BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Lê Minh Thuận

TÍNH CHẤT TIỆM CẬN CỦA LŨY THỪA CÁC IDEAL

LUẬN VĂN THẠC SĨ: TOÁN HỌC

Hà Nội – 2023

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Lê Minh Thuận

TÍNH CHẤT TIỆM CẬN CỦA LŨY THỪA CÁC IDEAL

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 8460104

LUẬN VĂN THẠC SĨ: TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

TS. Nguyễn Đăng Hợp

Hà Nội - 2023

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những gì viết trong luận văn là do sự tìm tòi, học hỏi của bản thân và sự hướng dẫn tận tình của TS. Nguyễn Đăng Hợp. Mọi kết quả nghiên cứu cũng như ý tưởng của tác giả khác, nếu có đều được trích dẫn cụ thể. Đề tài luận văn này cho đến nay chưa được bảo vệ tại bất kì một hội đồng bảo vệ luận văn thạc sĩ nào và cũng chưa hề được công bố trên bất kì một phương tiện nào. Tôi xin chịu trách nhiệm về những lời cam đoan.

Hà Nội, tháng 5 năm 2023

Học viên

Lê Minh Thuận

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, tôi xin được tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất của mình tới TS. Nguyễn Đăng Hợp, người trực tiếp hướng dẫn tôi tìm ra hướng nghiên cứu. Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy trong một thời gian dài. Thầy đã luôn quan tâm, giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô, anh chị, bạn bè của Viện Toán học vì sự giúp đỡ, góp ý và tạo điều kiện trong quá trình học tập, nghiên cứu để tôi thực hiện tốt luận văn của mình.

Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn sự giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi của cơ sở đào tạo là Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam trong quá trình thực hiện luận văn.

Đặc biệt, tôi xin cảm ơn gia đình, người thân và bạn bè đã luôn sát cánh, động viên và khích lệ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Hà Nội, tháng 5 năm 2023

Học viên

Lê Minh Thuận

Mục lục

Lời cam đoan **i**

Lời cảm ơn **ii**

Mở đầu **1**

1 Kiến thức chuẩn bị **3**

1.1 Iđêan nguyên tố liên kết 3

1.2 Dãy chính quy 5

1.3 Hàm độ sâu 8

1.4 Chiều Krull 9

1.5 Vành Cohen-Macaulay 12

1.6 Bổ đề Artin-Rees 14

2 Tính chất tiệm cận của tập iđêan nguyên tố liên kết và hàm độ sâu của lũy thừa iđêan **19**

2.1 Sự ổn định tiệm cận của tập iđêan nguyên tố liên kết 19

2.2 Sự ổn định tiệm cận của hàm độ sâu 23

2.3 Ví dụ 25

3 Hàm độ sâu của tổng các iđêan **29**

3.1 Tổng các iđêan 29

3.2 Hàm độ sâu của tổng các iđêan 30
3.3 Ví dụ 45

Kết luận **46**

Tài liệu tham khảo **47**

Mở đầu

Nghiên cứu về lũy thừa của các iđêan là một vấn đề quan trọng trong Đại số giao hoán, và nó có mối liên hệ chặt chẽ với Hình học Đại số, Lý thuyết kì dị và Đại số tổ hợp. Vấn đề này bắt đầu được nghiên cứu bởi Hilbert và Samuel. Ở đây chúng tôi nghiên cứu tính ổn định của tập các iđêan nguyên tố liên kết và hàm độ sâu của lũy thừa iđêan.

Cho R là vành đa thức phân bậc chuẩn trên trường k, I là một iđêan thuần nhất của vành R, M là R-môđun phân bậc hữu hạn sinh. Luận văn tập trung vào tính chất của các R–môđun R/I^n và M/I^nM với n là số nguyên dương đủ lớn. Chúng tôi trình bày lại các kết quả kinh điển của Brodmann [1, 2] về sự ổn định tiệm cận của tập các iđêan nguyên tố liên kết và hàm độ sâu của M/I^nM (tương tự với R/I^n). Một vấn đề mới về hàm độ sâu của lũy thừa iđêan là như sau.

Cho A và B là các vành đa thức phân bậc chuẩn trên trường k, I, J lần lượt là các iđêan khác 0, thuần nhất của vành A, B. Đặt $R = A \otimes_k B$ và $I + J$ biểu thị $IR + JR$, là iđêan của vành R. Vấn đề được đặt ra là ước lượng các bất biến của $I + J$ theo các bất biến tương ứng của I và J. Chúng tôi xin giới thiệu công trình gần đây của Hà Huy Tài, Ngô Việt Trung, và Trần Nam Trung [3] về hàm độ sâu của lũy thừa $I + J$. Nói riêng, công trình này cho phép xác định giá trị giới hạn của $\operatorname{depth}(R/(I + J)^n)$ với n đủ lớn. Các kết quả chính của luận văn sẽ đi kèm với một số ví dụ minh họa.

Cấu trúc của luận văn này gồm 3 chương.

Trong chương 1, chúng tôi sẽ nhắc lại một số kiến thức về iđêan nguyên tố liên kết. Tiếp theo chương này nhắc lại định nghĩa và một số kết quả thông dụng về dãy chính quy và hàm độ sâu. Ngoài ra chương này sẽ trình bày một số kết quả về chiều Krull, vành Cohen-Macaulay và Bổ đề Artin-Rees.

Trong chương 2, chúng tôi chứng minh sự ổn định của tập iđêan nguyên tố liên kết $\mathrm{Ass}(M/I^n)$ với n đủ lớn, từ đó chỉ ra được sự ổn định của hàm độ sâu $\mathrm{depth}(M/I^nM)$. Một số ví dụ sẽ được đưa ra để minh họa cho các kết quả trên.

Trong chương 3, chúng tôi sẽ trình bày lại chứng minh một số kết quả về giá trị của giới hạn $\mathrm{depth}(R/(I+J)^n)$ với n đủ lớn. Kết thúc chương này là một ví dụ minh họa cho kết quả chính.

Công cụ chính trong các chứng minh của luận văn là đại số Rees

$$\mathrm{Rees}(I) = R \oplus It \oplus I^2t^2 \oplus \dots,$$

cụ thể hơn là tính Noether và tính phân bậc chuẩn của nó.

Ngoài ra, chúng tôi khai thác bổ đề về độ sâu (Depth lemma) cho biết tính chất của hàm độ sâu trên các dãy khớp ngắn. Cuối cùng, chúng tôi sử dụng tính khớp của tích tenxơ trên một trường.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi sẽ nhắc lại một số khái niệm, tính chất cơ bản về iđêan nguyên tố liên kết, dãy chính quy và hàm độ sâu của một môđun. Ngoài ra chúng tôi sẽ nhắc lại một số kiến thức cơ sở về chiều Krull và vành Cohen-Macaulay. Bổ đề Artin-Rees cũng sẽ được trình bày trong phần này. Tài liệu tham khảo chính trong phần này là các cuốn của Bruns-Herzog [4] và Matsumura [5].

1.1 Iđêan nguyên tố liên kết

Định nghĩa 1.1.1. Cho R là một vành giao hoán, M là một R-môđun. Một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R được gọi là một iđêan nguyên tố liên kết của M nếu tồn tại một phần tử $a \in M$, $a \neq 0$ sao cho

$$\mathfrak{p} = (0 :_R a) = \operatorname{ann}_R(a).$$

Tập các iđêan nguyên tố liên kết của R-môđun M được kí hiệu là $\operatorname{Ass}_R M$.

Ví dụ 1.1.2. a) Xét $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ là một $\mathbb{Z}$-môđun. Dễ thấy

$$\operatorname{Ass}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} = \{2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}\}.$$

b) Xét $R = \mathbb{R}[x]$, $M = R$. Khi đó $\operatorname{Ass}_R M = \{0\}$.

Hệ quả sau đây suy ra trực tiếp từ định nghĩa

Hệ quả 1.1.3. *Nếu N là một R-môđun con của M thì*

$$\operatorname{Ass}_R N \subseteq \operatorname{Ass}_R M.$$

Với M là một R-môđun, ta định nghĩa

$$\operatorname{Ann} M = \{x \in R : xm = 0 \ \forall m \in M\},$$
$$\operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Bổ đề 1.1.4. $\operatorname{Ass} M \subseteq \operatorname{Supp} M$.

Chứng minh. Với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$, ta có $\mathfrak{p} = \operatorname{ann}_R(x)$ với $x \in M \setminus \{0\}$. Khi đó $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ vì phần tử $\dfrac{x}{1} \neq 0$, do đó $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$. □

Định lý 1.1.5 ([6, Chương 4, Mệnh đề 2.23])**.** *Cho M là một R-môđun. Khi đó*

a) *Nếu $M = 0$ thì $\operatorname{Ass}_R M = \emptyset$.*

b) *Nếu $M \neq 0$ và R là vành Noether thì $\operatorname{Ass}_R M \neq \emptyset$.*

c) *Nếu $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố của vành R thì $\operatorname{Ass}_R R/\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}\}$.*

Chứng minh. **a)** Hiển nhiên.

b) Xét tập hợp

$$\Sigma = \{\operatorname{ann}_R(x) : x \in M \setminus \{0\}\}$$

là một họ các iđêan của R. Do R là vành Noether, Σ tồn tại phần tử cực đại $I = \operatorname{ann}_R(x_0)$. Hiển nhiên $I \neq R$. Ta sẽ chứng minh I là iđêan nguyên tố.

Thật vậy giả sử $ab \in I$ nhưng $a \notin I$. Khi đó $ax_0 \neq 0$ và $abx_0 = b(ax_0) = 0$. Điều này chỉ ra $\mathrm{ann}_R(ax_0) \in \Sigma$ và $b \in \mathrm{ann}_R(ax_0) \supseteq \mathrm{ann}_R(x_0)$. Do tính cực đại của I, ta có

$$b \in \mathrm{ann}_R(ax_0) = \mathrm{ann}_R(x_0) = I.$$

Vậy I là iđêan nguyên tố.

c) Ánh xạ đồng nhất trên $R/\mathfrak{p}$ là một đơn cấu nên $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R R/\mathfrak{p}$. Giả sử $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R R/\mathfrak{p}$, khi đó $\mathfrak{q} = \mathrm{ann}_R(x + \mathfrak{p})$ với $x \notin \mathfrak{p}$. Hiển nhiên $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. Với mọi $y \in \mathfrak{q}$, ta có $xy \in \mathfrak{p}$ suy ra $y \in \mathfrak{p}$ vì $\mathfrak{p}$ nguyên tố. Vậy $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. □

Sau đây là một tính chất cơ bản của tập iđêan nguyên tố liên kết.

Mệnh đề 1.1.6. *Cho* $0 \to M \to N \to P \to 0$ *là một dãy khớp ngắn các* R*-môđun. Khi đó*

$$\mathrm{Ass}_R M \subseteq \mathrm{Ass}_R N \subseteq \mathrm{Ass}_R M \cup \mathrm{Ass}_R P.$$

1.2 Dãy chính quy

Định nghĩa 1.2.1. Cho R là một vành, M là một R-môđun. Phần tử $x \in R$ được gọi là phần tử chính quy trên M, hay M-chính quy nếu với mọi $m \in M$, $m \neq 0$ ta luôn có $xm \neq 0$.

Ví dụ 1.2.2. a) Xét $R = k[x, y]$, $M = k[x, y]/(x^2)$. Khi đó y là phần tử M-chính quy, phần tử x không M-chính quy.

b) Xét vành $R = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Dễ thấy $1, 5, 7$ là các phần tử M-chính quy, 2 không là phần tử M-chính quy.

Định nghĩa 1.2.3. Cho M là một R-môđun. Dãy $x_1, \ldots, x_n$ các phần tử trong R được gọi là dãy M-chính quy nếu thỏa mãn hai điều kiện sau

(i) Với mỗi $i = 1, \ldots, n$, x_i là phần tử chính quy trên $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$.

(ii) $M/(x_1, \ldots, x_n)M \neq 0$, nói cách khác $(x_1, \ldots, x_n)M \neq M$.

Ví dụ 1.2.4. Xét vành $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n], M = R$. Khi đó $x_1, \ldots, x_n$ là một dãy M-chính quy.

Định nghĩa 1.2.5. Cho R là một vành Noether, I là một iđêan của R, M là một R-môđun hữu hạn sinh. Dãy $x_1, \ldots, x_n \in I$ được gọi là một dãy M-chính quy cực đại trong I nếu nó là một dãy M-chính quy và không tồn tại phần tử $x_{n+1} \in I$ sao cho $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ cũng là một dãy M-chính quy.

Định lý sau đây cho ta một tính chất quan trọng của các dãy M-chính quy cực đại trong I của một vành Noether.

Định lý 1.2.6 (Rees)**.** *Cho R là một vành Noether, I là một iđêan của R, M là một R-môđun khác không, hữu hạn sinh. Giả sử $M \neq IM$. Khi đó mọi dãy M-chính quy cực đại trong I đều có cùng độ dài n xác định bởi*

$$n = \inf\{i \geq 0 : \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}.$$

Định nghĩa 1.2.7 ([4, Định nghĩa 1.2.6])**.** Cho R là một vành Noether, I là một iđêan của R, M là một R-môđun khác không, hữu hạn sinh. Giả sử $M \neq IM$. Ta định nghĩa

$$\operatorname{grade}(I, M) = \inf\{i \geq 0 : \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}.$$

Theo Định lý 1.2.6, $\operatorname{grade}(I, M)$ cũng chính là độ dài chung của mọi dãy M-chính quy cực đại trong I.

Nếu M là một R-môđun hữu hạn sinh sao cho $M = IM$, ta quy ước $\operatorname{grade}(I, M) = \infty$.

Bổ đề 1.2.8. *Cho I là một iđêan của vành Noether R, $M \neq 0$ là một R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó các mệnh đề sau tương đương*

1) $\operatorname{grade}(I, M) = 0$.

2) *Tồn tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$ sao cho $I \subseteq \mathfrak{p}$.*

Chứng minh.

1) $\Rightarrow$ 2) Nếu $\operatorname{grade}(I, M) = 0$ thì

$$I \subseteq \{x \in R : x \text{ là ước của } 0 \text{ của } M\} = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M} \mathfrak{p}.$$

Do R là vành Noether, M là một R-môđun hữu hạn sinh, ta suy ra $|\operatorname{Ass}_R M| < \infty$. Theo Bổ đề tránh nguyên tố, I phải chứa trong một iđêan $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$.

2) $\Rightarrow$ 1) Nếu $I \subseteq \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$ khi đó $\mathfrak{p} = \operatorname{ann}_R(m)$ với $m \in M \setminus \{0\}$ nên mọi phần tử của I đều là ước của không của M. $\square$

Bổ đề 1.2.9 ([4, Mệnh đề 1.2.9])**.** *Cho $0 \to M \to N \to P \to 0$ là một dãy khớp ngắn các R-môđun hữu hạn sinh. Ta có các bất đẳng thức sau*

$$\operatorname{grade}(I, M) \geq \min\{\operatorname{grade}(I, N), \operatorname{grade}(I, P) + 1\},$$
$$\operatorname{grade}(I, N) \geq \min\{\operatorname{grade}(I, M), \operatorname{grade}(I, P)\},$$
$$\operatorname{grade}(I, P) \geq \min\{\operatorname{grade}(I, M) - 1, \operatorname{grade}(I, N)\}.$$

1.3 Hàm độ sâu

Định nghĩa 1.3.1. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương với iđêan tối đại duy nhất $\mathfrak{m}$, $M \neq 0$ là một R-môđun hữu hạn sinh. Ta định nghĩa $\operatorname{depth}(M) = \operatorname{grade}(\mathfrak{m}, M)$, gọi là độ sâu của M.

Trong trường hợp R là vành phân bậc, ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 1.3.2. Cho R là một đại số phân bậc chuẩn trên trường k, $\mathfrak{m}$ là iđêan thuần nhất cực đại duy nhất của R, M là một R-môđun phân bậc hữu hạn sinh. Ta định nghĩa $\operatorname{depth} M = \operatorname{grade}(\mathfrak{m}, M)$, gọi là độ sâu của M.

Bổ đề sau đây là hệ quả của Bổ đề 1.2.8

Bổ đề 1.3.3. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương với iđêan tối đại duy nhất $\mathfrak{m}$, $M \neq 0$ là một R-môđun hữu hạn sinh. Các mệnh đề sau tương đương*

1) $\operatorname{depth}(M) = 0$.

2) $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_R M$.

Mệnh đề 1.3.4. *Nếu $x \in \mathfrak{m}$ là một phần tử M-chính quy thì* $\operatorname{depth}(M/xM) = \operatorname{depth} M - 1$.

Bổ đề sau đây là hệ quả của Bổ đề 1.2.9.

Bổ đề 1.3.5. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, $0 \to M \to N \to P \to 0$ là một dãy khớp ngắn các R-môđun hữu hạn sinh. Ta có các bất đẳng thức sau*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{depth} M \geq \min\{\operatorname{depth} N, \operatorname{depth} P + 1\},\\
&\operatorname{depth} N \geq \min\{\operatorname{depth} M, \operatorname{depth} P\},\\
&\operatorname{depth} P \geq \min\{\operatorname{depth} M - 1, \operatorname{depth} N\}.
\end{aligned}$$

1.4 Chiều Krull

Định nghĩa 1.4.1. Cho R là một vành giao hoán. Ta định nghĩa chiều, hay chiều Krull của vành R là độ dài cực đại của dãy tăng các iđêan nguyên tố trong R.

Ta kí hiệu chiều Krull của vành R là $\dim R$.

Định nghĩa 1.4.2. Cho R là một vành giao hoán, M là một R-môđun. Ta định nghĩa chiều Krull của môđun M, kí hiệu $\dim_R M$ như sau

$$\dim_R M = \dim(R/\operatorname{Ann} M).$$

Từ đây trở về sau, chiều Krull của R-môđun M được kí hiệu là $\dim M$.

Bổ đề 1.4.3. *Cho M là một R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó*

$$\operatorname{Supp} M = \operatorname{V}(\operatorname{Ann} M).$$

Chứng minh. Với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$, ta có $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Nếu $\mathfrak{p} \not\supseteq \operatorname{Ann} M$, tồn tại $s \in R \setminus \mathfrak{p} \cap \operatorname{Ann} M$. Khi đó $sM = 0$, suy ra $M_{\mathfrak{p}} = 0$, trái với giả thiết. Vậy $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann} M$ hay $\operatorname{Supp} M \subseteq \operatorname{V}(\operatorname{Ann} M)$.

Với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{V}(\operatorname{Ann} M)$, ta cần chỉ ra $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Thật vậy, nếu $M_{\mathfrak{p}} = 0$, vì M hữu hạn sinh, tồn tại phần tử $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ để $sM = 0$, tức $s \in \operatorname{Ann} M \setminus \mathfrak{p}$, điều này là vô lý. Do đó $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ hay $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$, tức $\operatorname{V}(\operatorname{Ann} M) \subseteq \operatorname{Supp} M$.

Vậy $\operatorname{Supp} M = \operatorname{V}(\operatorname{Ann} M)$. □

Bổ đề 1.4.4. *Cho M là một R-môđun hữu hạn sinh. Ta có*

$$\dim M = \sup\{t : \textit{tồn tại dãy tăng thực sự } \mathfrak{p}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_t,\ \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Supp} M\}.$$

Chứng minh. Một iđêan nguyên tố của vành $R/\operatorname{Ann} M$ có dạng $\mathfrak{p}/\operatorname{Ann} M$, với

$\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố của vành R chứa $\operatorname{Ann} M$. Theo Bổ đề 1.4.3, một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R chứa $\operatorname{Ann} M$ nếu và chỉ nếu nó nằm trong $\operatorname{Supp} M$.

Theo định nghĩa 1.4.2, $\dim M = \dim(R/\operatorname{Ann} M)$. Suy ra $\dim M$ là supremum độ dài một dãy tăng thực sự các iđêan nguyên tố của $R/\operatorname{Ann} M$.

Do đó $\dim M$ chính là supremum của độ dài một dãy tăng thực sự các iđêan nguyên tố trong $\operatorname{Supp} M$. Đây là điều phải chứng minh. $\square$

Ta dễ dàng suy ra tính chất sau đây của chiều Krull.

Bổ đề 1.4.5. *Nếu M, N là các R-môđun hữu hạn sinh sao cho* $\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} N$ *thì* $\dim M = \dim N$.

Bổ đề 1.4.6. *Cho I, J là hai iđêan của vành R. Nếu $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ thì* $\dim R/I = \dim R/J$.

Chứng minh. Với iđêan I, ta có

$$\operatorname{Supp}(R/I) = \mathrm{V}(\operatorname{Ann} R/I) = \mathrm{V}(I).$$

Ta chỉ cần chỉ ra với iđêan I, ta có $\mathrm{V}(I) = \mathrm{V}(\sqrt{I})$. Hiển nhiên ta đã có $\mathrm{V}(\sqrt{I}) \subseteq \mathrm{V}(I)$.

Với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \supseteq I$, ta cần chỉ ra $\mathfrak{p} \supseteq \sqrt{I}$. Thật vậy, với mọi $a \in \sqrt{I}$, $a^n \in I \subseteq \mathfrak{p}$ với số tự nhiên n nào đó, do đó $a \in \mathfrak{p}$. Như vậy $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\sqrt{I})$.

Vậy $\mathrm{V}(I) = \mathrm{V}(\sqrt{I})$ hay $\operatorname{Supp}(R/I) = \operatorname{Supp}(R/J)$, từ đó $\dim R/I = \dim R/J$. $\square$

Bổ đề 1.4.7. *Cho M là một R-môđun, N là một R-môđun con của M. Khi đó ta có*

$$\dim N \leq \dim M,$$

$$\dim(M/N) \leq \dim M.$$

Chứng minh. Hiển nhiên ta có $\operatorname{Ann} N \supseteq \operatorname{Ann} M$, do đó $\dim N \leq \dim M$.

Lại có $\operatorname{Ann}(M/N) \supseteq \operatorname{Ann} M$, suy ra $\dim(M/N) \leq \dim(M)$. □

Bổ đề 1.4.8. *Với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$, ta có*

$$\dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim M.$$

Chứng minh. Với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$, ta có $\mathfrak{p} = \operatorname{ann}_R(x)$ với $x \in M \setminus \{0\}$. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} f : R &\to M \\ r &\mapsto rx. \end{aligned}$$

Ta có

$$R/\mathfrak{p} \cong Rx \subseteq M.$$

Theo Bổ đề 1.4.7, ta có $\dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim M$. □

Ví dụ 1.4.9.

a) Nếu R là một trường k, ta có $\dim R = 0$ do iđêan nguyên tố duy nhất của vành là (0).

b) Xét vành đa thức $R = k[x]$ với k là một trường. Khi đó $\dim R = 1$.

Thật vậy, do R là một vành chính, mọi iđêan nguyên tố khác 0 đều là iđêan cực đại, do đó dãy tăng cái iđêan nguyên tố dài nhất có thể trong R là $\{0\} \subseteq \mathfrak{p}$, với $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố bất kì, khác không của vành R.

c) Tổng quát hơn, ta có $\dim k[x_1, x_2, \ldots, x_n] = n$.

1.5 Vành Cohen-Macaulay

Định lý 1.5.1 ([4, Định lý 1.2.13])**.** *Cho* $(R, \mathfrak{m})$ *là một vành Noether địa phương và* $M \neq 0$ *là một* R*-môđun hữu hạn sinh. Với mọi* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$*, ta có*

$$\operatorname{depth} M \leq \dim R/\mathfrak{p}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bất đẳng thức bằng quy nạp theo $\operatorname{depth} M$. Hiển nhiên bất đẳng thức đúng nếu $\operatorname{depth} M = 0$.

Giả sử $\operatorname{depth} M > 0$, khi đó tồn tại phần tử M-chính quy $x \in \mathfrak{m}$. Với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$, ta chọn $z \in M$ sao cho Rz là cực đại trong họ các môđun con xyclic khác không của M bị triệt tiêu bởi M (chú ý rằng z tồn tại vì M là một môđun Noether, và tập các môđun con xyclic của M bị triệt tiêu bởi $\mathfrak{p}$ là khác rỗng, vì nếu $\mathfrak{p} = \operatorname{ann}_R(y)$ thì tập đó chứa môđun khác không Ry). Nếu $z \in xM$, ta có $z = xy$ với $y \in M$ và $\mathfrak{p}y = 0$ do x là phần tử M-chính quy. Hơn nữa, Rz là một R-môđun con thực sự của Ry, và Ry bị triệt tiêu bởi $\mathfrak{p}$. Từ tính cực đại của Rz, ta suy ra $Ry = Rz$, suy ra $y = az$ với a thuộc R nào đó. Như vậy $z = xy = xaz$, do đó $(1 - xa)z = 0$. Vì $x \in \mathfrak{m}$, $1 - xa$ là phần tử khả nghịch của R, suy ra $z = 0$, mâu thuẫn. Do đó z không thuộc xM, mà $\mathfrak{p}z = 0$, $\mathfrak{p}$ bị triệt tiêu bởi $z + xM \neq 0$, do đó $\mathfrak{p}$ gồm toàn các ước của không của M/xM. Vì M/xM là một môđun Noether, ta suy ra $\mathfrak{p}$ chứa trong một iđêan nguyên tố liên kết $\mathfrak{q}$ của M/xM. Do $x \notin \mathfrak{p}$, ta có $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp}(M/xM)$, từ đó $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Lại có $\operatorname{depth} M/xM = \operatorname{depth} M - 1$ theo Mệnh đề 1.3.4, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\dim R/\mathfrak{p} > \dim R/\mathfrak{q} \geq \operatorname{depth}(M/xM) = \operatorname{depth} M - 1.$$

Vậy $\operatorname{depth} M \leq \dim R/\mathfrak{p}$. □

Kết quả sau suy ra từ Bổ đề 1.4.8 và Định lý 1.5.1.

Hệ quả 1.5.2 ([4, Định lý 1.2.12])**.** *Cho* $(R, \mathfrak{m})$ *là một vành Noether địa phương và* $M \neq 0$ *là một* R*-môđun hữu hạn sinh. Khi đó ta có*

$$\operatorname{depth} M \leq \dim M.$$

Định nghĩa 1.5.3. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, $M \neq 0$ là một R-môđun hữu hạn sinh. M được gọi là *môđun Cohen-Macaulay* nếu $\operatorname{depth} M = \dim M$. Nếu R là một R-môđun Cohen-Macaulay, ta nói R là một *vành Cohen-Macaulay.* Nếu R là một vành Noether bất kỳ, không nhất thiết địa phương, ta nói R là vành Cohen-Macaulay, nếu với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, vành địa phương hóa $R_{\mathfrak{p}}$ là một vành Cohen-Macaulay địa phương.

Định lý 1.5.4 ([4, Định lý 2.1.2])**.** *Cho* $(R, \mathfrak{m})$ *là một vành Noether địa phương,* M *là một* R*-môđun Cohen-Macaulay. Khi đó*

$$\dim R/\mathfrak{p} = \operatorname{depth} M$$

với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$*.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 1.4.8 và Định lý 1.5.1, ta có

$$\operatorname{depth} M \leq \dim R/\mathfrak{p} \leq \dim M.$$

Từ giả thiết M là R-môđun Cohen-Macaulay, ta suy ra điều phải chứng minh.

□

Ví dụ 1.5.5.

a) Nếu $R = k$ là một trường, ta đã có $\dim R = 0$. Mặt khác nếu xét R là một R-môđun, do iđêan cực đại duy nhất của R là (0), suy ra $\operatorname{depth} R = 0$. Vậy R là vành Cohen-Macaulay chiều 0.

b) Nếu $R = k[x]$ là vành đa thức trên trường k, R là vành Cohen-Macaulay một chiều.

Thật vậy, Nếu $\mathfrak{p} = (0)$ thì $R_{\mathfrak{p}}$ là một trường. Nếu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ khác không, thì do R là một miền chính, $\mathfrak{p} = (f)$ với f là một đa thức bất khả quy. Vành $R_{\mathfrak{p}}$ là một miền nguyên địa phương có iđêan tối đại $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Mọi iđêan nguyên tố khác không của $R_{\mathfrak{p}}$ có dạng $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$ với $\mathfrak{q}$ là một iđêan nguyên tố khác không của R chứa trong $\mathfrak{p}$. Do $\dim R = 1$ ta có $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Vậy $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ là iđêan nguyên tố khác không duy nhất của $R_{\mathfrak{p}}$. Suy ra $\dim R_{\mathfrak{p}} = 1$ và dễ thấy $\operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}} \geq 1$ vì f là phần tử chính quy. Suy ra $R_{\mathfrak{p}}$ là vành Cohen-Macaulay địa phương. Vậy R là vành Cohen-Macaulay.

c) Tổng quát hơn, nếu $R = k[_1, x_2, \ldots, x_n]$ thì R là vành Cohen-Macaulay chiều n.

1.6 Bổ đề Artin-Rees

Trước khi đến với Bổ đề Artin-Rees, chúng tôi xin giới thiệu một số kiến thức cơ sở liên quan đến lọc và vành, môđun phân bậc.

Định nghĩa 1.6.1. Cho R là một vành giao hoán, I là một iđêan của R, M là một R-môđun. Một dãy

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots M_n \ldots$$

trong đó $M_1, M_2, \ldots$ là các R-môđun con của M được gọi là một lọc của M.

Kí hiệu một lọc các môđun con như thế của M là (M_n).

Lọc (M_n) được gọi là một I-lọc nếu $IM_n \subseteq M_{n+1}$ với mọi n.

Lọc (M_n) được gọi là một I-lọc ổn định nếu nó là một I-lọc và thỏa mãn $IM_n = M_{n+1}$ với n đủ lớn.

Ví dụ 1.6.2. Cho R là một vành giao hoán, I là một iđêan của vành R, M là một R-môđun. Lọc (M_n) được xác định bởi $M_n = I^n M$ là một I-lọc ổn định.

Định nghĩa 1.6.3. Vành phân bậc là vành R cùng với họ $(R_n)_{n\geq 0}$ các nhóm con của nhóm cộng R, thỏa mãn

$$R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n \quad \text{và } R_m R_n \subseteq R_{m+n}\ \forall m, n \geq 0.$$

Dễ thấy R_0 là một vành con của R và mỗi R_n đều là một R_0-môđun.

Ví dụ 1.6.4.

a) Xét vành đa thức $R = k[x]$ với k là một trường. Khi đó ta thấy

$$R = k \oplus kx \oplus kx^2 \oplus \ldots \oplus kx^n \oplus \ldots.$$

R là một vành phân bậc với $R_n = kx^n$.

b) Xét vành $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_m]$. R là vành phân bậc với R_n là tập các đa thức thuần nhất bậc n.

Mệnh đề 1.6.5. *Cho R là một vành phân bậc. Các mệnh đề sau tương đương.*

a) *R là vành Noether.*

b) *R_0 là vành Noether và R là một R_0-đại số hữu hạn sinh.*

Chứng minh.

a) $\Rightarrow$ b) Đặt $R_+ = \bigoplus_{n>0} R_n$. Dễ thấy $R_0 = R/R_+$, suy ra R_0 là vành Noether. Lại có R_+ là một iđêan của R, do đó R_+ hữu hạn sinh. Giả sử R_+ được sinh bởi các phần tử thuần nhất $x_1, x_2, \ldots, x_s$ với bậc lần lượt là $k_1, k_2, \ldots, k_s$. Đặt $R' = R_0[x_1, x_2, \ldots, x_s]$. Ta sẽ chỉ ra $R_n \subseteq R'$ với mọi $n \geq 0$ bằng quy nạp. Điều này hiển nhiên đúng với $n = 0$. Với $n > 0$, giả sử điều này đã đúng với mọi $0 \leq j < n$. Với mọi $y \in R_n$, y cũng thuộc R_+, do đó y là một tổ hợp tuyến tính của $x_1, x_2, \ldots, x_s$, ta viết $y = \sum_{i=1}^{s} f_i x_i$ với $x_i \in R$. Ta có thể chọn $g_1, g_2, \ldots, g_s$ sao cho $y = \sum_{i=1}^{s} g_i x_i$ với $g_i \in R_{n-k_i}$ (chú ý rằng $g_i = 0$ nếu $n < k_i$). Theo giả thiết quy nạp, các phần tử g_i là các phần tử thuần nhất bậc nhỏ hơn n, nên nó thuộc R', từ đó suy ra $y \in R'$, hay $R_n \subseteq R'$ với mọi n. Vậy $R = R'$.

b) $\Rightarrow$ a) Kết quả này suy ra trực tiếp từ Định lý cơ sở Hilbert. $\square$

Ta xét vành $S = R \oplus It \oplus I^2t^2 \oplus \ldots$, vành con của vành đa thức $R[t]$. Phép nhân trên S được xác định như sau

$$(I^m t^m)(I^n t^n) \subset I^{m+n} t^{m+n}.$$

Khi đó S là một R-đại số phân bậc chuẩn, $\deg(ft^n) = n$ với $n \geq 0, f \in I^n$. Hơn nữa $S_n = I^n t^n \equiv I^n$, là một R-môđun. Vành S được gọi là đại số Rees của iđêan I. Ta thường kí hiệu $S = \mathrm{Rees}(I)$.

Tương tự, nếu M là một R-môđun, M_n là một I-lọc của M, ta có

$$M^* = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$$

là một $\mathrm{Rees}(I)$-môđun.

Bổ đề 1.6.6 ([7, Bổ đề 10.8])**.** *Cho R là một vành Noether,I là một iđêan của vành R, M là một R-môđun hữu hạn sinh, (M_n) là một I-lọc của M. Các mệnh đề sau tương đương*

a) *M^* là một* $\mathrm{Rees}(I)$*-môđun hữu hạn sinh.*

b) *Lọc (M_n) ổn định.*

Chứng minh. Mỗi M_n đều hữu hạn sinh, do đó $Q_n = \bigoplus_{r=0}^{n} M_r$ cũng hữu hạn sinh. Có Q_n là một nhóm con của M^*, nhưng nhìn chung thì không phải một Rees(I)-môđun. Tuy nhiên nó sẽ sinh ra một Rees(I)-môđun

$$M_n^* = M_0 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus IM_n \oplus I^2M_n \oplus I^3M_n \oplus \ldots$$

Do Q_n là một R-môđun hữu hạn sinh, M_n^* là một Rees(I)-môđun hữu hạn sinh. Khi đó (M_n^*) là một dãy tăng, với hợp bằng M^*. Lại có Rees(I) là vành Noether, M^* là một Rees(I)-môđun hữu hạn sinh tương đương với dãy trên dừng. Từ đó suy ra $M^* = M_{n_0}^*$ với số tự nhiên n_0 nào đó, tương đương với $M_{n_0+r} = I^r M_{n_0}$ với mọi r đủ lớn, hay lọc (M_n) ổn định. □

Mệnh đề 1.6.7. *Cho R là vành Noether, I là iđêan của vành R, M là một R-môđun hữu hạn sinh, (M_n) là một I-lọc ổn định của M. Nếu M' là một R-môđun con của M thì $(M' \cap M_n)$là một I-lọc ổn định của M'.*

Chứng minh. Ta có $I(M' \cap M_n) \subseteq IM' \cap IM_n \subseteq M' \cap M_{n+1}$, suy ra $(M' \cap M_n)$ là một I-lọc. Do đó nó xác định một Rees(I)-môđun phân bậc $\bigoplus_{n\geq 0}(M' \cap M_n)$ của M^*. Vì lọc (M_n) là ổn định, theo Bổ đề 1.6.6, M^* là một môđun hữu hạn sinh trên Rees(I). Chú ý rằng vì R là noether, I là iđêan hữu hạn sinh. Nếu $f_1, ..., f_t$ là các phần tử sinh của I như một R-môđun, thì $f_1, ..., f_t$ cũng là các phần tử bậc 1 trong vành Rees(I) và sinh ra vành này như một R-đại số. Do đó Rees(I) là một R-đại số hữu hạn sinh.

Vì Rees(I) là đại số hữu hạn sinh trên vành noether R, nó là một vành noether theo định lý cơ sở Hilbert. Môđun M^* là hữu hạn sinh trên vành noether Rees(I), nên nó là một môđun noether. Như vậy môđun con

$$\bigoplus_{n\geq 0}(M' \cap M_n)$$

của M^* cũng là noether, và do đó hữu hạn sinh.

Vậy $(M' \cap M_n)$là một I-lọc ổn định của M' theo bổ đề 1.6.6. $\square$

Với $M_n = I^n M$, ta thu được định lý sau.

Mệnh đề 1.6.8 (Bổ đề Artin-Rees)**.** *Cho R là một vành Noether, I là iđêan của vành R, M là một R-môđun hữu hạn sinh và N là một R-môđun con của M. Tồn tại số nguyên $k \geq 1$ sao cho với mọi $n \geq k$*

$$I^n M \cap N = I^{n-k}(I^k M \cap N).$$

Chương 2

Tính chất tiệm cận của tập iđêan nguyên tố liên kết và hàm độ sâu của lũy thừa iđêan

Trong chương này, chúng tôi sẽ chứng minh Định lý Brodmann về sự ổn định tiệm cận của tập iđêan nguyên tố liên kết và hàm độ sâu của M/I^nM, trong đó $(R, \mathfrak{m})$ là một vành địa phương Noether, I là một iđêan của R, M là một R-môđun hữu hạn sinh.

2.1 Sự ổn định tiệm cận của tập iđêan nguyên tố liên kết

Trước tiên chúng ta đến với bổ đề sau.

Bổ đề 2.1.1. *Cho $\varphi : R \to S$ là một đồng cấu vành với S là vành Noether. Cho M là một S-môđun hữu hạn sinh. Khi đó*

$$\mathrm{Ass}_R(M) = \{\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) : \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_S(M)\}.$$

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh $\{\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) : \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_S(M)\} \subseteq \mathrm{Ass}_R(M)$.

Với mọi $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_S M$, ta có $\mathfrak{q} = \operatorname{ann}_S(x)$ với $x \in M \setminus \{0\}$. Ta sẽ chỉ ra $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \operatorname{ann}_R(x)$. Với mọi $r \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, ta suy ra $\varphi(r) \in \mathfrak{q}$. Khi đó $rx = \varphi(r)x = 0$, do đó $r \in \operatorname{ann}_R(x)$. Ngược lại với mọi $r \in \operatorname{ann}_R(x)$ thì $rx = 0 = \varphi(r)x = 0$, từ đó $\varphi(r) \in \mathfrak{q}$ hay $r \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Vậy $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \operatorname{ann}_R(x)$.

Tiếp theo ta chứng minh $\operatorname{Ass}_R(M) \subseteq \{\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) : \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_S(M)\}$. Với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$, ta có $\mathfrak{p} = \operatorname{ann}_R(x_0)$ với $x_0 \neq 0$ và $\mathfrak{p}$ nguyên tố. Ta cần chỉ ra tồn tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{q}$ của S sao cho $\mathfrak{q} = \operatorname{ann}(x_1)$ và $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Xét tập hợp

$$\Sigma = \{\mathfrak{q} = \operatorname{ann}_S(x), x \in M \setminus \{0\} : \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\}.$$

Dễ thấy $\Sigma \neq 0$ vì $\operatorname{ann}_S(x_0) \in \Sigma$. Do S là vành Noether nên trong Σ có phần tử cực đại $q_0 = \operatorname{ann}_S(z), z \neq 0$. Ta sẽ chỉ ra q_0 nguyên tố. Giả sử ta có $a, b \in S, ab \in q_0$ và $a \notin q_0$, ta cần chứng minh $b \in q_0$. Vì $ab \in \operatorname{ann}_S(z)$, suy ra $b \in \operatorname{ann}_S(az)$. Giờ ta sẽ chỉ ra $\operatorname{ann}_S(az) \in \Sigma$, hay $\varphi^{-1}(\operatorname{ann}_S(az)) = \mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\operatorname{ann}_S(z))$. Rõ ràng $\varphi^{-1}(\operatorname{ann}_S(az)) \ni \mathfrak{p}$.

Trường hợp 1: $a = \varphi(c)$ với $c \in R \setminus \mathfrak{p}$. Với mọi $r \in \varphi^{-1}(\operatorname{ann}_S(az))$, ta có $\varphi(r)az = \varphi(r)\varphi(c)z = \varphi(rc)z = 0$, Từ đó suy ra $\varphi(rc) \in \operatorname{ann}_S(z)$, do vậy $rc \in \varphi^{-1}(\operatorname{ann}_S(z)) = \mathfrak{p}$. Từ đây ta có $r \in \mathfrak{p}$ do $\mathfrak{p}$ nguyên tố.

Trường hợp 2: a bất kì. Với mọi $r \in \varphi^{-1}(\operatorname{ann}_S(az))$, ta thấy $\varphi(r)az = a\varphi(r)z = 0$, từ đó $a \in \operatorname{ann}_S(\varphi(r)z)$. Nếu $r \notin \mathfrak{p}$, theo trường hợp 1 thì $\varphi^{-1}(\operatorname{ann}_S(\varphi(r)z)) = \varphi^{-1}(\operatorname{ann}_S(z))$, do đó $\operatorname{ann}_S(\varphi(r)z) \in \Sigma$. Lại có $\operatorname{ann}_S(\varphi(r)z) \supseteq \operatorname{ann}_S(\varphi(r)z)$, từ đó $\operatorname{ann}_S(\varphi(r)z) = \operatorname{ann}_S(z)$, vì thế $a \in \operatorname{ann}_S(z)$, trái với giả thiết ban đầu về a. Vậy $r \in \mathfrak{p}$ suy ra $\operatorname{ann}_S(az) \in \Sigma$.

Như vậy $\operatorname{ann}_S(az)$ là một phần tử của Σ, chứa $\operatorname{ann}_S(z)$, điều này chỉ ra $\operatorname{ann}_S(az) = \operatorname{ann}_S(z)$ hay $b \in q_0$. Vậy q_0 nguyên tố và ta kết thúc chứng minh. $\square$

Chúng ta đến với một kết quả quan trọng của môđun phân bậc.

Mệnh đề 2.1.2. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, S là một đại số phân bậc chuẩn trên $S_0 = R$. Cho E là một S-môđun phân bậc hữu hạn sinh, đặc biệt với mọi số nguyên n, E_n là một R-môđun. Khi đó*

a) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ass}_R E_n$ *là một tập hữu hạn.*

b) *Tồn tại số nguyên $N \geq 1$ sao cho $\operatorname{Ass}_R E_n \subset \operatorname{Ass}_R E_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$. Đặc biệt, dãy $(\operatorname{Ass}_R E_n)_n$ không đổi với n đủ lớn.*

Chứng minh.

a) Xét ánh xạ nhúng $\varphi : R \to S$, ta có

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ass}_R E_n &= \operatorname{Ass}_R(\oplus_{n\in\mathbb{Z}} E_n)\\ &= \operatorname{Ass}_R E = \{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_S E\}.\end{aligned}$$

Lại có E là một S - môđun hữu hạn sinh, S là một vành Noether, suy ra $\operatorname{Ass}_S E$ là một tập hữu hạn [5, Định lý 6.5]. Do đó $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ass}_R E_n$ cũng hữu hạn.

b) Chúng ta chỉ cần chứng minh ý đầu tiên, ý thứ hai suy ra từ phần a) và ý đầu tiên.

Đặt $t = 1+$ bậc cực đại của một phần tử sinh thuần nhất tối thiểu của $(0 :_E S_1)$. Ta thấy $(0 :_E S_1) \cap S_n = \{0\}$ với mọi $n \geq t$.

Thật vậy, giả sử $x \in (0 :_E S_1) \cap S_n$, thuần nhất. Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_p$ là một hệ sinh tối thiểu thuần nhất của $(0 :_E S_1)$. Nếu $x \neq 0$ thì

$$\deg x \geq n \geq 1 + \max\{\deg a_1, \deg a_2, \ldots, \deg a_p\}$$

suy ra $x \in S_1a_1 + \ldots + S_1a_p = 0$, mâu thuẫn. Vậy $x = 0$, tức là $(0 :_E S_1) \cap S_n = \{0\}$.

Giờ ta chỉ ra $\operatorname{Ass}_R E_n \subseteq \operatorname{Ass}_R E_{n+1}$ với mọi $n \geq t$.

Với $P = \operatorname{ann}_R(x), x \in E_n \setminus \{0\}$, ta thấy $P \subseteq (0 :_E S_1x)$. Ta chỉ ra $P = (0 :_E S_1x)$. Lấy một phần tử thuần nhất $y \in (0 :_E S_1x)$, khi đó $yx \in (0 :_E S_1) \cap S_{n+\deg y} = \{0\}$. Từ đó $y \in \operatorname{ann}_R(x)$.

Với $y_1, \ldots, y_s$ là một hệ sinh của R - môđun S_1 thì

$$P = 0 :_R S_1x = \bigcap_{i=1}^{s} (0 :_R y_ix).$$

Từ đó $(0 :_R y_ix) \subseteq P$ với chỉ số i nào đó, nên $P = (0 :_R y_ix) \subseteq \operatorname{Ass}_R E_{n+1}$. Vậy mệnh đề đã được chứng minh. □

Kết quả chính của mục này là

Định lý 2.1.3 (Brodmann [2, Định lý 1]). *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, $I \subseteq \mathfrak{m}$ là một iđêan của R, M là một R-môđun hữu hạn sinh. Tồn tại số tự nhiên $N \geq 1$ sao cho $\operatorname{Ass}(M/I^nM) = \operatorname{Ass}(M/I^{n+1}M)$ với mọi $n \geq N$.*

Chứng minh. Đặt $W = M \oplus IMt \oplus I^2Mt^2 \oplus \ldots \subseteq M[t]$. Ta thấy W là một S-môđun phân bậc. Nếu M hữu hạn sinh trên R bởi $m_1, \ldots, m_p$ thì W hữu hạn sinh trên S bởi $m_1, \ldots, m_p$. Đặt

$$E = W/IW = \bigoplus_{n \geq 0} I^nM/I^{n+1}M,$$

thì E là một S-môđun phân bậc hữu hạn sinh. Xét dãy khớp ngắn

$$0 \to I^nM/I^{n+1}M \to M/I^{n+1}M \to M/I^nM \to 0.$$

Ta thu được $\operatorname{Ass}(I^nM/I^{n+1}M) \subseteq \operatorname{Ass}(M/I^{n+1}M) \subseteq \operatorname{Ass}(I^nM/I^{n+1}M) \cup \operatorname{Ass}(M/I^nM)$. Với $n \geq N$, ta có

$$\operatorname{Ass}(I^nM/I^{n+1}M) = \operatorname{Ass}(I^{n-1}M/I^nM) \subseteq \operatorname{Ass}(M/I^nM).$$

Suy ra

$$\operatorname{Ass}(M/I^{n+1}M) \subseteq \operatorname{Ass}(I^nM/I^{n+1}M) \cup \operatorname{Ass}(M/I^nM) = \operatorname{Ass}(M/I^nM)$$

với mọi $n \geq N+1$. Điều này chỉ ra dãy $(\operatorname{Ass}(M/I^nM))_n$ là dãy giảm với n đủ lớn. Tuy nhiên $(\operatorname{Ass}(M/I^nM))_n$ hữu hạn với mọi n, do đó nó sẽ không thay đổi với n đủ lớn. Vậy $(\operatorname{Ass}(M/I^nM))_n$ ổn định tiệm cận. □

Hệ quả 2.1.4. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, $I \subseteq \mathfrak{m}$ là một iđêan của R. Tồn tại số tự nhiên $N \geq 1$ sao cho $\operatorname{Ass}(R/I^n) = \operatorname{Ass}(R/I^{n+1})$ với mọi $n \geq N$.*

2.2 Sự ổn định tiệm cận của hàm độ sâu

Kết quả chính của mục này là

Định lý 2.2.1 (Brodmann [1, Định lý 2])**.** *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, $I \subset \mathfrak{m}$ là một iđêan của R, M là một R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó tồn tại số tự nhiên $N \geq 1$ sao cho $\operatorname{depth}(M/I^nM) = \operatorname{depth}(M/I^NM)$ với mọi $n \geq N$.*

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh Định lý này bằng cách quy nạp theo $\liminf_{n\to\infty} \operatorname{depth}(M/I^nM)$.

Trước tiên ta giả sử $\liminf_{n\to\infty} \operatorname{depth}(M/I^nM) = 0$, khi đó tồn tại dãy vô hạn $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \ldots$ thỏa mãn $\operatorname{depth}(M/I^{n_i}M) = 0$ với mọi $i \in \mathbb{N}$, suy ra $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(M/I^{n_i}M)$ với mọi $i \in \mathbb{N}$. Theo Định lý 2.1.3, ta thu được $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(R/I^n)$ với n đủ lớn. $\mathrm{depth}(M/I^nM) = 0$ với n đủ lớn.

Giả sử $\liminf_{n\to\infty} \mathrm{depth}(R/I^n) \geq 1$, khi đó tồn tại số tự nhiên $k \geq 1$ sao cho

$$\mathrm{depth}(R/I^n) \geq 1 \;\; \forall\, n \geq k.$$

Theo Định lý 2.1.3 tồn tại số tự nhiên N, có thể giả sử $N \geq k$ để $\mathrm{Ass}(M/I^nM) = \mathrm{Ass}(M/I^N)$ với mọi $n \geq N$. Chọn phần tử $z \in \mathfrak{m} \setminus \mathrm{Ass}(M/I^N)$, ta có

$$\mathrm{depth}((M/I^nM)/(z)(R/I^n)) = \mathrm{depth}((M/I^nM)) - 1.$$

Lại có

$$\begin{aligned}
&(M/I^nM)/(z)(M/I^nM) = (M/I^nM)/((I^n+(z))M/I^nM)\\
\cong &M/(I^n+(z))M \cong \frac{M/(z)M}{(I^n+(z))M/(z)M}.
\end{aligned}$$

Lúc này ta xét $R/(z)$-môđun M/zM cùng với iđêan $(I+(z))/(z)$ của $R/(z)$, dãy
$\left(\mathrm{depth}\left(\frac{M/(z)M}{(I^n+(z))M/(z)M}\right)\right)_n$ thỏa mãn

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\mathrm{depth}\left(\frac{M/(z)M}{(I^n+(z))M/(z)}M\right)\right) = \liminf_{n\to\infty} \mathrm{depth}(M/I^nM) - 1.$$

Theo giả thiết quy nạp, ta suy ra dãy $\left(\mathrm{depth}\left(\frac{M/(z)M}{(I^n+(z))M/(z)M}\right)\right)_n$ hội tụ, do đó dãy $(\mathrm{depth}(M/I^n)M)_n$ cũng vậy. Vậy Định lý đã được chứng minh. $\square$

Hệ quả 2.2.2. *Tồn tại số tự nhiên* $N \geq 1$ *sao cho* $\mathrm{depth}(R/I^n) = \mathrm{depth}(R/I^N)$ *với mọi* $n \geq N$.

2.3 Ví dụ

Trước tiên chúng ta đến với một số bổ đề sau.

Bổ đề 2.3.1. *Cho R là một vành giao hoán, có đơn vị, I là một iđêan của vành R. Nếu $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ là một iđêan tối đại thì I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ.*

Chứng minh. Giả sử $ab \in I$ và $b \notin \sqrt{I} = \mathfrak{m}$. Do $\mathfrak{m}$ tối đại nên ta có $\mathfrak{m} + Rb = R$, nên tồn tại các phần tử $x \in \mathfrak{m}$ và $r \in R$ để $x + rb = 1$. Vì $x \in \mathfrak{m}$, tồn tại số tự nhiên k để $x^k \in I$. Khi đó $1^k = 1 = (x + rb)^k = x^k + sb$ với $s \in R$ nào đó, suy ra $a = ax^k + abs \in I$. Vậy I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. □

Bổ đề 2.3.2. *Cho R là một vành, $\mathfrak{m}$ là một iđêan tối đại của vành R. Nếu I là một iđêan thực sự của vành R thỏa mãn*

$$\mathfrak{m}^n \subseteq I \quad \textit{với } n \in \mathbb{N} \textit{ nào đó}$$

thì I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ và $\operatorname{Ass}(R/I) = \{\mathfrak{m}\}$.

Chứng minh. Dễ thấy $\sqrt{I} \supset \mathfrak{m}$. Mà $\mathfrak{m}$ là một iđêan cực đại, suy ra $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. Từ đó suy ra I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ.

Tiếp theo ta chỉ ra $\operatorname{Ass}(R/I) = \{\mathfrak{m}\}$.

Nếu $\mathfrak{m} = I$, ta có $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m} :_R 1) \in \operatorname{Ass}(R/\mathfrak{m})$.

Nếu ngược lại, từ giả thiết ta có thể chọn số tự nhiên $s > 1$ sao cho $\mathfrak{m}^s \subseteq I, \mathfrak{m}^{s-1} \not\subseteq I$, tồn tại $a \in \mathfrak{m}^{s-1} \setminus I$. Khi đó $(I :_R a) = \mathfrak{m}$, suy ra $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(R/I)$.

Nếu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/I)$, ta có $\mathfrak{p}$ nguyên tố và $\mathfrak{p} \supseteq I$. Khi đó

$$\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}} \supset \sqrt{I} = \mathfrak{m},$$

suy ra $\mathfrak{p} = m$.

Vậy $\operatorname{Ass}(R/I) = \mathfrak{m}$. □

Ví dụ 2.3.3. Xét vành đa thức hai biến $R = k[x, y]$, iđêan thuần nhất tối đại của vành R là $\mathfrak{m} = (x, y)$. Xét iđêan $I = \mathfrak{m}$. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta thấy $\mathfrak{m}^n \subset I^n$, do đó theo Bổ đề 2.3.2

$$\operatorname{Ass}(R/I^n) = \{\mathfrak{m}\}.$$

Như vậy, iđêan cực đại $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(R/I^n)$ với mọi số tự nhiên n. Theo Bổ đề 1.3.3, $\operatorname{depth}(R/I^n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 2.3.4. Trên vành $R = k[x, y]$, xét iđêan $J = (x^2, xy) = (x^2, y) \cap (x)$. Từ đó $\operatorname{Ass}(R/I) = \{(x, y), (x)\}$, suy ra $\operatorname{depth}(R/I) = 0$.

Dễ thấy $\sqrt{I} = (x)$. Ta có

$$\operatorname{Min}\sqrt{I} = \operatorname{Min}(I) = \operatorname{Min}(I^n) = \operatorname{Min}(R/I^n) \subseteq \operatorname{Ass}(R/I^n).$$

Lại có $\operatorname{Min}(\sqrt{I}) = \{(x)\}$ nên chỉ có khả năng $\operatorname{Ass}(R/I^n) = \{(x)\}$ hoặc $\{(x), (x, y)\}$. Dễ thấy $I^n = (x^{n+i}y^{n-i} : i = 0, 1, \ldots, n)$, từ đó ta thấy $(I^n : x^{2n-1}) = (x, y)$. Điều này chỉ ra $(x, y) \in \operatorname{Ass}(R/I^n)$ với mọi $n \geq 2$. Vậy $\operatorname{Ass}(R/I^n) = \{(x, y), (x)\}$ và $\operatorname{depth}(R/I^n) = 0$ với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 2.3.5. Trên vành $R = k[x, y, z]$, iđêan thuần nhất tối đại là $\mathfrak{m} = (x, y, z)$. Xét iđêan

$$I = (x^4, x^3y, xy^3, y^4, x^2y^2z).$$

Ta sẽ chứng minh

$$\operatorname{depth}(R/I^n) = \begin{cases} 0 \text{ với } n = 1 \\ 1 \text{ với } n > 1. \end{cases}$$

Trước tiên, $I : (x^2y^2) = (x, y, z)$, do đó $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(R/I)$. Vậy $\operatorname{depth}(R/I) = 0$.

Với mọi $n \geq 2$, ta có

$$J = (x^4, x^3y, xy^3, y^4) \subseteq I \subseteq (x, y)^4,$$

nên $J^n \subseteq I^n \subseteq (x, y)^{4n}$ với mọi $n \geq 2$. Để chỉ ra $J^n = (x, y)^{4n}$ với mọi $n \geq 2$, ta chỉ cần chỉ ra đẳng thức đúng với $n = 2$ và $n = 3$, sau đó bằng quy nạp với $n \geq 4$ ta có

$$J^n = J^{n-2}J^2 = (x, y)^{4(n-2)}(x, y)^8 = (x, y)^{4n}.$$

Với $n = 2$, ta có

$$\begin{aligned} J^2 &= (x^4, x^3y, xy^3, y^4)^2 \\ &= (x^8, x^7y, x^6y^2, x^5y^3, x^4y^4, x^3y^5, x^2y^6, xy^7, y^8) = (x, y)^8. \end{aligned}$$

Với $n = 3$

$$J^3 = JJ^2 = (x^4, x^3y, xy^3, y^4)(x, y)^8 = (x, y)^{12}.$$

Vậy $J^n = (x, y)^{4n}$, suy ra $I^n = (x, y)^{4n}$ với mọi $n \geq 2$.

Dễ thấy z là một phần tử R/I^n-chính quy, suy ra $\operatorname{depth}(R/I^n) \neq 0$, do đó $(x, y, z) \notin \operatorname{Ass}(R/I^n)$. Lại có $\operatorname{Min}(\sqrt{I}) = \operatorname{Min}(x, y) = (x, y)$, suy ra $\operatorname{Ass}(R/I^n) = \{(x, y)\}$ với mọi $n \geq 2$.

Xét R-môđun $\dfrac{R/I^n}{(z)(R/I^n)}$. Ta thấy

$$\frac{R/I^n}{(z)(R/I^n)} = \frac{R/I^n}{(zR + I^n)/I^n} \cong \frac{R}{(zR + I^n)} \cong \frac{k[x, y]}{(x, y)^{4n}}.$$

Trong $k[x, y]$, $\sqrt{(x, y)^{4n}} = (x, y)$, suy ra

$$\operatorname{Ass}\left(\sqrt{(x, y)^{4n}}\right) = \{(x, y)\} \subseteq \operatorname{Ass}(k[x, y]/(x, y)^{4n}),$$

do đó depth$(\dfrac{k[x,y]}{(x,y)^{4n}}) = $ depth$(\dfrac{R/I^n}{(z)(R/I^n)}) = 0$. Từ đây ta có depth$(R/I^n) = 1$ với mọi $n \geq 2$.

Chương 3

Hàm độ sâu của tổng các iđêan

Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày một kết quả biểu diễn mối liên hệ giữa giới hạn của depth $R/(I+J)^n$ với giới hạn của các hàm depth A/I^n và depth B/J^n. Tài liệu tham khảo chính của chương này là [3].

3.1 Tổng các iđêan

Cho $A = k[x_1, x_2, \dots, x_r], B = k[y_1, y_2, \dots, y_s]$ là hai vành đa thức trên trường k. Giả sử $I \subseteq A, J \subseteq B$ là hai iđêan thuần nhất, không tầm thường. Đặt $R = A \otimes_k B$. Ta kí hiệu

$$I + J := IR + JR \subseteq R.$$

Ví dụ 3.1.1. Xét $A = k[x_1, x_2], B = k[y_1, y_2, y_3]$ là các vành đa thức. Trên A, B xét lần lượt hai iđêan

$$I = (x_1^2, x_1x_2), J = (y_1^4, y_1^3y_2, y_1y_2^3, y_2^4, y_1^2y_2^2y_3).$$

Ta có $A \otimes_k B \cong k[x_1, x_2, y_1, y_2, y_3]$.
Iđêan $I + J = (x_1^2, x_1x_2, y_1^4, y_1^3y_2, y_1y_2^3, y_2^4, y_1^2y_2^2y_3)$.

Một câu hỏi được đặt ra rất tự nhiên: Liệu ta có thể miêu tả các tính chất của $(I+J)^n$ thông qua các tính chất của I, J? Trong luận văn này, chúng tôi sẽ nghiên cứu về tính chất của hàm độ sâu $\operatorname{depth} R/(I+J)^n$.

3.2 Hàm độ sâu của tổng các iđêan

Trước tiên chúng tôi sẽ đưa ra một chặn trên cho hàm độ sâu của $(I+J)^n$ dựa trên I và J. Ta bắt đầu với các bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.1 ([8, Bổ đề 1.1])**.** *$IJ = I \cap J$.*

Bổ đề 3.2.2 ([3, Bổ đề 2.2])**.** *Với mọi $n \geq 1$ cho trước đặt $Q_i = \sum_{j=0}^{i} I^{n-j} I^j$. Với mọi $1 \leq i \leq n$, ta có*

$$Q_i/Q_{i-1} \cong I^{n-i}J^i/I^{n-i+1}J^i.$$

Chứng minh. Dễ thấy

$$Q_i/Q_{i-1} = (I^{n-i}J^i + Q_{i-1})/Q_{i-1} \cong I^{n-i}J^i/(I^{n-i}J^i \cap Q_{i-1}).$$

Ta cần chứng minh $I^{n-i}J^i \cap Q_{i-1} = I^{n-i+1}J^i$. Thật vậy ta thấy

$$Q_{i-1} = I^n + I^{n-1}J + \ldots + I^{n-i+1}J^{i-1} \supseteq I^{n-i+1}J^{i-1},$$

suy ra

$$I^{n-i}J^i \cap Q_{i-1} \supseteq I^{n-i+1}J^{i-1} \cap I^{n-i}J^i \supseteq I^{n-i+1}J^i.$$

Mặt khác $Q_{i-1} \subseteq I^{n-i+1}$, do vậy

$$I^{n-i}J^i \cap Q_{i-1} \subseteq I^{n-i+1} \cap I^{n-i}J^i = I^{n-i+1} \cap I^{n-i} \cap J^i = I^{n-i+1} \cap J^i = I^{n-i+1}J^i$$

theo Bổ đề 3.2.1. Như vậy $I^{n-i}J^i \cap Q_{i-1} = I^{n-i+1}J^i$ và ta kết thúc chứng minh. □

Bổ đề 3.2.3. *$I \otimes_k J \cong IJ$.*

Bổ đề 3.2.4. $\operatorname{depth}(A/I) = \operatorname{depth} I - 1$ *nếu* $I \neq 0$.

Chứng minh. Ta luôn có $\operatorname{depth} A/I \leq \dim A/I$ theo Hệ quả 1.5.2 và $\dim A - \operatorname{height} I = \dim A/I < \dim A$ [4, Hệ quả 2.1.14] do A là vành Cohen-Macaulay và $I \neq 0$. Suy ra $\operatorname{depth}(A/I) \leq \operatorname{depth} A - 1$.

Từ dãy khớp

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0,$$

ta có $\operatorname{depth} I \geq \min\{\operatorname{depth} A, \operatorname{depth} A/I + 1\} = \operatorname{depth} A/I + 1$.

Mặt khác ta có

$$\operatorname{depth} A > \operatorname{depth} A/I \geq \min\{\operatorname{depth} A, \operatorname{depth} I - 1\},$$

suy ra $\operatorname{depth} A/I \geq \operatorname{depth} I - 1$. Vậy $\operatorname{depth}(A/I) = \operatorname{depth} I - 1$. □

Bổ đề 3.2.5. $\operatorname{depth} R/IJ = \operatorname{depth} A/I + \operatorname{depth} B/J + 1$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.2.3 và Bổ đề 3.2.4, ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{depth} R/IJ &= \operatorname{depth} IJ - 1 = \operatorname{depth}(I \otimes_k J) - 1 = \operatorname{depth} I + \operatorname{depth} J - 1\\ &= (\operatorname{depth} A/I + 1) + (\operatorname{depth} B/J + 1) - 1 = \operatorname{depth} A/I + \operatorname{depth} B/J + 1,\end{aligned}$$

suy ra điều phải chứng minh. □

Bây giờ chúng ta cùng đến với Định lý về chặn dưới cho hàm độ sâu của $(I+J)^n$ dựa trên các hạng tử I, J trong A và B.

Định lý 3.2.6 ([3, Định lý 2.4])**.** *Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có*

$$\operatorname{depth} R/(I+J)^n \geq$$
$$\min_{i\in[1,n-1],j\in[1,n]}\{\operatorname{depth} A/I^{n-i} + \operatorname{depth} B/J^i + 1, \operatorname{depth} A/I^{n-j+1} + \operatorname{depth} B/J^j\}.$$

Chứng minh. Đặt $Q_i = \sum_{j=0}^{i} I^{n-j}I^j$ với $i = 0, 1, \ldots, n$. Dễ thấy $Q_n = (I+J)^n$. Xét dãy khớp ngắn

$$0 \to Q_i/Q_{i-1} \to R/Q_{i-1} \to R/Q_i \to 0.$$

Với $i = n$, ta suy ra

$$\operatorname{depth} R/Q_n \geq \min\{\operatorname{depth} Q_n/Q_{n-1} - 1, \operatorname{depth} R/Q_{n-1}\},$$

tức là $\operatorname{depth} R/Q_n$ lớn hơn hoặc bằng $\operatorname{depth} Q_n/Q_{n-1} - 1$ hoặc $\operatorname{depth} R/Q_{n-1}$. Nếu $\operatorname{depth} R/Q_n < \operatorname{depth} Q_n/Q_{n-1} - 1$, hiển nhiên ta có $\operatorname{depth} R/Q_n \geq \operatorname{depth} R/Q_{n-1}$. Mặt khác ta có

$$\operatorname{depth} R/Q_{n-1} \geq \operatorname{depth} Q_{n-1}/Q_{n-2} - 1 \text{ hoặc } \operatorname{depth} R/Q_{n-1} \geq \operatorname{depth} R/Q_{n-2},$$

từ đó $\operatorname{depth} R/Q_{n-1}$ cũng vậy. Nói cách khác

$$\operatorname{depth} R/Q_n \geq \min\{\operatorname{depth} Q_n/Q_{n-1} - 1, \operatorname{depth} Q_{n-1}/Q_{n-2} - 1, \operatorname{depth} R/Q_{n-2}\}.$$

Lập luận tương tự với $\operatorname{depth} R/Q_{n-2}, \operatorname{depth} R/Q_{n-1}, \ldots, \operatorname{depth} R/Q_0$, ta suy ra

$$\operatorname{depth} R/Q_n \geq \min\{\operatorname{depth} R/Q_0, \operatorname{depth} Q_i/Q_{-1} - 1 : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Chú ý rằng $R/Q_0 = R/I^n$, ta có

$$\operatorname{depth} R/Q_0 = \operatorname{depth} A/I^n + s \geq \operatorname{depth} A/I^n + \operatorname{depth} B/J.$$

Theo Bổ đề 3.2.2, $Q_i/Q_{i-1} \cong I^{n-i}J^i/I^{n-i+1}J^i$. Ta có dãy khớp

$$0 \to Q_i/Q_{i-1} \to R/I^{n-i+1}J^i \to R/I^{n-i}J^i \to 0.$$

Do đó

$$\operatorname{depth} Q_i/Q_{i-1} \geq \min\{\operatorname{depth} R/I^{n-i}J^i + 1, \operatorname{depth} R/I^{n-i+1}J^i\}.$$

Với $i = 1, 2, \ldots, n-1$, áp dụng Bổ đề 3.2.3, ta suy ra

$$\begin{aligned}\operatorname{depth} Q_i/Q_{i-1} - 1 \geq \min\{&\operatorname{depth} A/I^{n-i} + \operatorname{depth} B/J^i + 1,\\ &\operatorname{depth} A/I^{n-i+1} + \operatorname{depth} B/J^i\}.\end{aligned}$$

Với $i = n$, chú ý rằng

$$\operatorname{depth} R/J^n = r + \operatorname{depth} B/J^n \geq \operatorname{depth} A/I + \operatorname{depth} B/J^n + 1 = \operatorname{depth} R/IJ^n.$$

Suy ra

$$\operatorname{depth} Q_n/Q_{n-1} - 1 \geq \operatorname{depth} R/IJ^n - 1 = \operatorname{depth} A/I + \operatorname{depth} B/J^n.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Tiếp theo chúng ta đến với một kết quả cần thiết về tích tenxơ của hai môđun trên một trường.

Bổ đề 3.2.7. *Cho A, B là hai vành đa thức trên trường k, đặt $R = A \otimes_k B$.*

Cho M, N là hai môđun phân bậc hữu hạn sinh trên A, B. Khi đó

$$\operatorname{depth}(M \otimes_k N) = \operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N.$$

Chứng minh. Gọi $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ tương ứng là iđêan phân bậc cực đại của A, B. Ta chứng minh bằng cách quy nạp theo $\operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N$.

Trước tiên, giả sử $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} N = 0$, ta chỉ ra $\operatorname{depth}(M \otimes_k N) = 0$.

Do $\operatorname{depth} M = 0$, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} M$, tức là tồn tại $a \in M \setminus \{0\}$ sao cho $a = \operatorname{ann}_A a$. Tương tự ta có $\mathfrak{n} = \operatorname{ann}_B b$ với phần tử $b \in N \setminus \{0\}$. Khi đó

$$\mathfrak{m}T + \mathfrak{n}T \subseteq \operatorname{ann}_T(a \otimes_k b).$$

Vì k là trường, $a, b \neq 0$ nên suy ra $a \otimes_k b \neq 0 \in M \otimes_k N$. Như vậy $\operatorname{depth}(M \otimes_k N) = 0$.

Giả sử kết luận đã đúng với $\operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N \leq s - 1$, với $s \geq 1$.

Xét trường hợp $\operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N = s$. Ta có thể giả sử $\operatorname{depth} M \geq 1$, khi đó tồn tại phần tử $x \in \mathfrak{m}$, thuần nhất sao cho x là một phần tử M-chính quy. Ta có dãy khớp

$$0 \to M \xrightarrow{\cdot x} M \to M/xM \to 0.$$

Dựa vào tính phẳng của $A \otimes_k N$ trên A, ta thu được dãy khớp

$$0 \to M \otimes_k N \to M \otimes_k N \to M/xM \otimes_k N \to 0.$$

Như vậy x là một phần tử $M \otimes_k N$-chính quy. Bên cạnh đó ta có

$(M \otimes_k N)/x(M \otimes_k N) \cong (M/xM) \otimes_k N$. Lại có

$$\operatorname{depth}(M/xM) + \operatorname{depth} N = \operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N - 1 = s - 1.$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có $\operatorname{depth}((M/xM)\otimes_k N) = s-1$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{depth}(M\otimes_k N)/x(M\otimes_k N) = \operatorname{depth}((M/xM)\otimes_k N),\\
&\operatorname{depth}(M\otimes_k N) - 1 = s-1,\\
&\operatorname{depth}(M\otimes_k N) = s = \operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N.
\end{aligned}$$

Vậy $\operatorname{depth}(M\otimes_k N) = \operatorname{depth} M + \operatorname{depth} N$. $\square$

Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày mối liên hệ giữa hàm độ sâu của $(I+J)^n/(I+J)^{n+1}$ với hàm độ sâu của các hạng tử I, J. Các kết quả đóng vai trò quan trọng trong việc chỉ ra giá trị tới hạn của hàm độ sâu của $R/(I+J)^n$.

Bổ đề 3.2.8. $I^i/I^{i+1}\otimes_k J^j/J^{j+1} \cong I^iJ^j/(I^{i+1}J^j + I^iJ^{j+1})$.

Trước khi chứng minh Bổ đề 3.2.8, chúng ta cùng đến với bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.9. *Cho M, P, N là các k-môđun, $N\subseteq P$, ta có* $M\otimes_k \dfrac{P}{N} \cong \dfrac{M\otimes_k P}{M\otimes_k N}$.

Chứng minh. Xét dãy khớp

$$0\to N\to P\to \frac{P}{N}\to 0.$$

Do M là một k-môđun tự do, ta có dãy khớp

$$0\to M\otimes_k N\to M\otimes_k P\to M\otimes_k \frac{P}{N}\to 0.$$

Từ đó ta có $M\otimes_k \dfrac{P}{N} \cong \dfrac{M\otimes_k P}{M\otimes_k N}$. $\square$

Chứng minh Bổ đề 3.2.8. Áp dụng Bổ đề 3.2.9, ta có

$$I^i/I^{i+1} \otimes_k J^j/J^{j+1} \cong \frac{I^i/I^{i+1} \otimes_k J^j}{I^i/I^{i+1} \otimes_k J^{j+1}} \cong \frac{(I^i \otimes_k J^j)/(I^{i+1} \otimes_k J^j)}{(I^i \otimes_k J^{j+1})/(I^{i+1} \otimes_k J^{j+1})}$$
$$\cong \frac{(I^i J^j)/(I^{i+1} J^j)}{(I^i J^{j+1})/(I^{i+1} J^{j+1})}.$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}(I^i J^{j+1})/(I^{i+1} J^{j+1}) &= (I^i J^{j+1})/(I^i J^{j+1} \cap I^{i+1} J^j) \\ &\cong (I^i J^{j+1} + I^{i+1} J^j)/(I^{i+1} J^j).\end{aligned}$$

Do đó

$$I^i/I^{i+1} \otimes_k J^j/J^{j+1} \cong \frac{(I^i J^j)/(I^{i+1} J^j)}{(I^i J^{j+1} + I^{i+1} J^j)/(I^{i+1} J^j)} \cong \frac{I^i J^j}{I^i J^{j+1} + I^{i+1} J^j}.$$

Vậy chứng minh kết thúc. □

Mệnh đề 3.2.10. $(I+J)^n/(I+J)^{n+1} \cong \bigoplus_{i+j=n} (I^i/I^{i+1} \otimes_k J^j/J^{j+1})$.

Chứng minh. Ta có $(I+J)^n = \sum_{i=0}^{n} I^i J^{n-i}$. Ta chỉ ra rằng với mọi $0 \le i \le n$

$$I^i J^{n-i} \bigcap \sum_{0 \le j \le n, j \ne i} \left(I^j J^{n-j} + (I+J)^{n+1}\right) \subseteq (I+J)^{n+1}. \tag{3.1}$$

Chú ý rằng $(I+J)^{n+1} \subseteq I^{i+1} + J^{n-i+1}$. Hơn nữa $J^{n-j} \subseteq J^{n-i+1}, I^t \subseteq I^{i+1}$ nếu

$j < i < t$, vì vậy

$$\begin{aligned}
&I^iJ^{n-i}\bigcap \sum_{0\le j\le n, j\ne i}\big(I^jJ^{n-j}+(I+J)^{n+1}\big)\\
=&I^iJ^{n-i}\bigcap \left(\sum_{j<i} I^jJ^{n-j}+\sum_{j>i} I^jJ^{n-j}+(I+J)^{n+1}\right)\\
&\subseteq I^iJ^{n-i}\bigcap (I^{i+1}+J^{n-i+1}).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Chú ý rằng với ba iđêan I_1, I_2, I_3 của một vành R thì

$$I_1 \cap (I_2 + I_3) \subseteq (I_2 \cap (I_1 + I_3)) + (I_3 \cap (I_1 + I_2)).$$

Với $I_1 = I^iJ^{n-i}, I_2 = I^{i+1}, I_3 = J^{n-i+1}$, dễ thấy

$$I_1 + I_3 \subseteq J^{n-i}, I_1 + I_2 \subseteq I^i.$$

Như vậy

$$\begin{aligned}
&I^iJ^{n-i}\bigcap (I^{i+1}+J^{n-i+1}) \subseteq I^{i+1}\cap J^{n-i}+J^{n-i+1}\cap I^i\\
&= I^{i+1}J^{n-i}+I^iJ^{n-i+1}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Chú ý rằng

$$I^iJ^{n-i}\cap (I+J)^{n+1} = I^{i+1}J^{n-i}+I^iJ^{n-i+1}. \tag{3.4}$$

Kết hợp (3.2), (3.3) và (3.4), ta chứng minh được (3.1). Do đó

$$
\begin{aligned}
(I+J)^n/(I+J)^{n+1} &= \bigoplus_{i+j=n} \frac{I^iJ^{n-i}+(I+J)^{n+1}}{(I+J)^{n+1}} \cong \bigoplus_{i+j=n} \frac{I^iJ^{n-i}}{I^iJ^{n-i}\cap(I+J)^{n+1}} \\
&= \bigoplus_{i+j=n} \frac{I^iJ^{n-i}}{I^{i+1}J^j+I^iJ^{i+1}} \cong \bigoplus_{i+j=n} (I^i/I^{i+1}\otimes_k J^j/J^{j+1})
\end{aligned}
$$

□

Bổ đề 3.2.11. *Cho* $(R,\mathfrak{m})$ *là một vành Noether địa phương,* $M_1,\dots,M_n$ *là các* R*-môđun hữu hạn sinh. Ta có*

$$\operatorname{depth}\bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \min\{\operatorname{depth} M_i : 1\le i\le n\}$$

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh bổ đề với $n=2$, tức $\operatorname{depth}(M_1\oplus M_2) = \min\{\operatorname{depth} M_1, \operatorname{depth} M_2\}$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\operatorname{depth} M_1 \le \operatorname{depth} M_2$. Xét dãy khớp

$$0\to M_1\to M_1\oplus M_2\to M_2\to 0.$$

Từ dãy khớp trên ta có

$$
\begin{aligned}
\operatorname{depth}(M_1\oplus M_2) &\ge \min\{\operatorname{depth} M_1, \operatorname{depth} M_2\} = \operatorname{depth} M_1.\\
\operatorname{depth}(M_1) &\ge \min\{\operatorname{depth}(M_1\oplus M_2), \operatorname{depth} M_2+1\}.
\end{aligned}
$$

Nếu $\operatorname{depth}(M_1\oplus M_2)\ge \operatorname{depth} M_2+1$, ta suy ra

$$\operatorname{depth} M_1 \ge \operatorname{depth} M_2+1 > \operatorname{depth} M_2,$$

trái với giả sử $\operatorname{depth} M_1 \leq \operatorname{depth} M_2$. Do đó

$$\min\{\operatorname{depth}(M_1 \oplus M_2), \operatorname{depth} M_2 + 1\} = \operatorname{depth}(M_1 \oplus M_2),$$

hay $\operatorname{depth} M_1 \geq \operatorname{depth}(M_1 \oplus M_2)$. Từ đó suy ra $\operatorname{depth}(M_1 \oplus M_2) = \operatorname{depth} M_1$.

$\square$

Định lý 3.2.12. *Với mọi $n \geq 1$, ta có*

$$\operatorname{depth}(I+J)^n/(I+J)^{n+1} = \min_{i+j=n}\{\operatorname{depth} I^i/I^{i+1} + \operatorname{depth} J^j/J^{j+1}\}.$$

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.2.10, ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{depth}(I+J)^n/(I+J)^{n+1} &= \operatorname{depth} \bigoplus_{i+j=n} (I^i/I^{i+1} \otimes_k J^j/J^{j+1}) \\ &= \min_{i+j=n}\{\operatorname{depth}(I^i/I^{i+1} \otimes_k J^j/J^{j+1})\} \\ &= \min_{i+j=n}\{\operatorname{depth} I^i/I^{i+1} + \operatorname{depth} J^j/J^{j+1}\}.\end{aligned}$$

Đẳng thức cuối được suy ra từ Bổ đề 3.2.7. $\square$

Chúng tôi xin trình bày một kết quả then chốt của Herzog và Hibi.

Bổ đề 3.2.13 ([9, Định lý 1.2])**.** *Cho I là một iđêan thuần nhất của R, $\operatorname{depth} I^k/I^{k+1}, \operatorname{depth} I^k, \operatorname{depth} R/I^k$ là hằng số với k đủ lớn và*

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{depth} R/I^k = \lim_{k\to\infty} \operatorname{depth} I^k - 1 = \lim_{i\to\infty} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^i.$$

Trước khi chứng minh Bổ đề 3.2.13, chúng ta đến với bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.14. *Cho*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, "g"] & W \\ I^lU \arrow[u, hook] \arrow[r, "f'"] & I^lV \arrow[u, hook] \arrow[r, "g'"] & I^lW \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

là biểu đồ giao hoán của các phức R-môđun, trong đó $I(\operatorname{Ker} g/\operatorname{Im} f) = 0$*, và với mỗi* l *nguyên dương,* f', g' *là các ánh xạ tự nhiên cảm sinh bởi* f, g*. Khi đó với mọi* l *đủ lớn, ta có* $\operatorname{Ker} g' \subseteq I \operatorname{Ker} g$*. Nói riêng, ánh xạ* $\operatorname{Ker} g'/\operatorname{Im} f' \to \operatorname{Ker} g/\operatorname{Im} f$ *là ánh xạ không với* l *đủ lớn.*

Chứng minh. Chọn $M = V, N = \operatorname{Ker} g$. Theo Bổ đề Artin-Rees (Mệnh đề 1.6.8), tồn tại số nguyên dương k sao cho với mọi $n \geq k$

$$I^n V \cap \operatorname{Ker} g \subseteq I^{n-k}(I^k V \cap \operatorname{Ker} g).$$

Với $l = n \geq k+1$, ta có

$$\operatorname{Ker} g' \subseteq I^{k+1} V \cap \operatorname{Ker} g \subseteq I(I^k V \cap \operatorname{Ker} g) \subseteq I \operatorname{Ker} g.$$

Vậy $\operatorname{Ker} g' \subseteq I \operatorname{Ker} g$ với mọi $l \geq k+1$. □

Chứng minh Bổ đề 3.2.13. Giới hạn của dãy $\operatorname{depth}(R/I^k)$ tồn tại theo kết quả tương tự của Hệ quả 2.2.2 cho vành phân bậc chuẩn trên một trường. Kết hợp với Bổ đề 3.2.4, suy ra giới hạn của dãy $\operatorname{depth}(I^k)$ cũng tồn tại.

Chứng minh tương tự như Định lý 2.2.1, sử dụng Mệnh đề 2.1.2, ta cũng có thể thu được kết quả sau:

Cho $S = \operatorname{Rees}(I)$ là đại số Rees của I, và E là một môđun phân bậc hữu hạn sinh trên S. Khi đó giới hạn $\lim_{k\to\infty} \operatorname{depth} E_k$ tồn tại.

Áp dụng kết quả này cho trường hợp đặc biệt $E = S/IS = \oplus_{i=0}^{\infty} I^i/I^{i+1}$, suy ra giới hạn $\lim_{i\to\infty} \operatorname{depth} I^i/I^{i+1}$ tồn tại.

Tiếp theo ta chứng minh $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{depth} I^k - 1 = \lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{depth} I^k/I^{k+1}$. Đặt $g(k) = \operatorname{depth} I^k$ và $g = \lim\limits_{k\to\infty} g(k)$. Xét dãy khớp

$$0 \to I^{k+1} \to I^k \to I^k/I^{k+1} \to 0.$$

Với $k \geq k_0$, $c \geq \min\{g(k+1)-1, g(k)\}$. Lấy giới hạn hai vế ta thu được $c \geq g-1$.

Giả sử $c > g-1$, n là số phần tử sinh tối thiểu của một tập sinh của $\mathfrak{m}$. Chú ý rằng $H(x; M)$ là đồng điều Koszul của môđun M tương ứng với dãy $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ (xem [4, Mục 1.6] để biết chi tiết về đồng điều Koszul). Khi đó tồn tại số nguyên dương k_0 thỏa mãn $H_{n-g}(x; I^k) \neq 0$ và $H_{n-g+1}(x; I^k/I^{k+1}) = 0$ với mọi $k \geq k_0$ [4, Định lý 1.6.17]. Từ dãy khớp trên ta suy ra dãy khớp

$$\begin{aligned} \ldots \to H_{n-g+1}(x; I^{k+1}) \to H_{n-g+1}(x; I^k) \to H_{n-g+1}(x; I^k/I^{k+1}) \\ \to H_{n-g}(x; I^{k+1}) \to H_{n-g}(x; I^k) \to H_{n-g}(x; I^k/I^{k+1}) \to \ldots, \end{aligned}$$

Ta suy ra được ánh xạ $H_{n-g}(x; I^{k+1}) \to H_{n-g}(x; I^k)$ là đơn ánh với mọi $k \geq k_0$. Lập luận tương tự ta suy ra ánh xạ $H_{n-g}(x; I^l) \to H_{n-g}(x; I^k)$ là đơn ánh với mọi $k \geq k_0, l > k$.

Từ định nghĩa của phức Koszul $K(x; M)$, tồn tại các R-môđun tự do F, G, H sao cho

$$\begin{aligned} &H_{n-g}(x; M) = H_{n-g}(K(x; M)) = H(F \otimes_R M \to G \otimes_R M \to H \otimes_R M) \\ &H_{n-g}(x; I^l M) = H_{n-g}(K(x; I^l M)) = H(F \otimes_R I^l M \to G \otimes_R I^l M \\ &\to H \otimes_R I^l M) \\ =&H(I^l(F \otimes_R M) \to I^l(G \otimes_R M) \to I^l(H \otimes_R M)). \end{aligned}$$

Theo Bổ đề 3.2.14 và việc đồng điều Koszul $H_i(x; M)$ bị triệt tiêu bởi iđêan $(x_1, ..., x_n) = \mathfrak{m}$ (xem [4, Mệnh đề 1.6.5]), ánh xạ $H_{n-g}(x; I^l M) \to H_{n-g}(x; M)$ là ánh xạ không với l đủ lớn. Với $M = I^k$, ta suy ra $H_{n-g}(x; I^l) = 0$ với l đủ lớn, mâu thuẫn. Vậy $c = g-1$.

Vậy bổ đề đã được chứng minh. $\square$

Đặt $s(I)$ là chỉ số ổn định của hàm độ sâu $\operatorname{depth} I^{i-1}/I^i$, tức là $s(I)$ là số nguyên m nhỏ nhất thỏa mãn $\operatorname{depth} I^{i-1}/I^i = \operatorname{depth} I^i/I^{i+1}$ với mọi $i \geq m$. Dễ thấy

$$\min_{i\geq 1} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^i = \min_{i\leq s(I)} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^i.$$

Ta có công thức sau cho $\operatorname{depth}(I+J)^{n-1}/(I+J)^n$ khi n đủ lớn.

Mệnh đề 3.2.15 (Hà-N.V. Trung-T.N. Trung [3, Mệnh đề 4.2])**.** *Với* $n \geq s(I)+s(J)-1$*, ta có*

$$\begin{aligned}&\operatorname{depth}(I+J)^{n-1}/(I+J)^n =\\ &\min\{\lim_{i\to\infty} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^i + \min_{j\leq s(J)} \operatorname{depth} J^{j-1}/J^j,\\ &\min_{i\leq s(I)} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^I + \lim_{j\to\infty} \operatorname{depth} J^{j-1}/J^j\}.\end{aligned}$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 3.2.12, ta có

$$\operatorname{depth}(I+J)^{n-1}/(I+J)^n = \min_{i+j=n+1}\{\operatorname{depth} I^{i-1}/I^i + \operatorname{depth} J^{j-1}/J^j\}.$$

Theo định nghĩa của $s(I), s(J)$, ta thấy

$$\operatorname{depth} I^{i-1}/I^i = \lim_{n\to\infty} \operatorname{depth} I^{n-1}/I^n,\ \operatorname{depth} J^{j-1}/I^j = \lim_{n\to\infty} \operatorname{depth} J^{n-1}/J^n$$

với $i \geq s(I), j \geq s(J)$. Xét $n \geq s(I)+s(J)-1$ và $i+j=n+1$. Nếu $j \leq s(J)$ thì $i \geq s(I)$ do đó

$$\begin{aligned}&\operatorname{depth} I^{i-1}/I^i + \operatorname{depth} J^{j-1}/J^j\\ &= \begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{depth} I^{t-1}/I^t + \operatorname{depth} J^{j-1}/J^j \text{ nếu } j \leq s(J)\\ \operatorname{depth} I^{i-1}/I^i + \lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{depth} J^{t-1}/J^t \text{ nếu } j \geq s(J).\end{cases}\end{aligned}$$

Chú ý rằng $i \leq n - s(J) + 1$ khi và chỉ khi $j \geq s(J)$ và

$$\min_{i \leq n-s(J)+1} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^i = \min_{i \leq s(I)} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^i$$

vì $n - s(J) + 1 \geq s(I)$. Do vậy

$$\min_{i+j=n+1} \{\operatorname{depth} I^{i-1}/I^i + \operatorname{depth} J^{j-1}/J^j\} =$$

$$\min\{ \lim_{i\to\infty} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^i + \min_{j \leq s(J)} \operatorname{depth} J^{j-1}/J^j,$$

$$\min_{i \leq s(I)} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^I + \lim_{j\to\infty} \operatorname{depth} J^{j-1}/J^j\}.$$

□

Hệ quả 3.2.16. $s(I + J) \leq s(I) + s(J) - 1$.

Bổ đề 3.2.17. $\min_{i\geq 1} \operatorname{depth} A/I^i = \min_{i\geq 1} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^i$.

Chứng minh. Gọi m là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn

$$\operatorname{depth}(I^{m-1}/I^m) = \min_{i\geq 1} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^i.$$

Với mọi $i \geq 1$ xét dãy khớp

$$0 \to I^{i-1}/I^i \to A/I^i \to A/I^{i-1} \to 0.$$

Ta có $\operatorname{depth}(A/I^i) \geq \min\{\operatorname{depth}(I^{i-1}/I^i), \operatorname{depth}(A/I^{i-1})\}$. Lập luận tương tự với $i - 1, \ldots, 2, 1$, ta có

$$\operatorname{depth}(A/I^i) \geq \min_{j\leq i}\{\operatorname{depth}(I^{j-1}/I^j)\} \geq \operatorname{depth}(I^{m-1}/I^m).$$

Nói riêng ta có $\operatorname{depth}(A/I^{m-1}) \geq \operatorname{depth}(I^{m-1}/I^m)$ và

$\operatorname{depth}(A/I^m) \geq \operatorname{depth}(I^{m-1}/I^m)$. Từ dãy khớp

$$0 \to I^{m-1}/I^m \to A/I^m \to A/I^{m-1} \to 0$$

ta có $\operatorname{depth}(I^{m-1}/I^m) \geq \min\{\operatorname{depth}(A/I^m), \operatorname{depth}(A/I^{m-1}) + 1\}$, suy ra $\operatorname{depth}(I^{m-1}/I^m) \geq \operatorname{depth}(A/I^m)$.

Vậy $\min_{i\geq 1} \operatorname{depth} A/I^n = \min_{i\geq 1} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^i$. □

Nhận xét 3.2.18. Nhìn chung ta không có đẳng thức

$$\min_{i\geq 1} \operatorname{depth} A/I^i = \lim_{i\to\infty} \operatorname{depth} A/I^i.$$

Ta có thể thấy ngay mệnh đề này không đúng khi ta xét $A = k[x, y, z]$, $I = (x^4, x^3y, xy^3, y^4, x^2y^2z)$ (Ví dụ 2.3.5).

Kết quả chính của luận văn này là

Định lý 3.2.19 (Hà-N.V. Trung-T.N. Trung [3, Định lý 4.6])**.**

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{depth} R/(I+J)^n =$$
$$\min\{\lim_{i\to\infty} \operatorname{depth} A/I^i + \min_{j\geq 1} \operatorname{depth} B/J^j, \min_{i\geq 1} \operatorname{depth} A/I^i + \lim_{j\to\infty} \operatorname{depth} B/J^j\}.$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.2.13 và Mệnh đề 3.2.15, ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \operatorname{depth} R/(I+J)^n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{depth}(I+J)^{n-1}/(I+J)^n = \\
&\min\{\lim_{i\to\infty} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^i + \min_{j\leq s(J)} \operatorname{depth} J^{j-1}/J^j, \\
&\quad \min_{i\leq s(I)} \operatorname{depth} I^{i-1}/I^I + \lim_{j\to\infty} \operatorname{depth} J^{j-1}/J^j\}.
\end{aligned}$$

Tiếp tục áp dụng Bổ đề 3.2.13 và Bổ đề 3.2.17, thay $I^{i-1}/I^i, J^{j-1}/J^j$ bởi $A/I^i, B/J^j$, ta có điều phải chứng minh. □

3.3 Ví dụ

Ví dụ 3.3.1. Xét các vành đa thức $A = k[x_1, x_2]$, $B = k[y_1, y_2, y_3]$.
Lần lượt trên A, B, xét các iđêan

$$I = (x_1^2, x_1x_2), J = (y_1^4, y_1^3y_2, y_1y_2^3, y_2^4, y_1^2y_2^2y_3).$$

Ta có $A \otimes_k B \cong k[x_1, x_2, y_1, y_2, y_3]$.
Iđêan $I + J = (x_1^2, x_1x_2, y_1^4, y_1^3y_2, y_1y_2^3, y_2^4, y_1^2y_2^2y_3)$.
Việc tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{depth} R/(I + J)^n$ bằng tính toán giống mục 2.3 trong tình huống này có thể sẽ mất thời gian. Mặt khác theo mục 2.3 ta có

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{depth} A/I^i = \min_{i\geq 1} \operatorname{depth} A/I^i = 0$$
$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{depth} B/J^j = 1, \min_{j\geq 1} \operatorname{depth} B/J^j = 0.$$

Áp dụng Định lý 3.2.19, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{depth} R/(I + J)^n = \min\{0 + 0, 0 + 1\} = 0$.

Kết luận

Trong luận văn này, chúng tôi đã trình bày một số vấn đề sau.

1. Giới thiệu một số khái niệm, tính chất cơ bản liên quan đến iđêan nguyên tố liên kết, tập $\operatorname{Ass}_R M$, dãy chính quy và hàm độ sâu của một môđun hữu hạn sinh. Bên cạnh đó, trình bày một số kết quả quan trọng về chiều Krull, vành Cohen-Macaulay và Bổ đề Artin-Rees.

2. Trình bày hai định lý của Brodmann (Định lý 2.1.3 và Định lý 2.2.1) về sự ổn định tiệm cận của tập iđêan nguyên tố liên kết cũng như hàm độ sâu của các môđun thương M/I^nM khi $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, M là một R-môđun hữu hạn sinh, $I \subseteq \mathfrak{m}$. Chú ý rằng các định lý này cũng áp dụng được khi R là một đại số phân bậc chuẩn trên một trường k, I là một iđêan thuần nhất của R, M là một R-môđun phân bậc hữu hạn sinh.

3. Giới thiệu về tổng của hai iđêan, trình bày chặn dưới cho hàm độ sâu của $R/(I+J)^n$ theo $A/I^n, B/J^n$ (Định lý 3.2.6 do Hà-N.V.Trung-T.N.Trung tìm ra). Ngoài ra chúng tôi đã trình bày một kết quả khác của Hà-N.V.Trung-T.N. Trung (Định lý 3.2.19) về giá trị tới hạn của depth $R/(I+J)^n$ với giá trị n đủ lớn.

Tài liệu tham khảo

[1] M. Brodmann, The asymptotic nature of the analytic spread, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 86 (1979), no. 1, 35-39.

[2] M. Brodmann, Asymptotic Stability of Ass(M/I^nM), *Proc. Amer. Math. Soc.* Volume 74, Number I (1979), 16-18.

[3] H.T. Hà, N.V. Trung, T.N. Trung, Depth and regularity of powers of sums of ideals, *Mathematische Zeitschrift* 282 (3), 819-838, 2016.

[4] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, 1993.

[5] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1986.

[6] D.Q. Việt, *Cơ sở lý thuyết môđun*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2013.

[7] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[8] L.T. Hoa, N.D. Tam, On some invariants of a mixed product of ideal, *Archiv der Mathematik* Volume 94 (2010), 327-337.

[9] J. Herzog, T. Hibi, The depth of powers of an ideal, *Journal of Algebra* Volume 291, Issue 2 (2005), 534-550.