điều chỉnh sai số thay thế thay vì là giống nhau. Trong [94], [125], một tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số được nghiên cứu bằng cách xem tham số trọng số là hàm tuyến tính từng phần của hệ số tương quan bình phương được xác định bằng phương pháp nội suy của bình phương tối thiểu từ các nghiệm chính xác có sẵn của một số dao động phức hồi phi tuyến. Hạn chế chính của trọng số tuyến tính từng phần là nó chỉ đại diện cho một lớp dao động phi tuyến giới hạn. Do đó, trong bài báo [126] đã phát triển một dạng tinh vi hơn của tham số trọng số. Tính đơn giản và chính xác của tiêu chuẩn sai số đối ngẫu có trọng số được đề xuất sau đó được kiểm tra trên một số hệ dao động ngẫu nhiên với phức hồi phi tuyến hoặc giảm chấn phi tuyến. Người ta nhận được rằng độ chính xác tương ứng có thể được cải thiện đáng kể cho một phạm vi phi tuyến lớn của các hệ dao động được khảo sát.

## 2.4 Tiêu chuẩn tuyến tính hóa đối ngẫu có trọng số

### 2.4.1 Ý tưởng cơ bản của tiêu chuẩn đối ngẫu

Anh [92] nghiên cứu sự thay thế đối ngẫu từ hệ tuyến tính hóa trở về hệ phi tuyến ban đầu đối với tiêu chuẩn kinh điển và áp dụng cho dao động ngẫu nhiên Duffing, sau đó tác giả đã đề xuất một tiêu chuẩn thay thế tương đương đối ngẫu. Trong phần này sẽ được trình bày lại cách thức xây dựng tiêu chuẩn của Anh với mục đích làm cơ sở cho nội dung của phần tiếp theo. Trước hết, ta xem xét ý tưởng về cách tiếp cận đối ngẫu thông qua dao động Duffing được mô tả bởi phương trình

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = f(t) \quad (2.30)$$

trong đó  $h$  là hệ số cản,  $\omega_0$  là tần số dao động riêng,  $\gamma$  là hệ số độ cứng của lực đàn hồi phi tuyến,  $f(t)$  là kích động ngoài. Áp dụng phương pháp tuyến tính hóa tương đương, khi thay thế lực đàn hồi phi tuyến bằng lực đàn hồi tuyến tính,  $\gamma x^3 \rightarrow kx$ , ta có hệ đã được tuyến tính hóa

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x + kx = f(t) \quad (2.31)$$

trong đó  $k$  là hệ số tuyến tính hóa. Theo tiêu chuẩn kinh điển,  $k$  được xác định từ điều kiện trung bình bình phương nhỏ nhất của sai số phương trình giữa (2.30) và (2.31)

$$\langle (\gamma x^3 - kx)^2 \rangle \rightarrow \min_k \quad (2.32)$$

trong đó  $\langle \blacksquare \rangle$  ký hiệu là toán tử kỳ vọng. Từ điều kiện cực tiểu của (2.32) có

$$k = \gamma \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle} = 3\gamma \langle x^2 \rangle \quad (2.33)$$

Tiếp theo, tác giả thực hiện việc thay thế từ phương trình tuyến tính hóa tương đương (2.31) trở về dạng của hệ phi tuyến ban đầu,  $kx \rightarrow \gamma_1 x^3$ , với  $\gamma_1$  được gọi là hệ số trở về. Lý do  $\gamma_1 \neq \gamma$  vì việc tuyến tính hóa từ  $\gamma x^3 \rightarrow kx$  có thể dẫn tới sai số, vì vậy việc thay thế trở lại được coi là không thu được nguyên dạng ban đầu. Hệ số trở về  $\gamma_1$  cũng được xác định từ điều kiện trung bình bình phương nhỏ nhất của sai số phương trình

$$\langle (kx - \gamma_1 x^3)^2 \rangle \rightarrow \min_k \quad (2.34)$$

Từ điều kiện (2.34) ta có

$$\gamma_1 = k \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^6 \rangle} \quad (2.35)$$

Thay (2.33) vào (2.35) ta được

$$\gamma_1 = \gamma \frac{\langle x^4 \rangle^2}{\langle x^2 \rangle \langle x^6 \rangle} = \frac{3}{5} \gamma \quad (2.36)$$

Kết quả thu được của  $\gamma_1$  trong (2.36) cho thấy  $\gamma_1 \neq \gamma$  trong quá trình thay thế trở lại. Tiếp theo, dựa trên quan điểm cân bằng hai quá trình thay thế này, Anh đề xuất phương trình tuyến tính thay thế tương đương như sau

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x + k_{tb}x = f(t) \quad (2.37)$$

trong đó hệ số tuyến tính hóa  $k_{tb}$  được xác định từ (2.33) và (2.36)

$$k_{tb} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{5} \right) 3\gamma \langle x^2 \rangle = 2,4\gamma \langle x^2 \rangle \quad (2.38)$$

Để kiểm tra độ chính xác của kết quả thu được đối với dao động ngẫu nhiên, tác giả áp dụng cho trường hợp  $f(t)$  là kích động ồn trắng với cường độ  $\sigma$ . Nghiệm chính xác và các nghiệm xấp xỉ dựa trên các hệ số tuyến tính hóa từ (2.33) và (2.38)

và của dao động Duffing được trình bày trong Bảng 2.3 với  $\omega_0 = 1$ ,  $\sigma = 4h$  còn hệ số  $\gamma$  thay đổi. Kết quả tính toán cho thấy sai số của nghiệm xấp xỉ ứng với  $k_{tb}$  giảm đi đáng kể so với sai số khi áp dụng tiêu chuẩn kinh điển.

*Bảng 2.3. Đáp ứng trung bình bình phương:  $\omega_0 = 1$ ,  $h = 0,5$ ,  $\sigma = \sqrt{2}$ ,  $\gamma$  thay đổi*

$\gamma$	$\langle x^2 \rangle_{cx}$	$\langle x^2 \rangle_{kd}$	Sai số (%)	$\langle x^2 \rangle_{DA}$	Sai số (%)
0,1	0,8176	0,8054	1,49	0,8330	1,89
1	0,4679	0,4343	7,19	0,4700	0,44
10	0,1889	0,1667	11,77	0,1840	2,60
100	0,0650	0,0561	13,65	0,0630	3,02

Dựa trên sự cải thiện này, tác giả đã đề nghị kết hợp cả hai quá trình thay thế nêu trên vào trong cùng một tiêu chuẩn

$$S = \langle (\gamma x^3 - kx)^2 \rangle + p_1 \langle (kx - \lambda x^3)^2 \rangle + p_2 \langle (\gamma x^3 - \lambda x^3)^2 \rangle \quad (2.39)$$

$$\rightarrow \min_{k, \lambda}$$

trong đó  $p_1, p_2$  là các trọng số.

Ba số hạng trong (2.39) tương ứng là sai số giữa hàm phi tuyến ban đầu với hàm tuyến tính hóa, sai số giữa hàm tuyến tính hóa và hàm phi tuyến thu được trong quá trình thay thế lượt về và sai số giữa các hàm phi tuyến. Mỗi số hạng được gán một trọng số phản ánh vai trò của nó trong quá trình thay thế đối ngẫu. Tuy nhiên, biểu thức hiện cho các trọng số này chưa được đưa ra trong [92] và cần nghiên cứu thêm. Việc xác định hàm trọng số là một bài toán đang được nhiều người quan tâm và khảo sát. Trọng số trong tiêu chuẩn tuyến tính hóa đối ngẫu đóng vai trò quan trọng trong kết quả tính toán xấp xỉ của bài toán ổn định, các bài toán dao động phi tuyến ngẫu nhiên, dao động tự do phi tuyến và một số bài toán khác.

#### **2.4.2 Tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số**

Đầu tiên chúng ta xem xét lại một cách ngắn gọn bài toán thay thế tương đương cho bài toán động phi tuyến. Gọi  $A$  và  $B$  lần lượt là các hàm phi tuyến và tuyến tính. Cách thay thế tương đương phổ biến là thay thế hàm phi tuyến  $A$  bằng một hàm tuyến tính  $kB$ , trong đó  $k$  được gọi là hệ số tuyến tính hóa tương đương. Sử dụng phép thay thế tương đương kép [92], việc thay thế  $A$  bằng  $k_d B$  được xem xét trong hai quá trình

$$A \rightarrow k_d B \text{ và } k_d B \rightarrow \lambda_d A \quad (2.40)$$

được định nghĩa là thay thế lượt đi và trả về tương ứng,  $\lambda$  được gọi là hệ số trả về và chỉ số “ $d$ ” biểu thị sự thay thế kép (dual replacement), hay gọi là đối ngẫu. Bản chất của cách tiếp cận đối ngẫu liên quan đến tính chất hai chiều của hai quá trình thay thế. Vì phép thay thế thuận từ hệ phi tuyến ban đầu bằng một hệ tuyến tính chỉ là một phép gần đúng, phép thay thế trả về sẽ không trả lại hàm phi tuyến chính xác cho hệ phi tuyến ban đầu.

Do đó, như đã giải thích trong [93], *ta cần cân bằng sự thay thế “thuận” này bằng cách xem xét sự thay thế “ngược” của hệ tuyến tính tương đương thu được bằng một hệ phi tuyến khác thuộc cùng lớp với hệ phi tuyến ban đầu*. Do đó, có hai sai số thay thế tương ứng với hai lần thay thế (2.40).

$$\begin{aligned} A \rightarrow k_d B:, & \quad e_{df} = A - k_d B \\ k_d B \rightarrow \lambda_d A:, & \quad e_{dr} = k_d B - \lambda_d A \end{aligned} \quad (2.41)$$

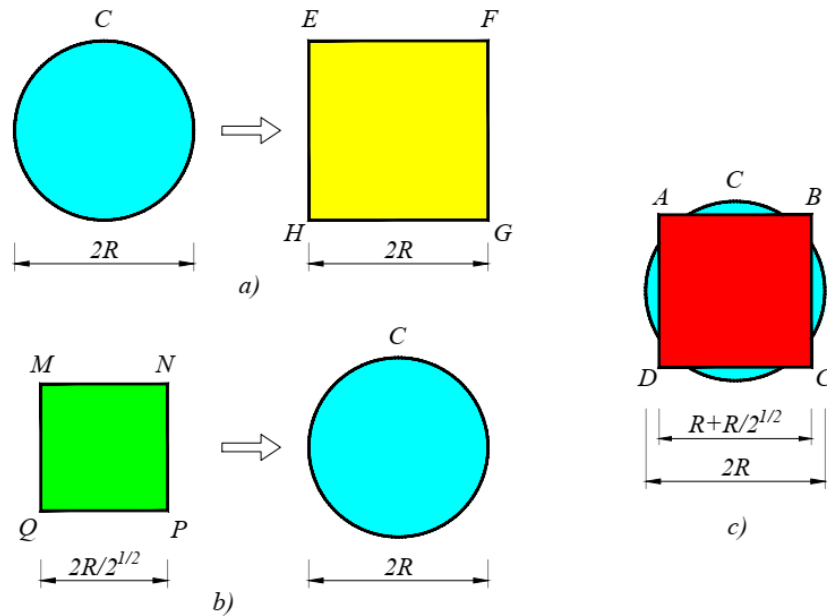
trong đó,  $e_{df}$  và  $e_{dr}$  định nghĩa là các sai số thay thế lượt đi và lượt về tương ứng.

Để làm sáng tỏ hiệu quả của thay thế hai chiều, trước tiên chúng ta xem xét hai ví dụ minh họa.

Ví dụ đầu tiên trình bày bài toán tìm các hình có diện tích xấp xỉ bằng nhau: Cho hình tròn  $C$  đường kính  $2R$  (Hình 2.1.a), tìm một hình vuông  $ABCD$  có diện tích xấp xỉ bằng diện tích hình tròn  $C$ . Chúng ta sẽ giải bài toán này gần đúng bằng cách sử dụng phương pháp thay thế tương đương: Đầu tiên, hình tròn  $C$  được thay thế bằng hình vuông  $EFGH$  với tiêu chí tương đương sau:  $EFGH$  hình vuông bao phủ toàn bộ hình tròn  $C$  và có diện tích nhỏ nhất. Hình vuông  $EFGH$  được thể hiện trong Hình 2.1.a. Thứ hai, tìm một hình vuông  $MNPQ$  có thể thay thế tương đương bằng hình tròn  $C$  với cùng tiêu chí tương đương, tức là hình tròn  $C$  bao phủ toàn bộ hình vuông  $MNPQ$  và có diện tích nhỏ nhất.

Hình vuông  $MNPQ$  được thể hiện trong Hình 2.1b. Thay hình tròn  $C$  bằng hình vuông  $EFGH$  được coi là thay thế thuận trong khi thay hình vuông  $MNPQ$  bằng hình tròn  $C$  được coi là thay thế lùi. Kỹ thuật thay thế hai chiều kết hợp các phép thay thế lượt đi và lượt về với nhau, và gợi ý rằng hình vuông cần tìm  $ABCD$  có cạnh  $AB$  là trung bình cộng của hai cạnh  $EF$  và  $MN$ :  $AB = (1 - p)EF + pMN$  với  $p$  là một

trọng số,  $0 \leq p \leq 1$ . Để đơn giản, chúng ta hãy lấy  $p = 1/2$  và sau đó lấy  $AB = (EF + MN)/2$ .



Hình 2.1. a) Thay thế chiều đi hình tròn  $C$  bằng hình vuông  $EFGH$ ; b) Thay thế chiều về hình vuông  $MNPQ$  bằng hình tròn  $C$ ; c) Thay thế đối ngẫu hình tròn  $C$  bằng hình vuông  $ABCD$

Diện tích chính xác của hình vuông  $ABCD_e$  là được tìm từ phương trình:  $\pi R^2 = AB_e^2$  ta có cạnh  $AB$  chính xác là:  $AB_e = \sqrt{\pi}R \approx 1,7725R$ , Nghiệm thu được từ thay thế chiều đi từ hình vuông  $EFGH$  có  $EF = 2R$  có sai số tuyệt đối là  $(2R - 1,7725R)/(1,7725R) = 12,84\%$ . Nghiệm thu được từ thay thế hai chiều là hình vuông  $ABCD$  với  $AB = (2R + 2R/\sqrt{2})/2 \approx 1,7071R$  Hình 2.1.c có sai số tuyệt đối  $(1,7725R - 1,7071R)/(1,7725R) = 0,37\%$ .

Ví dụ thứ hai đề cập đến việc xác định tần số dao động tự do của dao động loại Duffing được điều chỉnh bởi phương trình sau:

$$\ddot{x} + \gamma x^3 = 0 \quad (2.42)$$

trong đó,  $\gamma$  là độ cứng phi tuyến. Tần số dao động chính xác của dao động (2.42) là được xác định từ [75]

$$\omega_e = \pi \left[ 2 \int_0^a \left( 2 \int_x^a \gamma u^3 du \right)^{-1/2} dx \right]^{-1} = \frac{\Gamma^2(3/4)}{\sqrt{\pi}} a \sqrt{\gamma} = 0.8472 a \sqrt{\gamma} \quad (2.43)$$

Trong đó  $a$  là giá trị ban đầu của  $x(t)$ . Sử dụng phương pháp tuyến tính hóa tương đương, ta thay thế (2.42) bằng phương trình tuyến tính tương đương

$$\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.44)$$

trong đó hệ số tuyến tính hóa  $k$  là được chọn từ phương trình sai số bình quân tối thiểu

$$\langle (\gamma x^3 - k_c x)^2 \rangle \rightarrow \min_{k_c} \quad (2.45)$$

Trong (2.45) ký hiệu  $\langle \blacksquare \rangle$  là một toán tử được định nghĩa là giá trị trung bình của hàm trên miền của nó. Giá trị trung bình của một hàm  $f(x)$  trên khoảng  $[a, b]$  là

$$\langle f \rangle = \begin{cases} \text{Kỳ vọng: ngẫu nhiên} \\ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx : \text{tiền định} \end{cases} \quad (2.46)$$

Giải (2.45) sử dụng (2.44) ta có

$$k_c = \gamma \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle} = \gamma \frac{\langle a^4 \cos^4(\sqrt{kt}) \rangle}{\langle a^2 \cos^2(\sqrt{kt}) \rangle} = \frac{3}{4} \gamma a^2 \quad (2.47)$$

Phương trình (2.44), (2.47) cho phép thu được tần số xấp xỉ của dao động phi tuyến ban đầu (2.42)

$$\omega_c = \sqrt{k_c} = a\sqrt{3\gamma}/2 = 0.866a\sqrt{\gamma} \quad (2.48)$$

Tiếp theo, chúng ta xem xét thay thế lượt về  $k_c x$  bằng  $\gamma_1 x^3$  trong đó  $\gamma_1$  được tìm từ sai số bình phương tối thiểu

$$\langle (k_c x - \gamma_1 x^3)^2 \rangle \rightarrow \min_{\gamma_1} \quad (2.49)$$

$$\gamma_1 = k_c \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^6 \rangle} \quad (2.50)$$

Và từ (2.47) ta có

$$\gamma_1 = \frac{\langle x^4 \rangle^2}{\langle x^2 \rangle \langle x^6 \rangle} \gamma = \frac{\langle a^4 \cos^4(\sqrt{kt}) \rangle^2}{\langle a^2 \cos^2(\sqrt{kt}) \rangle \langle a^6 \cos^6(\sqrt{kt}) \rangle} \gamma = \frac{9}{10} \gamma \quad (2.51)$$

Vì vậy, phương trình phi tuyến trả về tương ứng

$$\ddot{x} + \frac{9}{10} \gamma x^3 = 0 \quad (2.52)$$

Phương trình sau đó được thay thế bằng phương trình tuyến tính tương đương (2.44) với hệ số tuyến tính hóa

$$k_{rc} = \frac{9}{10} \gamma \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle} = \frac{9}{10} \gamma \frac{3}{4} a^2 = \frac{27}{40} \gamma a^2 \quad (2.53)$$

Do đó, sử dụng kỹ thuật đối ngẫu, ta thu được hai hệ số tuyến tính hóa  $k_c, k_{rc}$  và phương trình tuyến tính tương đương tương ứng

$$\ddot{x} + \bar{k}x = 0 \quad (2.54)$$

trong đó,  $\bar{k}$  thu được từ trung bình cộng của (2.47) và (2.53)

$$\bar{k} = \frac{1}{2} (k_c + k_{rc}) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} + \frac{27}{40} \right) \gamma a^2 = \frac{57}{80} \gamma a^2 \quad (2.55)$$

Do đó, tần số xấp xỉ tương ứng thu được bằng phép đối ngẫu là

$$\bar{\omega} = \sqrt{\bar{k}} = \sqrt{\frac{57}{80} \gamma a^2} = 0,8441 a \sqrt{\gamma} \quad (2.56)$$

Có thể thấy rằng  $\bar{\omega}$  từ (2.56) gần hơn nhiều với tần số chính xác  $\omega_e$  (2.43) so với  $\omega_c$  (2.48) thu được bởi tuyến tính hóa tương đương thông thường, và sai số tuyệt đối tương ứng là 0,366% và 2,22%. Với tiêu chuẩn tuyến tính hóa tương đương thông thường cho thấy trung bình bình phương là đối tượng có thể xem xét điều chỉnh để cải thiện sai số khi tính toán theo tiêu chuẩn tuyến tính hóa tương đương thông so với tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số.

Hai ví dụ đơn giản được đưa ra ở trên cho thấy một cái nhìn sâu sắc về tính hai mặt của các quá trình thay thế lượt đi và lượt về riêng biệt. Để chứng minh tính bổ sung lẫn nhau của chúng, tiếp theo chúng ta sẽ xem xét sự thay thế tương đương kép liên quan đến quá trình hai chiều [94], [126], [127]. Sự thay thế này cho thấy tổng trọng số của các sai số thay thế bình phương trung bình (2.41) là được tối thiểu với  $k_d$  và  $\lambda_d$ . Về mặt toán học, nó được biểu diễn bởi công thức sau

$$\begin{aligned} e_{wd}^2 &\equiv (1-p)\langle e_{df}^2 \rangle + p\langle e_{dr}^2 \rangle \\ &= (1-p)\langle (A - k_d B)^2 \rangle + p\langle (k_d B - \lambda_d A)^2 \rangle \rightarrow \min_{k_d, \lambda_d} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Trong (2.57),  $p$  và  $1-p$  là trọng số thỏa mãn điều kiện:

$$0 \leq p \leq 1 \quad (2.58)$$

Cần lưu ý rằng cách thay thế hai chiều sử dụng tổng có trọng số để kết hợp hai hàm mục tiêu, cụ thể là sai số thay thế bình phương trung bình lượt đi và lượt về, thành một hàm mục tiêu tổng hợp vô hướng. Nếu tất cả các hệ số trọng số  $p$  và  $1-p$

đều dương, thì cực tiểu (2.57) cung cấp một điều kiện đủ để tối ưu Pareto, nghĩa là cực tiểu của (2.57) luôn là Pareto tối ưu [71]. Điều kiện tối thiểu chung áp dụng cho tiêu chuẩn (2.57) như sau

$$\frac{\partial e_{wd}^2}{\partial k_d} = 0; \frac{\partial e_{wd}^2}{\partial \lambda_d} = 0 \quad (2.59)$$

Với trọng số  $p$ , hệ số tuyến tính hóa tương đương  $k_d$  and hệ số trả về  $\lambda_d$  được tính từ điều kiện tối thiểu (2.59) tương ứng là,

$$k_d = \frac{1 - p \langle AB \rangle}{1 - pr^2 \langle B^2 \rangle} \quad (2.60)$$

$$\lambda_d = \frac{r^2(1 - p)}{1 - pr^2} \quad (2.61)$$

trong đó,

$$r^2 = \frac{\langle AB \rangle^2}{\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle} \quad (2.62)$$

Từ  $r^2$  theo (2.62) chính xác là hệ số tương quan bình phương không thứ nguyên được sử dụng để đo tính phi tuyến giữa hai hàm A và B [128]. Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$0 \leq r^2 \leq 1 \quad (2.63)$$

Tính phi tuyến được gọi là yếu khi  $r^2 \rightarrow 1$ , và ngược lại. Khi  $r^2 = 1$ , thì  $A = k_d B$ ,  $k_d = const$ , A và B là phụ thuộc tuyến tính, tính phi tuyến là yếu nhất. khi  $r^2 = 0$ , thì  $\langle AB \rangle = 0$ , A và B là không tương quan, tính phi tuyến là mạnh nhất. Có thể thấy rõ ràng từ (2.60), (2.61) rằng hệ số tương quan bình phương không thứ nguyên  $r^2$  xuất hiện tự nhiên trong các công thức xác định hệ số tuyến tính hóa và hệ số trả về tương đương  $k_d$  và  $\lambda_d$ .

Trong tính toán ở trên, ba giả thiết cần được thỏa mãn

$$\langle A^2 \rangle > 0, \langle B^2 \rangle > 0, pr^2 \neq 1 \quad (2.64)$$

Với ý tưởng trong mục 2.4.1, việc xem xét hai quá trình thay thế một cách riêng rẽ như trong (2.32) và (2.34) dẫn tới đề xuất thử nghiệm một hệ số tuyến tính hóa  $k_{tb}$  như biểu diễn ở (2.38) là trung bình đại số của các hàm phi tuyến gốc và hàm phi tuyến lượt về khi tuyến tính hóa. Cách xác định  $k_{tb}$  như vậy có thể phù hợp với bài toán thay thế tương đương hàm phi tuyến A bằng một hàm tuyến tính của B,



nhưng không thực sự phù hợp với phương pháp tuyến tính hóa tương đương vốn xuất phát từ sai số phương trình. Do đó, Anh [126] đã đề nghị việc kết hợp hai quá trình thay thế này trong cùng một tiêu chuẩn cực tiểu trung bình bình phương (2.39) trong đó đảm bảo các quá trình thay thế cũng là các sai số phương trình. Tuy nhiên, việc xây dựng biểu thức hiện cho tiêu chuẩn được đề xuất (2.39) có thể nói là khá khó khăn vì các hệ số  $k, \lambda$  phụ thuộc vào nhiều đại lượng chưa biết là các trọng số  $p_1, p_2$  và cần phải nghiên cứu một cách có hệ thống về các quá trình thay thế đối ngẫu.

Dựa trên cách thay thế tương đương đối ngẫu, và từ lý luận (2.57) ta có thể kết luận một tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số cụ thể như sau:

$$S_d = (1 - p)\langle(A - k_d B)^2\rangle + p\langle(k_d B - \lambda_d A)^2\rangle \rightarrow \min_{k_d, \lambda_d} \quad (2.65)$$

trong đó sử dụng chỉ số  $(\cdot)_d$  ký hiệu cho hệ số tuyến tính hóa, hệ số trở về xác định theo tiêu chuẩn (2.65),  $p$  là trọng số chuẩn hóa có đặc điểm trong (2.58)

$$0 \leq p \leq 1 \quad (2.66)$$

Tiêu chuẩn (2.65) cho thấy quá trình thay thế lượt đi có ảnh hưởng lớn hơn đối với  $S_{ts}$  so với quá trình thay thế lượt về khi  $p$  nằm trong khoảng  $[0, 1/2]$ , và ngược lại khi  $p$  nằm trong khoảng  $[1/2, 1]$ . Khi  $p = 1/2$  thì (2.65) vai trò lượt đi và lượt về như nhau.

Tiêu chuẩn (2.65) gọi là **tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số (weighted dual criterion - WDC)**, được phát biểu là trung bình trọng số của trung bình bình phương của các quá trình thay thế lượt đi và lượt về là nhỏ nhất theo các hệ số tuyến tính hóa  $k_d$  và hệ số trở về  $\lambda_d$  được cho bởi (2.60), (2.61) và  $r^2$  được định nghĩa và cho bởi (2.62) với đặc điểm từ (2.63) và điều kiện cần thỏa mãn từ (2.64).

Tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số WDC là một công cụ hữu hiệu trong việc tính toán và giải quyết lớp một số các bài toán phi tuyến ngẫu nhiên cải thiện được sai số từ những phương pháp số dư trọng số cũng như các phương pháp gần đúng khác. Việc áp dụng với hệ động lực tiền định phi tuyến cũng là một hướng nghiên cứu cần xem xét khi việc lựa chọn trọng số cũng như hệ số tương quan để đo mức độ phi tuyến giữa số hạng phi tuyến ban đầu và số hạng tuyến tính hóa tương đương cũng là một vấn đề cần quan tâm trong tiêu chuẩn WDC.

## 2.5 Kết luận chương 2

1. Nội dung chương 2 đã trình bày phương tuyến tính hóa tương đương và những phiên bản của nó đồng thời trình bày đầy đủ hình thành từ ý tưởng đến tiêu chuẩn đối ngẫu và tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số của tuyến tuyến hóa tương đương đang được phát triển, nghiên cứu và áp dụng trong một số lĩnh vực.

2. Phương pháp tuyến tính hóa tương đương là làm thế nào để tìm ra các hệ số tuyến tính hóa cho một hệ phi tuyến đã cho. Mục tiêu của những cải tiến và phát triển đối với phương pháp tuyến tính hóa tương đương là xác định các hệ số tuyến tính hóa để có thể thu được trung bình bình phương hay phương sai xấp xỉ gần với nghiệm chính xác nhất. Việc phát triển tính chất trực giao trong phép lấy trung bình áp dụng trong tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số cho bài toán ổn định sẽ được khảo sát chi tiết trong Chương 3, đồng thời đề xuất phép lấy trung bình trọng số và việc mở rộng, phát triển tính chất trực giao từ phương pháp Galerkin với trung bình cục bộ có trọng số.

3. Trong lý thuyết về dao động, phương pháp tuyến tính hóa tương đương thay thế hệ phi tuyến bằng phương pháp tuyến tính tương đương là phương pháp phổ biến vì nó bảo tồn một số tính chất cần thiết của hệ phi tuyến gốc. Độ chính xác của các hệ số tuyến tính hóa có thể được cải thiện bằng cách sử dụng phương pháp đối ngẫu kết hợp hai thay thế lượt đi và lượt về trong một tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số. Trong Chương 4, tác giả sẽ trình bày việc phát triển tính chất trực giao trong tuyến tính hóa tương đương đối ngẫu với một trọng số cho các hệ động lực tiền định phi tuyến đồng thời khảo sát và áp dụng tuyến tính hóa tương đương đối ngẫu với trọng số đã chọn để phân tích tần số dao động tự do phi tuyến và một số trường hợp điển hình và đánh giá hiệu quả của phương pháp đề xuất.

## CHƯƠNG 3. PHÁT TRIỂN TÍNH CHẤT TRỰC GIAO ÁP DỤNG TRONG PHÂN TÍCH BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH

### 3.1 Giới thiệu

Từ phân tích và những khái niệm cũng như chi tiết về phương pháp Galerkin và tính trực giao trong phương pháp xấp xỉ số dư trọng số ở Chương 1 và tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số của phương pháp tuyến tính hóa tương đương ở Chương 2, chương này áp dụng tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số cho bài toán ổn định đàn hồi và đánh giá kết quả so sánh với kết quả chính xác, kết quả từ phương pháp Galerkin. Phần tiếp theo, tác giả đề cập đến việc phát triển tính chất trực giao trong một phép lấy trung bình cục bộ có trọng số, liên quan đến phương pháp Galerkin. Ứng dụng vào một số bài toán điển hình về ổn định đàn hồi của cột chỉ ra rằng ý tưởng mới này có thể cải thiện đáng kể độ chính xác của nghiệm xấp xỉ bậc nhất của phương pháp Galerkin. Trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật, sự mất ổn định là một vấn đề quan trọng cần được xem xét trong thiết kế kết cấu, đặc biệt là khi kết cấu mảnh và trọng lượng nhẹ.

Chương này được tổ chức như sau:

Mục 3.2 Áp dụng tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số cho bài toán ổn định đàn hồi, Chọn trọng số  $p$  được trình bày trong Mục 3.3 và Mục 3.4 trình bày phát triển tính chất trực giao thông qua phép lấy trung bình cục bộ có trọng số. Sau đó, sự kết hợp của phép lấy trung bình cục bộ có trọng số với phương pháp Galerkin được đưa ra trong Mục 3.5. Độ chính xác của phương pháp Galerkin với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số và nghiệm xấp xỉ của nó được khảo sát trong Mục 3.6 với ứng dụng xác định tải trọng tới hạn của cột Euler đàn hồi tiết diện không đổi và với các điều kiện biên điển hình khác nhau.

Ngoài ra, việc áp dụng phương pháp Galerkin với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số đối với các cột có tiết diện thay đổi được trình bày trong Mục 3.7, trong đó phát triển tính chất trực giao trong phương pháp bình phương tối thiểu được triển khai. Cuối cùng, thảo luận về các kết quả phát triển tính chất trực giao được tóm tắt trong Mục 3.8, tiếp theo là phần kết luận Chương 3 trong 3.9.

## 3.2 Áp dụng tiêu chuẩn đối ngẫu cho bài toán ổn định đàn hồi

### 3.2.1 Thanh hai đầu liên kết bản lề đơn giản (P-P)

#### 3.2.1.1. Phương pháp Galerkin

$$\mathcal{L}(u) = 0; \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.1)$$

trong đó  $\mathcal{L}$  là toán tử vi phân, trên miền  $u$ , là hàm của biến độc lập  $x$ , chịu một số điều kiện biên. Chúng ta tìm nghiệm xấp xỉ,  $u_{ap}$ , dưới dạng

$$u_{ap} = \sum_{i=1}^N a_i f_i(x) \quad (3.2)$$

Với  $f_i(x)$  là một chuỗi các hàm nhất định, mỗi hàm thỏa mãn tất cả các điều kiện biên, nhưng không có điều kiện nào trong số chúng, thỏa mãn phương trình vi phân, những không thỏa mãn phương trình vi phân và  $a_i$  là các hệ số không xác định. Thay thế (3.1) vào (3.2) ta có phương trình sai số hoặc phần dư  $e(x)$ :

$$e(x) = \mathcal{L}(u_{ap}) \quad (3.3)$$

hay

$$e(x) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^N a_i f_i(x)\right) \quad (3.4)$$

Tiếp theo, chúng ta phải chọn các bậc tự do tổng quát,  $a_i$ , sao cho sai số là tối thiểu. Cuối cùng, chúng ta thực hiện sai số trực giao, trong khoảng  $0 \leq x \leq l$ , với một số hàm trọng số. Trong phương pháp Galerkin, các hàm trọng số là các hàm được sử dụng trong chuỗi,  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Quá trình này dẫn đến  $N$  tích phân, được gọi là tích phân Galerkin:

$$\int_0^l \left[ \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^N a_i f_i(x)\right) f_k(x) \right] dx = 0; \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

Phương trình (3.5) thể hiện **tính trực giao** giữa nghiệm xấp xỉ (hàm thử) từ phương trình (3.2) và phần dư (3.4) Sau khi thực hiện các thao tác được xác định, chúng ta có một hệ  $N$  phương trình với  $N$  ẩn số,  $a_i$ . Nghiệm của hệ này được thay thế trong (3.2) để đưa ra nghiệm xấp xỉ cho bài toán. Đối với các điều kiện biên có liên quan, phương pháp này khi được phát triển và áp dụng ban đầu bởi Galerkin, đòi hỏi

các hàm được chọn phải thỏa mãn tất cả các điều kiện biên (đây là yêu cầu trong một số nghiên cứu thể hiện trong [13]).

Áp dụng phương pháp Galerkin cho bài toán Euler:

$$\mathcal{L}(y) = EIy''(x) + Py(x) = 0; \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.6)$$

Để đơn giản, lấy  $EI = 1$ , hàm thử được chọn là  $f_1(x) = x(l-x)$ , thỏa mãn các điều kiện biên  $y(0) = y(l) = 0$ , hệ (3.5) dẫn đến:

$$\int_0^l (f_1''(x) + Pf_1(x)) \cdot f_1(x) dx = 0 \quad (3.7)$$

Từ (3.7), thể hiện rõ **tính trực giao** giữa hàm thử  $f_1$  và phần dư, ta thu được tải trọng xấp xỉ Galerkin với các hàm  $f_1$  khác nhau, xem bảng *Bảng 3.1*

*Bảng 3.1.* Lực tới hạn  $P_{cr}^G$  và sai số với các hàm  $f_i$  khác nhau

TT	Các hàm $f_i$	Nghiệm Galerkin	Sai số với nghiệm Euler (%)
1	$x(l-x)$	10	1,321180
2	$x(l-x)^2$	14	41,849660
3	$x^2(l-x)$	14	41,849660
4	$x^2(l-x)^2$	12	21,585420
5	$x(l-x)+x^2(l-x)$	10.5	6,387240
6	$x(l-x)+x^2(l-x)^2$	9,87097	0,013814

### 3.2.1.2. Tiêu chuẩn đối ngẫu

Theo phương trình (3.6), ta thực hiện thay thế tương đương

$$y''(x) \sim k_{ts} \cdot y(x) \quad (3.8)$$

Sử dụng đối ngẫu có trọng số từ (2.65), ta có

$$S_d = (1-p) \langle (y''(x) - k_d y(x))^2 \rangle + p \langle (k_d y(x) - \lambda_d y''(x))^2 \rangle \quad (3.9)$$

$$\rightarrow \min_{k_d, \lambda_d}$$

Với kết quả từ phương trình (2.60), (2.61) và (2.62) ta có:

$$k_d = \frac{(1-p) \langle y''(x) y(x) \rangle}{1 - pr^2 \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.10)$$

$$r^2 = \frac{\langle y''(x) y(x) \rangle^2}{\langle (y'')^2(x) \rangle \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.11)$$

Thay thế (3.8), (3.10) vào phương trình (3.6) cho ta tải trọng tới hạn  $P_{cr}^{dn}$  thu được từ tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số:

$$P_{cr}^{dn} = -k_d = -\frac{(1-p) \langle y''(x) y(x) \rangle}{1 - pr^2 \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.12)$$

Chọn hàm  $y(x) = x(l - x)$  và thay vào (3.12) và  $r^2$  được định nghĩa và cho bởi (2.62) với đặc điểm từ (2.63) và điều kiện cần thỏa mãn từ (2.64) ta chọn trọng số có dạng  $p = (1 - r)^t \cdot r^v$  để khảo sát, đánh giá kết quả cho các lực tới hạn tương ứng  $P_{cr}^{dn}$ . Tác giả thực hiện việc khảo sát với các giá trị của  $t, v$  và tính toán kết quả cho trong *Bảng 3.2*. Ta tìm thấy rằng trường hợp  $t = 1, v = 2$  cho sai số nhỏ nhất (0,016104%), so sánh với (1,32118%) của nghiệm Galerkin và giá trị của  $t$  and  $v$  tăng thì tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số tiến đến nghiệm của Galerkin.

*Bảng 3.2.* Lực tới hạn  $P_{cr}^{dn}$  và sai số với  $y(x) = x(l - x)$

$t$	$v$	$r$	$p$	$P_{cr}^{dn}$	Sai số với $P_{cr}^E$ (%)
1	0		0,087129080	9,84341568	-0,265347%
1	1		0,079537600	9,85802719	-0,117302%
<b>1</b>	<b>2</b>		<b>0,072607600</b>	<b>9,87119382</b>	<b>0,016104%</b>
2	2		0,006326230	9,98940041	1,213787%
2	1		0,006930040	9,98838285	1,203477%
3	1		0,000603808	9,99899315	1,310982%
3	2		0,000551198	9,99908091	1,311871%
2	3	0,91287092	0,005775030	9,99032840	1,223190%
1	3		0,066281300	9,88307270	0,136462%
3	3		0,000503173	9,99916103	1,312683%
4	3		0,000043841	9,99992693	1,320443%
3	4		0,000459332	9,99923415	1,313424%
4	4		4,00212E-05	9,99993330	1,320508%
5	5		3,18319E-06	9,99999469	1,321130%
6	6		2,53183E-07	9,99999958	1,321179%
10	10		1,01327E-11	10,00000000	1,321184%

*Bảng 3.3.* Lực tới hạn  $P_{cr}^{dn}$  và sai số với  $y(x)$  khác nhau

TT	$y(x)$	$r$	$p$	$P_{cr}^{dn}$	$P_{cr}^E$	$t; v$	$P_{cr}^G$
1	$x^2(l - x)$	0,68313	0,316869	11,22346	9,8696	1; 0	14,0000
			0,216463	12,20212	9,8696	1; 1	
2	$x^2(l - x)^2$	0,53452	0,132994	10,81502	9,8696	1; 2	12,0000
			0,115814	10,97333	9,8696	2; 1	
			0,465478	7,39818	9,8696	1; 0	
3	$x(l - x) + x^2(l - x)$	0,83666	0,163339	9,91905	9,8696	1; 0	10,5000
			0,136660	10,02398	9,8696	1; 1	
4	$x(l - x) + x^2(l - x)^2$	0,99942	0,000576	9,87096	9,8696	1; 0	9,87097
			0,000575	9,87096	9,8696	1; 1	
			0,000575	9,87096	9,8696	1; 2	

Tính toán tương tự với các hàm khác nhau của  $y(x)$  được cho trong *Bảng 3.3*. Từ kết quả của bảng này, ta quan sát thấy rằng kỹ thuật đối ngẫu có trọng số của tuyến tính hóa tương đương cho sai số nhỏ hơn so với nghiệm của phương pháp Galerkin.

Nó cũng thể hiện rằng giá trị của  $t, v$  có thể được chọn để cho nghiệm xấp xỉ tiếp cận gần hơn với nghiệm chính xác.

### 3.2.2 Thanh hai đầu liên kết ngàm (C-C)

Theo [15] ta có phương trình

$$\mathcal{L}(y) = EIy'' + Py - M_0 = 0 \quad (3.13)$$

Điều kiện biên:  $y = 0$  khi  $x = 0$  và  $x = l$ ;  $y' = 0$  khi  $x = 0$  và  $x = l$

Nghiệm chính xác của phương trình (3.13) theo [15]

$$y = \frac{M_0}{P} \left( 1 - \cos \frac{n\pi}{l} x \right)$$

Tải trọng tới hạn trong trường hợp này theo công thức (1.2)

$$P_{cr}^E = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = 39,4784 \frac{EI}{l^2}$$

#### 3.2.2.1. Phương pháp Galerkin

Từ công thức (3.5), với  $EI = 1$  và chọn hàm  $f_k$  thỏa mãn điều kiện biên ta có

$$\int_0^l (f_k''(x) + Pf_k(x) - M_0) \cdot f_k(x) dx = 0 \quad (3.14)$$

Phương trình (3.14) thể hiện **tính trực giao** giữa hàm thử  $f_k$  và phần dư, giải phương trình này ta sẽ thu được giá trị của lực tới hạn  $P_{cr}^G$  tương ứng với các hàm  $f_k$ . Cụ thể với hàm  $f_k = 2M_0(l-x)^2x^2(3l^2 + lx - x^2)/9l^2$  thỏa mãn điều kiện biên, ta có:

$$P_{cr}^G = 41,3369EI/l^2$$

#### 3.2.2.2. Tiêu chuẩn đối ngẫu

Tuyến tính hóa tương đương phương trình (3.13) bằng cách thay thế  $EIy'' \sim k_2y$  và  $M_0 \sim k_0y$ .

Với  $EI = 1$ , sử dụng đối ngẫu có trọng số từ (2.65), ta có  $k_2, k_0$  được tìm từ phương trình

$$S_{d2} = (1 - p_2) \langle (y''(x) - k_2y(x))^2 \rangle + p_2 \langle (k_2y(x) - \lambda_2y''(x))^2 \rangle \rightarrow \min_{k_2, \lambda_2} \quad (3.15)$$

$$S_{d0} = (1 - p_0) \langle (M_0(x) - k_0 y(x))^2 \rangle + p_0 \langle (k_0 y(x) - \lambda_0 M_0(x))^2 \rangle \rightarrow \min_{k_0, \lambda_0} \quad (3.16)$$

Với kết quả từ phương trình (2.60), (2.61) và (2.62) có:

$$k_2 = \frac{(1 - p_2) \langle y''(x) y(x) \rangle}{1 - p_2 r_2^2 \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.17)$$

$$r_2^2 = \frac{\langle y''(x) y(x) \rangle^2}{\langle y''^2(x) \rangle \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.18)$$

$$k_0 = \frac{(1 - p_0) \langle M_0(x) y(x) \rangle}{1 - p_0 r_0^2 \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.19)$$

$$r_0^2 = \frac{\langle M_0(x) y(x) \rangle^2}{\langle M_0^2(x) \rangle \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.20)$$

Trọng số  $p$  được giả thiết có dạng:

$$p = \frac{(1 - r^2) \cdot r^2}{2} \quad (3.21)$$

Tính trực giao từ phương trình (3.14) ta thấy **tính trực giao** đã được phát triển gắn với trọng số  $p_0$ ,  $p_2$  thể hiện trong phương trình (3.15), (3.16). Thay  $k_2, k_0$  từ phương trình (3.17), (3.19) vào phương trình (3.13) ta sẽ thu được lực tới hạn theo phương pháp tuyến tính hóa đối ngẫu từ phương trình

$$P_{cr}^{dn} = k_0 - k_2 \quad (3.22)$$

Xét hàm các hàm số thỏa mãn điều kiện biên:

$$y_{app} = \frac{2M_0(l-x)^2 x^2 (3l^2 + lx - x^2)}{9l^2}$$

Áp dụng phương pháp tuyến tính hóa đối ngẫu và thay vào phương trình (3.22):

$$P_{cr}^{dn} = 39,3943 EI/l^2$$

### 3.2.3 Thanh một đầu liên kết ngàm, một đầu tự do (C-F)

Phương trình biến dạng:  $EIy'' + Py = P\delta$  hay  $y'' + k^2 y = k^2 \delta$

Điều kiện biên: Tại  $x = 0$ , ta có  $y = 0$  và  $y' = 0$ ; tại  $x = l$ , ta có  $y = \delta$

Nghiệm chính xác theo phương trình:  $y = \delta \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \right)$

Lực tới hạn theo (1.3) ta có:

$$P_{cr}^E = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} = \frac{2,4674 EI}{l^2}$$



### 3.2.3.1. Phương pháp Galerkin

Áp dụng công thức (3.5), với  $EI = 1$  và chọn một hàm  $f_k$  thỏa mãn điều kiện biên ta có

$$\int_0^l (f_k''(x) + P(f_k(x) - \delta)) \cdot f_k(x) dx = 0 \quad (3.23)$$

Giải phương trình (3.23) ta sẽ thu được giá trị của lực tới hạn  $P_{cr}^G$  tương ứng với các hàm  $f_k$ . Ví dụ với hàm  $f_k = \frac{\delta}{3l^4} x^2(6l^2 - 4lx + x^2)$  thỏa mãn điều kiện biên

$$P_{cr}^G = 1,33EI/l^2$$

### 3.2.3.2 Tiêu chuẩn đối ngẫu

Tuyến tính hóa tương đương phương trình biến dạng bằng cách thay thế:  $y''(x) \sim k_2 \cdot y(x)$  và  $\delta \sim k_0 \cdot y(x)$

Với  $EI = 1$ , sử dụng đối ngẫu có trọng số từ (2.65), ta có  $k_2, k_0$  được tìm từ phương trình

$$S_{d2} = (1 - p_2) \langle (y''(x) - k_2 y(x))^2 \rangle + p_2 \langle (k_2 y(x) - \lambda_2 y''(x))^2 \rangle \rightarrow \min_{k_2, \lambda_2} \quad (3.24)$$

$$S_{d0} = (1 - p_0) \langle (\delta(x) - k_0 y(x))^2 \rangle + p_0 \langle (k_0 y(x) - \lambda_0 \delta(x))^2 \rangle \rightarrow \min_{k_0, \lambda_0} \quad (3.25)$$

Với kết quả từ phương trình (2.60), (2.61) và (2.62) ta có:

$$k_2 = \frac{(1 - p_2) \langle y''(x) y(x) \rangle}{1 - p_2 r_2^2 \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.26)$$

$$r_2^2 = \frac{\langle y''(x) y(x) \rangle^2}{\langle y''^2(x) \rangle \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.27)$$

$$k_0 = \frac{(1 - p_0) \langle \delta(x) y(x) \rangle}{1 - p_0 r_0^2 \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.28)$$

$$r_0^2 = \frac{\langle \delta(x) y(x) \rangle^2}{\langle \delta^2(x) \rangle \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.29)$$

Trọng số  $p$  vẫn được giả thiết có dạng (3.21)

Thay  $k_2, k_0$  từ phương trình (3.26), (3.28) vào phương trình biến dạng ở trên ta sẽ thu được lực tới hạn theo phương pháp tuyến tính hóa đối ngẫu từ phương trình

$$P_{cr}^{dn} = -\frac{k_2}{1 - k_0} \quad (3.30)$$

Xét hàm các hàm số thỏa mãn điều kiện biên:

$$y_{app} = \frac{\delta}{3l^4} x^2 (6l^2 - 4lx + x^2)$$

Áp dụng phương pháp tuyến tính hóa đối ngẫu và thay  $y_{app}$  vào phương trình (3.30) ta có:

$$P_{cr}^{dn} = 1,5037 EI/l^2$$

### 3.2.4 Thanh một đầu liên kết ngàm, một đầu liên kết bản lề (C-P)

Theo [15] ta có phương trình

$$\mathcal{L}(y) = EIy'' + Py - \frac{M_0}{l}x = 0 \quad (3.31)$$

Điều kiện biên: Tại  $x = 0$ , ta có  $y = 0$ ; tại  $x = l$ , ta có  $y = 0, y' = 0$

Nghiệm chính xác từ [15] có dạng:

$$y = \frac{M_0}{P} \left( \frac{x}{l} + 1.0245 \sin \left( 4.4934 \frac{x}{l} \right) \right)$$

Lực tới hạn theo phương trình (1.4), ta có

$$P_{cr}^E = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2} = \frac{20,1906 EI}{l^2}$$

#### 3.2.4.1. Phương pháp Galerkin

Áp dụng công thức (3.5), với  $EI = 1$  và chọn một hàm  $f_k$  thỏa mãn điều kiện biên ta có

$$\int_0^l \left( f_k''(x) + P f_k(x) - \frac{M_0}{l}x \right) \cdot f_k(x) dx = 0 \quad (3.32)$$

Giải phương trình (3.32) ta sẽ thu được giá trị của lực tới hạn  $P_{cr}^G$  tương ứng với các hàm  $f_k$ . Ví dụ với hàm  $f_k = \frac{M_0}{4EI l^2} x^2 (3l - 2x)(l - x)$  thỏa mãn điều kiện biên, ta có  $P_{cr}^G = 22,4211 EI/l^2$ .

#### 3.2.4.2. Tiêu chuẩn đối ngẫu

Tuyến tính hóa tương đương phương trình (3.31) bằng cách thay thế:  $y''(x) \sim k_2 \cdot y(x)$  và  $M_0 x/l \sim k_0 \cdot y(x)$

Với  $EI = 1$ , sử dụng đối ngẫu có trọng số từ (2.65), ta có  $k_2, k_0$  được tìm từ phương trình

$$S_{d2} = (1 - p_2) \langle (y''(x) - k_2 y(x))^2 \rangle + p_2 \langle (k_2 y(x) - \lambda_2 y''(x))^2 \rangle \rightarrow \min_{k_2, \lambda_2} \quad (3.33)$$

$$S_{d0} = (1 - p_0) \langle (xM_0(x)/l - k_0 y(x))^2 \rangle + p_0 \langle (k_0 y(x) - \lambda_0 xM_0(x)/l)^2 \rangle \rightarrow \min_{k_0, \lambda_0} \quad (3.34)$$

Với kết quả từ phương trình (2.60), (2.61) và (2.62) ta có:

$$k_2 = \frac{(1 - p_2) \langle y''(x) y(x) \rangle}{1 - p_2 r_2^2 \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.35)$$

$$r_2^2 = \frac{\langle y''(x) y(x) \rangle^2}{\langle y''^2(x) \rangle \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.36)$$

$$k_0 = \frac{(1 - p_0) \langle (xM_0(x)/l) y(x) \rangle}{1 - p_0 r_0^2 \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.37)$$

$$r_0^2 = \frac{\langle (xM_0(x)/l) y(x) \rangle^2}{\langle (xM_0(x)/l)^2 \rangle \langle y^2(x) \rangle} \quad (3.38)$$

Trọng số  $p$  được giả thiết có dạng như (3.21)

Thay  $k_2, k_0$  từ phương trình (3.35), (3.37) vào phương trình (3.31) ta sẽ thu được lực tới hạn theo phương pháp tuyến tính hóa đối ngẫu từ phương trình

$$P_{cr}^{dn} = k_0 - k_2 \quad (3.39)$$

Xét hàm số thỏa mãn điều kiện biên:

$$y_{app} = \frac{M_0}{4EI l^2} x^2 \left( \frac{3l}{2} - 2x \right) (l - x)$$

Áp dụng phương pháp tuyến tính hóa đối ngẫu và thay  $y_{app}$  vào (3.39) ta có:

$$P_{cr}^{dn} = 21,5968 EI/l^2 \quad (3.40)$$

### 3.3 Chọn trọng số $p$ với bài toán ổn định đàn hồi

Phân trên, chúng ta đã khảo sát 4 bài toán ổn định đàn hồi với trọng số được chọn trong bài toán 1 có dạng  $p = (1 - r)^t \cdot r^v$  và vẫn thỏa mãn các điều kiện (2.64), (2.66), và bài toán 2, 3, 4 có dạng (3.21). Mục này tác giả sẽ tiếp tục khảo sát áp dụng tuyến tính hóa đối ngẫu có trọng số  $p$  cho bài toán (C-P) được cho ở Hình 1.6d, với lực tới hạn Euler được cho ở (1.4).

### 3.3.1 Phương pháp Galerkin

Kết quả tính toán lực tới hạn theo phương pháp Galerkin với 7 hàm  $f_j(x)$  được cho trong Bảng 1.2. Qua đó, ta nhận thấy với các hàm thử  $f_j(x)$  khác nhau, sai số của lực tới hạn tính theo phương pháp Galerkin thay đổi từ 4,2595% đến 134,0520%.

### 3.3.2 Tiêu chuẩn đối ngẫu

Các hệ số tuyến tính được cho từ phương trình (3.35) đến (3.38). Với  $r^2$  được định nghĩa và cho bởi (2.62) với đặc điểm từ (2.63) và điều kiện cân thỏa mãn từ (2.64) thì trọng số  $p = p(r)$ , là hàm số phụ thuộc vào  $r$ . Từ (2.57) ta có thể quan sát thấy, khi  $A$  rất gần với  $B$  thì thay thế đầu tiên sẽ đóng vai trò quyết định. Vì vậy, tác giả đề xuất điều kiện ràng buộc của hàm  $p(r)$  thỏa mãn với  $r = 1$ ,  $p(1) = 0$ . Biểu thức đơn giản của hàm trọng số  $p$  có dạng

$$p = (1 - r^t)^u \cdot r^v \quad (3.41)$$

trong đó  $t, u, v$  là các hằng số nguyên dương. Như vậy ta xác định hệ số tuyến tính hóa tương đương theo (2.60) với  $r$  và  $p$  xác định từ (2.62) và (3.41).

Ta tiến hành khảo sát với một số hàm của  $p_i(r)$ ,  $i = \overline{1 - 5}$  như sau:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{(1 - r^2) \cdot r^2}{2}; p_2 = \frac{(1 - r^2)^2 \cdot r^2}{2}; p_3 = \frac{(1 - r^2) \cdot r^3}{2}; p_4 \\ &= \frac{(1 - r^2) \cdot r^4}{2}; p_5 = \frac{(1 - r)^2 \cdot r^2}{2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Thay  $k_2, k_0$  từ phương trình (3.35), (3.37) vào phương trình (3.31) ta sẽ thu được lực tới hạn theo phương pháp tuyến tính hóa đối ngẫu từ phương trình (3.39)

Xét hàm số hàm số thỏa mãn điều kiện biên  $f_j$  (ví dụ  $f_3$ ) trong Bảng 1.2

$$f_3 = \frac{M_0}{4EI} x^2(3l - 2x)(l - x)$$

Áp dụng phương pháp tuyến tính hóa đối ngẫu và thay  $f_3$  vào phương trình (3.33) - (3.38) với các dạng khác nhau của hàm trọng số  $p_i(r)$  cho trong (3.45) ta có các giá trị của lực tới hạn  $P_{cr}^{dn}$  tính theo tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số được cho trong Bảng 3.4 với  $p_{i2}$ ,  $p_{i0}$  tính theo công thức (3.45) tương ứng với  $p_{d2}$ ,  $p_{d0}$  trong phương trình (3.33), (3.34) và  $k_{i2}$ ,  $k_{i0}$  trong phương trình (3.35), (3.37) tương ứng  $i = \overline{1 - 5}$  với từng dạng của  $p_i$  trong (3.45).

Bảng 3.4. Lực tới hạn  $P_{cr}^{dn}$  và sai số khi xét hàm  $f_3$  với các hàm trọng số  $p_i(r)$

$i$	$p_{i2}; p_{i0}$	$k_{i2}; k_{i0}$	$P_{cr}^{dn}$ và sai số (%)	$P_{cr}^G$ và sai số (%)
1	0,124145; 0,10680	-10,6745; 10,6586	<b>21,3330 (5,91297)</b>	
2	0,056938; 0,03302	-11,0621; 10,9371	21,9992 (9,22042)	<b>22,4211</b> (11,3147)
3	0,091341; 0,08876	-10,8674; 10,7295	21,5968 (7,22262)	
4	0,067206; 0,07377	-11,0048; 10,7870	21,7917 (8,19021)	
5	0,018898; 0,00984	-11,2689; 11,0187	22,2876 (10,6512)	

Bảng 3.5. Lực tới hạn  $P_{cr}^{dn}$  và sai số với các hàm  $f_j$  và các hàm trọng số  $p_i(r)$

$j$	$f_j$	$p_i$	$P_{cr}^{dn}$ và sai số (%)	$P_{cr}^G$ và sai số (%)
1	$f_1 = \frac{3M_0}{4EI}x^2(l-x)$	$p_1$	<b>19,8803 (-1,29959)</b>	<b>21,0000</b> (4,2595)
		$p_2$	20,4618 (1,58733)	
		$p_3$	20,2217(0,39551)	
		$p_4$	20,4509(1,53348)	
		$p_5$	20,8157(3,34441)	
2	$f_2 = \frac{3M_0}{4EI}x^3(l-x)$	$p_1$	<b>31,0252 (54,0319)</b>	<b>32,8000</b> (62,8434)
		$p_2$	31,7871 (57,8144)	
		$p_3$	31,6788 (57,2771)	
		$p_4$	32,0766 (59,2520)	
		$p_5$	32,4233 (60,9733)	
4	$f_4 = \frac{3M_0}{4EI}x^4(l-x)$	$p_1$	<b>44,5491 (121,174)</b>	<b>47,1429</b> (134,052)
		$p_2$	45,6020(126,402)	
		$p_3$	45,5307 (126,048)	
		$p_4$	45,9478 (128,119)	
		$p_5$	46,5097 (130,908)	
5	$f_5 = \frac{M_0}{10EI}x^2(7l^2 - 2lx - 2x^2)(l-x)$	$p_1$	<b>20,8242 (3,38678)</b>	<b>21,8042</b> (8,25201)
		$p_2$	21,4487(6,48699)	
		$p_3$	21,0456 (4,48593)	
		$p_4$	21,2132 (5,31816)	
		$p_5$	21,6940(7,70495)	
6	$f_6 = \frac{M_0}{4EI}x^4(3l-2x)(l-x)$	$p_1$	<b>31,4423(56,1026)</b>	<b>33,1190</b> (64,4274)
		$p_2$	32,3490(60,6042)	
		$p_3$	31,9289(58,5186)	
		$p_4$	32,2642 (60,1832)	
		$p_5$	32,8613(63,1479)	
7	$f_7 = \frac{M_0}{10EI}x(7l^3x^2 - 9x^3l^2 + 2x^5)$	$p_1$	<b>33,2967 (65,3092)</b>	<b>34,5291</b> (71,4279)
		$p_2$	34,1035 (69,3149)	
		$p_3$	33,5610 (66,6215)	
		$p_4$	33,7619 (67,6192)	
		$p_5$	34,3975 (70,7747)	

Như vậy theo Bảng 1.2, nghiệm Galerkin (số thứ tự 3) có sai số là 11,3147% trong khi theo Bảng 3.4 sai số của nghiệm đối ngẫu thấp nhất là 5,91297% và cao nhất là 10,6512%. Kết quả của số thứ tự 3 trong bảng Bảng 3.4 chính là kết quả từ phương trình (3.40).

Tính toán tương tự, áp dụng tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số với các hàm  $f_j$  với  $j = 1, 2, 4, 5, 6, 7$  trong Bảng 1.2 ta thu được kết quả tính toán lực tới hạn và sai số trong Bảng 3.5. Từ Bảng 3.4 và Bảng 3.5 cho thấy với 7 hàm thử  $f_j$  thỏa mãn điều kiện biên, khi tính với tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số của phương pháp tuyến tính hóa tương đương cho sai số nhỏ hơn so với kết quả tính toán theo phương pháp của Galerkin. Trong 5 giá trị trọng số của tiêu chuẩn tuyến tính hóa đối ngẫu, **giá trị  $p_1$  cho kết quả lực tới hạn với sai số nhỏ nhất** trong hầu hết các trường hợp tính toán.

### 3.4 Phép lấy trung bình cục bộ có trọng số

Giá trị trung bình đóng một vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các quá trình động. Việc sử dụng các giá trị đó cho phép biến đổi các quá trình biến thiên về một số các đặc tính không đổi, mà dễ dàng hơn trong việc khảo sát. Để phát triển tính chất trực giao và mở rộng việc sử dụng các giá trị trung bình, ta có thể áp dụng phương pháp đối ngẫu. Một trong những ưu điểm đáng kể của khái niệm đối ngẫu là nó xem xét hai khía cạnh khác nhau của một bài toán đang quan tâm, mà cho phép khảo sát phù hợp hơn. Một hướng tiếp cận đối ngẫu cho các giá trị trung bình của các hàm đã được giới thiệu trong [129] và sẽ được phát triển trong chương này. Không mất tính tổng quát, ta xem xét  $g(x)$ , là một hàm tiền định, khả tích với  $x \in [0,1]$  và  $r$  là một giá trị cục bộ trong khoảng  $[0,1]$ .

Trung bình số học thông thường của  $g(x)$  trên khoảng  $[0,1]$  được cho bởi:

$$\langle g(x) \rangle = \int_0^1 g(x) dx \quad (3.43)$$

Giá trị trung bình có trọng số quy ước của  $g(x)$  trong khoảng  $[0, 1]$  được cho bởi

$$\frac{\int_0^1 h(x)g(x)dx}{\int_0^1 h(x)dx} \quad (3.44)$$

trong đó  $h(x)$  là một hàm trọng số. Phương pháp tuyến tính hóa tương đương với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số thông thường qua việc sử dụng hướng tiếp cận đối ngẫu được áp dụng trong [89] để phân tích một số hệ dao động với tính phi tuyến mạnh. Tác giả giới thiệu một dạng khác của trọng số trung bình của hàm  $g(x)$  khoảng  $[0, 1]$ , với mục đích này, phương trình (3.43) được viết lại như sau:

$$\langle g(x) \rangle = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^r g(x) dx + \int_r^1 g(x) dx \quad (3.45)$$

$$= \frac{r}{r} \int_0^r g(x) dx + \frac{1-r}{1-r} \int_r^1 g(x) dx$$

Từ phương trình (3.45), nhận thấy rằng giá trị cục bộ  $x = r$  chia trong khoảng  $[0, 1]$  trong hai miền cục bộ  $[0, r]$  và  $[r, 1]$ , với hai trung bình cục bộ tương ứng là

$$\frac{1}{r} \int_0^r g(x) dx, \frac{1}{1-r} \int_r^1 g(x) dx \quad (3.46)$$

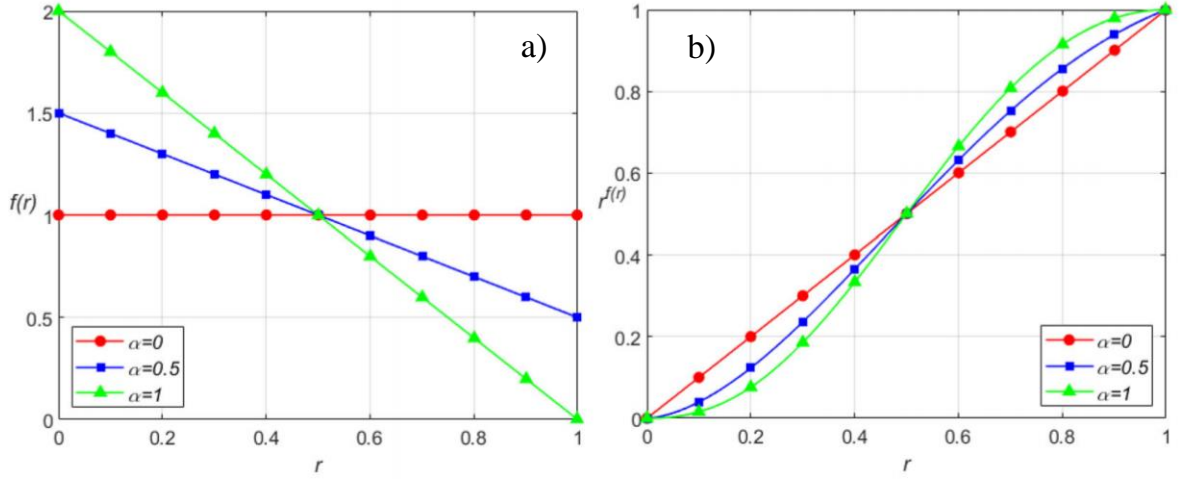
Phép lấy trung bình thông thường,  $\langle g(x) \rangle$ , nhận được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của hai phép lấy trung bình cục bộ với trọng số bằng độ dài của các miền cục bộ, cụ thể là  $r$  và  $1 - r$ : Để giới thiệu một phép lấy trung bình có trọng số mới của  $g(x)$  trong khoảng  $[0, 1]$ , người ta thay trọng số  $r$  bằng một trọng số khác là,  $r^{f(r)}$ , trong đó  $f(r)$  là một hàm liên tục thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 0 \leq f(r), \forall r \in [0, 1] \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^{f(r)}}{r} < \infty \\ \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1 - r^{f(r)}}{1 - r} < \infty \end{cases} \quad (3.47)$$

Giá trị trung bình thông thường của  $g(x)$  trong khoảng  $[0, 1]$  được xác định bởi phương trình (3.45) sẽ thu được trung bình trọng số của  $g(x)$  sau đây tại giá trị cục bộ  $r$  trong khoảng  $[0, 1]$

$$\begin{aligned} G(r) &\equiv \langle g(x) | x^{f(x)}, r \rangle \\ &= \frac{r^{f(r)}}{r} \int_0^r g(x) dx + \frac{1 - r^{f(r)}}{1 - r} \int_r^1 g(x) dx \end{aligned} \quad (3.48)$$

Sự khác biệt nổi bật giữa phép lấy trung bình có trọng số thông thường của  $g(x)$  được xác định bởi (3.44) và phép lấy trung bình cục bộ có trọng số được đề xuất (weighted local averaging - WLA) của  $g(x)$  được xác định bởi (3.48) là (3.44) đưa đến một giá trị trung bình không đổi, trong khi đó (3.48) đưa đến một đại lượng là hàm số của  $r$ . Theo nghĩa này, phép lấy trung bình cục bộ có trọng số của  $g(x)$  được xác định bởi (3.48) có thể được coi là một phép biến đổi của hàm  $g(x)$  xác định trong khoảng  $[0, 1]$  thành một hàm khác  $G(r)$  cũng xác định trong khoảng  $[0, 1]$  và được xác định bởi phương trình (3.48).



Hình 3.1 Đồ thị của hàm số a)  $f(r)$  và b)  $r^{f(r)}$  trong khoảng  $[0, 1]$  và với các giá trị khác nhau của  $\alpha = 0, 0,5, 1$

Phép lấy trung bình cục bộ có trọng số (WLA) của một hàm  $g(x)$  theo (3.48) sẽ được sử dụng trong luận án này. Trường hợp  $r^{f(r)} = 0,5$  đã được xem xét trong [129]. Rõ ràng là toán tử lấy trung bình cục bộ có trọng số được xác định trong (3.48) là tuyến tính đối với hàm  $g(x)$ . Nhận xét sau đây nhận được từ phép lấy trung bình có trọng số mới theo (3.48).

Nhận xét 1. Nếu hàm  $f(r)$  thỏa mãn điều kiện:

$$f(r_i) = 1, \quad 0 \leq r_i \leq 1 \quad (3.49)$$

thì trung bình có trọng số của  $g(x)$  tại  $r_i$  bằng giá trị trung bình thông thường của  $g(x)$ . Thực vậy,

$$\begin{aligned} G(r_i) &\equiv \langle g(x) | x^{f(x)}, r_i \rangle = \\ &= \frac{r_i^{f(r_i)}}{r_i} \int_0^{r_i} g(x) dx + \frac{1 - r_i^{f(r_i)}}{1 - r_i} \int_{r_i}^1 g(x) dx \\ &= \frac{r_i^1}{r_i} \int_0^{r_i} g(x) dx + \frac{1 - r_i^1}{1 - r_i} \int_{r_i}^1 g(x) dx \\ &= \int_0^{r_i} g(x) dx + \int_{r_i}^1 g(x) dx = \langle g(x) \rangle \end{aligned} \quad (3.50)$$

Từ Nhận xét 1, trong trường hợp cụ thể đối với  $f(x) = 1, \forall x \in [0,1]$ , giá trị trung bình có trọng số của  $g(x)$  trùng với giá trị trung bình thông thường của  $g(x), \forall x \in [0,1]$ :



$$\langle g(x)|x, r \rangle = \langle g(x) \rangle, \forall x \in [0,1] \quad (3.51)$$

Vì vẫn chưa có lý thuyết chung về các hàm trọng số, chúng ta sẽ bắt đầu nghiên cứu với một lớp đa thức một tham số có bậc nhất như sau:

$$f(r) = 1 + \alpha(1 - 2r) = 1 + \alpha - 2\alpha r, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \langle g(x)|x^{1+\alpha-2\alpha r}, r \rangle \\ = \frac{r^{1+\alpha-2\alpha r}}{r} \int_0^r g(x) dx + \frac{1 - r^{1+\alpha-2\alpha r}}{1 - r} \int_r^1 g(x) dx \end{aligned} \quad (3.53)$$

Hàm  $f(r)$  được chọn ở dạng trong (3.52), vì nó bằng 1 ứng với  $r = 0,5$ . Sử dụng Nhận xét 1, ta có thể kết luận rằng một đặc trưng quan trọng của phép lấy trung bình cục bộ có trọng số mới được xác định trong (3.53) là nó luôn chứa giá trị trung bình thông thường như các trường hợp cụ thể của nó tại 3 điểm cục bộ,  $r = 0, r = 0,5$  và  $r = 1$ :

$$\begin{aligned} G(0) &\equiv \langle g(x)|x^{1+\alpha-2\alpha r}, 0 \rangle \\ &= \frac{0^{1+\alpha}}{0} \int_0^0 g(x) dx + \frac{1 - 0^{1+\alpha}}{1 - 0} \int_0^1 g(x) dx \\ &= \int_0^1 g(x) dx = \langle g(x) \rangle \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} G(0.5) &\equiv \langle g(x)|x^{1+\alpha-2\alpha r}, 0.5 \rangle \\ &= \frac{0.5^1}{0.5} \int_0^{0.5} g(x) dx + \frac{1 - 0.5^1}{1 - 0.5} \int_{0.5}^1 g(x) dx \\ &= \int_0^1 g(x) dx = \langle g(x) \rangle \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} G(1) &\equiv \langle g(x)|x^{1+\alpha-2\alpha r}, 1 \rangle \\ &= \frac{1^{1-\alpha}}{1} \int_0^1 g(x) dx + \frac{1 - 1^{1-\alpha}}{1 - 1} \int_1^1 g(x) dx \\ &= \int_0^1 g(x) dx = \langle g(x) \rangle \end{aligned} \quad (3.56)$$

Đồ thị của hàm  $f(r)$  và hàm  $r^{f(r)}$  được chỉ ra trong Hình 3.1 với các giá trị khác nhau của  $\alpha$ . Đồ thị của hàm  $f(r)$  bị giới hạn bởi đường thẳng  $l_1$ , ( $f(r) \equiv 1, \alpha = 0$ ) và đường thẳng  $l_2$ , ( $f(r) \equiv 2 - r, \alpha = 1$ ) và  $f(r) \geq 0, \forall 0 \leq$

$\alpha \leq 1$ . Trong mục tiếp theo, chúng ta sẽ áp dụng phép lấy trung bình cục bộ có trọng số vào phương pháp Galerkin.

### 3.5 Phát triển tính chất trực giao trong phương pháp Galerkin với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số

Trong mục này, tác giả sẽ chỉ ra cách phương pháp Galerkin với phép lấy trung bình thông thường chính là tính chất trực giao (the Galerkin method with conventional averaging, GCA) có thể được phát triển tính chất trực giao và mở rộng thành phương pháp Galerkin với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số (Galerkin method with weighted local averaging, GWLA) như thế nào. Giả sử ta cần giải phương trình vi phân.

$$A(W) = 0 \quad (3.57)$$

trong đó  $A$  là toán tử vi phân và  $W(x)$  là hàm chưa biết của biến  $x \in [0,1]$  thỏa mãn một số điều kiện biên cụ thể tại hai đầu  $x = 0, x = 1$ . Gọi  $W(x)$  là được xấp xỉ dưới dạng tổ hợp tuyến tính các hàm thử

$$W(x) = \sum_{j=1}^N a_j W_j(x) \quad (3.58)$$

trong đó  $W_j(x)$  là các hàm thử của  $x$  và  $a_j$  là các hằng số chưa biết. Áp dụng GCA vào (3.57) dẫn đến các phương trình của điều kiện trực giao như sau:

$$\left\langle A \left( \sum_{j=1}^N a_j W_j(x) \right) W_i(x) \right\rangle = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.59)$$

trong đó  $\langle \blacksquare \rangle$  là toán tử lấy trung bình thông thường. Hệ  $N$  phương trình (3.59) được sử dụng để xác định  $N$  ẩn số  $a_j$ , phương trình này thể hiện **tính trực giao** các hàm thử và phần dư.

Nếu thực hiện thay thế toán tử lấy trung bình thông thường  $\langle \blacksquare \rangle$  trong (3.59) bởi toán tử lấy trung bình cục bộ có trọng số, (3.53), thì ta nhận được các phương trình của các điều kiện trực giao tương ứng:

$$\left\langle A \left( \sum_{j=1}^N a_j W_j(x) \right) W_i(x) \middle| x^{1+\alpha-2\alpha r}, r \right\rangle = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.60)$$

Thay thế (3.53) vào (3.60) đưa đến hệ phương trình đại số cho  $N$  ẩn số  $a_j$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{r^{1+\alpha-2\alpha r}}{r} \int_0^r A \left( \sum_{j=1}^N a_j W_j(x) \right) W_i(x) dx \\
& + \frac{1 - r^{1+\alpha-2\alpha r}}{1-r} \int_r^1 A \left( \sum_{j=1}^N a_j W_j(x) \right) W_i(x) dx = 0, \\
& i = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Giải hệ phương trình (3.61) cho ta

$$a_j = a_j(r, \alpha), j = 1, 2, \dots, N \tag{3.62}$$

Thay thế (3.62) vào (3.58), người ta nhận được nghiệm xấp xỉ của phương trình vi phân (3.57) dưới dạng

$$W(x) = \sum_{j=1}^N a_j(r, \alpha) W_j(x) \tag{3.63}$$

Từ phương trình (3.63) cho thấy rằng nghiệm xấp xỉ này là một hàm phụ thuộc vào giá trị  $\alpha$  của hàm trọng số và vào giá trị cục bộ  $r$ . Do đó, nghiệm sẽ trở nên hoàn toàn xác định khi  $\alpha$  và  $r$  đã được chọn. Bằng cách thay đổi các giá trị của  $\alpha$  và  $r$ , GWLA có thể tạo ra một loạt các nghiệm xấp xỉ khác nhau và tại  $r = 0$ ,  $r = 0,5$  hoặc  $r = 1$ , GWLA đưa ra cùng một lời giải như của GCA. Quan trọng hơn, GWLA cho phép nhận được các lời giải chính xác hơn nhiều ứng với một số bài toán cụ thể sẽ được trình bày ở phần sau, khi so sánh với các lời giải nhận được từ GCA. Tuy nhiên, nhược điểm chính của GWLA là các giá trị của  $\alpha$  và  $r$  vẫn chưa được xác định và câu hỏi mở là làm thế nào để tìm chúng. Câu hỏi này sẽ được xem xét và thảo luận trong phần tiếp theo.

Áp dụng (3.54) vào (3.60), ta có thể chỉ ra rằng lời giải được xác định như trong (3.62) có đặc trưng như sau

$$a_j(\alpha, 0) = a_j(\alpha, 0.5) = a_j(\alpha, 1) = a_j \forall \alpha \in [0, 1], j = 1, 2, \dots, N \tag{3.64}$$

trong đó  $a_j$  là nghiệm nhận được theo GCA, tức là được xác định bởi (3.59). Điều này có nghĩa là nghiệm nhận được bởi GWLA trùng với nghiệm nhận được bởi GCA ứng với ít nhất ba giá trị của  $r$ , tương ứng là  $r = 0, 0.5$  và  $1$ .

Nếu  $A$  là một toán tử tuyến tính, thì hệ (3.60) được đơn giản hóa như sau:

$$\sum_{j=1}^N a_j \left\langle A \left( W_j(x) \right) W_i(x) \middle| x^{f(x)}, r \right\rangle = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.65)$$

hay

$$\sum_{j=1}^N a_j \left[ \frac{r^{1+\alpha-2\alpha r}}{r} \int_0^r A \left( W_j(x) \right) W_i(x) dx + \frac{1-r^{1+\alpha-2\alpha r}}{1-r} \int_r^1 A \left( W_j(x) \right) W_i(x) dx \right] = 0, \quad (3.66)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Trong phần tiếp theo, GWLA sẽ được triển khai để tìm tải trọng tới hạn cho các cột đàn hồi với các loại điều kiện biên và các loại mặt cắt khác nhau.

### 3.6 Mất ổn định đàn hồi của cột Euler với tiết diện không đổi

Áp dụng GWLA để phân tích ổn định đàn hồi của cột Euler [40]. Xét một cột đàn hồi thẳng, đồng chất, có chiều dài  $L$  chịu một lực nén dọc trục  $P$ . Cột có một chuyển vị ngang được biểu thị bằng  $\bar{w}$ . Sử dụng lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, chuyển vị của thanh có tiết diện không đổi được mô tả bằng phương trình vi phân sau

$$EI \frac{d^4 \bar{w}}{d\bar{x}^4} + P \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0 \quad (3.67)$$

trong đó  $E$  là môđun đàn hồi,  $I$  là mô-men quán tính và  $\bar{x} \in [0, L]$  biểu thị tọa độ theo phương dọc trục. Bằng cách sử dụng phép biến đổi  $x = \frac{\bar{x}}{L}$  và  $w = \frac{\bar{w}}{L}$ , từ phương trình (3.67) ta có:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + P^{const} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, P^{const} = \frac{PL^2}{EI} \quad (3.68)$$

trong đó  $P^{const}$  là tải trọng tới hạn không thứ nguyên (chuẩn hóa) của cột có tiết diện không đổi. Như vậy, tọa độ  $x$  được xác định trong khoảng  $[0, 1]$ . Sử dụng (3.68), phương trình cân bằng của cột có dạng

$$A(w) \equiv \frac{d^4 w}{dx^4} + P^{const} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.69)$$

Áp dụng GWLA được xác định bởi các phương trình từ (3.60) đến (3.69) đối với hàm thử có một tham số, ta nhận được

$$\left\langle \left( \frac{d^4 w}{dx^4} + P^{const} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) w \middle| x^{1+\alpha-2\alpha x}, r \right\rangle = 0 \quad (3.70)$$

Phương trình (3.70) dẫn đến tải trọng tới hạn xấp xỉ được xác định bởi GWLA

$$P_{GWLA}^{const}(\alpha, r) = - \frac{\left\langle \frac{d^4 w}{dx^4} w \middle| x^{1+\alpha-2\alpha x}, r \right\rangle}{\left\langle \frac{d^2 w}{dx^2} w \middle| x^{1+\alpha-2\alpha x}, r \right\rangle} \quad (3.71)$$

Hoặc ở dạng tường minh

$$P_{GWLA}^{const}(\alpha, r) = - \frac{\frac{r^{1+\alpha-2\alpha r}}{r} \int_0^r \frac{d^4 w}{dx^4} w dx + \frac{1-r^{1+\alpha-2\alpha r}}{1-r} \int_1^1 \frac{d^4 w}{dx^4} w dx}{\frac{r^{1+\alpha-2\alpha r}}{r} \int_0^r \frac{d^2 w}{dx^2} w dx + \frac{1-r^{1+\alpha-2\alpha r}}{1-r} \int_1^1 \frac{d^2 w}{dx^2} w dx} \quad (3.72)$$

Phương trình (3.72) chỉ ra rằng tải trọng tới hạn được xác định bởi GWLA là một hàm của tham số  $\alpha$  và của giá trị cục bộ  $r$ . Lưu ý rằng khi  $\alpha = 0$  phương trình (3.72) sẽ dẫn đến tải trọng tới hạn như được xác định bởi GCA.

$$P_{GWLA}^{const}(0, r) = - \frac{\int_0^1 \frac{d^4 w}{dx^4} w dx}{\int_0^1 \frac{d^2 w}{dx^2} w dx} P_{GCA}^{const} \quad (3.73)$$

Từ phương trình (3.72) và phương trình (3.48), ta cũng có thể chỉ ra rằng  $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$  bằng với  $P_{GWLA}^{const}$  tại  $r = 0, 0,5$  và  $1, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} P_{GWLA}^{const}(\alpha, 0) &= - \frac{\frac{1}{1} \int_0^1 \frac{d^4 w}{dx^4} w dx}{\frac{1}{1} \int_0^1 \frac{d^2 w}{dx^2} w dx} = P_{GWLA}^{const}(\alpha, 0,5) \\ &= - \frac{\frac{0,5^1}{0,5} \int_0^{0,5} \frac{d^4 w}{dx^4} w dx + \frac{1-0,5^1}{1-0,5} \int_{0,5}^1 \frac{d^4 w}{dx^4} w dx}{\frac{0,5^1}{0,5} \int_0^{0,5} \frac{d^2 w}{dx^2} w dx + \frac{1-0,5^1}{1-0,5} \int_{0,5}^1 \frac{d^2 w}{dx^2} w dx} \\ &= P_{GWLA}^{const}(\alpha, 1) = - \frac{\frac{1^{1-\alpha}}{1} \int_0^1 \frac{d^4 w}{dx^4} w dx}{\frac{1^{1-\alpha}}{1} \int_0^1 \frac{d^2 w}{dx^2} w dx} = P_{GCA}^{const} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Phương trình (3.74) biểu thị rằng  $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$  có ít nhất một cực trị cục bộ trong mỗi khoảng  $[0, 0,5]$  và  $[0,5, 1]$ . Để tìm tải trọng tới hạn nhỏ nhất, cực tiểu cục bộ của  $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$  trong khoảng  $[0, 1]$ ,  $\min_{r \in [0,1]} P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$  thường được ưu tiên chọn làm điều kiện để xác định giá trị của  $r$ . Do đó, tải trọng tới hạn cục bộ được xác định bởi GWLA ứng với một giá trị  $\alpha$  được định nghĩa như sau:

$$P_{GWLA}^{const}(\alpha) = \min_{r \in [0,1]} P_{GWLA}^{const}(\alpha, r) \quad (3.75)$$

Vấn đề xác định giá trị thích hợp  $\alpha$  cần được tiếp tục khảo sát. Ở đây, để giải quyết bài toán, tác giả sử dụng hướng tiếp cận toàn cục - cục bộ, mà lần đầu tiên được đề xuất trong [10], để xác định các hệ số tuyến tính hóa của phương pháp tuyến tính

hóa tương đương ngẫu nhiên. Trong bài báo đó, theo hướng tiếp cận toàn cục - cục bộ, các hệ số tuyến tính hóa cục bộ được tìm từ tiêu chí sai số bình phương bình quân trong một miền cục bộ. Sau đó, các hệ số tuyến tính hóa sẽ nhận được như là các giá trị trung bình toàn cục của tất cả các hệ số tuyến tính hóa cục bộ. Áp dụng hướng tiếp cận toàn cục - cục bộ vào bài toán ổn định, các nghiên cứu cho thấy rằng tải trọng tới hạn cuối cùng được xác định bởi GWLA nhận được như là giá trị trung bình toàn cục theo  $\alpha$ , của tất cả các tải trọng tới hạn cục bộ  $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$

$$P_{GWLA}^{const} = \int_0^1 P_{GWLA}^{const}(\alpha) d\alpha \quad (3.76)$$

Do đó, thuật toán số để giải bài toán tải trọng tới hạn của cột đàn hồi với tiết diện không đổi được mô tả bằng phương trình (3.67) bằng việc sử dụng phương pháp Galerkin với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số, GWLA, như sau: Đầu tiên, xác định hàm  $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$ ; sau đó với mọi giá trị của  $\alpha \in [0,1]$ , ta tìm tải trọng tới hạn cục bộ,  $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$  từ phương trình (3.75); tải trọng tới hạn cuối cùng nhận được từ phương trình (3.76).

Để giảm khối lượng tính toán, tác giả **đề xuất phương pháp Galerkin đơn giản hóa với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số** (simplified Galerkin method with weighted local averaging - viết tắt là SGWLA) sau đây. Các cực trị cục bộ của  $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$  trong khoảng  $[0; 1]$  có thể được xấp xỉ bằng các giá trị của  $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$  tương ứng với các điểm trung tâm của mỗi khoảng  $[0;0,5]$  và  $[0,5;1]$ . Do đó, từ phương trình (3.75),  $P_{SGWLA}^{const}(\alpha)$  được xác định như sau:

$$P_{SGWLA}^{const} = \min(P_{GWLA}^{const}(\alpha, 0,25), P_{GWLA}^{const}(\alpha, 0,75)) \quad (3.77)$$

Ngoài ra, ta cũng có thể xấp xỉ tích phân trong phương trình (3.76) bằng cách định trị  $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$  tại  $\alpha = 0,5$

$$P_{SGWLA}^{const} = \int_0^1 P_{GWLA}^{const}(\alpha) d\alpha \approx P_{GWLA}^{const}(0,5) \quad (3.78)$$

Vì vậy, tải trọng tới hạn nhận được từ SGWLA,  $P_{SGWLA}^{const}$  là

$$P_{SGWLA}^{const} = \min(P_{GWLA}^{const}(0,5; 0,25), P_{GWLA}^{const}(0,5; 0,75)) \quad (3.79)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
& P_{GWLA}^{const}(0,5; 0,25) \\
&= -\frac{\frac{0,25^{1,25}}{0,25} \int_0^{0,25} \frac{d^4 w}{dx^4} w dx + \frac{1-0,25^{1,25}}{1-0,25} \int_{0,25}^1 \frac{d^4 w}{dx^4} w dx}{\frac{0,25^{1,25}}{0,25} \int_0^{0,25} \frac{d^2 w}{dx^2} w dx + \frac{1-0,25^{1,25}}{1-0,25} \int_{0,25}^1 \frac{d^2 w}{dx^2} w dx}
\end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned}
& P_{GWLA}^{const}(0,5; 0,75) \\
&= -\frac{\frac{0,75^{0,75}}{0,75} \int_0^{0,75} \frac{d^4 w}{dx^4} w dx + \frac{1-0,75^{0,75}}{1-0,75} \int_{0,75}^1 \frac{d^4 w}{dx^4} w dx}{\frac{0,75^{0,75}}{0,75} \int_0^{0,75} \frac{d^2 w}{dx^2} w dx + \frac{1-0,75^{0,75}}{1-0,75} \int_{0,75}^1 \frac{d^2 w}{dx^2} w dx}
\end{aligned} \quad (3.81)$$

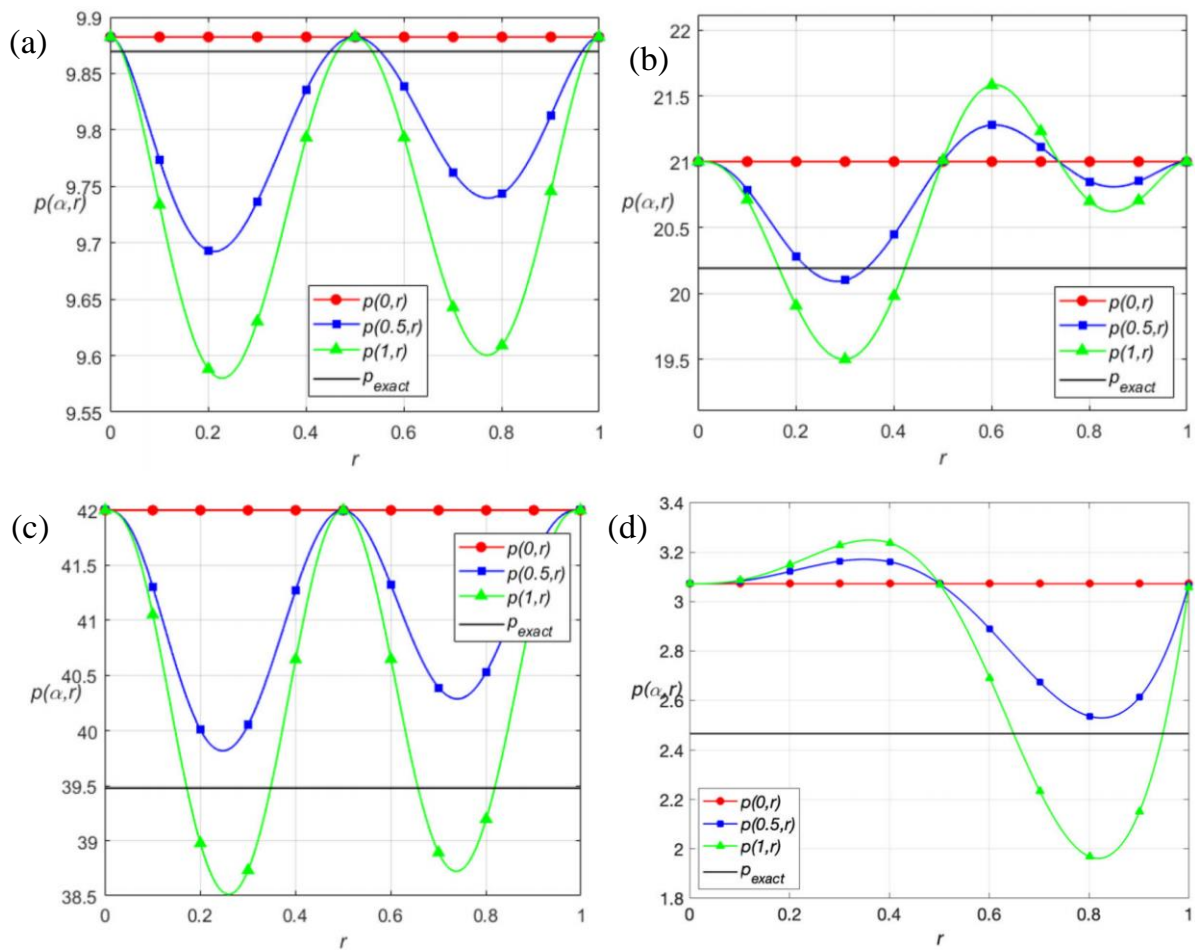
Do đó, thuật toán số để xác định tải trọng tới hạn của một cột đàn hồi với tiết diện không đổi, bằng việc sử dụng phương pháp Galerkin đơn giản hóa với phép lấy trung bình cục bộ có trọng số (SGWLA), là như sau: Đầu tiên, xác định  $P_{GWLA}^{const}(0,5; 0,25)$ , và  $P_{GWLA}^{const}(0,5; 0,75)$  như trong phương trình (3.80) và (3.81) một cách tương ứng. Sau đó, tải trọng tới hạn nhận được bởi phương pháp SGWLA từ phương trình (3.79).

*Bảng 3.6. Các bài toán ổn định với điều kiện biên khác nhau và các hàm thử*

<b>Loại cột</b>	<b>Điều kiện biên</b>	<b>Hàm thử</b>
Hai đầu liên kết bản lề (P-P)	$w(0) = 0; \frac{d^2 w(0)}{dx^2} = 0$ $w(1) = 0; \frac{d^2 w(1)}{dx^2} = 0$	$x^4 - 2x^3 + x$
Một đầu ngàm, một đầu bản lề (C-P)	$w(0) = 0; \frac{dw(0)}{dx} = 0$ $w(1) = 0; \frac{d^2 w(1)}{dx^2} = 0$	$2x^4 - 5x^3 + 3x^2$
Hai đầu liên kết ngàm (C-C)	$w(0) = 0; \frac{dw(0)}{dx} = 0$ $w(1) = 0; \frac{dw(1)}{dx} = 0$	$x^4 - 2x^3 + x^2$
Một đầu ngàm, một đầu tự do (C-F)	$w(0) = 0; \frac{dw(0)}{dx} = 0$ $\frac{d^2 w(1)}{dx^2} = 0; \frac{d^3 w(1)}{dx^3} + P \frac{dw(1)}{dx} = 0$	$0.5x^5 - x^4 + 4x^3 - 11x^2$

Để kiểm tra độ chính xác của GWLA và SGWLA, chúng ta áp dụng các thuật toán số để xác định các tải trọng tới hạn ứng với bốn trường hợp điều kiện biên khác nhau. Với mỗi trường hợp, tồn tại một hàm thử thích hợp tương ứng  $w(x)$ , mà có

dạng gốc là  $w(x) = \sum_{i=0}^{n=4} C_i x^i$ , trong đó  $C_i$  nhận được từ các điều kiện biên. Bốn trường hợp với các điều kiện biên tương ứng của cột và các hàm thử tương ứng được tóm tắt trong Bảng 3.6. Chú ý rằng trong Bảng 3.6, với trường hợp một đầu ngàm và một đầu tự do, điều kiện biên tại đầu tự do ( $x = 1$ ) là phức tạp vì nó phụ thuộc vào tải trọng tới hạn đã được chuẩn hóa mà vẫn còn chưa biết. Do đó, ở đây, một đa thức bậc năm đơn giản được chọn để thỏa mãn ba điều kiện biên của cột dạng ngàm – tự do,  $w(0) = 0$ ,  $\frac{dw(0)}{dx} = 0$ , và  $\frac{d^2w(l)}{d^2x} = 0$ . Việc chọn các hàm thử thỏa mãn chỉ một phần thay vì tất cả điều kiện biên là một hướng tiếp cận chung trong phương pháp Galerkin.



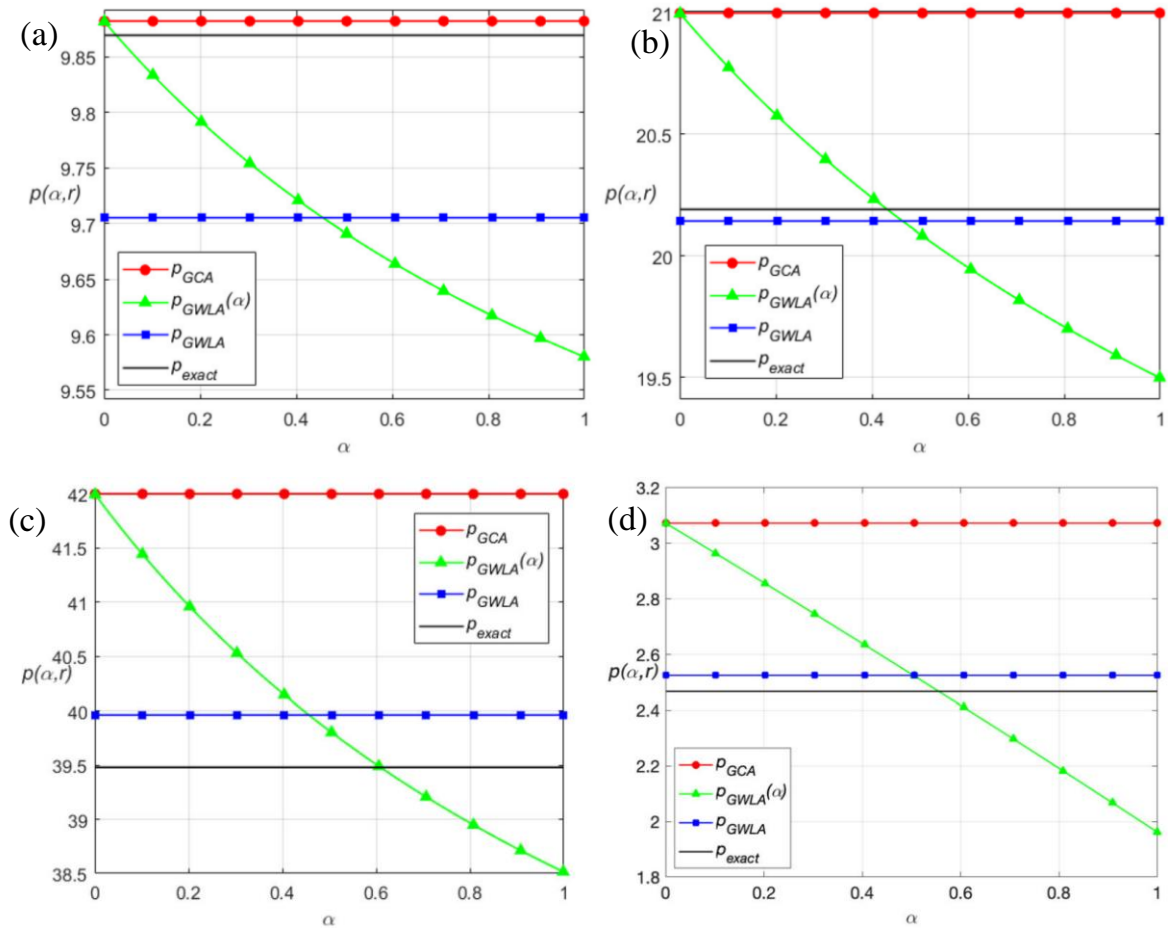
Hình 3.2. Tải trọng tới hạn đã được chuẩn hóa,  $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$  bởi GWLA, dưới dạng một hàm của  $r$  với  $r \in [0,1]$  và ba giá trị của  $\alpha$ : 0, 0,5 và 1 so sánh với giá trị chính xác,  $P_{exact}^{const}$ , cho cột có tiết diện không đổi: a) P-P, b) C-P, c) C-C và d) C-F.

Từ Hình 3.2 chỉ ra đồ thị của tải trọng tới hạn  $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$ , xác định bởi GWLA của các cột với tiết diện không đổi ứng với bốn trường hợp điều kiện biên khác nhau: hai đầu bản lề (P-P), ngàm-bản lề (C-P), ngàm-ngàm (C-C) và ngàm-tự



do (C-F), biến thiên theo  $r$  với  $r \in [0,1]$  và theo ba giá trị của  $\alpha$  là 0, 0,5 và 1, và cùng so sánh với với giá trị chính xác,  $P_{exact}^{const}$ .

Ở đây, ta có thể thấy rằng giá trị  $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$  luôn có giá trị nhỏ nhất trong khoảng  $[0,1]$ , và giá trị nhỏ nhất của  $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$  trong khoảng  $[0,1]$ , hay cũng là  $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$ , được xác định theo phương trình (3.75), và nó giảm khi  $\alpha$  tăng. Đặc tính này được thể hiện rõ ràng hơn trong Hình 3.3, trong đó chỉ ra rằng  $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$  ứng với mỗi trường hợp, sẽ giảm dần và đi qua  $P_{exact}^{const}$  khi  $\alpha$  tăng từ 0 đến 1. Chú ý rằng khi  $\alpha = 0$ ,  $P_{GWLA}^{const}(\alpha = 0)$  bằng với  $P_{GCA}^{const}$ ; vì vậy,  $P_{GCA}^{const}$  là một trường đặc biệt của  $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$ . Ngoài ra, các cực trị cục bộ của  $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$  trong  $[0, 1]$  xảy ra tại các điểm gần với  $r = 0,25$  và  $r = 0,75$ , như được chỉ ra trong Hình 3.2. Do đó, sẽ là hợp lý khi cho rằng  $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$  có thể được xấp xỉ bằng  $\min(P_{GWLA}^{const}(\alpha, r = 0,25); P_{GWLA}^{const}(\alpha, r = 0,75))$ .



Hình 3.3. Tải trọng tới hạn cục bộ đã được chuẩn hóa, nhận được bởi GWLA phụ thuộc vào  $\alpha$ ,  $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$ , với  $r \in [0,1]$ , giá trị trung bình toàn cục của  $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$ ,  $P_{GWLA}^{const}$ , và tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa bằng GCA,  $P_{GCA}^{const}$ , so với giá trị chính xác,  $P_{exact}^{const}$ , với cột có tiết diện không đổi: a) P-P, b) C-P, c) C-C và d) C-F.

Bảng 3.7. Tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa nhận được bởi GWLA và SGWLA, GCA và nghiệm chính xác cho bốn loại cột khác nhau có tiết diện không đổi.

Loại cột	$P_{exact}^{const}$	$P_{GWLA}^{const}$	%E	$P_{SGWLA}^{const}$	%E	$P_{GCA}^{const}$	%E
P-P	9,8696	9,7054	1,6640	9,7011	1,7074	9,8823	0,1289
C-P	20,1907	20,1444	0,2293	20,1247	0,3271	21,0000	4,0081
C-C	39,4784	39,9657	1,2344	39,8185	0,8614	42,0000	6,3872
C-F	2,4674	2,5248	2,3263	2,5881	4,8900	3,0725	24,5230

Cuối cùng, như được chỉ ra trong Hình 3.3, giá trị trung bình toàn cục của  $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$ ,  $P_{GWLA}^{const}$ , có thể được xấp xỉ bằng  $P_{GWLA}^{const}(\alpha = 0,5)$ . Bảng 3.7 tóm tắt các tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa cho tất cả bốn loại cột, nhận được từ GWLA, như được xác định trong phương trình (3.76); hay nhận được SGWLA, như được xác định trong phương trình (3.79), và so sánh chúng với các giá trị tương ứng nhận được bởi GCA và các giá trị chính xác nhận được từ [130]. Từ Bảng 3.7 có thể thấy rằng các nghiệm  $P_{GWLA}^{const}$  và  $P_{SGWLA}^{const}$  rất gần với các nghiệm chính xác, với sai số tương ứng nhỏ hơn 3% và 5% cho cả bốn loại cột. Các nghiệm  $P_{GCA}^{const}$  có các sai số lớn hơn đối với cột dạng C-P, C-C và C-F (tương ứng là khoảng 4%, 6% và 24%), nhưng sai số là rất nhỏ đối với cột P-P (gần 0,1%).

### 3.7 Mất ổn định đàn hồi của cột Euler với tiết diện thay đổi

#### 3.7.1 Chuyển đổi cột có tiết diện thay đổi thành cột tương đương

Đối với các cột có tiết diện thay đổi, mô-men quán tính  $I(x)$  không phải là hằng số mà là một hàm của vị trí tiết diện dọc theo chiều dài của cột. Do đó, nếu không có tải trọng phân bố dọc trục, phương trình chi phối hệ trở thành

$$\frac{d^2}{d\bar{x}^2} \left( EI(\bar{x}) \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \right) + P \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0 \quad (3.82)$$

Đặt  $I(\bar{x}) = I_0 G(\bar{x})$ , trong đó  $I_0$  là mô-men quán tính của cột tại  $x = 0$  và  $G(\bar{x})$  là một hàm tùy ý xác định trên khoảng  $[0, L]$  và  $G(\bar{x}) > 0 \forall \bar{x} \in [0, L]$ . Do đó, phương trình (3.82) có thể được viết lại thành

$$EI_0 \frac{d^2}{d\bar{x}^2} \left( G(\bar{x}) \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \right) + P \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0 \quad (3.83)$$

Thay  $x = \bar{x}/L$  và  $w = \bar{w}/L$  ta được,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( G(Lx) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P^{var} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad P^{var} = \frac{PL^2}{EI_0} \quad (3.84)$$

trong đó  $P^{var}$  là tải trọng tới hạn không thứ nguyên (chuẩn hóa) của cột có tiết diện thay đổi. Trong phần trước, việc áp dụng phương pháp WLA mới được phát triển vào phương pháp Galerkin đã có hiệu quả trong việc tìm tải trọng tới hạn cho các cột có tiết diện không đổi. Trong phần này, tác giả đề xuất thay thế một cột có tiết diện thay đổi bằng một cột tương đương (theo nghĩa tối ưu) có tiết diện không đổi. Với mục đích này, WLA mới được phát triển được tích hợp với phương pháp bình phương tối thiểu để thực hiện việc thay thế tương đương một hàm bởi một hàm khác. Vì vậy, sự thay thế được đưa ra là

$$G(Lx) \frac{d^2w}{dx^2} = k^{var} \frac{d^2w}{dx^2} \quad (3.85)$$

trong đó hệ số tương đương  $k^{var}$  được xác định từ phương pháp bình phương tối thiểu kèm với WLA, tức là từ điều kiện

$$\left\langle \left( G(Lx) \frac{d^2w}{dx^2} - k^{var} \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \middle| x^{1+\alpha-2\alpha x}, r \right\rangle = 0 \quad (3.86)$$

Cần lưu ý rằng WLA đã được đề xuất, được sử dụng trong phương trình (3.86) để minh họa về ưu điểm của nó. Lấy đạo hàm của phương trình (3.86) theo  $k^{var}$  và cho bằng 0, ta nhận được

$$k^{var}(r) = \frac{\left\langle G(Lx) \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \middle| x^{1+\alpha-2\alpha x}, r \right\rangle}{\left\langle \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \middle| x^{1+\alpha-2\alpha x}, r \right\rangle} \quad (3.87)$$

Ở đây, hệ số tương đương cục bộ  $k^{var}(r)$  là một hàm của giá trị cục bộ  $r \in [0,1]$  và hệ số tương đương mong muốn sẽ được chọn bằng giá trị nhỏ nhất của  $k^{var}(r)$ ,

$$k^{var} = \min_{r \in [0,1]} \frac{\left\langle G(Lx) \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \middle| x^{1+\alpha-2\alpha x}, r \right\rangle}{\left\langle \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \middle| x^{1+\alpha-2\alpha x}, r \right\rangle} \quad (3.88)$$

Trong phương trình (3.87), hai giá trị của tham số  $\alpha$  sẽ được chọn:  $\alpha = 0$ , tương ứng với phương pháp bình phương tối thiểu thông thường, và trung điểm của  $\alpha \in [0,1]$ , khi  $\alpha = 0,5$ , tương ứng với phương pháp bình phương tối thiểu với WLA:

$$k_{CA}^{var} = \frac{\left\langle \left( G(Lx) \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \right\rangle}{\left\langle \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \right\rangle} \quad (3.89)$$

$$k_{WLA}^{var} = \min_{r \in [0,1]} \frac{\left\langle G(Lx) \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \middle| x^{1.5-x}, r \right\rangle}{\left\langle \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \middle| x^{1.5-x}, r \right\rangle} \quad (3.90)$$

Sử dụng phương trình (3.85), phương trình chi phối cho các cột có tiết diện thay đổi mà được xác định trong phương trình (3.84) được thay thế bằng phương trình chi phối hệ sau đây cho các cột có tiết diện không đổi

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( k^{var} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P^{var} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.91)$$

Vì  $k^{var} > 0$ , phương trình (3.91) được viết lại là

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{P^{var}}{k^{var}} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.92)$$

Bằng cách so sánh phương trình (3.92) với phương trình (3.68), ta có thể nhận được tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa của cột có tiết diện thay đổi,  $P_{GWLA}^{var}$ , từ cột tương ứng có tiết diện không đổi,  $P_{GWLA}^{const}$ , với cùng các điều kiện biên nhận được bởi GWLA qua mối quan hệ sau

$$P_{GWLA}^{var} = k^{var} P_{GWLA}^{const} \quad (3.93)$$

trong đó  $k^{var}$  được cho bởi phương trình (3.89) và phương trình (3.90) tương ứng. Trong phần tiếp theo tác giả sẽ xem xét hiệu quả của phương pháp bình phương tối thiểu với WLA và GWLA trong việc thu được tải trọng tới hạn của cột với tiết diện thay đổi.

### 3.7.2 Áp dụng với bài toán mất ổn định đàn hồi có tiết diện thay đổi

Trong phần này, chúng ta sẽ xem xét các lớp các bài toán cột có mô-men quán tính được cho bởi hàm số mũ và hàm lũy thừa. Đối với các cột có mô-men quán tính theo hàm mũ, ta có

$$G(Lx) = e^{-aLx} \quad (3.94)$$

trong đó  $a$  là một hằng số dương tùy ý. Phương trình chi phối cho các cột có mô-men quán tính dạng hàm mũ được mô tả như sau bằng cách sử dụng phương trình (3.84) và phương trình (3.94) ta có

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( e^{-aLx} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P^{exp} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad P^{exp} = \frac{PL^2}{EI_0} \quad (3.95)$$

trong đó  $P^{exp}$  là tải trọng tới hạn không thứ nguyên của cột có tiết diện biến thiên theo hàm mũ. Tải trọng tới hạn được chuẩn hóa có thể nhận được bằng cách sử dụng quan hệ như được mô tả trong phương trình (3.93) với  $k^{var} = k_{CA}^{exp}$  và  $k^{var} = k_{WLA}^{exp}$ , một cách tương ứng

$$P_{GWLA}^{exp,CA} = k_{CA}^{exp} P_{GWLA}^{const} \quad (3.96)$$

$$P_{GWLA}^{exp,WLA} = k_{WLA}^{exp} P_{GWLA}^{const} \quad (3.97)$$

trong đó,  $k_{CA}^{exp}$  và  $k_{WLA}^{exp}$  là hệ số tương đương, được xác định bằng việc thay phương trình (3.94) vào phương trình (3.89), (3.90) với  $\alpha = 0$  và  $\alpha = 0,5$  tương ứng.

$$k_{CA}^{exp} = \frac{\langle e^{-aLx} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \rangle}{\langle \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \rangle} \quad (3.98)$$

$$k_{WLA}^{exp} = \min_{r \in [0,1]} \frac{\langle e^{-aLx} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \Big|_{x^{1.5-x}, r} \rangle}{\langle \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \Big|_{x^{1.5-x}, r} \rangle} \quad (3.99)$$

*Bảng 3.8. Các hệ số tương đương cho cột có mô-men quán tính theo hàm mũ*

Loại cột	$aL$	$k_{CA}^{exp}$	$k_{WLA}^{exp}$
P-P	0	1	1
	0,1	0,9514	0,9501
	0,5	0,7823	0,7767
	1	0,6174	0,6084
C-P	0	1	1
	0,1	0,9596	0,9512
	0,5	0,8210	0,7840
	1	0,6891	0,6260
C-C	0	1	1
	0,1	0,9519	0,9428
	0,5	0,7916	0,7527
	1	0,6469	0,5821
C-F	0	1	1
	0,1	0,9739	0,9694
	0,5	0,8798	0,8595
	1	0,7816	0,7456

Để so sánh, tải trọng tới hạn đã được chuẩn hóa cho các cột có mô-men quán tính hàm mũ nhận được bởi GCA như sau:

$$P_{GCA}^{exp} = - \frac{\langle \frac{d^2}{dx^2} (e^{-aLx} \frac{d^2w}{dx^2}) w \rangle}{\langle \frac{d^2w}{dx^2} w \rangle} \quad (3.100)$$

Từ Bảng 3.8 thể hiện hệ số tương đương cho bốn loại cột có mô-men quán tính theo hàm số mũ. Tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa nhận được bằng phương trình (3.96) và phương trình (3.97) đối với bốn bài toán cột có mô-men quán tính theo hàm số mũ được trình bày trong Bảng 3.8, được so sánh với các giá trị tương ứng nhận được bởi GCA, và các giá trị chính xác nhận được từ [130]. Đối với mỗi loại cột, có 4 giá trị  $aL$ , nằm trong khoảng từ 0 đến 1. Lưu ý rằng khi  $aL = 0$ , cột là đồng nhất và tải trọng tới hạn là phù hợp với tải trọng nhận được từ Mục 3.6.

*Bảng 3.9. Tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa, nhận được bởi GWLA, GCA và nghiệm chính xác với bốn loại cột có mô-men quán tính theo hàm số mũ*

Loại cột	$aL$	$p_{exact}^{exp}$ [130]	$p_{GCA}^{exp}$ (3.100)	%E	$p_{GWLA}^{exp,CA}$ (3.96)	%E	$p_{GWLA}^{exp,WLA}$ (3.97)	%E
P-P	0	9,8696	9,8823	0,1289	9,7054	1,6639	9,7054	1,6639
	0,1	9,3800	9,4020	0,2349	9,2337	1,5597	9,2210	1,6951
	0,5	7,6340	7,7308	1,2676	7,5923	0,5462	7,5386	1,2497
	1	5,8270	6,1017	4,7139	5,9925	2,8402	5,9043	1,3266
C-P	0	20,1907	21,0000	4,0081	20,1444	0,2293	20,1444	0,2294
	0,1	19,2000	20,1519	4,9577	19,3269	0,6609	19,1603	0,2068
	0,5	15,6400	17,2408	10,2355	16,5210	5,6330	15,7930	0,9783
	1	11,9900	14,4716	20,6976	13,8517	15,5271	12,6102	5,1726
C-C	0	39,4784	42,0000	6,3872	39,9657	1,2344	39,9657	1,2343
	0,1	37,5500	39,9778	6,4655	38,0322	1,2842	37,6781	0,3411
	0,5	30,6000	33,2473	8,6514	31,5969	3,2578	30,0830	1,6895
	1	23,4900	27,1709	15,6700	25,7867	9,7773	23,2644	0,9604
C-F	0	2,4674	3,0725	24,5230	2,5248	2,3263	2,5248	2,3263
	0,1	2,3943	2,1381	10,6993	2,4588	2,7014	2,4476	2,2268
	0,5	2,1104	-0,6757	132,0193	2,2212	5,2558	2,1702	2,8320
	1	1,7824	-2,7134	252,2319	1,9731	10,7036	1,8825	5,6155

Đối với các cột có mô-men quán tính được cho bởi hàm lũy thừa, ta có

$$G(Lx) = (1 - bLx)^a \quad (3.101)$$

trong đó,  $b$  và  $a$  là hằng số dương tùy ý, phương trình cân bằng của cột có dạng

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( (1 - bLx)^a \frac{d^2w}{dx^2} \right) + P^{pow} \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (3.102)$$

trong đó  $P^{pow}$  là tải trọng tới hạn không thứ nguyên của cột với mô-men quán tính được cho bởi hàm lũy thừa. Tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa có thể nhận được bằng

cách sử dụng quan hệ được mô tả trong phương trình (3.93) ứng với  $k^{var} = k_{CA}^{pow}$  và  $k^{var} = k_{WLA}^{pow}$

$$P_{GWLA}^{pow,CA} = k_{CA}^{pow} P_{GWLA}^{const} \quad (3.103)$$

$$P_{GWLA}^{pow,WLA} = k_{WLA}^{pow} P_{GWLA}^{const} \quad (3.104)$$

trong đó,  $k_{CA}^{pow}$  và  $k_{WLA}^{pow}$  là hệ số tương đương xác định bằng việc thay phương trình (3.101) vào phương trình (3.89), (3.90) với  $\alpha = 0$  và  $\alpha = 0.5$  tương ứng.

$$k_{CA}^{pow} = \frac{\langle (1 - bLx)^a \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \rangle}{\langle \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \rangle} \quad (3.105)$$

$$k_{WLA}^{pow} = \min_{r \in [0,1]} \frac{\langle (1 - bLx)^a \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \Big| x^{1.5-x}, r \rangle}{\langle \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \Big| x^{1.5-x}, r \rangle} \quad (3.106)$$

*Bảng 3.10.* Hệ số tương đương của cột có mô-men quán tính thay đổi ( $a = 1$ )

Loại cột	$bL$	$k_{CA}^{pow}$	$k_{WLA}^{pow}$
P-P	0	1	1
	0,1	0,9500	0,9486
	0,3	0,8500	0,8459
	0,5	0,7500	0,7432
C-P	0	1	1
	0,1	0,9581	0,9496
	0,3	0,8744	0,8487
	0,5	0,7907	0,7479
C-C	0	1	1
	0,1	0,9498	0,9405
	0,3	0,8493	0,8216
	0,5	0,7488	0,7027
C-F	0	1	1
	0,1	0,9734	0,9687
	0,3	0,9201	0,9062
	0,5	0,8669	0,8436

*Bảng 3.11.* Hệ số tương đương của cột có mô-men quán tính thay đổi ( $a = 2$ )

Loại cột	$bL$	$k_{CA}^{pow}$	$k_{WLA}^{pow}$
P-P	0	1	1
	0,1	0,9029	0,9003
	0,3	0,7257	0,7186
	0,5	0,5714	0,5607
C-P	0	1	1
	0,1	0,9189	0,9024
	0,3	0,7725	0,7265
	0,5	0,6471	0,5764
C-C	0	1	1
	0,1	0,9033	0,8857
	0,3	0,7330	0,6845
	0,5	0,5933	0,5199
C-F	0	1	1
	0,1	0,9479	0,9388
	0,3	0,8504	0,8248
	0,5	0,7620	0,7217

Để so sánh, tải trọng tối hạn chuẩn hóa nhận được bởi GCA đối với cột có mô-men quán tính dạng hàm lũy thừa là

$$P_{GCA}^{pow} = - \frac{\langle \frac{d^2}{dx^2} \left( (1 - bLx)^a \frac{d^2w}{dx^2} \right) w \rangle}{\langle \frac{d^2w}{dx^2} w \rangle} \quad (3.107)$$

*Bảng 3.12. Tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa nhận được bởi GWLA, GCA và nghiệm chính xác với bốn loại cột có mô-men quán tính thay đổi tuyến tính ( $a = 1$ )*

Loại cột	$bL$	$P_{exact}^{pow}$ [130]	$P_{GCA}^{pow}$ (3.107)	%E	$P_{GWLA}^{pow,CA}$ (3.103)	%E	$P_{GWLA}^{pow,WLA}$ (3.104)	%E
P-P	0	9,8696	9,8823	0,1289	9,7054	1,6639	9,7054	1,6639
	0,1	9,3720	9,3882	0,1729	9,2201	1,6205	9,2069	1,7613
	0,3	8,3430	8,4000	0,6828	8,2496	1,1196	8,2099	1,5954
	0,5	7,2560	7,4117	2,1462	7,2791	0,3177	7,2130	0,5932
C-P	0	20,1907	21,0000	4,0081	20,1444	0,2293	20,1444	0,2294
	0,1	19,1700	20,1250	4,9817	19,3010	0,6831	19,1287	0,2153
	0,3	17,0300	18,3750	7,8978	17,6143	3,4308	17,0972	0,3944
	0,5	14,7400	16,6250	12,7883	15,9274	8,0554	15,0656	2,2089
C-C	0	39,4784	42,0000	6,3872	39,9657	1,2344	39,9657	1,2343
	0,1	37,4800	39,9000	6,4568	37,9578	1,2749	37,5889	0,2907
	0,3	33,2700	35,7000	7,3039	33,9421	2,0201	32,8354	1,3062
	0,5	28,7000	31,5000	9,7561	29,9259	4,2715	28,0819	2,1537
C-F	0	2,4674	3,0725	24,5230	2,5248	2,3263	2,5248	2,3263
	0,1	2,3932	2,0835	12,9424	2,4576	2,6926	2,4458	2,1968
	0,3	2,2350	0,1054	95,2830	2,3231	3,9438	2,2879	2,3668
	0,5	2,0623	-1,8726	190,8021	2,1887	6,1302	2,1300	3,2814

*Bảng 3.13. Tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa nhận được bởi GWLA, GCA và nghiệm chính xác với bốn loại cột có mô-men quán tính thay đổi bậc hai ( $a = 2$ )*

Loại cột	$bL$	$P_{exact}^{pow}$ [130]	$P_{GCA}^{pow}$ (3.107)	%E	$P_{GWLA}^{pow,CA}$ (3.103)	%E	$P_{GWLA}^{pow,WLA}$ (3.104)	%E
P-P	0	9,8696	9,8823	0,1289	9,7054	1,6639	9,7054	1,6639
	0,1	8,8930	8,9223	0,3297	8,7626	1,4661	8,7373	1,7509
	0,3	7,0050	7,1717	2,3801	7,0433	0,5469	6,9739	0,4438
	0,5	5,1980	5,6470	8,6381	5,5460	6,6941	5,4413	4,6812
C-P	0	20,1907	21,0000	4,0081	20,1444	0,2293	20,1444	0,2294
	0,1	18,1900	19,3050	6,1297	18,5107	1,7630	18,1779	0,6652
	0,3	14,2900	16,4250	13,6809	15,5612	8,8954	14,6345	2,4108
	0,5	10,5300	13,6250	29,3922	13,0356	23,7953	11,6112	10,2681
C-C	0	39,4784	42,0000	6,3872	39,9657	1,2344	39,9657	1,2343
	0,1	35,5600	37,9600	6,7492	36,1026	1,5259	35,3956	0,4623
	0,3	27,9100	30,8400	10,4980	29,2949	4,9619	27,3545	1,9903
	0,5	20,4800	25,0000	22,0703	23,7109	15,7757	20,7798	1,4637
C-F	0	2,4674	3,0725	24,5230	2,5248	2,3263	2,5248	2,3263
	0,1	2,3190	1,2076	47,9254	2,3933	3,2022	2,3703	2,2114
	0,3	2,0120	-1,8431	191,6067	2,1471	6,7155	2,0824	3,4967
	0,5	1,6830	-3,9885	336,9893	1,9238	14,3061	1,8222	8,2724

Từ *Bảng 3.10* và *Bảng 3.11* tóm tắt các hệ số tương đương cho ba loại cột có mô-men quán tính thay đổi tuyến tính ( $a = 1$ ) và bậc hai ( $a = 2$ ). Tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa nhận được bằng phương trình (3.103) và phương trình (3.104) đối với bốn loại cột có mô-men quán tính thay đổi tuyến tính và bậc hai được trình bày trong *Bảng 3.12* và *Bảng 3.13* có so sánh với các giá trị tương ứng nhận được bởi GCA và các giá trị chính xác nhận được từ [130]. Đối với mỗi loại cột, có 4 giá trị của  $bL$ ,



nằm trong khoảng từ 0 đến 0,5. Lưu ý rằng khi  $bl = 0$ , cột là đồng nhất và tải trọng tới hạn trùng với giá trị nhận được từ mục 3.6.

### 3.8 Thảo luận về kết quả phát triển tính chất trực giao dựa vào kỹ thuật WLA

Có thể nhận thấy việc phát triển tính chất trực giao thông qua triển khai kỹ thuật WLA vào phương pháp Galerkin và phương pháp bình phương tối thiểu cải thiện đáng kể độ chính xác của các lời giải xấp xỉ bậc nhất cho bài toán xác định tải trọng tới hạn của các cột với cả các tiết diện không đổi và thay đổi. Từ Bảng 3.7, các nghiệm nhận được bởi GWLA chính xác hơn nhiều so với lời giải nhận được bởi GCA đối với ba trong số bốn loại cột có tiết diện không đổi.

Ngoài ra, các nghiệm nhận được bởi GWLA có kết quả tốt với các sai số nhỏ (trong khoảng từ 0,2% đến 2,3%), trong khi đó, sai số của các nghiệm nhận được bởi GCA phân bố từ 0,1% đến 24,5%. Đối với các cột có tiết diện thay đổi, WLA đề xuất được áp dụng vào phương pháp bình phương tối thiểu để chuyển cột có tiết diện thay đổi thành cột tương đương với tiết diện không đổi. GWLA đã thể hiện sự vượt trội của nó so với GCA trong việc xác định tải trọng tới hạn, đặc biệt là đối với các cột có mô-men quán tính biến thiên rất lớn, mà điều này không hiển nhiên có được khi sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu thông thường, nhưng điều này là chắc chắn khi sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu với WLA để biến cột có tiết diện thay đổi thành cột tương đương có tiết diện không đổi. Từ Bảng 3.9, Bảng 3.12 Bảng 3.13 sai số của tải trọng tới hạn đã chuẩn hóa nhận được bằng phương pháp GWLA,  $P_{GWLA}^{var,WLA}$ , nằm trong khoảng 10%, trong khi đó sai số của  $P_{GCA}^{var}$  có thể lên tới hơn 300% đối với trường hợp mô-men quán tính biến đổi phi tuyến bậc cao.

Giá trị tính toán cho các cột có tiết diện không đổi nhận được bởi SGWLA có sai số phần trăm nhỏ. Mặt khác, chỉ các giá trị  $P_{GWLA}^{const}(0,5; 0,25)$  và  $P_{GWLA}^{const}(0,5; 0,75)$  là cần cho SGWLA, trong khi đó, GWLA định trị  $P_{GWLA}^{const}(\alpha, r)$  với mọi giá trị của  $\alpha$  và  $r \in [0, 1]$ . Do đó, thuật toán SGWLA không chỉ cải thiện nghiệm nhận được bởi GCA mà còn giảm đáng kể thời gian tính toán cần thiết với GWLA nguyên gốc.

Mặc dù GWLA có hiệu quả, nó vẫn cần có những nghiên cứu toàn diện hơn nữa đối với các lớp bài toán lớn hơn, chẳng hạn như nghiên cứu các hàm trọng số khác nhau,  $r^{f(r)}$  và các lựa chọn khác nhau của tham số  $\alpha$  và  $r$ . Như đã thảo luận ở trên, có thể thấy từ

Hình 3.3 rằng  $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$  giảm dần và đi qua  $P_{exact}^{const}$  khi  $\alpha$  tăng từ 0 đến 1. Do đó, có khả năng tồn tại một giá trị  $\alpha$  để  $P_{GWLA}^{const}(\alpha)$  bằng với  $P_{exact}^{const}$ . Trong nghiên cứu tiếp theo, tác giả sẽ khảo sát đặc điểm thú vị này để cải thiện hơn nữa việc lựa chọn giá trị thích hợp của  $\alpha$ . Ngoài ra, mặc dù việc sử dụng một giá trị không đổi  $\alpha$  làm giảm khối lượng tính toán, các nghiệm nhận được bởi GWLA trở nên kém chính xác hơn do tiết diện của cột thay đổi nhanh hơn. Do đó, sẽ là hợp lý hơn, nhưng phức tạp hơn khi đề xuất  $\alpha$  có thể là một hàm của tốc độ thay đổi của tiết diện của cột trong các nghiên cứu tiếp theo trong tương lai. Cuối cùng, nghiên cứu này đóng vai trò là nền tảng cơ bản cho việc phát triển các phép xấp xỉ giải tích bậc cao hơn bằng cách sử dụng GWLA và cho việc khảo sát tốc độ hội tụ của nó khi so sánh với của GCA.

Ưu điểm của phương pháp WLA đề xuất được minh họa thông qua phát triển tính chất trực giao bằng việc ứng dụng vào phương pháp Galerkin, mà dẫn đến một phương pháp Galerkin sử dụng trung bình cục bộ có trọng số (GWLA). Việc áp dụng GWLA vào bài toán ổn định đàn hồi của các cột chỉ ra rằng ý tưởng mới này có thể cải thiện đáng kể độ chính xác của nghiệm xấp xỉ bậc nhất của phương pháp Galerkin với tính chất trực giao thông thường.

Để giải quyết bài toán chọn một hàm trọng số cụ thể trong số lớp các hàm trọng số một tham số, một hướng tiếp cận cục bộ - toàn cục được triển khai. Các xấp xỉ tiếp theo mà dẫn đến phương pháp GWLA đơn giản hóa (SGWLA) đã được thực hiện để giảm khối lượng tính toán trong khi vẫn duy trì độ chính xác của các lời giải nhận được từ GWLA. Ngoài ra, hiệu quả của WLA được minh họa bằng sự kết hợp của nó với phương pháp bình phương tối thiểu để đưa cột có tiết diện thay đổi thành cột tương đương với tiết diện không đổi. Các tính toán bằng số cho thấy rằng tải trọng tới hạn xấp xỉ nhận được bởi GWLA và SGWLA mới được phát triển là tốt hơn những giá trị tương ứng nhận được bằng phương pháp Galerkin mà sử dụng phép lấy trung bình thông thường (GCA).

Các thuật toán số mới này có thể đưa ra một công cụ thay thế mới và hiệu quả để tính toán kỹ thuật trong việc thiết kế các hệ kết cấu với các tiết diện thay đổi. Tuy nhiên, cần phải tiến hành các nghiên cứu toàn diện hơn nữa để tìm ra các hàm trọng số thích hợp mà có thể đưa ra các nghiệm xấp xỉ tốt nhất cho các lớp bài toán lớn hơn. Đặc biệt, WLA được đề xuất có thể được kiểm chứng đối với các cột có các điều kiện biên khác và cũng được mở rộng cho các bài toán mất ổn định của các kết cấu

phức tạp hơn như cột, tấm và vỏ phi tuyến trong đó việc sử dụng dạng giải tích của phương pháp Galerkin thường bị giới hạn bởi các phép xấp xỉ bậc nhất.

### 3.9 Kết luận chương 3

1. Trong 3.2 của chương 3, tác giả đã áp dụng tiêu chuẩn tuyến tính hóa đối ngẫu có trọng số của tuyến tính hóa tương đương cho các bài toán ổn định Euler. Có thể thấy rằng kỹ thuật được đề xuất có thể đưa ra các nghiệm xấp xỉ chính xác hơn so với các nghiệm thu được từ phương pháp Galerkin tương ứng. Điều cốt yếu của phương pháp này là xác định tiêu chuẩn tương đương qua đó tìm ra các hệ số tuyến tính hóa cho một hệ phi tuyến đã cho. Độ chính xác của các hệ số tuyến tính hóa có thể được cải thiện bằng cách sử dụng phương pháp đối ngẫu kết hợp hai thay thế đi và về trong tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số. Việc đưa ra trọng số  $p$  làm cho tiêu chuẩn sai số trung bình bình phương đối ngẫu có trọng số linh hoạt hơn so với tiêu chuẩn sai số thông thường và đối ngẫu không trọng số ( $p = 1/2$ ). Kết quả này được công bố trong bài báo số 2 là sự phát triển tiếp tục bài báo số 1 cho trường hợp dầm có một đầu ngàm và một đầu bản lề. Qua tính toán thử nghiệm với 7 hàm thử cho thấy các giá trị trọng số tính theo công thức (3.42) đều cho nghiệm có sai số tương ứng nhỏ hơn sai số của nghiệm thu được bằng phương pháp Galerkin. Với bài toán đã xét giá trị trọng số  $p_1$  là giá trị cần tìm. Kết quả tính toán này mở ra hướng nghiên cứu áp dụng tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số cho các bài toán ổn định khác.

2. Tính chất trực giao thông qua phép lấy trung bình đóng một vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật đặc biệt là đối với phương pháp Galerkin. Việc phát triển tính chất trực giao thông qua các phép lấy trung bình khác nhau dẫn đến các nghiệm xấp xỉ khác nhau. Điều đó ngụ ý một câu hỏi mở về phép lấy trung bình thích hợp nào sẽ được sử dụng cho một bài toán nhất định để đưa ra nghiệm chính xác nhất. Trong chương này, tác giả đã phát triển tính chất trực giao để thay thế cho phương pháp lấy trung bình thông thường (CA) bằng phép lấy trung bình cục bộ có trọng số (WLA) tại một giá trị cục bộ  $r$  được giới thiệu trong nghiên cứu này với một hàm trọng số là  $r^{f(r)}$ .

4. Một lớp đa thức trọng số một tham số bậc nhất,  $r^{1+\alpha-2\alpha r}$ , được trình bày và phân tích chi tiết. Một đặc điểm đáng chú ý của các hàm trọng số này là WLA tương ứng trùng với CA tại 3 điểm, đó là  $r = 0$ ,  $r = 0,5$  và  $r = 1$ .

5. Việc áp dụng phương pháp lấy trung bình có trọng số được đề xuất vào phương pháp Galerkin dẫn đến GWLA. Hướng tiếp cận tổng thể-cục bộ được triển khai để giải bài toán chọn một hàm trọng số cụ thể trong lớp các hàm trọng số một tham số. Các phép tính gần đúng dẫn đến SGWLA đã được thực hiện để cải thiện tốc độ tính toán trong khi vẫn duy trì độ chính xác của các lời giải nhận được bởi GWLA.

6. Để giải quyết bài toán ổn định với các cột có tiết diện thay đổi, tác giả đã đề xuất WLA để áp dụng vào phương pháp bình phương tối thiểu và chuyển cột có tiết diện thay đổi thành cột tương đương với tiết diện không đổi. Kết quả này mở ra một hướng nghiên cứu có thể áp dụng trong nhiều bài toán kỹ thuật trong thực tế.

7. Ứng dụng của GWLA và SGWLA để xác định tải trọng tới hạn của các cột với các điều kiện biên và mặt cắt khác nhau được trình bày trong chương này. Các tính toán bằng số cho thấy rằng GWLA và SGWLA đưa ra những cải thiện đáng kể về độ chính xác của tải trọng tới hạn xấp xỉ so với kết quả nhận được bởi GCA đối với các cột được xem xét.

Kết quả trong chương này được công bố trên công trình nghiên cứu đã công bố số [1], [2], [5].

## **CHƯƠNG 4. PHÁT TRIỂN TÍNH CHẤT TRỰC GIAO ÁP DỤNG TRONG PHÂN TÍCH BÀI TOÁN DAO ĐỘNG PHI TUYẾN**

### **4.1 Giới thiệu**

Chương này phát triển tính chất trực giao thông qua tuyến tính hóa tương đương đối ngẫu với một trọng số cho các hệ động lực tiền định phi tuyến. Bài toán thay thế tương đương của một hàm phi tuyến bằng một hàm tuyến tính được hiệu chỉnh ngắn gọn bằng cách sử dụng phương pháp đối ngẫu bao gồm hai bước thay thế lượt đi và lượt về. Việc lựa chọn thêm một trọng số kết nối hai hàm mục tiêu được khảo sát bằng cách sử dụng phân tích bán giải tích. Tuyến tính hóa tương đương đối ngẫu với trọng số đã được chọn để phân tích tần số của dao động tự do phi tuyến, và một số trường hợp cụ thể được nghiên cứu sau đó được thực hiện để xác minh độ chính xác và ảnh hưởng của tính phi tuyến đến hiệu quả của kỹ thuật được đề xuất.

Nội dung của chương tập trung vào việc phát triển tuyến tính hóa tương đương đối ngẫu (dual equivalent linearization - DEL) với một trọng số cho các hệ động lực tiền định phi tuyến. Hơn nữa, việc lựa chọn một trọng số kết nối hai hàm mục tiêu là mục tiêu chính. Chương này được cấu trúc như sau: Mục 4.2 trình bày công thức của DEL, các tính chất cơ bản của nó và việc lựa chọn trọng số được đề xuất bằng cách sử dụng khảo sát bán giải tích. Mục 4.3 bao gồm việc áp dụng qui trình tuyến tính hóa tương đương đối ngẫu với trọng số đã chọn để phân tích tần số của dao động tự do phi tuyến, và một số trường hợp điển hình sau đó được khảo sát. Các nghiệm xấp xỉ mà DEL đề xuất đưa ra được so sánh với các nghiệm chính xác cũng như của một số phương pháp phân tích gần đúng khác để xác minh độ chính xác và ảnh hưởng của tính phi tuyến tính đến hiệu quả của phương pháp đề xuất. Kết luận của chương 4 được đưa ra trong Mục 4.4.

### **4.2 Tuyến tính hóa đối ngẫu áp dụng cho các hệ dao động tiền định phi tuyến**

#### ***4.2.1 Tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số***

Từ những phân tích ở mục 2.4.2 của Chương 2, chi tiết hơn, các đặc tính chính của WDC có thể được rút ra từ những quan sát đáng chú ý sau:

(a) Sự thay thế kép (lượt đi, lượt về) có thể được xem xét từ hai lượt thay thế, sự thay thế hai chiều như được mô tả trong công thức (2.57) và hai sự thay thế một

chiều tương ứng với trường hợp  $p = 0$ . Tiêu chuẩn thứ hai có thể được biểu thị dưới dạng tiêu chuẩn bình phương trung bình thông thường [92]

$$\langle e_{cf}^2 \rangle = \langle (A - k_c B)^2 \rangle \rightarrow \min_{k_c} \quad (4.1)$$

$$\langle e_{cr}^2 \rangle = \langle (k_c B - \lambda_c A)^2 \rangle \rightarrow \min_{\lambda_c} \quad (4.2)$$

Từ (4.1), (4.2) ta được hệ số tuyến tính hóa tương đương và hệ số trả về tương ứng là

$$k_c = \frac{\langle AB \rangle}{\langle B^2 \rangle} \quad (4.3)$$

$$\lambda_c = k_c \frac{\langle AB \rangle}{\langle A^2 \rangle} = \frac{\langle AB \rangle^2}{\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle} = r^2 \quad (4.4)$$

Thay thế (4.3), (4.4) vào (4.1), (4.2) để cho ra các giá trị tối thiểu của sai số lượt đi và lượt về trung bình bình phương thông thường

$$\begin{aligned} \min_{k_c} \langle e_{cf}^2 \rangle &= \langle (A - k_c B)^2 \rangle = \langle A^2 - 2k_c AB + k_c^2 B^2 \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2 \frac{\langle AB \rangle}{\langle B^2 \rangle} \langle AB \rangle + \frac{\langle AB \rangle^2}{\langle B^2 \rangle^2} \langle B^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \frac{\langle AB \rangle^2}{\langle B^2 \rangle} \\ &= (1 - r^2) \langle A^2 \rangle \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\min_{\lambda_c} \langle e_{cr}^2 \rangle = \langle (k_c B - \lambda_c A)^2 \rangle = r^2 (1 - r^2) \langle A^2 \rangle \quad (4.6)$$

Sai số bình phương trung bình tối thiểu (4.5), (4.6) một lần nữa tiết lộ vai trò quan trọng của hệ số tương quan bình phương  $r^2$  trong các thay thế một chiều. Đặc biệt, việc thay thế A bằng  $k_c B$  là một sự phù hợp chính xác khi  $r^2 = 1$  khi đó  $k_c = A/B = \text{const}$ , và  $\min_{k_c} \langle e_{cf}^2 \rangle = \min_{\lambda_c} \langle e_{cr}^2 \rangle = 0$ . Ngược lại, điều tệ nhất là khi  $r^2 = 0$  tức là  $k_c = \langle AB \rangle / \langle B^2 \rangle = 0$ , thì  $\min_{k_c} \langle e_{cf}^2 \rangle$  trở thành lớn nhất,  $\min_{k_c} \langle e_{cf}^2 \rangle = \langle A^2 \rangle$ , và  $\min_{\lambda_c} \langle e_{cr}^2 \rangle = 0$ .

(b) Các đặc điểm trên cũng đúng với phép thay thế hai chiều (2.57). Sai số bình phương trung bình tối thiểu của phép thay thế hai chiều thu được bằng cách thay thế (2.60), (2.61) vào (2.57) ta được

$$\begin{aligned}
\min_{k,\lambda} \langle e_{df}^2 \rangle &= \min_{k,\lambda} \langle (A - k_d B)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - 2k_d \langle AB \rangle + k_d^2 \langle B^2 \rangle \\
&= \langle A^2 \rangle - 2 \frac{(1-p) \langle AB \rangle^2}{(1-r^2 p) \langle B^2 \rangle} + \frac{(1-p)^2 \langle AB \rangle^2}{(1-r^2 p)^2 \langle B^2 \rangle} \\
&= (1-r^2) \frac{(1-2r^2 p + r^2 p^2)}{(1-r^2 p)^2} \langle A^2 \rangle
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\min_{k,\lambda} \langle e_{dr}^2 \rangle = \min_{k,\lambda} \langle (k_d B - \lambda_d A)^2 \rangle = r^2 (1-r^2) \left( \frac{1-p}{1-r^2 p} \right)^2 \langle A^2 \rangle$$

Rõ ràng khi mức phi tuyến yếu nhất với  $r^2 = 1$ ,  $k_{wd} = A/B = \text{const}$ ,  $\lambda_{wd} = 1$ , thì  $\min_{k,\lambda} e_{wd}^2 = \min_{k,\lambda} \langle e_{df}^2 \rangle = \min_{k,\lambda} \langle e_{dr}^2 \rangle = 0$ ,  $\forall p$ . Ngược lại, khi  $r^2 = 0$  ta có  $k_{wd} = \lambda_{wd} = 0$ , thì  $\min_{k,\lambda} \langle e_{df}^2 \rangle$  trở thành lớn nhất và  $\min_{k,\lambda} \langle e_{dr}^2 \rangle = 0$ . Trường hợp khi  $p = 1$ , thì  $\min_{k,\lambda} \langle e_{df}^2 \rangle = \langle A^2 \rangle$ ,  $\min_{k,\lambda} \langle e_{dr}^2 \rangle = 0$ . Do đó, sử dụng các điều kiện (2.58), (2.64), các đặc điểm của trọng số  $p$  được chọn như sau

$$\begin{aligned}
0 \leq p \leq 1, r^2 p \neq 1 \\
p \rightarrow 1 \text{ khi } r^2 \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

(c) So sánh (4.3), (4.4) với (2.60), (2.61), và đề ý (2.58), (2.62), thì chúng ta có mối quan hệ của các hệ số tuyến tính hóa tương đương được đưa ra bởi các thay thế một chiều và hai chiều tương ứng là

$$0 \leq \frac{k_d}{k_c} = \frac{\lambda_d}{\lambda_c} = \frac{1-p}{1-r^2 p} \leq 1 \tag{4.9}$$

Các tỉ lệ từ phương trình (4.9) đóng vai trò là hệ số mở rộng trong đó hệ số tuyến tính hóa đối ngẫu được giới hạn bởi hệ số tuyến tính hóa kinh điển.

#### 4.2.2 Chọn trọng số cho hệ động lực học tiền định

Vấn đề quan trọng bây giờ là làm thế nào để chọn trọng số, vì sự thay thế kép của  $A$  thay bằng  $kB$  về cơ bản phụ thuộc vào hệ số này. Để xây dựng trọng số  $p$ , tác giả sẽ khảo sát chi tiết giá trị tối thiểu của tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số (2.57) được viết lại ở dạng không thứ nguyên. Vì mục đích này, tác giả giới thiệu sai số đối ngẫu bình phương trung bình (hay sự sai khác của thay thế đối ngẫu) giữa các hàm phi tuyến gốc và hàm phi tuyến đối ngẫu trả về là  $A$  và  $\lambda_d A$  khi sử dụng (2.61)

$$\langle A^2 \rangle - \langle (\lambda_d A)^2 \rangle = (1 - \lambda_d^2) \langle A^2 \rangle = \left[ 1 - \frac{r^4 (1-p)^2}{(1-pr^2)^2} \right] \langle A^2 \rangle \tag{4.10}$$

Chia (2.57) cho (4.10) và từ (4.7) ta được

$$\frac{\min_{k,\lambda}\langle e_{wd}^2 \rangle}{(1 - \lambda_d^2)\langle A^2 \rangle} = (1 - p) \frac{\min_{k,\lambda}\langle e_{df}^2 \rangle}{(1 - \lambda_d^2)\langle A^2 \rangle} + p \frac{\min_{k,\lambda}\langle e_{dr}^2 \rangle}{(1 - \lambda_d^2)\langle A^2 \rangle} \quad (4.11)$$

Chúng ta quan tâm đến trọng số  $p$  thỏa mãn điều kiện cân bằng cho hai số hạng của (4.11), cụ thể là

$$(1 - p) \frac{\min_{k,\lambda}\langle e_{df}^2 \rangle}{(1 - \lambda_d^2)\langle A^2 \rangle} = p \frac{\min_{k,\lambda}\langle e_{dr}^2 \rangle}{(1 - \lambda_d^2)\langle A^2 \rangle} \quad (4.12)$$

Điều kiện cân bằng (4.12) sẽ thỏa mãn nếu

$$1 - p = \frac{\min_{k,\lambda}\langle e_{dr}^2 \rangle}{(1 - \lambda_d^2)\langle A^2 \rangle}, p = \frac{\min_{k,\lambda}\langle e_{df}^2 \rangle}{(1 - \lambda_d^2)\langle A^2 \rangle} \quad (4.13)$$

Thay thế (4.7) và (4.10) vào (4.13) ta có,

$$1 - p = \frac{r^2(1 - r^2)(1 - p)^2}{(1 - r^2p)^2 - r^4(1 - p)^2} \quad (4.14)$$

$$p = \frac{(1 - r^2)(1 - 2r^2p + r^2p^2)}{(1 - r^2p)^2 - r^4(1 - p)^2}$$

Hệ (4.14) là vẫn phức tạp và sẽ không được xem xét trong khuôn khổ luận án, thay vì đó, tác giả xem xét xấp xỉ bậc nhất của nó bằng cách cho  $p = 0$  trong vế phải của (4.14). ta có

$$1 - p = \frac{r^2(1 - r^2)}{(1 - r^4)} = \frac{r^2}{1 + r^2}, p = \frac{1}{1 + r^2} \quad (4.15)$$

Phương trình (4.15) chỉ biểu thị một đường cong của  $p$  phụ thuộc vào  $r$  và tác giả sẽ tạo ra một họ từ (4.15). Lưu ý rằng:

$$(1 - p) + p = 1 \quad (4.16)$$

Phương trình này là một trường hợp cụ thể của phương trình sau,

$$\frac{(1 - p)^n}{1^n} + \frac{p^n}{R^n} = 1, n, R > 0 \quad (4.17)$$

Phương trình (4.17) đại diện cho một siêu elip, còn được gọi là đường cong Lamé. Nó là phương trình tổng quát của một hình elip, giúp ta có thể thu được hình tròn, hình elip, hình vuông hoặc hình chữ nhật, tùy thuộc vào giá trị số mũ  $n$  và bán kính  $R$ . Do  $0 \leq p \leq 1$ , phương trình (4.17) là một đường cong phẳng bậc  $n$  trong góc phần tư thứ nhất của siêu elip. Bán kính thứ nhất là 1 và bán kính thứ hai là  $R$ , và một số đặc điểm sau của đường cong này cụ thể như sau:



(i) Khi  $n = R = 1$ , ta thu được trường hợp tuyến tính (4.16).

(ii)  $0 < R = \frac{p}{\sqrt[n]{1-(1-p)^n}} < 1$ , khi  $n > 1$ , thì 1 là bán chính và  $R$  là bán kính

phụ của siêu elip

(iii)  $1 < R = \frac{p}{\sqrt[n]{1-(1-p)^n}}$ , khi  $0 < n < 1$ , thì 1 là bán kính phụ và là  $R$  bán kính

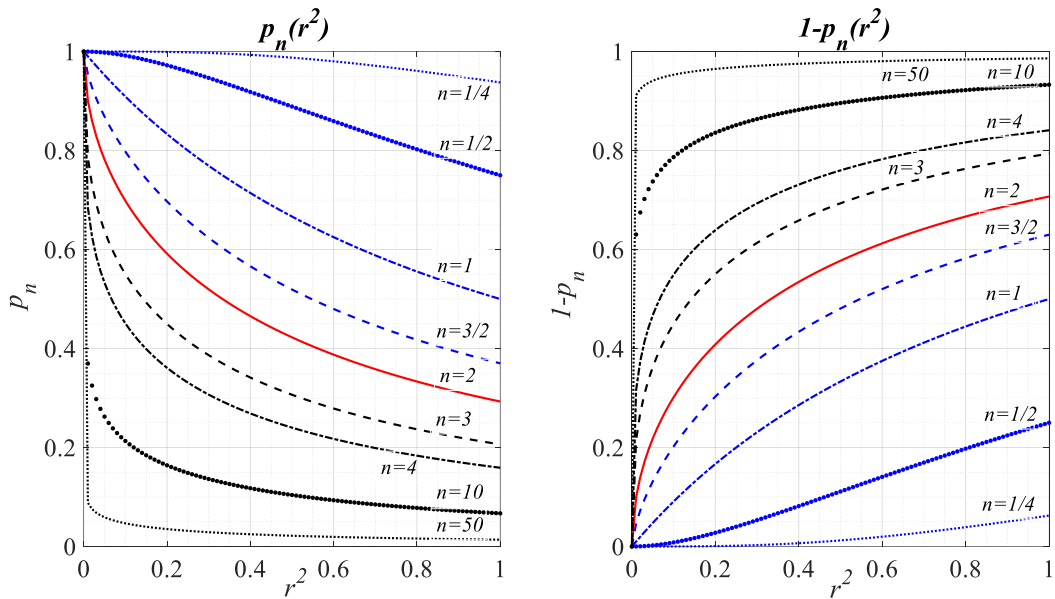
chính của siêu hình elip.

So sánh sự giống nhau của (4.16) và (4.17), ta có thể tạo ra (4.15) để thu được phương trình sau cho một họ của trọng số  $p$

$$(1 - p)^n = \frac{r^2}{1 + r^2}, \frac{p^n}{R^n} = \frac{1}{1 + r^2} \tag{4.18}$$

Giải hệ phương trình (4.18) thu được  $p$  and  $R$  tương ứng

$$p_n = 1 - \sqrt[n]{\frac{r^2}{1 + r^2}}, R_n = \sqrt[n]{1 + r^2} - \sqrt[n]{r^2} \tag{4.19}$$



Hình 4.1. Đồ thị của họ đường cong  $p_n$  và  $1 - p_n$  với  $r^2$

Đồ thị của họ đường cong  $p_n$  được thể hiện trong Hình 4.1. Ta có thể quan sát được rằng  $p_n$  là một hàm giảm của  $r^2$  với mọi  $n > 0$ , và họ đường cong của  $p_n$  thỏa mãn yêu cầu của trọng số từ phương trình (4.8). Thay thế (4.19) vào (2.60) và (2.61) ta được các biểu thức tường minh cho các hệ số trả về và hệ số tuyến tính hóa tương đương

$$\lambda_d = \frac{r^{2n} \sqrt{\frac{r^2}{1+r^2}}}{1 - r^2 \left(1 - \sqrt{\frac{r^2}{1+r^2}}\right)} = \frac{r^{2n} \sqrt{r^2}}{(1 - r^2)^n \sqrt{1+r^2} + r^{2n} \sqrt{r^2}} \quad (4.20)$$

$$k_d = \frac{\sqrt[n]{r^2}}{(1 - r^2)^n \sqrt{1+r^2} + r^{2n} \sqrt{r^2}} \frac{\langle AB \rangle}{\langle B^2 \rangle} \quad (4.21)$$

Theo những sau quan sát thu được từ hình Hình 4.1:

- Với  $n \leq 1$ , thì  $p_n \geq 1/2, \forall r^2$ , và  $p_n \rightarrow 1$  khi  $n \rightarrow 0$ . Giá trị nhỏ nhất của hệ số trọng số tương đối  $p = p_n$  với  $n = 1$  là  $1/2$  tại  $r^2 = 1$ . Rõ ràng là  $n \leq 1$  dẫn đến trọng số quá cao trong các trường hợp phi tuyến nhỏ và vừa.

- Với  $n > 1$ , tất cả các đường cong tương ứng  $p_n$  là cong vào trong. Nếu  $n$  lớn, bán kính nhỏ  $R$  là tăng lên theo tỉ lệ thuận những độ cong của đường cong thì nhỏ dần. Một cách giải thích khác là độ dốc của đường cong là thay đổi chậm với giá trị lớn của  $n$  và  $r^2$ , nhanh hơn với giá trị nhỏ của  $n$  và  $r^2$ .

- Với trường hợp  $n = 2$  ta có

$$p_2 = 1 - \sqrt{\frac{r^2}{1+r^2}} \quad (4.22)$$

Hệ số tuyến tính hóa tương đương tương ứng sẽ là

$$k_d = \frac{r}{(1 - r^2) \sqrt{1+r^2} + r^3} \frac{\langle AB \rangle}{\langle B^2 \rangle} \quad (4.23)$$

Từ Hình 4.1, vị trí của đường cong  $p_2$  cho thấy *vai trò trung gian của nó* trong họ của các trọng số, có nghĩa là tốc độ thay đổi của của  $p = p_2$  tương ứng với  $r^2$  là không quá nhanh và cũng không quá chậm. Bên cạnh đó, cũng rất rõ ràng là phương trình (4.17) với  $n = 2$  cũng đại diện là một elip thông thường. Đây chính là trọng số được ưu tiên xem xét lựa chọn.

Vì vậy, bằng việc phân tích bán giải tích, một trọng số khả thi được chọn bởi (4.22). Trong phần sau, DEL với hệ số tuyến tính hóa tương đương tương ứng được đưa ra bởi (4.23) sẽ được sử dụng để phân tích một số dao động tự do phi tuyến và để kiểm tra độ chính xác của nó.

### 4.3 Áp dụng tuyến tính hóa đối ngẫu trong phân tích dao động tự do phi tuyến

#### 4.3.1 Quy trình tuyến tính hóa đối ngẫu

Hãy xem xét một dao động tự do bảo toàn phi tuyến tổng quát cho bởi phương trình vi phân

$$\ddot{x} + g(x) = 0 \quad (4.24)$$

trong đó  $g(x)$  là một hàm phi tuyến. Với một biên độ ban đầu  $a$ , các điều kiện đầu được giả thiết như sau:

$$x(0) = a, \dot{x}(0) = 0 \quad (4.25)$$

Chuyển động của dao động tự do phi tuyến (4.24) được giả sử là tuần hoàn

$$x(t) = a \cos \omega t \quad (4.26)$$

trong đó  $\omega$  là tần số dao động phi tuyến. Bài toán bây giờ là xác định  $\omega$  như một hàm của biên độ dao động  $a$  and các tham số khác của hệ.

Đối với các hàm phi tuyến lẻ, chu kỳ chính xác và tần số chính xác của dao động (4.24) có thể được xác định bằng các phương trình sau, tương ứng, [75], [76]

$$T_e = 4 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2 \int_x^a g(u) du}} \quad (4.27)$$

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = \pi \left[ 2 \int_0^a \left( 2 \int_x^a g(u) du \right)^{-1/2} dx \right]^{-1} \quad (4.28)$$

Đối với các hàm phi tuyến tùy ý, thông thường áp dụng một phương pháp để tính toán gần đúng tần số riêng của hệ đó. Ở đây tác giả đề xuất sử dụng DEL. Bằng cách thiết lập  $A = g(x), B = x$ , phương trình tuyến tính hóa tương đương với phương trình phi tuyến (4.24) được thay thế như sau

$$\ddot{x} + k_d x = 0 \quad (4.29)$$

trong đó  $k_d$  là hệ số tuyến tính hóa tương đương. Với điều kiện đầu (4.25), đáp ứng chuyển vị của phương trình (4.29) là dạng của (4.26). Vì vậy, tần số xấp xỉ là

$$\omega_{app} = \sqrt{k_d} \quad (4.30)$$

Thay thế (4.23) vào (4.30) ta được tần số xấp xỉ

$$\omega_{d2} = \sqrt{\frac{r}{(1-r^2)\sqrt{1+r^2} + r^3} \frac{\langle xg \rangle}{\langle x^2 \rangle}} \quad (4.31)$$

trong đó giá trị trung bình (2.46) bây giờ là được tính toán cho một chu kỳ dao động  $T = 2\pi/\omega$

$$\langle \blacksquare \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\blacksquare) dx \quad (4.32)$$

Theo đó, ta có

$$\begin{aligned} \langle B^2 \rangle = \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} a^2 \cos^2 \omega t dt = \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 u du \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Các khảo sát sau đây sẽ được thực hiện để xác minh tính chính xác của DEL. Sai số tương đối giữa tần số xấp xỉ và tần số chính xác được đánh giá bằng tỷ lệ phần trăm

$$error(\%) = \frac{\omega_e - \omega_{app}}{\omega_e} 100\% \quad (4.34)$$

#### 4.3.2 Bài toán 1: Dao động với lực phục hồi bậc phân số

Dao động này thuộc lớp bài toán dao động phi tuyến thuần túy. Với hệ động lực này, phương trình chi phối hệ có dạng

$$\ddot{x} + c^2 x|x|^{n-1} = 0 \quad (4.35)$$

trong đó  $c > 0, n > 1$ . Với điều kiện ban đầu (4.25), tần số dao động tự do chính xác của hệ dao động này được cho bởi [43]

$$\omega_e = c \frac{\pi \sqrt{2|a|^{n-1}(n+1)}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3+n}{2(n+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (4.36)$$

trong đó  $\Gamma$  là hàm Euler Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du \quad (4.37)$$

Áp dụng DEL với  $A = g(x) = cx|x|^{n-1}, B = x$ , ta tính toán

$$\langle B^2 \rangle = \langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{2}, \langle AB \rangle = \langle c^2 x^2 |x|^{n-1} \rangle = \frac{c^2 a^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos u|^{n+1} du \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}\langle A^2 \rangle &= \langle (c^2 x |x|^{n-1})^2 \rangle = \frac{c^4 a^{2n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos u|^{2n} du, r^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{2\pi} |\cos u|^{n+1} du \right]^2 / \int_0^{2\pi} \cos^{2n} u du\end{aligned}$$

Và tần số dao động xấp xỉ khi sử dụng (4.31) là

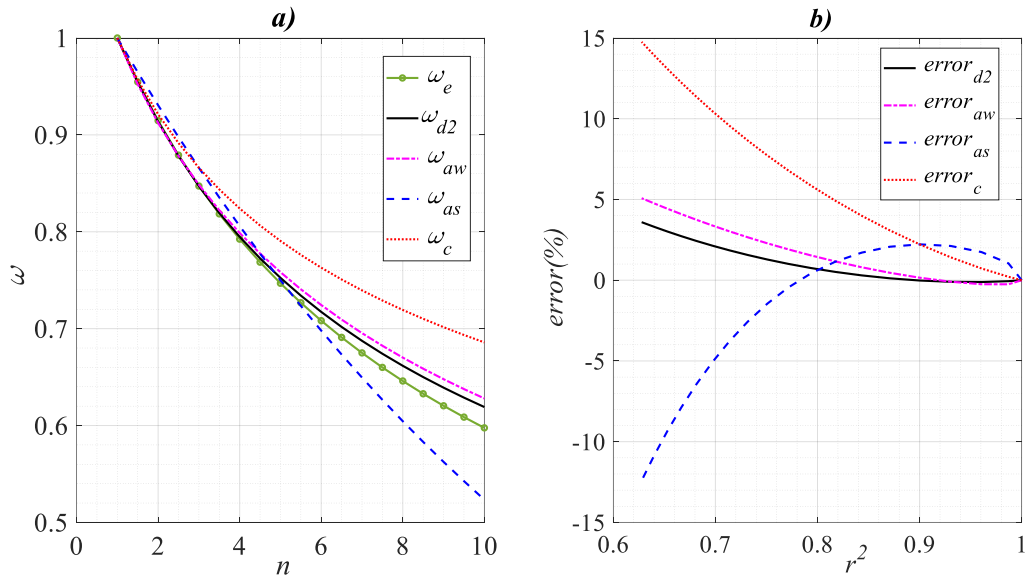
$$\omega_{d2} = c \sqrt{\frac{r}{(1-r^2)\sqrt{1+r^2}+r^3} \frac{a^{n-1}}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos u|^{n+1} du} \quad (4.39)$$

Để kiểm chứng độ chính xác của DEL, tần số chính xác được cho bởi phương trình (4.36) được sử dụng. Hơn nữa, tác giả cũng so sánh một số tần số thu được bởi các phương pháp xấp xỉ khác như  $\omega_c$  từ tiêu chuẩn kinh điển,  $\omega_{aw}$  từ tiêu chuẩn trung bình có trọng số [99],  $\omega_{as}$  phương pháp dựa trên tiệm cận [91]. Những tần số xấp xỉ này được tính theo các công thức tương ứng sau:

$$\omega_c = \sqrt{k_c} = \sqrt{\frac{\langle AB \rangle}{\langle B^2 \rangle}} = \frac{c\sqrt{a^{n-1}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |\cos u|^{n+1} du} \quad (4.40)$$

$$\omega_{aw} = ca^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\int_0^{2\pi} 8ue^{-2u} \cos^2 u |\cos u|^{n-1} du} \quad (4.41)$$

$$\omega_{as} = \sqrt{\frac{g(\alpha a)}{\alpha a}} = \sqrt{c|\alpha a|^{n-1}}, \alpha = \sqrt{3/4} \quad (4.42)$$



Hình 4.2. Tần số xấp xỉ và sai số với các giá trị  $n$  khác nhau

Với các giá trị khác nhau của số mũ  $n$  trong các phương trình (4.36), (4.39) - (4.42), phân tích định tính các tần số chính xác và xấp xỉ được thực hiện trong *Hình 4.2a*, và sai số của chúng được thể hiện trong *Hình 4.2b* trong khi phân tích định lượng tương ứng được trình bày trong *Bảng 4.1*. Tuy nhiên phương trình (4.38) thì  $r^2$  không phụ thuộc vào  $a$  và  $c$  mà chỉ phụ thuộc vào số mũ  $n$ . Cũng như ta có thể thấy trong *Bảng 4.1* giá trị của  $r^2$  giảm tỷ lệ thuận khi  $n$  tăng, cụ thể là đối với biến thiên lớn của  $n$ , từ 1 đến 10, giá trị của  $r^2$  thay đổi trong một khoảng rộng từ 1 đến 0.628. Do đó,  $r^2$  đại diện cho tính phi tuyến tính xuất phát từ bậc của đa thức  $g(x) = cx|x|^{n-1}$ . Cần lưu ý rằng các tần số xấp xỉ được đưa ra bởi các phương trình (4.40), (4.41), (4.42) chỉ phụ thuộc vào  $n$ , trong khi đó tần số xấp xỉ trong (4.39) phụ thuộc vào  $n$  và  $r^2$ .

*Bảng 4.1. Sai số của các tần số xấp xỉ*

$n$	$\omega_e$	$\omega_c$	<i>error</i> (%)	$\omega_{as}$ [91]	<i>error</i> (%)	$\omega_{aw}$ [99]	<i>error</i> (%)	$\omega_{d2}$	<i>error</i> (%)	$r^2$
1,0	1,000	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000
1,5	0,955	0,957	0,21	0,965	1,05	0,952	-0,25	0,954	-0,06	0,987
2,0	0,915	0,921	0,73	0,931	1,74	0,912	-0,25	0,914	-0,11	0,961
2,5	0,879	0,892	1,42	0,898	2,12	0,878	-0,09	0,878	-0,10	0,930
3,0	0,847	0,866	2,22	0,866	2,22	0,849	0,16	0,847	-0,02	0,900
3,5	0,818	0,844	3,09	0,835	2,07	0,822	0,46	0,819	0,12	0,871
4,0	0,792	0,824	3,99	0,806	1,71	0,799	0,80	0,795	0,30	0,843
4,5	0,769	0,806	4,92	0,777	1,15	0,778	1,16	0,773	0,51	0,818
5,0	0,747	0,791	5,86	0,750	0,42	0,758	1,53	0,752	0,75	0,794
5,5	0,727	0,776	6,79	0,724	-0,45	0,741	1,91	0,734	1,01	0,771
6,0	0,708	0,763	7,72	0,698	-1,45	0,724	2,28	0,717	1,28	0,751
6,5	0,691	0,751	8,65	0,673	-2,56	0,709	2,66	0,702	1,56	0,732
7,0	0,675	0,740	9,56	0,650	-3,77	0,695	3,02	0,687	1,85	0,714
7,5	0,660	0,729	10,46	0,627	-5,06	0,682	3,39	0,674	2,14	0,697
8,0	0,646	0,719	11,35	0,604	-6,43	0,670	3,74	0,662	2,43	0,682
8,5	0,633	0,710	12,22	0,583	-7,86	0,659	4,09	0,650	2,72	0,667
9,0	0,620	0,702	13,08	0,563	-9,33	0,648	4,42	0,639	3,01	0,653
9,5	0,609	0,693	13,93	0,543	-10,85	0,638	4,76	0,629	3,31	0,640
10,0	0,598	0,686	14,76	0,523	-12,41	0,628	5,08	0,619	3,59	0,628

Như *Hình 4.2a*, đường cong của  $\omega_{d2}$  là gần nhất và đường cong của  $\omega_c$  là xa nhất với đường cong của  $\omega_e$ , cả hai đều nằm cao hơn với đường cong của nghiệm chính xác. Điều này có nghĩa là  $\omega_{d2}$  được điều chỉnh tốt với hệ số tỉ lệ được cho bởi

(4.9) khi so sánh với  $\omega_c$ . Đường cong  $\omega_{aw}$  là rất gần với đường cong  $\omega_{d2}$  trong khi đường cong  $\omega_{as}$  thu được giá trị quá cao và quá thấp.

Từ *Hình 4.2b* thể hiện đường cong sai số của các tần số xấp xỉ với tần số chính xác. Nhìn chung,  $\omega_{d2}$  cho ta sai số tuyệt đối tối đa là thấp nhất, theo sau đó là  $\omega_{aw}$ ,  $\omega_{as}$ , và cuối cùng là  $\omega_c$ ; từ *Bảng 4.1* các sai số tương ứng là 3,59%, 5,08%, 12,41%, và 14,76% với  $n = 10$ .

### 4.3.3 Bài toán 2: Dao động điều hòa Duffing

Dao động này cũng thuộc lớp các dao động phi tuyến thuần túy trong đó lực phục hồi là một hàm hữu tỉ không chính tắc. Phương trình chi phối hệ là:

$$\ddot{x} + \frac{x^3}{1+x^2} = 0 \quad (4.43)$$

Với điều kiện ban đầu (4.25), tần số dao động tự do chính xác của dao động này từ tài liệu [44] là

$$\omega_e = \frac{2\pi}{4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 u}{a^2 \cos^2 u + \ln\left[1 - \frac{a^2 \cos^2 u}{1+a^2}\right]}} du \quad (4.44)$$

Áp dụng DEL with  $A = g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ ,  $B = x$ , ta thu được tần số xấp xỉ từ phương trình (4.31) là

$$\omega_{d2} = \sqrt{\frac{r}{(1-r^2)\sqrt{1+r^2} + r^3} \frac{a^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 u}{1+a^2 \cos^2 u} du} \quad (4.45)$$

Ta có các giá trị bình phương trung bình và hệ số tương quan bình phương được tính theo (2.46), (2.62) and (4.33) tương ứng là

$$\begin{aligned} \langle B^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{2}, \langle AB \rangle = \left\langle \frac{x^4}{1+x^2} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^4 \cos^4 u}{1+a^2 \cos^2 u} du \\ \langle A^2 \rangle &= \left\langle \frac{x^6}{(1+x^2)^2} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^6 \cos^6 u}{(1+a^2 \cos^2 u)^2} du \\ &= \frac{2}{(a^2+1)^{3/2}} + \frac{5a^2}{2(a^2+1)^{3/2}} + \frac{a^2}{2} - 2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$r^2 = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^4 \cos^4 u}{1+a^2 \cos^2 u} du \right]^2 \left[ \frac{a^2}{2} \left( \frac{2}{(a^2+1)^{3/2}} + \frac{5a^2}{2(a^2+1)^{3/2}} + \frac{a^2}{2} - 2 \right) \right]$$

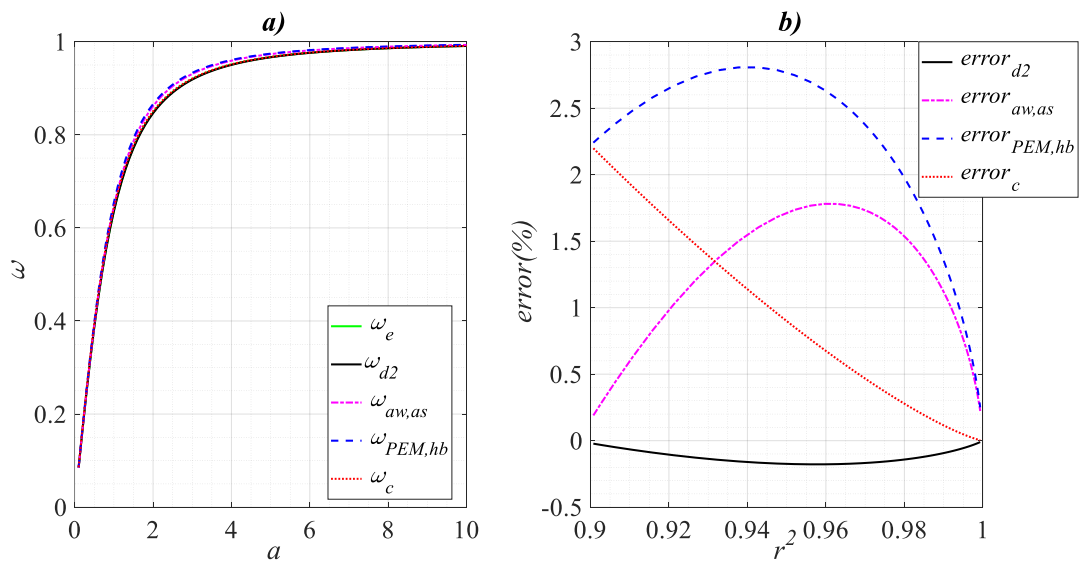
Để xác nhận độ chính xác của DEL, tần số dao động chính xác từ phương trình (4.44) sẽ sử dụng để so sánh. Tương tự như phần trước, một số tần số dao động thu được từ một số phương pháp gần đúng để so sánh như  $\omega_c$  từ tiêu chuẩn kinh điển,  $\omega_{aw}$  từ tiêu chuẩn trung bình trọng số [89],  $\omega_{as}$  thu được từ phương pháp dựa trên tiệm cận [91],  $\omega_{hb}$  từ phương pháp cân bằng điều hòa bậc thấp nhất [105], and  $\omega_{PEM}$  phương pháp tham số mở rộng [103]. Các tần số trên cụ thể như sau:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\langle AB \rangle}{\langle B^2 \rangle}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos^4 u}{1 + a^2 \cos^2 u} du \quad (4.47)$$

$$\omega_{hb} = \omega_{PEM} = \sqrt{\frac{0,75a^2}{1 + 0,75a^2}} \quad (4.48)$$

$$\omega_{aw} = \omega_{as} = \sqrt{\frac{0,72a^2}{1 + 0,72a^2}} \quad (4.49)$$

Với các giá trị thay đổi của biên độ ban đầu  $a$ , các phân tích định tính về sai số của các tần số xấp xỉ so với tần số chính xác được thể hiện trong Hình 4.3, đồng thời phân tích định lượng tương ứng được trình bày trong Bảng 4.2. Từ phương trình (4.46). Chú ý từ phương trình (4.46)  $r^2$  phụ thuộc vào  $a$ . Từ Bảng 4.2 ta thấy  $r^2$  tăng khi  $a$  tăng, cụ thể là với một thay đổi lớn của  $a$ , từ 0,01 đến 10, giá trị của  $r^2$  cũng chỉ thay đổi nhỏ từ 0,9 đến 0,999. Điều này chỉ ra rằng tính phi tuyến của hệ tỉ lệ nghịch với biên độ ban đầu  $a$ .



Hình 4.3. Các tần số xấp xỉ và sai số với các giá trị của  $a$  khác nhau



Từ Hình 4.3a, các tần số xấp xỉ đều rất gần với tần số dao động chính xác. Đường cong  $\omega_{d2}$  là gần nhất và đường cong của  $\omega_{PEM, hb}$  là xa nhất so với  $\omega_e$ . Hình 4.3b thể hiện đường cong sai số của các tần số xấp xỉ so với tần số chính xác. Nhìn chung,  $\omega_{d2}$  có giá trị tối đa của sai số tuyệt đối là nhỏ nhất, sau đó là  $\omega_{aw}$  and  $\omega_{as}$ ,  $\omega_c$ , cuối cùng là  $\omega_{PEM}$  và  $\omega_{hb}$ , với sai số tương ứng là 0,17%, 1,64%, 2,22%, and 2,81% trong khoảng của  $r^2=[0,9; 0,976]$ .

Bảng 4.2. Sai số của các tần số xấp xỉ

$a$	$\omega_e$	$\omega_c$	$error$ (%)	$\omega_{hb}=\omega_{PEM}$ [105], [103]	$error$ (%)	$\omega_{aw}=\omega_{as}$ [89], [91]	$error$ (%)	$\omega_{d2}$	$error$ (%)	$r^2$
0,01	0,0093	0,0095	2,22	0,0095	2,22	0,0093	0,15	0,0093	-0,02	0,900
0,05	0,0423	0,0433	2,21	0,0433	2,23	0,0424	0,16	0,0423	-0,02	0,900
0,1	0,0844	0,0862	2,20	0,0863	2,24	0,0845	0,19	0,0844	-0,02	0,901
0,5	0,3874	0,3942	1,77	0,3974	2,58	0,3906	0,83	0,3870	-0,09	0,916
1,0	0,6368	0,6436	1,07	0,6547	2,81	0,6470	1,60	0,6357	-0,17	0,943
2,0	0,8476	0,8507	0,36	0,8660	2,17	0,8615	1,64	0,8463	-0,16	0,976
3,0	0,9196	0,9209	0,14	0,9333	1,49	0,9308	1,21	0,9186	-0,10	0,988
4,0	0,9509	0,9515	0,07	0,9608	1,04	0,9592	0,88	0,9502	-0,07	0,994
5,0	0,9670	0,9673	0,03	0,9744	0,76	0,9733	0,66	0,9665	-0,05	0,996
6,0	0,9763	0,9765	0,02	0,9820	0,58	0,9813	0,51	0,9760	-0,03	0,997
7,0	0,9822	0,9823	0,01	0,9867	0,45	0,9861	0,40	0,9820	-0,02	0,998
8,0	0,9861	0,9862	0,01	0,9897	0,37	0,9893	0,32	0,9860	-0,02	0,999
9,0	0,9889	0,9890	0,01	0,9919	0,30	0,9915	0,27	0,9888	-0,01	0,999
10,0	0,9909	0,9910	0,00	0,9934	0,25	0,9931	0,22	0,9908	-0,01	0,999

#### 4.3.4 Bài toán 3: Dao động phi tuyến có khả năng mở rộng hữu hạn

Từ nghiên cứu trong [99] khảo sát dao động phi tuyến có khả năng mở rộng hữu hạn tạo thành cơ sở của một chuỗi polyme thực, một phân tử DNA hoặc một chất lỏng phi Newton. Phương trình chuyển động của dao động với một hàm hữu tỉ chính tắc có dạng là

$$\ddot{x} + \frac{x}{1-x^2} = 0 \quad (4.50)$$

Với điều kiện đầu (4.25) với  $0 < a < 1$ , tần số dao động tự do chính xác được tham chiếu từ [45]

$$\omega_e(a) = \frac{\pi}{2} \left[ \int_0^a \frac{du}{\sqrt{\ln((1-u^2)/(1-a^2))}} \right]^{-1} \quad (4.51)$$

Áp dụng DEL với  $A = \frac{x}{1-x^2}$ ,  $B = x$ , thu được tần số xấp xỉ từ (4.31)

$$\omega_{d2} = \sqrt{\frac{r}{(1-r^2)\sqrt{1+r^2} + r^3} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 u}{1-a^2 \cos^2 u} du} \quad (4.52)$$

Trong đó các giá trị bình phương trung bình và hệ số tương quan bình phương được tính toán theo các phương trình tương ứng là (2.46), (2.62) và (4.33).

$$\begin{aligned} \langle B^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle = a^2/2, \langle A^2 \rangle = \left\langle \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \right\rangle = \frac{a^2}{2(1-a^2)^{3/2}} \\ \langle AB \rangle &= \left\langle \frac{x^2}{1-x^2} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos^2 u}{1-a^2 \cos^2 u} du, \\ r^2 &= \frac{(1-a^2)^{3/2}}{\pi^2} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 u}{1-a^2 \cos^2 u} du \right]^2 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Để xác nhận độ chính xác của DEL, tần số chính xác cho bởi phương trình (4.51) sẽ so sánh với các tần số thu được từ các phương pháp gần đúng khác như  $\omega_c$  từ tiêu chuẩn kinh điển,  $\omega_{lhb}$  từ phương pháp cân bằng điều hòa tuyến tính [99], và  $\omega_{as}$  từ phương pháp dựa trên tiệm cận [91] cụ thể như sau:

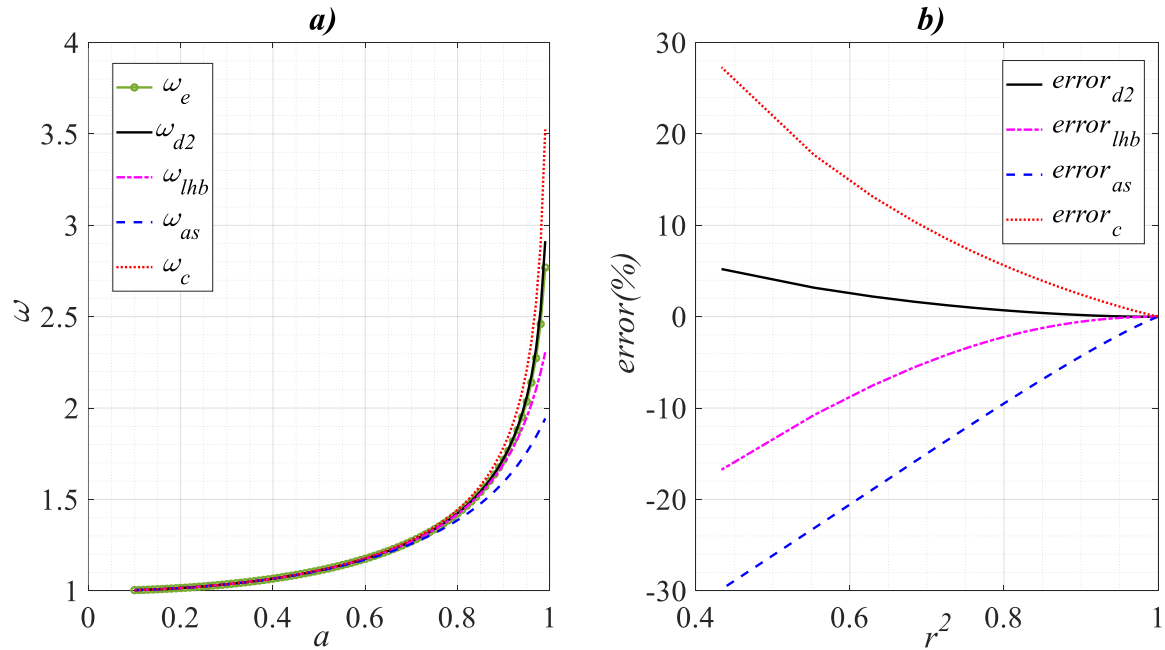
$$\omega_c = \sqrt{\frac{\langle AB \rangle}{\langle B^2 \rangle}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 u}{1-a^2 \cos^2 u} du} \quad (4.54)$$

$$\omega_{lhb} = \sqrt{\frac{80 - 46a^2 + \sqrt{4096 - 4352a^2 + 1236a^4}}{144 - 188a^2 + 55a^4}} \quad (4.55)$$

$$\omega_{as} = \sqrt{\frac{g(\alpha a)}{\alpha a}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha a)^2}}, \alpha = \sqrt{3/4} \quad (4.56)$$

Với các giá trị khác nhau của biên độ ban đầu  $a$ , phân tích định phân tích định tính về sai số của tần số xấp xỉ so với tần số chính xác được thực hiện trong Hình 4.4, và phân tích định lượng tương ứng được trình bày trong Bảng 4.3. chú ý rằng là phương trình (4.53) với  $r^2$  phụ thuộc vào  $a$ . Ta có thể thấy từ Bảng 4.3 thì  $r^2$  giảm khi  $a$  tăng, cụ thể là với một thay đổi nhỏ của  $a$  từ 0,1 đến 0,99, giá trị của  $r^2$  có một thay đổi lớn từ 1 đến 0,433. Điều này có nghĩa là tính phi tuyến của lực phục hồi hữu tỉ chính xác này tỷ lệ với biên độ ban đầu, trái với Bài toán 2 liên quan đến lực phục hồi hữu tỉ không chính xác.

Từ Hình 4.4a, đường cong của  $\omega_{d2}$  là gần nhất và đường cong của  $\omega_{as}$  là xa nhất với  $\omega_e$ . Hình 4.4b thể hiện đường cong sai số của các tần số xấp xỉ so sánh với tần số chính xác. Có thể thấy,  $\omega_{d2}$  cho sai số tối đa tuyệt đối là nhỏ nhất, sau đó theo thứ tự là  $\omega_{lbh}$ ,  $\omega_c$ , và  $\omega_{as}$ , với sai số tương ứng là 5,22%, 16,75%, 27,3%, và 29,83% tại  $r^2 = 0,433$ .



Hình 4.4. Các tần số xấp xỉ và sai số với các giá trị của  $a$  khác nhau

Bảng 4.3. Sai số của các tần số xấp xỉ

$a$	$\omega_e$	$\omega_c$	$error$ (%)	$\omega_{as}$ [91]	$error$ (%)	$\omega_{lbh}$ [99]	$error$ (%)	$\omega_{d2}$	$error$ (%)	$r^2$
0,1	1,004	1,004	0,00	1,004	0,00	1,004	0,00	1,004	0,00	1,000
0,2	1,015	1,015	0,00	1,015	0,00	1,015	0,00	1,015	0,00	1,000
0,3	1,036	1,036	0,01	1,036	-0,02	1,036	0,00	1,036	0,00	0,999
0,4	1,067	1,067	0,04	1,066	-0,06	1,067	0,00	1,067	0,00	0,998
0,5	1,111	1,112	0,10	1,109	-0,18	1,111	0,00	1,111	-0,01	0,995
0,6	1,176	1,179	0,25	1,170	-0,44	1,175	-0,01	1,175	-0,01	0,988
0,7	1,271	1,278	0,59	1,257	-1,05	1,270	-0,04	1,271	0,00	0,972
0,8	1,423	1,443	1,42	1,387	-2,56	1,420	-0,21	1,424	0,06	0,937
0,825	1,477	1,504	1,80	1,429	-3,24	1,472	-0,32	1,479	0,11	0,923
0,850	1,541	1,577	2,32	1,477	-4,14	1,533	-0,50	1,544	0,17	0,904
0,875	1,619	1,668	3,03	1,533	-5,36	1,606	-0,80	1,624	0,27	0,879
0,900	1,718	1,788	4,06	1,596	-7,08	1,695	-1,31	1,725	0,43	0,846
0,950	2,036	2,209	8,54	1,759	-13,58	1,950	-4,18	2,061	1,26	0,725
0,990	2,769	3,525	27,30	1,943	-29,83	2,305	-16,75	2,913	5,22	0,433

#### 4.3.5 Bài toán 4: Dao động kiểu Duffing

Dao động kiểu Duffing đại diện cho một loạt các bài toán dao động phi tuyến với các hàm phức hồi là hàm lẻ. Phương trình dao động có dạng

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^{2n+1} = 0, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.57)$$

Với điều kiện đầu (4.25), tần số chính xác của dạng dao động này được tính toán bởi phương trình (4.28)

$$\omega_e = \pi \left[ 2 \int_0^a \left( 2 \int_x^a \omega_0^2 u + \gamma u^{2n+1} du \right)^{-1/2} dx \right]^{-1} \quad (4.58)$$

Áp dụng DEL với  $A = x^{2n+1}, B = x$ , tần số xấp xỉ thu được từ (4.31) là

$$\omega_{d2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{r}{(1-r^2)\sqrt{1+r^2} + r^3} \frac{\gamma a^{2n}}{2^{2n+1}} C_{2n+2}^{n+1}} \quad (4.59)$$

trong đó các giá trị bình phương trung bình và hệ số tương quan bình phương được tính toán bởi công thức tương ứng (2.46), (2.62) and (4.33) như sau

$$\begin{aligned} \langle B^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle = a^2/2; \langle A^2 \rangle = \gamma^2 \langle x^{4n+2} \rangle = \frac{\gamma^2 a^{4n+2}}{2^{4n+2}} C_{4n+2}^{2n+1} \\ \langle AB \rangle &= \langle \gamma x^{2n+2} \rangle = \frac{\gamma a^{2n+2}}{2^{2n+2}} C_{2n+2}^{n+1}; \\ r^2 &= \frac{[C_{2n+2}^{n+1}]^2}{2[C_{4n+2}^{2n+1}]} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Trong phương trình (4.60), công thức chung sau đây được sử dụng

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos^m u du \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{2^m} C_m^{m/2} = \frac{2\pi}{2^m} \binom{m}{m/2} = \frac{2\pi}{2^m} \frac{m!}{(m/2)! (m/2)!}, & m \text{ chẵn} \\ 0, & m \text{ lẻ} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.61)$$

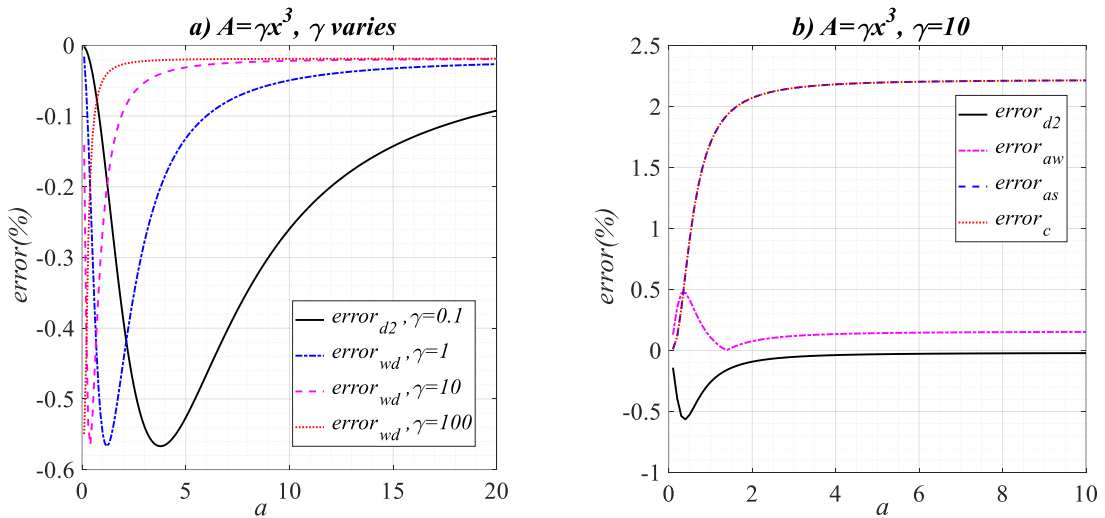
trong đó  $C_m^{m/2}$  là hệ số

Để xác nhận độ chính xác của DEL, tần số chính xác cho bởi phương trình (4.51) sẽ so sánh với các tần số thu được từ các phương pháp gần đúng khác như  $\omega_c$  từ tiêu chuẩn kinh điển,  $\omega_{aw}$  từ tiêu chuẩn trung bình trọng số [99], và  $\omega_{as}$  từ phương pháp dựa trên tiệm cận [91] cụ thể như sau:

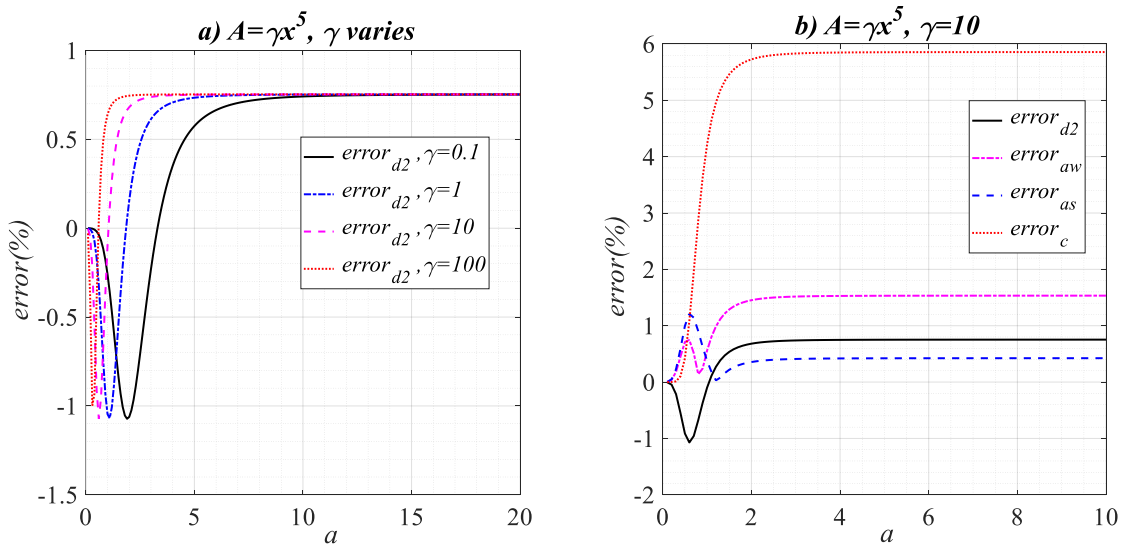
$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\langle AB \rangle}{\langle B^2 \rangle}} = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma \frac{2^{2n} C_{2n+2}^{n+1}}{C_{4n+2}^{2n+1}}} \quad (4.62)$$

$$\omega_{aw} = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma \frac{\int_0^\infty a^{2n+2} s^2 \omega t e^{-s\omega t} \cos^{2n+2} \omega t dt}{\int_0^\infty a^2 s^2 \omega t e^{-s\omega t} \cos^2 \omega t dt}}, s = 2 \quad (4.63)$$

$$\omega_{as} = \sqrt{\frac{f(\alpha a)}{\alpha a}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + (\alpha a)^{2n+1}}{\alpha a}}, \alpha = \sqrt{3/4} \quad (4.64)$$



Hình 4.5. Các tần số xấp xỉ và sai số với  $n = 1, \omega_0 = 1$  và giá trị  $a, \gamma$  khác nhau



Hình 4.6. Các tần số xấp xỉ và sai số với  $n = 2, \omega_0 = 1$  và giá trị  $a, \gamma$  khác nhau

Với các giá trị khác nhau của biên độ ban đầu  $a$ , tác giả phân tích định tính về sai số của tần số xấp xỉ so với tần số chính xác thể hiện trong Hình 4.5, Hình 4.6, Hình 4.7 và phân tích định lượng tương ứng được trình bày trong Bảng 4.4, Bảng 4.5, Bảng 4.6. Với phương trình (4.60) thì  $r^2$  không phụ thuộc vào  $a$  và  $\gamma$  những chỉ phụ thuộc vào mũ  $n$ , điều này tương tự với Bài toán 1 liên quan đến hàm phức hồi dạng đa thức.

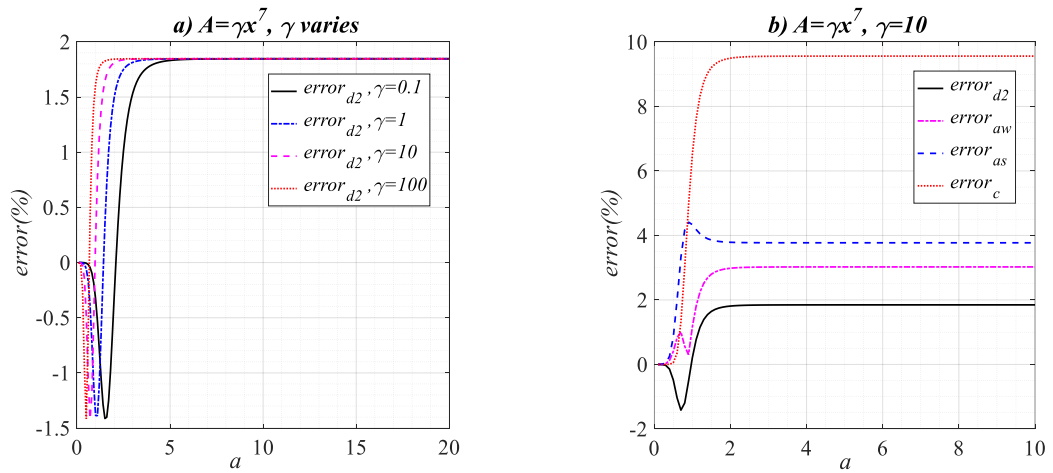
Bảng 4.4. Các sai số của các tần số xấp xỉ với  $n=1$

$a$	$\gamma$	$\omega_e$	$\omega_c$	error (%)	$\omega_{as}$ [91]	error (%)	$\omega_{aw}$ [99]	error (%)	$\omega_{d2}$	error (%)	$r^2$
0,1	0,1	1,000	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	0,900
1	0,1	1,037	1,037	0,01	1,037	0,01	1,035	-0,13	1,035	-0,14	0,900
10	0,1	2,867	2,915	1,70	2,915	1,70	2,864	-0,11	2,859	-0,26	0,900
100	0,1	26,80	27,400	2,21	27,400	2,21	26,900	0,15	26,800	-0,02	0,900
<i>sai số lớn nhất</i>				<b>2,21</b>		<b>2,21</b>		<b>0,15</b>		<b>-0,26</b>	
$a$	$\gamma$	$\omega_e$	$\omega_c$	error (%)	$\omega_{as}$ [91]	error (%)	$\omega_{aw}$ [99]	error (%)	$\omega_{d2}$	error (%)	$r^2$
0,1	1,0	1,004	1,004	0,00	1,004	0,00	1,004	-0,01	1,004	-0,02	0,900
1	1,0	1,318	1,323	0,39	1,323	0,39	1,311	-0,48	1,311	-0,55	0,900
10	1,0	8,534	8,718	2,16	8,718	2,16	8,544	0,12	8,529	-0,05	0,900
100	1,0	84,70	86,60	2,22	86,600	2,22	84,900	0,15	84,700	-0,02	0,900
<i>sai số lớn nhất</i>				<b>2,22</b>		<b>2,22</b>		<b>-0,48</b>		<b>-0,55</b>	
$a$	$\gamma$	$\omega_e$	$\omega_c$	error (%)	$\omega_{as}$ [91]	error (%)	$\omega_{aw}$ [99]	error (%)	$\omega_{d2}$	error (%)	$r^2$
0,1	10	1,037	1,037	0,01	1,037	0,01	1,035	-0,13	1,035	-0,14	0,900
1	10	2,867	2,915	1,70	2,915	1,70	2,864	-0,11	2,859	-0,26	0,900
10	10	26,811	27,404	2,21	27,404	2,21	26,851	0,15	26,805	-0,02	0,900
100	10	267,90	273,90	2,22	273,90	2,22	268,30	0,16	267,90	-0,02	0,900
<i>sai số lớn nhất</i>				<b>2,22</b>		<b>2,22</b>		<b>0,16</b>		<b>-0,26</b>	
$a$	$\gamma$	$\omega_e$	$\omega_c$	error (%)	$\omega_{as}$ [91]	error (%)	$\omega_{aw}$ [99]	error (%)	$\omega_{d2}$	error (%)	$r^2$
0,1	100	1,318	1,323	0,39	1,323	0,39	1,311	-0,48	1,311	-0,55	0,900
1	100	8,534	8,718	2,16	8,718	2,16	8,544	0,12	8,529	-0,05	0,900
10	100	84,727	86,608	2,22	86,608	2,22	84,859	0,15	84,711	-0,02	0,900
100	100	847,20	866,00	2,22	866,00	2,22	848,50	0,16	847,10	-0,02	0,900
<i>sai số lớn nhất</i>				<b>2,22</b>		<b>2,22</b>		<b>-0,48</b>		<b>-0,55</b>	

Bảng 4.5. Các sai số của các tần số xấp xỉ với  $n=2$ 

$a$	$\gamma$	$\omega_e$	$\omega_c$	error (%)	$\omega_{as}$ [91]	error (%)	$\omega_{aw}$ [99]	error (%)	$\omega_{d2}$	error (%)	$r^2$
0,1	0,1	1,000	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	0,794
1	0,1	1,031	1,031	0,02	1,028	-0,28	1,028	-0,22	1,028	-0,26	0,794
10	0,1	23,641	25,020	5,83	23,738	0,41	24,000	1,52	23,816	0,74	0,794
100	0,1	2361,7	2500,0	5,86	2371,7	0,42	2397,9	1,53	2379,5	0,75	0,794
<i>sai số lớn nhất</i>				<b>5,86</b>		<b>0,42</b>		<b>1,53</b>		<b>0,75</b>	
$a$	$\gamma$	$\omega_e$	$\omega_c$	error (%)	$\omega_{as}$ [91]	error (%)	$\omega_{aw}$ [99]	error (%)	$\omega_{d2}$	error (%)	$r^2$
0,1	1,0	1,000	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	0,794
1	1,0	1,265	1,275	0,79	1,250	-1,16	1,255	-0,77	1,251	-1,05	0,794
10	1,0	74,691	79,063	5,85	75,007	0,42	75,835	1,53	75,253	0,75	0,794
100	1,0	7468,3	7905,7	5,86	7500,0	0,42	7582,9	1,53	7524,6	0,75	0,794
<i>sai số lớn nhất</i>				<b>5,86</b>		<b>-1,16</b>		<b>1,53</b>		<b>0,75</b>	
$a$	$\gamma$	$\omega_e$	$\omega_c$	error (%)	$\omega_{as}$ [91]	error (%)	$\omega_{aw}$ [99]	error (%)	$\omega_{d2}$	error (%)	$r^2$
0,1	10	1,000	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	0,794
1	10	2,584	2,693	4,22	2,574	-0,38	2,598	0,56	2,581	-0,10	0,794
10	10	236,172	250,002	5,86	237,173	0,42	239,794	1,53	237,950	0,75	0,794
100	10	23617,0	25000,0	5,86	23717,1	0,42	23979,2	1,53	23794,8	0,75	0,794
<i>sai số lớn nhất</i>				<b>5,86</b>		<b>0,42</b>		<b>1,53</b>		<b>0,75</b>	
$a$	$\gamma$	$\omega_e$	$\omega_c$	error (%)	$\omega_{as}$ [91]	error (%)	$\omega_{aw}$ [99]	error (%)	$\omega_{d2}$	error (%)	$r^2$
0,1	100	1,003	1,003	0,00	1,003	-0,03	1,003	-0,02	1,003	-0,03	0,794
1	100	7,543	7,969	5,65	7,566	0,32	7,649	1,41	7,591	0,64	0,794
10	100	746,835	790,570	5,86	750,001	0,42	758,288	1,53	752,459	0,75	0,794
100	100	74683,4	79056,9	5,86	75000,0	0,42	75828,8	1,53	75245,9	0,75	0,794
<i>sai số lớn nhất</i>				<b>5,86</b>		<b>0,42</b>		<b>1,53</b>		<b>0,75</b>	

Từ Bảng 4.4, Bảng 4.5, Bảng 4.6 ta thấy  $r^2$  giảm khi  $n$  tăng, cụ thể  $r^2 = 0,9$  khi  $n = 1$ ,  $r^2 = 0,794$  khi  $n = 2$ ,  $r^2 = 0,714$  khi  $n = 3$ . Mặt khác, chúng ta thấy từ các công thức của tần số chính xác và xấp xỉ mà chúng cũng phụ thuộc vào  $a$  và  $\gamma$ . Do đó, ở đây chúng ta giải quyết việc đánh giá sai số tần suất liên quan đến  $a$  và  $\gamma$ .



Hình 4.7. Các tần số xấp xỉ và sai số với  $n = 3$ ,  $\omega_0 = 1$  và giá trị  $a, \gamma$  khác nhau

Bảng 4.6. Các sai số của các tần số xấp xỉ với  $n=3$

$a$	$c$	$\omega_e$	$\omega_c$	$error$ (%)	$\omega_{as}$ [91]	$error$ (%)	$\omega_{aw}$ [99]	$error$ (%)	$\omega_{d2}$	$error$ (%)	$r^2$
0,1	0,1	1,000	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	0,714
1	0,1	1,027	1,027	0,02	1,021	-0,57	1,024	-0,28	1,023	-0,33	0,714
10	0,1	213,4	233,9	9,56	205,4	-3,77	219,9	3,02	217,4	1,85	0,714
100	0,1	213446	233854	9,56	205396	-3,77	219901	3,02	217389	1,85	0,714
<i>sai số lớn nhất</i>				<b>9,56</b>		<b>-3,77</b>		<b>3,02</b>		<b>1,85</b>	
$a$	$c$	$\omega_e$	$\omega_c$	$error$ (%)	$\omega_{as}$ [91]	$error$ (%)	$\omega_{aw}$ [99]	$error$ (%)	$\omega_{d2}$	$error$ (%)	$r^2$
0,1	1,0	1,000	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	0,714
1	1,0	1,231	1,244	1,07	1,192	-3,10	1,218	-1,02	1,213	-1,39	0,714
10	1,0	675,0	739,5	9,56	649,5	-3,77	695,4	3,02	687,4	1,85	0,714
100	1,0	674977	739510	9,56	649519	-3,77	695388	3,02	687443	1,85	0,714
<i>sai số lớn nhất</i>				<b>9,56</b>		<b>-3,77</b>		<b>3,02</b>		<b>1,85</b>	
$a$	$c$	$\omega_e$	$\omega_c$	$error$ (%)	$\omega_{as}$ [91]	$error$ (%)	$\omega_{aw}$ [99]	$error$ (%)	$\omega_{d2}$	$error$ (%)	$r^2$
0,1	10	1,000	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	0,714
1	10	2,388	2,543	6,51	2,284	-4,33	2,416	1,16	2,393	0,21	0,714
10	10	2134,5	2338,5	9,56	2054,0	-3,77	2199,0	3,02	2173,9	1,85	0,714
100	10	2134465	2338536	9,56	2053960	-3,77	2199009	3,02	2173886	1,85	0,714
<i>sai số lớn nhất</i>				<b>9,56</b>		<b>-4,33</b>		<b>3,02</b>		<b>1,85</b>	
$a$	$c$	$\omega_e$	$\omega_c$	$error$ (%)	$\omega_{as}$ [91]	$error$ (%)	$\omega_{aw}$ [99]	$error$ (%)	$\omega_{d2}$	$error$ (%)	$r^2$
0,1	100	1,000	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	1,000	0,00	0,714
1	100	3,205	3,455	7,80	3,072	-4,15	3,267	1,92	3,233	0,87	0,714
10	100	3018,6	3307,2	9,56	2904,7	-3,77	3109,9	3,02	3074,3	1,85	0,714
100	100	3018589	3307189	9,56	2904738	-3,77	3109868	3,02	3074339	1,85	0,714
<i>sai số lớn nhất</i>				<b>9,56</b>		<b>-4,15</b>		<b>3,02</b>		<b>1,85</b>	



Theo Hình 4.5a với trường hợp  $n = 1$ , sai số của  $\omega_{d2}$  đạt tới giá trị lớn nhất trong khoảng  $a \in [0,5]$ , và giảm tới giá trị rất nhỏ khi  $a$  tăng, điều này cũng đúng với bất kỳ  $\gamma$  thay đổi từ giá trị nhỏ đến lớn ví dụ từ  $\gamma = 0,1$  đến  $\gamma = 100$ . Dường như là  $\omega_{d2}$  tiệm cận dưới tần số chính xác. Những sai số này vẫn giữ nguyên đặc điểm khi  $n$  thay đổi như Hình 4.6a với  $n = 2$ , và Hình 4.7a với  $n = 3$ . Khi  $n$  tăng, thì giá trị của  $r^2$  là nhỏ hơn, và sai số tối đa tuyệt đối nhỏ nhất của  $\omega_{d2}$  có xu hướng tăng ví dụ 0,6% với  $n = 1, r^2 = 0,9$ ; 1,07% với  $n = 2, r^2 = 0,794$ ; 1,4% với  $n = 3, r^2 = 0,714$ . Trong so sánh với các tần số xấp xỉ khác như trong Hình 4.5b, Hình 4.6b, Hình 4.7b, giá trị có được từ tiêu chuẩn kinh điển  $\omega_c$  có cùng tính chất với  $\omega_{d2}$  nhưng có sai số tối đa lớn hơn nhiều, đặc biệt trong trường hợp  $n$  lớn hơn. Với  $n = 1$ ,  $\omega_c$  trùng với  $\omega_{as}$  có được từ phương pháp dựa trên tiệm cận, cũng giống như với kết quả thu được từ phương pháp cân bằng điều hòa bậc nhất hay phương pháp nhiễu loạn đồng vị bậc nhất [91]

$$\omega_c = \omega_{as} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\gamma a^2} \quad (4.65)$$

Tương tự với  $\omega_c$ ,  $\omega_{as}$  có sai số lớn hơn khi  $r^2$  nhỏ hơn ngoại trừ trường hợp  $n = 2$ . Tần số xấp xỉ  $\omega_{aw}$  từ tiêu chuẩn trung bình trọng số có một sự biến động trong khoảng  $a \in [0,2]$  và sau đó xu hướng đến một giá trị hằng số. Tóm lại, xấp xỉ tốt nhất chính là kết quả của của  $\omega_{d2}$ , sau đó theo thứ tự là  $\omega_{aw}$ ,  $\omega_{as}$ , và  $\omega_c$ .

#### 4.4 Kết luận chương 4

1. Chương này đã phát triển tính chất trực giao thể hiện qua một số tính chất cơ bản của tuyến tính hóa tương đương đối ngẫu được xác định, cho thấy sự giống và khác nhau giữa các quá trình thay thế một chiều và hai chiều. Theo đó, nó cũng cho thấy trọng số có quan hệ mật thiết với hệ số tương quan bình phương.

2. Dựa trên cách tiếp cận đối ngẫu, các quá trình thay thế lượt đi và lượt về có thể được xem xét dưới hai dạng: Dạng thứ nhất là các quá trình thay thế một chiều, được biểu diễn bằng hai bài toán tối ưu hóa đơn mục tiêu. Thứ hai là quá trình thay thế hai chiều được biểu thị bằng tổng trọng số của hai hàm mục tiêu đơn được đề cập ở trên. Trong tất cả các quá trình thay thế này, hệ số tương quan bình phương, là thước đo mức độ phi tuyến giữa số hạng phi tuyến ban đầu và số hạng tuyến tính tương đương, xuất hiện tự nhiên trong biểu thức của hệ số tuyến tính hóa tương đương và sai số thay thế tối ưu.

3. Một họ các trọng số được đề xuất dựa trên phân tích bán giải tích về sự đóng góp của các sai số thay thế lượt đi và lượt về tối ưu vào tổng của chúng. Hơn nữa, một trọng số được mô tả bằng phương trình của một hình elip được chọn từ họ này.

4. Quy trình tuyến tính hóa đối ngẫu với trọng số đã chọn được xây dựng cho một lớp các hệ dao động tiền định phi tuyến. Áp dụng cho một số hệ điển hình, cho thấy rằng trọng số đã chọn là một lựa chọn phù hợp để phân tích tần số dao động tự do của các hệ tiền định phi tuyến được xem xét. Bên cạnh đó, việc đánh giá mức độ sai số dựa trên hệ số tương quan bình phương cho thấy sự ảnh hưởng rõ ràng của tính phi tuyến đối với các nghiệm xấp xỉ hiện tại.

5. Có thể thấy phương pháp được đề xuất có một tiềm năng lớn và nó cần được khám phá cho các lớp rộng hơn của hệ động lực tiền định phi tuyến. Đặc biệt, việc lựa chọn trọng số được đề xuất có thể được mở rộng và nghiên cứu thêm cho các bài toán khác về tối ưu hóa đa mục tiêu

6. Kết quả phát triển tính chất trực giao thông qua phương pháp tuyến tính hóa đối ngẫu được đề xuất đem đến sai số tối đa tuyệt đối là thấp nhất trong số các tần số xấp xỉ thu được từ một số phương pháp phân tích khác khi xem xét với các mức độ phi tuyến khá lớn. Sai số tối đa tuyệt đối của nó chỉ khoảng **5%**, có thể chấp nhận được trong thiết kế kỹ thuật sơ bộ.

Kết quả nghiên cứu của chương 4 được công bố trên công trình nghiên cứu số [6].

## KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

### 1. Kết luận và đóng góp mới về khoa học của luận án

- Luận án đã phát triển tính chất trực giao trong phương pháp gần đúng thông qua tuyến tính hóa đối ngẫu có trọng số kết hợp với đề xuất các dạng cụ thể của trọng số  $p$  đưa ra các nghiệm xấp xỉ có sai số tốt hơn phương pháp Galerkin áp dụng các bài toán ổn định đồng thời phát triển trọng số  $p$  linh hoạt hơn so với tiêu chuẩn sai số thông thường và đối ngẫu không trọng số ( $p=1/2$ ).

- Luận án đã phát triển tính chất trực giao bằng cách xây dựng một trung bình cục bộ có trọng số mới (WLA) áp dụng vào phương pháp Galerkin đề xuất phương pháp Galerkin sử dụng trung bình cục bộ có trọng số (GWLA) cải thiện đáng kể độ chính xác của nghiệm xấp xỉ bậc nhất của phương pháp Galerkin.

- Luận án trình bày hướng tiếp cận cục bộ - toàn cục để giải quyết bài toán chọn một hàm trọng số một tham số và đề xuất phương pháp GWLA đơn giản hóa (SGWLA) giảm khối lượng tính toán nhưng vẫn duy trì độ chính xác của các lời giải nhận được từ GWLA.

- Luận án kết hợp WLA với phương pháp bình phương tối thiểu để đưa cột có tiết diện thay đổi thành cột tương đương với tiết diện không đổi và các thuật toán số mới này có thể đưa ra một công cụ thay thế mới và hiệu quả cho tính toán kỹ thuật trong việc thiết kế các hệ kết cấu với các tiết diện thay đổi.

- Luận án đã chỉ ra rằng hệ số tương quan bình phương, là thước đo mức độ phi tuyến giữa số hạng phi tuyến ban đầu và số hạng tuyến tính tương đương, xuất hiện tự nhiên trong biểu thức của hệ số tuyến tính hóa tương đương và sai số thay thế tối ưu.

- Tác giả đã đề xuất một họ các trọng số (dưới dạng phương trình một elip) dựa trên phân tích bán giải tích về sự đóng góp của các sai số thay thế lượt đi và lượt về tối ưu vào tổng của chúng trong phân tích hệ động lực học tiền định phi tuyến.

- Tác giả đã xây dựng quy trình tuyến tính hóa đối ngẫu có trọng số cho một lớp các hệ động lực học tiền định phi tuyến. Đồng thời, tác giả đã chọn trọng số phù hợp và áp dụng có hiệu quả trong phân tích tần số dao động tự do của một số hệ tiền định phi tuyến điển hình.

- Luận án đã cho thấy sai số tối đa tuyệt đối của tần số xấp xỉ từ phương pháp đề xuất so với các phương pháp xấp xỉ khác khoảng 5% và sai số này được chấp nhận trong thiết kế kỹ thuật sơ bộ.

## 2. Hướng nghiên cứu tiếp theo

- Kết quả phát triển tính trực giao và đưa ra một trọng số phù hợp đã mở ra hướng nghiên cứu áp dụng tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số cho các bài toán ổn định khác.

- Kết quả phát triển tính trực giao thông qua WLA được đề xuất có thể được kiểm chứng đối với các cột có các điều kiện biên khác, các tiết diện thay đổi phức tạp hơn và cũng được mở rộng cho các bài toán mất ổn định của các kết cấu phức tạp hơn như cột, tấm và vỏ phi tuyến trong đó việc sử dụng dạng giải tích của phương pháp Galerkin thường bị giới hạn bởi các phép xấp xỉ bậc nhất.

- Với WLA áp dụng vào phương pháp bình phương tối thiểu và chuyển cột có tiết diện thay đổi thành cột tương đương với tiết diện không đổi. Kết quả này mở ra một hướng nghiên cứu có thể áp dụng trong nhiều bài toán kỹ thuật trong thực tế.

- Phương pháp DEL cải tiến với trọng số  $p_2$  được chọn có một tiềm năng lớn và nó cần được khám phá cho các lớp rộng hơn của hệ động lực học tiền định phi tuyến và có thể xem xét áp dụng cho các lớp bài toán của hệ dao động phi tuyến cưỡng bức và các hệ dao động khác. Đặc biệt, việc lựa chọn hệ số trọng số được đề xuất có thể được mở rộng và nghiên cứu thêm cho các bài toán khác của tối ưu hóa đa mục tiêu.

## DANH MỤC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ

1. Trần Tuấn Long, Nguyễn Đông Anh, Nguyễn Xuân Thành, "Weighting dual technique of equivalent linearization method for Euler stability problem," in *Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X*, Hà Nội, 2017.
2. Nguyễn Đông Anh, Trần Tuấn Long, Nguyễn Xuân Thành, "Cách tiếp cận đối ngẫu áp dụng cho bài toán ổn định Euler dạng thanh một đầu ngàm, một đầu khớp," in *Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc (Kỷ niệm 40 năm thành lập Viện Cơ học)*, Hà Nội, 09/04/2019.
3. Nguyen, T. X., Tran, L. T. "A High-Order time finite element method applied to structural dynamics problems". Proceedings of ICOMMA - In Modern Mechanics and Applications, Springer, pp 137–148, 2020.
4. Nguyen, T. X., & Tran, L. T. *A simplified variant of the time finite element methods based on the shape functions of an axial finite bar. Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - HUCE, 15(4), pp 42-53, 2021.*  
[https://doi.org/10.31814/stce.huce\(nuce\)2021-15\(4\)-04](https://doi.org/10.31814/stce.huce(nuce)2021-15(4)-04).
5. Anh Tay Nguyen, Nguyen Cao Thang, Tran Tuan Long, N. D. Anh, P. M. Thang and Nguyen Xuan Thanh "A novel weighted local averaging for the Galerkin method with application to elastic buckling of Euler column," *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, vol. 23, no. 4, 30 May 2022. <https://doi.org/10.1080/15502287.2022.2080612>.
6. Anh N. D., Nguyen Ngoc Linh, Tran Tuan Long, Nguyen Cao Thang, Nguyen Tay Anh. I. Elishakoff. "Extension of dual equivalent linearization to analysis of deterministic dynamic systems. Part 1: Single-parameter equivalent linearization," *Nonlinear Dynamics*, <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07894-6>.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Lutes L.D., Sarkani S., Random Vibration: Analysis of Structural and Mechanical Systems, Amsterdam: Elsevier, 2004.
- [2] I. G. Bubnov, "Review of Professor Kirpichev, Belzetskii, Bubnov and Kolosoff on Works of Professor Timoshenko, awarded the D. I. Zhuravskii Prize," *Sbornik St. Peterburgskogo Instituta Inzhenerov Putei Soobchenia (Collection of St. Petersburg Institute of Transportation Engineering (see also Bubnov I. G., 1956, Selected Works, Sudpromgiz Publishers, Leningrad, pp. 136-139, in Russian)., no. 81, pp. 01-40, 1913.*
- [3] Galerkin B. G., Rods and Plates, "Series in some Questions of Elastic Equilibrium of Rods and Plates," *Vestnik Inzhenerov i Technikov, (English Translation, in W. P. Rodden, Theoretical and Computational Aeroelasticity, (2011) 700-745 Crest Publishing), no. 19, pp. 897-908, 1915.*
- [4] W. J. Duncan, "Galerkin's Method in Mechanics and Differential Equations," in *Aeronautical Research Committee Reports and Memoranda, 1937.*
- [5] I. Elishakoff, "Stochastic Linearization Technique: a New Interpretation and a Selective Review," *Shock and Vibration Digest*, no. 32, pp. 179 - 188, 2000.
- [6] Elishakoff I., Andrimasy L., Dolley M., "Application and extension of the stochastic linearization by Anh and Di Paola," *Acta Mech.*, vol. 204, p. 89–98, 2009.
- [7] T. K. Caughey, "Equivalent linearization technique," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 35, pp. 1706-1711, 1963.
- [8] N. D. Anh, "Dual approach to averaged values of functions: A form for weighting coefficient," *Vietnam Journal of Mechanics, VAST*, vol. 37, no. 2, p. 145–150, 2015.
- [9] Đ. V. Hiếu, Phân tích dao động phi tuyến bằng cách tiếp cận trung bình có trọng số, Hà Nội: Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Viện Cơ học, 2020.
- [10] N. D. Anh, L. X. Hung and L. D. Viet, "Dual approach to local mean square error criterion for stochastic equivalent linearization," *Acta Mech*, vol. 224, no. 2, p. 241–253, 2013.
- [11] N. D. Anh and N. X. Nguyen, "Design of TMD for damped linear structures using the dual criterion of equivalent linearization method," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 77, no. 1, p. 164–170, 2013.
- [12] N. N. Linh, Phân tích dao động ngẫu nhiên phi tuyến bằng phương pháp tuyến tính hóa tương đương, Hà Nội: Luận án Tiến sĩ kỹ thuật - Viện Cơ học, 2015.
- [13] George J. Simitses, Dewey H. Hodges, Fundamentals of Structural Stability, Oxford, England: Elsevier Inc, 2006.
- [14] E. T. Whittaker, Analytical Dynamics, New York: Dover Publications, 1944.
- [15] A. Chajes, Principle of structural stability theory, New Jersey: Prentice-Hall, 1974.

- [16] N. J. Hoff, *The Analysis of Structures*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1956.
- [17] S. Timoshenko, *History of strength of material*, New York: McGraw-Hill Book Co, 1953.
- [18] J. E. Taylor, "The strongest column - an energy approach," *J. Appl. Mech. ASME*, vol. 34, no. 2, p. 486–487, 1967.
- [19] Atay, M. T. and Coskun, S. B., "Elastic stability of Euler columns with a continuous elastic restraint using variational iteration method," *Comput. Math. Appl.*, vol. 58, no. 11-12, p. 2528–2534, 2009.
- [20] M. T. Atay, "Determination of buckling loads of tilted buckled column with varying flexural rigidity using variational iteration method,," *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 11, no. 2, p. 97–103, 2010.
- [21] S. B. Coskun, "Analysis of tilt-buckling of Euler columns with varying flexural stiffness using homotopy perturbation method," *Math. Modell. Anal.*, vol. 15, no. 3, p. 275–286, 2010.
- [22] S. Pinarbasi, "Stability analysis of non-uniform rectangular beams using homotopy perturbation method," *Math. Probl. Eng.*, vol. 2012, p. 1–18, 2012.
- [23] Wang, Z. X. Yuan and X. W., "Buckling and post-buckling analysis of extensible beam-columns by using the differential quadrature method," *Comput. Math. Appl.*, vol. 62, no. 12, p. 4499–4513, 2011.
- [24] Z. Mousavi, S. A. Shahidi and B. Boroomand, "A new method for bending and buckling analysis of rectangular nano plate: Full modified nonlocal theory," *Meccanica*, vol. 52, no. 11-12, p. 2751–2768, 2017.
- [25] Timoshenko S. P. and Gere J. M., *Theory of Elastic Stability* (2nd ed), New York: McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [26] V. V. Bolotin, *Nonconservative Problems of the Elastic Stability*, Oxford: Pergamon Press, 1963.
- [27] H. Leipholz, *Stability Theory*, New York: NY: Academic Press, 1970.
- [28] Hunt, J. M. T. Thompson and G. W., *General Theory of Elastic Stability*, J. Willey, 1973.
- [29] W. T. Koiter, "Elastic Stability, Buckling and PostBuckling Behaviour," *Proceedings of the IUTAM Symposium on Finite Elasticity*, 1981.
- [30] Cedolin, Z. P. Bazant and L., *Stability Structures. Elastic, Inelastic Fracture and Damage Theories*, New York: NY: Oxford University Press, 1991.
- [31] A. V. D. Heijden, W. T. Koiter's *Elastic Stability of Solids and Structures*, 1st ed, Cambridge: UK: Cambridge University Press, Aug 11, 2008..
- [32] W. Flügge, "Chaps 44 and 45," in *Handbook of Engineering Mechanics*, New York, McGraw-Hill Book Company, 1962, p. New York.
- [33] V. V. Bolotin, *The Dynamic Stability of Elastic systems*, San Francisco: Holden-Day, Inc, 1964.
- [34] W. T. Koiter, *Stability of Elastic Equilibrium*, Thesis, Delft: (English translation NASA TT-F-10833, 1967), 1945.
- [35] J. M. T. Thompson, "Basic principles in general theory of elastic stability,," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, p. 13, 1963.

- [36] J. M. T. Thompson, "Eigenvalue branching configuration and the Rayleigh-Ritz procedure," *Quarterly of Appl Math*, vol. 22, p. 244, 1964.
- [37] Allen, H.G. and Bulson, P.S., *Background to Buckling*, Maidenhead, Berkshire, England.: McGraw-Hill (U.K.), 1980.
- [38] Chen, W.F. and Lui, E.M., *Structural Stability — Theory and Implementation*, New York: Elsevier, 1987.
- [39] S. Jerath, *Structural Stability Theory and Practice - Buckling of Columns, Beams, Plates, and Shells*, Grand Forks, ND, USA: John Wiley & Sons, 2021.
- [40] L. Euler, "Die altitudine columnarum sub proprio pondere corrueuntium (in Latin).," *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, vol. 1788, no. I, pp. 163-193, 1778.
- [41] C. M. Wang, C. Y. Wang and J. N. Reddy, *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*, Boca Raton: FL: CRC Press LLC, 2005.
- [42] Roberts, J.B., Spanos, P.D., *Random Vibration and Statistical Linearization*, New York: Dover Publications Inc., 2003.
- [43] L. Cveticanin, *Strongly Nonlinear Oscillators: Analytical Solutions*, Springer , 2014.
- [44] Lim C.W., Wu B.S., "A new analytical approach to the Duffing-harmonic oscillator," *Physics Letters A*, vol. 311, no. 4–5, pp. 365-373, 2003.
- [45] M. Febbo, "A finite extensibility nonlinear oscillator," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 217, no. 14, p. 6464–6475, 2011.
- [46] Robert D. Cook, David S. Malkus Michael E. Plesha, Robert J. Witt., *Concepts and applications of finite element analysis – (fourth edition)*, John Wiley & Sons, 2002.
- [47] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures (2nd ed)*, Hoboken, NJ, USA: Prentice-Hall, 2014.
- [48] Scriven, B. A. and Finlayson, L. E., "The method of weighted residuals—a review," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 19, p. 735–748, 1966.
- [49] H. H. E. Leipholz, "The Galerkin formulation and the Hamilton–Ritz formulation: A critical review," *Acta Mech.*, vol. 47, no. 3-4, p. 283–290, 1983.
- [50] Zenkour, M. R. and Barati, A. M., "Vibration analysis of functionally graded graphene platelet reinforced cylindrical shells with different porosity distributions," *Mech. Adv. Mater. Struct.*, vol. 26, no. 18, p. 1580–1588, 2019.
- [51] A. H. Sofiyev, "Nonlinear free vibration of shear deformable orthotropic functionally graded cylindrical shells," *Compos. Struct.*, vol. 142, p. 35–44, 2016.
- [52] M. Urabe, "Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic Systems," *Arch. Ratio. Mech. Anal.*, vol. 20, no. 2, pp. 120-152, 1965.
- [53] H. H. E. Leipholz, "On the convergence of Ritz and Galerkin's Method in the case of certain nonconservative systems and using admissible coordinate functions," *Acta Mech.*, vol. 19, no. 1-2, pp. 57-76, 1974.
- [54] X. Li and J. Zhu, "A Galerkin boundary node method and its convergence analysis," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 230, no. 1, p. 314–328, 2009.



- [55] Ding, H. Chen, L. Q. and Yang, S. P., "Convergence of Galerkin truncation for dynamic response of finite beams on nonlinear foundations under a moving load," *J. Sound Vibr.*, vol. 331, no. 10, p. 2426–2442, 2012.
- [56] Elishakoff I., Ankitha A. P. and Marzani A., "Rigorous versus naïve implementation of the Galerkin method for stepped beams," *Acta Mech.*, vol. 230, no. 11, p. 3861–3873, 2019.
- [57] Isaac Elishakoff and Damien Boutur, "Rigorous Implementation of the Galerkin Method for Uniform and Stepped Columns," *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 58, no. 5, pp. 1-8, 2020.
- [58] G. Failla, "Closed-Form Solutions for Euler–Bernoulli Arbitrary Discontinuous Beams," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 81, no. 5, pp. 605-628, 2011.
- [59] M. Skrinar, "Computational analysis of multi-stepped beams and beams with linearly-varying heights implementing closed-form finite element formulation for multi-cracked beam elements," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50, no. 14-15, pp. 2527-2541, 2013.
- [60] Cheng, P., Davila, C., and Hou, G., "Static, Vibration Analysis and Sensitivity Analysis of Stepped Beams Using Singularity Functions," *Journal of Structures*, vol. 2014, no. 3, pp. 1-13, 2014.
- [61] Charles W. Bert, Sung K. Jang and Alfred G. Striz, "Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components," *AIAA Journal*, vol. 26, no. 5, pp. 612-618, 1988.
- [62] Elishakoff, I., Zingales, M., "Convergence of Boobnov-Galerkin Method Exemplified," *AIAA Journal*, vol. 42, no. 9, p. 1931–1933, 2004.
- [63] YI-YUAN YU, JAI-LUE LAI, "Application of Galerkin's method to the dynamic analysis of structures," *AIAA Journal*, vol. 5, no. 4, pp. 792-795, 1967.
- [64] Laura, P. A. A., and Cortinez, V. H., "Optimization of Eigenvalues When Using the Galerkin Method," *AIAA Journal*, vol. 32, no. 6, p. 1025–1026, 1986.
- [65] Leonard Meirovitch, Moon K. Kwak, "Convergence of the classical Rayleigh-Ritz method and the finite element method," *AIAA Journal*, vol. 28, no. 8, p. 1509–1516, 1990.
- [66] Prasad, K. S. R. K., and KrishnaMurthy, A. V., "Galerkin finite element method for vibration problems," *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 4, 1973,, vol. 11, no. 4, pp. 544-546, 1973.
- [67] "Comment on "Estimation of Fundamental Frequencies Of Beams and Plates with Varying Thickness," *AIAA Journal*, vol. 16, no. 9, pp. 1022-1024, 1978.
- [68] Hwang, Ching-Lai, Abu Syed Md Masud, Multiple objective decision making, methods and applications: a state-of-the-art survey, Springer-Verlag, 1979.
- [69] X.-S. Yang, Nature-Inspired Optimization Algorithms, Elsevier Inc, 2014.
- [70] L. Zadeh, "Optimality and non-scalar-valued performance criteria," *IEEE Transactions on Automatic Control* 8, pp. 59-60, 1963.

- [71] Marler, R.T., Arora, J.S., "The weighted sum method for multi-objective optimization: new insights.," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 41, no. 6, p. 853–862, 2009.
- [72] Gennert, M.A., Yuille, A.L., "Determining the Optimal Weights in Multi-objective Function," in *Second International conference on computer vision*, Los Alamos, CA, September 1998.
- [73] Marler, R.T., Arora, J.S., "Survey of multi-objective optimization methods for engineering," *Struct. Multidiscipl. Optim.*, vol. 26, p. 369–395, 2004.
- [74] A. Jubril, "A nonlinear weights selection in weighted sum for convex multi-objective optimization," *Facta universitatis, series: Mathematics and Informatics*, vol. 27, no. 3, pp. 357-372, 2012.
- [75] N. B. N. Krylov, *Introduction to nonlinear mechanics*, New York: Princenton University Press, 1943.
- [76] Nayfeh, A.H., Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, 1995.
- [77] P. Spanos, "Stochastic linearization in structural dynamics," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 34, pp. 1-8, 1981.
- [78] J. Roberts, "Response of nonlinear mechanical systems to random excitation, part 2: equivalent linearization and other methods," *Shock Vib. Digest.*, vol. 13, no. 5, pp. 15-29, 1981.
- [79] Socha, L., Soong, T., "Linearization in analysis of nonlinear stochastic systems," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 44, pp. 399-422, 1991.
- [80] L. Socha, "Linearization in analysis of nonlinear stochastic systems. Part 1. Theory.," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 58, pp. 178-205, 2005.
- [81] L. Socha, "Linearization in analysis of nonlinear stochastic systems. Part II. Applications.," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 58, pp. 303-315, 2005.
- [82] Falsone, G., Ricciardi, G., "Stochastic linearization: classical approach and new developments," *In: Luongo A. (ed) Recent research developments in structural dynamics*, vol. 37, no. Research Signpost, Trivandrum, pp. 81-106, 2003.
- [83] Proppe, C., Pradlwarter, H.G., Schueller, G.I., "Equivalent linearization and Monte Carlo simulation in stochastic dynamics," *Probab Eng Mech*, vol. 18, p. 1–15, 2003.
- [84] S. Crandall, "A half-century of stochastic equivalent linearization," *Struct. Control Health Monitor*, vol. 13, p. 27–40, 2006.
- [85] Elishakoff, I., Crandall, S.H, "Sixty years of stochastic linearization technique," *Springer link*, vol. 52, p. 299–305, 2017.
- [86] Adelberg, M.L., Denman, H.H., "Phase plane analysis of non-linear systems using weighted linearization," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 4, no. 4, p. 311–324, 1969.
- [87] Sinha, S.C., Srinivasan, P., "A weighted mean-square method of linearization in non-linear oscillations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 16, no. 2, p. 139–148, 1971.

- [88] Agrwal, V.P., Denman, H.H., "Weighted linearization technique for period approximation in large amplitude non-linear oscillations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 99, no. 4, p. 463–473, 1985.
- [89] N. D. Anh, N. Q. Hai and D. V. Hieu, "The equivalent linearization method with a weighted local averaging for analyzing of nonlinear vibrating systems," *Lat. Am. J. Solids Struct*, vol. 14, no. 9, p. 1723–1740, 2017.
- [90] Chattopadhyay, R., Chakraborty, S., "Equivalent linearization finds nonzero frequency corrections beyond first order," *Eur. Phys. J.*, vol. B 90, p. 116, 2017.
- [91] Beléndez, A., Pascual, C., Neipp, C., Beléndez, T., Hernández, A., "An Equivalent Linearization Method for Conservative Nonlinear Oscillators," *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, vol. 9, no. 1, pp. 9-17, 2008.
- [92] N. D. Anh, "Duality in the Analysis of Responses to Nonlinear Systems," *Vietnam Journal of Mechanics*, vol. 32, no. 4, pp. 263-266, 2010.
- [93] Anh, N.D., Hieu, N.N., Linh, N.N., "A dual criterion of equivalent linearization method for nonlinear systems subjected to random excitation," *Acta Mech*, vol. 223, no. 3, p. 645–654, 2012.
- [94] Anh, N.D., Linh, N.N., Hai, N.Q., "A weighted dual criterion for the problem of equivalence," in *ASCE-ICVRAM-ISUMA Conference. Institute for Risk and Uncertainty*, University of Liverpool, UK, 2014.
- [95] N. D. Anh, "A comprehensive review on dual approach to the vibration analysis: Some dual techniques and application," *Vietnam Journal of Mechanics*, vol. 42, no. 1, pp. 1-14, 2020.
- [96] N. D. Anh, N. N. Linh, "A weighted dual criterion for stochastic equivalent linearization method using piecewise linear functions," *Vietnam Journal of Mechanics*, vol. 36, no. 4, pp. 307-320, 2014.
- [97] Anh, N. D.; Linh, N. N., "A weighted dual criterion of the equivalent linearization method for nonlinear systems subjected to random excitation," *Acta Mechanica*, vol. 229, no. 3, pp. 1297-1310, 2018.
- [98] Anh, N.D., Hung, L.X., Viet, L.D., Thang, N.C., "Global–local mean-square error criterion for equivalent linearization of nonlinear systems under random excitation," *Acta Mechanica*, vol. 226, no. 9, p. 3011–3029, 2015.
- [99] Hieu, D.V, Hai, N.Q., Hung, D.T., "Analytical Approximate Solutions For Oscillators With Fractional Order Restoring Force And Relativistic Oscillators," *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*, vol. 4, no. 12, pp. 28-35, 2017.
- [100] Hieu, D.V, Hai, N.Q., "Analyzing of nonlinear generalized Duffing oscillators using the equivalent linearization method with a weighted averaging," *Asian Research Journal of Mathematics*, vol. 9, no. 1, pp. 1-14, 2018.
- [101] Hieu, D.V, Hai, N.Q., Hung, D.T., "The equivalent linearization method with a weighted averaging for solving undamped nonlinear oscillators," *Journal of Applied Mathematics*, vol. 8, no. 2, pp. 1-15, 2018.
- [102] Hieu, D.V, Anh, N.D., Quy, M.L, Hai, N.Q., "Nonlinear vibration of microbeams based on the nonlinear elastic foundation using the equivalent

- linearization method with a weighted averaging," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 90, pp. 87-106, 2020.
- [103] Bayat, M., Pakar, I., Domairry, G., "Recent developments of some asymptotic methods and their applications for nonlinear vibration equations in engineering problems: A review," *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 9, no. 2, pp. 145-234, 2012.
- [104] J. He, "Homotopy perturbation technique," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 178, no. 3-4, p. 257–262, 1999.
- [105] R. Mickens, "Mathematical and numerical study of the Duffing-harmonic oscillator," *J. Sound Vib.*, vol. 244, no. 3, pp. 563-567, 2001.
- [106] N.D. Anh, L.X. Hung, N.N. Linh, "On the equivalent linearization method using dual criterion," in *The 2nd International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA-2)*, 2012 (August 16-17).
- [107] H. Risken, *Fokker-Planck equation: Methods of solution and applications*, 2nd edn, Berlin: Springer Verlag, 1989.
- [108] Zhang X.T., Elishakoff I., Zhang R.C., "A new stochastic linearization technique based on minimum mean square deviation of potential energies," in *In Stochastic Structural Dynamics-New Theoretical Developments*, Lin YK, Elishakoff I (eds.), Berlin, Springer, 1991, p. 327–338.
- [109] Anh N. D., Di Paola M., "Some extensions of Gaussian equivalent linearization," Hanoi, 1995.
- [110] Elishakoff I., Cai G.Q., "Approximate solution for nonlinear random vibration problems by partial stochastic linearization," *Probab. Eng. Mech*, vol. 8, pp. 233-237, 1993.
- [111] L. Socha, *Linearization methods for stochastic dynamic system - Lecture Notes in Physics.*, Berlin: Springer, 2008.
- [112] Canor, T., Blaise, N., Deno, V. In: Cunha, A., Caetano, E., Ribeiro, P., Miller, G. (eds.), "A fast Newton–Raphson method in stochastic linearization," in *EURODYN 2014 Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics*, Porto, Portugal, 2014.
- [113] Ali, S. F., Adhikari, S., Friswell, M., Narayanan, S., "The analysis of piezomagnetoelastic energy harvesters under broadband random excitations," *J. Appl. Phys*, vol. 109, no. 7, p. 074904–074908, 2011.
- [114] Jiang, W.A., Chen, L.Q., "An equivalent linearization technique for nonlinear piezoelectric energy harvesters under Gaussian white noise," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 19, no. 8, p. 2897–2904, 2014.
- [115] Chen, F.X., Chen, Y.M., Liu, J.K., "Equivalent linearization method for the flutter system of an airfoil with multiple nonlinearities.," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 17(12), p. 4529–4535, 2012.
- [116] N. Triet, "Extension of dual equivalent linearization technique to flutter analysis of two dimensional nonlinear airfoils.," *Vietnam J. Mech.*, vol. 37(3), p. 217–230, 2015.

- [117] Anh, N.D., Nguyen, N.X., Hoa, L.T., "Design of three-element dynamic vibration absorber for damped linear structures," *J. Sound Vib.*, vol. 332, no. 19, p. 4482–4495, 2013.
- [118] H. Jalali, "An alternative linearization approach applicable to hysteretic systems," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 19(1), pp. 245-257, 2014.
- [119] Silva-Gonzalez, F.L., Ruiz, S.E., Rodriguez Castellanos, A, "Non-Gaussian stochastic equivalent linearization method for inelastic nonlinear systems with softening behaviour, under seismic ground motions.," *Math. Probl. Eng.*, vol. 539738, 2014.
- [120] Su, C., Huang, H., Ma, H., "Fast equivalent linearization method for nonlinear structures under nonstationary random excitations.," *J. Eng. Mech.*, vol. 142(8), p. 04016049, 2016.
- [121] Anh N.D., Hieu N.N., Chung P.N., Anh N.T., "Thermal radiation analysis for small satellites with single-node model using techniques of equivalent linearization," *Appl. Therm. Eng.*, vol. 94(5), p. 607–614, 2016.
- [122] Wang, Z., Song, J., "Equivalent linearization method using Gaussian mixture (GM-ELM) for nonlinear random vibration analysis," *Struct. Saf.*, vol. 64(January), pp. 9-19, 2017.
- [123] C. W. S. To, *Nonlinear Random Vibration Analytical Techniques and Applications*, Boca Raton: CRC Press, 2011.
- [124] Anh, N.D., Linh, N.N., "The effective range of the dual criterion of equivalent linearization method," *Proceedings of National Conference on Engineering Mechanics*, vol. Vol 1, pp. 465-468, 2014.
- [125] Anh, N.D., Linh, N.N., "A weighted dual criterion for stochastic equivalent linearization method," *Vietnam J. Mech.*, vol. 36, no. 4, p. 307–320, 2014.
- [126] Anh N. D., Linh N. N., "A weighted dual criterion of the equivalent linearization method for nonlinear systems subjected to random excitation," *Acta Mechanica*, vol. 228(8), 2017.
- [127] Anh, N.D., Linh, N.N., "A weighted dual criterion of the equivalent linearization method for nonlinear systems subjected to random excitation," *Acta Mechanica*, vol. 229, no. 3, p. 1297–1310, 2018.
- [128] T. Soong, *Random Differential Equations in Science and Engineering*, New York: Academic Press, 1973.
- [129] N. D. Anh, "Dual approach to averaged values of functions," *Vietnam J. Mech.*, vol. 34N, no. 3, p. 2012, 211–214.
- [130] Wang, Chien Ming; Wang, C. Y.; Reddy, J. N., *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*, Florida: CRC Press LLC, 2005.