

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC  
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM**

**HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ**  
-----



**CAO THỊ BÍCH**

**RỜI LAI, RỜI TĂNG CƯỜNG VÀ ÁP DỤNG CHO VIỆN  
CHUYÊN, VIỆN TẠO TRẠNG THÁI LƯỢNG TỬ  
VÀ VIỆN TÁC TOÁN TỬ CÓ KIỂM SOÁT**

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ VẬT LÝ**

**HÀ NỘI – 2023**

BỘ GIÁO DỤC  
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC  
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

LỜI CẢM ƠN

CAO THỊ BÍCH

**RỜI LẠI, RỜI TĂNG CƯỜNG VÀ ÁP DỤNG CHO VIỆN  
CHUYÊN, VIỆN TẠO TRẠNG THÁI LƯỢNG TỬ VÀ VIỆN TÁC  
TOÁN TỬ CÓ KIỂM SOÁT**

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ VẬT LÝ LÝ THUYẾT VÀ VẬT LÝ TOÁN**

Mã số: 9440103

Xác nhận của Học viện  
Khoa học và Công nghệ

**K.T. GIÁM ĐỐC  
PHÓ GIÁM ĐỐC**



Nguyễn Thị Trung

Người hướng dẫn 1  
(Ký, ghi rõ họ tên)

PGS. Nguyễn Bá Ân

Người hướng dẫn 2  
(Ký, ghi rõ họ tên)

PGS. Nguyễn Hồng Quang

Hà Nội – Năm 2023

# LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và lòng biết ơn sâu sắc đến thầy Nguyễn Bá Ân, người có sức ảnh hưởng to lớn trong cuộc đời tôi. Tôi đã được học từ thầy không chỉ những kiến thức về vật lý, toán học mà còn được học từ thầy sự cẩn thận, chỉn chu cũng như tinh thần trách nhiệm trong công việc. Tôi luôn cảm thấy tự hào vì được là học trò của thầy. Tôi cũng xin cảm ơn thầy Nguyễn Hồng Quang, thầy đã hỗ trợ rất nhiều cho tôi trong toàn bộ khóa học tại Học viện khoa học và công nghệ.

Tôi xin cảm ơn các thầy cô, các anh chị và các bạn tại Viện Vật Lý đã luôn giúp đỡ và cho tôi nhiều lời khuyên, lời động viên chân thành, bổ ích, đã cho tôi được sống, học tập và làm việc trong một môi trường thân thiện.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới Ban lãnh đạo, phòng đào tạo Học viện khoa học và công nghệ đã tạo điều kiện tốt cho chúng tôi học tập và làm việc.

Tôi xin cảm ơn Quỹ phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOS-TED), Quỹ đổi mới sáng tạo tập đoàn Vingroup (VINIF) đã hỗ trợ kinh phí để tôi hoàn thành khóa học này.

Cuối cùng, tôi muốn gửi lời cảm ơn gia đình của tôi, những người đã luôn yêu thương, ủng hộ và là chỗ dựa vững chắc trong suốt quá trình tôi làm việc.

Hà Nội, tháng 5 - 2023

**Nghiên cứu sinh**

**Cao Thị Bích**

Cao Thị Bích

## LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những kết quả trình bày trong luận án là do bản thân tôi đã thực hiện trong thời gian làm nghiên cứu sinh. Cụ thể, chương 1 là phần giới thiệu những vấn đề cơ sở có liên quan đến luận án. Trong chương 2 và chương 3, tôi sử dụng các kết quả nghiên cứu mà tôi đã thực hiện cùng với thầy giáo hướng dẫn và đồng nghiệp Lê Thành Đạt. Cuối cùng, tôi xin khẳng định các kết quả có trong luận án “Rối lai, Rối tăng cường và áp dụng cho viễn chuyển, viễn tạo trạng thái lượng tử và viễn tác toán tử có kiểm soát” là kết quả mới, không trùng lặp với kết quả của các luận án và công trình đã có.

Nghiên cứu sinh  
Cao Thị Bích



Cao Thị Bích

# DANH MỤC CÁC TỪ VIẾT TẮT

| Viết tắt | Tên tiếng Anh                                | Tên tiếng Việt                           |
|----------|--|--|
| LOCC     | Local operations and classical communication | Thao tác địa phương và giao tiếp cổ điển |
| EPR      | Einstein-Podolsky-Rosen                      |  |
| GHZ      | Greenberger-Horne-Zeilinger                  |  |
| DOF      | Degree of freedom                            | Bậc tự do                                |
| S-DOF    | Spatial-mode degree of freedom               | Bậc tự do không gian                     |
| P-DOF    | Polarization degree of freedom               | Bậc tự do phân cực                       |
| CV       | Continuous-variable                          | Biến liên tục                            |
| CV-DOF   | Continuous-variable degree of freedom        | Bậc tự do có biến liên tục               |
| DV       | Discrete-variable                            | Biến gián đoạn                           |
| DV-DOF   | Discrete-variable degree of freedom          | Bậc tự do có biến gián đoạn              |
| H        | Horizontally polarized single photon         | Phân cực ngang của photon đơn            |
| V        | Vertically polarized single photon           | Phân cực dọc của photon đơn              |
| SPDC     | Spontaneous parametric down-conversion       |  |
| BS       | Beam splitter                                | Bộ tách chùm                             |
| BBS      | Balanced beam splitter                       | Bộ tách chùm cân bằng                    |

|       |  |  |
|-------|--|--|
| P     | Phase shifter  | Bộ dịch pha                              |
| PBS   | Polarization beam splitter   | Bộ tách phân cực                         |
| HWP   | Half-wave plate  | Tấm nửa sóng                             |
| QWP   | Quarter-wave-plate   | Tấm sóng phần tư                         |
| LO    | Local oscillator   | Bộ dao động địa phương hay bộ tham chiếu |
| LOQC  | Linear optical quantum computation   | Tính toán lượng tử quang tuyến tính      |
| QT    | Quantum teleportation  | Viễn chuyển lượng tử                     |
| BQT   | Bidirectional quantum teleportation  | Viễn chuyển lượng tử hai chiều           |
| RIO   | Remote implementation of operator  | Viễn tác toán tử tổng quát               |
| CRIO  | Controlled remote implementation of operator   | Viễn tác có kiểm soát toán tử tổng quát  |
| CRISO | Controlled remote implementation of a subset of operators<br>controlled remote implementation of a subset of operators | Viễn tác có kiểm soát toán tử giới hạn   |

# DANH SÁCH BẢNG

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| Bảng 2.1 | Trạng thái $\rho_4(\tau)$ trong công thức (2.119) phụ thuộc vào 16 trường hợp khả dĩ của kết quả đo $\{n_3, n_2, n_1, n_B\}$ . Trạng thái $\rho_4^{(j, \text{ch\`a}n)}(\tau)$ , $\rho_4^{(j, \text{l\`e})}(\tau)$ với $j = 1, 2, 3, 4$ và $\rho_4^{(T)}(\tau)$ được cho trong các công thức (2.120) - (2.123) và (2.126). | 64  |
| Bảng 3.1 | Trạng thái $ \psi_{kmns}\rangle_B$ của photon $B$ sau phép đo của Alice và Charlie, và toán tử hồi phục $R_{kmns}^{(S)}$ với $R_{kmns}^{(S)}  \psi_{kmns}\rangle_B = (\alpha  b_0\rangle + \beta  b_1\rangle)_B$ .  | 102 |
| Bảng 3.2 | Trạng thái $ \Lambda_{kmn}^{(P)}\rangle_{ABC}$ phụ thuộc vào kết quả $kmn$ .  | 110 |
| Bảng 3.3 | Trạng thái $ \Sigma_{kmns}^{(P)}\rangle_{ABC}$ của các photon $A, B$ và $C$ phụ thuộc kết quả đo $kmns$ của Alice và Charlie.   | 112 |

# DANH SÁCH HÌNH VẼ

|          |  |    |
|----------|--|----|
| Hình 1.1 | Tác động của bộ tách chùm lên: a) trạng thái tích của hai trạng thái số hạt $ n\rangle_a m\rangle_b$ và b) trạng thái tích của hai trạng thái kết hợp $ \alpha\rangle_a \beta\rangle_b$ .  | 12 |
| Hình 1.2 | Tác động của bộ dịch pha lên: a) trạng thái số hạt $ n\rangle$ và b) trạng thái kết hợp $ \alpha\rangle$ .   | 13 |
| Hình 1.3 | Hiện thực hóa toán tử dịch chuyển hoạt động ở mode $a$ bằng bộ tách chùm có hệ số truyền qua cao và trạng thái kết hợp biên độ mạnh ở mode $b$ .   | 15 |
| Hình 1.4 | Sơ đồ minh họa phương pháp đo homodyne để xác định các toán tử quadrature.   | 17 |
| Hình 1.5 | (a) Sơ đồ phép đo homodyne để phân biệt trạng thái cân bằng và trạng thái chùm. (b) Sơ đồ minh họa không gian pha của trạng thái $ \psi_1\rangle$ trong công thức (1.45).  | 20 |
| Hình 1.6 | Sơ đồ thiết bị thí nghiệm chế tạo phép đo pha thích ứng. BS( $r, t$ ) biểu thị bộ tách chùm có hệ số phản xạ (truyền qua) là $r(t)$ , D là máy đo photon, EOM là bộ biến pha điện quang. Các thiết bị quang học khác như: bộ trừ, bộ nhân, bộ tích hợp, bộ tạo tín hiệu SG, bộ xử lý tín hiệu và đầu đọc kỹ thuật số đưa ra giá trị đo được trong khoảng $[0, 2\pi)$ . | 21 |



- Hình 2.1 Chiến thuật để tạo trạng thái rối lai giữa trạng thái kết hợp phân cực và trạng thái phân cực. Chiến thuật này bao gồm hai phần. Phần 1 tạo trạng thái con mèo Schrödinger phân cực trên mode 1 cho bởi công thức (2.27). Phần 2 thực hiện các thao tác và phép đo lên mode 2 và mode 4, tùy thuộc vào kết quả đo, trạng thái của mode 1 và mode 3 sẽ trở thành trạng thái rối lai mong muốn. Ở đây  $|\Gamma\rangle \equiv |\Gamma\rangle_1$  được định nghĩa trong (2.27),  $|\Lambda\rangle \equiv |\Lambda\rangle_{1'}$  được định nghĩa trong (2.28), và  $|\Theta\rangle \equiv |\Theta\rangle_{34}$  định nghĩa trong (2.29) là các trạng thái đầu vào cần thiết,  $|\Xi\rangle \equiv |\Xi\rangle_{12}$  là trạng thái rối liên tục cho bởi (2.32), và  $|\Psi\rangle \equiv |\Psi\rangle_{13}$  là trạng thái cần tạo được đưa ra trong (2.25). BS là viết tắt của bộ tách chùm, BBS là bộ tách chùm cân bằng, PBS là bộ tách phân cực, HWP là một tấm nửa sóng và D là máy đo photon. 34
- Hình 2.2 Tổng xác suất thành công của giao thức là  $P_T = 4P$ , với  $P$  cho bởi (2.44) là hàm của bình phương biên độ  $\beta^2$  và hệ số phản xạ  $r$ . Đường đứt nét thể hiện tổng xác suất thành công được tối ưu hóa khi hệ số phản xạ  $r^{\text{peak}} = 1/(2\beta)$  với  $\beta^2 > 1/2$ . 38
- Hình 2.3 Tổng xác suất thành công  $P_T^{\text{de}}$  (đường liền nét) và độ tin cậy  $F^{\text{de}}$  (đường đứt nét) cho bởi các công thức (2.51) và (2.52) tương ứng là hàm của cường độ suy giảm liên kết  $\mu$  định nghĩa trong (2.53). Ở đây, chúng tôi chọn biên độ đầu vào  $\beta = 1.2$  tương ứng với hệ số phản xạ tối ưu  $r^{\text{peak}} \approx 0.347$ . 41

- Hình 2.4 Tổng xác suất thành công  $P_T^{\text{re}}$  (đường liền nét) và độ tin cậy  $F^{\text{re}}$  (đường đứt nét) phụ thuộc vào cường độ SPDC loại II  $\lambda$  khi sử dụng (a) trạng thái nén chân không trong (2.54) với  $s = -0.43358$  như một sự gần đúng của trạng thái con mèo Schrödinger chắn biên độ 0.7 và (b) trạng thái nén một photon trong (2.55) với  $s = 0.16056$  như một sự gần đúng của trạng thái con mèo Schrödinger lẻ biên độ 0.7. Trong cả hai trường hợp, đường gạch ngang thể hiện độ tin cậy là tuyệt đối (nghĩa là khi trạng thái đầu vào là hoàn hảo) và hệ số phản xạ  $r$  được chọn là 0.1. 43
- Hình 2.5 Độ tin cậy trung bình  $\bar{F}^{\text{im}}$  được định nghĩa trong (2.65) là hàm của các tham số không hoàn hảo  $\epsilon_1$  và  $\epsilon_2$  của hai BBS. Trên hình vẽ,  $\beta$  và  $r$  được chọn như trong Hình 2.3. 46
- Hình 2.6 Tổng xác suất  $P_{T,\eta}$  (đường liền nét) cho bởi công thức (2.68) và độ tin cậy  $F_\eta$  (đường đứt nét) cho bởi (2.69) khi phụ thuộc vào (a) hiệu suất của máy đo photon  $\eta$  và (b) hệ số phản xạ  $r$ . Trong trường hợp (a) hệ số phản xạ  $r$  là 0.1, trong khi trong trường hợp (b) hiệu suất máy đo photon  $\eta$  là 0.9. Trong cả hai trường hợp chúng tôi giả định các trạng thái đầu vào hoàn hảo trong đó đầu vào là trạng thái con mèo Schrödinger chắn có biên độ  $\beta = 1$ . 48

- Hình 2.7 Sơ đồ tạo trạng thái rối lai được định nghĩa trong (2.94).  $PBSP$  là ký hiệu của thiết bị quang học bao gồm một bộ tách chùm cân bằng xen giữa hai bộ dịch pha  $-\pi/2$ , hoạt động trên hai mode như trong công thức (2.73). Đường liền nét dán nhãn  $n$  ( $k, l, m, n, p$  và  $q$ ) biểu diễn mode  $n$  ( $k, l, m, n, p$  và  $q$ ).  $D_k$  và  $D_m$  là các máy đo photon để đếm số photon tương ứng từ các mode. Đường đứt nét biểu diễn số photon đếm được  $n_k$  và  $n_m$ .  $R = I, X, Z$  và  $XZ$  là các toán tử hồi phục phụ thuộc vào số photon được phát hiện. 51
- Hình 2.8 Giao thức viễn chuyển lượng tử có kiểm soát từ trạng thái biến gián đoạn sang trạng thái biến liên tục có kiểm soát sử dụng kênh lượng tử  $\rho_{1234}(\tau)$  trong công thức (2.97). Đường liền nét dán nhãn 1 (2, 3, 4 và  $A$ ) biểu diễn mode 1 (2, 3, 4 và  $A$ ).  $D_2, D_3, D_A$  và  $D_4$  là các máy đo photon để đếm các photon tương ứng từ các mode. Đường đứt nét biểu diễn số photon được phát hiện  $n_2, n_3, n_A$  và  $n_4$ .  $H$  là toán tử Hadamard.  $U = X$  hoặc  $XZ$  là các toán tử hồi phục phụ thuộc vào số photon đếm được từ các máy đo. 57
- Hình 2.9 Giao thức cho viễn chuyển lượng tử có kiểm soát từ trạng thái biến liên tục sang trạng thái biến gián đoạn có kiểm soát sử dụng kênh lượng tử  $\rho_{1234}(\tau)$  trong công thức (2.97). Đường liền nét dán nhãn  $B$  (1, 2, 3 và 4) biểu diễn mode  $B$  (1, 2, 3 và 4).  $D_1, D_B, D_2$  và  $D_3$  là các máy đo photon để đếm các photon tương ứng từ các mode 1, B, 2 và 3. Đường đứt nét biểu diễn số photon được phát hiện  $n_1, n_B, n_2$  và  $n_3$ .  $H$  là toán tử Hadamard.  $V = I, X, Z$  hoặc  $XZ$  là các toán tử hồi phục phụ thuộc vào số photon đếm được từ các máy đo. 62

- Hình 2.10 Độ tin cậy của quá trình viễn chuyển trạng thái lượng tử từ trạng thái qubit đơn tuyến có dạng đặc biệt  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  sang trạng thái con mèo Schrödinger chẵn  $N(|\tau\alpha\rangle + |-\tau\alpha\rangle)$  là hàm của  $\gamma t$  với  $\alpha = 1$  (đường cong màu đỏ),  $\alpha = 2$  (đường cong màu xanh),  $\alpha = 3$  (đường cong màu cam) và  $\alpha = 5$  (đường cong màu đen). 66
- Hình 2.11 Độ tin cậy của quá trình viễn chuyển trạng thái lượng tử từ trạng thái con mèo chẵn Schrödinger  $N(|\tau\alpha\rangle + |-\tau\alpha\rangle)$  sang trạng thái qubit đơn tuyến đặc biệt  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  là hàm của  $\gamma t$  với  $\alpha = 1$  (đường cong màu đỏ),  $\alpha = 2$  (đường cong màu xanh),  $\alpha = 3$  (đường cong màu cam) và  $\alpha = 5$  (đường cong màu đen). 68
- Hình 2.12 Độ tin cậy trung bình của quá trình viễn chuyển trạng thái lượng tử có kiểm soát từ trạng thái biến gián đoạn sang trạng thái biến liên tục (đường cong màu xanh) và độ tin cậy trung bình của quá trình ngược lại từ trạng thái biến liên tục sang trạng thái biến gián đoạn (đường cong màu đỏ) là hàm của  $\gamma t$  với (a)  $\alpha = 0.5$ , (b)  $\alpha = 1$ , (c)  $\alpha = 2$  và (d)  $\alpha = 5$ . Đường ngang màu đen tại  $2/3$  là giá trị trung bình cổ điển tốt nhất. 69
- Hình 2.13 Xác suất thành công trung bình của quá trình viễn chuyển lượng tử có kiểm soát từ trạng thái biến liên tục sang trạng thái biến gián đoạn là hàm của  $\gamma t$  với  $\alpha = 0.5$  (đường cong màu đỏ),  $\alpha = 1$  (đường cong màu xanh),  $\alpha = 2$  (đường cong màu cam) và  $\alpha = 5$  (đường cong màu đen). Xác suất thành công trung bình của quá trình viễn chuyển lượng tử theo chiều ngược lại là hằng số và biểu diễn bởi đường ngang màu tím tại giá trị  $3/16$ . 70

- Hình 3.1 Bước 1 của sơ đồ tạo trạng thái  $|\Gamma^{(S)}\rangle_{12345}$  trong công thức (3.5). Bước này làm rối photon 1 với photon 2 và photon 3 với photon 4 trong S-DOF. Vòng tròn có ký hiệu  $H$  bên trong ngụ ý một photon ở trạng thái phân cực  $|H\rangle$ , trong khi  $|z\rangle_1$  và  $|z\rangle_2$  là các trạng thái kết hợp có biên độ dương  $z_1$  và  $z_2$  tương ứng.  $\theta$  và  $-\theta$  là các thông số của các tương tác Kerr chéo. BBS là bộ tách chùm cân bằng. Các photon rối ở S-DOF được nối với nhau bằng các đường liền nét. 77
- Hình 3.2 Bước 2 của quá trình tạo thành phần S-DOF của kênh lượng tử.  $|z\rangle$  là trạng thái kết hợp có biên độ thực  $z$ . Trong bước này, trạng thái mong muốn  $|\Gamma^{(S)}\rangle_{12345}$  trong công thức (3.5) có được nếu kết quả của phép đo X-quadrature là  $|ze^{\pm i\theta}\rangle$ . 80
- Hình 3.3 Bước 1 của sơ đồ tạo trạng thái  $|\Gamma^{(P)}\rangle_{12345}$  trong công thức (3.6). Bước này làm rối photon 1 với photon 2 và photon 3 với photon 4 trong P-DOF. Vòng tròn có ký hiệu  $H, V$  bên trong ngụ ý một photon ở trạng thái chồng chập của các trạng thái phân cực  $|H\rangle$  và  $|V\rangle$ , trong khi  $|r\rangle_1$  và  $|r\rangle_2$  lần lượt là các trạng thái kết hợp có biên độ dương  $r_1$  và  $r_2$ . QWP là một tấm sóng phân tử. Các photon bị rối ở P-DOF được nối với nhau bằng các đường đứt nét. 81
- Hình 3.4 Bước 2 của quá trình tạo thành phần P-DOF của kênh lượng tử.  $|r\rangle$  là một trạng thái kết hợp có biên độ dương  $r$ . Trong bước này, trạng thái mong muốn  $|\Gamma^{(P)}\rangle_{12345}$  trong công thức (3.6) có được nếu kết quả phép đo X-quadrature là  $|re^{\pm i\theta}\rangle$ . 84

- Hình 3.5 Sơ đồ viễn tạo hai chiều có kiểm soát trạng thái tăng cường.  $BS_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) là bộ tách chùm không cân bằng có hệ số phản xạ (truyền qua)  $r_i$  ( $t_i$ ).  $WP(\theta_j)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) là một tấm sóng quay trạng thái phân cực một góc  $\theta_j$ . PBS là bộ tách phân cực cho phép photon phân cực ngang truyền qua và phản xạ photon phân cực dọc.  $D_{mkl}$ ,  $D'_{m'k'l'}$  và  $D_{pq}$  với  $m, k, l, m', k', l', p, q \in \{0, 1\}$  là 20 máy đo photon.  $|\psi'\rangle$ ,  $R_B$ ,  $|\phi'\rangle$  và  $R_A$  được định nghĩa trong các biểu thức (3.52), (3.53), (3.54) và (3.55) tương ứng. 86
- Hình 3.6 Hoạt động của Alice trong giai đoạn thứ nhất của quá trình CRIO trên photon ở bậc tự do không gian. Vòng tròn có hai đường đi kèm biểu thị một photon truyền đồng thời dọc theo hai đường, trong khi vòng tròn có một đường đi kèm là một photon chỉ truyền theo một đường. 98
- Hình 3.7 Hoạt động của Charlie trong giai đoạn đầu của quá trình CRIO trên photon ở S-DOF. 101
- Hình 3.8 Hoạt động của Bob trong giai đoạn thứ nhất (trên cùng) và giai đoạn thứ hai (dưới cùng) của CRIO trên photon trong S-DOF. Các toán tử  $R_{kmns}^{(S)}$  và  $U^{(S)}$  được định nghĩa trong các biểu thức (3.77) và (3.58). HWP là tấm nửa sóng, PBS là bộ tách phân cực, gương M và máy đo photon  $D_{pq}$ . 103
- Hình 3.9 Hoạt động của Charlie và Alice trong giai đoạn thứ hai của CRIO trên photon trong S-DOF. QWP là tấm sóng phần tư và  $D_{0(1)}$  là máy đo photon.  $W_{pq\tau}^{(P)}$  được định nghĩa trong công thức (3.85) và  $X_S$  là toán tử lật đường đi. Hình nhỏ chứa hai PBS, hai gương và một bộ dịch pha  $\pi$  là sơ đồ xây dựng  $Z_P = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$ . 105

- Hình 3.10 Hoạt động của Alice trong giai đoạn đầu tiên của CRIO trên photon trong P-DOF. Một vòng tròn không có bất kỳ chữ cái nào bên trong biểu thị một photon nằm trong  $|H\rangle$  hoặc  $|V\rangle$ . Tương tác Kerr chéo giữa thành phần  $|H\rangle$  và trạng thái kết hợp được trình bày chi tiết trong phần hình phụ của Hình 3.11. 108
- Hình 3.11 Hoạt động của Charlie trong giai đoạn đầu tiên của CRIO trên photon trong P-DOF. Hình nhỏ mô tả chi tiết tương tác Kerr chéo giữa thành phần  $|H\rangle$  của một photon và trạng thái kết hợp. 111
- Hình 3.12 Hoạt động của Bob cho CRIO trên photon trong P-DOF. Các toán tử  $R_{kmns}^{(P)}$  và  $U^{(P)}$  được định nghĩa trong các biểu thức (3.98) và (3.88), trong khi  $PE$  là quá trình trao đổi đường đi được xây dựng như trong phần hình phụ. 112
- Hình 3.13 Hoạt động của Charlie và Alice trong giai đoạn thứ hai của CRIO trên photon trong P-DOF.  $W_{pq\tau}^{(S)}$  là toán tử được định nghĩa trong biểu thức (3.106). Hình này được vẽ cho trường hợp  $n = 0$  mà HWP được đặt trên mode  $a_1$  (nếu không, HWP phải nằm trên mode  $a_0$ ). 114
- Hình 3.14 Hoạt động của Alice và Bob trong giai đoạn đầu tiên của CRISO trên photon ở cả S-DOF và P-DOF.  $X_S$  là toán tử lật đường đi và  $U_m^{(S)}$  là các toán tử được xác định trong (3.108). 117
- Hình 3.15 Hoạt động của Charlie và Alice trong giai đoạn đầu tiên của CRISO trên photon ở cả S-DOF và P-DOF. Toán tử  $F_{mkrst}^{(S)}$  được định nghĩa trong (3.121). 119
- Hình 3.16 Hoạt động của Alice và Bob trong giai đoạn thứ hai của CRISO trên photon ở cả S-DOF và P-DOF.  $X_P$  là toán tử chuyển phân cực và  $U_n^{(P)}$  được định nghĩa trong (3.109). 120

Hình 3.17 Hoạt động của Charlie và Alice trong giai đoạn thứ 121  
hai của CRISO trên photon ở cả S-DOF và P-DOF.  
Toán tử  $V_{nk'r's'\tau'}^{(P)}$  được định nghĩa trong (3.127).



# Mở đầu

## Lý do chọn đề tài

Thế kỷ 20 mở ra với định luật Planck như một bước đi đầu tiên của vật lý hiện đại và cơ học lượng tử. Thời kỳ đó, chúng ta đã chứng kiến sự gia tăng liên tục các ứng dụng của cơ học lượng tử, bắt đầu với vật lý nguyên tử và tiếp đến với vật lý hạt nhân, quang học, vật chất ngưng tụ và vô số diễn biến khác. Các khoa học về thông tin lượng tử xuất hiện mang đến cho vật lý lượng tử một bước ngoặt mới, mở ra một lĩnh vực đa ngành dựa cùng một lúc lên lý thuyết vật lý lượng tử và lý thuyết thông tin cổ điển. Có nhiều nhiệm vụ quan trọng trong khoa học kỹ thuật không thể thực hiện được nếu chỉ sử dụng các phương thức cổ điển thông thường nhưng lại khả thi khi sử dụng các công nghệ lượng tử. Theo lý thuyết thông tin cổ điển, đơn vị cơ bản của thông tin là bit - một hệ vật lý chỉ tồn tại ở một trong hai trạng thái biểu diễn hai giá trị logic không hoặc có, đúng hoặc sai hay đơn giản là 0 hoặc 1. Thông tin bất kỳ đều có thể biểu diễn bằng các bit dưới dạng một dãy các số 0 và 1. Trong các máy tính, bit được biểu diễn giống như trạng thái vật lý của một hệ vật lý nhất định nào đó. Khi thông tin được truyền đi dưới dạng các bit cổ điển thì nó có thể dễ dàng bị đọc và sao chép trộm một cách y nguyên mà không bị phát hiện, vì vậy truyền thông cổ điển là một quá trình không an toàn. Vận dụng các định luật của vật lý lượng tử, thông tin có thể mã hóa trong chồng chập của các trạng thái lượng tử. Cách mã hóa đơn giản nhất là thông qua chồng chập của hai trạng thái cơ sở  $|0\rangle$  và  $|1\rangle$  được gọi là bit lượng tử (tiếng Anh là qubit và, để cho tiện, trong luận án này sẽ dùng qubit thay cho bit lượng tử). Vì có vô số cách tạo các chồng chập giữa  $|0\rangle$  và  $|1\rangle$  nên về nguyên tắc mỗi qubit có thể chứa trong nó một lượng vô hạn thông tin. Ta không thể xác định toàn bộ thông tin về trạng thái chồng

chập chỉ bằng một lần đo lường tử, bởi sau khi đo trạng thái ban đầu bị phá hủy. Mọi cố gắng để có thể giải mã toàn bộ thông tin nằm trong trạng thái gốc đều đi đến thất bại cũng bởi ta không thể tạo ra các bản sao của nó do sự ngăn chặn của định lý không thể nhân bản một trạng thái lượng tử bất kỳ (no-cloning theorem) [1], điều tạo nên bảo mật tuyệt đối trong mật mã lượng tử [2]. Khoa học thông tin lượng tử là một lĩnh vực mới của khoa học, nó kết hợp và dựa trên các quy luật của vật lý, toán học, khoa học máy tính và kỹ thuật. Mục đích của nó là để hiểu làm thế nào mà một số nguyên tắc cơ bản của vật lý được phát hiện trước đó lại có thể được khai thác và cải thiện một cách tối ưu trong việc truyền tải và xử lý thông tin. Những nguyên tắc cơ bản của lý thuyết lượng tử được áp dụng vào đó cho phép thông tin được mã hóa trong các trạng thái lượng tử có tính chất kỳ lạ và phản trực quan. Song, những nghiên cứu gần đây về lý thuyết này đã mang đến rất nhiều ngạc nhiên. Sự phát triển bùng nổ của khoa học thông tin gần đây có thể quy cho là sự hội tụ của hai yếu tố. Thứ nhất, lý thuyết thông tin cổ điển do Shannon phát minh ra năm 1948 là một nhánh của toán học ứng dụng và kỹ thuật điện, ngay từ những ngày đầu nó đã mở rộng phạm vi ứng dụng ra nhiều hướng khác nhau như xử lý thông tin, mật mã học, v.v. tuy đã đạt được những thành công không thể phủ nhận song nó vẫn còn rất nhiều hạn chế và chính những hạn chế đó đã đặt nền móng cho sự ra đời của lý thuyết thông tin lượng tử. Thứ hai, sự phát triển của khoa học công nghệ kèm theo đó là sự xuất hiện của nhiều phòng thí nghiệm hiện đại, tinh vi có khả năng thực hiện các thao tác và kiểm chứng các hiệu ứng lượng tử tác động lên các trạng thái lượng tử đã thực sự có sức lôi cuốn mạnh mẽ các nhà khoa học tham gia nghiên cứu trên lĩnh vực này. Nổi bật phải kể đến giải Nobel vật lý 2012 giành cho S. Haroche và David J. Wineland, những người đã phát minh ra các phương pháp để thực hiện các thao tác cần thiết trên các hạt hoặc các hệ lượng tử riêng lẻ mà vẫn bảo toàn được bản chất lượng tử của chúng [3, 4], và nóng hổi nhất đó là giải Nobel vật lý năm 2022 [5–7] dành cho ba nhà khoa học Alain Aspect (Pháp), John Clauser (Mỹ) và Anton Zeilinger (Áo), những người đã khai thác rối lượng tử và thiết kế các thí nghiệm để kiểm nghiệm bất đẳng thức Bell, họ đã đặt nền móng cho cuộc cách mạng hiện đang diễn ra trong lĩnh vực công nghệ thông tin lượng tử, mở ra một kỷ nguyên

mới cho các nghiên cứu sâu rộng hơn nữa về lĩnh vực này.

Thông tin được mã hóa trong các trạng thái chồng chập được đảm bảo dung lượng cao và bảo mật cao cũng như cho phép giao thoa lượng tử dẫn đến các tác động song song nhằm tăng tốc độ tính toán theo hàm mũ. Hầu hết các nhiệm vụ toàn cầu lượng tử (nghĩa là, các nhiệm vụ có thể được thực hiện từ xa chỉ với các thao tác địa phương và giao tiếp cổ điển, tiếng Anh là Local operations and classical communication, viết tắt là LOCC), đều nhất thiết phải sử dụng rối lượng tử như các tài nguyên cần được chia sẻ. Rối lượng tử (tên tiếng Anh là quantum entanglement) [8] là một đặc thù quan trọng nhất của lý thuyết lượng tử, không chỉ có ý nghĩa về mặt cơ bản mà còn là tài nguyên cần thiết của các ứng dụng trong xử lý thông tin lượng tử và tính toán lượng tử. Nhiều vấn đề về rối lượng tử còn chưa được hiểu biết rõ ràng và các nghiên cứu về rối lượng tử, cả về lý thuyết lẫn thực nghiệm, rất sôi động trong những thập niên gần đây. Rối lượng tử là sự tồn tại trạng thái chung của hai hay nhiều hệ lượng tử con có mối liên hệ ràng buộc mạnh mẽ với nhau ngay cả khi khoảng cách giữa chúng vượt ra ngoài trực giác đơn giản của con người. Khi các hệ lượng tử được rối với nhau thì ta không thể biết được trạng thái riêng của từng hệ con nhưng ta hoàn toàn biết trạng thái tồn tại chung của chúng và để có thể xác định trạng thái riêng của từng hệ ta phải thực hiện những phép đo lên nó. Trong lý thuyết cổ điển các hệ con sẽ hoàn toàn độc lập với nhau nếu chúng không có sự tác động của bên ngoài liên kết chúng lại, tính chất này cũng đúng với các hệ lượng tử khi mà chúng nằm trong những trạng thái hoàn toàn tách rời. Tuy nhiên nếu các hệ lượng tử không bị tách rời hay nói cách khác là chúng được rối với nhau thì chúng sẽ không còn tồn tại độc lập nhau nữa, mỗi tác động lên hệ con này sẽ có ảnh hưởng tức thời đến các hệ con kia. Mỗi một phép đo trên một hệ con bất kỳ có thể cho nhiều kết quả ngẫu nhiên với xác suất nhất định, từ đó ta xác định được trạng thái của hệ con còn lại, quá trình này không phụ thuộc vào khoảng cách giữa các hệ con. Trạng thái của một hệ con có thể được mô tả theo một bậc tự do (tiếng Anh là degree of freedom, viết tắt là DOF) nào đó. Trong thực tế có nhiều DOF khác nhau. Lấy photon (qubit quang học hay chùm sáng) làm thí dụ chẳng hạn. Một photon có thể được mô tả bởi bậc tự do phân cực (tiếng Anh là polarization DOF, viết tắt là P-DOF), nó cũng có

thể được biểu diễn bởi bậc tự do không gian (tiếng Anh là spatial-mode DOF, viết tắt là S-DOF). Đối với qubit ở dạng xung ánh sáng thì có thể mô tả bởi bậc tự do biến đổi liên tục (tiếng Anh là continuous-variable DOF, viết tắt là CV-DOF) dưới dạng chồng chập tuyến tính của các trạng thái kết hợp khác nhau. Nếu chỉ một DOF được sử dụng để làm rối giữa các hệ con với nhau thì trạng thái đó gọi là rối thông thường. Nếu các hệ con có bậc tự do khác nhau được rối với nhau thì hệ đó gọi là rối lai (tên tiếng Anh là hybrid entanglement) [9]. Một loại rối khác nữa đó là rối tăng cường hay siêu rối (tên tiếng Anh là hyperentanglement) [10], là trạng thái rối khi các hệ con tồn tại ở đồng thời nhiều DOF khác nhau. Trong miền quang học, các nhiệm vụ dựa trên LOCC như viễn chuyển lượng tử (tiếng Anh là quantum teleportation) [11], mật mã lượng tử (tiếng Anh là quantum cryptography) [2], đối thoại lượng tử (tiếng Anh là quantum dialogue) [12], v.v đã được nghiên cứu rất kỹ lưỡng bằng cách sử dụng rối thông thường. Tuy nhiên, chỉ rối thông thường là không đủ cho nhiều ứng dụng trên thực tế. Đó là lý do tạo ra rối lai và rối tăng cường cần được mở rộng khai thác.

Như đã biết, thông tin có thể được mã hóa trong các trạng thái gián đoạn (tiếng Anh là discrete-variable, viết tắt là DV) như qubit và được xử lý bởi các công cụ DV hoặc trong các trạng thái liên tục (tiếng Anh là continuous-variable, viết tắt là CV) được xử lý bởi các công cụ CV. Mỗi cách xử lý thông tin như trên đều có những ưu nhược điểm nhất định. Tùy vào điều kiện của từng phòng thí nghiệm mà mỗi nơi có cách tiếp cận phù hợp, do đó mạng toàn cầu là một loại mạng dị thường không đồng nhất (heterogeneous network). Có những thao tác có hiệu quả trong cách tiếp cận CV nhưng lại hạn chế trong cách tiếp cận DV và ngược lại. Vì lẽ đó việc kết hợp hai loại tiếp cận DV và CV hay còn gọi là cách tiếp cận lai DV và CV có thể khai thác lợi thế của cả hai phương pháp đồng thời cũng tránh được những hạn chế riêng của từng loại. Sự kết nối như vậy giữa các bộ xử lý lượng tử từ xa trong mạng lưới toàn cầu có thể thực hiện thông qua rối lai. Các trạng thái rối thông thường và rối lai đã rất hữu ích trong nhiều nhiệm vụ toàn cầu, vậy tại sao phải có rối tăng cường? Một cách trực giác có thể thấy ngay rằng rối tăng cường cho phép tăng dung lượng của kênh lượng tử. Cụ thể, trong không gian  $2 \times 2$  chiều một

trạng thái rối thông thường hoặc rối lai chỉ mang 2 bit thông tin, nhưng lượng thông tin chứa trong một trạng thái rối tăng cường cùng một lúc  $M$  DOF khác nhau sẽ là  $2^M$  bit thông tin. Điều đó cho thấy lượng thông tin được xử lý tăng lên đáng kể. Như vậy rối tăng cường giúp giảm đáng kể nguồn tài nguyên tiêu thụ và hơn thế nữa nó giúp cải thiện nhiều giao thức quan trọng. Một yêu cầu tiên quyết để hoàn thành nhiều nhiệm vụ lượng tử là thực hiện phép đo Bell. Tuy nhiên, chỉ bằng các kỹ thuật quang học tuyến tính, phép đo Bell hoàn chỉnh, tức là phép đo có khả năng phân biệt rõ ràng tất cả các trạng thái Bell, không thể làm được. Thực vậy, tất cả các sơ đồ dựa trên các thiết bị quang học tuyến tính chỉ có thể phân biệt hai trong bốn trạng thái rối Bell [13, 14]. Khi có sự bổ sung thêm hai photon rối phụ trợ hoặc một photon đơn thì xác suất thành công tăng lên thành 75% [15, 16]. Thật may mắn rằng khi sử dụng các trạng thái rối tăng cường thì phép đo Bell có thể được thực hiện với xác suất thành công 100% [17–26]. Ưu điểm của phép đo Bell dựa trên rối tăng cường là các phép đo chỉ cần thực hiện cục bộ trên từng photon riêng biệt mà không cần sử dụng cổng phi định xứ CNOT, là cổng tác động lên hai photon rất khó tạo. Vì vậy, bộ nhớ lượng tử là không cần thiết vì sau khi đo một photon kết quả đo của nó là thông tin cổ điển nên dễ dàng được lưu trữ nguyên vẹn cho đến khi đo được photon tiếp theo. Trong thí nghiệm, các trạng thái rối được tạo ra bởi quá trình spontaneous parametric down-conversion (không dịch sang tiếng Việt, được viết tắt là SPDC) trên tinh thể phi tuyến [27–29]. Trong những năm gần đây, rối tăng cường được xem như một nguồn tài nguyên đầy triển vọng để làm tăng tính khả thi cho các nhiệm vụ quan trọng thông qua tính hiệu suất cao của nó. Rối tăng cường có thể giúp chúng ta thực hiện nhiều nhiệm vụ quan trọng trong giao tiếp lượng tử như mã hóa đậm các trạng thái tăng cường (tiếng Anh là hyperdense coding) [30], chiết rối tăng cường (tiếng Anh là hyperentanglement concentration/purification) [31–35], viễn chuyển các trạng thái tăng cường (tiếng Anh là hyper teleportation) [36–38], viễn tạo trạng thái tăng cường (tiếng Anh là hyper remote state preparation) [39–41], đồng viễn tạo trạng thái tăng cường (tiếng Anh là hyper joint remote state preparation) [42], v.v.. Trong thí nghiệm, việc tạo ra các trạng thái rối tăng cường được thực hiện bởi việc kết hợp các công nghệ tạo rối một bậc tự do với nhau. Nhờ vào

công nghệ này, nhiều trạng thái rối tăng cường được tạo ra như trạng thái rối tăng cường đồng thời hai bậc tự do phân cực và không gian [43], trạng thái rối tăng cường đồng thời các bậc tự do phân cực, không gian, thời gian, năng lượng [44] và còn nhiều loại rối tăng cường khác nữa. [16,45–49].

Một mặt, việc truyền thông tin trung thực và an toàn được mã hóa trong các trạng thái lượng tử giữa các phòng trạm khác nhau và hoạt động trên các nền tảng vật lý khác nhau mà không cần vận chuyển chính các trạng thái mang thông tin là nhu cầu cấp thiết trong tương lai đối với truyền thông lượng tử. Mặt khác, việc tăng lượng thông tin nhưng lại sử dụng càng ít càng tốt các tài nguyên lượng tử cũng như cải thiện dung lượng của các kênh lượng tử rất có ý nghĩa đối với hiệu suất kinh tế và hiệu quả thực hiện các giao thức lượng tử toàn cầu. Những nhu cầu như vậy về cơ bản được đáp ứng không chỉ nhờ vào các trạng thái rối thông thường mà còn cả vào các trạng thái rối lai và rối tăng cường. Mặc dù các trạng thái rối thông thường đã được nghiên cứu rất nhiều từ nhiều năm nay, các tài nguyên rối lai và rối tăng cường dường như vẫn còn chưa được quan tâm đúng mức.

Vấn đề như đã nêu ở trên, theo chúng tôi, là mới ở thời điểm hiện tại. Nó có tính thời sự vì thuộc vào một hướng nghiên cứu đang rất được quan tâm trên thế giới. Vì vậy chúng tôi thực hiện đề tài “Rối lai, Rối tăng cường và áp dụng cho viễn chuyển, viễn tạo trạng thái lượng tử và viễn tác toán tử có kiểm soát”.

## **Đối tượng và phạm vi nghiên cứu**

Đề tài nghiên cứu về rối lai và rối tăng cường cùng các ứng dụng khả dĩ của chúng trong xử lý thông tin lượng tử. Trước tiên, các sơ đồ tạo rối lai và rối tăng cường được đề xuất. Sau đó, các trạng thái rối này được sử dụng để thực hiện một số giao thức lượng tử có kiểm soát, bao gồm viễn chuyển trạng thái lượng tử, viễn tạo hai chiều trạng thái lượng tử và viễn tác toán tử.

## **Nội dung nghiên cứu**

(i) Đề xuất các sơ đồ thực nghiệm nhằm tạo ra các trạng thái rối lai và rối lai đa nhân (multipartite hybrid entangled states) phù hợp để làm các kênh lượng tử phục vụ cho việc thực hiện viễn chuyển lượng tử, viễn tạo lượng tử các trạng thái có biến liên tục.

(ii) Tận dụng tối đa các tính chất ưu việt của cách tiếp cận lai để thiết kế các giao thức viễn chuyển trạng thái lượng tử có kiểm soát sử dụng trạng thái rối lai dưới ảnh hưởng của môi trường.

(iii) Đề xuất các sơ đồ thực nghiệm nhằm tạo ra các trạng thái rối tăng cường phù hợp để làm kênh lượng tử phục vụ cho việc thực hiện viễn tạo hai chiều trạng thái tăng cường có kiểm soát.

(iv) Đề xuất các giao thức viễn tác toán tử có kiểm soát lên các trạng thái của photon thông qua kênh lượng tử là trạng thái rối tăng cường ba bên.

## **Phương pháp nghiên cứu**

Phương pháp nghiên cứu chủ yếu dựa trên các công cụ toán học của cơ học lượng tử, quang lượng tử, đại số cao cấp, lý thuyết xác suất, vật lý thông kê, kết hợp với tính số bằng các phần mềm hiện đại. Đặc biệt, lý thuyết về các phép đo lượng tử và vận hành (về mặt lý thuyết) các thiết bị thực nghiệm (lý tưởng và không lý tưởng), như bộ tách chùm, bộ dịch pha, máy đo photon, các phép biến đổi phi tuyến, v.v., là rất cần thiết cho quá trình nghiên cứu của đề tài.

## **Bố cục của luận án**

Bên cạnh phần Mở đầu giới thiệu một cách sơ lược về thông tin lượng tử và đưa ra nhiệm vụ cần làm của luận án và phần Kết luận tóm tắt lại kết quả thu được thì luận án gồm 3 chương chính được sắp xếp như sau:

- Chương 1: Giới thiệu các khái niệm cơ bản cần thiết cho việc tính toán ở các chương sau.
- Chương 2: Trình bày rối lai và ứng dụng trong viễn chuyển lượng tử có kiểm soát.

- Chương 3: Trình bày rồi tăng cường và ứng dụng trong viễn tạo hai chiều trạng thái lượng tử và viễn tác toán tử có kiểm soát.



# Chương 1

## Một số khái niệm cơ bản

### 1.1 Các thiết bị quang học cần thiết trong xử lý thông tin lượng tử

Ở cấp độ cơ bản nhất, các quá trình vật lý được mô tả bằng cơ học lượng tử. Hệ cơ lượng tử sở hữu những đặc tính độc đáo cho phép những cách thức mới để giao tiếp và xử lý thông tin. Quá trình xử lý thông tin thông qua hệ thống lượng tử được gọi là tính toán lượng tử. Tuy nhiên, để đạt được tính toán lượng tử, cần phải có các hệ thống vật lý với các tính chất rất đặc biệt. Trong mục này, một số phần tử quang học tuyến tính rất quan trọng đối với xử lý thông tin lượng tử được trình bày. Mặc dù có các hoạt động đơn giản, các thiết bị quang học này giúp quan sát các hiện tượng khá hấp dẫn về ánh sáng và được sử dụng trong các phép đo liên quan.

#### 1.1.1 Bộ tách chùm

Bộ tách chùm (tên tiếng anh là beam splitter, viết tắt là BS) [50] được sử dụng rộng rãi trong xử lý thông tin lượng tử, đặc biệt là trong việc tạo ra các trạng thái kết hợp và chồng chập có thể có của chúng. Thực tế, một bộ tách chùm được tạo ra đơn giản bởi một chiếc gương bán mạ hoạt động với một phần truyền qua và một phần phản xạ của chùm tia sáng tới. Tác dụng chính của bộ tách chùm là trộn hai chùm ánh sáng mode  $a$  và mode  $b$  lại với nhau và được mô tả bởi toán tử unita như sau

$$\hat{B}_{ab}(\theta) = \exp [i\theta(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a})], \quad (1.1)$$

với  $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$  và  $\hat{b}(\hat{b}^\dagger)$  là các toán tử hủy (sinh) của hai mode chùm sáng tới  $a$  và  $b$ ,  $\theta$  phụ thuộc vào lượng bậc phủ lên gương và hướng đặt của nó, là một tham số thực đặc trưng cho tính chất quang học của bộ tách chùm. Gọi  $t = \cos^2 \theta$  và  $r = 1 - t$  tương ứng là hệ số truyền qua và hệ số phản xạ của bộ tách chùm. Rõ ràng,  $\hat{B}_{ab}(\theta)$  là toán tử unita vì nó thỏa mãn điều kiện

$$\hat{B}_{ab}(\theta)\hat{B}_{ab}^\dagger(\theta) = \hat{B}_{ab}^\dagger(\theta)\hat{B}_{ab}(\theta) = I. \quad (1.2)$$

Để xem xét hoạt động của một bộ tách chùm chúng ta hãy xét các biến đổi toán học của nó. Trước hết, đặt  $\hat{X} = \hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{b}^\dagger\hat{a} = \hat{X}^\dagger$  ta sẽ có các hệ thức giao hoán sau

$$[\hat{X}, \underbrace{[\hat{X}, \dots, [\hat{X}, \hat{a}^\dagger] \dots]}_{n \text{ lần}}] = \begin{cases} \hat{b}^\dagger & \text{nếu } n: \text{ lẻ} \\ \hat{a}^\dagger & \text{nếu } n: \text{ chẵn} \end{cases} \quad (1.3)$$

và

$$[\hat{X}, \underbrace{[\hat{X}, \dots, [\hat{X}, \hat{b}^\dagger] \dots]}_{n \text{ lần}}] = \begin{cases} \hat{a}^\dagger & \text{nếu } n: \text{ lẻ} \\ \hat{b}^\dagger & \text{nếu } n: \text{ chẵn.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Sử dụng các hệ thức giao hoán trên và khai triển Taylor cho các hàm mũ, ta sẽ tính được  $\hat{Y} = e^{i\theta\hat{X}}\hat{a}^\dagger e^{i\theta\hat{X}}$  cho kết quả

$$\hat{Y} = \hat{a}^\dagger \cosh(i\theta) - \hat{b}^\dagger \sinh(i\theta). \quad (1.5)$$

Từ đó ta được

$$\hat{B}_{ab}(\theta)\hat{a}^\dagger\hat{B}_{ab}^\dagger(\theta) = \hat{a}^\dagger \cos\theta + i\hat{b}^\dagger \sin\theta \quad (1.6)$$

hay

$$\hat{B}_{ab}(\theta)\hat{a}^\dagger\hat{B}_{ab}^\dagger(\theta) = \sqrt{t}\hat{a}^\dagger - i\sqrt{r}\hat{b}^\dagger. \quad (1.7)$$

Tương tự ta cũng có các biểu thức sau

$$\hat{B}_{ab}(\theta)\hat{a}\hat{B}_{ab}^\dagger(\theta) = \sqrt{t}\hat{a} - i\sqrt{r}\hat{b}, \quad (1.8)$$

$$\hat{B}_{ab}(\theta)\hat{b}^\dagger\hat{B}_{ab}^\dagger(\theta) = \sqrt{t}\hat{b}^\dagger + i\sqrt{r}\hat{a}^\dagger, \quad (1.9)$$

$$\hat{B}_{ab}(\theta)\hat{b}\hat{B}_{ab}^\dagger(\theta) = \sqrt{t}\hat{b} - i\sqrt{r}\hat{a}. \quad (1.10)$$

Như vậy, ở đầu ra của bộ tách chùm là một trạng thái trộn của các trạng thái ở đầu vào. Mức độ trộn phụ thuộc vào hệ số truyền qua  $t$  hay phụ thuộc vào  $\theta$ . Dưới đây ta xác định tác dụng của bộ tách chùm  $B_{ab}(r, t)$  lên

hai mode  $a$  và  $b$  của hai trạng thái số hạt  $|n\rangle_a|m\rangle_b$  với  $r$  và  $t$  là hệ số phản xạ và hệ số truyền qua của bộ tách chùm

$$\begin{aligned}
B_{ab}(r, t)|n\rangle_a|m\rangle_b &= B_{ab}(r, t) \frac{(\hat{a}^\dagger)^n (\hat{b}^\dagger)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} |0\rangle_a |0\rangle_b \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} (\sqrt{t}\hat{a}^\dagger + \sqrt{r}\hat{b}^\dagger)^n (\sqrt{r}\hat{a}^\dagger - \sqrt{t}\hat{b}^\dagger)^m |0\rangle_a |0\rangle_b \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \sum_p^n C_n^p (\sqrt{t}\hat{a}^\dagger)^{n-p} (\sqrt{r}\hat{b}^\dagger)^p \\
&\quad \sum_q^m C_m^q (\sqrt{r}\hat{a}^\dagger)^q (-\sqrt{t}\hat{b}^\dagger)^{m-q} |0\rangle_a |0\rangle_b \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \sum_p^n \sum_q^m C_n^p C_m^q (\sqrt{t})^{n+m-p-q} (\sqrt{r})^{p+q} \\
&\quad (-1)^{m-q} (\hat{a}^\dagger)^{n-p+q} (\hat{b}^\dagger)^{m-q+p} |0\rangle_a |0\rangle_b \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \sum_p^n \sum_q^m C_n^p C_m^q (\sqrt{t})^{n+m-p-q} (\sqrt{r})^{p+q} \\
&\quad (-1)^{m-q} \sqrt{(n-p+q)!} \sqrt{(m-q+p)!} \\
&\quad |n-p+q\rangle_a |m-q+p\rangle_b \\
&= \sum_p^n \sum_q^m B_{p,q}^{n,m}(r, t) |n-p+q\rangle_a |m-q+p\rangle_b, \quad (1.11)
\end{aligned}$$

với

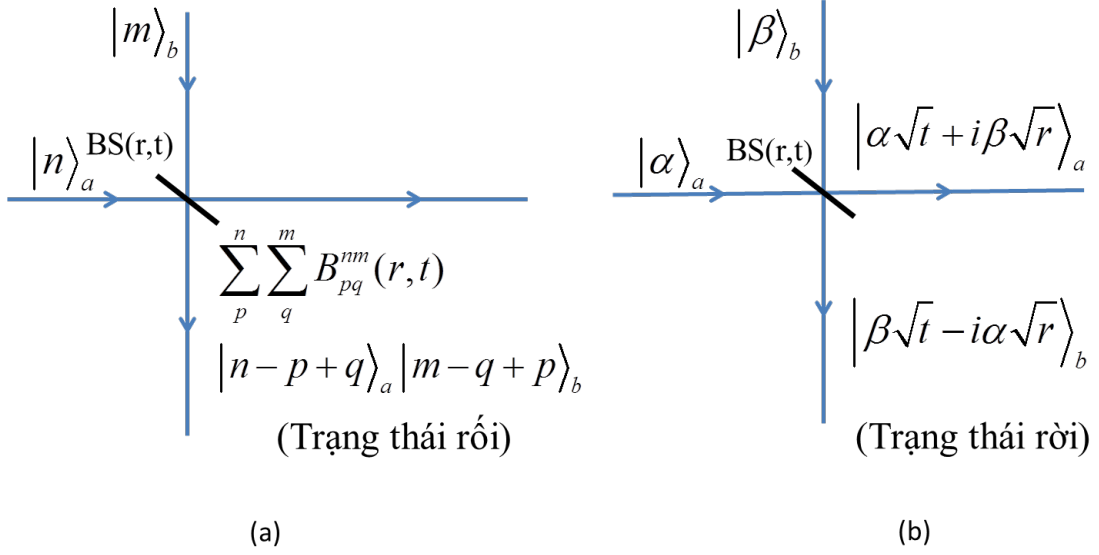
$$C_n^p = \frac{n!}{\sqrt{p!(n-p)!}} \quad (1.12)$$

và

$$\begin{aligned}
B_{p,q}^{n,m}(r, t) &= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} C_n^p C_m^q (\sqrt{t})^{n+m-p-q} (\sqrt{r})^{p+q} \\
&\quad (-1)^{m-q} \sqrt{(n-p+q)!} \sqrt{(m-q+p)!}. \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Tiếp theo, xét tác dụng của bộ tách chùm lên trạng thái tích  $|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b$ , trong đó  $|\alpha\rangle$  và  $|\beta\rangle$  là các trạng thái kết hợp được định nghĩa như một trạng thái của trường bức xạ được tạo ra bởi một phân bố dòng dao động cổ điển hay nói cách khác nó là trạng thái ánh sáng được phát ra từ một nguồn laser. Các trạng thái kết hợp này có thể được viết dưới dạng sau

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle. \quad (1.14)$$



Hình 1.1: Tác động của bộ tách chùm lên: a) trạng thái tích của hai trạng thái số hạt  $|n\rangle_a|m\rangle_b$  và b) trạng thái tích của hai trạng thái kết hợp  $|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b$ .

Kết quả tác dụng bộ tách chùm lên trạng thái tích  $|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b$  có dạng

$$B_{a,b}(t, r)|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b = |\alpha\sqrt{t} + i\beta\sqrt{r}\rangle_a|\beta\sqrt{t} - i\alpha\sqrt{r}\rangle_b. \quad (1.15)$$

Như vậy, các trạng thái  $|n\rangle_a|m\rangle_b$  khi đi qua bộ tách chùm sẽ cho ra các trạng thái rời vì nó là các trạng thái phi cổ điển, trái lại trạng thái cổ điển như  $|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b$  khi đi qua bộ tách chùm thì không cho trạng thái rời mà chỉ cho trạng thái tích (xem Hình 1.1). Tóm lại, bộ tách chùm được sử dụng rất nhiều trong các sơ đồ quang học để xử lý thông tin lượng tử. Đặc biệt là trong quá trình tạo ra rối lượng tử. Nói chung, để tạo được rối lượng tử thì các đầu vào bộ tách chùm phải là các trạng thái phi cổ điển.

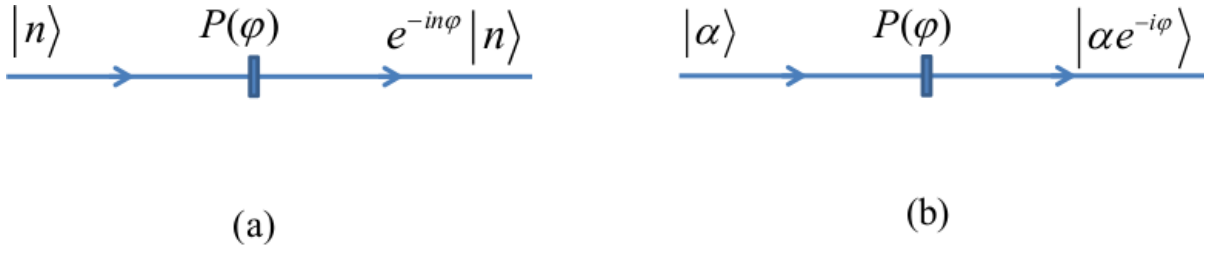
### 1.1.2 Bộ dịch pha

Một thiết bị quang học khác đó là bộ dịch pha (tên tiếng Anh là phase shifter, ký hiệu là P) [50]. Nó có tác dụng làm thay đổi pha của một chùm ánh sáng tới, được mô tả bởi toán tử unita như sau

$$\hat{P}_a(\varphi) = e^{-i\varphi\hat{a}^\dagger\hat{a}}. \quad (1.16)$$

Dưới đây xét tác động của bộ dịch pha lên trạng thái số hạt và trạng thái kết hợp. Trước tiên, đối với trạng thái số hạt ta sẽ được

$$\hat{P}_a(\varphi)|n\rangle_a = e^{-i\varphi\hat{a}^\dagger\hat{a}}|n\rangle_a = e^{-in\varphi}|n\rangle_a. \quad (1.17)$$



Hình 1.2: Tác động của bộ dịch pha lên: a) trạng thái số hạt  $|n\rangle$  và b) trạng thái kết hợp  $|\alpha\rangle$ .

Ta thấy rằng bộ dịch pha làm pha của trạng thái số hạt có thêm một hệ số  $e^{-in\varphi}$  (xem Hình 1.2). Xét tác dụng của bộ dịch pha lên trạng thái kết hợp  $|\alpha\rangle$  ta sẽ được

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_a(\varphi)|\alpha\rangle_a &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \hat{P}_a(\varphi)(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle_a \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\varphi})^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle_a \\
 &= |\alpha e^{-i\varphi}\rangle_a.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Ta thấy rằng bộ dịch pha  $\hat{P}(\varphi)$  khiến biên độ của trạng thái kết hợp bị biến đổi từ  $\alpha$  thành  $|\alpha e^{-i\varphi}\rangle$  (xem Hình 1.2).

Trên thực tế, có ba loại bộ dịch pha chính: Thứ nhất là bộ chuyển pha kỹ thuật số (tên tiếng Anh là digital phase shifter). Những bộ chuyển pha này được điều khiển bằng kỹ thuật số. Chúng có thể lập trình được hoặc có thể được điều khiển thông qua giao diện máy tính. USB là một dạng thiết bị tương đối mới của bộ dịch pha kỹ thuật số, cho phép điều khiển sự dịch pha của thiết bị từ máy tính. Thứ hai là bộ dịch pha tương tự (tên tiếng Anh là analog phase shifter). Việc dịch pha trong bộ dịch pha tương tự thường được điều khiển bởi sự thay đổi mức điện áp. Thứ ba là bộ dịch pha thủ công (tên tiếng Anh là echanical phase shifter), việc chuyển pha của thiết bị được điều khiển thủ công bằng một núm xoay. Pha từ đầu vào đến đầu ra được điều chỉnh bằng cách xoay núm.

### 1.1.3 Toán tử dịch chuyển

Toán tử dịch chuyển  $\hat{D}(\alpha)$  [50] là toán tử rất hữu dụng để tính toán với các trạng thái kết hợp. Nó được biểu diễn dưới dạng

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}. \tag{1.19}$$

Toán tử dịch chuyển có thể viết dưới các dạng khác nhau như sau

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} \quad (1.20)$$

hoặc

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger}. \quad (1.21)$$

Tác dụng của toán tử dịch chuyển lên trạng thái chân không sẽ có dạng

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle. \quad (1.22)$$

Như vậy, một trạng thái kết hợp  $|\alpha\rangle$  có thể được tạo ra bằng cách tác dụng toán tử dịch chuyển lên trạng thái chân không. Đây cũng là một định nghĩa khác của trạng thái kết hợp. Một số tính chất đặc biệt của toán tử dịch chuyển có thể thấy như

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^{-1}(\alpha) = \hat{D}(-\alpha), \quad (1.23)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad (1.24)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*, \quad (1.25)$$

$$\hat{D}(\gamma)|\alpha\rangle = |\gamma + \alpha\rangle, \quad (1.26)$$

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = e^{i\text{Im}(\alpha\beta^*)} \hat{D}(\alpha + \beta). \quad (1.27)$$

Tác dụng của toán tử dịch chuyển trong thực tế có thể được xây dựng bởi bộ tách chùm (xem Hình 1.3).

$$B_{a,b}(r, t)|\alpha\rangle_a |\beta\rangle_b = |\alpha + \gamma\rangle_a |\beta\rangle_b. \quad (1.28)$$

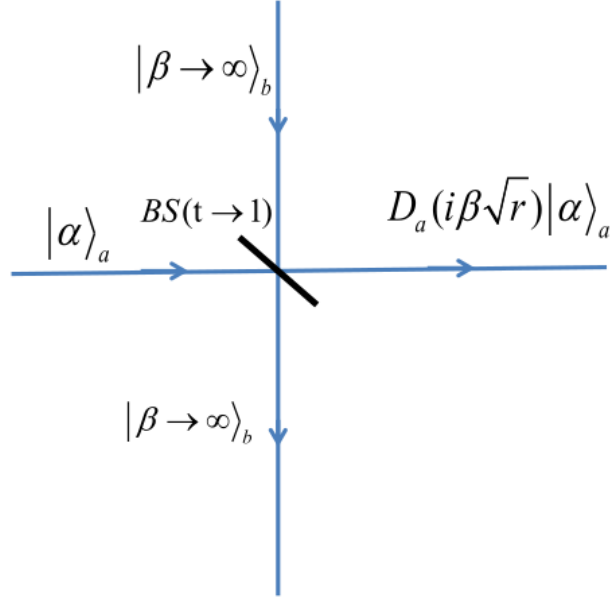
Điều này có thể thấy bởi giới hạn trong công thức (1.15), nếu cho  $t \rightarrow 1$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $i\beta\sqrt{r} \rightarrow \gamma$ .

#### 1.1.4 Các thiết bị quang học khác

Một vài thiết bị quang học cần thiết khác cần nhắc tới đó là: Bộ tách phân cực (tên tiếng Anh là polarization beam splitter, ký hiệu PBS), tấm nửa sóng (tên tiếng Anh là half-wave plate, ký hiệu HWP) và tấm sóng phần tư (tên tiếng Anh là quarter-wave-plate, ký hiệu QWP) [50].

PBS là một bộ tách chùm cho phép truyền photon ở trạng thái phân cực ngang  $|H\rangle$  và phản xạ photon ở trạng thái phân cực dọc  $|V\rangle$ .

$$\text{PBS}|H\rangle_a = |H\rangle_a \quad (1.29)$$



Hình 1.3: Hiện thực hóa toán tử dịch chuyển hoạt động ở mode  $a$  bằng bộ tách chùm có hệ số truyền qua cao và trạng thái kết hợp biên độ mạnh ở mode  $b$ .

$$\text{PBS}|V\rangle_a = |V\rangle_{a'}, \quad (1.30)$$

ở đây  $a'$  là mode phản xạ.

HWP là một thiết bị dùng để quay trạng thái phân cực, cụ thể nó chuyển trạng thái phân cực  $H$  thành trạng thái phân cực  $V$  và ngược lại. Cụ thể:

$$\text{HWP}|H\rangle_a = |V\rangle_a, \quad (1.31)$$

$$\text{HWP}|V\rangle_a = |H\rangle_a. \quad (1.32)$$

QWP là một thiết bị dùng để chuyển đổi ánh sáng phân cực tuyến tính thành ánh sáng phân cực tròn. Cụ thể, QWP hoạt động như một toán tử Hadamard như sau:

$$\text{QWP}|H\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)_a, \quad (1.33)$$

$$\text{QWP}|H\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)_a. \quad (1.34)$$

## 1.2 Tương tác giữa các photon thông qua phi tuyến Kerr chéo

Tương tác giữa các photon là rất quan trọng vì chúng là yếu tố chính để triển khai các cổng logic đa qubit, giúp hoàn thiện hệ thống công cụ dùng cho tính toán lượng tử và xử lý thông tin lượng tử. Tuy nhiên các photon không tương tác với nhau trong môi trường chân không, điều đó thúc đẩy tìm kiếm công cụ để tạo ra sự tương tác giữa chúng. Đối với mục đích này, hiệu ứng Kerr chéo (tiếng Anh là cross-Kerr), về bản chất là hiện tượng môi trường phi tuyến tạo điều kiện thuận lợi cho các tương tác photon-photon diễn ra, đã được coi là một phương pháp đáng chú ý [51–57]. Toán tử biểu diễn sự tương tác được mô tả bởi

$$\hat{U}_{ab} = \text{Exp}(i\theta\hat{n}_a\hat{n}_b), \quad (1.35)$$

với  $\hat{n}_a$  và  $\hat{n}_b$  lần lượt là toán tử số hạt photon ở mode  $a$  và mode  $b$ . Ở đây,  $\theta = \kappa t$  là thông số của tương tác với  $\kappa$  là độ mạnh không thứ nguyên của tương tác Kerr chéo và  $t$  là thời gian tương tác. Khi áp dụng toán tử này trên các trạng thái đầu vào khác nhau, không phức tạp để có thể thấy

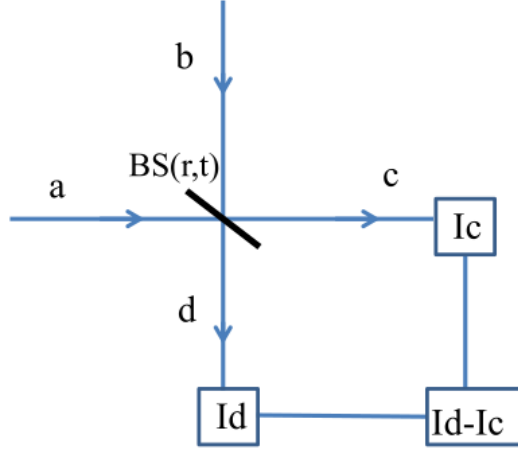
$$\hat{U}_{ab}|m\rangle_a|n\rangle_b = e^{imn\theta}|m\rangle_a|n\rangle_b \quad (1.36)$$

và

$$\hat{U}_{ab}|n\rangle_a|\beta\rangle_b = |n\rangle_a|\beta e^{in\theta}\rangle_b. \quad (1.37)$$

Như vậy ta có thể thấy, tương tác Kerr chéo gây ra sự dịch chuyển pha của trạng thái kết hợp. Để đáp ứng yêu cầu xử lý thông tin lượng tử quang học thực tế, tính phi tuyến nhất thiết phải mạnh. Tuy nhiên, Kerr chéo mạnh với  $\theta$  lớn hiện không có sẵn đồng thời sự truyền quang trong môi trường Kerr dài, tức là thời gian tương tác lớn là không thực tế, vì sự suy giảm liên tục sẽ phá hủy trạng thái lượng tử của ánh sáng. Vì vậy, làm thế nào để có được tương tác giữa các photon trong khi vẫn duy trì việc sử dụng tính phi tuyến Kerr chéo yếu là một vấn đề quan trọng. Vấn đề nêu trên lần đầu tiên được giải quyết bởi Munro và cộng sự [52]. Tính năng chính trong [52] là sử dụng các trạng thái kết hợp cường độ cao để khắc phục cho tính không hiệu quả của tương tác Kerr chéo. Đề xuất lý thuyết của [52] dường như là một giải pháp hợp lý cho vấn đề Kerr chéo và một





Hình 1.4: Sơ đồ minh họa phương pháp đo homodyne để xác định các toán tử quadrature.

số đề xuất sau đó, ví dụ [53] đã khai thác ý tưởng đó để xây dựng trạng thái khóm (cluster state) giữa các trạng thái kết hợp.

### 1.3 Phép đo Homodyne trong quang lượng tử

Lĩnh vực công nghệ thông tin lượng tử đang phát triển nhanh chóng đòi hỏi các phương tiện xác định đặc tính các trạng thái lượng tử quang học. Trong ứng dụng cho ánh sáng phi cổ điển, phép đo homodyne cung cấp phép đo các toán tử quadrature của điện từ trường [50, 58, 59], phép đo này được mô tả trên Hình 1.4. Trong phép đo homodyne được mô phỏng trên Hình 1.4, mode  $a$  là một trường tín hiệu được kết hợp, thông qua bộ tách chùm không tổn hao (giả sử bộ tách chùm là cân bằng ta có phép đo homodyne cân bằng), với mode  $b$  là một trường tham chiếu ổn định cao có cùng tần số với trường tín hiệu. Trường tham chiếu, còn được gọi là bộ dao động địa phương (tiếng Anh là local oscillator, ký hiệu là LO), thường được chuẩn bị ở trạng thái kết hợp có số lượng photon lớn, giả sử nó là một trạng thái kết hợp có biên độ lớn  $\beta$ . Mối quan hệ giữa toán tử đầu vào  $(\vec{a}, \vec{b})$  và đầu ra  $(\vec{c}, \vec{d})$  trong trường hợp bộ tách chùm cân bằng được biểu diễn dưới dạng

$$\hat{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + i\hat{b}), \quad (1.38)$$

$$\hat{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b} + i\hat{a}). \quad (1.39)$$

Các máy đo được đặt ở đầu ra của bộ tách chùm để đo dòng photon  $I_c = \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle$  và  $I_d = \langle \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle$ . Sự khác nhau giữa  $I_c$  và  $I_d$  là

$$\begin{aligned} I_c - I_d &= \langle \hat{n}_{cd} \rangle = \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle \\ &= i\langle \hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{a} \hat{b}^\dagger \rangle. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Giả sử rằng mode  $b$  là trạng thái kết hợp  $|\beta e^{-i\omega t}\rangle$  với  $\beta = |\beta|e^{-i\varphi}$ , chúng ta sẽ có

$$\langle \hat{n}_{cd} \rangle = |\beta|(\hat{a}e^{i\omega t - i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t + i\theta}), \quad (1.41)$$

với  $\theta = \varphi + \pi/2$ . Nếu ánh sáng từ mode  $a$  cũng có tần số  $\omega$ , chúng ta sẽ có  $\vec{a} = \vec{a}_0 e^{-i\omega t}$ . Vì vậy chúng ta có thể viết

$$\langle \hat{n}_{cd} \rangle = 2|\beta|\hat{X}(\theta), \quad (1.42)$$

với

$$\hat{X}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_0 e^{-i\theta} + \hat{a}_0^\dagger e^{i\theta}), \quad (1.43)$$

là toán tử quadrature tại góc pha  $\theta$ . Bằng cách thay đổi  $\varphi$  của trường tham chiếu LO chúng ta có thể thay đổi  $\theta$ . Từ đó chúng ta có thể xác định các toán tử quadrature của ánh sáng từ mode  $a$ . Dưới đây sẽ trình bày một ví dụ để minh họa phép đo homodyne có khả năng phân biệt các trạng thái cân bằng và trạng thái chùm (tiếng Anh là balanced và bunched states),  $|1, 1\rangle$  và  $(|0, 2\rangle + |2, 0\rangle)/\sqrt{2}$ . Ở đây,  $|j, k\rangle_{ab}$  đại diện cho một trạng thái quang học với hai mode không gian, với  $j$  photon ở mode  $a$  và  $k$  photon ở mode  $b$  và tất cả các photon bị phân cực theo cùng một hướng. Sơ đồ để phân biệt các trạng thái này được hiển thị trong Hình 1.5a. Mode  $c$  được chọn ban đầu là trạng thái kết hợp  $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle$ . Trạng thái kết hợp có thể được tạo ra bằng một xung laser. Các photon trong mode  $c$  được cho phép tương tác lần lượt với các photon trong mode  $a$  và  $b$  thông qua hai phép toán phi tuyến Kerr chéo (tương đối nhỏ) tương ứng với thông số phi tuyến lần lượt là  $\theta$  và  $-\theta$ . Bây giờ giả sử rằng trạng thái ban đầu của ba mode  $a$ ,  $b$  và  $c$  cho bởi biểu thức

$$|\psi_0\rangle = [d_1|1, 1\rangle + \frac{d_2}{\sqrt{2}}(|2, 0\rangle + |0, 2\rangle)_{ab}]|\alpha\rangle_c, \quad (1.44)$$

trong đó  $d_1$  và  $d_2$  là các hệ số phức thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa. Tác dụng của phi tuyến Kerr chéo khiến các photon ở mode  $a$ ,  $b$  và  $c$  bị rối với nhau và tương tác này gây ra sự dịch pha ở trạng thái kết hợp  $|\alpha\rangle$ , tỷ lệ với số photon ở mode tín hiệu tương ứng. Sau tương tác Kerr chéo, trạng thái của ba mode do đó sẽ là

$$|\psi_1\rangle = [d_1|1, 1\rangle_{ab}|\alpha\rangle_c + \frac{d_2}{\sqrt{2}}(|2, 0\rangle_{ab}|\alpha e^{2i\theta}\rangle_c + |0, 2\rangle_{ab}|\alpha e^{-2i\theta}\rangle_c)]. \quad (1.45)$$

Để phân biệt các trạng thái  $|1, 1\rangle$  và  $(|0, 2\rangle + |2, 0\rangle)/\sqrt{2}$  trong  $|\psi_1\rangle$  ta thực hiện phép đo homodyne lên trạng thái kết hợp ở mode  $c$ . Để thực hiện phép đo như vậy, trạng thái ở mode  $c$  được kết hợp với một trường tham chiếu là một trạng thái kết hợp biên độ lớn có cùng tần số bằng một bộ tách chùm. Nếu trạng thái kết hợp ở mode  $c$  không có sự dịch pha thì trạng thái ở mode  $a$  và  $b$  sẽ là  $|1, 1\rangle$ . Ngược lại nếu trạng thái kết hợp ở mode  $c$  có sự chuyển pha  $e^{\pm 2i\theta}$  thì trạng thái ở mode  $a$  và  $b$  sẽ là  $(|0, 2\rangle + |2, 0\rangle)/\sqrt{2}$ . Như vậy ta đã phân biệt được hai trạng thái  $|1, 1\rangle$  và  $(|0, 2\rangle + |2, 0\rangle)/\sqrt{2}$ . Phép đo homodyne thực hiện với toán tử đo là  $\hat{X} = (\hat{c} + \hat{c}^\dagger)/\sqrt{2}$ , ở đây  $\hat{c}$  và  $\hat{c}^\dagger$  là các toán tử hủy và sinh photon ở mode  $c$ . Sử dụng kết quả  $\langle x|\beta\rangle = (2\pi)^{-1/4}\exp[-\text{Im}(\beta)^2 - (x - 2\beta)^2/4]$  [60], với  $|x\rangle$  là trạng thái riêng của toán tử  $X$  ứng với trị riêng  $x$ . Ta sẽ xác định được xác suất trạng thái ở mode  $a$  và  $b$  sẽ là  $|1, 1\rangle$  hay  $(|0, 2\rangle + |2, 0\rangle)/\sqrt{2}$  là hàm phụ thuộc vào  $x$ . Cụ thể, hàm phân bố xác suất khi mode  $a$  và  $b$  là trạng thái  $|1, 1\rangle$  là  $f(x, \alpha)$ , trong khi đó trạng thái  $(|0, 2\rangle + |2, 0\rangle)/\sqrt{2}$  thu được với hàm phân bố xác suất là  $f(x, \alpha \cos 2\theta)$ . Ở đây,

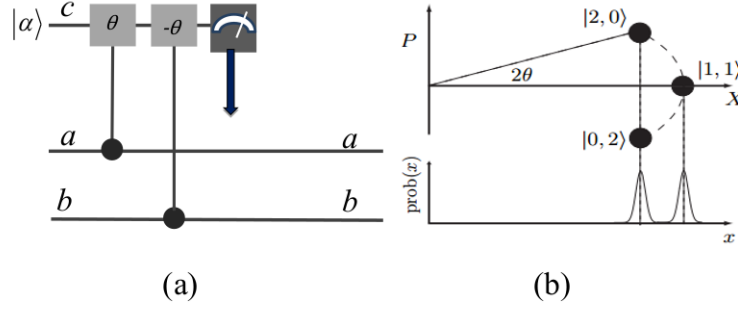
$$f(x, \beta) = (2\pi)^{-1/4}\exp [-(x - 2\beta)^2/4] \quad (1.46)$$

và

$$\phi(x) = \alpha \sin 2\theta(x - 2\alpha \cos 2\theta) \bmod 2\pi. \quad (1.47)$$

Lưu ý rằng, phép đo homodyne không phân biệt được hai trạng thái  $\alpha e^{i\theta}$  và  $\alpha e^{-i\theta}$  do khi  $\theta$  rất nhỏ và  $\alpha$  lớn thì kết quả đo của hai trạng thái trên là trùng nhau với hàm phân bố xác suất giống nhau (xem Hình 1.5b).

Phép đo homodyne cân bằng cho phép thực hiện các phép đo Bell của các trạng thái biến liên tục với xác suất tất định do đó nó được ứng dụng trong viễn chuyển các trạng thái lượng tử biến liên tục. Phép đo homodyne cân bằng cũng được nghiên cứu để xác định đầy đủ các đặc tính của trạng

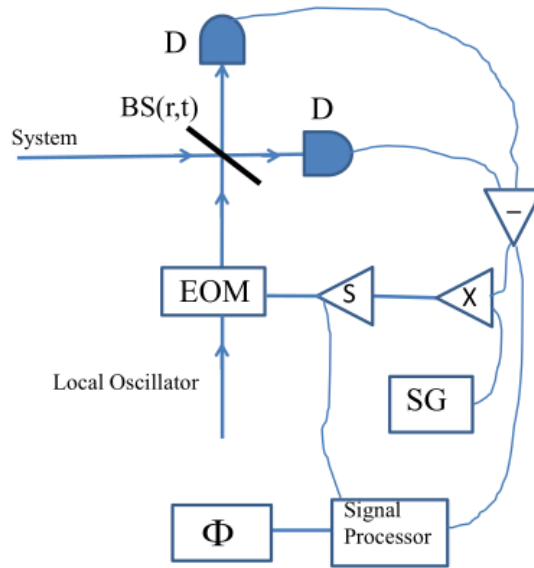


Hình 1.5: (a) Sơ đồ phép đo homodyne để phân biệt trạng thái cân bằng và trạng thái chùng. (b) Sơ đồ minh họa không gian pha của trạng thái  $|\psi_1\rangle$  trong công thức (1.45).

thái lượng tử như các trạng thái nén pha, nén biên độ hay trạng thái chồng chập của các trạng thái vĩ mô thông qua công nghệ chụp cắt lớp lượng tử (tiếng Anh là quantum tomography) [61–63]. Trong những trích dẫn này, các tác giả đã sử dụng công nghệ chụp cắt lớp lượng tử để đo phân bố Wigner và xác định được ma trận mật độ của trạng thái, từ đó có thể xác định đầy đủ thông tin của trạng thái đó. Ngoài ra phép đo homodyne cân bằng cũng được ứng dụng trong giao thức thiết lập mối tương quan lượng tử của trạng thái EPR và nó cũng được sử dụng để chứng minh các thuộc tính phi cổ điển của trường điện từ trong điện động lực học lượng tử.

## 1.4 Phép đo pha thích ứng trong quang lượng tử

Tính toán lượng tử quang tuyến tính (tên tiếng Anh là linear optical quantum computation, viết tắt là LOQC) là sử dụng mạng tuyến tính để xử lý các qubit quang học. LOQC đã được chứng minh là một công cụ hiệu quả cho việc biểu diễn nguyên lý cơ học lượng tử và sự phát triển của các ứng dụng trong các lĩnh vực truyền thông. Nó liên quan đến việc chuẩn bị, truyền tải và đo lường các qubit quang học thông qua mạng lưới các phần tử quang tuyến tính. Một điểm chung cho tất cả các đề xuất LOQC quang tử cho đến nay là họ chỉ sử dụng tính năng đếm photon cho tất cả các phép đo. Điều quan tâm là tìm hiểu xem các loại phép đo khác cũng có thể đóng một vai trò nào đó và phép đo pha thích ứng (tên tiếng Anh là adaptive phase measurement) [64–66] có thể được sử dụng để hoàn thành một số nhiệm vụ hữu ích trong lược đồ LOQC. Phép đo pha thích ứng dựa



Hình 1.6: Sơ đồ thiết bị thí nghiệm chế tạo phép đo pha thích ứng.  $BS(r, t)$  biểu thị bộ tách chùm có hệ số phản xạ (truyền qua) là  $r(t)$ , D là máy đo photon, EOM là bộ biến pha điện quang. Các thiết bị quang học khác như: bộ trừ, bộ nhân, bộ tích hợp, bộ tạo tín hiệu SG, bộ xử lý tín hiệu và đầu đọc kỹ thuật số đưa ra giá trị đo được trong khoảng  $[0, 2\pi)$ .

trên việc mở rộng phép đo homodyne và do đó kết quả đo có phổ liên tục, điều này hoàn toàn không giống như các giá trị rời rạc được tạo ra bởi một bộ đếm photon. Xem xét một xung đơn mode và một trường tham chiếu là trạng thái kết hợp có biên độ lớn. Trường tham chiếu này có cùng tần số với xung. Ở đây, pha của trường tham chiếu là  $\phi(t)$ , nó được cố định là hằng số đối với phép đo homodyne và là hàm tuyến tính theo thời gian đối với phép đo heterodyne. “Thích ứng” trong phép đo pha thích ứng có nghĩa rằng quá trình thực hiện của giai đoạn sau sẽ phụ thuộc vào kết quả của giai đoạn trước. Hình 1.6 là sơ đồ phép đo. Xung được cho kết hợp với trường tham chiếu qua một bộ tách chùm cân bằng. Nguyên tắc của phép đo này là pha dao động của trường tham chiếu được điều chỉnh liên tục suốt quá trình của phép đo và phụ thuộc vào kết quả của sự khác nhau giữa dòng photon giữa hai mode. Phép đo pha thích ứng này rất hữu ích để xác định gần đúng pha của một xung quang. Nhưng ở một photon người ta quan tâm nhiều hơn đến tiện ích của nó trong việc chuẩn bị trạng thái. Dưới đây sẽ trình bày hai ứng dụng của phép đo pha thích ứng trong quá

trình xử lý thông tin lượng tử.

### 1.4.1 Tạo trạng thái chồng chập sử dụng phép đo pha thích ứng

Một phép toán qubit cơ bản là tạo ra sự chồng chập những trạng thái. Đối với hệ thống nhị tuyến (tiếng Anh là dual-rail), các trạng thái chồng chập tùy ý,  $\alpha|01\rangle + \beta e^{i\phi}|10\rangle$ , với  $\alpha, \beta$  và  $\phi$  là những số thực, có thể được chuẩn bị dễ dàng chỉ bằng cách sử dụng các yếu tố quang học tuyến tính. Trạng thái chồng chập của một hệ đơn tuyến (tiếng Anh là single-rail),  $\alpha|0\rangle + \beta e^{i\phi}|1\rangle$ , không dễ tạo như vậy. Các đề xuất trước cho việc tạo các trạng thái như vậy một cách tất định liên quan đến yếu tố phi tuyến tính. Ngoài ra, các giao thức không tất định dựa trên việc đếm photon cũng được đề xuất trong [67], tuy nhiên, các giao thức này có xác suất thành công thấp. Một sơ đồ không tất định dựa trên phép đo homodyne cũng đã được chứng minh trong [68]. Cho đến nay người ta đã tìm ra được việc tạo ra các trạng thái qubit đơn tuyến dựa vào các yếu tố quang học tuyến tính và phép đo pha thích ứng [69], đây là phương pháp cho hiệu suất cao hơn nhiều so với các giao thức trước. Trước hết giả sử đã tạo được một trạng thái chồng chập của một photon trên hai mode hay còn gọi là trạng thái qubit nhị tuyến có dạng

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 1\rangle + |1, 0\rangle). \quad (1.48)$$

Trạng thái này được tạo ra bằng cách cho 1 photon đi qua một bộ tách chùm cân bằng. Sau đó chúng ta thực hiện một phép đo pha thích ứng lên mode đầu tiên. Nếu ta thu được kết quả

$$|\theta\rangle = |0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle. \quad (1.49)$$

với  $\theta$  có kết quả ngẫu nhiên trong  $[0, 2\pi)$ , mode thứ hai sẽ ở trạng thái

$$|-\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + e^{-i\theta}|0\rangle). \quad (1.50)$$

Sau đó cho trạng thái trên qua bộ biến pha, điều này làm cho pha ngẫu nhiên có thể được loại bỏ, mang lại kết quả xác định trạng thái  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ . Quá trình này dễ dàng được tổng quát hóa để tạo một trạng thái chồng chập tùy ý. Trạng thái đơn photon bây giờ được trộn với trạng thái

chân không trên bộ tách chùm có hệ số phản xạ  $\eta$ . Trạng thái nhị tuyến khi đó sẽ là

$$|1\rangle|0\rangle \rightarrow \eta|1\rangle|0\rangle + \sqrt{1-\eta^2}|0\rangle|1\rangle. \quad (1.51)$$

Sau đó, thực hiện phép đo pha thích ứng trên mode thứ nhất và sử dụng bộ biến pha  $\psi$  cho mode thứ 2 trong (1.51). Nếu kết quả của phép đo pha thích ứng là  $\theta$ , trạng thái của mode thứ hai sẽ là

$$\eta|0\rangle + e^{-i(\theta+\psi)}\sqrt{1-\eta^2}|1\rangle. \quad (1.52)$$

Bằng cách chọn  $\eta = \alpha$  và  $\psi = \varphi - \theta$ , với  $\alpha, \psi$  tùy ý, một trạng thái chồng chập đơn tuyến tùy ý có thể được tạo ra một cách tất định.

### 1.4.2 Thiết kế công lượng tử sử dụng phép đo pha thích ứng

Chúng ta đã chỉ ra rằng các trạng thái qubit đơn tuyến tùy ý có thể được tạo ra một cách tất định từ các trạng thái đơn photon sử dụng các phép đo pha thích ứng. Để tính toán lượng tử chúng ta yêu cầu khả năng áp dụng các phép quay bất kỳ trên các trạng thái đầu vào không xác định. Dựa trên sự kết hợp giữa phép đếm photon và phép đo pha thích ứng, các tác giả trong [69] cho thấy rằng một phép biến đổi Hadamard trong khi vẫn không xác định nhưng có thể có hiệu quả lớn hơn. Việc xây dựng các phép quay bất kỳ có thể được thực hiện theo các bước cụ thể sau:

Bước 1: Tạo trạng thái rối Bell giữa qubit đơn tuyến và qubit nhị tuyến. Giả sử trạng thái Bell của hai qubit nhị tuyến có dạng

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{11'}|10\rangle_{23} + |10\rangle_{11'}|01\rangle_{23}). \quad (1.53)$$

Bây giờ, nếu sử dụng phép đo pha thích ứng lên mode 1' của trạng thái trên, sau đó sử dụng bộ biến pha thì trạng thái của các mode còn lại sẽ là

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|10\rangle_{23} + |1\rangle_1|01\rangle_{23}). \quad (1.54)$$

Đây là trạng thái rối Bell giữa qubit đơn tuyến và nhị tuyến.

Bước 2: Thực hiện phép đo Bell giữa trạng thái qubit đơn tuyến (mode 1) của trạng thái rối Bell trên và một qubit đơn tuyến bất kỳ  $|q\rangle_0 = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_0$ . Trạng thái còn lại sẽ là trạng thái qubit nhị tuyến có dạng

$|Q\rangle_{23} = (\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle)_{23}$ . Như vậy bước này đã thực hiện việc chuyển qubit đơn tuyến thành qubit nhị tuyến.

Bước 3: Bây giờ chúng ta cho một phép quay tùy ý  $R = \{\{a, b\}, \{b^*, a\}\}$  tác động lên trạng thái  $|Q\rangle_{23}$ ,

$$R|Q\rangle_{23} = \alpha(a|0\rangle_{23} + b|1\rangle_{23}) + \beta(b|0\rangle_{23} - a|1\rangle_{23}) \\ + \alpha(a|01\rangle_{23} + b|10\rangle_{23}) + \beta(b^*|01\rangle_{23} - a|10\rangle_{23}). \quad (1.55)$$

Sử dụng một phép đo pha thích ứng lên mode 3 trong biểu thức (1.55), nếu kết quả thu được là  $\theta$  ngẫu nhiên thì trạng thái mode 2 sẽ là  $\alpha(ae^{-i\theta}|0\rangle_2 + b|1\rangle_2) + \beta(b^*e^{-i\theta}|0\rangle_2 - a|1\rangle_2)$ . Sau khi sử dụng bộ biến pha ta sẽ được

$$\alpha(a|0\rangle_2 + b|1\rangle_2) + \beta(b^*|0\rangle_2 - a|1\rangle_2) = R|q\rangle_2. \quad (1.56)$$

Kết quả này cho thấy hoạt động phép quay lên trạng thái qubit đơn tuyến bất kỳ. Bước không xác định duy nhất là phép đo Bell trong Bước 2 chỉ cho xác suất thành công 50%. Tuy vậy, đây là một giao thức cải thiện xác suất thành công so với các giao thức trước đó.

## 1.5 Máy đo photon

Máy đo photon (tên tiếng Anh là Photodetector) hay cảm biến quang, còn được gọi là photosensor, là cảm biến chuyển đổi photon của ánh sáng hoặc bức xạ điện từ thành tín hiệu điện. Trong quang học lượng tử tuyến tính, phương pháp chính để thu được thông tin về các trạng thái lượng tử là thông qua việc phát hiện photon. Về mặt lý thuyết, chúng ta có thể tạo ra sự khác biệt giữa ít nhất hai loại máy đo photon: loại thứ nhất cho chúng ta biết chính xác có bao nhiêu photon trong một trạng thái đầu vào và loại thứ hai cho đầu ra hoặc “không có gì” hoặc “có” photon (tức ít nhất số photon phải có là 1). Có thể có nhiều cách để phân loại máy đo, nhưng hai máy đo này là quan trọng nhất. Loại thứ nhất được gọi là máy đo phân giải số photon (tiếng Anh là photon number resolving detector), trong khi loại thứ hai thường được gọi là máy đo xô hoặc máy đo chân không (tiếng Anh là a bucket or vacuum detector). Trong những năm gần đây, đã có một nỗ lực lớn để thu hẹp khoảng cách giữa các yêu cầu của tính toán lượng tử quang tuyến và các máy đo photon có sẵn, dẫn đến sự phát triển của các máy đo phân giải số và các giao thức lượng tử ít phụ thuộc vào



việc đếm số lượng photon lớn. Trong thực tế, các máy đo photon thường phát sinh các lỗi phổ biến trong quá trình phát hiện photon thực tế. Các máy đo photon thực thuộc bất kỳ loại nào đều tạo ra hai loại lỗi như sau: thứ nhất, máy đo đếm ít photon hơn so với thực tế hiện diện trong trạng thái đầu vào; thứ hai, máy đo đếm được nhiều photon hơn so với thực tế ở trong trạng thái đầu vào.

Dưới đây ta xem xét như một ví dụ về máy đo photon, thiết bị có khả năng hấp thụ ánh sáng thông qua sự phát quang của các electron trong một thời gian nhất định, xét khoảng thời gian  $t, t + \delta t$ . Tiếp theo, giả sử rằng sự giảm photon của  $m$  quang điện tử bị chi phối bởi quá trình trong đó có chính xác  $m$  hệ nguyên tử tham gia, do đó mỗi hệ chỉ phát ra một electron. Giả định thêm rằng tổng số  $N$  của các hệ nguyên tử lớn hơn nhiều so với số trung bình của electron, do đó với bất kỳ giá trị thực tế nào (có liên quan) của  $m$ , bất đẳng thức  $m < N$  có thể được giả định. Theo các giả định này, các đặc điểm chính của lý thuyết có thể được phát triển bằng cách áp dụng lý thuyết nhiễu loạn của Dirac vào quá trình hấp thụ ánh sáng và kết hợp các kết quả tương ứng với các phương pháp thống kê cổ điển về đếm tập hợp các quang điện tử được tạo ra bởi các quá trình hấp thụ. Phân tích trực quan hơn, khi nào mỗi photon rơi vào trong khoảng thời gian đã chọn, trên máy đo sẽ làm phát sinh chính xác một electron phát ra thì số electron đếm được đồng nhất chính xác với số lượng photon. Lúc này số liệu thống kê của các điện tử được đếm phản ánh chính xác thống kê số photon; tức là xác suất  $P_m$  phát hiện ra  $m$  quang điện tử bằng xác suất  $p_m$  của  $m$  photon trong trường, với

$$P_m = p_m = \langle m | \rho | m \rangle. \quad (1.57)$$

Tuy nhiên do hiệu ứng mất mát, xác suất  $\eta$  chuyển đổi một photon thành một điện tử luôn nhỏ hơn 1 ( $0 \leq \eta \leq 1$ ). Xác suất này còn được gọi là hiệu suất lượng tử. Vì (theo các giả định được đưa ra) các sự kiện riêng lẻ của sự phát xạ của một quang điện tử có thể được coi là độc lập với nhau, xác suất  $P_{m|n}(\eta)$  quan sát  $m$  quang điện tử trong điều kiện có  $n$  photon có mặt tương ứng với một quá trình Bernoulli

$$P_{m|n}(\eta) = C_n^m \eta^m (1 - \eta)^{n-m} \quad (1.58)$$

nếu  $m \leq n$  hoặc

$$P_{m|n}(\eta) = 0 \quad (1.59)$$

nếu  $m > n$ . Tổng xác suất để có mặt  $n$  photon nhưng chỉ đếm được  $m$  quang điện tử khi đó là  $P_{m|n}(\eta)p_n$ . Khi đó xác suất phát hiện  $m$  photon sẽ là

$$P_m = \sum P_{m|n}(\eta)p_n = C_n^m \eta^m (1 - \eta)^{n-m} p_n. \quad (1.60)$$

Máy đo photon là một trong những thành phần quan trọng trong các mạch tích hợp quang điện tử. Nó được sử dụng rộng rãi trong các hệ thống thông tin liên lạc quang học, kết nối quang học và hình ảnh y sinh, và nó thường hoạt động từ bước sóng nhìn thấy đến gần hồng ngoại. Đối với hầu hết các ứng dụng, có thể yêu cầu một hoặc nhiều đặc tính hiệu suất sau đây bao gồm độ nhạy cao, tốc độ cao, tiếng ồn thấp, dải động cao. Máy đo photon được sử dụng hầu hết trong các nhiệm vụ của luận án này.

## Chương 2

# Rối lai và áp dụng cho viễn chuyển lượng tử có kiểm soát

Rối lượng tử được xem là đối tượng huyền bí nhất của cơ học lượng tử. Nó là một trong những nguyên nhân cơ bản của sự khác nhau giữa cơ học lượng tử và cơ học cổ điển. Trạng thái tổng quát  $|\varphi\rangle_A$  và  $|\phi\rangle_B$  của hai hệ con  $A$  và  $B$  tồn tại trong không gian Hilbert  $D_A$  và  $D_B$  chiều có dạng sau

$$|\varphi\rangle_A = \sum_{i=0}^{D_A-1} \alpha_i |i\rangle_A, \quad (2.1)$$

với điều kiện chuẩn hóa

$$\sum_{i=0}^{D_A-1} |\alpha_i|^2 = 1. \quad (2.2)$$

Tương tự

$$|\phi\rangle_B = \sum_{j=0}^{D_B-1} \beta_j |j\rangle_B, \quad (2.3)$$

với điều kiện chuẩn hóa

$$\sum_{j=0}^{D_B-1} |\beta_j|^2 = 1. \quad (2.4)$$

Về mặt toán học, trạng thái rối  $|\Psi\rangle_{AB}$  của hai hệ con  $A$  và  $B$  là một trạng thái không thể viết được dưới dạng tích tensor của hai trạng thái  $|\varphi\rangle_A$  và  $|\phi\rangle_B$ , tức là

$$|\Psi\rangle_{AB} \neq |\varphi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B. \quad (2.5)$$

Trong trường hợp  $|\Psi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$ , thì  $|\Psi\rangle_{AB}$  gọi là trạng thái tích hay trạng thái tách rời. Các trạng thái rời được xem xét nhiều nhất là các trạng thái Bell [70]

$$|\varphi^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)_{AB} \quad (2.6)$$

và

$$|\psi^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)_{AB}. \quad (2.7)$$

Các trạng thái Bell (2.6) và (2.7) là các trạng thái rời của hai hệ con. Hiện tượng rời cũng có thể xảy ra giữa  $N > 2$  hệ con khác nhau. Với  $N = 3$  tồn tại hai trạng thái rời cực đại không tương đương là trạng thái GHZ [71]

$$|GHZ\rangle_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)_{ABC} \quad (2.8)$$

và trạng thái W [72]

$$|W\rangle_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)_{ABC}. \quad (2.9)$$

Các trạng thái rời là tài nguyên lượng tử không thể thay thế cho nhiều giao thức quan trọng như mã hóa siêu đậm, viễn chuyển lượng tử, bộ lặp lượng tử, đối thoại lượng tử, v.v.. Trạng thái của một hệ con có thể được mô tả bằng một bậc tự do nào đó. Nếu lấy photon làm một thí dụ, nó có thể được mô tả bởi bậc tự do phân cực. Khi đó trạng thái tổng quát của nó sẽ là

$$|\eta_1\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle, \quad (2.10)$$

với  $\alpha$  và  $\beta$  là các số phức thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .  $|H\rangle$  và  $|V\rangle$  là các trạng thái phân cực ngang và phân cực dọc của photon. Một photon cũng có thể được biểu diễn bởi bậc tự do không gian, khi đó trạng thái tổng quát sẽ là

$$|\eta_2\rangle = \alpha|a_1\rangle + \beta|a_2\rangle, \quad (2.11)$$

với  $\alpha$  và  $\beta$  là các số phức thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa như trên.  $|a_1\rangle$  là trạng thái photon truyền theo hướng  $a_1$ ,  $|a_2\rangle$  là trạng thái photon truyền theo hướng  $a_2$ . Khi xét một chùm/xung ánh sáng, trạng thái của nó được

biểu diễn bởi bậc tự do biến đổi liên tục dưới dạng chồng chập của các trạng thái kết hợp như sau

$$|\eta_3\rangle = N(a|\alpha\rangle + b|-\alpha\rangle), \quad (2.12)$$

với  $N$  là hệ số chuẩn hóa của trạng thái (2.12),  $N = (1+2\text{Re}(a^*b)e^{-2|\alpha|^2})^{-1/2}$ . Nếu một và chỉ một bậc tự do được dùng để mô tả trạng thái rối thì đó là rối thông thường. Trạng thái Bell thông thường của hai photon ở bậc tự do phân cực được viết dưới dạng

$$|\varphi_P^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle \pm |VV\rangle)_{AB} \quad (2.13)$$

và

$$|\psi_P^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle \pm |VH\rangle)_{AB}. \quad (2.14)$$

Trạng thái Bell thông thường của hai photon ở bậc tự do không gian được viết dưới dạng

$$|\varphi_S^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1b_1\rangle \pm |a_2b_2\rangle)_{AB} \quad (2.15)$$

và

$$|\psi_S^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1b_2\rangle \pm |a_2b_1\rangle)_{AB}. \quad (2.16)$$

Các trạng thái Bell với bậc tự do liên tục có dạng

$$|\varphi_{CV}^\pm\rangle_{AB} = N^\pm(|\alpha, \alpha\rangle \pm |-\alpha, -\alpha\rangle)_{AB} \quad (2.17)$$

và

$$|\psi_{CV}^\pm\rangle_{AB} = N^\pm(|\alpha, -\alpha\rangle \pm |-\alpha, \alpha\rangle)_{AB}. \quad (2.18)$$

Một loại rối bất thường được xem xét đó là rối lai [9], được tạo thành trong các bậc tự do khác nhau. Chẳng hạn, trong một hệ rối lượng tử của hai hạt  $A$  và  $B$ , hạt  $A$  được mô tả dưới dạng các trạng thái phân cực trong khi đó hạt  $B$  tồn tại dưới dạng trạng thái kết hợp. Khi đó trạng thái rối có dạng

$$|\varphi_{P-CV}^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, \alpha\rangle \pm |V, -\alpha\rangle)_{AB} \quad (2.19)$$

và

$$|\psi_{P-CV}^{\pm}\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, -\alpha\rangle \pm |V, \alpha\rangle)_{AB}. \quad (2.20)$$

Đây là bốn trạng thái Bell lai giữa P-DOF và CV-DOF.

Như đã nói trong phần mở đầu, thông tin có thể được mã hóa trong biến gián đoạn giống như hạt [73, 74], tồn tại trong không gian Hilbert hữu hạn chiều, hoặc ở trạng thái biến liên tục giống như sóng [75, 76], tồn tại trong không gian Hilbert vô hạn chiều. Phương pháp tiếp cận DV chủ yếu dựa vào việc sử dụng các photon đơn, các cặp rối photon, thiết bị quang học tuyến tính và máy đo photon, có thể đạt được độ tin cậy gần như tuyệt đối. Tuy nhiên, phép đo trạng thái Bell, là điều kiện tiên quyết cho nhiều giao thức lượng tử không thể được thực hiện một cách tất định bằng các thiết bị quang học tuyến tính và máy đo photon vì chỉ có hai trong số bốn trạng thái Bell có thể được xác định một cách chắc chắn [14]. Do đó, viễn chuyển lượng tử DV chỉ có thể thành công với xác suất không vượt quá 1/2 [77, 78]. Mặt khác, cách tiếp cận CV hoạt động trên các trạng thái biến đổi liên tục và chồng chập của nó có một số lợi ích nổi bật như hiệu suất phát hiện photon cao và phép đo trạng thái Bell có thể được thực hiện theo cách thức gần tất định [79]. Tuy nhiên, độ tin cậy của viễn chuyển lượng tử CV là khiêm tốn vì mức độ rối của các cặp CV thường bị hạn chế. Vì cả mã hóa DV hay CV đều có những ưu điểm và nhược điểm riêng [14, 77, 78, 80–83], kết hợp hai phương pháp này để hình thành cái gọi là cách tiếp cận lai đã trở thành chủ đề nổi bật trong giao tiếp và tính toán lượng tử. Một cách tiếp cận kết hợp như vậy có thể cung cấp các tính năng tích cực của mỗi cách tiếp cận đồng thời khắc phục các hạn chế của chúng [84, 85]. Nó cũng hứa hẹn các ứng dụng tiềm năng trong xử lý thông tin lượng tử và tính toán lượng tử trong các mạng không đồng nhất hiện đại được xây dựng trên nhiều nền tảng vật lý với các loại mã hóa qubit riêng biệt [86–89]. Các kênh lượng tử làm cầu nối liên kết một mạng lượng tử không đồng nhất DV-CV là các trạng thái rối lai DV-CV. Các sơ đồ tạo ra chúng đã được đưa ra về mặt lý thuyết và được hiện thực hóa bằng thực nghiệm bởi một số nhóm [9, 90–101]. Ví dụ, rối lai giữa các hệ thống vi mô và vĩ mô [94, 102–110] đã được tạo ra để minh họa cho thử nghiệm tưởng tượng nổi tiếng của Schrödinger [8]. Nó là nguồn nguyên liệu

thiết yếu cho một số nhiệm vụ quan trọng trong một mạng lượng tử không đồng nhất [87,111,112], trong đó có viễn chuyển lượng tử lai [84,113]. Nhìn chung, các trạng thái rối lai DV-CV này có thể được phân thành hai loại. Loại đầu tiên là trạng thái rối lai giữa một trạng thái CV và một qubit quang đơn tuyến, có dạng [9,93–98]

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|CV_0\rangle_A |0\rangle_B + |CV_1\rangle_A |1\rangle_B), \quad (2.21)$$

ở đây  $|CV_0\rangle_A$  và  $|CV_1\rangle_A$  là hai trạng thái CV trực giao (hoặc gần trực giao) thuộc về nút  $A$ , trong khi  $|0\rangle_B$  và  $|1\rangle_B$  là các trạng thái chân không và trạng thái một photon thuộc nút  $B$ . Hai ví dụ điển hình về kiểu rối lai trên bao gồm  $(|\alpha\rangle|0\rangle + |-\alpha\rangle|1\rangle)/\sqrt{2}$ , ở đây  $|\pm\alpha\rangle$  là các trạng thái kết hợp với biên độ  $\pm\alpha$  [93–95] và  $(|\text{cat}_\alpha^+\rangle|0\rangle + |\text{cat}_\alpha^-\rangle|1\rangle)/\sqrt{2}$ , ở đây  $|\text{cat}_\alpha^\pm\rangle = N_\alpha^\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$ , với hệ số chuẩn hóa  $N_\alpha^\pm$ , là trạng thái con mèo Schrödinger chẵn/lẻ [9,96–98]. Loại rối lai DV-CV thứ hai là rối giữa một trạng thái CV và một photon phân cực [99–101]

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|CV_0\rangle_A |H\rangle_B + |CV_1\rangle_A |V\rangle_B), \quad (2.22)$$

ở đây  $|H\rangle$  ( $|V\rangle$ ) biểu diễn trạng thái của một photon đơn phân cực theo chiều ngang (chiều dọc). Các trạng thái rối lai (2.22), so với trạng thái (2.21), có thể thuận lợi hơn cho việc xử lý thông tin do phần phân cực của chúng. Cụ thể, trạng thái qubit phân cực, không giống như trạng thái qubit đơn tuyến, nó chắc chắn là trạng thái một photon, trong đó thông tin được mã hóa ở P-DOF, do đó khiến nó bền vững với sự tổn thất photon và sự không hoàn hảo của máy đo photon [100]. Hơn nữa, các cổng qubit đơn cho các qubit phân cực được thực hiện dễ dàng bằng cách sử dụng các thiết bị quang học thông dụng như QWP, HWP, v.v. [74,114], trong khi các thiết bị quang học sử dụng cho qubit đơn tuyến rất khó để thực hiện [115]. Hai kiểu rối lai nói trên đã được so sánh kỹ lưỡng đối với giao thức viễn chuyển lượng tử [116,117]. Gần đây, một nỗ lực tạo ra trạng thái rối

$$a|\text{cat}_\alpha^+\rangle_A |H\rangle_B + b|\text{cat}_\alpha^-\rangle_A |V\rangle_B, \quad (2.23)$$

với  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ , đã được thực hiện bằng kỹ thuật bớt một photon (single-photon subtraction) [100]. Tuy nhiên, trạng thái thực sự được tạo ra chỉ là gần đúng với trạng thái lý tưởng do mode DV khi đó bị trộn với một

thành phần chân không lớn. Ngoài ra, các đề xuất lý thuyết để tạo rối lai có dạng

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\rangle_A |H\rangle_B + |-\alpha\rangle_A |V\rangle_B), \quad (2.24)$$

cũng đã được đưa ra trong [99, 101]. Trong các đề xuất này, một phần nhỏ của trạng thái mèo Schrödinger được phản xạ từ bộ tách chùm không cân bằng sẽ được giao thoa trên bộ tách chùm cân bằng với một mode của một trạng thái rối phân cực giữa hai photon. Sự giao thoa sẽ xóa thông tin về đường đi của các photon trong khi vẫn giữ được thông tin về sự phân cực của chúng [101]. Trong điều kiện hoàn hảo, các lược đồ trong [99, 101] có thể tạo trạng thái rối lai có dạng (2.24). Tuy nhiên, trong [99, 101] xác suất thành công vẫn còn khá thấp và việc sử dụng các toán tử dịch chuyển là bắt buộc. Mặc dù toán tử dịch chuyển có thể được thực hiện trong thực tế với sự trợ giúp của tia laser cường độ cao và bộ tách chùm có hệ số truyền qua cao [118], tuy vậy trạng thái dịch chuyển trên thực tế chỉ là một trạng thái gần đúng với trạng thái dịch chuyển mong muốn về mặt lý thuyết, vì vậy về nguyên tắc không thể đạt được độ tin cậy tuyệt đối. Trong mục 2.1 của chương chúng tôi đề xuất một giao thức không cần toán tử dịch chuyển để tạo ra một loại rối lai có dạng tương tự như đã định nghĩa trong (2.24) nhưng với thành phần CV là các trạng thái kết hợp có tính chất phân cực khác nhau. Trong mục 2.2 chúng tôi đề xuất giao thức tạo trạng thái rối lai DV-CV giữa bốn mode. Mục 2.3 chúng tôi sử dụng nguồn rối lai đã tạo thành công để ứng dụng trong quá trình viễn chuyển lượng tử. Mục 2.4 là một số thảo luận và tóm lược kết quả thu được của chương. Các kết quả của chương 2 đã được công bố trong [L. T. Dat, et. al., Optik - International Journal for Light and Electron Optics, 2021, 225, 165820] và [C. T. Bich, et. al., Pramana – J. Phys., 2022, 96, 33].

## 2.1 Tạo rối lai giữa trạng thái kết hợp phân cực và trạng thái phân cực

Nhiệm vụ được đưa ra là tạo trạng thái có dạng

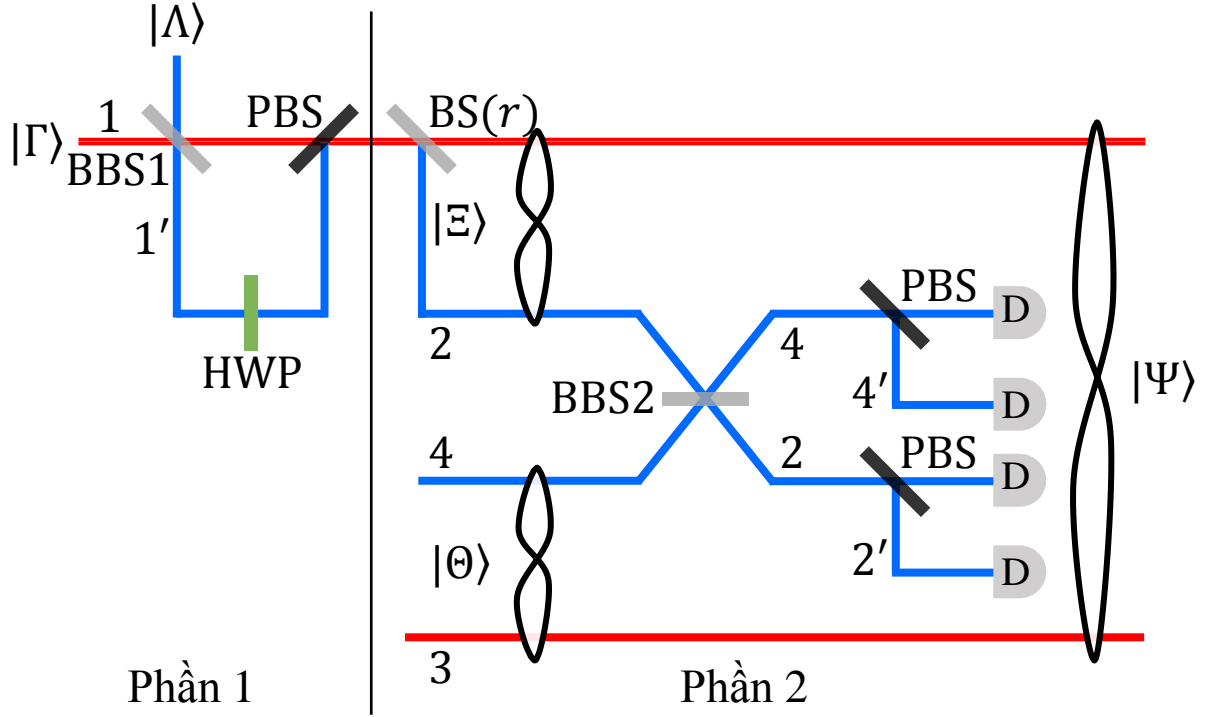
$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha_H\rangle_A |H\rangle_B + |-\alpha_V\rangle_A |V\rangle_B), \quad (2.25)$$



ở đây  $|\pm \alpha_{H/V}\rangle$  là trạng thái kết hợp phân cực. Cụ thể hơn, trạng thái  $|\pm \alpha_H\rangle$  ( $|\pm \alpha_V\rangle$ ) là trạng thái kết hợp có biên độ  $|\pm \alpha\rangle$  trong đó các photon đều có phân cực ngang (dọc) [119]. Trạng thái  $|\Psi\rangle_{AB}$  là sự kết nối giữa hai nút không đồng nhất: một nút sử dụng mã hóa theo biến gián đoạn với qubit có dạng  $x|H\rangle + y|V\rangle$  trong đó  $x^2 + y^2 = 1$ , còn nút kia sử dụng mã hóa theo biến liên tục với qubit có dạng

$$|q\rangle = \mathcal{N}(c|\alpha_H\rangle + d|-\alpha_V\rangle), \quad (2.26)$$

với  $\mathcal{N} = (|c|^2 + |d|^2 + 2\text{Re}(c^*d)e^{-|\alpha|^2})^{-1/2}$  là hệ số chuẩn hóa. Chú ý rằng trạng thái (2.26) là chồng chập của hai trạng thái kết hợp có biên độ trái dấu và phân cực trực giao với nhau. Sự mã hóa thông tin trong trạng thái mới này khác so với các trạng thái thông thường khác, ở đó mà sự chồng chập của các trạng thái kết hợp là không có tính chất phân cực hoặc có cùng sự phân cực, cụ thể là  $\propto c|\alpha\rangle + d|-\alpha\rangle$  [120] hay  $\propto c|\alpha_{H/V}\rangle + d|-\alpha_{H/V}\rangle$  [119]. Loại mã hóa mới trong (2.26) có thể đóng vai trò riêng của nó trong xử lý thông tin lượng tử, vì người ta có thể khai thác cả hai thuộc tính bao gồm biên độ và tính chất phân cực được mã hóa trong các trạng thái liên tục. Trên thực tế, việc sử dụng trạng thái kết hợp có xét đến tính chất phân cực như trên đã được áp dụng trong các giao thức phân phối khóa lượng tử [121–124], được chứng minh là có khả năng chống nhiễu một cách mạnh mẽ. Đáng chú ý, như sẽ được làm sáng tỏ, khai thác các trạng thái kết hợp có xét đến tính chất phân cực thay vì các trạng thái kết hợp không phân cực để tạo ra trạng thái rối lai như trong (2.25) giúp tránh sử dụng các toán tử dịch chuyển và cải thiện các hạn chế nêu trên của các lược đồ trong [99, 101]. Cụ thể, trong điều kiện lý tưởng, sơ đồ của chúng tôi cho tổng xác suất thành công lớn gấp đôi so với trong [99, 101] và độ tin cậy chính xác bằng một. Giao thức của chúng tôi nhằm làm rối trạng thái kết hợp có phân cực với trạng thái phân cực của một photon thành trạng thái rối như trong (2.25). Sơ đồ tạo được minh họa trong Hình 2.1. Trạng thái đầu vào yêu cầu của giao thức bao gồm một trạng thái con mèo Schrödinger chẵn phân cực ngang  $|\Gamma\rangle_1$ , một trạng thái kết hợp phân cực ngang  $|\Lambda\rangle_{1'}$  và một trạng thái rối phân cực giữa hai photon  $|\Theta\rangle_{34}$ , có dạng như sau



Hình 2.1: Chiến thuật để tạo trạng thái rối lai giữa trạng thái kết hợp phân cực và trạng thái phân cực. Chiến thuật này bao gồm hai phần. Phần 1 tạo trạng thái con mèo Schrödinger phân cực trên mode 1 cho bởi công thức (2.27). Phần 2 thực hiện các thao tác và phép đo lên mode 2 và mode 4, tùy thuộc vào kết quả đo, trạng thái của mode 1 và mode 3 sẽ trở thành trạng thái rối lai mong muốn. Ở đây  $|\Gamma\rangle \equiv |\Gamma\rangle_1$  được định nghĩa trong (2.27),  $|\Lambda\rangle \equiv |\Lambda\rangle_{1'}$  được định nghĩa trong (2.28), và  $|\Theta\rangle \equiv |\Theta\rangle_{34}$  định nghĩa trong (2.29) là các trạng thái đầu vào cần thiết,  $|\Xi\rangle \equiv |\Xi\rangle_{12}$  là trạng thái rối liên tục cho bởi (2.32), và  $|\Psi\rangle \equiv |\Psi\rangle_{13}$  là trạng thái cần tạo được đưa ra trong (2.25). BS là viết tắt của bộ tách chùm, BBS là bộ tách chùm cân bằng, PBS là bộ tách phân cực, HWP là một tấm nửa sóng và D là máy đo photon.

$$|\Gamma\rangle_1 = N(\beta) (|\beta_H\rangle + |-\beta_H\rangle)_1, \quad (2.27)$$

$$|\Lambda\rangle_{1'} = |\beta_H\rangle_{1'}, \quad (2.28)$$

$$|\Theta\rangle_{34} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_3|V\rangle_4 + |V\rangle_3|H\rangle_4), \quad (2.29)$$

ở đây  $\beta$  được giả sử là thực và  $N(\beta) = [2(1 + e^{-2|\beta|^2})]^{-1/2}$  là hệ số chuẩn hóa. Trong bước đầu tiên của giao thức, lược đồ của chúng tôi bắt đầu bằng cách đưa  $|\Gamma\rangle_1$  và  $|\Lambda\rangle_{1'}$  tương ứng vào đường dẫn 1 và đường dẫn 1' của BBS đầu tiên (ký hiệu là BBS1) trong các thiết lập trong Hình 2.1. Một HWP được đặt trên đường dẫn 1' phía sau BBS1 và hai mode dọc theo đường dẫn 1 và đường dẫn 1' gặp lại nhau tại một bộ tách phân cực (PBS). Vì HWP chuyển đổi phân cực ngang sang phân cực dọc (và ngược lại) trong khi PBS truyền các photon phân cực theo chiều ngang nhưng

phản xạ các photon phân cực theo chiều dọc, ta dễ dàng kiểm tra đầu ra của bước 1 như sau

$$|\Omega\rangle_1 = N(\beta) (|(\beta\sqrt{2})_H\rangle + |(-\beta\sqrt{2})_V\rangle)_1. \quad (2.30)$$

Ở đây, vì  $\langle\beta_H | -\beta_H\rangle = \langle(\beta\sqrt{2})_H | (-\beta\sqrt{2})_V\rangle = e^{-2|\beta|^2}$  nên hai trạng thái  $|\Gamma\rangle_1$  và  $|\Omega\rangle_1$  có chung hệ số chuẩn hóa  $N(\beta)$  mặc dù chúng có biên độ và tính chất phân cực khác nhau. Bằng cách sử dụng một bộ tách phân cực PBS, một tấm nửa sóng HWP và một bộ dịch pha P, trạng thái  $|\Omega\rangle_1$  có thể chuyển sang  $N(\beta) (|(\beta\sqrt{2})_H\rangle_1 |0\rangle_{1'} + |0\rangle_1 |(\beta\sqrt{2})_H\rangle_{1'})$ , là sự chồng chập vô hạn của các trạng thái NOON rất được quan tâm trong các ứng dụng đo lường tử [125]. Đáng chú ý, trạng thái  $|\Omega\rangle_1$  là một trường hợp đặc biệt của kiểu mã hóa thông tin như trong trạng thái (2.26) với  $c = d = 1$  và  $\alpha = \beta\sqrt{2}$ . Hơn nữa, nó chỉ ra rằng trạng thái qubit kiểu mới chung (2.26) với các số phức bất kỳ  $c$  và  $d$  có thể được chuẩn bị giống như cách đã làm ở phần 1 bên trên với trạng thái đầu vào là  $|\Gamma\rangle_1$  trong công thức (2.27) và  $|\Lambda\rangle_{1'}$  trong công thức (2.28) thay bởi  $\mathcal{N}(c|(\alpha/\sqrt{2})_H\rangle + d|(-\alpha/\sqrt{2})_H\rangle)_1$  và  $|(\alpha/\sqrt{2})_H\rangle_{1'}$  tương ứng.

Trạng thái  $|\Omega\rangle_1$  đi ra từ phần 1 của sơ đồ giao thức sẽ đi vào phần 2, ở đó một bộ tách chùm tổng quát BS( $r, t$ ) có hệ số phản xạ  $r$  (và hệ số truyền qua  $t = 1 - r$ ) được sử dụng. Với quy ước về hoạt động của một BS tổng quát trên một cặp trạng thái kết hợp

$$\text{BS}(r, t)_{AB} |\alpha\rangle_A |\beta\rangle_B = |\alpha\sqrt{t} + \beta\sqrt{r}\rangle_A |\alpha\sqrt{r} - \beta\sqrt{t}\rangle_B, \quad (2.31)$$

trạng thái một mode  $|\Omega\rangle_1$  được chuyển sang trạng thái rời hai mode

$$|\Xi\rangle_{12} = N(\beta) (|\delta_H\rangle_1 |\gamma_H\rangle_2 + |-\delta_V\rangle_1 |-\gamma_V\rangle_2), \quad (2.32)$$

với  $\delta = \beta\sqrt{2t}$  và  $\gamma = \beta\sqrt{2r}$ . Trạng thái  $|\Xi\rangle_{12}$  được đặc trưng không chỉ bởi biên độ trạng thái kết hợp mà còn bởi sự phân cực của chúng và do đó khác với trạng thái rời kết hợp thông thường  $\propto (|\delta\rangle|\gamma\rangle + |-\delta\rangle|-\gamma\rangle)_{12}$  [120]. Một trạng thái rời CV khác cũng được đặc trưng bởi cả biên độ của trạng thái kết hợp và phân cực ở dạng  $(|\text{cat}_{\alpha,H}^+\rangle|\text{cat}_{\alpha,V}^-\rangle - |\text{cat}_{\alpha,H}^-\rangle|\text{cat}_{\alpha,V}^+\rangle)/\sqrt{2}$ , với  $|\text{cat}_{\alpha,H}^\pm\rangle$  ( $|\text{cat}_{\alpha,V}^\pm\rangle$ ) là trạng thái con mèo Schrödinger chẵn/lẻ ngang (dọc) với biên độ  $\alpha$ , đã được xem xét trong [119].

Đến thời điểm này, trạng thái đầu vào  $|\Theta\rangle_{34}$  của công thức (2.29) vẫn chưa được sử dụng đến. Nhắc lại biểu diễn trạng thái Fock của một

trạng thái kết hợp với biên độ thực  $x$ ,  $|x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)|n\rangle$  với  $f_n^2(x) = e^{-x^2} x^{2n}/n!$ . Trạng thái tích  $|\Xi\rangle_{12}|\Theta\rangle_{34} \equiv |\Sigma\rangle_{1234}$  nơi bắt đầu phần hai của sơ đồ giao thức trên Hình 2.1 có thể được viết lại và ký hiệu như sau  $|\Sigma\rangle_{1234} \rightarrow |\Sigma\rangle_{1324} \equiv |\Sigma\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\Sigma\rangle &= \frac{N(\beta)}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [f_n(\gamma)|\mathbf{1}\rangle_{13}|n_H\rangle_2|V\rangle_4 \\ &\quad + f_n(\gamma)|\mathbf{2}\rangle_{13}|n_H\rangle_2|H\rangle_4 \\ &\quad + f_n(-\gamma)|\mathbf{3}\rangle_{13}|n_V\rangle_2|V\rangle_4 \\ &\quad + f_n(-\gamma)|\mathbf{4}\rangle_{13}|n_V\rangle_2|H\rangle_4]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Để cho thuận tiện chúng ta đặt  $|\mathbf{1}\rangle_{13} = |\delta_H\rangle_1|H\rangle_3$ ,  $|\mathbf{2}\rangle_{13} = |\delta_H\rangle_1|V\rangle_3$ ,  $|\mathbf{3}\rangle_{13} = |-\delta_V\rangle_1|H\rangle_3$  và  $|\mathbf{4}\rangle_{13} = |-\delta_V\rangle_1|V\rangle_3$  với  $|n_H\rangle$  ( $|n_V\rangle$ ) là trạng thái Fock bao gồm  $n$  photon phân cực ngang (dọc). Trong khi các mode 1 và 3 của trạng thái  $|\Sigma\rangle$  được giữ nguyên, các mode 2 và 4 được cho giao thoa với nhau qua một BBS (ký hiệu là BBS2) trong Hình 2.1. Vì

$$\text{BS}(r, t)_{AB}|j\rangle_A|k\rangle_B = \sum_{p=0}^j \sum_{q=0}^k B_{p,q}^{j,k}(r, t)|j-p+q\rangle_A|k-q+p\rangle_B, \quad (2.34)$$

với

$$\begin{aligned} B_{p,q}^{j,k}(r, t) &= (C_j^p C_k^q C_{k-q+p}^p C_{j-p+q}^q t^{j+k-p-q} r^{p+q})^{1/2} \\ &\quad \times (-1)^{k-q}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sau BBS2 trạng thái  $|\Sigma\rangle_{1324} \equiv |\Sigma\rangle$  trong công thức (2.33) trở thành  $|\Sigma'\rangle_{1324} \equiv |\Sigma'\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\Sigma'\rangle &= \frac{N(\beta)f_1(\gamma)}{2} \left[ \frac{(|\mathbf{1}\rangle + |\mathbf{4}\rangle)_{13}}{\sqrt{2}} (|1_V\rangle_2|1_H\rangle_4 - |1_H\rangle_2|1_V\rangle_4) \right. \\ &\quad + \frac{(|\mathbf{1}\rangle - |\mathbf{4}\rangle)_{13}}{\sqrt{2}} (|1_H\rangle_2|1_V\rangle_2 - |1_H\rangle_4|1_V\rangle_4) \\ &\quad + |\mathbf{2}\rangle_{13} (|2_H\rangle_2 - |2_H\rangle_4) - |\mathbf{3}\rangle_{13} (|2_V\rangle_2 - |2_V\rangle_4) \left. \right] \\ &\quad + \text{CSHK}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Trong công thức (2.36) chỉ các số hạng với  $n = 1$  được viết tường minh, trong khi với  $n \neq 1$  gộp thành “CSHK” (“CSHK” là viết tắt cho “các số hạng khác”). Có thể thấy rằng tất cả các thành phần được gộp trong “CSHK”

đều không đem lại sự thành công của giao thức. Tiếp theo, để đạt được trạng thái mong muốn  $|\Psi\rangle_{13}$  của công thức (2.25) chúng ta đo các mode 2 và 4 để tìm ra không chỉ số photon mà còn cả sự phân cực của chúng. Chúng ta có thể nhìn thấy bằng trực giác từ công thức (2.36) với năm tình huống có thể xảy ra như sau.

Tình huống 0: nếu kết quả đo cho thấy mỗi trong hai mode, mode 2 và mode 4, đều có 2 photon với cùng phân cực thì trạng thái của mode 1 và mode 3 trở thành trạng thái rời  $|\mathbf{2}\rangle_{13} \equiv |\delta_H\rangle_1|V\rangle_3$  hoặc  $|\mathbf{3}\rangle_{13} \equiv |-\delta_V\rangle_1|H\rangle_4$ , điều này cho thấy sự thất bại trong quá trình tạo trạng thái rối lai mong muốn.

Tình huống 1: nếu kết quả đo cho thấy mode 2 có một photon phân cực dọc và mode 4 có một photon phân cực ngang thì các mode 1 và 3 trong trạng thái  $|\Sigma'\rangle$  sẽ suy sụp về trạng thái

$$\frac{(|\mathbf{1}\rangle + |\mathbf{4}\rangle)_{13}}{\sqrt{2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\delta_H\rangle_1|H\rangle_3 + |-\delta_V\rangle_1|V\rangle_3). \quad (2.37)$$

Trạng thái này chính là trạng thái mong muốn  $|\Psi\rangle_{13}$  trong công thức (2.25) với biên độ

$$\alpha = \delta \equiv \beta\sqrt{2}t. \quad (2.38)$$

Tình huống 2: nếu kết quả đo cho thấy mode 2 có một photon phân cực ngang và mode 4 có một photon phân cực dọc thì các mode 1 và 3 trong trạng thái  $|\Sigma'\rangle$  sẽ trở thành trạng thái như trong (2.37).

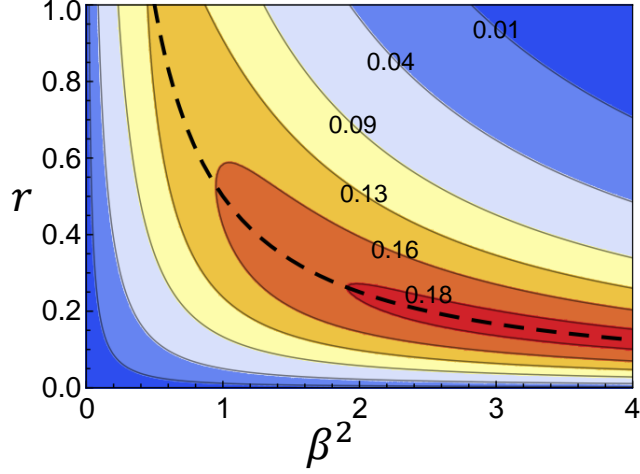
Tình huống 3: nếu kết quả đo cho thấy mode 2 có hai photon với tính chất phân cực khác nhau thì trạng thái của mode 1 và 3 sẽ thành

$$\frac{(|\mathbf{1}\rangle - |\mathbf{4}\rangle)_{13}}{\sqrt{2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\delta_H\rangle_1|H\rangle_3 - |-\delta_V\rangle_1|V\rangle_3). \quad (2.39)$$

Đây là tình huống thành công bởi trạng thái này có thể được đưa về trạng thái mong muốn bằng các phép biến đổi unita.

Tình huống 4: nếu kết quả đo cho thấy mode 4 có hai photon với tính chất phân cực khác nhau thì trạng thái của mode 1 và 3 sẽ thành giống như (2.39).

Để quan sát cả số photon và sự phân cực của các mode, hai PBS và bốn máy đo photon được bố trí phía sau BBS2 như đã thấy trong phần 2 của sơ đồ thiết lập Hình 2.1. Sự thành công trong tình huống 1 liên quan tới



Hình 2.2: Tổng xác suất thành công của giao thức là  $P_T = 4P$ , với  $P$  cho bởi (2.44) là hàm của bình phương biên độ  $\beta^2$  và hệ số phản xạ  $r$ . Đường đứt nét thể hiện tổng xác suất thành công được tối ưu hóa khi hệ số phản xạ  $r^{\text{peak}} = 1/(2\beta)$  với  $\beta^2 > 1/2$ .

kết quả của phép đo hình chiếu cho phép bởi toán tử

$$\Pi_1 = |0\rangle_2\langle 0| \otimes |1\rangle_{2'}\langle 1| \otimes |1\rangle_4\langle 1| \otimes |0\rangle_{4'}\langle 0|, \quad (2.40)$$

và xảy ra khi mỗi máy đo photon  $D_{2'}$  và  $D_4$  phát hiện 1 photon. Tương tự cho các tình huống 2, 3 và 4 với các toán tử đo tương ứng sau

$$\Pi_2 = |1\rangle_2\langle 1| \otimes |0\rangle_{2'}\langle 0| \otimes |0\rangle_4\langle 0| \otimes |1\rangle_{4'}\langle 1|, \quad (2.41)$$

$$\Pi_3 = |1\rangle_2\langle 1| \otimes |1\rangle_{2'}\langle 1| \otimes |0\rangle_4\langle 0| \otimes |0\rangle_{4'}\langle 0|, \quad (2.42)$$

$$\Pi_4 = |0\rangle_2\langle 0| \otimes |0\rangle_{2'}\langle 0| \otimes |1\rangle_4\langle 1| \otimes |1\rangle_{4'}\langle 1|. \quad (2.43)$$

Rất đơn giản để kiểm tra rằng sự thất bại của Tình huống 0 là có lý vì không thể sử dụng bất kỳ toán tử unita nào để đưa các trạng thái rời  $|\mathbf{2}\rangle_{13}$  và  $|\mathbf{3}\rangle_{13}$  về trạng thái rời mong muốn. Mỗi kết quả đo thành công trong các tình huống 1, 2, 3 và 4 xảy ra với xác suất như nhau

$$P = \langle \Sigma' | \Pi_{1(2,3,4)} | \Sigma' \rangle = \frac{N^2(\beta) f_1^2(\gamma)}{4} = \frac{r\beta^2 e^{-2r\beta^2}}{4(1 + e^{-2\beta^2})}. \quad (2.44)$$

Do đó tổng xác suất thành công của giao thức do chúng tôi đề xuất sẽ là  $P_T = 4P$ , xác suất này gấp đôi xác suất trong các đề xuất của [99, 101], ở đó trạng thái kết hợp được xem xét hoặc không phân cực hoặc cùng phân cực. Tổng xác suất thành công  $P_T = 4P$ , với  $P$  cho bởi (2.44), được vẽ trên Hình 2.2 là một hàm của  $\beta^2$  và  $r$ . Cho  $\beta^2 \leq 0.5$ , xác suất  $P_T$  tăng đơn điệu với sự gia tăng  $r$ . Với  $\beta^2 > 0.5$ , khi  $r\beta^2 \exp(-2r\beta^2)$  chạm

đỉnh tại  $2r\beta^2 = 1$ , xác suất  $P_T$  đạt cực đại tại  $r = r^{\text{peak}} = 1/(2\beta^2)$  được hiển thị dưới dạng đường đứt nét (màu đen) trong Hình 2.2. Điều này mang lại  $P_T^{\text{peak}} = 1/[2e(1 + e^{-2\beta^2})]$  tiệm cận tới  $1/(2e)$  khi  $\beta^2$  lớn. Đặc biệt, khi  $\beta^2 = \{2, 3, 4, \dots\}$ , ứng của  $r^{\text{peak}} = \{1/4, 1/6, 1/8, \dots\}$  ( $t^{\text{peak}} = \{3/4, 5/6, 7/8, \dots\}$ ), trạng thái rối lai mong muốn  $|\Psi\rangle_{13}$  với biên độ  $\alpha = \{1.732, 2.236, 2.646, \dots\}$  được tạo ra với tổng xác suất thành công tối ưu  $P_T^{\text{peak}} = \{18.063\%, 18.348\%, 18.388\%, \dots\}$ . Trước khi xem xét các điều kiện không hoàn hảo có thể gặp phải trong thực tế, chúng tôi lưu ý rằng các phân cực của đầu vào trạng thái (2.27) và (2.28) cũng có thể được chọn theo chiều dọc. Trong trường hợp này, lược đồ của chúng tôi sẽ tạo ra một trạng thái có dạng (2.25) nhưng với sự phân cực của hai thành phần trạng thái kết hợp được trao đổi cho nhau. Bí quyết là cả hai trạng thái đầu vào (2.27) và (2.28) phải có cùng phân cực (tức là chúng phải được phân cực theo cùng chiều ngang hoặc chiều dọc).

Để có thể thực hiện đề xuất của chúng tôi, cần chú ý đến một số vấn đề thực tế. Trước hết, chất lượng của các trạng thái đầu vào có thể bị suy giảm tại thời điểm sử dụng chúng do hiệu ứng mất liên kết gây ra bởi tương tác với các môi trường xung quanh. Thứ hai, việc có được các trạng thái đầu vào “chính hãng” thường rất khó và do đó có thể thay thế các trạng thái đó bằng các trạng thái gần đúng khác, là các trạng thái có thể được tạo ra một cách dễ dàng hơn trên thực tế. Thứ ba, các thiết bị quang học được sử dụng trong lược đồ của chúng tôi, mặc dù có sẵn trong phòng thí nghiệm, vẫn có thể mắc phải một số điểm không hoàn hảo nhất định, ví dụ: BBS có thể hơi không cân bằng hoặc máy đo photon có thể không hiệu quả 100%. Trong các tiểu mục sau, chúng tôi lần lượt tính đến các yếu tố thực tế được đề cập ở trên để đánh giá ảnh hưởng của chúng đến xác suất thành công của kế hoạch và đến độ tin cậy của trạng thái thu được so với trạng thái mong muốn ở điều kiện lý tưởng.

### 2.1.1 Ảnh hưởng của nhiễu đối với các trạng thái đầu vào

Xét sự mất photon do tương tác với môi trường xung quang được mô tả bởi phương trình Chủ (Master equation) [126]

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \hat{\mathcal{D}}\rho, \quad (2.45)$$

ở đây  $\rho$  là toán tử mật độ của toàn bộ trạng thái đầu vào,  $\tau$  là ký hiệu thời gian và  $\hat{D}$  là toán tử Lindblad tác động lên  $\rho$  như sau  $\hat{D}\rho = (\kappa/2) \sum_j (2a_j \rho a_j^\dagger - \rho a_j^\dagger a_j - a_j^\dagger a_j \rho)$ . Chỉ số  $j$  biểu diễn tất cả các mode có trong  $\rho$ ,  $a_j$  ( $a_j^\dagger$ ) là toán tử hủy (sinh) của mode  $j$ , và  $\kappa$  là tốc độ phân rã mà để đơn giản hơn đã được giả định là giống nhau cho tất cả các mode. Lúc đầu, tại  $\tau = 0$  toán tử mật độ ban đầu  $\rho$  là

$$\rho(0) = |\Gamma\rangle_1 \langle \Gamma| \otimes |\Lambda\rangle_{1'} \langle \Lambda| \otimes |\Theta\rangle_{34} \langle \Theta|, \quad (2.46)$$

ở đây  $|\Gamma\rangle_1$ ,  $|\Lambda\rangle_{1'}$ , và  $|\Theta\rangle_{34}$  được định nghĩa lần lượt trong (2.27) - (2.29). Trước khi bắt đầu quá trình tạo rối lai, ba trạng thái đầu vào được cho là đã tương tác với môi trường của chúng trong một thời gian  $\tau$  và đã trải qua quá trình mất photon. Toán tử mật độ đầu vào thực tế  $\rho$  do đó phụ thuộc vào thời gian tương tác  $\tau$  và tốc độ phân rã  $\kappa$ . Một cách hình thức, toán tử mật độ đầu vào phụ thuộc thời gian  $\rho(\tau)$  có thể viết dưới dạng  $\rho(\tau) = e^{\hat{D}\tau} \rho(0)$  và sử dụng các kết quả trong [53, 113] ta có một cách tường minh

$$\rho(\tau) = \rho_1(\tau) \otimes \rho_{1'}(\tau) \otimes \rho_{34}(\tau), \quad (2.47)$$

ở đây

$$\begin{aligned} \rho_1(\tau) = N^2(\beta) [ & |\lambda_H\rangle_1 \langle \lambda_H| + C_1 |\lambda_H\rangle_1 \langle -\lambda_H| \\ & + C_1 |-\lambda_H\rangle_1 \langle \lambda_H| + |-\lambda_H\rangle_1 \langle -\lambda_H| ], \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\rho_{1'}(\tau) = |\lambda_H\rangle_{1'} \langle \lambda_H|, \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \rho_{34}(\tau) = \frac{1}{2} [ & \rho_{3H}(\tau) \otimes \rho_{4V}(\tau) + \rho_{3V}(\tau) \otimes \rho_{4H}(\tau) \\ & + \nu^2 (|H\rangle_3 \langle V| \otimes |V\rangle_4 \langle H| + |V\rangle_3 \langle H| \otimes |H\rangle_4 \langle V|) ], \end{aligned} \quad (2.50)$$

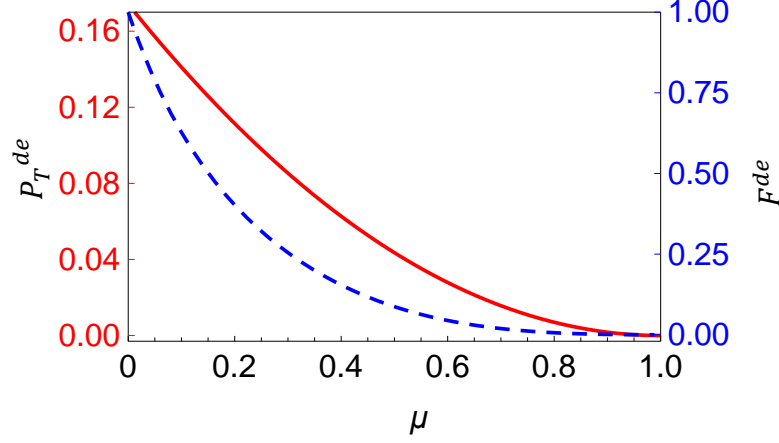
với  $\lambda = \beta\nu$ ,  $C_1 = \langle -\beta|\beta\rangle^{1-\nu^2}$ ,  $\nu = e^{-\kappa\tau/2}$  và  $\rho_{jK}(\tau) = \nu^2 |K\rangle_j \langle K| + (1 - \nu^2) |0\rangle_j \langle 0|$  cho  $j = 3, 4$  và  $K = H, V$ .

Lập lại các tính toán trong phần trên với các trạng thái đầu vào như trong (2.48) - (2.50) dẫn đến tổng xác suất thành công và độ tin cậy dưới tác động của môi trường là

$$P_T^{\text{de}} = \nu^2 P_T, \quad (2.51)$$

$$F^{\text{de}} = \frac{1}{2} \nu^2 |\langle \alpha | \alpha \nu \rangle|^2 (1 + C_1), \quad (2.52)$$





Hình 2.3: Tổng xác suất thành công  $P_T^{\text{de}}$  (đường liền nét) và độ tin cậy  $F^{\text{de}}$  (đường đứt nét) cho bởi các công thức (2.51) và (2.52) tương ứng là hàm của cường độ suy giảm liên kết  $\mu$  định nghĩa trong (2.53). Ở đây, chúng tôi chọn biên độ đầu vào  $\beta = 1.2$  tương ứng với hệ số phản xạ tối ưu  $r^{\text{peak}} \approx 0.347$ .

ở đây  $P_T$  được định nghĩa trong công thức (2.44) và  $\alpha$  trong công thức (2.38). Có thể kiểm tra ngay được là khi  $\tau = 0$  ( $\nu = C_1 = 1$ ) sẽ cho  $P_T^{\text{de}} = P_T$  và  $F^{\text{de}} = 1$ , chính là kết quả thu được trong phần trên khi bỏ qua sự ảnh hưởng của nhiễu. Điều này hiển nhiên đúng, vì  $\tau = 0$  có nghĩa là các trạng thái đầu vào đã không tương tác với môi trường của chúng (tức là không có sự suy giảm). Định nghĩa một đại lượng mới  $\mu$  sau

$$\mu = 1 - \nu \equiv 1 - e^{-\kappa\tau/2} \in [0, 1]. \quad (2.53)$$

Đại lượng này thể hiện cho độ mạnh của sự suy giảm:  $\mu = 0$  khi  $\tau = 0$  và  $\mu = 1$  khi  $\tau = \infty$ . Trên Hình 2.3 chúng tôi vẽ tổng xác suất thành công  $P_T^{\text{de}}$  (đường liền nét) và độ tin cậy  $F^{\text{de}}$  (đường đứt nét) phụ thuộc vào độ mạnh của sự suy giảm  $\mu$ . Ta thấy  $P_T^{\text{de}}$  và  $F^{\text{de}}$  giảm mạnh với sự gia tăng của  $\mu$ . Khi  $\mu \geq 0.8$ , cả  $P_T^{\text{de}}$  và  $F^{\text{de}}$  gần như triệt tiêu. Điều này là dễ hiểu, vì trong trường hợp trạng thái đầu vào này, trạng thái trong (2.48)-(2.50) ngày càng bị suy giảm nhiều hơn (thậm chí trở nên gần như hoàn toàn chẵn không khi  $\mu \rightarrow 1$ ), do đó làm cho hiệu suất kém hơn. Tuy nhiên có thể thấy rằng  $P_T^{\text{de}}$  dường như ít nhạy cảm với  $\mu$  hơn  $F^{\text{de}}$ . Cụ thể, khi  $\mu$  tăng từ 0 tới 0.2,  $P_T^{\text{de}}$  giảm từ 0.16 tới khoảng 0.11, mất khoảng 31% giá trị ban đầu của nó, trong khi đó  $F^{\text{de}}$  được ghi nhận giảm tới 60% từ 1 tới khoảng 0.4. Tổng xác suất thành công và độ tin cậy có thể chấp nhận được khi sự suy giảm đủ nhỏ tại  $\mu = 0.01$  ta có  $P_T^{\text{de}} \approx 0.17$  và  $F^{\text{de}} \approx 0.95$ .

### 2.1.2 Trạng thái đầu vào thực tế

Chúng tôi nhấn mạnh rằng sơ đồ của chúng tôi không chỉ hoạt động cho đầu vào là trạng thái con mèo Schrödinger chẵn  $|\Gamma\rangle_1$  trong công thức (2.27) mà nó cũng làm việc với trường hợp trạng thái con mèo Schrödinger lẻ. Việc tạo chính xác những trạng thái con mèo Schrödinger này nói chung là khó; trong hầu hết các thí nghiệm thực tế, chúng được thay thế bằng các trạng thái nén. Cụ thể, đối với các biên độ nhỏ, trạng thái con mèo Schrödinger chẵn và lẻ có thể tạo ra từ trạng thái chân không nén và trạng thái photon đơn nén một cách tương ứng. Trong khi trạng thái chân không nén có thể tạo ra một cách đơn giản và cho xác suất cao bằng quá trình nén chân không [127] thì trạng thái photon đơn nén lại cho xác suất thấp hơn vì cần áp dụng kỹ thuật bớt một photon [128, 129]. Vì lẽ đó, trong các thí nghiệm người ta hay sử dụng trạng thái con mèo Schrödinger chẵn gần đúng (tức là trạng thái chân không nén) hơn trạng thái con mèo Schrödinger lẻ gần đúng (tức là trạng thái một photon nén). Trong cơ sở trạng thái Fock, trạng thái nén chân không  $|sv\rangle$  và trạng thái nén một photon  $|ss\rangle$  lần lượt có dạng

$$|sv\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tanh s)^n \sqrt{(2n)!}}{(\cosh s)^{1/2} 2^n n!} |2n\rangle, \quad (2.54)$$

$$|ss\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tanh s)^n \sqrt{(2n+1)!}}{(\cosh s)^{3/2} 2^n n!} |2n+1\rangle, \quad (2.55)$$

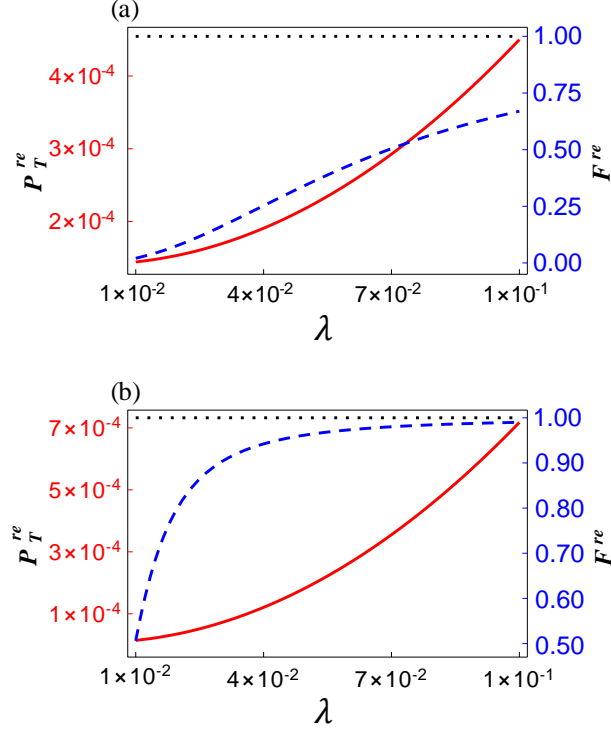
ở đây trong cả hai công thức trên  $s$  là thông số nén và được giả thiết là số thực. Độ tin cậy giữa trạng thái nén chân không  $|sv\rangle$  và trạng thái con mèo Schrödinger chẵn có biên độ  $\beta$  được tính bởi công thức [50]

$$F^{\text{sv-even}} = \frac{2e^{-\beta^2(\tanh s+1)}}{(1+e^{-2\beta^2})\cosh s}, \quad (2.56)$$

trong khi đó độ tin cậy giữa trạng thái nén một photon  $|ss\rangle$  và trạng thái con mèo Schrödinger lẻ có biên độ  $\beta$  tính bởi công thức [130]

$$F^{\text{ss-odd}} = \frac{2\beta^2 e^{\beta^2(\tanh s-1)}}{(1-e^{-2\beta^2})(\cosh s)^3}. \quad (2.57)$$

Cố định  $\beta$ , có thể tìm được  $s$  để tối ưu hóa  $F^{\text{sv-even}}$  và  $F^{\text{ss-odd}}$  tương ứng là khi  $s_{\text{even}}^{\text{opt}} = -\text{arcsinh}(2\beta^2)/2$  và  $s_{\text{odd}}^{\text{opt}} = \text{arcsinh}(2\beta^2/3)/2$  một cách tương



Hình 2.4: Tổng xác suất thành công  $P_T^{\text{re}}$  (đường liền nét) và độ tin cậy  $F^{\text{re}}$  (đường đứt nét) phụ thuộc vào cường độ SPDC loại II  $\lambda$  khi sử dụng (a) trạng thái nén chân không trong (2.54) với  $s = -0.43358$  như một sự gần đúng của trạng thái con mèo Schrödinger chắn biên độ 0.7 và (b) trạng thái nén một photon trong (2.55) với  $s = 0.16056$  như một sự gần đúng của trạng thái con mèo Schrödinger lẻ biên độ 0.7. Trong cả hai trường hợp, đường gạch ngang thể hiện độ tin cậy là tuyệt đối (nghĩa là khi trạng thái đầu vào là hoàn hảo) và hệ số phản xạ  $r$  được chọn là 0.1.

ứng. Với các giá trị nhỏ của  $\beta$  ( $\leq 1$ ) và các giá trị tối ưu tương ứng của  $s$ , độ tin cậy  $F^{\text{sv-even}}$  và  $F^{\text{ss-odd}}$  có thể rất cao. Ví dụ, với  $\beta = 0.7$  ta có  $F^{\text{sv-even}} \approx 0.9934$  khi  $s = -0.43358$  và  $F^{\text{ss-odd}} \approx 0.9998$  khi  $s = 0.16056$ .

Bên cạnh các trạng thái con mèo Schrödinger, trạng thái rối hai photon  $|\Theta\rangle_{34}$  trong công thức (2.29) cũng là một trạng thái đầu vào cần thiết trong sơ đồ của chúng tôi. Trong thực tế, trạng thái  $|\Theta\rangle_{34}$  thường được tạo ra thông qua quá trình SPDC kiểu II, trong đó một xung laser bơm một tinh thể barium borat (BBO) để phát ra một cặp photon rối với nhau ở bậc tự do phân cực [131]. Trạng thái đầu ra  $|\text{SPDC}\rangle$  của quy trình SPDC như vậy luôn kèm theo một thành phần chân không lớn và được xác định bởi [114]

$$|\text{SPDC}\rangle_{34} \simeq \sqrt{1 - \lambda^2}|0\rangle_3|0\rangle_4 + \lambda|\Theta\rangle_{34} + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (2.58)$$

trong đó  $\lambda$  là cường độ tương tác SPDC (không thứ nguyên) thường ở khoảng  $10^{-2}$ .

Trong tiểu mục này, chúng tôi phân tích hiệu suất của lược đồ khi sử dụng trạng thái nén chân không  $|sv\rangle$  hoặc trạng thái nén một photon  $|ss\rangle$  trong các công thức (2.54) và (2.55) như một trạng thái đầu vào thực tế khả dĩ của mode 1 và trạng thái đầu ra  $|\text{SPDC}\rangle_{34}$  trong (2.58) như một trạng thái đầu vào thực tế khả dĩ của hai mode 3 và 4. Kết quả của việc sử dụng đầu vào thực tế như vậy, chúng tôi đã dẫn ra được biểu thức của tổng xác suất thành công  $P_T^{\text{re}}$  và độ tin cậy  $F^{\text{re}}$  như sau

$$P_T^{\text{re}} = (1 - \lambda^2)P_{T,0}^{\text{re}} + \lambda^2 P_{T,\Theta}^{\text{re}}, \quad (2.59)$$

$$F^{\text{re}} = \frac{(1 - \lambda^2)P_{T,0}^{\text{re}}F_0^{\text{re}} + \lambda^2 P_{T,\Theta}^{\text{re}}F_\Theta^{\text{re}}}{P_T^{\text{re}}} = \frac{\lambda^2 P_{T,\Theta}^{\text{re}}}{P_T^{\text{re}}} F_\Theta^{\text{re}}, \quad (2.60)$$

với  $P_{T,0}^{\text{re}}$  và  $F_0^{\text{re}}$  ( $P_{T,\Theta}^{\text{re}}$  và  $F_\Theta^{\text{re}}$ ) là tổng xác suất thành công và độ tin cậy khi trạng thái đầu vào của mode 3 và 4 chỉ là trạng thái chân không thuần túy (cặp rối photon phân cực  $|\Theta\rangle_{34}$ ). Biểu diễn tổng xác suất thành công  $P_T^{\text{re}}$  trong công thức (2.59) được hiểu là tổng của  $P_{T,0}^{\text{re}}$  và  $P_{T,\Theta}^{\text{re}}$ . Đối với độ tin cậy  $F^{\text{re}}$  trong công thức (2.60), chúng ta thấy chỉ có sự đóng góp từ  $F_\Theta^{\text{re}}$ . Điều này là do nếu trạng thái đầu vào ban đầu của các mode 3 và 4 là chân không, mode 3 sẽ vẫn là chân không, làm cho trạng thái lai không trùng lặp với trạng thái lý tưởng  $|\Psi\rangle_{13}$  trong (2.25) ở đó mode 3 là trạng thái một photon xác định. Nói một cách khác, chúng ta có  $F_0^{\text{re}} = 0$ , giải thích cho sự biến mất của sự đóng góp do  $F_0^{\text{re}}$  trong dấu “=” thứ 2 của công thức (2.60).

Một số chi tiết cần thiết cho các tính số của tổng xác suất thành công thực tế  $P_T^{\text{re}}$  và độ tin cậy thực tế  $F^{\text{re}}$  được trình bày trong Phụ lục A. Trong Hình 2.4 chúng tôi vẽ  $P_T^{\text{re}}$  (đường liền nét) và  $F^{\text{re}}$  (đường đứt nét) là hàm của  $\lambda$  cho hai trường hợp: (a) trạng thái con mèo Schrödinger ở mode 1 được gần đúng bằng trạng thái nén chân không và (b) trạng thái con mèo Schrödinger ở mode 1 được gần đúng bằng trạng thái nén một photon. Nói chung, khi xem xét các yếu tố đầu vào thực tế, cả hai  $P_T^{\text{re}}$  và  $F^{\text{re}}$  đều giảm so với trường hợp lý tưởng với các trạng thái đầu vào chính thống. Đặc biệt, tổng xác suất thành công  $P_T^{\text{re}}$  trong cả hai trường hợp có bậc  $10^{-4}$ , giảm ba bậc so với xác suất trong trường hợp lý tưởng (có bậc  $10^{-1}$ ). Độ tin cậy  $F^{\text{re}}$  trong cả hai trường hợp đều nhỏ hơn 1; ví dụ, tại  $\lambda = 4 \times 10^{-2}$  chúng ta có  $F^{\text{re}} \approx 0.25$  trong trường hợp (a) và  $F^{\text{re}} \approx 0.94$  trong trường hợp (b). So sánh giữa hai trường hợp (a) và (b) ở giá trị cao nhất của  $\lambda$

chúng tôi thấy sự vượt trội rõ ràng của trạng thái nén một photon so với trạng thái nén chân không về tổng xác suất thành công và đặc biệt là độ tin cậy: tại  $\lambda = 8 \times 10^{-2}$  trong trường hợp (a)  $P_T^{\text{re}} \approx 3.3 \times 10^{-4}$  và  $F^{\text{re}} \approx 0.57$ , trong khi trong trường hợp (b)  $P_T^{\text{re}} \approx 4.6 \times 10^{-4}$  và  $F^{\text{re}} \approx 0.98$ . Theo tính số, chúng ta tìm thấy  $P_{T,0}^{\text{re}} \approx 1.4 \times 10^{-4}$ ,  $P_{T,\Theta}^{\text{re}} \approx 3.1 \times 10^{-2}$  và  $F_\Theta^{\text{re}} \approx 0.972$  cho trường hợp nén chân không trong trường hợp (a) và  $P_{T,0}^{\text{re}} \approx 6.9 \times 10^{-6}$ ,  $P_{T,\Theta}^{\text{re}} \approx 7.1 \times 10^{-2}$  và  $F_\Theta^{\text{re}} \approx 0.999$  cho trường hợp nén một photon trong trường hợp (b). Do đó, khi cho  $\lambda \geq 7 \times 10^{-2}$  tiền tố  $\lambda^2 P_{T,\Theta}^{\text{re}}/P_T^{\text{re}}$  trong công thức (2.60) trong trường hợp nén chân không dao động từ 0.52 đến 0.69, nhưng cho trường hợp nén một photon thì nó rất gần đến 1 (0.98 tới 0.99), điều này làm cho độ tin cậy trung bình  $F^{\text{re}}$  gần bằng  $F_\Theta^{\text{re}}$ .

### 2.1.3 Sự không hoàn hảo của bộ tách chùm cân bằng

Sơ đồ tạo trạng thái rối lai như trên Hình 2.1 sử dụng hai bộ tách chùm cân bằng BBS, ba bộ tách phân cực PBS và một tấm nửa sóng HWP. Chúng tôi giả định rằng các PBS và HWP là hoàn hảo nhưng hai BBS có thể hơi lệch cân bằng. Độ lệch cân bằng của các bộ tách chùm được xác định bởi các tham số  $\epsilon_k$  với  $k = 1, 2$  và liên hệ với hệ số phản xạ  $r_k$  và hệ số truyền qua  $t_k$  như sau

$$\epsilon_k = 1/2 - r_k = t_k - 1/2. \quad (2.61)$$

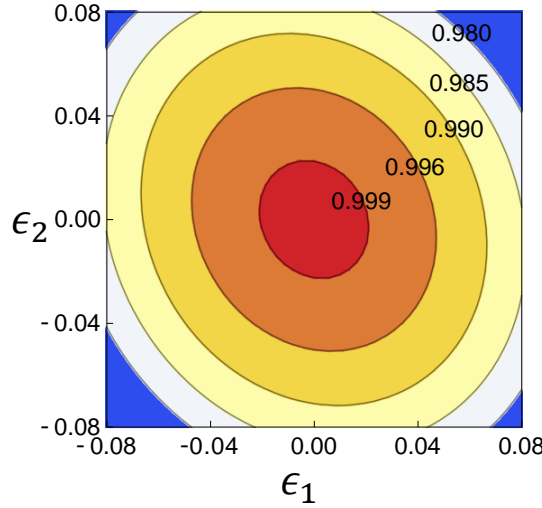
Ta sẽ xét trường hợp  $|\epsilon_k| \ll 1$  tương ứng với sự mất cân bằng rất ít.

Do có sự mất cân bằng như trên của hai bộ tách chùm, kết quả của bốn phép đo được thực hiện bởi các toán tử  $\{\Pi_j; j = 1, 2, 3, 4\}$ , định nghĩa tương ứng bởi các công thức (2.40) - (2.43), sẽ khiến xác suất thành công và độ tin cậy trong quá trình tạo trạng thái rối lai trở thành  $P_j^{\text{im}}$  và  $F_j^{\text{im}}$ . Các biểu thức giải tích của  $P_j^{\text{im}}$  và  $F_j^{\text{im}}$  được viết trong phụ lục B. Nói chung,  $P_j^{\text{im}}$  và  $F_j^{\text{im}}$  không chỉ phụ thuộc vào  $\epsilon_1$  và  $\epsilon_2$  mà còn phụ thuộc vào  $j$ . Ví dụ, liên quan đến phép đo  $\Pi_1$  chúng ta thấy rằng

$$P_1^{\text{im}} = N^2(\beta) \left[ (r_2^2 + t_2^2)r\beta^2 e^{-2r\beta^2} + (r_2^2 - t_2^2)\gamma_1\gamma_2 e^{-2\beta^2} \right] \quad (2.62)$$

và

$$F_1^{\text{im}} = \frac{N^2(\beta)e^{-2r\beta^2}}{4P_1^{\text{im}}} [\gamma_2 f_0(\delta_1)(r_2 \langle \delta | \delta_2 \rangle - t_2 \langle -\delta | \delta_2 \rangle) + \gamma_1 f_0(\delta_2) \langle \delta | \delta_1 \rangle]^2, \quad (2.63)$$



Hình 2.5: Độ tin cậy trung bình  $\bar{F}^{\text{im}}$  được định nghĩa trong (2.65) là hàm của các tham số không hoàn hảo  $\epsilon_1$  và  $\epsilon_2$  của hai BBS. Trên hình vẽ,  $\beta$  và  $r$  được chọn như trong Hình 2.3.

ở đây  $\delta$  được định nghĩa trong công thức (2.32) và  $f_n(x)$  được định nghĩa trong (2.33), trong khi  $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1$  và  $\delta_2$  là các hằng số phụ thuộc vào  $\beta, r, t$  và  $\epsilon_{1,2}$  (xem các công thức tương ứng trong Phụ lục B). Đối với  $P_{2,3,4}^{\text{im}}$  và  $F_{2,3,4}^{\text{im}}$ , biểu thức của chúng phụ thuộc vào  $j$  và được đưa ra một cách tường minh trong Phụ lục B. Tuy nhiên, chúng tôi thấy rằng, tổng xác suất thành công  $P_T^{\text{im}}$  giống như trong trường hợp lý tưởng. Tức là,

$$P_T^{\text{im}} = \sum_{j=1}^4 P_j^{\text{im}} = P_T, \quad (2.64)$$

ở đây  $P_T = 4P$  với  $P$  cho trong công thức (2.44). Điều đó chỉ ra rằng tổng xác suất thành công trong giao thức của chúng tôi không phụ thuộc vào sự lệch cân bằng của các bộ tách chùm nếu độ lệch là nhỏ với  $|\epsilon_k| \ll 1$ . Để phân tích độ tin cậy, chúng tôi định nghĩa độ tin cậy trung bình như sau

$$\bar{F}^{\text{im}} = \frac{\sum_{j=1}^4 P_j^{\text{im}} F_j^{\text{im}}}{\sum_{j=1}^4 P_j^{\text{im}}}. \quad (2.65)$$

Ta thấy kết quả phụ thuộc vào cả  $\epsilon_1$  và  $\epsilon_2$ . Trong Hình 2.5 chúng tôi vẽ  $\bar{F}^{\text{im}}$  là hàm của  $\epsilon_1$  và  $\epsilon_2$ . Như thấy rõ từ hình vẽ,  $\bar{F}^{\text{im}}$  có giá trị rất cao ( $\bar{F}^{\text{im}} \geq 0.980$ ) với  $|\epsilon_{1,2}| \leq 0.08$ . Giá trị của  $\bar{F}^{\text{im}}$  tiệm cận tới 1 khi  $\epsilon_{1,2}$  giảm về 0. Cụ thể hơn,  $\bar{F}^{\text{im}} \geq 0.999$  khi  $|\epsilon_{1,2}| \leq 0.02$ .

### 2.1.4 Sự không hoàn hảo của máy đo photon

Một yêu cầu quan trọng trong sơ đồ tạo trạng thái rối lai của chúng tôi là các máy đo photon phải phát hiện chính xác số photon. Tuy nhiên, các máy đo này thực tế thường hoạt động kém hiệu quả với một số lỗi. Trong tiểu mục này chúng tôi tính đến sự không hoàn hảo của máy đo photon. Mức độ không hoàn hảo được đặc trưng bởi thông số hiệu suất  $\eta \in [0, 1]$ . Về mặt toán học, việc máy đo được  $n$  photon với hiệu suất  $\eta$  được mô tả bởi phép đo positive operator-valued measurement (POVM) như sau [114]

$$E_{\eta,a}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k}^k \eta^n (1-\eta)^k |n+k\rangle_a \langle n+k|, \quad (2.66)$$

ở đây  $a$  là ký hiệu của mode mà số photon của nó được phát hiện. Đối với  $\eta = 1$ ,  $E_{\eta=1,a}^{(n)} \equiv |n\rangle_a \langle n|$ , phép dò photon là hoàn hảo. Đối với  $\eta \rightarrow 0$  và  $n \neq 0$ ,  $E_{\eta \rightarrow 0,a}^{(n)} \rightarrow 0$ , có nghĩa là không có thông tin gì về số photon. Phép đo hoàn hảo  $\Pi_1$  trong công thức (2.40) lúc này được thay thế bằng phép đo không hoàn hảo  $\Pi_{1,\eta}$  có dạng

$$\Pi_{1,\eta} = E_{\eta,2}^{(0)} \otimes E_{\eta,2'}^{(1)} \otimes E_{\eta,4}^{(1)} \otimes E_{\eta,4'}^{(0)}, \quad (2.67)$$

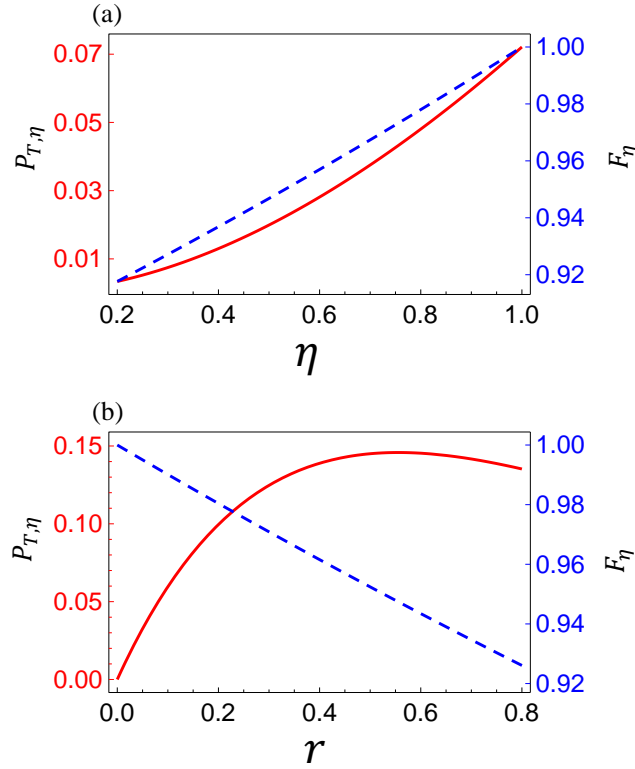
và các thay thế tương tự được thực hiện cho  $\Pi_2, \Pi_3$ , và  $\Pi_4$ .

Đối với các trạng thái đầu vào có dạng như trong (2.27) - (2.29), tổng xác suất thành công  $P_{T,\eta}$  và độ tin cậy  $F_\eta$  có thể dẫn ra các biểu thức giải tích của chúng dưới dạng

$$P_{T,\eta} = \frac{r\beta^2\eta^2 e^{-2r\beta^2\eta}}{1 + e^{-2\beta^2}}, \quad (2.68)$$

$$F_\eta = \frac{1 + e^{-2r\beta^2(1-\eta)}}{2}. \quad (2.69)$$

Trong Hình 2.6 chúng tôi vẽ  $P_{T,\eta}$  (đường liền nét) và  $F_\eta$  (đường đứt nét) là hàm của (a) hiệu suất máy đo  $\eta$  và (b) hệ số phản xạ  $r$ . Đối với trường hợp (a), xu hướng biến đổi của tổng xác suất thành công  $P_{T,\eta}$  và độ tin cậy  $F_\eta$  khá giống nhau. Cụ thể, chúng tăng một cách đơn điệu theo hiệu suất  $\eta$ . Điều này là dễ hiểu bởi máy đo có hiệu suất càng tốt thì giao thức càng hiệu quả. Ngược lại, trong trường hợp (b) xu hướng biến đổi của  $P_{T,\eta}$  và  $F_\eta$  theo hệ số phản xạ  $r$  là khác nhau. Cụ thể, khi  $r$  tăng thì  $P_{T,\eta}$



Hình 2.6: Tổng xác suất  $P_{T,\eta}$  (đường liền nét) cho bởi công thức (2.68) và độ tin cậy  $F_\eta$  (đường đứt nét) cho bởi (2.69) khi phụ thuộc vào (a) hiệu suất của máy đo photon  $\eta$  và (b) hệ số phản xạ  $r$ . Trong trường hợp (a) hệ số phản xạ  $r$  là 0.1, trong khi trong trường hợp (b) hiệu suất máy đo photon  $\eta$  là 0.9. Trong cả hai trường hợp chúng tôi giả định các trạng thái đầu vào hoàn hảo trong đó đầu vào là trạng thái con mèo Schrödinger chuẩn có biên độ  $\beta = 1$ .

sẽ tăng nhưng  $F_\eta$  sẽ giảm. Ví dụ, với  $r = \{0.1, 0.2, 0.3, \dots\}$  chúng ta có  $P_{T,\eta} = \{0.0596, 0.0996, 0.1247, \dots\}$  và  $F_\eta = \{0.990, 0.980, 0.971, \dots\}$ . Điều này có thể được giải thích một cách định tính như sau.  $r$  tăng dẫn đến sự cải thiện số lượng cả hai thành phần bao gồm thành phần một photon nằm trong hàm  $f_1^2(\gamma)$  với  $\gamma = \beta\sqrt{2r}$  của công thức (2.44) và thành phần  $n$  photon trong hàm  $f_n^2(\gamma)$  ( $n > 1$ ) trong mode 2 của trạng thái  $|\Xi\rangle_{12}$  trong (2.32). Sự cải thiện đầu tiên liên quan trực tiếp đến việc tăng tổng xác suất thành công (2.44). Đối với sự cải thiện thứ hai, đáng chú ý là vì các máy đo là không hoàn hảo nên trạng thái thu được của mode 1 và 3 sau phép đo, cụ thể  $\Pi_{1,\eta}$ , bao gồm không chỉ trạng thái rời rạc mong muốn trong (2.37) mà còn chứa các thành phần được thu gọn trong “CSHK” của công thức (2.36). Sự cải thiện thứ 2 trong  $f_n^2(\gamma)$  làm tăng thành phần không mong muốn trong trạng thái cần tạo do đó làm giảm đi độ tin cậy. Hơn nữa, từ các công thức (2.68) và (2.69) ta thấy rằng  $\lim_{r \rightarrow 0} P_{T,\eta} = 0$  và



$\lim_{r \rightarrow 0} F_\eta = 1$ , nghĩa là đối với giá trị bất kỳ của  $\eta$  độ tin cậy có thể cao nếu giảm hệ số phản xạ  $r$ , tuy nhiên xác suất thành công sẽ bị giảm một lượng nào đó.

Không giống như các giao thức trong [99, 101], ở đó các tác giả sử dụng trạng thái đầu vào là trạng thái con mèo Schrödinger không có tính chất phân cực, trong khi đó, giao thức của chúng tôi sử dụng trạng thái con mèo Schrödinger có tính chất phân cực (2.27) và do đó trạng thái rối của chúng tôi thành phần CV cũng có tính chất phân cực (2.32). Nhờ vào việc sử dụng trạng thái như vậy nên tổng xác suất thành công của giao thức chúng tôi gấp đôi so với tổng xác suất thành công trong giao thức [99, 101]. Một ưu điểm khác của giao thức của chúng tôi đó là không cần phải sử dụng toán tử dịch chuyển như trong [99, 101]. Vì trong thực tế, tác động của toán tử dịch chuyển chỉ có thể được thực hiện gần đúng bằng cách sử dụng bộ tách chùm có hệ số truyền qua cao và một chùm kết hợp có biên độ lớn [118]. Như vậy giao thức của chúng tôi làm giảm được nguồn tài nguyên lượng tử cần sử dụng.

Các phân tích về hiệu ứng suy giảm do tương tác với môi trường của các trạng thái đầu vào và sự không hoàn hảo của các bộ tách chùm cho thấy giao thức của chúng tôi vẫn có khả năng chống lại những nhiễu loạn nhỏ. Đặc biệt, xác suất thành công hợp lý ( $> 0, 1$ ) và độ tin cậy cao ( $> 0, 9$ ) có thể đạt được với điều kiện cường độ suy giảm đủ yếu và sự không hoàn hảo của các bộ tách chùm đủ nhỏ. Đối với sự suy giảm liên quan đến trạng thái đầu vào chúng ta có thể cải thiện bằng cách thiết kế thí nghiệm để giảm thiểu thời gian tương tác của các trạng thái đầu vào với môi trường, trong khi đó sự không hoàn hảo của các bộ tách chùm có thể được khắc phục nhờ sự tiến bộ không ngừng trong kỹ thuật chế tạo các thiết bị quang học.

Để đạt được trạng thái rối lai  $|\Psi\rangle_{13} = (|\alpha_H\rangle_1|H\rangle_3 + |-\alpha_V\rangle_1|V\rangle_3) / \sqrt{2}$  như mong muốn với một biên độ  $\alpha$  lớn thì cần có hai đòi hỏi đồng thời như sau: (i) biên độ  $\beta$  của trạng thái đầu vào  $|\Gamma\rangle_1 = N(\beta)(|\beta_H\rangle + |-\beta_H\rangle)_1$  cần đủ lớn và (ii) hệ số phản xạ  $r$  của bộ tách chùm BS( $r, t$ ) trong phần 2 của sơ đồ giao thức phải đủ nhỏ. Con mèo Schrödinger chẵn và lẻ có biên độ nhỏ có thể tạo ra gần đúng bằng trạng thái nén chân không và trạng thái nén một photon với độ tin cậy cao và có thể tăng biên độ của trạng

thái con mèo Schrödinger nhờ vào các kỹ thuật khác nhau (xem [96] chẳng hạn). Do đó đòi hỏi (i) có thể thực hiện được. Yêu cầu (ii) cũng có thể đáp ứng được vì BS có hệ số phản xạ thấp có thể thiết kế dựa vào công nghệ hiện nay. Ngoài ra, cũng cần phải tính đến sự không hoàn hảo của trạng thái  $|\Theta\rangle_{34}$  vì trên thực tế nó bị trộn với trạng thái chân không. Điều đó làm giảm xác suất thành công và độ tin cậy của giao thức. Một cách để đối phó với vấn đề này là sử dụng nguồn rối photon [132–134], tuy nhiên điều này sẽ làm phức tạp toàn bộ thiết lập thử nghiệm. Một giải pháp đơn giản hơn là sử dụng trạng thái mèo gần đúng làm đầu vào cho mode 1, theo đó vẫn có thể đạt được độ tin cậy cao. Một vấn đề thực tế khác đáng quan tâm là sự thất bại xảy ra bất cứ khi nào máy đo phát hiện nhiều photon được thể hiện trong “CSHK” như trong công thức (2.36). Để phân biệt chính xác giữa thành công và thất bại, các máy đo phân giải số photon là cần thiết. Một mặt, các bộ dò phân giải số photon với hiệu quả cao tới 95% đã được chế tạo [135] và được sử dụng trong các thử nghiệm khác nhau [136–138]. Mặt khác, ngay cả với máy đo có hiệu suất thấp, khi giảm hệ số phản xạ của BS chúng tôi sẽ thu được độ tin cậy khá cao nhưng đổi lại xác suất thành công khá thấp.

## 2.2 Tạo rối lai bốn mode giữa trạng thái kết hợp và trạng thái qubit đơn tuyến

Tiếp theo sẽ trình bày phương pháp tạo rối lai CV-DV giữa bốn mode. Trạng thái cần tạo có dạng

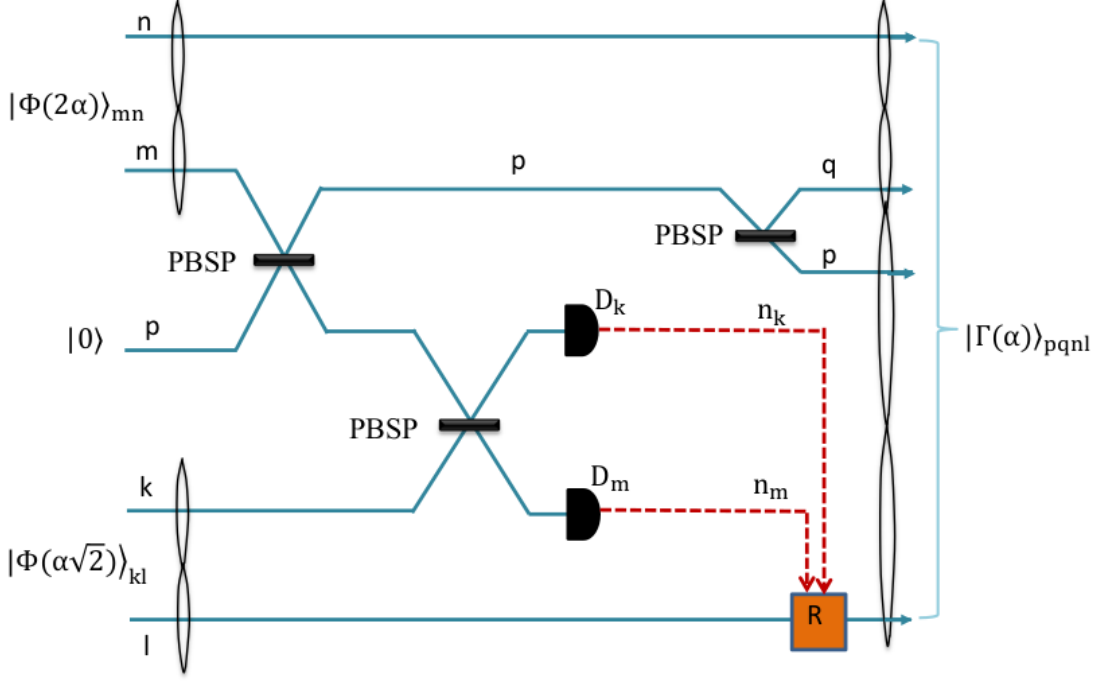
$$|\Gamma(\alpha)\rangle_{1234} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha, \alpha, 0, 0\rangle + |-\alpha, -\alpha, 1, 1\rangle)_{1234}, \quad (2.70)$$

ở đây  $|\alpha, \alpha, 0, 0\rangle_{1234}$  và  $|-\alpha, -\alpha, 1, 1\rangle_{1234}$  là viết tắt của  $|\alpha\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \otimes |0\rangle_4$  và  $|-\alpha\rangle_1 \otimes |-\alpha\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 \otimes |1\rangle_4$  tương ứng. Để tạo trạng thái rối lai trên ta cần trạng thái ban đầu

$$|\Psi_0(\alpha)\rangle_{klmn} = \left| \Phi(\alpha\sqrt{2}) \right\rangle_{kl} \left| \Phi(2\alpha) \right\rangle_{mn}, \quad (2.71)$$

ở đây

$$\left| \Phi(\gamma) \right\rangle_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\gamma, 0\rangle + |-\gamma, 1\rangle)_{xy} \quad (2.72)$$



Hình 2.7: Sơ đồ tạo trạng thái rối lai được định nghĩa trong (2.94). *PBSP* là ký hiệu của thiết bị quang học bao gồm một bộ tách chùm cân bằng xen giữa hai bộ dịch pha  $-\pi/2$ , hoạt động trên hai mode như trong công thức (2.73). Đường liền nét dán nhãn  $n$  ( $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$  và  $q$ ) biểu diễn mode  $n$  ( $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$  và  $q$ ).  $D_k$  và  $D_m$  là các máy đo photon để đếm số photon tương ứng từ các mode. Đường đứt nét biểu diễn số photon đếm được  $n_k$  và  $n_m$ .  $R = I, X, Z$  và  $XZ$  là các toán tử hồi phục phụ thuộc vào số photon được phát hiện.

là trạng thái rối lai giữa hai mode  $x$  và  $y$  đã được tạo thành công trong [94]. Quá trình tạo trạng thái lai giữa bốn mode như trên được thể hiện trên Hình 2.7 và thực hiện theo các bước cụ thể như sau

Bước 1: Mode  $m$  của trạng thái  $|\Phi(2\alpha)\rangle_{mn}$  được gửi qua một thiết bị quang học ký hiệu là *PBSP*. Thiết bị này hoạt động trên hai mode  $x, y$  bao gồm một bộ tách chùm cân bằng  $BBS_{xy}(\pi/4) = \exp[i\pi(a_x^\dagger a_y + a_y^\dagger a_x)/4]$  bị kẹp giữa hai bộ dịch pha  $-\pi/2$ ,  $P_y(-\pi/2) = \exp(-i\pi a_y^\dagger a_y/2)$ , với  $a_j^\dagger$  ( $a_j$ ) là các toán tử sinh (hủy) hạt ở mode  $j$

$$PBSP_{xy} = P_y(-\pi/2)BS_{xy}(\pi/4)P_y(-\pi/2). \quad (2.73)$$

Sau khi đi qua thiết bị trên, trạng thái ban đầu trở thành

$$|\Psi_1\rangle_{klmnp} = PBSP_{mp} |\Psi_0\rangle_{klmn}, \quad (2.74)$$

với  $p$  là một mode chân không bất kỳ (xem Hình 2.7).

Bước 2: Mode  $m$  vừa chuyển qua thiết bị PBSP đầu tiên sẽ được trộn với mode  $k$  của trạng thái  $|\Phi(\alpha\sqrt{2})\rangle_{kl}$  trên một PBSP khác. Kết quả  $|\Psi_1\rangle_{klmnp}$  trở thành

$$|\Psi_2\rangle_{klmnp} = PBSP_{mk} |\Psi_1\rangle_{klmnp}. \quad (2.75)$$

Phía sau thiết bị  $PBSP_{mk}$  (là PBSP thứ hai trong Hình 2.7) đặt hai máy đo photon  $D_m$  và  $D_k$  để đếm số photon  $n_m$  và  $n_k$  của các mode  $m$  và  $k$  tương ứng. Trạng thái của các mode  $l$ ,  $n$  và  $p$  trở thành

$$|\Psi_3\rangle_{lnp} = \frac{{}_{mk}\langle n_m, n_k | \Psi_2 \rangle_{klmnp}}{\sqrt{P_{n_m n_k}}}, \quad (2.76)$$

với xác suất

$$P_{n_m n_k} = |{}_{mk}\langle n_m, n_k | \Psi_2 \rangle_{klmnp}|^2. \quad (2.77)$$

Để phân tích tất cả các trường hợp có thể xảy ra, trạng thái  $|\Psi_3\rangle_{lnp}$  có thể được viết một cách tổng quát như sau

$$\begin{aligned} {}_{mk}\langle n_m, n_k | \Psi_2 \rangle_{klmnp} &= \frac{1}{2} [\delta_{0n_k} |0\rangle_{lm} \langle n_m | 2\alpha \rangle_m |\alpha\sqrt{2}\rangle_p |0\rangle_n \\ &+ \delta_{0n_m} |1\rangle_{lk} \langle n_k | 2\alpha \rangle_k |\alpha\sqrt{2}\rangle_p |0\rangle_n \\ &+ (-1)^{n_k} \delta_{0n_m} |0\rangle_{lk} \langle n_k | 2\alpha \rangle_k |-\alpha\sqrt{2}\rangle_p |1\rangle_n \\ &+ (-1)^{n_m} \delta_{0n_k} |1\rangle_{lm} \langle n_m | 2\alpha \rangle_m |-\alpha\sqrt{2}\rangle_p |1\rangle_n], \end{aligned} \quad (2.78)$$

ở đây  $\delta_{mn}$  là hàm delta Kronecker trong khi đó  $\langle n | \gamma \rangle = \gamma^n e^{-|\gamma|^2/2} / \sqrt{n!}$ . Sẽ có năm khả năng xảy ra được dán nhãn từ (i) đến (v) như sau

(i) Nếu  $n_m = \text{chẵn} \neq 0$  và  $n_k = 0$ , thì trạng thái  $|\Psi_3\rangle_{pnl}$  trong công thức (2.76) là

$$|\Psi_3^{(i)}\rangle_{pnl} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\sqrt{2}, 0, 0\rangle + |-\alpha\sqrt{2}, 1, 1\rangle)_{pnl}, \quad (2.79)$$

xảy ra với xác suất

$$P_{\text{chẵn} \neq 0, 0} = \frac{1}{2} e^{-4|\alpha|^2} [\cosh(4|\alpha|^2) - 1]. \quad (2.80)$$

(ii) Nếu  $n_m = \text{lẻ}$  và  $n_k = 0$ , thì trạng thái  $|\Psi_3\rangle_{lnp}$  trong công thức (2.76) là

$$|\Psi_3^{(ii)}\rangle_{pnl} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\sqrt{2}, 0, 0\rangle - |-\alpha\sqrt{2}, 1, 1\rangle)_{pnl}, \quad (2.81)$$

xảy ra với xác suất

$$P_{l\bar{e},0} = \frac{1}{2}e^{-4|\alpha|^2} \sinh(4|\alpha|^2). \quad (2.82)$$

(iii) Nếu  $n_m = 0$  và  $n_k = \text{chẵn} \neq 0$ , thì trạng thái  $|\Psi_3\rangle_{pnl}$  trong công thức (2.76) là

$$\left| \Psi_3^{(iii)} \right\rangle_{pnl} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \alpha\sqrt{2}, 0, 1 \right\rangle + \left| -\alpha\sqrt{2}, 1, 0 \right\rangle \right)_{pnl}, \quad (2.83)$$

xảy ra với xác suất  $P_{0,\text{chẵn} \neq 0} = P_{\text{chẵn} \neq 0,0}$ .

(iv) Nếu  $n_m = 0$  và  $n_k = \text{lẻ}$ , thì trạng thái  $|\Psi_3\rangle_{pnlq}$  trong công thức (2.76) là

$$\left| \Psi_3^{(iv)} \right\rangle_{pnlq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \alpha\sqrt{2}, 0, 1 \right\rangle - \left| -\alpha\sqrt{2}, 1, 0 \right\rangle \right)_{pnl} |0\rangle_q, \quad (2.84)$$

xảy ra với xác suất  $P_{0,\text{lẻ}} = P_{\text{lẻ},0}$ .

(v) Nếu  $n_m = n_k = 0$ , thì trạng thái  $|\Psi_3\rangle_{pnl}$  trong công thức (2.76) là

$$\begin{aligned} \left| \Psi_3^{(v)} \right\rangle_{pnl} &= \frac{1}{2} \left( \left| \alpha\sqrt{2}, 0, 0 \right\rangle + \left| \alpha\sqrt{2}, 0, 1 \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left| -\alpha\sqrt{2}, 1, 0 \right\rangle + \left| -\alpha\sqrt{2}, 1, 1 \right\rangle \right)_{pnl}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

xảy ra với xác suất  $P_{00} = e^{-4|\alpha|^2}$ .

Bước 3: Mode  $p$  được đưa vào thiết bị PBSP thứ ba, sau đó một mode phản xạ xuất hiện được gắn nhãn  $q$ . Do đó, các trạng thái (2.79) - (2.85) trở thành

$$\left| \Psi_4^{(i)} \right\rangle_{pqnl} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \alpha, \alpha, 0, 0 \right\rangle + \left| -\alpha, -\alpha, 1, 1 \right\rangle \right)_{pqnl}, \quad (2.86)$$

$$\left| \Psi_4^{(ii)} \right\rangle_{pqnl} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \alpha, \alpha, 0, 0 \right\rangle - \left| -\alpha, -\alpha, 1, 1 \right\rangle \right)_{pqnl}, \quad (2.87)$$

$$\left| \Psi_4^{(iii)} \right\rangle_{pqnl} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \alpha, \alpha, 0, 1 \right\rangle + \left| -\alpha, -\alpha, 1, 0 \right\rangle \right)_{pqnl}, \quad (2.88)$$

$$\left| \Psi_4^{(iv)} \right\rangle_{pqnl} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \alpha, \alpha, 0, 1 \right\rangle - \left| -\alpha, -\alpha, 1, 0 \right\rangle \right)_{pqnl} \quad (2.89)$$

và

$$\left| \Psi_4^{(v)} \right\rangle_{pqnl} = \frac{1}{2} \left( \left| \alpha, \alpha, 0 \right\rangle + \left| -\alpha, -\alpha, 1 \right\rangle \right)_{pqn} \left( |0\rangle + |1\rangle \right)_l. \quad (2.90)$$

Nhìn vào các công thức trên ta có thể thấy chỉ trạng thái cuối cùng là không thể cho kết quả thành công. Bốn trạng thái phía trên có thể chuyển

về trạng thái mong muốn bằng cách sử dụng các toán tử phức hồi Z và X tác động lên trạng thái ở mode  $l$ , tuy nhiên, tác động của toán tử X lên các trạng thái đơn tuyến chỉ cho xác suất  $1/2$  [66]. Vì thế xác suất thành công của quá trình tạo trạng thái  $|\Gamma\rangle$  trong công thức (2.94) là

$$P_{\Gamma} = \frac{3}{2}(P_{\text{chẵn} \neq 0,0} + P_{\text{lẻ},0}) = \frac{3}{4}(1 - e^{-4|\alpha|^2}). \quad (2.91)$$

Xác suất này có thể đạt 75% khi  $|\alpha| \geq 1.3$ .

### 2.3 Viễn chuyển lượng tử có kiểm soát từ trạng thái biến gián đoạn sang trạng thái biến liên tục và ngược lại thông qua trạng thái rối lai dưới ảnh hưởng của môi trường

Dưới đây chúng tôi thiết kế một giao thức viễn chuyển lượng tử giữa một trạng thái qubit đơn tuyến và một trạng thái kết hợp. Trong [113,116] các tác giả nghiên cứu viễn chuyển lượng tử giữa trạng thái photon phân cực đơn và trạng thái kết hợp, đồng thời nghiên cứu viễn chuyển lượng tử giữa trạng thái qubit đơn tuyến và trạng thái kết hợp bằng cách sử dụng các trạng thái rối lai phù hợp giữa chúng. Để giải quyết các điều kiện thực tế của quá trình truyền tải thông tin lượng tử như vậy, điều quan trọng là phải tính đến các hiệu ứng mất liên kết do tương tác với môi trường. Ngoài ra, trong thực tế thường đòi hỏi có một bên thứ ba làm nhiệm vụ giám sát. Điều này có thể được thực hiện bằng cách thêm người giám sát vào các trạng thái rối của các bên liên quan và người này đóng vai trò quyết định cho việc giao thức có tiếp tục thực hiện hay dừng lại. Dưới đây sẽ trình bày một giao thức cho việc truyền tải thông tin giữa hai loại qubit khác nhau. Cụ thể: Alice, Bob, Charlie và David là bốn bên cách xa nhau và chỉ được phép thực hiện các hoạt động địa phương và giao tiếp cổ điển. Alice và Charlie là các bên trong không gian DV hoạt động chỉ với qubit đơn tuyến trong khi Bob và David là các bên trong không gian CV có khả năng điều khiển các trạng thái kết hợp. Mục đích của chúng tôi là tạo ra các giao thức cho phép viễn chuyển theo cả hai hướng, từ trạng thái qubit đơn tuyến sang trạng thái kết hợp và ngược lại xuyên qua một môi trường có nhiễu dưới sự kiểm soát đồng thời của cả Charlie và David. Trong mục

này chúng tôi đưa ra hai nhiệm vụ cần giải quyết. Ở nhiệm vụ thứ nhất, giả sử Alice giữ một trạng thái tồn tại trong không gian DV như sau

$$|\psi_{DV}\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (2.92)$$

ở đây  $|0\rangle$  ( $|1\rangle$ ) là trạng thái chân không (trạng thái một photon) và  $a, b$  là các số phức chưa được biết thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Alice cần bí mật chuyển đến cho Bob thông tin về các hệ số  $a, b$  nằm trong một trạng thái CV

$$|\psi_{CV}(\alpha)\rangle = N(a|\alpha\rangle + b|-\alpha\rangle), \quad (2.93)$$

ở đây  $|\pm\alpha\rangle$  là trạng thái kết hợp có biên độ phức  $\pm\alpha$  và  $N = N(a, b, \alpha) = (1 + 2\text{Re}(a^*b)e^{-2|\alpha|^2})^{-1/2}$  là hệ số chuẩn hóa của trạng thái  $|\psi_{CV}(\alpha)\rangle$ . Nhiệm vụ thứ hai, ngược lại với nhiệm vụ đầu tiên, là Bob giữ một qubit trạng thái kết hợp ở trạng thái (2.93) và cần phải chuyển một cách an toàn cho Alice các hệ số  $a, b$  nằm trong trạng thái qubit đơn tuyến (2.92). Chúng tôi hướng tới việc thiết kế các giao thức sao cho cả hai nhiệm vụ được giám sát đồng thời bởi hai người kiểm soát Charlie và David, với Charlie chỉ có thể làm việc với các trạng thái qubit đơn tuyến DV trong khi David chỉ có khả năng điều khiển các qubit trạng thái kết hợp. Mỗi trong số hai nhiệm vụ nêu trên chỉ có thể được hoàn thành khi có sự cho phép của cả hai kiểm soát viên. Để thực hiện một trong hai nhiệm vụ bằng các hoạt động địa phương và giao tiếp cổ điển, bốn bên Alice, Bob, Charlie và David cần chia sẻ trước một kênh rối lai DV-CV có dạng thuần khiết như sau

$$|\Gamma(\alpha)\rangle_{1234} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha, \alpha, 0, 0\rangle + |-\alpha, -\alpha, 1, 1\rangle)_{1234}, \quad (2.94)$$

đây chính là trạng thái chúng tôi đã thiết kế sơ đồ tạo thành công như trong mục 2.2 bên trên. Kênh lượng tử như vậy phải được phân phối để Alice giữ mode 4, David giữ mode 2, Charlie giữ mode 3 và Bob giữ mode 1. Trong quá trình phân phối kênh lượng tử, độ rối của kênh sẽ bị suy giảm do tương tác với môi trường xung quanh. Điều này được mô tả bởi phương trình Chủ [126]

$$\frac{\partial \rho_{1234}(t)}{\partial t} = (J + L)\rho_{1234}(t). \quad (2.95)$$

Ở đây  $t$  là thời gian tương tác giữa các mode quang học và môi trường,  $\rho_{1234}(t)$  là ma trận mật độ của kênh lượng tử tại thời điểm  $t$ , trong khi

$J$  và  $L$  là toán tử Lindblad tác động lên  $\rho_{1234}(t)$  như sau  $J\rho_{1234}(t) = \gamma \sum_i a_i \rho_{1234}(t) a_i^\dagger$  và  $L\rho_{1234}(t) = -\frac{\gamma}{2} \sum_i (a_i^\dagger a_i \rho_{1234}(t) + \rho_{1234}(t) a_i^\dagger a_i)$ , với  $\gamma$  là hệ số phân rã xác định bởi độ mạnh của tương tác giữa kênh lượng tử và môi trường và  $a_i$  ( $a_i^\dagger$ ) là toán tử hủy (sinh) của mode  $i$ . Nghiệm của phương trình (2.95) có thể được viết dưới dạng

$$\rho_{1234}(t) = \exp[(J + L)t]\rho_{1234}(0), \quad (2.96)$$

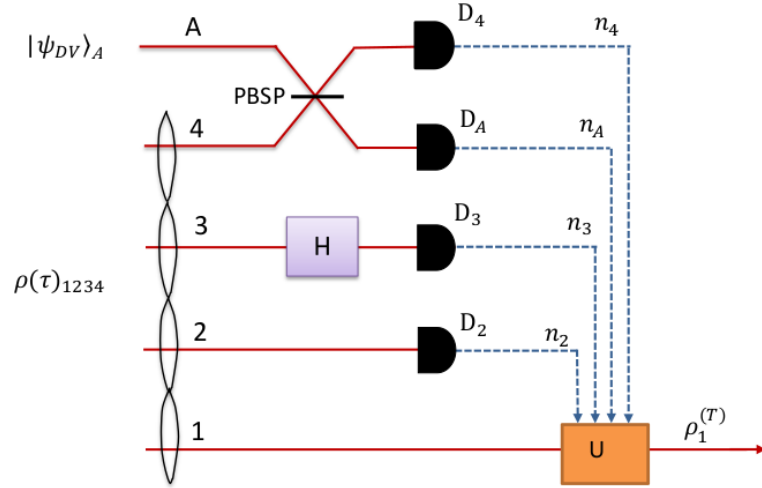
với  $\rho_{1234}(t = 0) = |\Gamma\rangle_{1234} \langle \Gamma|$  là trạng thái thuần khiết ban đầu của kênh lượng tử. Sử dụng quy luật tác động của  $J$  và  $L$  chúng ta thu được kênh lượng tử ở trạng thái tạp  $\rho_{1234}(\tau)$  có dạng

$$\begin{aligned} \rho_{1234}(\tau) = & \frac{1}{2} \{ [ |\tau\alpha\rangle_1 \langle \tau\alpha| \otimes |\tau\alpha\rangle_2 \langle \tau\alpha| \\ & \otimes |0\rangle_3 \langle 0| \otimes |0\rangle_4 \langle 0| \\ & + C\tau^2 |\tau\alpha\rangle_1 \langle -\tau\alpha| \otimes |\tau\alpha\rangle_2 \langle -\tau\alpha| \\ & \otimes |0\rangle_3 \langle 1| \otimes |0\rangle_4 \langle 1| \\ & + C\tau^2 |-\tau\alpha\rangle_1 \langle \tau\alpha| \otimes |-\tau\alpha\rangle_2 \langle \tau\alpha| \\ & \otimes |1\rangle_3 \langle 0| \otimes |1\rangle_4 \langle 0| \\ & + |-\tau\alpha\rangle_1 \langle -\tau\alpha| \otimes |-\tau\alpha\rangle_2 \langle -\tau\alpha| \\ & \otimes (\tau^2 |1\rangle_3 \langle 1| + (1 - \tau^2) |0\rangle_3 \langle 0|) \\ & \otimes (\tau^2 |1\rangle_4 \langle 1| + (1 - \tau^2) |0\rangle_4 \langle 0|) \}, \quad (2.97) \end{aligned}$$

với  $C = e^{-4(1-\tau^2)\alpha^2}$  và  $\tau = e^{-\gamma t/2}$ . Chú ý rằng  $\tau = 1$  khi  $\gamma t = 0$  (khi  $\gamma = 0$  hoặc  $t = 0$ ), trong khi  $\tau \rightarrow 0$  khi  $\gamma t \rightarrow \infty$  (khi  $\gamma$  hữu hạn nhưng  $t \rightarrow \infty$ ). Từ công thức (2.97), ta thấy sự tương tác với môi trường làm giảm biên độ của các mode kết hợp 1 và 2 từ  $\pm\alpha$  sang  $\pm\tau\alpha$  và chuyển trạng thái một photon  $|1\rangle \langle 1|$ , trạng thái qubit đơn tuyến trong mode 3 và 4, về trạng thái chân không  $|0\rangle \langle 0|$  (lưu ý rằng sự mất photon như vậy của các qubit đơn tuyến không loại bỏ các qubit ra khỏi không gian của chúng và được xem xét như một lỗi ‘lật bit’ (bit-flip) có thể được sửa bằng các mã sửa lỗi lượng tử). Vì ảnh hưởng của tương tác với môi trường đã được tính đến trong kênh lượng tử  $\rho_{1234}(\tau)$ , sau đây chúng tôi sẽ làm việc thẳng với  $\rho_{1234}(\tau)$  thay cho  $\rho_{1234}(0) = |\Gamma\rangle_{1234} \langle \Gamma|$ .

Trước tiên ta xét nhiệm vụ thứ nhất: Viễn chuyển lượng tử có kiểm soát từ trạng thái biến gián đoạn sang trạng thái biến liên tục. Giả sử Alice có một qubit đơn tuyến  $A$  nằm trong trạng thái  $|\psi_{DV}\rangle_A = (a|0\rangle + b|1\rangle)_A$  và





Hình 2.8: Giao thức viễn chuyển lượng tử có kiểm soát từ trạng thái biến gián đoạn sang trạng thái biến liên tục có kiểm soát sử dụng kênh lượng tử  $\rho_{1234}(\tau)$  trong công thức (2.97). Đường liền nét dán nhãn 1 (2, 3, 4 và A) biểu diễn mode 1 (2, 3, 4 và A).  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_A$  và  $D_4$  là các máy đo photon để đếm các photon tương ứng từ các mode. Đường đứt nét biểu diễn số photon được phát hiện  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_A$  và  $n_4$ .  $H$  là toán tử Hadamard.  $U = X$  hoặc  $XZ$  là các toán tử hồi phục phụ thuộc vào số photon đếm được từ các máy đo.

cô ấy cần chuyển trạng thái  $|\psi_{DV}\rangle_A$  tới Bob sao cho Bob nhận được trạng thái con mèo Schrödinger có dạng

$$|\psi_{CV}(\tau\alpha)\rangle_1 = N(a|\tau\alpha\rangle + b|-\tau\alpha\rangle)_1. \quad (2.98)$$

Chú ý rằng trạng thái (2.93) được đặc trưng bởi  $\pm\alpha$  nhưng trạng thái (2.98) lại được đặc trưng bởi  $\pm\tau\alpha$ . Điều này là vì trạng thái thuần khiết ban đầu  $\rho_{1234}(0) = |\Gamma(\alpha)\rangle_{1234} \langle\Gamma(\alpha)|$  đã bị chuyển thành  $\rho_{1234}(\tau)$  trong công thức (2.97): biên độ ban đầu  $\pm\alpha$  của trạng thái kết hợp bị giảm về  $\pm\tau\alpha$ . Ngoài ra, do sự suy giảm, hệ số chuẩn hóa trong (2.98) bị biến đổi  $N = N(a, b, \alpha) = (1 + 2\text{Re}(a^*b)e^{-2\alpha^2})^{-1/2}$  thành  $N = N(a, b, \tau\alpha) = (1 + 2\text{Re}(a^*b)e^{-2\tau^2\alpha^2})^{-1/2}$ . Trạng thái tích của qubit DV của Alice với kênh lượng tử là  $\rho_A\rho_{1234}(\tau)$  với  $\rho_A = |\psi_{DV}\rangle_A \langle\psi_{DV}|$ . Hoạt động của bốn người trong nhiệm vụ này được hiển thị trong Hình 2.8. Cụ thể mỗi trong bốn người Alice, Bob, Charlie và David phải thực hiện theo thứ tự như sau.

*Hoạt động của Alice:* Alice sử dụng thiết bị quang học  $PBSP_{A4}$  để làm rối mode A và mode 4, sau đó đếm số photon của hai mode đó bằng hai máy đo photon  $D_A$  và  $D_4$ . Số photon được phát hiện lần lượt là  $n_A$  và  $n_4$ .

Trạng thái của các mode 1, 2 và 3 lúc này có dạng

$$\rho_{123}(\tau) = \frac{{}_{A4}\langle n_A, n_4 | PBSP_{A4}[\rho_A \rho_{1234}(\tau)] PBSP_{A4}^+ | n_A, n_4 \rangle_{A4}}{P_{n_A, n_4}}, \quad (2.99)$$

với

$$P_{n_A, n_4} = Tr \{ |n_A, n_4\rangle_{A4} \langle n_A, n_4 | [PBSP_{A4}[\rho_A \rho_{1234}(\tau)] PBSP_{A4}^+] \} \quad (2.100)$$

là xác suất đếm được  $n_A$  photon trên mode  $A$  và  $n_4$  photon trên mode 4. Sau khi biết giá trị của  $n_A$  và  $n_4$ , Alice thông qua một kênh liên lạc cổ điển thông báo giá trị của chúng để Bob có thể sử dụng sau này. Chú ý rằng mỗi mode  $A$  hay mode 4 chứa tối đa một photon và bộ tách chùm là cân bằng nên sẽ chỉ có năm trường hợp khả dĩ của các giá trị  $\{n_A, n_4\}$ , đó là  $\{n_A, n_4\} = \{0, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 0\}, \{0, 2\}$  và  $\{2, 0\}$ .

*Hoạt động của David:* Với vai trò là người kiểm soát, David sử dụng máy đo photon  $D_2$  để đếm số photon trên mode 2, với kết quả  $n_2$  và thông báo kết quả trên kênh truyền thông cổ điển. Chú ý rằng mode 2 là trạng thái kết hợp do vậy  $n_2 \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$  và có thể phân thành các số chẵn và lẻ,  $n_2 = \{\text{chẵn}, \text{lẻ}\}$ .

*Hoạt động của Charlie:* Là một kiểm soát viên trong không gian DV, Charlie đầu tiên tác động toán tử Hadamard lên mode 3, sau đó sử dụng máy đo photon  $D_3$  để đếm số photon  $n_3$ , và thông báo kết quả trên kênh thông tin cổ điển. Chú ý  $n_3 \in \{0, 1\}$  vì mode 3 là một trạng thái DV chỉ tồn tại ở hai trạng thái  $|0\rangle$  và  $|1\rangle$ . Thực tế, triển khai toán tử Hadamard trên qubit đơn tuyến là cực kỳ khó khăn. Một tác động trực tiếp của cổng Hadamard là không thể nhưng với bộ đếm photon và qubit phụ trợ thì điều đó có thể xảy ra, nhưng rất hiếm khi thành công [139]. Tuy nhiên, sử dụng phép đo pha thích ứng [66] cho phép áp dụng cổng Hadamard trên qubit đơn tuyến thành công 50%. Giả sử rằng cổng Hadamard được tạo thành công, trạng thái mode 1 của Bob sau hoạt động của Alice, Charlie và David sẽ là

$$\rho_1(\tau) = \frac{{}_{23}\langle n_2, n_3 | H_3 \rho_{123}(\tau) H_3^+ | n_2, n_3 \rangle_{23}}{Q_{n_2, n_3}}, \quad (2.101)$$

với

$$Q_{n_2, n_3} = Tr \{ |n_2, n_3\rangle_{23} \langle n_2, n_3 | [H_3 \rho_{123}(\tau) H_3^+] \} \quad (2.102)$$

là xác suất đếm được  $n_2$  và  $n_3$  photon trên mode 2 và 3 tương ứng.

*Hoạt động của Bob:* Với vai trò là người nhận thông tin, Bob là người cuối cùng đưa ra một số hoạt động thích hợp để dựng lại trạng thái  $\rho_1(\tau)$  trong công thức (2.101) để thu được trạng thái gần nhất so với trạng thái mong muốn (2.98). Bob phải sử dụng tất cả các kết quả của phép đo được công bố trước đó  $n_A, n_4, n_3$  và  $n_2$ , các kết quả này có thể là sự kết hợp của 20 trường hợp khác nhau  $\{n_A, n_4, n_3, n_2\}$ . Để hình dung xem trường hợp nào hữu ích, trường hợp nào không chúng tôi viết  $\rho_1(\tau)$  trong (2.101) dưới dạng biểu thức tường minh như sau

$$\begin{aligned}\rho_1(\tau) &= (\delta_{0n_A}\delta_{1n_4}\delta_{0n_3} + \delta_{1n_A}\delta_{0n_4}\delta_{1n_3})\rho_1^{(1,n_2)}(\tau) \\ &+ (\delta_{1n_A}\delta_{0n_4}\delta_{0n_3} + \delta_{0n_A}\delta_{1n_4}\delta_{1n_3})\rho_1^{(2,n_2)}(\tau) \\ &+ \delta_{0n_A}\delta_{0n_4}(\delta_{0n_3} + \delta_{1n_3})\rho_1^{(3)}(\tau) \\ &+ (\delta_{0n_A}\delta_{2n_4} + \delta_{2n_A}\delta_{0n_4})(\delta_{0n_3} + \delta_{1n_3})\rho_1^{(4)}(\tau),\end{aligned}\quad (2.103)$$

ở đây

$$\begin{aligned}\rho_1^{(1,n_2)}(\tau) &= L^{(n_2)}(\tau)\{|b|^2|\tau\alpha\rangle_1\langle\tau\alpha| \\ &+ (-1)^{n_2}C\tau^2(a^*b|\tau\alpha\rangle_1\langle-\tau\alpha| + ab^*|-\tau\alpha\rangle_1\langle\tau\alpha|) \\ &+ [|b|^2(1 - \tau^2) + |a|^2\tau^2]|-\tau\alpha\rangle_1\langle-\tau\alpha|\},\end{aligned}\quad (2.104)$$

với

$$\begin{aligned}L^{(n_2)}(\tau) &= [|b|^2(2 - \tau^2) + |a|^2\tau^2 \\ &+ (-1)^{n_2}C\tau^2(a^*b + b^*a)e^{-2\alpha^2\tau^2}]^{-1},\end{aligned}\quad (2.105)$$

$$\rho_1^{(2,n_2)}(\tau) = \rho_1^{(1,n_2+1)}(\tau),\quad (2.106)$$

$$\rho_1^{(3)}(\tau) = \frac{|\tau\alpha\rangle_1\langle\tau\alpha| + (1 - \tau^2)|-\tau\alpha\rangle_1\langle-\tau\alpha|}{2 - \tau^2}\quad (2.107)$$

và

$$\rho_1^{(4)}(\tau) = |-\tau\alpha\rangle_1\langle-\tau\alpha|. \quad (2.108)$$

Rõ ràng từ các công thức trên, kết quả phép đo nằm ở hai dòng cuối trong công thức (2.103) sẽ cho kết quả không mong muốn vì cả  $\rho_1^{(3)}(\tau)$  của (2.107) hay  $\rho_1^{(4)}(\tau)$  của (2.108) đều không chứa tham số cần thiết  $a$  và  $b$ . Do đó, chúng tôi chỉ phân tích kết quả phép đo nằm ở hai dòng đầu tiên trong (2.103). Phân tích (2.104) chỉ ra rằng khi  $n_2$  chẵn và  $\tau = 1$  (không có sự

suy giảm do môi trường)  $\rho_1^{(1,n_2)}(\tau)$  trở về

$$\begin{aligned}\rho_1^{(1,\text{chẵn})}(\tau = 1) &= [1 + 2\text{Re}(a^*b)e^{-2\alpha^2}]^{-1} \{ |b|^2 |\alpha\rangle_1 \langle \alpha| \\ &\quad + (a^*b |\alpha\rangle_1 \langle -\alpha| + ab^* |-\alpha\rangle_1 \langle \alpha|) \\ &\quad + |a|^2 |-\alpha\rangle_1 \langle -\alpha| \} \\ &= X |\psi_L(\alpha)\rangle_1 \langle \psi_{CV}(\alpha)| X,\end{aligned}\quad (2.109)$$

từ đó

$$|\psi_{CV}(\alpha)\rangle_1 \langle \psi_{CV}(\alpha)| = X \rho_1^{(1,\text{even})}(\tau = 1) X. \quad (2.110)$$

Trong hai công thức (2.109) và (2.110),  $|\psi_{CV}(\alpha)\rangle$  là trạng thái CV được định nghĩa trong (2.93) và  $X$  là toán tử tác động lên trạng thái kết hợp như sau  $X |\pm\tau\alpha\rangle = |\mp\tau\alpha\rangle$ . Toán tử  $X$  như vậy chính là bộ dịch pha một góc  $\pi$  và được thiết kế một cách dễ dàng. Biểu thức (2.110) cho thấy  $\rho_1^{(T)}(\tau)$ , trạng thái của mode 1 mà Bob thu được sẽ là

$$\rho_1^{(T)}(\tau) = X \rho_1^{(1,\text{chẵn})}(\tau) X. \quad (2.111)$$

Bây giờ hãy xem xét kỹ hơn hai dòng đầu tiên của công thức (2.103), chúng ta thấy rằng nếu  $\{n_A, n_4, n_3, n_2\} = \{0, 1, 0, \text{chẵn}\}$  hoặc  $\{1, 0, 1, \text{chẵn}\}$  hoặc  $\{1, 0, 0, \text{lẻ}\}$  hoặc  $\{0, 1, 1, \text{lẻ}\}$  thì  $\rho_1(\tau)$  trở thành  $\rho_1^{(1,\text{chẵn})}(\tau) = \rho_1^{(2,\text{lẻ})}(\tau) = X \rho_1^{(T)}(\tau) X$ . Điều này nghĩa là  $\rho_1^{(T)}(\tau) = X \rho_1^{(1,\text{chẵn})}(\tau) X$ , trạng thái cần chuyển có thể được tái tạo từ  $\rho_1^{(1,\text{chẵn})}(\tau)$  hoặc  $\rho_1^{(2,\text{lẻ})}(\tau)$  bằng việc sử dụng toán tử  $X$  tác động lên mode 1. Vì tác động của toán tử  $X$  lên trạng thái kết hợp là hoàn toàn có thể thực hiện được, do đó xác suất để các trường hợp trên xảy ra là

$$\begin{aligned}P_X &= \frac{1}{2} [P_{0,1} (Q_{0,\text{chẵn}} + Q_{1,\text{lẻ}}) \\ &\quad + P_{1,0} (Q_{1,\text{chẵn}} + Q_{0,\text{lẻ}})] \\ &= \frac{1}{8} [|b|^2 (2 - \tau^2) + |a|^2 \tau^2 \\ &\quad + C\tau^2 (a^*b + b^*a) e^{-2\tau^2\alpha^2}].\end{aligned}\quad (2.112)$$

ở đây hệ số 1/2 trong dòng đầu tiên của (2.112) là xác suất Charlie tác động thành công toán tử Hadamard và  $P_{n_A, n_4}, Q_{n_2, n_3}$  được định nghĩa trong (2.100) và (2.102). Ngược lại, nếu các trường hợp phép đo  $\{n_A, n_4, n_3, n_2\} = \{0, 1, 0, \text{lẻ}\}$  hoặc  $\{1, 0, 1, \text{lẻ}\}$  hoặc  $\{1, 0, 0, \text{chẵn}\}$  hoặc  $\{0, 1, 1, \text{chẵn}\}$  thì  $\rho_1(\tau)$  trở thành  $\rho_1^{(1,\text{lẻ})}(\tau) = \rho_1^{(2,\text{chẵn})}(\tau) = X Z \rho_1^{(T)}(\tau) Z X$ . Điều này ngụ ý rằng để

có được trạng thái mong muốn  $\rho_1^{(T)}(\tau)$ , Bob nên tác động lên trạng thái  $\rho_1^{(1,\text{lê})}(\tau)$  hoặc  $\rho_1^{(2,\text{chẵn})}(\tau)$  toán tử  $XZ$ , với toán tử  $Z$  chuyển  $|\pm\tau\alpha\rangle$  thành  $\pm|\pm\tau\alpha\rangle$ . Vấn đề là đối với trạng thái kết hợp, tác động của toán tử  $Z$  là rất khó để đạt 100%. Để vượt qua khó khăn đó, người ta thường làm gần đúng toán tử  $Z$  bằng cách sử dụng toán tử dịch chuyển [120] hoặc bằng cách khôn khéo nhờ đến giao thức viễn chuyển lượng tử [53] hoặc bằng công nghệ bốt một photon khỏi trạng thái kết hợp [140]. Dẫu vậy thì việc triển khai toán tử  $Z$  trên một trạng thái kết hợp là không tất định. Xác suất thành công cho quá trình đó là 50%. Do đó, trường hợp này xảy ra với xác suất

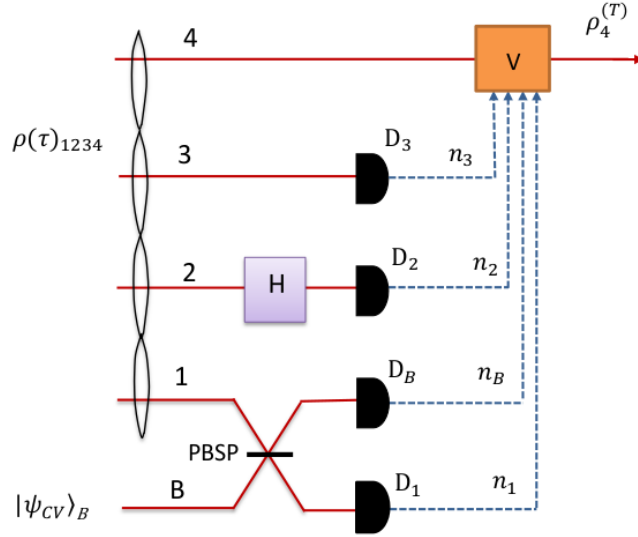
$$\begin{aligned} P_{XZ} &= \frac{1}{4}[P_{0,1}(Q_{0,\text{lê}} + Q_{1,\text{chẵn}}) \\ &\quad + P_{1,0}(Q_{1,\text{lê}} + Q_{0,\text{chẵn}})] \\ &= \frac{1}{16}[|b|^2(2 - \tau^2) + |a|^2\tau^2 \\ &\quad - C\tau^2(a^*b + b^*a)e^{-2\tau^2\alpha^2}], \end{aligned} \quad (2.113)$$

ở đây hệ số 1/4 trong dòng đầu tiên của công thức (2.113) là xác suất cho Charlie tác động thành công toán tử Hadamard và Bob tác động thành công toán tử  $Z$ . Tổng xác suất thành công  $P_{DV \rightarrow CV}$  cho việc chuyển trạng thái qubit đơn tuyến  $|\psi_{DV}\rangle_A$  của công thức (2.92) thành trạng thái con mèo Schrödinger  $\rho_1^{(T)}(\tau)$  của công thức (2.111) là

$$\begin{aligned} P_{DV \rightarrow CV} &= P_X + P_{XZ} \\ &= \frac{1}{16}[3(|b|^2(2 - \tau^2) + |a|^2\tau^2) \\ &\quad + C\tau^2(a^*b + b^*a)e^{-2\tau^2\alpha^2}]. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Độ tin cậy  $F_{DV \rightarrow CV}$  giữa trạng thái thu được  $\rho_1^{(T)}(\tau)$  trong công thức (2.111) và trạng thái mong muốn  $|\psi_{CV}(\tau\alpha)\rangle_1$  trong công thức (2.98) được xác định bởi

$$\begin{aligned} F_{DV \rightarrow CV} &= {}_1\langle\psi_{CV}(\tau\alpha)|\rho_1^{(T)}(\tau)|\psi_{CV}(\tau\alpha)\rangle_1 \\ &= N^2(a, b, \tau\alpha)L^{\text{chẵn}}(\tau)\{|b(b + ae^{-2\tau^2\alpha^2})|^2 \\ &\quad + ((1 - \tau^2)|b|^2 + \tau^2|a|^2)|(be^{-2\tau^2\alpha^2} + a)|^2 \\ &\quad + 2C\tau^2\text{Re}[ab^*(ae^{-2\tau^2\alpha^2} + b)(a^* + b^*e^{-2\tau^2\alpha^2})]\}. \end{aligned} \quad (2.115)$$



Hình 2.9: Giao thức cho viễn chuyển lượng tử có kiểm soát từ trạng thái biến liên tục sang trạng thái biến gián đoạn có kiểm soát sử dụng kênh lượng tử  $\rho_{1234}(\tau)$  trong công thức (2.97). Đường liền nét dán nhãn  $B$  (1, 2, 3 và 4) biểu diễn mode  $B$  (1, 2, 3 và 4).  $D_1$ ,  $D_B$ ,  $D_2$  và  $D_3$  là các máy đo photon để đếm các photon tương ứng từ các mode 1,  $B$ , 2 và 3. Đường đứt nét biểu diễn số photon được phát hiện  $n_1$ ,  $n_B$ ,  $n_2$  và  $n_3$ .  $H$  là toán tử Hadamard.  $V = I, X, Z$  hoặc  $XZ$  là các toán tử hồi phục phụ thuộc vào số photon đếm được từ các máy đo.

Bây giờ ta xét nhiệm vụ thứ hai: Viễn chuyển lượng tử có kiểm soát từ trạng thái biến liên tục sang trạng thái biến gián đoạn. Trong nhiệm vụ này Bob đóng vai người chuyển thông tin, giữ một trạng thái con mèo Schrödinger  $|\psi_{CV}(\tau\alpha)\rangle_B = N(a|\tau\alpha\rangle + b|-\tau\alpha\rangle)_B$ . Nhiệm vụ của Bob là chuyển một cách an toàn đến Alice trạng thái DV của một qubit đơn tuyến có dạng  $|\psi_{DV}\rangle_4 = (a|0\rangle + b|1\rangle)_4$ . Hoạt động của bốn bên trong nhiệm vụ này được hiển thị trong Hình 2.9.

Như trong nhiệm vụ thứ nhất, bốn bên cần chia sẻ trước đó cùng một kênh lượng tử trong công thức (2.97) với cùng sự phân phối các mode. Các hoạt động của hai người kiểm soát Charlie và David không thay đổi, nhưng của Alice và Bob thì có. Cụ thể, Bob là người đầu tiên hoạt động bằng cách cho mode 1 và mode  $B$  kết hợp với nhau qua một thiết bị quang học  $PBSP_{1B}$ , phía sau đặt các máy đo photon  $D_1$  và  $D_B$  để đếm số photon  $n_1$  và  $n_B$  tương ứng với  $n_1, n_B \in \{0, \text{chẵn} \neq 0, \text{lẻ}\}$ . Nếu số photon đếm bởi máy đo  $D_3$  của Charlie và  $D_2$  của David là  $n_3 \in \{0, 1\}$  và  $n_2 \in \{\text{chẵn}, \text{lẻ}\}$

tương ứng thì trạng thái mode 4 của Alice sẽ là

$$\rho_4(\tau) = \frac{{}_{321B}\langle n_3, n_2, n_1, n_B | \rho_{1234B}(\tau) | n_3, n_2, n_1, n_B \rangle_{321B}}{P_{n_3, n_2, n_1, n_B}}, \quad (2.116)$$

ở đây

$$\rho_{1234B}(\tau) = H_3 P B S P_{1B} \rho(\tau)_{1234} \rho_B(\tau) P B S P_{1B}^+ H_3^+, \quad (2.117)$$

với  $\rho_B(\tau) = |\psi_{CV}(\tau\alpha)\rangle_B \langle \psi_{CV}(\tau\alpha)|$  và

$$P_{n_3, n_2, n_1, n_B} = Tr\{|n_3, n_2, n_1, n_B\rangle_{321B} \langle n_3, n_2, n_1, n_B | \rho_{1234B}(\tau)\} \quad (2.118)$$

là xác suất cùng đếm được  $n_3, n_2, n_1$  và  $n_B$  photon trên các mode 3, 2, 1 và  $B$  một cách tương ứng. Thay thế  $\rho_{1234}(\tau)$  trong (2.97) và  $\rho_B(\tau) = |\psi_{CV}(\tau\alpha)\rangle_B \langle \psi_{CV}(\tau\alpha)|$  với  $|\psi_{CV}(\tau\alpha)\rangle$  được định nghĩa trong (2.98) vào (2.117) và sau đó vào (2.116) chúng ta có

$$\begin{aligned} \rho_4(\tau) &= \delta_{0n_3} \delta_{0n_B} \rho_4^{(1, n_1+n_2)}(\tau) + \delta_{1n_3} \delta_{0n_B} \rho_4^{(2, n_1+n_2)}(\tau) \\ &+ \delta_{0n_3} \delta_{0n_1} \rho_4^{(3, n_2+n_B)}(\tau) + \delta_{1n_3} \delta_{0n_1} \rho_4^{(4, n_2+n_B)}(\tau) \\ &+ \delta_{0n_B} \delta_{0n_1} (\delta_{0n_3} + \delta_{1n_3}) \rho_4^{(5)}(\tau), \end{aligned} \quad (2.119)$$

ở đây

$$\begin{aligned} \rho_4^{(1, n_1+n_2)}(\tau) &= \{(|a|^2 + |b|^2(1 - \tau^2))|0\rangle_4 \langle 0| \\ &+ (-1)^{(n_1+n_2)} C \tau^2 (ab^*|0\rangle_4 \langle 1| + ba^*|1\rangle_4 \langle 0|) \\ &+ |b|^2 \tau^2 |1\rangle_4 \langle 1|\}, \quad n_1 \neq 0 \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$\rho_4^{(2, n_1+n_2)}(\tau) = \rho_4^{(1, n_1+n_2+1)}(\tau), \quad (2.121)$$

$$\begin{aligned} \rho_4^{(3, n_2+n_B)}(\tau) &= \{(|b|^2 + |a|^2(1 - \tau^2))|0\rangle_4 \langle 0| \\ &+ (-1)^{(n_2+n_B)} C \tau^2 (ba^*|0\rangle_4 \langle 1| + ab^*|1\rangle_4 \langle 0|) \\ &+ |a|^2 \tau^2 |1\rangle_4 \langle 1|\}, \quad n_B \neq 0 \end{aligned} \quad (2.122)$$

$$\rho_4^{(4, n_2+n_B)}(\tau) = \rho_4^{(3, n_2+n_B+1)}(\tau) \quad (2.123)$$

và

$$\begin{aligned} \rho_4^{(5)}(\tau) &= \frac{1}{2} [(2 - \tau^2)|0\rangle_4 \langle 0| \\ &+ C \tau^2 (|0\rangle_4 \langle 1| + |1\rangle_4 \langle 0|) + \tau^2 |1\rangle_4 \langle 1|]. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Vì các tham số  $a$  và  $b$  không xuất hiện trong  $\rho_4^{(5)}(\tau)$  của (2.124) chúng tôi bỏ qua thành phần cuối cùng ở phía bên phải của (2.119) và xem xét các thành phần còn lại. Từ công thức (2.120), khi  $n_1 + n_2$  chẵn hoặc  $\{n_1 = \text{chẵn} \neq 0, n_2 = \text{chẵn}\}$  hoặc  $\{n_1 = \text{lẻ}, n_2 = \text{lẻ}\}$  và  $\tau = 1$  thì  $\rho_4^{(1, n_1 + n_2)}(\tau)$  đơn giản trở thành

$$\begin{aligned} \rho_4^{(1, \text{chẵn})}(\tau = 1) &= \rho_4^{(2, \text{lẻ})}(\tau = 1) \\ &= \{|a|^2|0\rangle_4\langle 0| + |b|^2|1\rangle_4\langle 1| \\ &\quad + (ab^*|0\rangle_4\langle 1| + ba^*|1\rangle_4\langle 0|)\} \\ &= |\psi_{DV}\rangle_4\langle \psi_{DV}|. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Điều này cho thấy rằng trạng thái  $\rho_4^{(T)}(\tau)$  mà Alice thu được với  $\tau \neq 1$  phải là

$$\rho_4^{(T)}(\tau) = \rho_4^{(1, \text{chẵn})}(\tau) = \rho_4^{(2, \text{lẻ})}(\tau). \quad (2.126)$$

Dưới đây chúng tôi phân tích tất cả các trường hợp có thể xảy ra dựa trên kết quả đo  $\{n_3, n_2, n_1, n_B\}$ . Để có một cái nhìn tổng quan, chúng tôi tóm tắt kết quả phân tích trong Bảng 2.1.

Bảng 2.1: Trạng thái  $\rho_4(\tau)$  trong công thức (2.119) phụ thuộc vào 16 trường hợp khả dĩ của kết quả đo  $\{n_3, n_2, n_1, n_B\}$ . Trạng thái  $\rho_4^{(j, \text{chẵn})}(\tau)$ ,  $\rho_4^{(j, \text{lẻ})}(\tau)$  với  $j = 1, 2, 3, 4$  và  $\rho_4^{(T)}(\tau)$  được cho trong các công thức (2.120) - (2.123) và (2.126).

| Trường hợp # | $n_3$ | $n_2$       | $n_B$                 | $n_1$                   | $\rho_4(\tau)$  |
|--------------|-------|-------------|-----------------------|-------------------------|---|
| 1, 2         | 0, 0  | chẵn,<br>lẻ | 0, 0                  | chẵn $\neq 0$ ,<br>lẻ   | $\rho_4^{(1, \text{chẵn})}(\tau)$<br>$= \rho_4^{(T)}(\tau)$     |
| 3, 4         | 1, 1  | chẵn,<br>lẻ | 0, 0                  | lẻ,<br>chẵn $\neq 0$    | $\rho_4^{(2, \text{lẻ})}(\tau)$<br>$= \rho_4^{(T)}(\tau)$       |
| 5, 6         | 0, 0  | chẵn,<br>lẻ | 0, 0                  | lẻ,<br>chẵn $\neq 0$    | $\rho_4^{(1, \text{lẻ})}(\tau)$<br>$Z\rho_4^{(T)}(\tau)Z$       |
| 7, 8         | 1, 1  | chẵn,<br>lẻ | 0, 0                  | chẵn $\neq 0$ ,<br>chẵn | $\rho_4^{(2, \text{chẵn})}(\tau)$<br>$= Z\rho_4^{(T)}(\tau)Z$   |
| 9, 10        | 0, 0  | chẵn,<br>lẻ | chẵn $\neq 0$ ,<br>lẻ | 0, 0                    | $\rho_4^{(3, \text{chẵn})}(\tau)$<br>$= X\rho_4^{(T)}(\tau)X$   |
| 11, 12       | 1, 1  | chẵn,<br>lẻ | lẻ,<br>chẵn $\neq 0$  | 0, 0                    | $\rho_4^{(4, \text{lẻ})}(\tau)$<br>$= X\rho_4^{(T)}(\tau)X$     |
| 13, 14       | 0, 0  | chẵn,<br>lẻ | lẻ,<br>chẵn $\neq 0$  | 0, 0                    | $\rho_4^{(3, \text{lẻ})}(\tau)$<br>$XZ\rho_4^{(T)}(\tau)ZX$     |
| 15, 16       | 1, 1  | chẵn,<br>lẻ | chẵn $\neq 0$ ,<br>lẻ | 0, 0                    | $\rho_4^{(4, \text{chẵn})}(\tau)$<br>$= XZ\rho_4^{(T)}(\tau)ZX$ |



Bảng 2.1 cho thấy rằng, để thu được trạng thái  $\rho_4^{(T)}(\tau)$  thì (i) Alice không cần làm gì trong các trường hợp từ 1 đến 4, (ii) Alice sử dụng toán tử  $Z$  trong các trường hợp từ 5 đến 8, (iii) Alice sử dụng toán tử  $X$  trong các trường hợp từ 9 đến 12 và (iv) Alice sử dụng toán tử  $XZ$  trong các trường hợp từ 13 đến 16. Như đã trình bày trước đó, đối với trạng thái qubit đơn tuyến, tác động của toán tử  $Z$  có thể hoàn toàn thực hiện được, tuy vậy tác động của toán tử  $X$  chỉ thực hiện được với xác suất  $1/2$ . Tổng xác suất thành công cho quá trình viễn chuyển trạng thái từ  $|\psi_{CV}(\tau\alpha)\rangle$  tới  $|\psi_{DV}\rangle$  là

$$P_{CV \rightarrow DV} = \frac{1}{2} \sum_{k=0,1} \sum_{l=\text{chẵn, lẻ}} \sum_{m=\text{chẵn} \neq 0, \text{lẻ}} \left( P_{k,l,m,0} + \frac{1}{2} P_{k,l,0,m} \right), \quad (2.127)$$

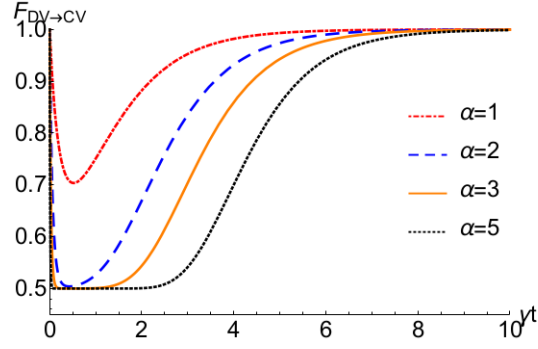
với  $P_{n_3, n_2, n_1, n_B}$  cho bởi (2.118). Trong công thức trên, hệ số chung  $1/2$  là xác suất thành công tác động toán tử Hadamard lên mode 3 và hệ số  $1/2$  khác bên trong dấu ngoặc đơn là xác suất tác động thành công toán tử  $X$  lên mode 4. Tính toán  $P_{n_3, n_2, n_1, n_B}$  trong (2.118) và thay thế chúng vào (2.127) chúng tôi nhận được biểu thức giải tích tường minh cho  $P_{CV \rightarrow DV}$  như sau

$$P_{CV \rightarrow DV} = \frac{3}{8} \frac{1 - e^{-2\tau^2\alpha^2}}{1 + 2\text{Re}(a^*b)e^{-2\tau^2\alpha^2}}. \quad (2.128)$$

Độ tin cậy giữa trạng thái thu được  $\rho_4^{(T)}(\tau)$  và trạng thái mong muốn (2.92) là

$$\begin{aligned} F_{CV \rightarrow DV} &= {}_4\langle \psi_{DV} | \rho_4^{(T)}(\tau) | \psi_{DV} \rangle_4 \\ &= |a|^4 + \tau^2 |b|^4 + (1 - \tau^2 + 2C\tau^2) |a|^2 |b|^2. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Từ dòng thứ hai của (2.129) dễ dàng thấy rằng trong trường hợp không có sự mất photon, tức là khi  $\tau = C = 1$ , thì  $F_{CV \rightarrow DV} = (|a|^2 + |b|^2)^2 = 1$ . Trong trường hợp ngược lại khi xảy ra sự mất toàn bộ số photon thì kênh lượng tử bị tiêu tán hoàn toàn lúc này  $\rho_{1234}(\tau)$  trở thành  $\rho_{1234}(\tau = 0) = |0, 0, 0, 0\rangle_{1234} \langle 0, 0, 0, 0|$ . Cũng trong trường hợp đó ( $\tau \rightarrow 0$ ) trạng thái CV cần viễn chuyển (2.98) cũng trở thành trạng thái chân không  $|0\rangle_1$ . Vì trong trường hợp này, tất cả các mode đều không rời với nhau do vậy, những gì được thực hiện với các mode 2, 3, 4 và  $A$  không gây ảnh hưởng đến trạng thái của mode 1. Do đó, độ tin cậy tương ứng cũng bằng 1 cũng như trong trường hợp không có tổn thất photon (độ tin cậy tuyệt đối như vậy chỉ là



Hình 2.10: Độ tin cậy của quá trình viễn chuyển trạng thái lượng tử từ trạng thái qubit đơn tuyến có dạng đặc biệt  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  sang trạng thái con mèo Schrödinger chẵn  $N(|\tau\alpha\rangle + |-\tau\alpha\rangle)$  là hàm của  $\gamma t$  với  $\alpha = 1$  (đường cong màu đỏ),  $\alpha = 2$  (đường cong màu xanh),  $\alpha = 3$  (đường cong màu cam) và  $\alpha = 5$  (đường cong màu đen).

dựa vào định nghĩa toán học nhưng trạng thái thu được không chứa bất kỳ thông tin nào của trạng thái mong muốn, tức là nó vô nghĩa về mặt vật lý). Vì độ tin cậy không thể vượt quá 1 khi  $\gamma t$  thay đổi từ  $\gamma t = 0$  tới  $\gamma t = \infty$  (tức là  $\tau$  biến đổi từ 1 tới 0) sẽ tồn tại một giá trị nhỏ nhất của độ tin cậy. Ta có thể tính số để xác định nó và được thể hiện trên Hình 2.10, ở đó độ tin cậy  $F_{DV \to CV}$  cho một trường hợp cụ thể của viễn chuyển trạng thái DV có trọng số bằng nhau  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  tới trạng thái con mèo Schrödinger chẵn  $N(|\tau\alpha\rangle + |-\tau\alpha\rangle)$  được vẽ là hàm của  $\gamma t$  cho một vài giá trị của  $\alpha$ . Với một giá trị xác định của  $\alpha$ , khi thời gian trôi đi độ tin cậy trước hết là nhanh chóng giảm để đạt đến giá trị tối thiểu, sau đó tăng dần đến 1 trong một khoảng thời gian đủ lớn ( $t \geq 10/\gamma$ ). Ta cũng có thể hình dung được thực tế là giá trị  $\alpha$  càng nhỏ thì đáy của đường cong độ tin cậy càng nông.

Đối với quá trình viễn chuyển theo hướng ngược lại tức từ CV sang DV, sự biến đổi của độ tin cậy có sự khác biệt. Điều này được mô tả trong Hình 2.11, hiển thị độ tin cậy  $F_{CV \to DV}$  là hàm của  $\gamma t$  cho việc viễn chuyển trạng thái con mèo Schrödinger chẵn  $N(|\tau\alpha\rangle + |-\tau\alpha\rangle)$  tới trạng thái qubit đơn tuyến  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ . Hình 2.11 cho thấy rằng, với một giá trị của  $\alpha$ , độ tin cậy  $F_{CV \to DV}$  lúc đầu giảm nhanh nhưng sau đó dần bão hòa đến một giá trị tối thiểu bằng 0.5. Từ Hình 2.11 cũng thấy rằng  $\alpha$  càng lớn thì tốc độ giảm theo thời gian của  $F_{CV \to DV}$  càng nhanh, đồng nghĩa với việc giá

trị tối thiểu của nó đạt được càng sớm.

Một lưu ý quan trọng là, không giống như viễn chuyển trạng thái trong môi trường lý tưởng khi cả xác suất thành công và độ tin cậy đều không phụ thuộc vào các trạng thái đầu vào, ở đây ảnh hưởng của môi trường làm phát sinh sự phụ thuộc của xác suất thành công và độ tin cậy vào các tham số thông tin  $a$  và  $b$ . Vấn đề cần quan tâm lúc này là giá trị trung bình của xác suất thành công và độ tin cậy đối với tất cả các giá trị có thể có của các tham số đầu vào. Nhắc lại rằng  $a$  và  $b$  ràng buộc với nhau bởi điều kiện chuẩn hóa  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  và chúng ta có thể đặt chúng như sau  $a = \cos \theta$  và  $b = e^{i\varphi} \sin \theta$ , với  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  và  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Giá trị trung bình của hàm  $f(\theta, \varphi)$  bất kỳ được định nghĩa bởi [141]

$$\bar{f}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi) \sin(2\theta) d\theta. \quad (2.130)$$

Nhờ công thức (2.130) và sử dụng công thức (2.114) và (2.128) chúng tôi tính được tường minh xác suất thành công tương ứng là

$$\bar{P}_{DV \rightarrow CV} = \frac{3}{16} \quad (2.131)$$

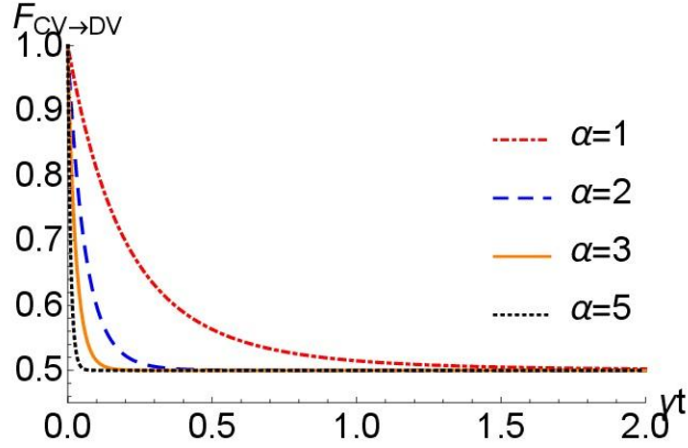
và

$$\bar{P}_{CV \rightarrow DV} = \frac{3(1 - e^{-2\tau^2\alpha^2}) \operatorname{arctanh}(e^{-2\tau^2\alpha^2})}{8e^{-2\tau^2\alpha^2}}. \quad (2.132)$$

Đối với các giá trị trung bình của độ tin cậy, khi lấy tích phân (2.130) cho  $F_{DV \rightarrow CV}$  của công thức (2.115) không thể có được một biểu thức giải tích rõ ràng cho  $\bar{F}_{DV \rightarrow CV}$ , do đó chúng tôi đánh giá nó bằng phương pháp tính số. Tuy nhiên, do công thức (2.129) của  $\bar{F}_{CV \rightarrow DV}$  là khá đơn giản nên tích phân (2.30) có thể tính giải tích được và cho kết quả

$$\bar{F}_{CV \rightarrow DV} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\tau^2(1 + 2e^{-4(1-\tau^2)\alpha^2}). \quad (2.133)$$

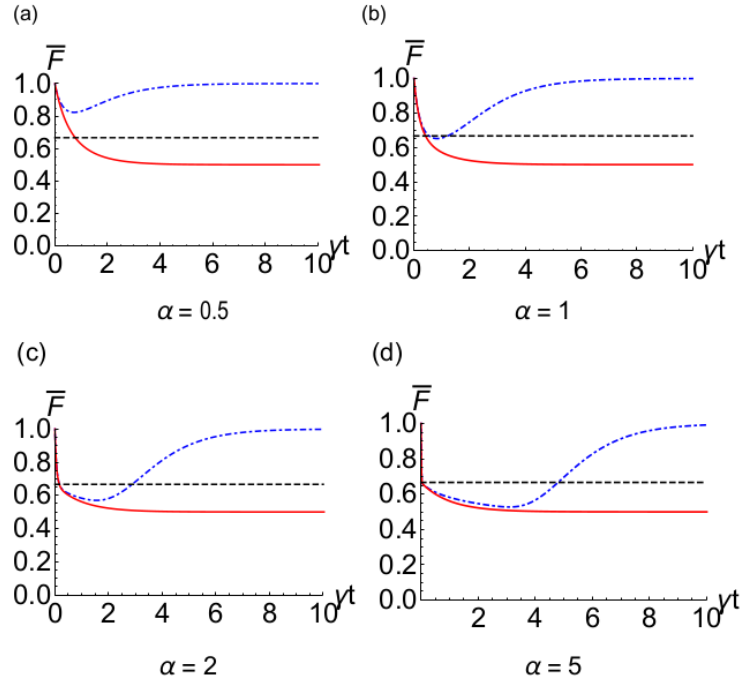
Để dễ so sánh, chúng tôi vẽ trên cùng một đồ thị Hình 2.12 cả hai giá trị trung bình  $\bar{F}_{DV \rightarrow CV}$  và  $\bar{F}_{CV \rightarrow DV}$  là hàm của  $\gamma t$  cho bốn giá trị khác nhau của  $\alpha$ . Một cách định tính, các độ tin cậy “hành xử” rất giống như trong trường hợp với  $a = b = 1/\sqrt{2}$  (tức là  $\varphi = 0$  và  $\theta = \pi/4$ ) trên Hình 2.10 và Hình 2.11. Cụ thể, cho một giá trị của  $\alpha$ ,  $\bar{F}_{DV \rightarrow CV}$  sẽ có giá trị nhỏ nhất trước khi tiệm cận 1, trong khi  $\bar{F}_{CV \rightarrow DV}$  giảm đơn điệu và có xu hướng tiệm cận đến giá trị thấp nhất của nó là  $1/2$  ( $1/2$  là giá trị trung bình của



Hình 2.11: Độ tin cậy của quá trình viễn chuyển trạng thái lượng tử từ trạng thái con mèo Schrödinger chẵn  $N(|\tau\alpha\rangle + |-\tau\alpha\rangle)$  sang trạng thái qubit đơn tuyến đặc biệt  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  là hàm của  $\gamma t$  với  $\alpha = 1$  (đường cong màu đỏ),  $\alpha = 2$  (đường cong màu xanh),  $\alpha = 3$  (đường cong màu cam) và  $\alpha = 5$  (đường cong màu đen)

$F_{CV \rightarrow DV}(\gamma t \rightarrow \infty) = \cos^2(\theta)$ . Đáng chú ý, đối với tất cả các giá trị của  $\alpha$ ,  $\overline{F}_{DV \rightarrow CV}$  lớn hơn  $\overline{F}_{CV \rightarrow DV}$  trong toàn bộ thời gian. Hơn nữa, đối với các giá trị nhỏ của  $\alpha$  ( $\alpha = 0.5$  như trên Hình 2.12a) viễn chuyển lượng tử từ trạng thái qubit đơn tuyến tới trạng thái con mèo Schrödinger luôn luôn tốt hơn kết quả cổ điển tương ứng với giá trị tin cậy tốt nhất là  $2/3$  (được biểu diễn bằng một đường ngang đứt nét trong Hình 2.12). Đối với giá trị lớn của  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$  và  $5$  như trên Hình 2.12b, Hình 2.12c và Hình 2.12d tương ứng) có thể tồn tại một khoảng thời gian mà  $\overline{F}_{CV \rightarrow DV} < 2/3$ , cho thấy viễn chuyển lượng tử trong miền thời gian này là không hiệu quả so với viễn chuyển cổ điển. Đối với viễn chuyển lượng tử từ trạng thái kết hợp sang trạng thái qubit đơn tuyến thì tốt hơn dịch chuyển cổ điển chỉ trong một khoảng thời gian ngắn ban đầu trước khi  $\overline{F}_{CV \rightarrow DV}$  nhanh chóng trở lên nhỏ hơn  $2/3$  và giữ nguyên như vậy về sau. Tính chất định tính này không phụ thuộc vào  $\alpha$ . Tuy nhiên, về mặt định lượng, giá trị lớn hơn của  $\alpha$  sẽ thu hẹp thời gian ban đầu là khoảng thời gian ưu thế của viễn chuyển lượng tử so với viễn chuyển cổ điển.

Xác suất thành công trung bình được vẽ trên Hình 2.13. Trong khi quá trình viễn chuyển DV-CV có  $\overline{P}_{DV \rightarrow CV} = 3/16$ , xác suất trung bình của quá trình ngược lại CV-DV,  $\overline{P}_{CV \rightarrow DV}$ , phụ thuộc vào  $\alpha$  và có thể lớn hơn  $\overline{P}_{DV \rightarrow CV}$ . Ví dụ, nếu  $\alpha$  có giá trị nhỏ thì  $\overline{P}_{CV \rightarrow DV} < \overline{P}_{DV \rightarrow CV}$ . Tuy nhiên,

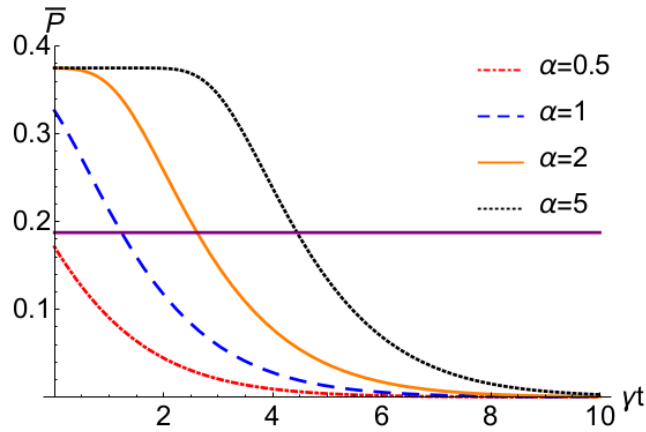


Hình 2.12: Độ tin cậy trung bình của quá trình viễn chuyển có kiểm soát trạng thái lượng tử từ trạng thái biến gián đoạn sang biến liên tục (đường cong màu xanh) và độ tin cậy trung bình của quá trình ngược lại từ trạng thái biến liên tục sang trạng thái biến gián đoạn (đường cong màu đỏ) là hàm của  $\gamma t$  với (a)  $\alpha = 0.5$ , (b)  $\alpha = 1$ , (c)  $\alpha = 2$  và (d)  $\alpha = 5$ . Đường ngang màu đen tại  $2/3$  là giá trị trung bình cổ điển tốt nhất.

khi  $\alpha$  đủ lớn thì  $\bar{P}_{CV \rightarrow DV}$  có thể lớn hơn  $\bar{P}_{DV \rightarrow CV}$  khi  $\gamma t$  không quá lớn. Khoảng thời gian  $\gamma t$  mà  $\bar{P}_{CV \rightarrow DV} > \bar{P}_{DV \rightarrow CV}$  sẽ được mở rộng khi  $\alpha$  tăng như được nhìn thấy từ các đường cong với  $\alpha = 1, 2$  và  $5$  trong Hình 2.13.

## 2.4 Kết luận của chương 2

Trong chương này, chúng tôi đề cập đến rối lai và ứng dụng của nó trong viễn chuyển trạng thái lượng tử có kiểm soát. Cụ thể như sau: Trong mục 2.1, chúng tôi thiết kế một sơ đồ để tạo ra một loại rối lai mới giữa trạng thái kết hợp có xét đến tính chất phân cực và trạng thái phân cực của một photon. Trong thiết kế này, một trạng thái con mèo Schrödinger phân cực, một cặp rối photon phân cực và một trạng thái kết hợp phân cực, đã được chuẩn bị ngoại tuyến từ trước, được cung cấp làm đầu vào cho sơ đồ của chúng tôi. Sau đó, sử dụng các thiết bị quang học tuyến tính thông thường chẳng hạn như bộ tách chùm, bộ tách phân cực, tấm



Hình 2.13: Xác suất thành công trung bình của quá trình viễn chuyển lượng tử có kiểm soát từ trạng thái biến liên tục sang trạng thái biến gián đoạn là hàm của  $\gamma t$  với  $\alpha = 0.5$  (đường cong màu đỏ),  $\alpha = 1$  (đường cong màu xanh),  $\alpha = 2$  (đường cong màu cam) và  $\alpha = 5$  (đường cong màu đen). Xác suất thành công trung bình của quá trình viễn chuyển lượng tử theo chiều ngược lại là hằng số và biểu diễn bởi đường ngang màu tím tại giá trị  $3/16$ .

nửa sóng và máy đo phân giải số photon, tất cả các hoạt động cần thiết có thể được thực hiện một cách hiệu quả. Phụ thuộc vào kết quả phát hiện số photon, ta có thể biết được trạng thái rời rạc mong muốn có được tạo thành công hay không. Tổng xác suất thành công của sơ đồ của chúng tôi cao gấp đôi so với các sơ đồ hiện có cho các trạng thái kết hợp không phân cực [99, 101]. Kế hoạch của chúng tôi không chỉ khả thi mà còn kinh tế đối với tài nguyên tiêu thụ vì không phải sử dụng toán tử dịch chuyển. Chúng tôi cũng xem xét các yếu tố thực tế ảnh hưởng đến hiệu suất của sơ đồ, bao gồm cả sự suy giảm độ rối/sự mất photon do tương tác với môi trường của trạng thái đầu vào, sự sai khác đối với tài nguyên thực tế và sự không hoàn hảo của các thiết bị. Phân tích chi tiết cho thấy sơ đồ của chúng tôi có thể trụ vững trước các hiệu ứng không hoàn hảo nhỏ và có thể được thực hiện với công nghệ hiện tại.

Tiếp theo, trong mục 2.2 chúng tôi xem xét hai loại mã hóa qubit, một là qubit đơn tuyến và cái còn lại là chồng chập của các trạng thái kết hợp, còn gọi là qubit dưới dạng trạng thái con mèo Schrödinger. Đầu tiên, chúng tôi xây dựng sơ đồ tạo ra trạng thái rối thuần bốn bên thích hợp mà sau quá trình chia sẻ giữa bốn bên thông qua tương tác với môi trường sẽ trở

thành một trạng thái trộn. Sau đó chúng tôi sử dụng trạng thái trộn này là kênh lượng tử để thực hiện viễn chuyển lượng tử có kiểm soát giữa một qubit đơn tuyến và một qubit ở trạng thái con mèo Schrödinger. Do có tương tác với môi trường, độ tin cậy của viễn chuyển lượng tử và xác suất thành công là một hàm số của các thông số của các trạng thái cần viễn chuyển. Vì vậy, chúng tôi tính toán giá trị trung bình của chúng. Đối với độ tin cậy trung bình, quá trình viễn chuyển lượng tử DV-CV luôn lớn hơn so với quá trình ngược lại CV-DV. Tuy nhiên, đối với xác suất thành công trung bình, nó sẽ là hằng số đối với quá trình viễn chuyển lượng tử CV-DV và là hàm phụ thuộc biên độ  $\alpha$  đối với quá trình ngược lại DV-CV. Sự phụ thuộc vào  $\alpha$  là khá tinh tế. Ví dụ, sự gia tăng của  $\alpha$  làm giảm độ tin cậy trung bình (xem các Hình 2.10, 2.11 và 2.12) nhưng làm tăng xác suất thành công trung bình (xem Hình 2.13). Điều đáng lưu ý là mã hóa qubit đơn tuyến đặc biệt thú vị do khả năng chuyển đổi lẫn nhau tự nhiên của nó giữa các hệ thống vật lý khác nhau như hệ thống nguyên tử, cơ học và quang học. Qubit đơn tuyến cũng có thể được chuyển đổi thành các định dạng qubit khác, ví dụ: qubit phân cực [142]. Điều này có nghĩa là trạng thái rối giữa trạng thái kết hợp và trạng thái qubit phân cực có thể được tạo ra từ rối lai giữa các trạng thái kết hợp và trạng thái đơn tuyến. Trong cả hai giao thức viễn chuyển lượng tử trong mục 2.2, chúng tôi đều thiết kế có hai người làm nhiệm vụ kiểm soát, một người thao tác trong không gian DV và người còn lại trong không gian CV. Về mặt ý nghĩa, điều này tạo ra sự công bằng giữa các bên với nhau.

## Chương 3

# Rối tăng cường và áp dụng cho viễn tạo hai chiều trạng thái lượng tử và viễn tác toán tử có kiểm soát

Thông thường các thành phần của trạng thái rối được sử dụng trong xử lý thông tin lượng tử được mã hóa bởi cùng một bậc tự do. Tuy nhiên trên thực tế, một hệ lượng tử có thể được mô tả đồng thời bởi nhiều bậc tự do, như bậc tự do phân cực, bậc tự do không gian, bậc tự do thời gian, bậc tự do momen xung lượng, v.v.. Trạng thái rối mà các thành phần của nó được mã hóa cùng một lúc bởi hơn một bậc tự do gọi là trạng thái rối tăng cường [10]. Rối tăng cường là một hiện tượng rất được quan tâm trong những năm gần đây, nó được xem như một nguồn tài nguyên đầy triển vọng để làm tăng tính khả thi cho các nhiệm vụ quan trọng thông qua tính hiệu suất cao của nó. Ví dụ các trạng thái sau

$$|\Psi_{(PS)}^j\rangle_{AB} = \begin{cases} |\varphi_P^m\rangle_{AB} \otimes |\varphi_S^n\rangle_{AB} \\ |\varphi_P^m\rangle_{AB} \otimes |\phi_S^n\rangle_{AB} \\ |\phi_P^m\rangle_{AB} \otimes |\varphi_S^n\rangle_{AB} \\ |\phi_P^m\rangle_{AB} \otimes |\phi_S^n\rangle_{AB} \end{cases}, \quad (3.1)$$

với  $m, n = \pm$  và  $j = 1, 2, 3, \dots, 16$  tạo thành bộ đủ 16 trạng thái Bell tăng cường ở hai bậc tự do phân cực và không gian. Rối tăng cường đã và đang thu hút sự quan tâm lớn của rất nhiều tác giả trên thế giới với rất nhiều vấn đề được xem xét đã được nhắc đến ở phần Mở đầu của luận án, ví dụ như mã hóa đậm các trạng thái lượng tử trong quang học tuyến tính [30], chiết rối lượng tử [31–35], viễn chuyển các trạng thái lượng tử [36–38], viễn tạo trạng thái lượng tử [39–41], đồng viễn tạo trạng thái lượng tử [42], v.v..



Trong chương này, chúng tôi xem xét chi tiết hai vấn đề liên quan đến rối tăng cường như sau. Trong mục 3.1, chúng tôi xem xét quá trình viễn tạo hai chiều trạng thái tăng cường có kiểm soát sử dụng tài nguyên là các trạng thái rối tăng cường. Trong mục 3.2, chúng tôi nghiên cứu quá trình viễn tác toán tử có kiểm soát. Trong mục 3.3, chúng tôi đưa ra một số kết luận. Các kết quả của chương 3 được công bố trong [C. T. Bich, et. al., Journal of the Optical Society of America B, 2023, 1, 11] và [N. B. An, et. al., J. Phys. A: Math. Theor., 2022, 55, 225307].

### **3.1 Viễn tạo hai chiều có kiểm soát các trạng thái tăng cường sử dụng trạng thái rối tăng cường**

Viễn chuyển trạng thái lượng tử là một giao thức được đề xuất lần đầu tiên bởi Bennett cùng 5 cộng sự của ông vào năm 1993 [11]. Có thể xem đó là một ví dụ điển hình nhất về vai trò quan trọng của rối lượng tử trong công nghệ truyền thông lượng tử. Bài toán đặt ra: Alice và Bob là hai người sống ở hai nơi khác biệt, họ không gặp nhau kể từ khi được tạo với nhau một cặp rối. Nhiều năm sau đó Alice được giao nhiệm vụ chuyển cho Bob một trạng thái lượng tử một cách an toàn và nguyên vẹn khi cả hai người đều không được biết thông tin về nó. Đó là một bài toán thực sự khó bởi theo lý thuyết cơ học lượng tử, một trạng thái lượng tử không biết thì không thể đọc và cũng không thể sao chép, Alice không thể đọc được trạng thái này để gửi thông tin về nó cho Bob. Mặt khác, nếu trạng thái này trực tiếp được gửi đi trong không gian thì nó hoàn toàn có khả năng bị thất lạc hoặc đánh cắp rồi làm giả trạng thái, v.v.. May mắn rằng họ đã được tạo với nhau một cặp rối từ trước nên nhiệm vụ này có thể được hoàn thành chỉ bằng việc Alice gửi đi một lượng nhỏ bit cổ điển thông báo kết quả phép đo trên các qubit của mình để Bob dựng lại được trạng thái mong muốn chỉ bằng các thao tác địa phương trên chính các qubit của mình. Một tình huống mới được đưa ra cho bài toán là điều gì sẽ xảy ra khi ban đầu Alice được phép biết về trạng thái cần gửi? Để tối ưu hóa tình huống đó một giao thức đơn giản hơn đã ra đời.

Việc chuyển thông tin lượng tử khi mà người gửi được biết thông tin về trạng thái cần gửi được gọi là viễn tạo trạng thái lượng tử (tên tiếng

Anh là Remote state preparation, viết tắt là RSP) [143,144]. Trong trường hợp này Alice sẽ thực hiện phép đo von Neumann trên qubit của mình dựa trên hệ cơ sở phụ thuộc vào những thông tin của trạng thái cần chuyển, và nếu so sánh số bit cổ điển cần sử dụng để thông báo kết quả đo của cô ấy trong hai phương thức QT và RSP khi cùng gửi một trạng thái lượng tử thì trường hợp RSP đòi hỏi ít hơn. Nhưng, ta vẫn phải thấy rằng xác suất thành công của QT bao giờ cũng là 100% còn xác suất thành công của RSP luôn nhỏ hơn 100% ngoại trừ hai trường hợp đặc biệt cho xác suất tất định đã được tác giả trong [145] chỉ rất rõ. Tuy nhiên, trên thực tế vì một số lý do nào đó các giao thức QT hay RSP buộc phải dừng lại giữa chừng. Một ý tưởng được đưa ra là thêm vào đó một người kiểm soát, người này dù không biết thông tin về trạng thái cần xử lý nhưng lại có một vai trò quyết định xem giao thức có tiếp tục được tiến hành hay phải dừng lại.

Gần đây, QT hai chiều có kiểm soát [146–156] và RSP hai chiều có kiểm soát [157–165], là các giao thức truyền thông lượng tử hai chiều đã được đề xuất bởi một số tác giả. Trong các giao thức đó, bằng cách sử dụng các trạng thái rối nhiều qubit, hai người có thể đồng thời trao đổi trạng thái lượng tử cho nhau dưới sự kiểm soát của chỉ một người. Nếu thông tin cần được xử lý được mã hóa bằng các photon chứa hơn một DOF, thì trạng thái rối tăng cường là tài nguyên không thể thiếu cần sử dụng. Có một số loại tài nguyên lượng tử hữu ích trong các nhiệm vụ quan trọng của các giao thức truyền thông lượng tử hai chiều, chẳng hạn như trạng thái tăng cường EPR, trạng thái tăng cường GHZ, v.v.. Trong [166], các tác giả đã đề xuất giao thức viễn chuyển lượng tử hai chiều cho phép hai đối tác có thể trao đổi hai photon đơn cho nhau (mỗi người giữ một photon và có nhiệm vụ gửi thông tin về photon đó cho người còn lại), một trong số đó được mã hóa trong P-DOF và cái kia là S-DOF, thông qua kênh lượng tử là trạng thái tăng cường EPR trong đồng thời hai DOF.

Mối quan tâm của chúng tôi trong mục 3.1 này là tạo ra một giao thức theo cách sao cho Alice có thể chuẩn bị cho Bob một photon mang hai qubit, trong khi Bob cũng có thể chuẩn bị cho Alice một photon mang hai qubit khác dưới sự kiểm soát chung của bên thứ ba (Charlie). Với mục đích đó, trạng thái rối tăng cường đa photon phù hợp phải được tạo thành công

và phân phối hợp lý giữa ba bên được ủy quyền. Trong mục 3.1.1, chúng tôi thiết kế một lược đồ gần tất định để tạo ra trạng thái như vậy, nó là trạng thái rối tăng cường giữa năm photon. Tiếp theo, trong mục 3.1.2, chúng tôi sử dụng trạng thái đó làm kênh lượng tử cho nhiệm vụ viễn tạo hai chiều có kiểm soát các trạng thái tăng cường.

### 3.1.1 Tạo kênh rối lượng tử tăng cường

Nhiệm vụ chúng tôi quan tâm liên quan đến ba bên cách xa nhau: Alice và Bob là hai người chuẩn bị cho nhau photon hai qubit và Charlie là người giám sát. Giả sử rằng Alice có một photon được mã hóa trong cả P-DOF và S-DOF có dạng

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |Ha_0\rangle + \alpha_{01} |Ha_1\rangle + \alpha_{10} |Va_0\rangle + \alpha_{11} |Va_1\rangle, \quad (3.2)$$

với các tham số thực  $\alpha_{ij}$  thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa  $\sum_{i,j=0}^1 \alpha_{ij}^2 = 1$ , trong khi photon của Bob có dạng

$$|\phi\rangle = \beta_{00} |Hb_0\rangle + \beta_{01} |Hb_1\rangle + \beta_{10} |Vb_0\rangle + \beta_{11} |Vb_1\rangle, \quad (3.3)$$

với tham số thực  $\beta_{ij}$  thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa  $\sum_{i,j=0}^1 \beta_{ij}^2 = 1$ . Ký hiệu  $|Hc_j\rangle$  ( $|Vc_j\rangle$ ), với  $c = a, b$  và  $j = 0, 1$ , chỉ trạng thái phân cực ngang (dọc) được truyền theo hướng  $c_j$ . Mặc dù  $|\psi\rangle$  và  $|\phi\rangle$  là các photon đơn, lượng thông tin chứa trong mỗi chúng có giá trị là hai qubit vì mỗi photon được mã hóa đồng thời trong hai DOF: trạng thái như vậy gọi là trạng thái tăng cường hay siêu trạng thái (tiếng Anh là hyperstate). Alice, được cho phép biết  $\alpha_{ij}$  nhưng không có thông tin về  $\beta_{ij}$ , cần chuyển cho Bob trạng thái của cô ấy có dạng  $|\psi\rangle$  và Bob, biết  $\beta_{ij}$  nhưng không có thông tin về  $\alpha_{ij}$ , muốn chuyển cho Alice trạng thái của anh ấy  $|\phi\rangle$ . Trong giao thức xử lý thông tin được kiểm soát hai chiều này, Alice và Bob đóng một vai trò bình đẳng, nghĩa là các thao tác của họ có thể diễn ra đồng thời dưới sự kiểm soát của Charlie, người không cần biết giá trị của các tham số  $\alpha_{ij}$  và  $\beta_{ij}$  của  $|\psi\rangle$  và  $|\phi\rangle$  nhưng có thể quyết định nhiệm vụ có được hoàn thành hay không. Chúng tôi nhận thấy rằng nhiệm vụ nói trên có thể đạt được nếu ba người tham gia được chia sẻ trước một kênh lượng tử có dạng như sau

$$|\Gamma\rangle_{12345} = \left| \Gamma^{(S)} \right\rangle_{12345} \left| \Gamma^{(P)} \right\rangle_{12345}, \quad (3.4)$$

với

$$\begin{aligned} \left| \Gamma^{(S)} \right\rangle_{12345} &= \frac{1}{2} [ |a_0 b_0\rangle ( |c_0 d_0 e_0\rangle + |c_1 d_1 e_1\rangle ) \\ &+ |a_1 b_1\rangle ( |c_0 d_0 e_1\rangle + |c_1 d_1 e_0\rangle ) ]_{12345} \end{aligned} \quad (3.5)$$

và

$$\begin{aligned} \left| \Gamma^{(P)} \right\rangle_{12345} &= \frac{1}{2} [ |HH\rangle ( |HHH\rangle + |VVV\rangle ) \\ &+ |VV\rangle ( |HHV\rangle + |VVH\rangle ) ]_{12345}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Rõ ràng  $|\Gamma\rangle_{12345}$  là trạng thái rối tăng cường giữa năm photon. Mỗi trong số năm photon có trạng thái phân cực đồng thời cả ngang và dọc và được lan truyền theo hai hướng: photon 1 đi theo hai hướng  $a_0$  và  $a_1$ , photon 2 đi theo hai hướng  $b_0$  và  $b_1$ , photon 3 đi theo hai hướng  $c_0$  và  $c_1$ , photon 4 đi theo hai hướng  $d_0$  và  $d_1$  và photon 5 đi theo  $e_0$  và  $e_1$ .

Quá trình tạo trạng thái  $|\Gamma\rangle_{12345}$  bắt đầu từ trạng thái đầu vào

$$|\Phi_0\rangle_{12345} = \left| \Phi_0^{(S)} \right\rangle_{12345} \left| \Phi_0^{(P)} \right\rangle_{12345}, \quad (3.7)$$

ở đây

$$\left| \Phi_0^{(S)} \right\rangle_{12345} = |a_0 b_0 c_0 d_0 e_0\rangle_{12345} \quad (3.8)$$

và

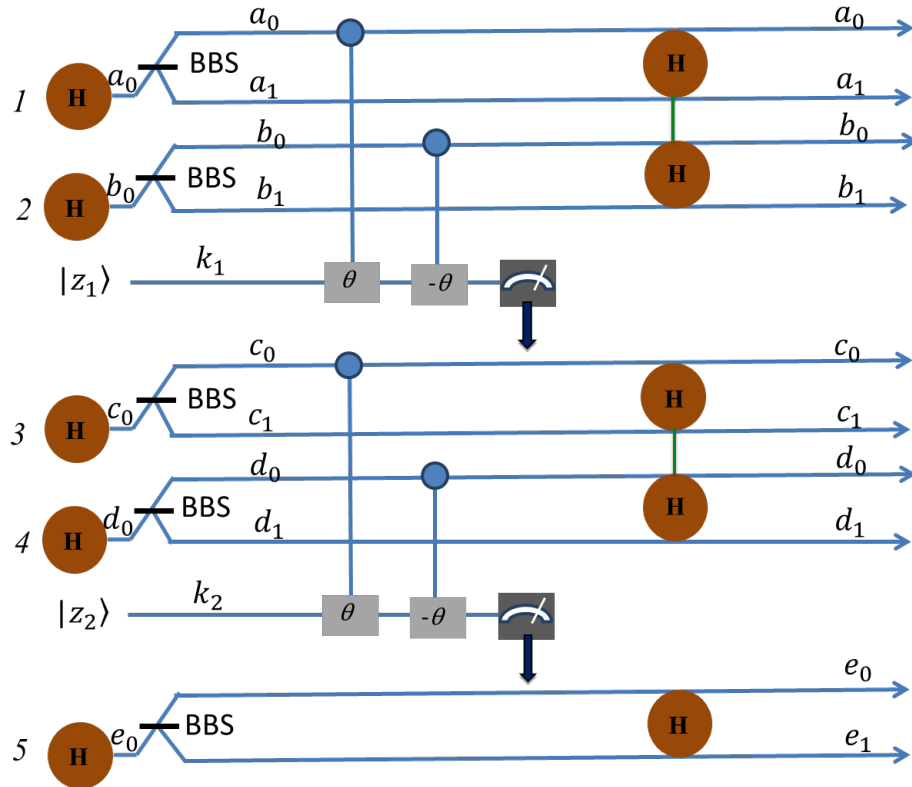
$$\left| \Phi_0^{(P)} \right\rangle_{12345} = |HHHHH\rangle_{12345} \quad (3.9)$$

có thể được xử lý riêng biệt vì thao tác với S-DOF không gây ảnh hưởng đến P-DOF và ngược lại. Trước tiên chúng tôi giải quyết  $\left| \Phi_0^{(S)} \right\rangle_{12345}$  theo hai bước chính. Hoạt động của bước thứ nhất được thể hiện trên Hình 3.1.

Trong bước 1, đầu tiên, chúng tôi để photon 1, 2, 3, 4 và 5 đi qua năm bộ tách chùm cân bằng BBS. BBS chuyển  $|x_0\rangle$  thành  $(|x_0\rangle + |x_1\rangle)/\sqrt{2}$ , với  $x = a, b, c, d$  hoặc  $e$ , khi đó  $\left| \Phi_0^{(S)} \right\rangle_{12345}$  được chuyển thành

$$\begin{aligned} \left| \Phi_1^{(S)} \right\rangle_{12345} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} [ (|a_0\rangle + |a_1\rangle)_1 (|b_0\rangle + |b_1\rangle)_2 (|c_0\rangle + |c_1\rangle)_3 \\ &(|d_0\rangle + |d_1\rangle)_4 (|e_0\rangle + |e_1\rangle)_5 ]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Thứ hai, một trạng thái kết hợp phụ trợ  $|z_1\rangle_{k_1}$  ( $|z_2\rangle_{k_2}$ ) có biên độ dương  $z_1$  ( $z_2$ ) và đi theo đường  $k_1$  ( $k_2$ ) được cho phép tương tác với mode  $a_0$  của photon 1 và mode  $b_0$  của photon 2 (mode  $c_0$  của photon 3 và mode  $d_0$  của



Hình 3.1: Bước 1 của sơ đồ tạo trạng thái  $|\Gamma^{(S)}\rangle_{12345}$  trong công thức (3.5). Bước này làm rối photon 1 với photon 2 và photon 3 với photon 4 trong S-DOF. Vòng tròn có ký hiệu  $H$  bên trong ngụ ý một photon ở trạng thái phân cực  $|H\rangle$ , trong khi  $|z\rangle_1$  và  $|z\rangle_2$  là các trạng thái kết hợp có biên độ dương  $z_1$  và  $z_2$  tương ứng.  $\theta$  và  $-\theta$  là các thông số của các tương tác Kerr chéo. BBS là bộ tách chùm cân bằng. Các photon rối ở S-DOF được nối với nhau bằng các đường liền nét.

photon 4) tương ứng thông qua phi tuyến Kerr chéo với thông số tương tác  $\theta$  và  $-\theta$ . Nhắc lại phi tuyến Kerr chéo  $U_{nk}(\pm\theta)$  với thông số  $\pm\theta$  giữa photon  $n$  đi theo đường  $x_j$  và một trạng thái kết hợp  $|z\rangle_k$  giữ nguyên trạng thái photon nhưng thêm một thành phần pha  $\pm\theta$  vào trạng thái kết hợp, cụ thể:  $U_{nk}(\pm\theta)|x_j\rangle_n|z\rangle_k = |x_j\rangle_n|ze^{\pm i\theta}\rangle_k$ . Do đó, dưới ảnh hưởng của tương tác Kerr chéo,  $|\Phi_1^{(S)}\rangle_{12345}|z_1\rangle_{k_1}|z_2\rangle_{k_2}$  trở thành

$$\begin{aligned} |\Phi_2^{(S)}\rangle_{12k_134k_25} &= \frac{1}{4\sqrt{2}}[(|a_0b_0\rangle + |a_1b_1\rangle)_{12}|z_1\rangle_{k_1} \\ &\quad + |a_0b_1\rangle_{12}|z_1e^{i\theta}\rangle_{k_1} + |a_1b_0\rangle_{12}|z_1e^{-i\theta}\rangle_{k_1}] \\ &\quad [(|c_0d_0\rangle + |c_1d_1\rangle)_{34}|z_2\rangle_{k_2} \\ &\quad + |c_0d_1\rangle_{34}|z_2e^{i\theta}\rangle_{k_2} + |c_1d_0\rangle_{34}|z_2e^{-i\theta}\rangle_{k_2}] \\ &\quad (|e_0\rangle + |e_1\rangle)_5. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Thứ ba, thực hiện phép đo homodyne X (là phép đo biên độ ngang  $X = (a + a^+)/\sqrt{2}$  hay có cách gọi khác là phép đo X-quadrature) cho trạng thái kết hợp. Nếu  $|z_1\rangle_{k_1}$  và  $|z_2\rangle_{k_2}$  được tìm thấy, không có sự thay đổi nào trong không gian pha được quan sát, khi đó trạng thái của các photon 1, 2, 3, 4 và 5 trở thành

$$\begin{aligned} |Q_0^{(S)}\rangle_{12345} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|a_0b_0\rangle + |a_1b_1\rangle)_{12}(|c_0d_0\rangle + |c_1d_1\rangle)_{34} \\ &\quad (|e_0\rangle + |e_1\rangle)_5. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Một khả năng khác là các trạng thái kết hợp xuất hiện với dạng  $|z_1\rangle_{k_1}$  và  $|z_2e^{\pm i\theta}\rangle_{k_2}$  ( $|ze^{+i\theta}\rangle$  và  $|ze^{-i\theta}\rangle$  không phân biệt được bởi phép đo homodyne X). Trong trường hợp này, trạng thái của các photon 1, 2, 3, 4 và 5 trở thành

$$\begin{aligned} |Q_1^{(S)}\rangle_{12345} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|a_0b_0\rangle + |a_1b_1\rangle)_{12}(|c_0d_1\rangle + |c_1d_0\rangle)_{34} \\ &\quad (|e_0\rangle + |e_1\rangle)_5. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nếu các trạng thái kết hợp tìm thấy là  $|z_1e^{\pm i\theta}\rangle_{k_1}$  và  $|z_2\rangle_{k_2}$ , khi đó trạng thái của các photon 1, 2, 3, 4 và 5 là

$$\begin{aligned} |Q_2^{(S)}\rangle_{12345} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|a_0b_1\rangle + |a_1b_0\rangle)_{12}(|c_0d_0\rangle + |c_1d_1\rangle)_{34} \\ &\quad (|e_0\rangle + |e_1\rangle)_5. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Trường hợp có thể tìm thấy cuối cùng là  $|z_1 e^{\pm i\theta}\rangle_{k_1}$  và  $|z_2 e^{\pm i\theta}\rangle_{k_2}$ , khi đó ta có trạng thái sau của năm photon

$$\begin{aligned} \left|Q_3^{(S)}\right\rangle_{12345} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|a_0 b_1\rangle + |a_1 b_0\rangle)_{12}(|c_0 d_1\rangle + |c_1 d_0\rangle)_{34} \\ &\quad (|e_0\rangle + |e_1\rangle)_5. \end{aligned} \quad (3.15)$$

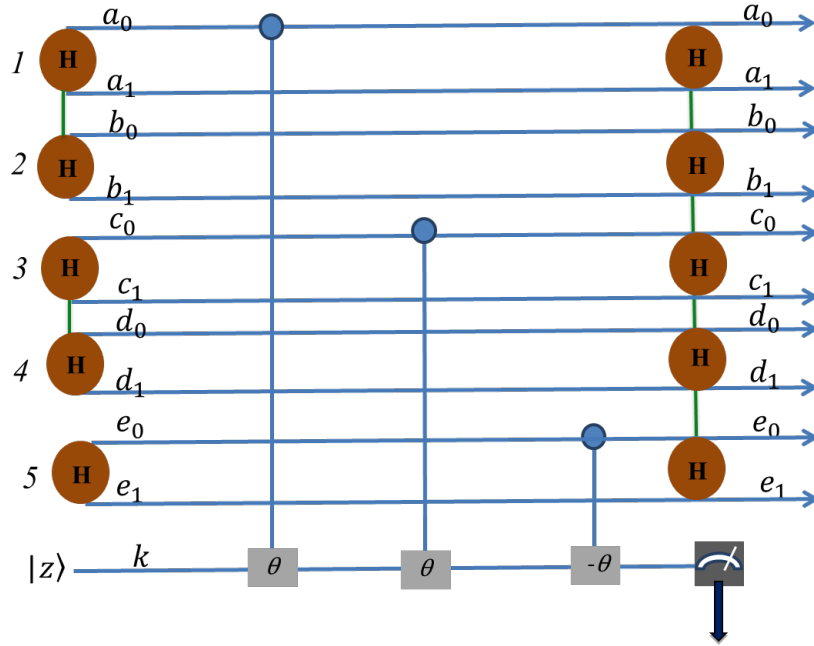
Chú ý rằng  $\left|Q_1^{(S)}\right\rangle_{12345}$ ,  $\left|Q_2^{(S)}\right\rangle_{12345}$  và  $\left|Q_3^{(S)}\right\rangle_{12345}$  có thể chuyển thành  $\left|Q_0^{(S)}\right\rangle_{12345}$  bằng cách chuyển hướng đi photon 4, photon 2 hoặc cả hai. Do đó, không làm mất đi tính tổng quát, chúng tôi sẽ thực hiện bước tiếp theo, bước 2, bắt đầu từ  $\left|Q_0^{(S)}\right\rangle_{12345}$ . Các thao tác trong bước 2 được phác thảo trong Hình 3.2.

Trong bước 2, một trạng thái kết hợp khác  $|z\rangle_k$  tương tác với các trạng thái  $|a_0\rangle_1$ ,  $|c_0\rangle_3$  và  $|e_0\rangle_5$  thông qua tương tác  $U_{1k}(\theta)$ ,  $U_{3k}(\theta)$  và  $U_{5k}(-\theta)$  tương ứng. Điều này làm rời các photon và trạng thái kết hợp như sau

$$\begin{aligned} \left|\Omega^{(S)}\right\rangle_{12345k} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\{[(|a_0 b_0 c_0 d_0 e_0\rangle + |a_0 b_0 c_1 d_1 e_1\rangle \\ &\quad + |a_1 b_1 c_0 d_0 e_1\rangle)_{12345}|z e^{i\theta}\rangle_k \\ &\quad + |a_1 b_1 c_1 d_1 e_0\rangle_{12345}|z e^{-i\theta}\rangle_k] \\ &\quad + |a_0 b_0 c_0 d_0 e_1\rangle_{12345}|z e^{2i\theta}\rangle_k \\ &\quad + (|a_0 b_0 c_1 d_1 e_0\rangle + |a_1 b_1 c_0 d_0 e_0\rangle \\ &\quad + |a_1 b_1 c_1 d_1 e_1\rangle)_{12345}|z\rangle_k\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Phép đo X-quadrature sau đó được thực hiện trên trạng thái kết hợp trong trạng thái  $\left|\Omega^{(S)}\right\rangle_{12345k}$ . Có ba trường hợp kết quả đo khả dĩ (i) Nếu kết quả là  $|z e^{\pm i\theta}\rangle_k$  thì trạng thái năm photon chính là trạng thái mong muốn  $\left|\Gamma^{(S)}\right\rangle_{12345}$ . (ii) Ngoài ra, nếu kết quả là  $|z e^{2i\theta}\rangle_k$  thì các photon bị tách ra ở trạng thái rời  $|a_0 b_0 c_0 d_0 e_1\rangle_{12345}$ . Điều này hoàn toàn không có nghĩa là giao thức thất bại bởi vì  $|a_0 b_0 c_0 d_0 e_1\rangle_{12345}$  có thể được đưa về trạng thái ban đầu  $|a_0 b_0 c_0 d_0 e_0\rangle_{12345}$  bằng việc chuyển hướng đi của photon 5 và toàn bộ quá trình sẽ được bắt đầu lại từ Bước 1. (iii) Cuối cùng, nếu kết quả là  $|z\rangle_k$  thì trạng thái các photon trở thành  $(|a_0 b_0 c_1 d_1 e_0\rangle + |a_1 b_1 c_0 d_0 e_0\rangle + |a_1 b_1 c_1 d_1 e_1\rangle)_{12345}/\sqrt{3}$ , đó cũng không phải là một tình huống thất bại. Trong tình huống này, chúng ta có thể phân biệt từng thành phần trong số ba thành phần  $|a_0 b_0 c_1 d_1 e_0\rangle_{12345}$ ,  $|a_1 b_1 c_0 d_0 e_0\rangle_{12345}$  và  $|a_1 b_1 c_1 d_1 e_1\rangle_{12345}$  bằng cách thực hiện tương tác Kerr chéo với thông số  $\theta$  giữa  $|a_0\rangle_1$  và một trạng

thái kết hợp  $|z'\rangle_{k'}$ . Tiếp theo là một tương tác Kerr chéo khác với thông số  $-\theta$  giữa  $|c_0\rangle_3$  và trạng thái kết hợp  $|z'e^{i\theta}\rangle_{k'}$ . Dễ dàng xác minh rằng nếu phép đo homodyne X mang lại kết quả  $|z'\rangle_{k'}$ ,  $|z'e^{i\theta}\rangle_{k'}$  hoặc  $|z'e^{2i\theta}\rangle_{k'}$  thì trạng thái của các photon là  $|a_1b_1c_1d_1e_1\rangle_{12345}$ ,  $|a_0b_0c_1d_1e_0\rangle_{12345}$  hoặc  $|a_1b_1c_0d_0e_0\rangle_{12345}$  tương ứng. Rõ ràng mỗi trạng thái trong số ba trạng thái này có thể được chuyển đổi thành  $|a_0b_0c_0d_0e_0\rangle_{12345}$  bằng các toán tử chuyển hướng đi thích hợp trên các photon liên quan, điều này cho phép toàn bộ quá trình được thực hiện lại từ Bước 1.



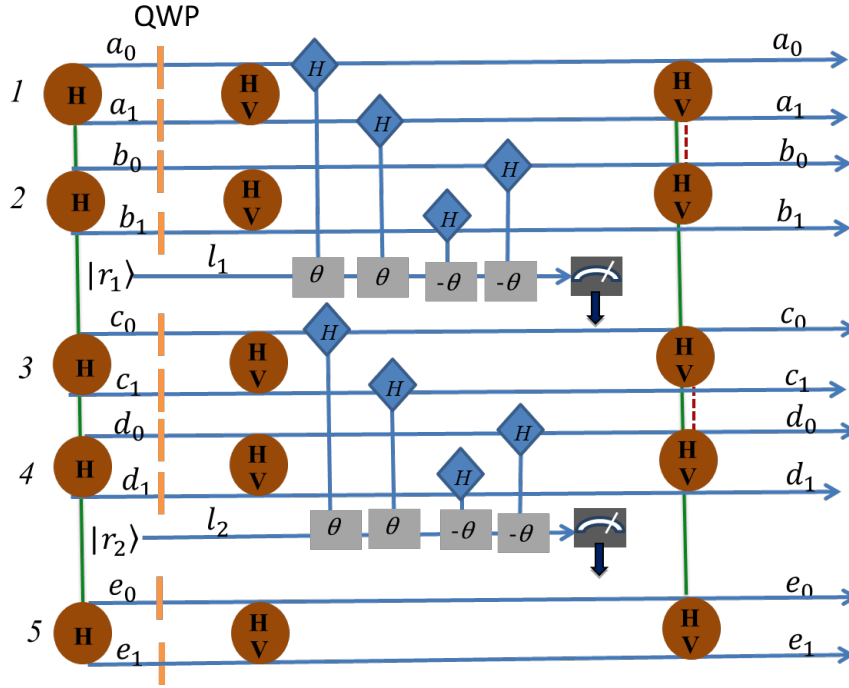
Hình 3.2: Bước 2 của quá trình tạo thành phần S-DOF của kênh lượng tử.  $|z\rangle$  là trạng thái kết hợp có biên độ dương  $z$ . Trong bước này, trạng thái mong muốn  $|\Gamma^{(S)}\rangle_{12345}$  trong công thức (3.5) có được nếu kết quả của phép đo X-quadrature là  $|ze^{\pm i\theta}\rangle$ .

Như mô tả ở trên, cho năm photon ở trạng thái ban đầu  $|\Phi_0^{(S)}\rangle_{12345} = |a_0b_0c_0d_0e_0\rangle_{12345}$  trong công thức (3.8), quá trình tạo trạng thái rối mong muốn trong S-DOF  $|\Gamma^{(S)}\rangle_{12345}$  được định nghĩa trong (3.5) có thể lặp đi lặp lại nhiều lần cho đến khi thành công.

Bây giờ chúng tôi chuyển sang quá trình tạo trạng thái rối ở P-DOF,  $|\Gamma^{(P)}\rangle_{12345}$ , định nghĩa trong (3.6) bắt đầu từ trạng thái tích  $|\Phi_0^{(P)}\rangle_{12345} = |HHHHH\rangle_{12345}$  trong công thức (3.9). Quá trình này cũng gồm hai bước chính.

Bước thứ nhất được vẽ trên Hình 3.3, đầu tiên mười QWP được đặt trên





Hình 3.3: Bước 1 của sơ đồ tạo trạng thái  $|\Gamma^{(P)}\rangle_{12345}$  trong công thức (3.6). Bước này làm rối photon 1 với photon 2 và photon 3 với photon 4 trong P-DOF. Vòng tròn có ký hiệu  $H, V$  bên trong ngụ ý một photon ở trạng thái chồng chập của các trạng thái phân cực  $|H\rangle$  và  $|V\rangle$ , trong khi  $|r_1\rangle$  và  $|r_2\rangle$  lần lượt là các trạng thái kết hợp có biên độ dương  $r_1$  và  $r_2$ . QWP là một tấm sóng phần tư. Các photon bị rối ở P-DOF được nối với nhau bằng các đường đứt nét.

mười đường đi của năm photon. Vì QWP chuyển  $|H\rangle$  thành  $(|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$ , trạng thái ban đầu  $|\Phi_0^{(P)}\rangle_{12345}$  chuyển sang

$$\begin{aligned} |\Phi_1^{(P)}\rangle_{12345} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} [ (|H\rangle + |V\rangle)_1 (|H\rangle + |V\rangle)_2 (|H\rangle + |V\rangle)_3 \\ &\quad (|H\rangle + |V\rangle)_4 (|H\rangle + |V\rangle)_5 ]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Thứ hai, cho phép thành phần  $|H\rangle$  của photon 1 tương tác với một trạng thái kết hợp  $|r_1\rangle_{l_1}$  thông qua phi tuyến Kerr chéo có thông số tương tác  $\theta$ . Sau đó, trạng thái kết hợp đã thay đổi được cho phép tương tác thêm với thành phần  $|H\rangle$  của photon 2 thông qua một phi tuyến Kerr chéo khác có thông số  $-\theta$ . Tương tự như vậy, thành phần  $|H\rangle$  của photon 3 và photon 4 được cho phép tương tác với trạng thái kết hợp  $|r_2\rangle_{l_2}$  thông qua tương tác phi tuyến Kerr chéo thông số  $\theta$  và  $-\theta$  tương ứng. Lưu ý rằng tương tác Kerr chéo giữa thành phần  $|H\rangle$  của một photon và trạng thái kết hợp được mô tả trong Hình 3.11. Sau các tương tác Kerr chéo được đề cập ở

trên,  $|\Phi_1^{(P)}\rangle_{12345} |r_1\rangle_{l_1} |r_2\rangle_{l_2}$  trở thành

$$\begin{aligned} |\Phi_2^{(P)}\rangle_{1234l_1l_2} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|\lambda_1\rangle_{1234l_1l_2} + |\lambda_2\rangle_{1234l_1l_2} \\ &\quad + |\lambda_3\rangle_{1234l_1l_2} + |\lambda_4\rangle_{1234l_1l_2})(|H\rangle + |V\rangle)_5, \end{aligned} \quad (3.18)$$

ở đây

$$\begin{aligned} |\lambda_1\rangle_{1234l_1l_2} &= \frac{1}{2}(|HHHH\rangle + |HHVV\rangle \\ &\quad + |VVHH\rangle + |VVVV\rangle)_{1234} |r_1\rangle_{l_1} |r_2\rangle_{l_2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} |\lambda_2\rangle_{1234l_1l_2} &= \frac{1}{2}[(|HHHV\rangle + |VVHV\rangle)_{1234} |r_1\rangle_{l_1} |r_2 e^{i\theta}\rangle_{l_2} \\ &\quad + (|HHVH\rangle + |VVVH\rangle)_{1234} |r_1\rangle_{l_1} |r_2 e^{-i\theta}\rangle_{l_2}], \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} |\lambda_3\rangle_{1234l_1l_2} &= \frac{1}{2}[(|HVHH\rangle + |HVVV\rangle)_{1234} |r_1 e^{i\theta}\rangle_{l_1} |r_2\rangle_{l_2} \\ &\quad + (|VHHH\rangle + |VHVV\rangle)_{1234} |r_1 e^{-i\theta}\rangle_{l_1} |r_2\rangle_{l_2}] \end{aligned} \quad (3.21)$$

và

$$\begin{aligned} |\lambda_4\rangle_{1234l_1l_2} &= \frac{1}{2}[(|HVHV\rangle)_{1234} |r_1 e^{i\theta}\rangle_{l_1} |r_2 e^{i\theta}\rangle_{l_2} \\ &\quad + |HVVH\rangle_{1234} |r_1 e^{i\theta}\rangle_{l_1} |r_2 e^{-i\theta}\rangle_{l_2} \\ &\quad + |VHHV\rangle_{1234} |r_1 e^{-i\theta}\rangle_{l_1} |r_2 e^{i\theta}\rangle_{l_2} \\ &\quad + |VHVH\rangle_{1234} |r_1 e^{-i\theta}\rangle_{l_1} |r_2 e^{-i\theta}\rangle_{l_2}]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Thứ ba, hai phép đo X-quadrature, một cho trạng thái kết hợp trên hướng  $l_1$  và một cho trạng thái kết hợp trên hướng  $l_2$  được thực hiện. Nếu các kết quả đo là  $|r_1\rangle_{l_1} |r_2\rangle_{l_2}$ ,  $|r_1\rangle_{l_1} |r_2 e^{\pm i\theta}\rangle_{l_2}$ ,  $|r_1 e^{\pm i\theta}\rangle_{l_1} |r_2\rangle_{l_2}$  hoặc  $|r_1 e^{\pm i\theta}\rangle_{l_1} |r_2 e^{\pm i\theta}\rangle_{l_2}$ , trạng thái của năm photon trở thành

$$\begin{aligned} |Q_0^{(P)}\rangle_{12345} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)_{12}(|HH\rangle + |VV\rangle)_{34} \\ &\quad (|H\rangle + |V\rangle)_5, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\left|Q_1^{(P)}\right\rangle_{12345} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)_{12}(|HV\rangle + |VH\rangle)_{34} (|H\rangle + |V\rangle)_5, \quad (3.24)$$

$$\left|Q_2^{(P)}\right\rangle_{12345} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle)_{12}(|HH\rangle + |VV\rangle)_{34} (|H\rangle + |V\rangle)_5 \quad (3.25)$$

hoặc

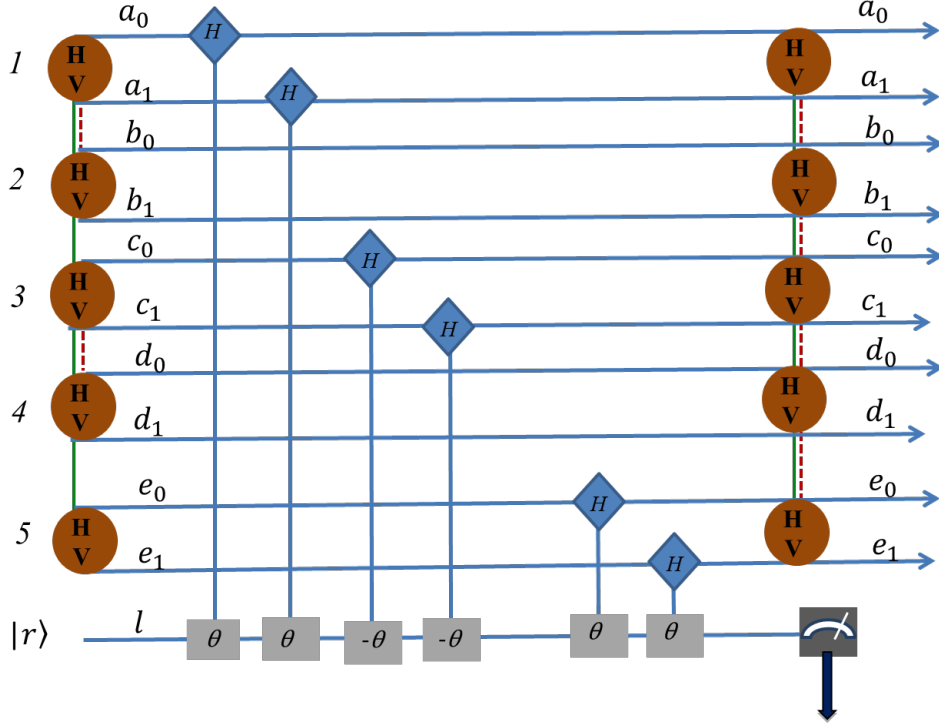
$$\left|Q_3^{(P)}\right\rangle_{12345} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle)_{12}(|HV\rangle + |VH\rangle)_{34} (|H\rangle + |V\rangle)_5 \quad (3.26)$$

một cách tương ứng. Sử dụng các HWP để chuyển phân cực của photon 4, photon 2 hoặc cả hai, chúng ta được  $\left|Q_0^{(P)}\right\rangle_{12345}$  từ  $\left|Q_1^{(P)}\right\rangle_{12345}$ ,  $\left|Q_2^{(P)}\right\rangle_{12345}$  hoặc  $\left|Q_3^{(P)}\right\rangle_{12345}$ . Do đó, chúng tôi sẽ thực hiện bước 2 của quá trình tạo trạng thái P-DOF  $|\Gamma^{(P)}\rangle_{12345}$  trong công thức (3.6) từ  $\left|Q_0^{(S)}\right\rangle_{12345}$ , quá trình này được thể hiện trên Hình 3.4.

Trong bước 2, đầu tiên, một trạng thái kết hợp  $|r\rangle_l$  tương tác lần lượt với thành phần  $|H\rangle$  của photon 1, photon 3 và photon 5 của trạng thái  $\left|Q_0^{(S)}\right\rangle_{12345}$  thông qua tương tác phi tuyến Kerr chéo thông số  $\theta$ ,  $-\theta$  và  $\theta$  tương ứng. Trạng thái tích  $\left|Q_0^{(P)}\right\rangle_{12345} |r\rangle_l$  do đó trở nên rối như sau

$$\begin{aligned} \left|\Omega^{(P)}\right\rangle_{12345l} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}[2|\Gamma^{(P)}\rangle_{12345} |re^{\pm i\theta}\rangle_l \\ &\quad + |HHVVH\rangle_{12345} |re^{2i\theta}\rangle_l \\ &\quad + (|HHHHV\rangle + |VVHHH\rangle \\ &\quad + |VVVVV\rangle)_{12345} |r\rangle_l]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Thứ hai, trạng thái kết hợp của  $\left|\Omega^{(P)}\right\rangle_{12345l}$  được đo bởi phép đo homodyne X mang lại một trong ba kết quả là  $|re^{\pm i\theta}\rangle_l$ ,  $|re^{2i\theta}\rangle_l$  hoặc  $|r\rangle_l$ . Nếu kết quả là  $|re^{\pm i\theta}\rangle_l$ , quá trình thành công ( $|\Gamma^{(P)}\rangle_{12345}$  có thể thu được). Tuy nhiên, nếu kết quả là  $|re^{2i\theta}\rangle_l$ , trạng thái photon của cô ấy là  $|HHVVH\rangle_{12345}$ , trạng thái này có thể chuyển thành  $\left|\Phi_0^{(P)}\right\rangle_{12345} = |HHHHH\rangle_{12345}$  bằng cách đảo ngược sự phân cực của cả hai photon 3 và photon 4. Cuối cùng, trong trường hợp kết quả là  $|r\rangle_l$  trạng thái của các photon trở thành



Hình 3.4: Bước 2 của quá trình tạo thành phần P-DOF của kênh lượng tử.  $|r\rangle$  là một trạng thái kết hợp có biên độ dương  $r$ . Trong bước này, trạng thái mong muốn  $|\Gamma^{(P)}\rangle_{12345}$  trong công thức (3.6) có được nếu kết quả phép đo X-quadrature là  $|re^{\pm i\theta}\rangle$ .

$(|HHHHV\rangle + |VVHHH\rangle + |VVVVV\rangle)_{12345}/\sqrt{3}$ . Trong trường hợp này, thành phần  $H$  của photon 4 và photon 5 được cho phép tương tác lẫn lượt với một trạng thái kết hợp  $|r'\rangle_{\nu}$  thông qua hai tương tác phi tuyến Kerr chéo với cùng thông số  $\theta$ . Trạng thái kết quả (không chuẩn hóa) của các photon và trạng thái kết hợp chính là  $|HHHHV\rangle_{12345} |r'e^{i\theta}\rangle_{\nu} + |VVHHH\rangle_{12345} |r'e^{2i\theta}\rangle_{\nu} + |VVVVV\rangle_{12345} |r'\rangle_{\nu}$ . Khi trạng thái kết hợp được đo, các photon trở thành một trong ba trạng thái  $|HHHHV\rangle_{12345}$  hoặc  $|VVHHH\rangle_{12345}$  hoặc  $|VVVVV\rangle_{12345}$ , phụ thuộc vào kết quả  $|r'e^{i\theta}\rangle_{\nu}$  hoặc  $|r'e^{2i\theta}\rangle_{\nu}$  hoặc  $|r'\rangle_{\nu}$  tương ứng. Mỗi trạng thái trong số ba trạng thái trên của các photon có thể được chuyển đổi thành  $|\Phi_0^{(P)}\rangle_{12345}$  trong công thức (3.9) bằng cách đảo ngược sự phân cực của photon 5, photon 1 và 2 hoặc cả năm photon. Điều này có nghĩa là khi hai kết quả cuối cùng xảy ra, chúng ta có thể khởi động lại toàn bộ quá trình và quy trình này có thể được lặp lại cho đến khi thành công.

Như vậy, thông qua hai giai đoạn, trạng thái rối giữa năm photon trong công thức (3.4) được tạo thành công với xác suất gần tất định (near-

deterministic).

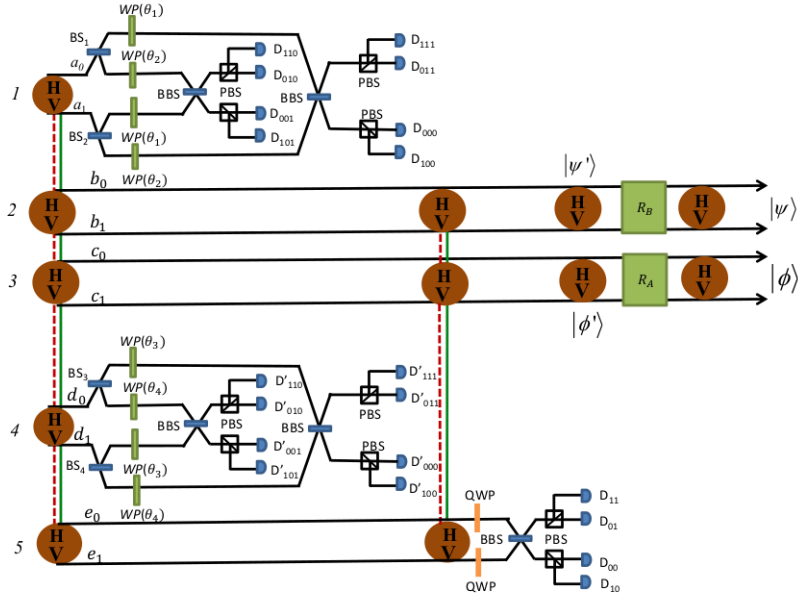
### 3.1.2 Viễn tạo hai chiều trạng thái tăng cường có kiểm soát

Ngay khi trạng thái rối tăng cường giữa năm photon (3.4) được tạo ra, nó có thể được sử dụng như một kênh lượng tử để thực hiện giao thức viễn tạo trạng thái hai chiều có kiểm soát trong cùng một giao thức. Trạng thái rối tăng cường  $|\Gamma\rangle_{12345}$  được phân bố theo cách Alice giữ hai photon 1 và 3, Bob giữa hai photon 2 và 4 trong khi Charlie giữ photon 5. Để đạt được xác suất thành công 100%, Alice, Bob và Charlie cần thống nhất các hoạt động thích hợp của mình như sẽ được trình bày chi tiết bên dưới (xem Hình 3.5).

Đầu tiên, Alice và Bob thực hiện độc lập các hoạt động của họ theo cách sau. Alice đặt hai bộ tách chùm không cân bằng  $BS_1$  và  $BS_2$  vào hai đường đi  $a_0$  và  $a_1$  của photon 1. Bộ tách chùm không cân bằng  $BS_1$  vào đường  $a_0$  có hệ số phản xạ (truyền qua)  $r_1 = \sqrt{\alpha_{01}^2 + \alpha_{11}^2}$  ( $t_1 = \sqrt{\alpha_{00}^2 + \alpha_{10}^2}$ ) trong khi đó  $BS_2$  trên mode  $a_1$  là  $r_2 = t_1$  ( $t_2 = r_1$ ). Đối với Bob, anh ta cũng sử dụng hai bộ tách chùm không cân bằng  $BS_3$  và  $BS_4$ , với  $BS_3$  đặt tại mode  $d_0$  và  $BS_4$  đặt tại mode  $d_1$  của photon 4. Hơn nữa, hệ số phản xạ (truyền qua) của bộ tách chùm không cân bằng  $BS_3$  được chọn là  $r_3 = \sqrt{\beta_{01}^2 + \beta_{11}^2}$  ( $t_3 = \sqrt{\beta_{00}^2 + \beta_{10}^2}$ ) và của  $BS_4$  là  $r_4 = t_3$  ( $t_4 = r_3$ ). Các bộ tách chùm không cân bằng này biến  $|\Gamma\rangle_{12345}$  thành

$$\begin{aligned}
|\Gamma_1\rangle_{12345} &= \frac{1}{2}[(t_1|a_{00}\rangle + r_1|a_{01}\rangle)_1|b_0c_0\rangle_{23}(t_3|d_{00}\rangle \\
&\quad + r_3|d_{01}\rangle)_4|e_0\rangle_5 + (t_1|a_{00}\rangle + r_1|a_{01}\rangle)_1|b_0c_1\rangle_{23} \\
&\quad (r_3|d_{11}\rangle + t_3|d_{10}\rangle)_4|e_1\rangle_5 + (r_1|a_{11}\rangle + t_1|a_{10}\rangle)_1 \\
&\quad |b_1c_0\rangle_{23}(t_3|d_{00}\rangle + r_3|d_{01}\rangle)_4|e_1\rangle_5 + (r_1|a_{11}\rangle \\
&\quad + t_1|a_{10}\rangle)_1|b_1c_1\rangle_{23}(r_3|d_{11}\rangle + t_3|d_{10}\rangle)_4|e_0\rangle_5] \\
&\quad \otimes |\Gamma^{(P)}\rangle_{12345}. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Tiếp theo, một tấm sóng quay góc  $\theta_1$  được ký hiệu bởi  $WP(\theta_1)$  được đặt trên đường  $a_{00}$  và đường  $a_{10}$  của photon 1, trong khi một tấm sóng khác với góc  $\theta_2$  ký hiệu là  $WP(\theta_2)$  đặt trên  $a_{01}$  và  $a_{11}$  của photon 1. Góc



Hình 3.5: Sơ đồ viễn tạo hai chiều có kiểm soát trạng thái tăng cường.  $BS_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) là bộ tách chùm không cân bằng có hệ số phản xạ (truyền qua)  $r_i$  ( $t_i$ ).  $WP(\theta_j)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) là một tấm sóng quay trạng thái phân cực một góc  $\theta_j$ . PBS là bộ tách phân cực cho phép photon phân cực ngang truyền qua và phản xạ photon phân cực dọc.  $D_{mkl}$ ,  $D'_{m'k'l'}$  và  $D_{pq}$  với  $m, k, l, m', k', l', p, q \in \{0, 1\}$  là 20 máy đo photon.  $|\psi'\rangle$ ,  $R_B$ ,  $|\phi'\rangle$  và  $R_A$  được định nghĩa trong các biểu thức (3.52), (3.53), (3.54) và (3.55) tương ứng.

$\theta_1$  và  $\theta_2$  được chọn như sau

$$\theta_1 = \arccos \frac{\alpha_{00}}{t_1} \quad (3.29)$$

và

$$\theta_2 = \arccos \frac{\alpha_{01}}{r_1}. \quad (3.30)$$

Sự lựa chọn  $r_1, r_2$  ( $t_1, t_2$ ),  $\theta_1$  và  $\theta_2$  có thể được thực hiện bởi Alice vì cô ấy biết thông tin về  $\alpha_{ij}$ . Tấm  $WP(\theta)$  tác động lên các trạng thái phân cực của photon như sau

$$WP(\theta)|H\rangle = \cos \theta|H\rangle + \sin \theta|V\rangle, \quad (3.31)$$

$$WP(\theta)|V\rangle = -\sin \theta|H\rangle + \cos \theta|V\rangle. \quad (3.32)$$

Tương tự, hai cặp  $WP$  cũng được Bob sử dụng. Một cặp  $WP(\theta_3)$  đặt trên mode  $d_{00}$  và  $d_{10}$  của photon 4, trong khi đó cặp còn lại  $WP(\theta_4)$  đặt vào đường đi  $d_{01}$  và  $d_{11}$  của photon 4. Các góc của  $WP$  mà Bob chọn là

$$\theta_3 = \arccos \frac{\beta_{00}}{t_3} \quad (3.33)$$

và

$$\theta_4 = \arccos \frac{\beta_{01}}{r_3}. \quad (3.34)$$

Lựa chọn  $r_3, r_4 (t_3, t_4), \theta_3$  và  $\theta_4$  có thể được thực hiện bởi Bob vì anh ấy biết thông tin của  $\beta_{ij}$ . Dưới tác động của  $WP(\theta_1), WP(\theta_2), WP(\theta_3)$  và  $WP(\theta_4)$ , trạng thái  $|\Gamma_1\rangle_{12345}$  chuyển thành

$$|\Gamma_2\rangle_{12345} = \frac{1}{4} \sum_i^{16} |\Psi_i\rangle_{12345}, \quad (3.35)$$

ở đây

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle_{12345} &= (\alpha_{00}|Ha_{00}\rangle + \alpha_{10}|Va_{00}\rangle + \alpha_{01}|Ha_{01}\rangle \\ &\quad + \alpha_{11}|Va_{01}\rangle)_1 |Hb_0\rangle_2 |Hc_0\rangle_3 (\beta_{00}|Hd_{00}\rangle \\ &\quad + \beta_{10}|Vd_{00}\rangle + \beta_{01}|Hd_{01}\rangle + \beta_{11}|Vd_{01}\rangle)_4 |He_0\rangle_5, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle_{12345} &= (\alpha_{00}|Ha_{00}\rangle + \alpha_{10}|Va_{00}\rangle + \alpha_{01}|Ha_{01}\rangle \\ &\quad + \alpha_{11}|Va_{01}\rangle)_1 |Hb_0\rangle_2 |Vc_0\rangle_3 (\beta_{00}|Vd_{00}\rangle \\ &\quad - \beta_{10}|Hd_{00}\rangle + \beta_{01}|Vd_{01}\rangle - \beta_{11}|Hd_{01}\rangle)_4 |Ve_0\rangle_5, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_3\rangle_{12345} &= (\alpha_{00}|Va_{00}\rangle - \alpha_{10}|Ha_{00}\rangle + \alpha_{01}|Va_{01}\rangle \\ &\quad - \alpha_{11}|Ha_{01}\rangle)_1 |Vb_0\rangle_2 |Hc_0\rangle_3 (\beta_{00}|Hd_{00}\rangle \\ &\quad + \beta_{10}|Vd_{00}\rangle + \beta_{01}|Hd_{01}\rangle + \beta_{11}|Vd_{01}\rangle)_4 |Ve_0\rangle_5, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_4\rangle_{12345} &= (\alpha_{00}|Va_{00}\rangle - \alpha_{10}|Ha_{00}\rangle + \alpha_{01}|Va_{01}\rangle \\ &\quad - \alpha_{11}|Ha_{01}\rangle)_1 |Vb_0\rangle_2 |Vc_0\rangle_3 (\beta_{00}|Vd_{00}\rangle \\ &\quad - \beta_{10}|Hd_{00}\rangle + \beta_{01}|Vd_{01}\rangle - \beta_{11}|Hd_{01}\rangle)_4 |He_0\rangle_5, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_5\rangle_{12345} &= (\alpha_{00}|Ha_{00}\rangle + \alpha_{10}|Va_{00}\rangle + \alpha_{01}|Ha_{01}\rangle \\ &\quad + \alpha_{11}|Va_{01}\rangle)_1 |Hb_0\rangle_2 |Hc_1\rangle_3 (\beta_{01}|Hd_{00}\rangle \\ &\quad + \beta_{11}|Vd_{11}\rangle + \beta_{00}|Hd_{10}\rangle + \beta_{10}|Vd_{10}\rangle)_4 |He_1\rangle_5, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_6\rangle_{12345} &= (\alpha_{00}|Ha_{00}\rangle + \alpha_{10}|Va_{00}\rangle + \alpha_{01}|Ha_{01}\rangle \\
&\quad + \alpha_{11}|Va_{01}\rangle)_1 |Hb_0\rangle_2 |Vc_1\rangle_3 (\beta_{01}|Vd_{11}\rangle \\
&\quad - \beta_{11}|Hd_{11}\rangle + \beta_{00}|Vd_{10}\rangle - \beta_{10}|Hd_{10}\rangle)_4 |Ve_1\rangle_5,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_7\rangle_{12345} &= (\alpha_{00}|Va_{00}\rangle - \alpha_{10}|Ha_{00}\rangle + \alpha_{01}|Va_{01}\rangle \\
&\quad - \alpha_{11}|Ha_{01}\rangle)_1 |Vb_0\rangle_2 |Hc_1\rangle_3 (\beta_{01}|Hd_{00}\rangle \\
&\quad + \beta_{11}|Vd_{11}\rangle + \beta_{00}|Hd_{10}\rangle + \beta_{10}|Vd_{10}\rangle)_4 |Ve_1\rangle_5,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_8\rangle_{12345} &= (\alpha_{00}|Va_{00}\rangle - \alpha_{10}|Ha_{00}\rangle + \alpha_{01}|Va_{01}\rangle \\
&\quad - \alpha_{11}|Ha_{01}\rangle)_1 |Vb_0\rangle_2 |Vc_1\rangle_3 (\beta_{01}|Vd_{11}\rangle \\
&\quad - \beta_{11}|Hd_{11}\rangle + \beta_{00}|Vd_{10}\rangle - \beta_{10}|Hd_{10}\rangle)_4 |He_1\rangle_5,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_9\rangle_{12345} &= (\alpha_{01}|Ha_{11}\rangle + \alpha_{11}|Va_{11}\rangle + \alpha_{00}|Ha_{10}\rangle \\
&\quad + \alpha_{10}|Va_{10}\rangle)_1 |Hb_1\rangle_2 |Hc_0\rangle_3 (\beta_{00}|Hd_{00}\rangle \\
&\quad + \beta_{10}|Vd_{00}\rangle + \beta_{01}|Hd_{01}\rangle + \beta_{11}|Vd_{01}\rangle)_4 |He_1\rangle_5,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_{10}\rangle_{12345} &= (\alpha_{01}|Ha_{11}\rangle + \alpha_{11}|Va_{11}\rangle + \alpha_{00}|Ha_{10}\rangle \\
&\quad + \alpha_{10}|Va_{10}\rangle)_1 |Hb_1\rangle_2 |Vc_0\rangle_3 (\beta_{00}|Vd_{00}\rangle \\
&\quad - \beta_{10}|Hd_{00}\rangle + \beta_{01}|Vd_{01}\rangle - \beta_{11}|Hd_{01}\rangle)_4 |Ve_1\rangle_5,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_{11}\rangle_{12345} &= (\alpha_{01}|Va_{11}\rangle - \alpha_{11}|Ha_{11}\rangle + \alpha_{00}|Va_{10}\rangle \\
&\quad - \alpha_{10}|Ha_{10}\rangle)_1 |Vb_1\rangle_2 |Hc_0\rangle_3 (\beta_{00}|Hd_{00}\rangle \\
&\quad + \beta_{10}|Vd_{00}\rangle + \beta_{01}|Hd_{01}\rangle + \beta_{11}|Vd_{01}\rangle)_4 |Ve_1\rangle_5,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_{12}\rangle_{12345} &= (\alpha_{01}|Va_{11}\rangle - \alpha_{11}|Ha_{11}\rangle + \alpha_{00}|Va_{10}\rangle \\
&\quad - \alpha_{10}|Ha_{10}\rangle)_1 |Vb_1\rangle_2 |Vc_0\rangle_3 (\beta_{00}|Vd_{00}\rangle \\
&\quad - \beta_{10}|Hd_{00}\rangle + \beta_{01}|Vd_{01}\rangle - \beta_{11}|Hd_{01}\rangle)_4 |He_1\rangle_5,
\end{aligned} \tag{3.47}$$



$$\begin{aligned}
|\Psi_{13}\rangle_{12345} &= (\alpha_{01}|Ha_{11}\rangle + \alpha_{11}|Va_{11}\rangle + \alpha_{00}|Ha_{10}\rangle \\
&\quad + \alpha_{10}|Va_{10}\rangle)_1 |Hb_1\rangle_2 |Hc_1\rangle_3 (\beta_{01}|Hd_{00}\rangle \\
&\quad + \beta_{11}|Vd_{11}\rangle + \beta_{00}|Hd_{10}\rangle + \beta_{10}|Vd_{10}\rangle)_4 |He_0\rangle_5,
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_{14}\rangle_{12345} &= (\alpha_{01}|Ha_{11}\rangle + \alpha_{11}|Va_{11}\rangle + \alpha_{00}|Ha_{10}\rangle \\
&\quad + \alpha_{10}|Va_{10}\rangle)_1 |Hb_1\rangle_2 |Vc_1\rangle_3 (\beta_{01}|Vd_{11}\rangle \\
&\quad - \beta_{11}|Hd_{11}\rangle + \beta_{00}|Vd_{10}\rangle - \beta_{10}|Hd_{10}\rangle)_4 |Ve_0\rangle_5,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_{15}\rangle_{12345} &= (\alpha_{01}|Va_{11}\rangle - \alpha_{11}|Ha_{11}\rangle + \alpha_{00}|Va_{10}\rangle \\
&\quad - \alpha_{10}|Ha_{10}\rangle)_1 |Vb_1\rangle_2 |Hc_1\rangle_3 (\beta_{01}|Hd_{00}\rangle \\
&\quad + \beta_{11}|Vd_{11}\rangle + \beta_{00}|Hd_{10}\rangle + \beta_{10}|Vd_{10}\rangle)_4 |Ve_0\rangle_5,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_{16}\rangle_{12345} &= (\alpha_{01}|Va_{11}\rangle - \alpha_{11}|Ha_{11}\rangle + \alpha_{00}|Va_{10}\rangle \\
&\quad - \alpha_{10}|Ha_{10}\rangle)_1 |Vb_1\rangle_2 |Vc_1\rangle_3 (\beta_{01}|Vd_{11}\rangle \\
&\quad - \beta_{11}|Hd_{11}\rangle + \beta_{00}|Vd_{10}\rangle - \beta_{10}|Hd_{10}\rangle)_4 |He_0\rangle_5.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Tiếp tục, Alice trộn hai mode  $a_{01}$  và  $a_{10}$  bởi một bộ tách chùm cân bằng BBS và hai mode  $a_{00}$  và  $a_{11}$  trên một BBS khác, trong khi Bob trộn mode  $d_{01}$  và  $d_{10}$  bằng một BBS và hai mode  $d_{00}$  và  $d_{11}$  cũng được trộn với nhau bằng một BBS. Tiếp theo, phía sau các BBS, Alice (Bob) bố trí bốn bộ tách phân cực PBS và tám máy đo photon  $D_{mkl}$  ( $D'_{m'k'l'}$ ), với  $m, k, l$  ( $m', k', l'$ )  $\in \{0, 1\}$ , được chỉ trên Hình 3.5, để phát hiện đường đi của photon 1 (photon 4). Lưu ý rằng nhãn máy đo photon được làm theo cách  $m$  ( $m'$ ) báo hiệu sự phân cực photon:  $m = 0$  ( $m' = 0$ ) chỉ phân cực  $H$  và  $m = 1$  ( $m' = 1$ ) chỉ phân cực  $V$ , trong khi  $k, l$  ( $k', l'$ ) xác định đường đi của photon. Một trong tám máy đo photon  $D_{mkl}$  ( $D'_{m'k'l'}$ ) sẽ phát tín hiệu và giá trị  $m, k, l$  ( $m', k', l'$ ) tương ứng khi máy đo phát tín hiệu sẽ được Alice (Bob) thông báo công khai. Tại thời điểm này, cần nhấn mạnh rằng với các giá trị đã công bố  $m, k, l$  ( $m', k', l'$ ), Bob (Alice) vẫn chưa thu được trạng thái  $|\psi\rangle$

( $|\phi\rangle$ ) mà Alice (Bob) muốn chuẩn bị cho anh ấy (cô ấy). Như đã nói trước đây, việc hoàn thành giao thức phụ thuộc vào quyết định của Charlie. Nếu, vì một lý do nào đó, Charlie không muốn giao thức được hoàn thành, cô ấy sẽ không làm gì cả. Ngược lại, cô ấy sẽ làm như sau. Charlie cho các mode  $e_0$  và  $e_1$  của photon 5 đi qua một BBS, tiếp tục cho đi qua hai QWP. Sau đó, Charlie dò photon 5 bằng cách sử dụng hai PBS và bốn máy đo photon  $D_{pq}$ , với  $p, q \in \{0, 1\}$ :  $p = 0$  ( $p = 1$ ) chỉ phân cực  $H$  (phân cực  $V$ ) và  $q$  chỉ đường đi của photon. Một trong bốn máy đo photon  $D_{pq}$  sẽ phát tín hiệu và được ghi lại bằng các giá trị  $p, q$  sau đó sẽ được thông báo trên kênh truyền cổ điển. Sau khi Alice, Bob và Charlie lần lượt phát hiện thấy các photon 1, 4 và 5 (bởi các máy đo  $D_{mkl}$ ,  $D'_{m'k'l'}$  và  $D_{pq}$  với  $m, k, l, m', k', l', p, q$  là kết quả được ghi lại), trạng thái của hai photon còn lại 2 và 3 sẽ tách rời nhau. Trạng thái của photon 2 của Bob có dạng

$$|\psi'\rangle_2 = R_B^+ |\psi\rangle_2, \quad (3.52)$$

với

$$R_B = (X_P^{(m)} Z_P^{(m \oplus p \oplus 1)}) \otimes (X_S^{(k \oplus l)} Z_S^{(k \oplus q)}), \quad (3.53)$$

trong khi trạng thái của photon 3 của Alice có dạng

$$|\phi'\rangle_3 = R_A^+ |\phi\rangle_3, \quad (3.54)$$

với

$$R_A = (X_P^{(m')} Z_P^{(m' \oplus p \oplus 1)}) \otimes (X_S^{(k' \oplus l')} Z_S^{(k' \oplus q)}). \quad (3.55)$$

Ta thấy rõ ràng từ (3.52) và (3.54) rằng, trong bước cuối cùng Bob chỉ cần tác động  $R_B$  lên photon 2 của anh ấy và Alice tác động  $R_A$  lên photon 3 của cô ấy để hoàn thành việc truyền thông tin qua lại với nhau. Nhắc lại rằng việc tạo trạng thái qua lại như này được đặt dưới sự kiểm soát của Charlie vì vậy giao thức này được gọi là “Viễn tạo hai chiều trạng thái tăng cường có kiểm soát” và nó được thực hiện thông qua rối tăng cường năm photon.

## 3.2 Viễn tác toán tử có kiểm soát

Máy tính lượng tử khai thác những đặc điểm kỳ lạ của cơ học lượng tử như chồng chập trạng thái lượng tử và giao thoa lượng tử để đạt được

những ưu thế lượng tử [167]. Tuy nhiên, máy tính lượng tử rất khó khai thác. Để có thể hoạt động với một quy mô lớn, máy tính lượng tử phải chứa một số qubit lớn cũng như có khả năng chịu lỗi cao. Bên cạnh những trở ngại nghiêm trọng bên ngoài như sự suy giảm liên kết do tương tác với môi trường, việc lưu trữ một cách an toàn và thao tác một cách đáng tin cậy trên một số lượng lớn qubit là một thách thức vì các qubit có thể ảnh hưởng lẫn nhau theo cách không mong muốn tạo ra các loại nhiễu không mong muốn dẫn đến các kết quả tính toán sai. Một giải pháp đầy hứa hẹn để thoát khỏi trở ngại nội tại được đề cập ở trên là triển khai máy tính lượng tử phân phối theo cách mà không phải tất cả số lượng qubit có liên quan được lưu giữ trong một máy tính ở một nơi duy nhất, mà có một mạng lưới các máy tính lượng tử được đặt ở những nơi khác nhau và mỗi một nơi trong số đó chỉ giữ một số lượng nhỏ qubit và việc tính toán sẽ được thực hiện trên tất cả các qubit ở nhiều nơi khác nhau [168, 169] (xem một ví dụ thực tế gần đây của mạng lượng tử nhiều nút trong [170]). Vì tính toán lượng tử là một quá trình vật lý xử lý việc thực hiện các toán tử unita trên các trạng thái lượng tử, theo sau là các phép đo lượng tử, do vậy khi tính toán lượng tử được phân bố ở nhiều nơi thì có hai vấn đề nảy sinh: Làm thế nào chỉ bằng các thao tác địa phương và giao tiếp cổ điển (LOCC) mà vẫn có thể (i) chuyển các trạng thái lượng tử từ nơi này sang nơi khác trong mạng lượng tử một cách an toàn và đáng tin cậy và (ii) triển khai tối ưu các toán tử trên một trạng thái từ xa hoặc trên các trạng thái trong không gian ở những nơi cách biệt. Vấn đề (i) đã được giải quyết một cách hữu hiệu bằng viễn chuyển trạng thái lượng tử (QT), giao thức được phát minh lần đầu vào năm 1993 bởi Bennet và cộng sự [11]. Đối với vấn đề (ii), Huelga và cộng sự [171] đã đưa ra một nhiệm vụ lượng tử phi địa phương được gọi là viễn tác toán tử hay triển khai toán tử từ xa (tên tiếng Anh là Remote implementation of operator, viết tắt là RIO). Trong RIO, giả sử Bob sở hữu một toán tử unita  $U$ , nhằm mục đích tác động chỉ thông qua LOCC, trên một trạng thái tùy ý  $|\psi\rangle$  do đối tác từ xa Alice nắm giữ. Cụ thể, Bob có  $U$  nhưng không giữ trạng thái  $|\psi\rangle$ , trong khi đó Alice có trạng thái  $|\psi\rangle$  nhưng không có  $U$ . Tất nhiên, nhiệm vụ như vậy có thể được thực hiện bằng viễn chuyển trạng thái lượng tử hai chiều (tên tiếng Anh là Bidirectional quantum teleportation, viết tắt là BQT) bằng

cách: Alice viễn chuyển trạng thái  $|\psi\rangle$  cho Bob. Sau đó, Bob dùng  $U$  tác động lên trạng thái vừa nhận được và viễn chuyển trạng thái mới  $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$  trở lại cho Alice. Tuy nhiên, khi thực hiện hai lần quá trình QT thì kênh lượng tử và số bit cổ điển cần sử dụng để hoàn thành nhiệm vụ sẽ tăng gấp đôi. Nếu có thể tìm một phương pháp nào đó mà làm giảm chi phí cần thiết thì đó là điều thực sự đáng quan tâm. Dựa vào RIO, Huelga và cộng sự [172] chứng minh rằng chi phí đầu vào sẽ ít hơn so với khi thực hiện BQT, cụ thể nếu dùng hai lần QT giao thức sẽ cần hai kênh rối lượng tử và bốn bit cổ điển để giao tiếp, trong khi đó nếu sử dụng RIO thì chỉ cần hai kênh rối lượng tử và ba bit cổ điển. Trên thực tế, một giao thức đơn giản đã được tạo ra trong [172] làm giảm tổng tài nguyên tối thiểu đã nói, nhưng chỉ thành công trong một nửa số trường hợp đối với toán tử cần được viễn tác  $U$  là toán tử unita tùy ý không xác định. Đáng chú ý, các tác giả của [172] cũng phát hiện ra rằng nếu  $U$  thuộc một trong hai nhóm toán tử bị hạn chế bởi một điều kiện nhất định thì nó có thể được viễn tác với xác suất tối đa chỉ tiêu tốn tổng cộng một kênh rối và hai bit cổ điển, điều đó tiết kiệm đáng kể so với phương pháp BQT. Lưu ý rằng hai nhóm toán tử bị hạn chế được đề cập trên thực tế là các phép quay xung quanh một hướng, và vì vậy nó vẫn rất rộng do góc quay nhận các giá trị liên tục. Một thử nghiệm để viễn tác một phép quay được trình bày trong [173].

Ý tưởng về RIO trong [171] được mở rộng trong [174] với việc có nhiều bên cùng tham gia, cụ thể một nhóm gồm  $n$  thành viên Bob 1, Bob 2, ..., Bob  $n$  cùng hợp tác gửi một phép quay đến cho Alice khi  $n + 1$  bên cùng chia sẻ kênh lượng tử là trạng thái rối GHZ  $n$  qubit. Trong [175] một giao thức RIO cũng đã được đề xuất để xử lý việc viễn tác toán tử hai qubit phi định xứ  $U_{AB}$  trên hai phần  $A$  và  $B$ , một nằm trong trạng thái  $|\Psi\rangle_A$  tại vị trí của Alice và một nằm trong trạng thái  $|\Phi\rangle_B$  tại vị trí của Bob. Một lần nữa trong trường hợp này BQT được chứng minh là hữu ích. Cụ thể, Alice (Bob) chuyển qubit của cô ấy (anh ấy) tới Bob (Alice), người mà đầu tiên sẽ tác động toán tử  $U_{AB}$  lên  $|\Psi\rangle_A|\Phi\rangle_B$  để đạt  $|\Theta\rangle_{AB} = U_{AB}|\Psi\rangle_A|\Phi\rangle_B$  sau đó chuyển qubit  $A$  ( $B$ ) của  $|\Theta\rangle_{AB}$  lại cho Alice (Bob). Do đó, tài nguyên tổng thể tối đa cần thiết cho việc viễn tác toán tử  $U_{AB}$  giống như để viễn tác toán tử một qubit  $U$  trong [171]. Các tác giả trong [175], thông qua

một số ví dụ cụ thể, đã chứng minh rằng nhìn chung thực tế không cần quá nhiều tài nguyên. Ví dụ, một kênh rối lượng tử cộng với hai bit cổ điển là cần thiết và đủ để triển khai cổng NOT có điều khiển (CNOT) trên hai qubit ở xa nhau. Thí nghiệm viễn chuyển CNOT với độ tin cậy trung bình 0,84 đã được thực hiện trong [176].

Từ một góc nhìn khác về RIO, Reznik và các cộng sự [177] quan tâm đến việc viễn tác một nhóm các toán tử mà thông tin về toán tử đó được chia cho các đối tác ở xa nhau. Ví dụ, hãy xét một toán tử quay có dạng  $U_A = \exp(i\alpha_A\sigma_B)$  ( $\alpha_A$  là phép quay góc,  $\sigma_B = \vec{n}_B \cdot \vec{\sigma}$  với  $\vec{n}_B$  là vectơ đơn vị dọc theo hướng của trục quay và  $\vec{\sigma}$  là một toán tử vectơ với ba thành phần là ma trận Pauli  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ) và toán tử hai qubit  $U_{AB} = \exp(i\eta\sigma_A\sigma_B)$  ( $\eta$  là độ lớn tương tác). Nếu giá trị của  $\alpha_A$  và hướng  $\vec{n}_A$  được xác định bởi Alice trong khi hướng  $\vec{n}_B$  được điều khiển bởi Bob, thì giao thức QT hoặc BQT sẽ không hữu ích khi tác động  $U_A$  lên một qubit và  $U_{AB}$  lên hai qubit ở xa  $A$  và  $B$ . Để viễn tác các toán tử khi thông tin về nó được phân tách như vậy, các tác giả của [177] đã phát triển một cách tiếp cận khác thường bằng cách đưa vào một đối tượng, được gọi là “stator”, thể hiện mối tương quan lượng tử giữa các trạng thái của một đối tác này và các toán tử của đối tác kia. Một stator phù hợp có thể được chuẩn bị trước và lưu lại sau này sử dụng. Như được chỉ ra trong [177], cho một stator phù hợp, một toán tử mong muốn tác động lên hệ thống của Alice được thực hiện từ xa bởi các hoạt động địa phương của Bob trong hệ thống của anh ấy. Cách tiếp cận dựa trên stator cũng hoạt động trên hệ thống nhiều chiều cũng như trên nhiều hệ thống. Trong [178] các trạng thái rối không cực đại được sử dụng để viễn tác toán tử phi định xứ  $U_{AB} = \exp(i\eta\sigma_A\sigma_B)$  với ( $\eta \ll 1$ ) gần tất định mặc dù kênh lượng tử cần sử dụng rất nhỏ. Hơn nữa, một phiên bản khác của RIO đã được đề xuất trong [179] với tình huống khi một toán tử unita được triển khai từ xa trên hai bản sao của một trạng thái lượng tử. Ở đó đã chỉ ra rằng nếu hai bản sao được đặt ở một nơi thì nhiệm vụ này có thể được thực hiện bằng cách tiêu tốn ít tài nguyên hơn khi thực hiện hai lần triển khai độc lập, mỗi lần trên một bản sao của trạng thái. Một tình huống khó khăn hơn khi hai trạng thái giống hệt nhau nằm ở hai nơi riêng biệt cũng đã được thảo luận trong [179]. Một cách khác để mở rộng RIO cũng khả thi là chuyển sang đa qubit như đã

được thực hiện trong [180].

Trên thực tế, để viển tác toán tử trên  $N$  qubit của một toán tử chưa biết một phần nằm trong một giới hạn đặc biệt thì tài nguyên lượng tử cần thiết chỉ là  $N$  nguồn rối, bằng một nửa số đó đối với sơ đồ dựa trên BQT. Giao thức mà được gọi là RIO có kiểm soát (viết tắt là CRIO) với toán tử đa qubit không xác định một phần đã được nghiên cứu trong [181] bằng cách sử dụng các trạng thái GHZ đa bên (xem thêm [182]). Phương pháp BQT và phương thức trong [180] có thể được kết hợp để tạo thành một giao thức kết hợp cho RIO [183]. Từ các tài liệu tham khảo được trích dẫn ở trên, kỹ thuật BQT dường như được sử dụng phổ biến. Tuy nhiên, điều này không phải như vậy trong tất cả các trường hợp khả dĩ: có những loại RIO không thực hiện được từ kỹ thuật đó, ví dụ như trong [177, 184]. Nhiều công bố sử dụng các qubit được biểu diễn bằng sự chồng chập tuyến tính của các trạng thái logic  $|0\rangle$  và  $|1\rangle$  với CNOT được ngầm giả định có sẵn. Tuy nhiên, trên thực tế, bất kỳ giao thức thực nào cũng được thực hiện với các qubit vật lý mà trạng thái  $|0\rangle$  ( $|1\rangle$ ) tương ứng với trạng thái cơ bản (kích thích) của hai mức nguyên tử, trạng thái spin-down (spin-up) của hạt spin-1/2 hoặc trạng thái phân cực ngang (dọc) của một photon, v.v. Trong mô hình quang học, các qubit vật lý tốt là các photon chống lại sự suy giảm liên kết do môi trường gây ra và lan truyền nhanh nhất [185]. Các trạng thái đơn photon có thể dễ dàng thao tác nhưng điểm yếu là không có tương tác photon-photon trực tiếp khiến việc tính toán lượng tử dựa trên photon không hiệu quả bằng các công cụ quang học tuyến tính. Mặc dù Knill, Laflamme và Milburn [73] đã biện minh cho khả năng thực hiện các phép tính lượng tử trên photon bằng cách sử dụng các thiết bị quang học tuyến tính và bổ sung thêm máy đo photon hiệu suất cao, nhưng đề xuất của họ vẫn không được chấp nhận vì nó yêu cầu một chi phí lớn. Tuy vậy, nếu dựa vào các yếu tố phi tuyến như phi tuyến Kerr chéo thì tương tác giữa các photon có thể được thực hiện. Mặc dù các phi tuyến Kerr chéo mạnh vẫn còn nhiều thách thức, nhưng những tiến bộ kỳ diệu trong lĩnh vực này là lạc quan và nhiều công trình đã sử dụng chúng trong nhiều bối cảnh khác nhau [51–57]. Thực tế hơn cả là phát triển giao thức RIO với các photon và rối tăng cường hơn là với các qubit và rối thông thường [171, 172, 186]. Thật vậy, các giao thức như vậy gần đây đã được

thực hiện để viễn tác một toán tử lên photon đơn thông qua trạng thái rối tăng cường và sự hỗ trợ từ phi tuyến Kerr chéo [187]. Trong phần này, chúng tôi thực hiện nhiệm vụ như vậy nhưng nâng cao mức độ bảo mật cho giao thức RIO trong [187] bằng cách thêm người giám sát đóng vai trò là người kiểm soát có quyền quyết định có hay không việc hoàn thành nhiệm vụ RIO.

### 3.2.1 Viễn tác toán tử có kiểm soát trên photon ở bậc tự do không gian

Giả Alice và Bob là hai đối tác chịu sự kiểm soát của Charlie. Ba người đang ở những nơi xa cách và chỉ có thể giao tiếp thông qua các phương tiện cổ điển. Alice có một photon  $a$  với sự phân cực nhất định lan truyền đồng thời theo hai hướng khác nhau  $x_0$  và  $x_1$ . Không mất tính tổng quát, chúng tôi giả định rằng sự phân cực của photon là theo phương dọc ( $V$ ), do đó trạng thái photon của Alice có dạng

$$|\psi\rangle_a = |\psi^{(S)}\rangle_a |V\rangle_a, \quad (3.56)$$

$$|\psi^{(S)}\rangle_a = (\alpha |x_0\rangle + \beta |x_1\rangle)_a, \quad (3.57)$$

với hệ số mà Alice không được phép biết  $\alpha, \beta$  thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Chỉ mục ( $S$ ) ngụ ý rằng photon được mã hóa trong S-DOF,  $|x_j\rangle_a$  với  $j = 0, 1$  là ký hiệu photon  $a$  đi theo đường  $x_j$  và  $|V\rangle_a$  là chỉ photon  $a$  có phân cực dọc. Bob được trang bị một thiết bị có thể thực hiện một phép biến đổi unita như sau

$$U^{(S)} = \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

lên một photon bất kỳ ở S-DOF:

$$U^{(S)} |\psi^{(S)}\rangle = |\psi'^{(S)}\rangle = \alpha' |x_0\rangle + \beta' |x_1\rangle, \quad (3.59)$$

$$\alpha' = \alpha u - \beta v^*, \quad \beta' = \alpha v + \beta u^*. \quad (3.60)$$

Charlie là người điều khiển sẽ quyết định việc hoàn thành các nhiệm vụ liên quan. Chúng ta sẽ xem xét ba nhiệm vụ. Nhiệm vụ đầu tiên là thiết kế một giao thức cho Alice và Bob hợp tác dưới sự kiểm soát của Charlie để

cuối cùng, dưới sự quyết định của Charlie, Alice sẽ có một photon ở trạng thái

$$U^{(S)} |\psi\rangle = (U^{(S)} |\psi^{(S)}\rangle) |V\rangle = |\psi'^{(S)}\rangle |V\rangle. \quad (3.61)$$

chỉ bằng các giao tiếp cổ điển và thao tác địa phương. Nhiệm vụ này có thể được coi như một CRIO trong đó Bob triển khai từ xa toán tử của mình  $U^{(S)}$  lên trạng thái của Alice  $|\psi^{(S)}\rangle$  dưới sự kiểm soát của Charlie. CRIO như vậy có thể thực hiện được nếu Alice, Bob và Charlie chia sẻ trước đó nguồn rối lượng tử thích hợp. Như đã biết từ [171, 188, 189], kênh lượng tử thông thường có thể là hai trạng thái GHZ, được tạo bởi sáu photon (ba photon trên mỗi trạng thái GHZ). Điều mong muốn là giảm thiểu số lượng photon trong kênh lượng tử, đặc biệt khi nhiều giao thức CRIO được yêu cầu. Nếu thay vì rối thông thường, khi rối tăng cường được sử dụng thì lượng thông tin chứa trong hai trạng thái GHZ với 6 photon sẽ bằng với lượng thông tin chứa trong một trạng thái GHZ ở hai bậc tự do khác nhau. Rõ ràng việc sử dụng rối tăng cường tiết kiệm đáng kể số lượng photon phân phối giữa những người tham gia, do đó giảm chi phí sử dụng tài nguyên lượng tử. Một kỷ lục đáng chú ý về việc tạo ra rối tăng cường đã được báo cáo trong [190]: mười tám qubit đã được rối thành công chỉ với sáu photon, mỗi photon mang thông tin của ba qubit bằng cách tận dụng đồng thời ba loại DOF của photon.

Đối với nhiệm vụ đầu tiên của CRIO được đề cập ở trên, chúng tôi sử dụng một (không phải hai) trạng thái GHZ ba photon rối với nhau ở hai DOF, có thể được tạo ra bởi một số sơ đồ [26, 191, 192]. Vì photon  $a$  là trạng thái mà toán tử  $U^{(S)}$  sẽ tác động trong S-DOF, do đó một trong hai DOF của trạng thái rối tăng cường GHZ phải là S-DOF. Đối với loại DOF thứ hai, chúng ta có thể chọn P-DOF. Vì vậy, chúng tôi sẽ làm việc với trạng thái tăng cường GHZ sau

$$|Q^{(SP)}\rangle_{ABC} = |Q^{(S)}\rangle_{ABC} |Q^{(P)}\rangle_{ABC}, \quad (3.62)$$

$$|Q^{(S)}\rangle_{ABC} = |a_0\rangle_A |b_0\rangle_B |c_0\rangle_C + |a_1\rangle_A |b_1\rangle_B |c_1\rangle_C, \quad (3.63)$$

$$|Q^{(P)}\rangle_{ABC} = |H\rangle_A |H\rangle_B |H\rangle_C + |V\rangle_A |V\rangle_B |V\rangle_C, \quad (3.64)$$

ở đây chỉ mục  $(P)$  và  $(SP)$  chỉ P-DOF riêng biệt và S-DOF cùng P-DOF tồn tại cùng nhau, trong khi  $|H\rangle_{A(B,C)}$  ( $|V\rangle_{A(B,C)}$ ) biểu diễn trạng thái



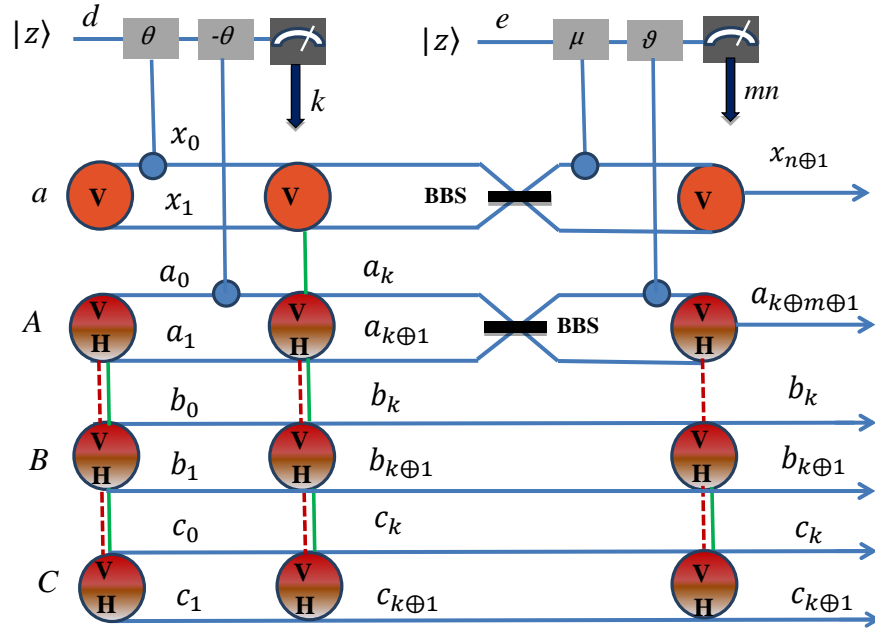
của photon  $A$  ( $B, C$ ) được phân cực theo chiều ngang (theo chiều dọc). Trạng thái tăng cường GHZ như vậy đã được sử dụng trong (3.62) cho giao thức so sánh bí mật lượng tử (tiếng Anh là quantum private comparison) trong [193]. Lưu ý rằng trong các trạng thái (3.63) và (3.64), để đơn giản, chúng tôi bỏ qua hệ số chuẩn hóa  $1/\sqrt{2}$  và trong tất cả các công thức tiếp theo ở mục 3.2, chúng tôi cũng sẽ bỏ qua bất kỳ hệ số nào như vậy. Điều này đơn giản hóa các công thức toán học và chỉ ảnh hưởng đến xác suất của một phép đo nhất định, chứ không ảnh hưởng đến tổng xác suất thành công là 100% trong giao thức của chúng tôi. Trạng thái (3.62) được tạo ra từ ba photon nhưng dung lượng thông tin của nó nhiều nhất là sáu qubit vì mỗi photon có giá trị bằng hai qubit nhờ được mã hóa đồng thời trong hai DOF.

Để hoàn thành nhiệm vụ CRIO, các photon  $A$ ,  $B$  và  $C$  của trạng thái (3.62) được phân bổ cho ba người. Cụ thể photon  $A$ ,  $B$  và  $C$  được đưa cho Alice, Bob và Charlie tương ứng. Lúc này trạng thái chung của bốn photon ban đầu là

$$|\psi\rangle_a |Q^{(SP)}\rangle_{ABC} = |\Phi^{(S)}\rangle_{aABC} |V\rangle_a |Q^{(P)}\rangle_{ABC}, \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} |\Phi^{(S)}\rangle_{aABC} &= \alpha |x_0\rangle_a |a_0\rangle_A |b_0\rangle_B |c_0\rangle_C \\ &\quad + \alpha |x_0\rangle_a |a_1\rangle_A |b_1\rangle_B |c_1\rangle_C \\ &\quad + \beta |x_1\rangle_a |a_0\rangle_A |b_0\rangle_B |c_0\rangle_C \\ &\quad + \beta |x_1\rangle_a |a_1\rangle_A |b_1\rangle_B |c_1\rangle_C. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Nhiệm vụ CRIO có thể được thực hiện qua hai giai đoạn như sau. Giai đoạn một ta chỉ xét đến thành phần S-DOF của kênh lượng tử, cụ thể là  $|\Phi^{(S)}\rangle_{aABC}$ . Để tránh rườm rà, thành phần P-DOF ( $|V\rangle_a |Q^{(P)}\rangle_{ABC}$ ) sẽ tạm thời không được viết ra. Mỗi người tham gia cần thực hiện các hoạt động tại địa phương của mình một cách chính xác. Alice là người đầu tiên hoạt động và thao tác của cô ấy được hiển thị trong Hình 3.6. Trước hết, cô ấy sử dụng trạng thái kết hợp phụ trợ  $|z\rangle_d$  với biên độ dương  $z$  và đi theo hướng  $d$  để làm rối photon  $a$  với các photon  $A, B, C$  bằng cách cho trạng thái kết hợp tương tác với trạng thái  $|x_0\rangle_a$  và  $|a_0\rangle_A$  thông qua phi



Hình 3.6: Hoạt động của Alice trong giai đoạn thứ nhất của quá trình CRIO trên photon ở bậc tự do không gian. Vòng tròn có hai đường đi kèm biểu thị một photon truyền đồng thời dọc theo hai đường, trong khi vòng tròn có một đường đi kèm là một photon chỉ truyền theo một đường. Vòng tròn có ký hiệu  $V, H$  bên trong biểu diễn photon tồn tại đồng thời ở trạng thái phân cực dọc và ngang, trong khi đó, vòng tròn với  $V$  chỉ photon phân cực  $V$ .  $|z\rangle$  là trạng thái kết hợp với biên độ dương  $z$ , BBS là bộ tách chùm cân bằng và  $\pm\theta, \mu, \nu$  là các thông số của tương tác phi tuyến Kerr chéo. Mũi tên in đậm là giao tiếp cổ điển với các chữ cái (ở đây  $k$  hoặc  $mn$ ) là kết quả đo.

tuyến Kerr chéo với thông số tương tác tương ứng  $\theta$  và  $-\theta$ . Phi tuyến với thông số  $\pm\theta$  giữa trạng thái Fock  $|n\rangle_x$  và trạng thái kết hợp  $|z\rangle_y$  được biểu diễn bởi toán tử  $U_{xy}(\pm\theta)$ , làm cho thêm một thành phần pha  $\pm n\theta$  vào trạng thái kết hợp,  $U_{xy}(\pm\theta) |n\rangle_x |z\rangle_y = |n\rangle_x |ze^{\pm in\theta}\rangle_y$ . Sau hoạt động của  $U_{x_0d}(\theta)$  và  $U_{a_0d}(-\theta)$  trạng thái  $|\Phi^{(S)}\rangle_{aABC} |z\rangle_d$  chuyển thành

$$\begin{aligned}
 \left| \Phi^{(S)} \right\rangle_{aABCd} &= (\alpha |x_0\rangle_a |a_0\rangle_A |b_0\rangle_B |c_0\rangle_C \\
 &\quad + \beta |x_1\rangle_a |a_1\rangle_A |b_1\rangle_B |c_1\rangle_C) |z\rangle_d \\
 &\quad + \alpha |x_0\rangle_a |a_1\rangle_A |b_1\rangle_B |c_1\rangle_C |ze^{i\theta}\rangle_d \\
 &\quad + \beta |x_1\rangle_a |a_0\rangle_A |b_0\rangle_B |c_0\rangle_C |ze^{-i\theta}\rangle_d.
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Sau tương tác phi tuyến, Alice sử dụng phép đo homodyne X để xác định toán tử X-quadrature của trạng thái kết hợp. Kết quả của việc tìm kiếm  $|z\rangle_d$  ( $|ze^{\pm i\theta}\rangle_d$ ) được dán nhãn bởi các bit cổ điển  $k = 0$  ( $k = 1$ ), thì photon  $a$  sẽ rơi với photon A, B và C xét ở S-DOF trong trạng thái tương ứng như sau

$$\begin{aligned} \left| \Gamma_k^{(S)} \right\rangle_{aABC} &= \alpha |x_0\rangle_a |a_k\rangle_A |b_k\rangle_B |c_k\rangle_C \\ &\quad + \beta |x_1\rangle_a |a_{k\oplus 1}\rangle_A |b_{k\oplus 1}\rangle_B |c_{k\oplus 1}\rangle_C, \end{aligned} \quad (3.68)$$

với  $\oplus$  là tổng trong modul 2. Giá trị của  $k$  sẽ được Alice thông báo trên một kênh truyền thông cổ điển. Nhìn vào (3.68), hệ số  $\alpha, \beta$  trước đây chỉ nằm trong photon  $a$  bây giờ được thể hiện trong trạng thái của cả bốn photon. Alice tiếp tục bằng cách cho giao thoa  $|x_0\rangle_a$  và  $|x_1\rangle_a$  trên một BBS trong khi  $|a_k\rangle_A$  và  $|a_{k\oplus 1}\rangle_A$  trên một BBS khác để chuyển  $\left| \Gamma_k^{(S)} \right\rangle_{aABC}$  thành

$$\begin{aligned} \left| \Delta_k^{(S)} \right\rangle_{aABC} &= (|x_0\rangle_a |a_k\rangle_A + (-1)^k |x_1\rangle_a |a_{k\oplus 1}\rangle_A) \\ &\quad \otimes (\alpha |b_k\rangle_B |c_k\rangle_C + (-1)^k \beta |b_{k\oplus 1}\rangle_B |c_{k\oplus 1}\rangle_C) \\ &\quad + (|x_0\rangle_a |a_{k\oplus 1}\rangle_A + (-1)^k |x_1\rangle_a |a_k\rangle_A) \\ &\quad \otimes (\alpha |b_k\rangle_B |c_k\rangle_C - (-1)^k \beta |b_{k\oplus 1}\rangle_B |c_{k\oplus 1}\rangle_C). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Biểu thức (3.69) xuất hiện nhờ quy tắc chuyển đổi BBS  $|x_k\rangle_a \rightarrow |x_k\rangle_a + (-1)^k |x_{k\oplus 1}\rangle_a$  và  $|a_k\rangle_A \rightarrow |a_k\rangle_A + (-1)^k |a_{k\oplus 1}\rangle_A$ . Tiếp theo, Alice sử dụng một trạng thái kết hợp khác  $|z\rangle_e$  và sử dụng tương tác Kerr chéo  $U_{x_0e}(\mu)$  và  $U_{a_k e}(\nu)$  để chuyển  $\left| \Delta_k^{(S)} \right\rangle_{aABC} |z\rangle_e$  thành

$$\begin{aligned} \left| \Theta_k^{(S)} \right\rangle_{aABCe} &= \\ &(|x_0\rangle_a |a_k\rangle_A |ze^{i(\mu+\nu)}\rangle_e + (-1)^k |x_1\rangle_a |a_{k\oplus 1}\rangle_A |z\rangle_e) \\ &\quad \otimes (\alpha |b_k\rangle_B |c_k\rangle_C + (-1)^k \beta |b_{k\oplus 1}\rangle_B |c_{k\oplus 1}\rangle_C) \\ &\quad + (|x_0\rangle_a |a_{k\oplus 1}\rangle_A |ze^{i\mu}\rangle_e + (-1)^k |x_1\rangle_a |a_k\rangle_A |ze^{i\nu}\rangle_e) \\ &\quad \otimes (\alpha |b_k\rangle_B |c_k\rangle_C - (-1)^k \beta |b_{k\oplus 1}\rangle_B |c_{k\oplus 1}\rangle_C), \end{aligned} \quad (3.70)$$

sau đó thực hiện phép đo các toán tử X-quadrature của trạng thái kết hợp. Giá trị của  $\mu$  và  $\nu$  được chọn để bốn kết quả có thể có của  $mn = 00, 01, 10$

hoặc 11 tương ứng với việc tìm thấy  $|z\rangle_e$ ,  $|ze^{i\mu}\rangle_e$ ,  $|ze^{i\nu}\rangle_e$  hay  $|ze^{i(\mu+\nu)}\rangle_e$  có thể phân biệt được. Với  $mn$  bất kỳ  $|\Theta_k^{(S)}\rangle_{aABCe}$  trở thành

$$\begin{aligned} \left|\Lambda_{kmn}^{(S)}\right\rangle_{aABC} &= |x_{n\oplus 1}\rangle_a |a_{k\oplus m\oplus 1}\rangle_A (\alpha |b_k\rangle_B |c_k\rangle_C \\ &\quad + (-1)^{m+n} \beta |b_{k\oplus 1}\rangle_B |c_{k\oplus 1}\rangle_C), \end{aligned} \quad (3.71)$$

cho biết rằng thay vì đồng thời di chuyển dọc theo hai đường lúc đầu, giờ đây photon  $a$  chỉ di chuyển dọc theo một đường  $x_{n\oplus 1}$  và photon  $A$  dọc theo đường  $a_{k\oplus m\oplus 1}$ . Xét chỉ với S-DOF, các photon  $a$  và  $A$  bị tách khỏi các photon  $B$  và  $C$ , trong khi các photon  $B$  và  $C$  vẫn còn rối với nhau. Điều đó có nghĩa là photon  $a$  có thể tạm thời để sang một bên và từ đây chúng ta chỉ làm việc với trạng thái

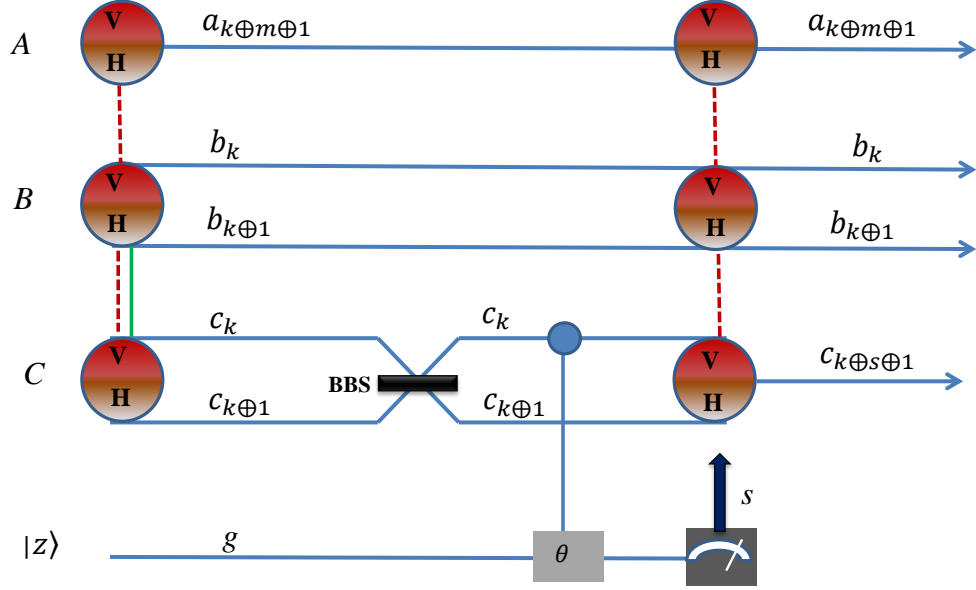
$$\begin{aligned} \left|\Lambda_{kmn}^{(S)}\right\rangle_{ABC} &= |a_{k\oplus m\oplus 1}\rangle_A (\alpha |b_k\rangle_B |c_k\rangle_C \\ &\quad + (-1)^{m+n} \beta |b_{k\oplus 1}\rangle_B |c_{k\oplus 1}\rangle_C) \end{aligned} \quad (3.72)$$

thay cho  $|\Lambda_{kmn}^{(S)}\rangle_{aABC}$  trong (3.71).

Hoạt động tiếp theo là của Charlie. Nếu Charlie quyết định dừng nhiệm vụ thì cô ấy không làm gì cả, khiến Alice và Bob không có phương hướng để đạt được mục tiêu. Ngược lại, cô ấy sẽ thực hiện một số thao tác như trong Hình 3.7. Đầu tiên, cô ấy trộn trạng thái  $|c_k\rangle_C$  và  $|c_{k\oplus 1}\rangle_C$  bằng một BBS để chuyển  $|\Lambda_{kmn}^{(S)}\rangle_{ABC}$  thành

$$\begin{aligned} \left|\Xi_{kmn}^{(S)}\right\rangle_{ABC} &= |a_{k\oplus m\oplus 1}\rangle_A \otimes \\ &[(\alpha |b_k\rangle - (-1)^{k+m+n} \beta |b_{k\oplus 1}\rangle)_B |c_k\rangle_C \\ &\quad + (-1)^k (\alpha |b_k\rangle + (-1)^{k+m+n} \beta |b_{k\oplus 1}\rangle)_B |c_{k\oplus 1}\rangle_C]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Tiếp theo, cô ấy lấy một trạng thái kết hợp  $|z\rangle_g$  và cho nó tương tác với  $|c_k\rangle_C$  thông qua tương tác Kerr chéo với thông số  $\theta$ . Kết quả thu được sẽ là trạng thái



Hình 3.7: Hoạt động của Charlie trong giai đoạn đầu của quá trình CRIO trên photon ở S-DOF.

$$\begin{aligned}
 \left| \Pi_{kmn}^{(S)} \right\rangle_{ABCg} &= K_{c_k g}(\theta) \left| \Xi_{kmn}^{(S)} \right\rangle_{aABC} |z\rangle_g = |a_{k\oplus m\oplus 1}\rangle_A \otimes \\
 & \quad [(\alpha |b_k\rangle - (-1)^{k\oplus m\oplus n} \beta |b_{k\oplus 1}\rangle)_B |c_k\rangle_C |ze^{i\theta}\rangle_g \\
 & \quad + (-1)^k (\alpha |b_k\rangle + (-1)^{k\oplus m\oplus n} \beta |b_{k\oplus 1}\rangle)_B |c_{k\oplus 1}\rangle_C |z\rangle_g].
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Để làm mất rối giữa photon  $B$  và  $C$ , Charlie thực hiện phép đo X-quadrature của trạng thái kết hợp. Nếu  $|z\rangle_g$  ( $|ze^{i\theta}\rangle_g$ ) được tìm thấy thì cô ấy đánh dấu nó bằng bit cổ điển  $s = 0$  ( $s = 1$ ). Phụ thuộc vào  $s$  trạng thái của các photon  $A, B, C$  trở thành

$$\left| \Sigma_{kmns}^{(S)} \right\rangle_{ABC} = |a_{k\oplus m\oplus 1}\rangle_A |\psi_{kmns}\rangle_B |c_{k\oplus s\oplus 1}\rangle_C, \tag{3.75}$$

với

$$|\psi_{kmns}\rangle_B = (\alpha |b_k\rangle + (-1)^{k+m+n+s} \beta |b_{k\oplus 1}\rangle)_B. \tag{3.76}$$

Chúng ta thấy rằng tất cả các photon trở nên tách rời đối với S-DOF. Dựa trên tất cả các kết quả  $kmns$ , Bob luôn biết trạng thái chính xác của

photon  $B$  và do đó suy ra toán tử thích hợp  $R_{kmns}^{(S)}$  mà anh ta sẽ sử dụng khi đến lượt mình hoạt động. Sự phụ thuộc của  $|\psi_{kmns}\rangle_B$  và  $R_{kmns}^{(S)}$  vào  $kmns$  được thể hiện trên Bảng 3.1.

Trong Bảng 3.1,  $I_S$ ,  $X_S$  và  $Z_S$  là các toán tử hoạt động trên S-DOF. Cụ thể,  $I_S$  là toán tử đơn vị,  $X_S = |b_1\rangle\langle b_0| + |b_0\rangle\langle b_1|$  là toán tử chuyển lộn trình có thể được thực hiện bằng cách trao đổi các đường truyền photon và  $Z_S = |b_0\rangle\langle b_0| - |b_1\rangle\langle b_1|$  là toán tử chuyển pha  $\pi$  đặt trên mode  $b_1$ . Phân tích Bảng 3.1, chúng ta có thể tìm ra một công thức duy nhất cho toán tử  $R_{kmns}^{(S)}$  đúng cho giá trị bất kỳ  $k, m, n, s \in \{0, 1\}$ :

$$R_{kmns}^{(S)} = Z_S^{k \oplus m \oplus n \oplus s} X_S^k. \quad (3.77)$$

Sau khi có được các kết quả  $kmns$  từ thông báo của Alice và Charlie, Bob bắt đầu hoạt động của anh ấy như trên Hình 3.8. Đầu tiên anh ấy tác dụng  $R_{kmns}^{(S)}$  lên photon  $B$  để chuyển trạng thái của nó thành  $|\psi^{(S)}\rangle_B = (\alpha |b_0\rangle + \beta |b_1\rangle)_B$ . Sau đó, anh ta thực hiện toán tử  $U^{(S)}$  trong công thức (3.58) lên  $|\psi^{(S)}\rangle_B$ , để biến photon  $B$  thành trạng thái mới

$$|\psi'^{(S)}\rangle_B = U^{(S)} |\psi^{(S)}\rangle_B = (\alpha' |b_0\rangle + \beta' |b_1\rangle)_B, \quad (3.78)$$

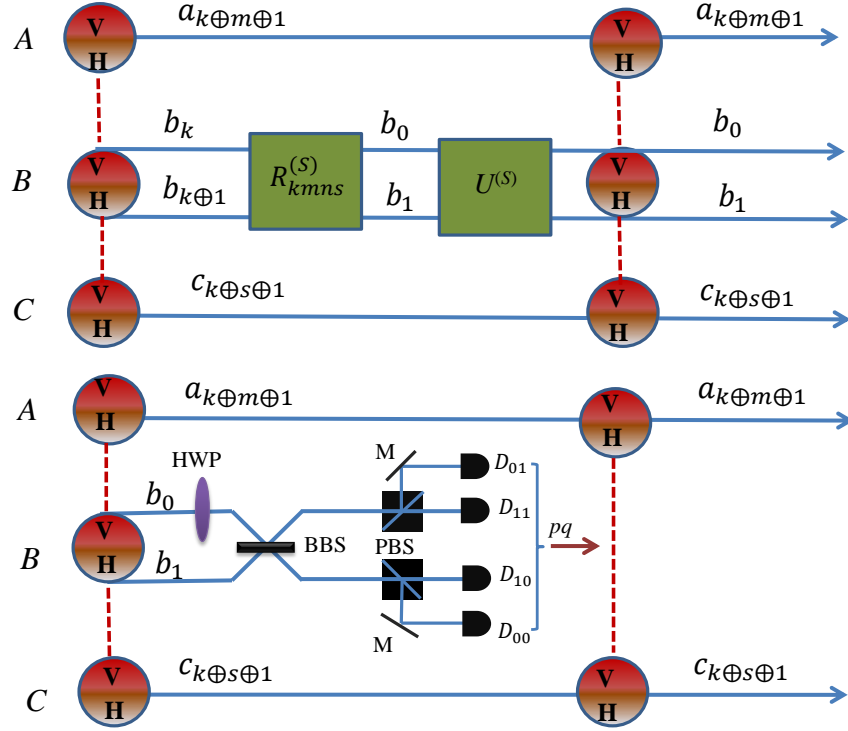
với  $\alpha'$  và  $\beta'$  cho bởi công thức (3.60). Từ đó, trạng thái mới của các photon  $A, B, C$  là

$$|\Upsilon_{kms}^{(S)}\rangle_{ABC} = |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle_A (\alpha' |b_0\rangle + \beta' |b_1\rangle)_B |c_{k \oplus s \oplus 1}\rangle_C, \quad (3.79)$$

nó không phụ thuộc vào  $n$ . Mặc dù ba photon  $A, B, C$  trong  $|\Upsilon_{kms}^{(S)}\rangle_{ABC}$  là hoàn toàn tách rời trong S-DOF, trạng thái rối của nó trong P-DOF vẫn còn nguyên. Xử lý P-DOF là công việc trong giai đoạn thứ hai của giao thức CRIO. Tính cả thành phần P-DOF, trạng thái đầy đủ là  $|\Omega_{kms}^{(SP)}\rangle_{ABC} =$

Bảng 3.1: Trạng thái  $|\psi_{kmns}\rangle_B$  của photon  $B$  sau phép đo của Alice và Charlie, và toán tử hồi phục  $R_{kmns}^{(S)}$  với  $R_{kmns}^{(S)} |\psi_{kmns}\rangle_B = (\alpha |b_0\rangle + \beta |b_1\rangle)_B$ .

| $kmns$                 | $ \psi_{kmns}\rangle_B$                      | $R_{kmns}^{(S)}$ |
|------------------------|--|------------------|
| 0000, 0011, 0101, 0110 | $(\alpha  b_0\rangle + \beta  b_1\rangle)_B$ | $I_S$            |
| 0001, 0010, 0100, 0111 | $(\alpha  b_0\rangle - \beta  b_1\rangle)_B$ | $Z_S$            |
| 1000, 1011, 1101, 1110 | $(\alpha  b_1\rangle - \beta  b_0\rangle)_B$ | $Z_S X_S$        |
| 1001, 1010, 1100, 1111 | $(\alpha  b_1\rangle + \beta  b_0\rangle)_B$ | $X_S$            |



Hình 3.8: Hoạt động của Bob trong giai đoạn thứ nhất (phần trên) và giai đoạn thứ hai (phần dưới) của CRIO trên photon trong S-DOF. Các toán tử  $R_{kmns}^{(S)}$  và  $U^{(S)}$  được định nghĩa trong các biểu thức (3.77) và (3.58). HWP là tấm nửa sóng, PBS là bộ tách phân cực, gương M và máy đo photon  $D_{pq}$ .

$$\left| \Upsilon_{kms}^{(S)} \right\rangle_{ABC} \left| Q^{(P)} \right\rangle_{ABC},$$

$$\left| \Omega_{kms}^{(SP)} \right\rangle_{ABC} = \left| a_{k \oplus m \oplus 1} \right\rangle_A (\alpha' \left| b_0 \right\rangle + \beta' \left| b_1 \right\rangle)_B \left| c_{k \oplus s \oplus 1} \right\rangle_C \\ ( \left| H \right\rangle_A \left| H \right\rangle_B \left| H \right\rangle_C + \left| V \right\rangle_A \left| V \right\rangle_B \left| V \right\rangle_C ).$$

(3.80)

Bob bắt đầu giai đoạn hai bằng việc đặt một HWP lên mode  $b_0$  để đảo phân cực ( $\left| H \right\rangle_B \leftrightarrow \left| V \right\rangle_B$ ), sau đó trộn  $\left| b_0 \right\rangle_B$  và  $\left| b_1 \right\rangle_B$  trên một BBS. Những hoạt động này biến  $\left| \Omega_{kms}^{(SP)} \right\rangle_{ABC}$  thành

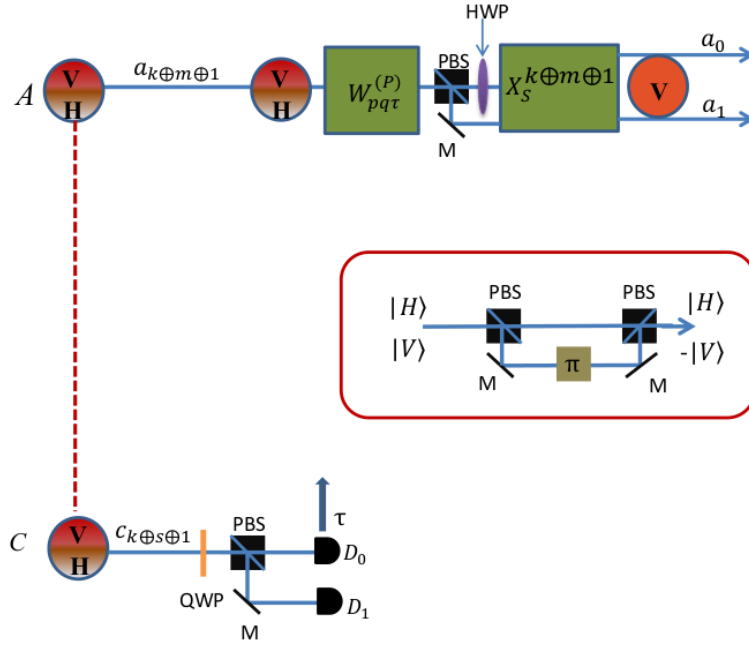
$$\begin{aligned}
\left| \Phi_{kms}^{(SP)} \right\rangle_{ABC} &= |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle_A [|V, b_1\rangle_B (\alpha' |H\rangle_A |H\rangle_C + \beta' |V\rangle_A |V\rangle_C) \\
&\quad + |V, b_0\rangle_B (\alpha' |H\rangle_A |H\rangle_C - \beta' |V\rangle_A |V\rangle_C) \\
&\quad + |H, b_1\rangle_B (\beta' |H\rangle_A |H\rangle_C + \alpha' |V\rangle_A |V\rangle_C) \\
&\quad - |H, b_0\rangle_B (\beta' |H\rangle_A |H\rangle_C - \alpha' |V\rangle_A |V\rangle_C)] |c_{k \oplus s \oplus 1}\rangle_C.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Hệ số  $\alpha', \beta'$  đã “nhảy” ra khỏi trạng thái của photon  $B$  trong S-DOF sang trạng thái rời của các photon  $A$  và  $C$  trong P-DOF. Để đạt được một trạng thái nhất định của các photon  $A$  và  $C$ , Bob đo photon  $B$  trên hệ cơ sở  $\{|V, b_1\rangle_B, |V, b_0\rangle_B, |H, b_1\rangle_B, |H, b_0\rangle_B\}$  bằng cách trên mỗi một trong hai mode  $b_0$  và  $b_1$  sử dụng một PBS và đặt sau chúng là các máy đo photon  $D_{00}, D_{01}, D_{10}$  và  $D_{11}$ . Vì PBS truyền photon phân cực ngang và phản xạ photon phân cực dọc, một trong những máy đo photon có thể phát ra tín hiệu. Nếu  $D_{00}, D_{01}, D_{10}$  hoặc  $D_{11}$  tìm thấy tín hiệu, Bob đánh dấu tương ứng bằng các bit cổ điển  $pq = 00, 01, 10$  hoặc  $11$ . Sau khi máy đo photon phát ra tín hiệu thì trạng thái photon  $A$  và  $C$  là  $\left| \Phi_{kmspq}^{(SP)} \right\rangle_{AC} =$

$$\begin{cases}
(\alpha' |H\rangle_A |H\rangle_C + \beta' |V\rangle_A |V\rangle_C) |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle_A |c_{k \oplus s \oplus 1}\rangle_C & \text{nếu } pq = 00 \\
(\alpha' |H\rangle_A |H\rangle_C - \beta' |V\rangle_A |V\rangle_C) |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle_A |c_{k \oplus s \oplus 1}\rangle_C & \text{nếu } pq = 01 \\
(\alpha' |V\rangle_A |V\rangle_C + \beta' |H\rangle_A |H\rangle_C) |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle_A |c_{k \oplus s \oplus 1}\rangle_C & \text{nếu } pq = 10 \\
(\alpha' |V\rangle_A |V\rangle_C - \beta' |H\rangle_A |H\rangle_C) |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle_A |c_{k \oplus s \oplus 1}\rangle_C & \text{nếu } pq = 11.
\end{cases} \tag{3.82}$$

Trong giai đoạn thứ hai, Charlie một lần nữa thể hiện sức mạnh của người điều khiển bằng cách thực hiện các thao tác như trên Hình 3.9. Cô ấy đặt một QWP lên mode  $c_{k \oplus s \oplus 1}$  để quay trạng thái phân cực từ  $|H\rangle_C$  ( $|V\rangle_C$ ) thành  $|H\rangle_C + |V\rangle_C$  ( $|H\rangle_C - |V\rangle_C$ ), sau đó cho photon  $C$  đi qua một





Hình 3.9: Hoạt động của Charlie và Alice trong giai đoạn thứ hai của CRIO trên photon trong S-DOF. QWP là tấm sóng phần tư và  $D_{0(1)}$  là máy đo photon.  $W_{pq\tau}^{(P)}$  được định nghĩa trong công thức (3.85) và  $X_S$  là toán tử lật đường đi. Hình nhỏ chứa hai PBS, hai gương và một bộ dịch pha  $\pi$  là sơ đồ xây dựng  $Z_P = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$ .

PBS. Bằng việc làm này,  $|\Phi_{kmspq}^{(SP)}\rangle_{AC}$  chuyển thành

$$|a_{k\oplus m\oplus 1}\rangle_A \begin{cases} [(\alpha' |H\rangle + \beta' |V\rangle)_A |H, c_{k\oplus s\oplus 1}\rangle_C \\ + (\alpha' |H\rangle - \beta' |V\rangle)_A |V, c_{k\oplus s}\rangle_C] & \text{nếu } pq = 00 \\ [(\alpha' |H\rangle - \beta' |V\rangle)_A |H, c_{k\oplus s\oplus 1}\rangle_C \\ + (\alpha' |H\rangle + \beta' |V\rangle)_A |V, c_{k\oplus s}\rangle_C] & \text{nếu } pq = 01 \\ [(\alpha' |V\rangle + \beta' |H\rangle)_A |H, c_{k\oplus s\oplus 1}\rangle_C \\ - (\alpha' |V\rangle - \beta' |V\rangle)_A |V, c_{k\oplus s}\rangle_C] & \text{nếu } pq = 10 \\ [(\alpha' |V\rangle - \beta' |H\rangle)_A |H, c_{k\oplus s\oplus 1}\rangle_C \\ - (\alpha' |V\rangle + \beta' |V\rangle)_A |V, c_{k\oplus s}\rangle_C] & \text{nếu } pq = 11. \end{cases} \quad (3.83)$$

Đặt sau PBS hai máy đo photon  $D_0$  và  $D_1$  để tìm photon  $C$ . Nếu  $D_0$  ( $D_1$ ) phát ra tín hiệu thì sẽ thông báo bằng bit cổ điển  $\tau = 0$  ( $\tau = 1$ ). Khi một trong hai máy đo phát tín hiệu, photon  $C$  bị phá hủy trong khi photon  $A$  trở thành

$$\left| \Phi_{kmspqr}^{(SP)} \right\rangle_A = |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle_A \begin{cases} (\alpha' |H\rangle + \beta' |V\rangle)_A & \text{cho } pqr = 000, 011 \\ (\alpha' |H\rangle - \beta' |V\rangle)_A & \text{cho } pqr = 001, 010 \\ (\alpha' |V\rangle + \beta' |H\rangle)_A & \text{cho } pqr = 100, 111 \\ (\alpha' |V\rangle - \beta' |H\rangle)_A & \text{cho } pqr = 101, 110. \end{cases} \quad (3.84)$$

Bước cuối cùng là của Alice. Đây là lần thứ hai Alice xuất hiện và lần này cô ấy thực hiện các thao tác như trên Hình 3.9. Như đã thấy từ công thức (3.84), khi biết  $pqr$  Alice có thể tác dụng toán tử

$$W_{pqr}^{(P)} = Z_P^{q \oplus r} X_P^p \quad (3.85)$$

lên photon  $A$  để thu được trạng thái  $(\alpha' |H\rangle + \beta' |V\rangle)_A |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle_A$ . Chú ý rằng trong (3.85),  $X_P = |V\rangle \langle H| + |H\rangle \langle V|$  hoạt động như một HWP, trong khi  $Z_P = |H\rangle \langle H| - |V\rangle \langle V|$  có thể được xây dựng bằng sự kết hợp của hai PBS và một bộ dịch pha  $\pi$  được sắp xếp như Hình 3.9. Trong [187]  $(\alpha' |H\rangle + \beta' |V\rangle)_A |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle_A$  được lấy làm trạng thái mong muốn. Tuy nhiên, đây là trạng thái của một photon lan truyền dọc theo một đường duy nhất và là chồng chập của  $|H\rangle$  và  $|V\rangle$ , mã hóa trong P-DOF, trong khi trạng thái mong muốn  $(\alpha' |a_0\rangle + \beta' |a_1\rangle)_A |V\rangle_A$  là trạng thái của photon phân cực  $V$  và truyền theo hai hướng  $|a_0\rangle$  và  $|a_1\rangle$ , mã hóa trong S-DOF. Rõ ràng,  $(\alpha' |H\rangle + \beta' |V\rangle)_A |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle_A$  và  $(\alpha' |a_0\rangle + \beta' |a_1\rangle)_A |V\rangle_A$  không giống nhau, vì vậy Alice phải tìm cách chuyển đổi  $(\alpha' |H\rangle + \beta' |V\rangle)_A |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle_A$  thành  $(\alpha' |a_0\rangle + \beta' |a_1\rangle)_A |V\rangle_A$ . Điều này là khả thi khi Alice sử dụng một PBS, một HWP và toán tử  $X_S^{k \oplus m \oplus 1}$  như được minh họa sau  $W_{pqr}^{(P)}$  trên Hình 3.9. Cụ thể, sau tác động của PBS  $(\alpha' |H\rangle + \beta' |V\rangle)_A |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle_A \rightarrow (\alpha' |H, a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle + \beta' |V, a_{k \oplus m}\rangle)_A$ , thì sau đó đặt lên mode  $a_{k \oplus m \oplus 1}$  một HWP  $(\alpha' |H, a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle + \beta' |V, a_{k \oplus m}\rangle)_A \rightarrow (\alpha' |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle + \beta' |a_{k \oplus m}\rangle)_A |V\rangle_A$ . Và, cuối cùng là tác động của  $X_S^{k \oplus m \oplus 1}$ ,  $(\alpha' |a_{k \oplus m \oplus 1}\rangle + \beta' |a_{k \oplus m}\rangle)_A |V\rangle_A \rightarrow (\alpha' |a_0\rangle + \beta' |a_1\rangle)_A |V\rangle_A \equiv U^{(S)} |\psi\rangle_A$ , đó chính xác là trạng thái mong muốn. Do đó, Bob tác động thành công một toán tử không xác định có dạng tổng quát  $U^{(S)}$  lên một trạng thái bất kỳ của Alice  $|\psi\rangle$  dưới sự kiểm soát của Charlie: giao thức CRIO trên S-DOF hoàn toàn thành công.

### 3.2.2 Viễn tác toán tử có kiểm soát trên photon ở bậc tự do phân cực

Trong phần này, chúng tôi quan tâm đến việc Alice có một photon  $a$  chỉ đi theo một đường  $x$  và được mã hóa trong P-DOF, tức là trạng thái của nó có dạng

$$|\phi\rangle_a = |\psi^{(P)}\rangle_a |x\rangle_a, \quad (3.86)$$

$$|\psi^{(P)}\rangle_a = (\gamma |H\rangle + \delta |V\rangle)_a, \quad (3.87)$$

với  $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ . Toán tử của Bob bây giờ có dạng tổng quát

$$U^{(P)} = \begin{pmatrix} \zeta & \eta \\ -\eta^* & \zeta^* \end{pmatrix}, \quad (3.88)$$

tác động lên  $|\psi^{(P)}\rangle$  như sau

$$U^{(P)} |\psi^{(P)}\rangle = \gamma' |H\rangle + \delta' |V\rangle = |\psi'^{(P)}\rangle, \quad (3.89)$$

$$\gamma' = \gamma\zeta - \delta\eta^*, \quad \delta' = \gamma\eta + \delta\zeta^*. \quad (3.90)$$

Nhiệm vụ thứ hai mà chúng tôi quan tâm là thiết kế một giao thức cho CRIO ở P-DOF: Alice và Bob, dưới sự kiểm soát của Charlie, phải hợp tác sao cho sau khi hoàn thành giao thức Alice sẽ có trạng thái

$$U^{(P)} |\phi\rangle = |\psi'^{(P)}\rangle |x\rangle. \quad (3.91)$$

Nhiệm vụ này cũng có thể được thực hiện trong hai giai đoạn bằng cách sử dụng cùng một trạng thái rối tăng cường GHZ như trong công thức (3.62), dưới sự trợ giúp của phi tuyến Kerr chéo. Trạng thái ban đầu của bốn photon  $a$ ,  $A$ ,  $B$  và  $C$  là

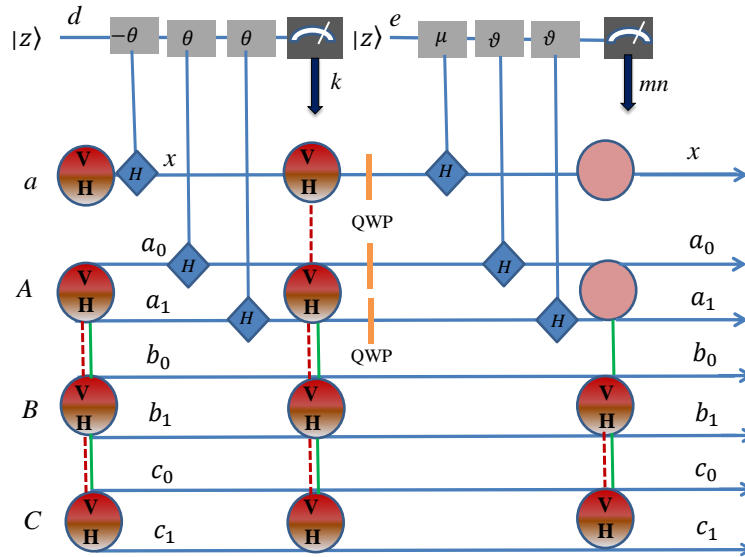
$$|\phi\rangle_a |Q^{(SP)}\rangle_{ABC} = |\Phi^{(P)}\rangle_{aABC} |x\rangle_a |Q^{(S)}\rangle_{ABC}, \quad (3.92)$$

với

$$\begin{aligned} |\Phi^{(P)}\rangle_{aABC} &= (\gamma |H\rangle_a |H\rangle_A |H\rangle_B |H\rangle_C \\ &\quad + \gamma |H\rangle_a |V\rangle_A |V\rangle_B |V\rangle_C \\ &\quad + \delta |V\rangle_a |H\rangle_A |H\rangle_B |H\rangle_C \\ &\quad + \delta |V\rangle_a |V\rangle_A |V\rangle_B |V\rangle_C). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Giai đoạn đầu được thao tác chỉ với P-DOF  $|\Phi^{(P)}\rangle_{aABC}$ , phần S-DOP sẽ được để lại và xử lý sau. Alice bắt đầu bằng cách thực hiện các thao tác đã phác thảo trên Hình 3.10. Cô ấy chuẩn bị một trạng thái kết hợp  $|z\rangle_d$  và sử dụng các tương tác phi tuyến  $U_{xd}^{(H)}(-\theta)$ ,  $U_{a_0d}^{(H)}(\theta)$  và  $U_{a_1d}^{(H)}(\theta)$ . Ký hiệu  $(H)$  trong  $U_{xd}^{(H)}$ ,  $U_{a_0d}^{(H)}$  và  $U_{a_1d}^{(H)}$  chỉ ra rằng chỉ thành phần  $|H\rangle$  của photon tham gia vào tương tác (xem Hình 3.11). Các tương tác  $U_{xd}^{(H)}(-\theta)$ ,  $U_{a_0d}^{(H)}(\theta)$  và  $U_{a_1d}^{(H)}(\theta)$  đưa  $|\Phi^{(P)}\rangle_{aABC} |z\rangle_d$  thành

$$\begin{aligned} |\Phi^{(P)}\rangle_{aABC} |z\rangle_d = & (\gamma |H\rangle_a |H\rangle_A |H\rangle_B |H\rangle_C \\ & + \delta |V\rangle_a |V\rangle_A |V\rangle_B |V\rangle_C) |z\rangle_d \\ & + \gamma |H\rangle_a |V\rangle_A |V\rangle_B |V\rangle_C |ze^{-i\theta}\rangle_d \\ & + \delta |V\rangle_a |H\rangle_A |H\rangle_B |H\rangle_C |ze^{i\theta}\rangle_d. \end{aligned} \quad (3.94)$$



Hình 3.10: Hoạt động của Alice trong giai đoạn đầu tiên của CRIO trên photon trong P-DOF. Một vòng tròn không có bất kỳ chữ cái nào bên trong biểu thị một photon nằm trong  $|H\rangle$  hoặc  $|V\rangle$ . Tương tác Kerr chéo giữa thành phần  $|H\rangle$  và trạng thái kết hợp được trình bày chi tiết trong phần hình phụ của Hình 3.11.

Sau tương tác, X-quadrature của trạng thái kết hợp được đo. Khi kết quả  $k = 0$  hoặc  $k = 1$  tương ứng với các trạng thái  $|z\rangle_d$  hoặc  $|ze^{\pm i\theta}\rangle_d$  xảy

ra thì photon  $a$  trở nên rối ở P-DOF với các photon khác, trạng thái của chúng khi đó là  $\left| \Gamma_k^{(P)} \right\rangle_{aABC} =$

$$\begin{cases} \gamma |H\rangle_a |H\rangle_A |H\rangle_B |H\rangle_C + \delta |V\rangle_a |V\rangle_A |V\rangle_B |V\rangle_C & \text{nếu } k = 0 \\ \gamma |H\rangle_a |V\rangle_A |V\rangle_B |V\rangle_C + \delta |V\rangle_a |H\rangle_A |H\rangle_B |H\rangle_C & \text{nếu } k = 1. \end{cases} \quad (3.95)$$

Alice tiếp tục công việc bằng cách đặt một QWP trên đường  $x$  của photon  $a$  và các đường  $a_0$  và  $a_1$  của photon  $A$ . Sau đó, sau khi hai photon đã đi qua QWP, cô ấy cho thành phần  $|H\rangle$  tương tác với một trạng thái kết hợp  $|z\rangle_e$  thông qua tương tác phi tuyến  $U_{xe}^{(H)}(\mu)$ ,  $U_{a_0e}^{(H)}(\nu)$  và  $U_{a_1e}^{(H)}(\nu)$ , do đó  $\left| \Gamma_k^{(P)} \right\rangle_{aABC} |z\rangle_e$  trở thành

$$\begin{aligned} & \left| \Theta_0^{(P)} \right\rangle_{aABCe} = \\ & |H\rangle_a |H\rangle_A \left| ze^{i(\mu+\nu)} \right\rangle_e (\gamma |H\rangle_B |H\rangle_C + \delta |V\rangle_B |V\rangle_C) \\ & + |H\rangle_a |V\rangle_A \left| ze^{i\mu} \right\rangle_e (\gamma |H\rangle_B |H\rangle_C - \delta |V\rangle_B |V\rangle_C) \\ & + |V\rangle_a |H\rangle_A \left| ze^{i\nu} \right\rangle_e (\gamma |H\rangle_B |H\rangle_C - \delta |V\rangle_B |V\rangle_C) \\ & + |V\rangle_a |V\rangle_A |z\rangle_e (\gamma |H\rangle_B |H\rangle_C + \delta |V\rangle_B |V\rangle_C) \end{aligned} \quad (3.96)$$

khi  $k = 0$  và

$$\begin{aligned} & \left| \Theta_1^{(P)} \right\rangle_{aABCe} = \\ & |H\rangle_a |H\rangle_A \left| ze^{i(\mu+\nu)} \right\rangle_e (\gamma |V\rangle_B |V\rangle_C + \delta |H\rangle_B |H\rangle_C) \\ & - |H\rangle_a |V\rangle_A \left| ze^{i\mu} \right\rangle_e (\gamma |V\rangle_B |V\rangle_C - \delta |H\rangle_B |H\rangle_C) \\ & + |V\rangle_a |H\rangle_A \left| ze^{i\nu} \right\rangle_e (\gamma |V\rangle_B |V\rangle_C - \delta |H\rangle_B |H\rangle_C) \\ & - |V\rangle_a |V\rangle_A |z\rangle_e (\gamma |V\rangle_B |V\rangle_C + \delta |H\rangle_B |H\rangle_C) \end{aligned} \quad (3.97)$$

khi  $k = 1$ . Phép đo X-quadrature của trạng thái kết hợp mang lại bốn khả năng có thể  $mn = 00, 01, 10$  hoặc  $11$  nếu  $\left| ze^{i(\mu+\nu)} \right\rangle_e$ ,  $\left| ze^{i\mu} \right\rangle_e$ ,  $\left| ze^{i\nu} \right\rangle_e$  hoặc  $|z\rangle_e$  tương ứng được tìm thấy. Trạng thái  $\left| \Lambda_{kmn}^{(P)} \right\rangle_{aABC}$  thu được phụ thuộc vào cả  $k$  và  $mn$  được thể hiện trên Bảng 3.2.

Như có thể thấy từ Bảng 3.2, sau các hoạt động của Alice, photon  $a$  không còn là trạng thái chồng chập của  $|H\rangle_a$  và  $|V\rangle_a$  mà chỉ đơn giản là

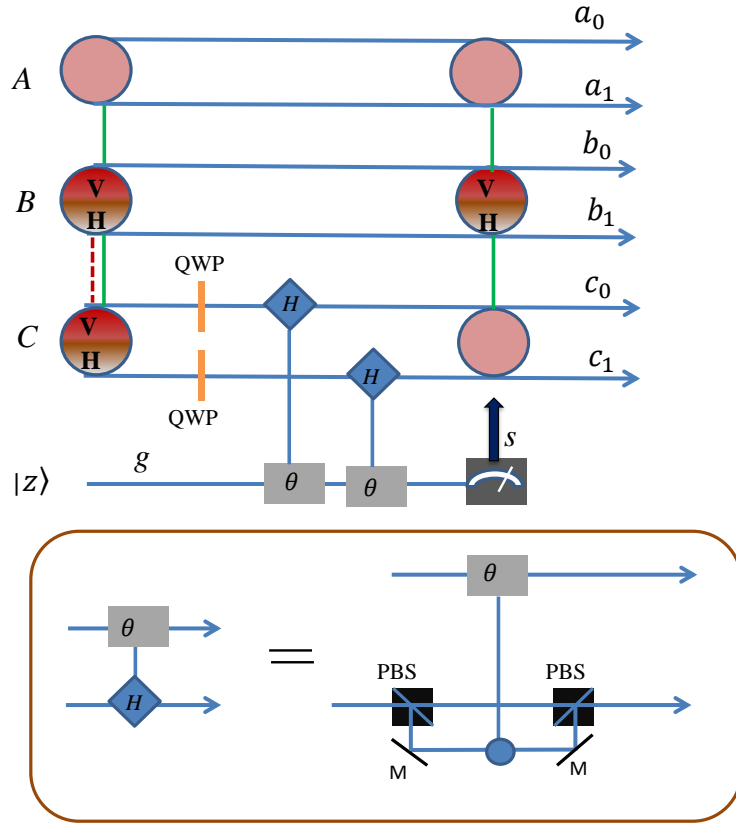
$|H\rangle_a$  hoặc  $|V\rangle_a$ . Tức là nó đã bị tách rời riêng và chấm dứt vai trò của nó kể từ lúc này. Đối với photon  $A$ , nó cũng trở thành phân cực ngang hoặc dọc, tức là không còn rối ở P-DOF với các photon  $B$  và  $C$  nữa. Sự rối ở P-DOF chỉ còn tồn tại giữa các photon  $B$  và  $C$ , trong khi sự rối ở S-DOF giữa các photon  $A$ ,  $B$  và  $C$  vẫn bảo tồn như cũ.

Để kiểm soát nhiệm vụ trong giai đoạn đầu tiên, Charlie đặt một QWP trên đường  $c_0$  và một QWP khác trên đường  $c_1$  của photon  $C$ , sau đó cho tương tác  $U_{c_0g}^{(H)}(\theta)$  và  $U_{c_1g}^{(H)}(\theta)$  giữa photon  $C$  và một trạng thái kết hợp  $|z\rangle_g$ . Tiếp theo cô ấy thực hiện phép đo homodyne lên trạng thái kết hợp, phép đo sẽ cho một trong hai kết quả  $|ze^{i\theta}\rangle_g$  hoặc  $|z\rangle_g$ . Đối với trường hợp đầu được tìm thấy cô ấy báo kết quả thông qua một bit cổ điển  $s = 0$  và đối với kết quả sau thì thông báo  $s = 1$ . Cho dù là  $s = 0$  hay  $s = 1$  thì trạng thái rối ở P-DOF giữa photon  $B$  và  $C$  cũng bị phá huỷ và photon  $C$  trở thành phân cực ngang hoặc dọc trong khi photon  $B$  có được các hệ số  $\gamma, \delta$  ở một trạng thái chồng chập phân cực. Trạng thái  $|\Sigma_{kmns}^{(P)}\rangle_{ABC}$  chỉ thể hiện sự rối ở P-DOF giữa ba photon  $A$ ,  $B$  và  $C$ . Bảng 3.3 thể hiện sự phụ thuộc của  $|\Sigma_{kmns}^{(P)}\rangle_{ABC}$  vào  $kmn$  (kết quả đo của Alice) và  $s$  (kết quả đo của Charlie).

Bây giờ sẽ bắt đầu với giai đoạn hai của nhiệm vụ và thành phần S-DOF  $|Q^{(S)}\rangle_{ABC}$  sẽ được khôi phục để có trạng thái đầy đủ  $|\Pi_{kmns}^{(SP)}\rangle_{ABC} = |\Sigma_{kmns}^{(P)}\rangle_{ABC} |Q^{(S)}\rangle_{ABC}$ . Các hoạt động của Bob được mô tả trên Hình 3.12. Nội dung của Bảng 3.3 cho thấy Bob có thể chuyển trạng thái của photon  $B$  trong  $|\Pi_{kmns}^{(SP)}\rangle_{ABC}$  thành  $(\gamma |H\rangle + \delta |V\rangle)_B$  bằng việc tác động lên nó toán

Bảng 3.2: Trạng thái  $|\Lambda_{kmn}^{(P)}\rangle_{aABC}$  phụ thuộc vào kết quả  $kmn$ .

| $kmn$ | $ \Lambda_{kmn}^{(P)}\rangle_{aABC}$  |
|-------|---|
| 000   | $ H\rangle_a  H\rangle_A (\gamma  H\rangle_B  H\rangle_C + \delta  V\rangle_B  V\rangle_C)$ |
| 001   | $ H\rangle_a  V\rangle_A (\gamma  H\rangle_B  H\rangle_C - \delta  V\rangle_B  V\rangle_C)$ |
| 010   | $ V\rangle_a  H\rangle_A (\gamma  H\rangle_B  H\rangle_C - \delta  V\rangle_B  V\rangle_C)$ |
| 011   | $ V\rangle_a  V\rangle_A (\gamma  H\rangle_B  H\rangle_C + \delta  V\rangle_B  V\rangle_C)$ |
| 100   | $ H\rangle_a  H\rangle_A (\gamma  V\rangle_B  V\rangle_C + \delta  H\rangle_B  H\rangle_C)$ |
| 101   | $ H\rangle_a  V\rangle_A (\gamma  V\rangle_B  V\rangle_C - \delta  H\rangle_B  H\rangle_C)$ |
| 110   | $ V\rangle_a  H\rangle_A (\gamma  V\rangle_B  V\rangle_C - \delta  H\rangle_B  H\rangle_C)$ |
| 111   | $ V\rangle_a  V\rangle_A (\gamma  V\rangle_B  V\rangle_C + \delta  H\rangle_B  H\rangle_C)$ |



Hình 3.11: Hoạt động của Charlie trong giai đoạn đầu tiên của CRIO trên photon trong P-DOF. Hình nhỏ mô tả chi tiết tương tác Kerr chéo giữa thành phần  $|H\rangle$  của một photon và trạng thái kết hợp.

tử

$$R_{kmns}^{(P)} = Z_P^{m \oplus n \oplus s} X_P^k. \quad (3.98)$$

Sau khi làm như vậy, anh ta sử dụng toán tử của mình để tác động  $U^{(P)}$  trong công thức (3.88) lên photon  $B$  để thu được

$$\left| \psi'^{(P)} \right\rangle_B = (\gamma' |H\rangle + \delta' |V\rangle)_B, \quad (3.99)$$

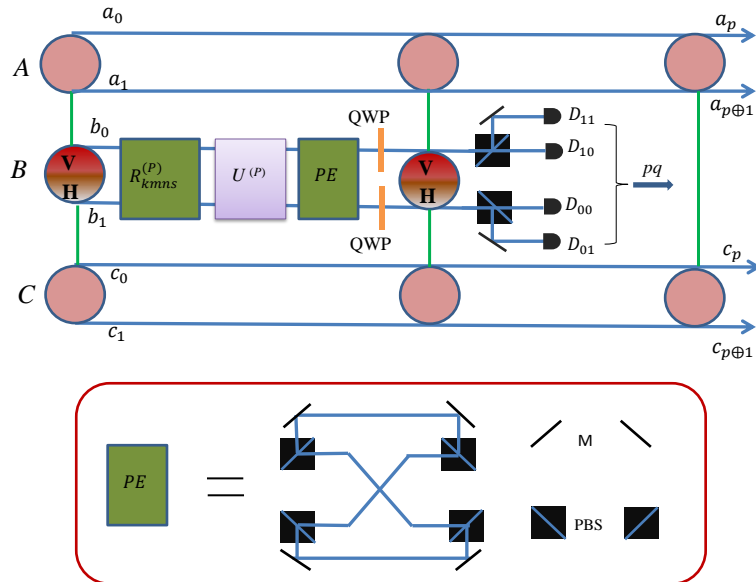
với  $\gamma'$  và  $\delta'$  được cho trong công thức (3.90). Tiếp theo, anh ta thực hiện một hoạt động để trao đổi đi của photon B (xem sơ đồ  $PE$  như được thiết lập trên Hình 3.12).

$$PE \begin{cases} |H, b_j\rangle_B \\ |V, b_j\rangle_B \end{cases} = \begin{cases} |H, b_{j \oplus 1}\rangle_B \\ |V, b_j\rangle_B \end{cases}, \quad (3.100)$$

Trạng thái của ba photon  $A, B, C$  bây giờ chỉ phụ thuộc vào  $n, s$  và có dạng

Bảng 3.3: Trạng thái  $|\Sigma_{kmns}^{(P)}\rangle_{ABC}$  của các photon  $A, B$  và  $C$  phụ thuộc kết quả đo  $kmns$  của Alice và Charlie.

| $kmns$ | $ \Sigma_{kmns}^{(P)}\rangle_{ABC}$                               | $kmns$ | $ \Sigma_{kmns}^{(P)}\rangle_{ABC}$                               |
|--------|---|--------|---|
| 0000   | $ H\rangle_A (\gamma  H\rangle + \delta  V\rangle)_B  H\rangle_C$ | 1000   | $ H\rangle_A (\gamma  V\rangle + \delta  H\rangle)_B  H\rangle_C$ |
| 0001   | $ H\rangle_A (\gamma  H\rangle - \delta  V\rangle)_B  V\rangle_C$ | 1001   | $ H\rangle_A (\gamma  V\rangle - \delta  H\rangle)_B  V\rangle_C$ |
| 0010   | $ V\rangle_A (\gamma  H\rangle - \delta  V\rangle)_B  H\rangle_C$ | 1010   | $ V\rangle_A (\gamma  V\rangle - \delta  H\rangle)_B  H\rangle_C$ |
| 0011   | $ V\rangle_A (\gamma  H\rangle + \delta  V\rangle)_B  V\rangle_C$ | 1011   | $ V\rangle_A (\gamma  V\rangle + \delta  H\rangle)_B  V\rangle_C$ |
| 0100   | $ H\rangle_A (\gamma  H\rangle - \delta  V\rangle)_B  H\rangle_C$ | 1100   | $ H\rangle_A (\gamma  V\rangle - \delta  H\rangle)_B  H\rangle_C$ |
| 0101   | $ H\rangle_A (\gamma  H\rangle + \delta  V\rangle)_B  V\rangle_C$ | 1101   | $ H\rangle_A (\gamma  V\rangle + \delta  H\rangle)_B  V\rangle_C$ |
| 0110   | $ V\rangle_A (\gamma  H\rangle + \delta  V\rangle)_B  H\rangle_C$ | 1110   | $ V\rangle_A (\gamma  V\rangle + \delta  H\rangle)_B  H\rangle_C$ |
| 0111   | $ V\rangle_A (\gamma  H\rangle - \delta  V\rangle)_B  V\rangle_C$ | 1111   | $ V\rangle_A (\gamma  V\rangle - \delta  H\rangle)_B  V\rangle_C$ |



Hình 3.12: Hoạt động của Bob cho CRIO trên photon trong P-DOF. Các toán tử  $R_{kmns}^{(P)}$  và  $U^{(P)}$  được định nghĩa trong các biểu thức (3.98) và (3.88), trong khi  $PE$  là quá trình trao đổi đường đi được xây dựng như trong phần hình phụ.



$$\begin{aligned}
\left| \Upsilon_{ns}^{(SP)} \right\rangle_{ABC} &= |f_n(H, V)\rangle_A [|a_0\rangle_A (\gamma' |H, b_1\rangle \\
&\quad + \delta' |V, b_0\rangle)_B |c_0\rangle_C + |a_1\rangle_A (\gamma' |H, b_0\rangle \\
&\quad + \delta' |V, b_1\rangle)_B |c_1\rangle_C] |f_s(H, V)\rangle_C, \tag{3.101}
\end{aligned}$$

$$|f_n(H, V)\rangle = |H^{n\oplus 1}V^n\rangle, \tag{3.102}$$

$|f_0(H, V)\rangle = |H\rangle$  và  $|f_1(H, V)\rangle = |V\rangle$ . Bob sau đó đặt hai QWP, một vào đường  $b_0$  và một vào đường  $b_1$  để chuyển  $\left| \Upsilon_{ns}^{(SP)} \right\rangle_{ABC}$  thành

$$\begin{aligned}
\left| \Omega_{ns}^{(SP)} \right\rangle_{ABC} &= |f_n(H, V)\rangle_A [|H, b_1\rangle_B (\gamma' |a_0\rangle_A |c_0\rangle_C \\
&\quad + \delta' |a_1\rangle_A |c_1\rangle_C) + |V, b_1\rangle_B (\gamma' |a_0\rangle_A |c_0\rangle_C \\
&\quad - \delta' |a_1\rangle_A |c_1\rangle_C) + |H, b_0\rangle_B (\gamma' |a_1\rangle_A |c_1\rangle_C \\
&\quad + \delta' |a_0\rangle_A |c_0\rangle_C) + |V, b_0\rangle_B (\gamma' |a_1\rangle_A |c_1\rangle_C \\
&\quad - \delta' |a_0\rangle_A |c_0\rangle_C)] |f_s(H, V)\rangle_C. \tag{3.103}
\end{aligned}$$

Nhiệm vụ cuối cùng của Bob là tìm photon  $B$  bằng bốn máy đo photon  $D_{00}$ ,  $D_{01}$ ,  $D_{10}$  và  $D_{11}$  đặt sau hai PBS như trên Hình 3.12. Nếu  $D_{00}$  ( $D_{01}$ ,  $D_{10}$  hoặc  $D_{11}$ ) phát ra tín hiệu, điều này nghĩa là trạng thái  $|H, b_1\rangle_B$  ( $|V, b_1\rangle_B$ ,  $|H, b_0\rangle_B$  hoặc  $|V, b_0\rangle_B$ ) được tìm thấy và các kết quả này sẽ được đánh dấu bằng các bit cổ điển  $pq = 00$  ( $01$ ,  $10$  hoặc  $11$ ). Photon  $B$  bị phá hủy trong khi photon  $A$  và  $C$  giữ nguyên rồi trong S-DOF như sau

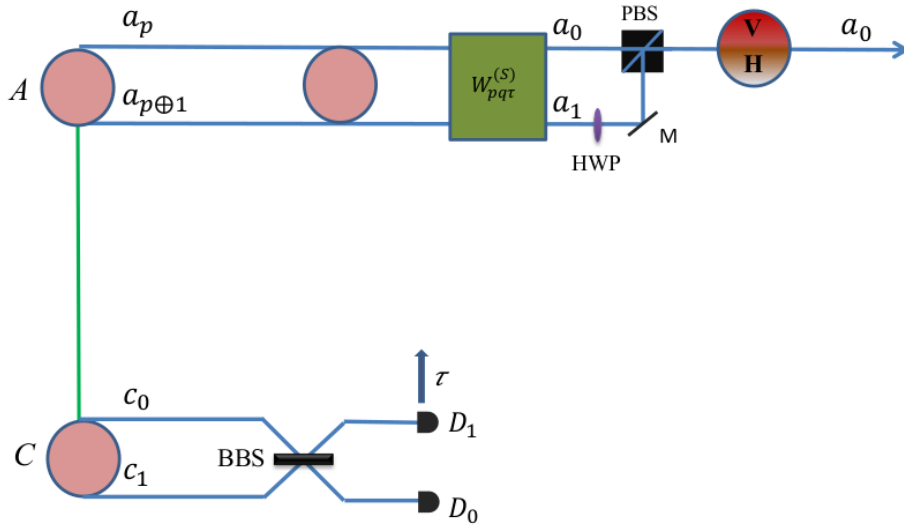
$$\begin{aligned}
\left| \Psi_{nspq}^{(SP)} \right\rangle_{AC} &= |f_n(H, V)\rangle_A [\gamma' |a_p\rangle_A |c_p\rangle_C \\
&\quad + (-1)^q \delta' |a_{p\oplus 1}\rangle_A |c_{p\oplus 1}\rangle_C] |f_s(H, V)\rangle_C. \tag{3.104}
\end{aligned}$$

Lúc này Charlie tham gia điều khiển nhiệm vụ lần thứ hai. Cô ấy trộn  $|c_p\rangle_C$  và  $|c_{p\oplus 1}\rangle_C$  bằng một BBS và tìm photon C bằng các máy đo  $D_0$  và  $D_1$ . Một tín hiệu phát ra từ  $D_0$  hoặc  $D_1$ , được gắn nhãn  $\tau = 0$  hoặc  $\tau = 1$ , sẽ phá hủy photon C và biến photon A thành

$$\left| \Psi_{npq\tau}^{(SP)} \right\rangle_A = |f_n(H, V)\rangle_A (\gamma' |a_p\rangle + (-1)^{p\oplus q\oplus \tau} \delta' |a_{p\oplus 1}\rangle)_A. \tag{3.105}$$

Cuối cùng, phụ thuộc vào các kết quả  $pq\tau$ , Alice tác động lên photon A toán tử

$$W_{pq\tau}^{(S)} = Z_S^{p\oplus q\oplus \tau} X_S^p \tag{3.106}$$



Hình 3.13: Hoạt động của Charlie và Alice trong giai đoạn thứ hai của CRIO trên photon trong P-DOF.  $W_{pqr}^{(S)}$  là toán tử được định nghĩa trong biểu thức (3.106). Hình này được vẽ cho trường hợp  $n = 0$  mà HWP được đặt trên mode  $a_1$  (nếu không, HWP phải nằm trên mode  $a_0$ ).

để nó trở thành trạng thái  $|f_n(H, V)\rangle_A (\gamma' |a_0\rangle + \delta' |a_1\rangle)_A$ , đây chưa phải là trạng thái mong muốn  $(\gamma' |H\rangle + \delta' |V\rangle)_A |a_0\rangle_A$ . Để chuyển  $|f_n(H, V)\rangle_A (\gamma' |a_0\rangle + \delta' |a_1\rangle)_A$  thành  $(\gamma' |H\rangle + \delta' |V\rangle)_A |a_0\rangle_A$ , Alice đặt một HWP vào mode  $a_{n\oplus 1}$ , sau đó kết hợp hai mode bằng một PBS. Photon  $A$  sau đó đi ra khỏi PBS sẽ ở trạng thái  $(\gamma' |H, a_0\rangle + \delta' |V, a_0\rangle)_A = U^{(P)} |\phi\rangle_A$ , đó là trạng thái mong muốn và hiện đang di chuyển dọc theo mode  $a_0$ . Các hoạt động được mô tả ở trên của Charlie và Alice được hiển thị trong Hình 3.13 (với  $n = 0$ ).

### 3.2.3 Viễn tác toán tử giới hạn có kiểm soát trên photon ở cả hai bậc tự do không gian và phân cực

CRIO lên photon được mã hóa chỉ trong S-DOF hoặc P-DOF đã được nghiên cứu trong hai phần trước, mỗi phần sử dụng một trạng thái rối tăng cường GHZ. Nhiệm vụ thứ ba đặt ra trong phần này là viễn tác toán tử giới hạn (tiếng Anh là controlled remote implementation of a subset of operators, viết tắt là CRISO) trên trạng thái photon được mã hóa đồng thời trong cả S-DOF và P-DOF. Giả sử Alice có photon  $a$  ở trạng thái có

dạng

$$\begin{aligned} \left| \psi^{(SP)} \right\rangle_a &= \left| \psi^{(S)} \right\rangle_a \left| \psi^{(P)} \right\rangle_a \\ &= (\alpha |x_0\rangle_a + \beta |x_1\rangle_a)(\gamma |H\rangle_a + \delta |V\rangle_a), \end{aligned} \quad (3.107)$$

với  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ . Trạng thái như vậy, mặc dù là một photon, trên thực tế có giá trị bằng hai qubit vì nó tồn tại đồng thời ở hai trạng thái phân cực trực giao và lan truyền theo hai đường không gian riêng biệt. Bob, dưới sự kiểm soát của Charlie, liệu có thể viễn tác các toán tử tổng quát  $U^{(S)}$  hoạt động trên S-DOF và  $U^{(P)}$  hoạt động trên P-DOF lên trạng thái của Alice  $|\psi^{(SP)}\rangle$  để trạng thái mà Alice thu được sẽ là  $(U^{(S)} |\psi^{(S)}\rangle)(U^{(P)} |\psi^{(P)}\rangle) = |\psi'^{(S)}\rangle |\psi'^{(P)}\rangle$  với  $|\psi'^{(S)}\rangle$  và  $|\psi'^{(P)}\rangle$  như trong (3.59) và (3.89) hay không? Một cách thức đơn giản để làm điều đó là thực hiện thứ tự hai giao thức như nhiệm vụ thứ nhất và thứ hai. Phương pháp như vậy được cho là không khéo léo vì nó bao gồm hai giao thức độc lập sử dụng hai trạng thái rối tăng cường GHZ riêng biệt. Do đó, một câu hỏi đặt ra: Liệu cả hai toán tử  $U^{(S)}$  và  $U^{(P)}$  có thể tác động song song trên cùng một trạng thái (3.107) bằng cách chỉ sử dụng một trạng thái tăng cường GHZ được không? Câu trả lời là không thể nếu  $U^{(S)}$  và  $U^{(P)}$  có dạng tổng quát như trong các công thức (3.58) và (3.88). Tuy nhiên, nếu các toán tử cần viễn tác có dạng đơn giản hơn so với các dạng tổng quát (3.58) và (3.88) thì nhiệm vụ trên có thể thực hiện. Chúng tôi sẽ đề xuất một giao thức cho CRISO trong đó các toán tử cần viễn tác là các toán tử unita có dạng đơn giản như  $U_m^{(S)} \in \{U_0^{(S)}, U_1^{(S)}\}$  và  $U_n^{(P)} \in \{U_0^{(P)}, U_1^{(P)}\}$  với

$$U_0^{(S)} = \begin{pmatrix} s_0 & 0 \\ 0 & s_0^* \end{pmatrix}, \quad U_1^{(S)} = \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ -s_1^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.108)$$

$$U_0^{(P)} = \begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & p_0^* \end{pmatrix}, \quad U_1^{(P)} = \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ -p_1^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.109)$$

Thuộc tính cụ thể của các toán tử ở trên là tác động của chúng lên một trong hai trạng thái cơ bản (tức là  $|x_0\rangle$  hoặc  $|x_1\rangle$  trong S-DOF và  $|H\rangle$  hoặc  $|V\rangle$  trong P-DOF) không tạo ra chồng chập của hai trạng thái cơ bản. Trong ngôn ngữ toán học, thuộc tính vừa nêu có thể được công thức

hóa như sau

$$U_m^{(S)} |x_0\rangle = s_m |x_m\rangle, \quad (3.110)$$

$$U_m^{(S)} |x_1\rangle = (-1)^m s_m^* |x_{m\oplus 1}\rangle, \quad (3.111)$$

$$U_n^{(P)} |H\rangle = p_n |f_n(H, V)\rangle, \quad (3.112)$$

$$U_n^{(P)} |V\rangle = (-1)^n p_n^* |f_{n\oplus 1}(H, V)\rangle, \quad (3.113)$$

với  $|f_n(H, V)\rangle$  được định nghĩa trong (3.102). Chính là nhờ các thuộc tính (3.110), (3.111), (3.112) và (3.113) mà CRISO có thể thực hiện với  $U_m^{(S)}$  và  $U_n^{(P)}$  tác động lên  $|\psi^{(SP)}\rangle$  bằng cách chỉ sử dụng một trạng thái rối tăng cường  $|Q^{(SP)}\rangle_{ABC}$ .

Giao thức CRISO bắt đầu từ trạng thái ban đầu là

$$|\psi^{(SP)}\rangle_a |Q^{(SP)}\rangle_{ABC} = |\Phi^{(S)}\rangle_{aABC} |\Phi^{(P)}\rangle_{aABC}, \quad (3.114)$$

với  $|\psi^{(SP)}\rangle_a$ ,  $|Q^{(SP)}\rangle_{ABC}$ ,  $|\Phi^{(S)}\rangle_{aABC}$  và  $|\Phi^{(P)}\rangle_{aABC}$  được cho trong (3.107), (3.62), (3.66) và (3.93). Trạng thái mà Alice cần thu được có dạng

$$|\psi'^{(SP)}\rangle_A = |\psi'^{(S)}\rangle_A |\psi'^{(P)}\rangle_A, \quad (3.115)$$

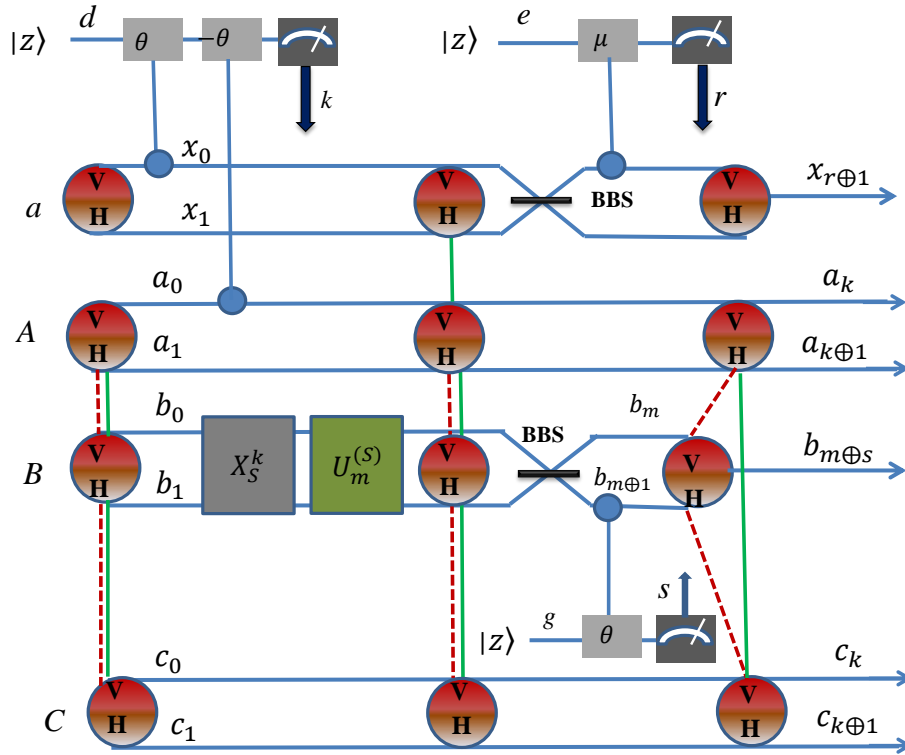
với  $|\psi'^{(S)}\rangle = U_m^{(S)} |\psi^{(S)}\rangle$  và  $|\psi'^{(P)}\rangle = U_n^{(P)} |\psi^{(P)}\rangle$  định nghĩa trong (3.61) và (3.91).

Giao thức CRISO cũng gồm hai giai đoạn. Giai đoạn đầu chỉ xét đến thành phần S-DOF  $|\Phi^{(S)}\rangle_{aABC}$  và thành phần  $|\Phi^{(P)}\rangle_{aABC}$  sẽ xem xét ở giai đoạn sau. Trong giai đoạn đầu Alice thực hiện các hoạt động tương tự với các photon  $a$  và  $A$  như trong mục 3.2.1 để thu được (3.68). Nhưng ở đây, với giao thức CRISO, Bob tham gia ngay sau khi Alice thông báo kết quả  $k$  của phép đo X-quadrature bằng việc tác động toán tử  $X_S^k$  lên photon  $B$  để chuyển (3.68) thành

$$\begin{aligned} |G_k^{(S)}\rangle_{aABC} &= \alpha |x_0\rangle_a |a_k\rangle_A |b_0\rangle_B |c_k\rangle_C \\ &\quad + \beta |x_1\rangle_a |a_{k+1}\rangle_A |b_1\rangle_B |c_{k+1}\rangle_C. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Sau đó Bob tác động  $U_m^{(S)}$  với  $m \in \{0, 1\}$  lên photon  $B$  để chuyển  $|G_k^{(S)}\rangle_{aABC}$  thành

$$\begin{aligned} |G_{mk}^{(S)}\rangle_{aABC} &= |x_0\rangle_a (\alpha X_S^{m\oplus k} U_m^{(S)} |a_0\rangle_A) |b_m\rangle_B |c_k\rangle_C \\ &\quad + |x_1\rangle_a (\beta X_S^{m\oplus k} U_m^{(S)} |a_1\rangle_A) \\ &\quad |b_{m\oplus 1}\rangle_B |c_{k\oplus 1}\rangle_C, \end{aligned} \quad (3.117)$$



Hình 3.14: Hoạt động của Alice và Bob trong giai đoạn đầu tiên của CRISO trên photon ở cả S-DOF và P-DOF.  $X_S$  là toán tử lật đường đi và  $U_m^{(S)}$  là các toán tử được xác định trong biểu thức (3.108).

nhờ các đặc tính (3.110) và (3.111). Tiếp theo, Alice và Bob thực hiện các thao tác như sau. Alice trộn  $|x_0\rangle_a$  và  $|x_1\rangle_a$  bằng một BBS sau đó thực hiện tương tác phi tuyến Kerr chéo  $K_{x_0e}(\theta)$  giữa  $|x_0\rangle_a$  và trạng thái kết hợp  $|z\rangle_e$ . Trong khi đó Bob trộn  $|b_m\rangle_B$  và  $|b_{m+1}\rangle_B$  bằng một BBS khác, sau đó sử dụng tương tác phi tuyến  $K_{b_{m+1}g}(\theta)$ . Những hoạt động đó gây ra sự chuyển đổi

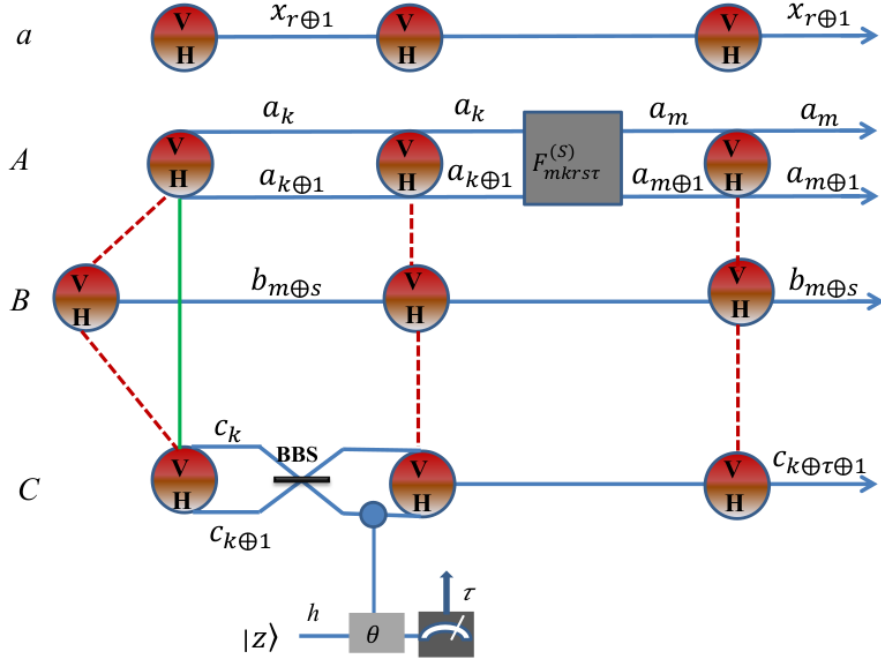
$$\begin{aligned}
& \left| G_{mk}^{(S)} \right\rangle_{aABC} |z\rangle_e |z\rangle_g \rightarrow \\
& (-1)^m |x_0\rangle_a |ze^{i\theta}\rangle_e |b_{m\oplus 1}\rangle_B |ze^{i\theta}\rangle_g [ (X_S^{m\oplus k} U_m^{(S)} \alpha |a_0\rangle_A) |c_k\rangle_C \\
& + (-1)^m (X_S^{m\oplus k} U_m^{(S)} \beta |a_1\rangle_A) |c_{k\oplus 1}\rangle_C ] \\
& + |x_0\rangle_a |ze^{i\theta}\rangle_e |b_m\rangle_B |z\rangle_g [ (X_S^{m\oplus k} U_m^{(S)} \alpha |a_0\rangle_A) \\
& - (-1)^m (X_S^{m\oplus k} U_m^{(S)} \beta |a_1\rangle_A) |c_{k\oplus 1}\rangle_C ] \\
& + (-1)^m |x_1\rangle_a |z\rangle_e |b_{m\oplus 1}\rangle_B |ze^{i\theta}\rangle_g [ (X_S^{m\oplus k} U_m^{(S)} \alpha |a_0\rangle_A) |c_k\rangle_C \\
& - (-1)^m (X_S^{m\oplus k} U_m^{(S)} \beta |a_1\rangle_A) |c_{k\oplus 1}\rangle_C ] \\
& + |x_1\rangle_a |z\rangle_e |b_m\rangle_B |z\rangle_g [ (X_S^{m\oplus k} U_m^{(S)} \alpha |a_0\rangle_A) \\
& + (-1)^m (X_S^{m\oplus k} U_m^{(S)} \beta |a_1\rangle_A) |c_{k\oplus 1}\rangle_C ]. \tag{3.118}
\end{aligned}$$

Sau tương tác phi tuyến, Alice đo X-quadrature của trạng thái kết hợp của cô ấy, trong khi đó Bob cũng làm tương tự với trạng thái kết hợp mà anh ta giữ. Các kết quả của phép đo được thông báo trên kênh cổ điển bởi các bit cổ điển  $rs = 00, 01, 10$  hoặc  $11$  tương ứng với Alice và Bob tìm thấy tương ứng  $|z\rangle_e |z\rangle_g$ ,  $|z\rangle_e |ze^{i\theta}\rangle_g$ ,  $|ze^{i\theta}\rangle_e |z\rangle_g$  hoặc  $|ze^{i\theta}\rangle_e |ze^{i\theta}\rangle_g$ . Đối với kết quả  $rs$ , trạng thái (3.118) suy sụp về

$$\begin{aligned}
\left| G_{mkrs}^{(S)} \right\rangle_{aABC} &= |x_{r\oplus 1}\rangle_a |b_{m\oplus s}\rangle_B \\
& [ (\alpha X_S^{m\oplus k} U_m^{(S)} |a_0\rangle_A) |c_k\rangle_C \\
& + (-1)^{m\oplus r\oplus s} (\beta X_S^{m\oplus k} U_m^{(S)} |a_1\rangle_A) \\
& |c_{k\oplus 1}\rangle_C ], \tag{3.119}
\end{aligned}$$

tiết lộ rằng photon  $a$  chỉ đi theo một đường  $x_{r\oplus 1}$ , và nó không còn rối với các photon còn lại ở cả S-DOF và P-DOF. Tuy nhiên, không giống như giao thức CRIO trong S-DOF ở đó photon  $a$  có thể rời khỏi giao thức, ở đây photon  $a$  phải được giữ lại để giúp viễn tác toán tử  $U_n^{(P)}$  trong giai đoạn tiếp theo khi xét đến P-DOF. Photon  $B$  chỉ đi theo một đường  $b_{m\oplus s}$ , loại bỏ sự rối trong S-DOF với photon  $A$  và  $C$ . Hình 3.14 biểu thị các hoạt động được mô tả ở trên của Alice và Bob.

Giai đoạn đầu của CRISO được tiếp tục bởi Charlie. Anh ta sử dụng một BBS để trộn  $|c_k\rangle_C$  và  $|c_{k\oplus 1}\rangle_C$ , sau đó cho phép  $|c_{k\oplus 1}\rangle_C$  và trạng thái kết hợp  $|z\rangle_h$  tương tác với nhau thông qua  $U_{c_{k\oplus 1}h}(\theta)$ . Tiếp đó, anh ta đo X-quadrature của trạng thái kết hợp và thu được  $|z\rangle_h$  hoặc  $|ze^{i\theta}\rangle_h$ . Nếu



Hình 3.15: hoạt động của Charlie và Alice trong giai đoạn đầu tiên của CRISO trên photon ở cả S-DOF và P-DOF. Toán tử  $F_{mkrst}^{(S)}$  được định nghĩa trong biểu thức (3.121).

kết quả thu được là  $|ze^{i\theta}\rangle_h$  ( $|z\rangle_h$ ), Charlie thông báo bit cổ điển  $\tau = 0$  ( $\tau = 1$ ), khi đó  $|G_{mkrst}^{(S)}\rangle_{aABC}$  trở thành

$$\begin{aligned} |G_{mkrst}^{(S)}\rangle_{aABC} &= |x_{r\oplus 1}\rangle_a |b_{m\oplus s}\rangle_B \\ &\quad (X_S^{m\oplus k} Z_S^{m\oplus k\oplus r\oplus s\oplus \tau} U_m^{(S)} |\psi^{(S)}\rangle_A) \\ &\quad |c_{k\oplus\tau\oplus 1}\rangle_C. \end{aligned} \quad (3.120)$$

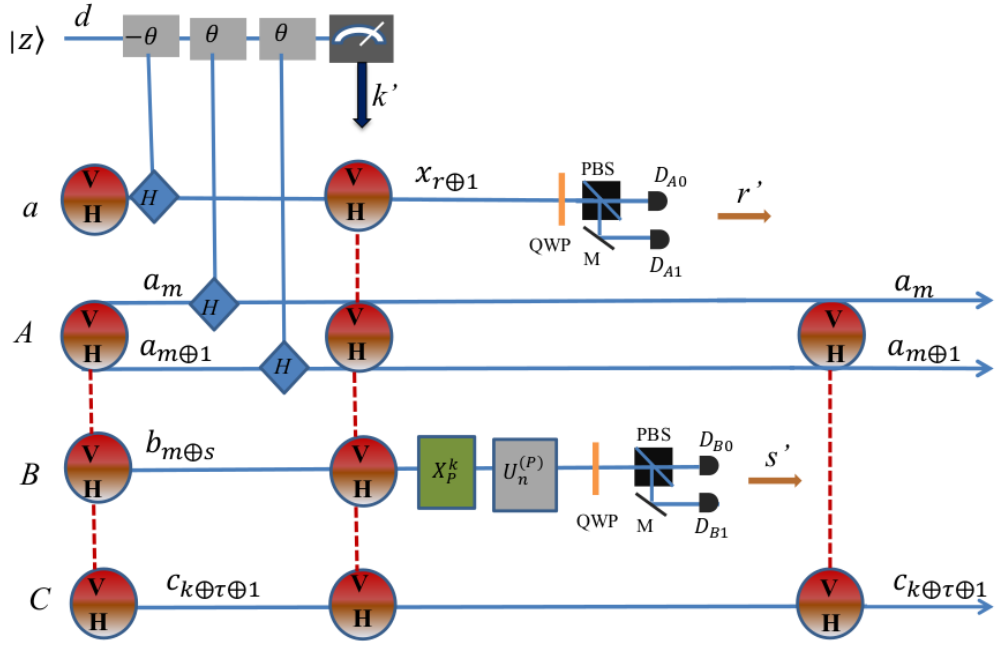
Rõ ràng sự rối giữa photon  $A$  và  $C$  trong S-DOF biến mất và Alice có thể tác động lên photon  $A$  toán tử

$$F_{mkrst}^{(S)} = Z_S^{m\oplus k\oplus r\oplus s\oplus \tau} X_S^{m\oplus k} \quad (3.121)$$

để có

$$\begin{aligned} |L_{mkrst}^{(S)}\rangle_{aABC} &= |x_{r\oplus 1}\rangle_a |b_{m\oplus s}\rangle_B (U_m^{(S)} |\psi^{(S)}\rangle_A) \\ &\quad |c_{k\oplus\tau\oplus 1}\rangle_C. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Các hoạt động của Charlie và Alice ở trên được mô tả như trên Hình 3.15. Mặc dù toán tử  $U_m^{(S)}$  đã được thực hiện thành công đối với  $|\psi^{(S)}\rangle_A$ ,



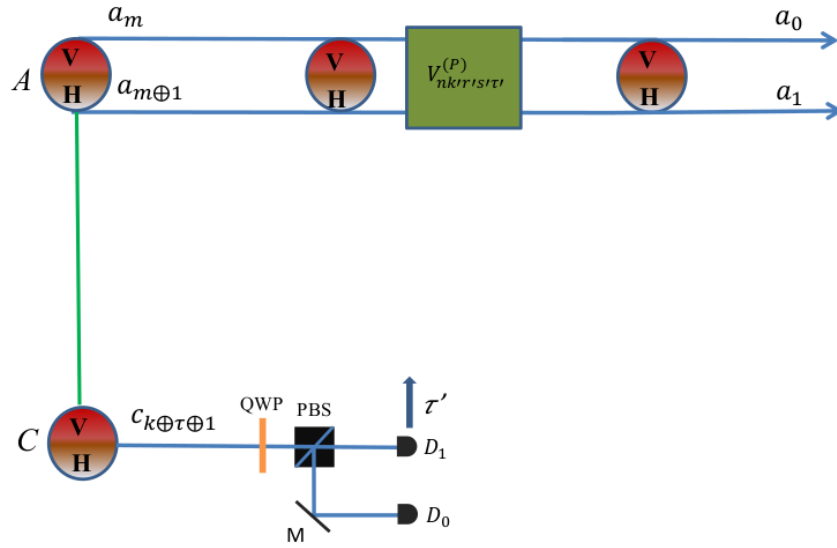
Hình 3.16: Hoạt động của Alice và Bob trong giai đoạn thứ hai của CRISO trên photon ở cả S-DOF và P-DOF.  $X_P$  là toán tử chuyển phân cực và  $U_n^{(P)}$  được định nghĩa trong biểu thức (3.109).

Bob vẫn cần viễn tác toán tử  $U_n^{(P)}$ . Giai đoạn hai sẽ được thực hiện với thành phần P-DOF  $|\Phi^{(P)}\rangle_{aABC}$  trong công thức (3.93). Trạng thái của hệ từ thời điểm này là  $|L_{mkrst}^{(SP)}\rangle_{aABC} = |L_{mkrst}^{(S)}\rangle_{aABC} |\Phi^{(P)}\rangle_{aABC}$ , có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned}
 |L_{mkrst}^{(SP)}\rangle_{aABC} &= |L_{mkrst}^{(S)}\rangle_{aABC} [\gamma |H\rangle_a |H\rangle_A |H\rangle_B |H\rangle_C \\
 &\quad + \gamma |H\rangle_a |V\rangle_A |V\rangle_B |V\rangle_C \\
 &\quad + \delta |V\rangle_a |H\rangle_A |H\rangle_B |H\rangle_C \\
 &\quad + \delta |V\rangle_a |V\rangle_A |V\rangle_B |V\rangle_C].
 \end{aligned} \tag{3.123}$$

Alice bắt đầu giai đoạn thứ hai bằng các thao tác hiển thị trong Hình 3.16. Cụ thể, cô ấy thực hiện tương tác phi tuyến  $U_{x_{r\oplus 1}d}^{(H)}(-\theta)$ ,  $U_{a_m d}^{(H)}(\theta)$  và  $U_{a_{m\oplus 1}d}^{(H)}(\theta)$ , sau đó thực hiện phép đo X-quadrature. Nếu cô ấy tìm thấy  $|z\rangle_d$  ( $|ze^{\pm i\theta}\rangle_d$ ), cô ấy sẽ thông báo kết quả  $k' = 0$  ( $k' = 1$ ) cho Bob để anh ta tác động  $X_P^{k'}$  và sau đó là  $U_n^{(P)}$  lên photon  $B$ . Dựa vào các tính chất (3.112)





Hình 3.17: Hoạt động của Charlie và Alice trong giai đoạn thứ hai của CRISO trên photon ở cả S-DOF và P-DOF. Toán tử  $V_{nk'r's't'}^{(P)}$  được định nghĩa trong (3.127).

và (3.113), trạng thái thu được là

$$\begin{aligned}
 \left| L_{mkrstnk'}^{(SP)} \right\rangle_{aABC} &= \left| L_{mkrst}^{(S)} \right\rangle_{aABC} \otimes \\
 &[\gamma p_n |H\rangle_a |f_{k'}(H, V)\rangle_A |f_n(H, V)\rangle_B |f_{k'}(H, V)\rangle_C \\
 &+ \delta(-1)^n p_n^* |V\rangle_a |f_{k' \oplus 1}(H, V)\rangle_A |f_{n \oplus 1}(H, V)\rangle_B \\
 &|f_{k' \oplus 1}(H, V)\rangle_C].
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

Tiếp theo Alice gửi photon  $a$  qua một QWP và một PBS, ở phía sau sẽ đặt hai máy đo photon  $D_{A0}$  và  $D_{A1}$ . Tương tự, Bob gửi photon  $B$  qua một QWP và một PBS, phía sau cũng đặt hai máy đo photon  $D_{B0}$  và  $D_{B1}$ . Nếu  $D_{A0}$  ( $D_{A1}$ ) phát tín hiệu thì bit cổ điển  $r' = 0$  ( $r' = 1$ ) được thông báo, trong khi nếu  $D_{B0}$  ( $D_{B1}$ ) phát tín hiệu thì  $s' = 0$  ( $s' = 1$ ) được thông báo. Đối với kết quả bất kỳ  $r's'$ , photon  $a$  và  $B$  bị phá hủy và  $\left| L_{mkrstnk'}^{(SP)} \right\rangle_{aABC}$  suy sụp về

$$\begin{aligned}
 \left| \Psi_{mk\tau nk'r's'}^{(SP)} \right\rangle_{AC} &= [(U_m^{(S)} | \psi^{(S)} \rangle_A) |c_{k \oplus \tau \oplus 1}\rangle_C] \\
 &\otimes [(X_P^{n \oplus k'} Z_P^{r' \oplus s'} \gamma U_n^{(P)} |H\rangle_A) |f_{k'}(H, V)\rangle_C \\
 &+ (X_P^{n \oplus k'} Z_P^{r' \oplus s'} \delta U_n^{(P)} |V\rangle_A) |f_{k' \oplus 1}(H, V)\rangle_C].
 \end{aligned} \tag{3.125}$$

Từ công thức (3.125), photon  $A$  và  $C$  bị rối (trong P-DOF) và Charlie cần thực hiện vai trò kiểm soát CRISO bằng cách đo trạng thái phân cực

của photon  $C$ . Như thường lệ, Charlie chuyển photon  $C$  qua một QWP và một PBS và sau đó tìm photon  $C$  ở các máy đo photon  $D_0$  và  $D_1$  được sắp xếp như trên Hình 3.17.  $D_0$  ( $D_1$ ) phát tín hiệu tương ứng với bit cổ điển  $\tau' = 0$  ( $\tau' = 1$ ) được thông báo. Khi đó photon  $A$  nằm trong trạng thái

$$\begin{aligned} \left| \Psi_{mnk'r's'\tau'}^{(SP)} \right\rangle_A &= (U_m^{(S)} \left| \psi^{(S)} \right\rangle_A) \\ &\quad (X_P^{n \oplus k'} Z_P^{r' \oplus s' \oplus \tau'} U_n^{(P)} \left| \psi^{(P)} \right\rangle_A). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Cuối cùng, Alice tác động toán tử hồi phục

$$V_{nk'r's'\tau'}^{(P)} = Z_P^{r' \oplus s' \oplus \tau'} X_P^{n \oplus k'} \quad (3.127)$$

lên trạng thái  $\left| \Psi_{mnk'r's'\tau'}^{(SP)} \right\rangle_A$  để thu được  $(U_m^{(S)} \left| \psi^{(S)} \right\rangle_A)(U_n^{(P)} \left| \psi^{(P)} \right\rangle_A)$ , đó là trạng thái  $\left| \psi_{mn}^{(SP)} \right\rangle_A$  mà cô ấy cần trong công thức (3.115).

### 3.3 Kết luận của chương 3

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu hai vấn đề liên quan đến rối tăng cường.

Thứ nhất, trong mục 3.1, chúng tôi đã thiết kế một sơ đồ quang học để tạo ra trạng thái rối tăng cường giữa 5 photon với mười qubit. Trạng thái này sau đó được sử dụng làm kênh lượng tử dùng chung cho Alice và Bob để chuẩn bị cho nhau một trạng thái tăng cường một photon hai qubit dưới sự kiểm soát chung của Charlie. Hai bậc tự do khác biệt được khai thác đồng thời ở đây là sự phân cực và không gian, cụ thể là lộ trình trong không gian. Sơ đồ tạo ra trạng thái rối tăng cường yêu cầu sử dụng các yếu tố phi tuyến Kerr chéo và nó sẽ hoạt động nếu kết quả của các phép đo homodyne X trên các trạng thái kết hợp có thể phân giải được. Trong thực tế, các phi tuyến Kerr rất yếu. Nhưng may mắn rằng, hiệu suất của phép đo không chỉ phụ thuộc vào cường độ của các phi tuyến Kerr chéo mà còn phụ thuộc vào biên độ của các trạng thái kết hợp. Có thể thấy việc sử dụng các trạng thái kết hợp có biên độ đủ lớn có thể bù đắp cho sự yếu của tính phi tuyến Kerr chéo. Bắt đầu từ một trạng thái rời đơn giản, quá trình tạo trạng thái rối tăng cường có thể không thành công ngay lập tức, nhưng trong trường hợp không may mắn, nó có thể được đưa về trạng thái

ban đầu và do đó giao thức cần thiết được lặp lại nhiều lần cho đến khi thành công. Theo nghĩa này, quá trình tạo trạng thái rối tăng cường đó gần như tất định. Với trạng thái rối tăng cường năm photon được tạo ra, giao thức viễn tạo trạng thái tăng cường hai chiều có kiểm soát được thực hiện chỉ bằng các thiết bị quang tuyến tính như BS, BBS, PBS, HWP, QWP và máy đo photon. Trong giao thức của chúng tôi, sơ đồ cực kỳ đơn giản và số lượng thiết bị quang tuyến tính được sử dụng giảm đáng kể thậm chí so với các giao thức một chiều trong [39–41]. Vì nhiều nhất chỉ có một photon đập vào máy đo, máy đo phân giải số photon không cần thiết ở đây. Mặc dù giao thức của chúng tôi thực hiện các phép phát hiện photon mang tính xác suất, nhưng nhiệm vụ thành công một cách tất định vì đối với mỗi tập kết quả đo khả dĩ đều tồn tại các toán tử khôi phục tương ứng mà Alice và Bob sẽ sử dụng để thu được các trạng thái tăng cường mong muốn.

Vấn đề thứ hai liên quan đến viễn tác toán tử lên photon có kiểm soát. Cụ thể: Trong mục 3.2, chúng tôi đã đưa ra ba nhiệm vụ để viễn tác toán tử có kiểm soát một cách tất định trên các trạng thái photon. Nhiệm vụ đầu tiên đề cập đến viễn tác toán tử tổng quát lên trạng thái photon trong S-DOF. Đối với nhiệm vụ thứ hai, toán tử cũng là tổng quát nhưng trạng thái photon là P-DOF. Tuy nhiên, nhiệm vụ thứ ba liên quan đến viễn tác các toán tử đặc biệt lên trạng thái photon ở cả S-DOF và P-DOF. Mỗi nhiệm vụ trong số ba nhiệm vụ có thể được thực hiện trong hai giai đoạn thông qua một trạng thái rối tăng cường GHZ. Trong giai đoạn đầu tiên của nhiệm vụ thứ nhất, phần S-DOF của kênh lượng tử được khai thác để chuyển trạng thái trong S-DOF từ Alice sang Bob để Bob có thể thực hiện việc tác động toán tử mình lưu giữ lên trạng thái Alice gửi. Sau đó, thành phần P-DOF của kênh lượng tử được khai thác trong giai đoạn thứ hai để Bob chuyển trạng thái của mình trong S-DOF cho Alice nhưng trạng thái mà Alice có được không phải trong S-DOF mà trong P-DOF. Cuối cùng, Alice áp dụng một số kỹ thuật để biến đổi trạng thái của cô ấy trong P-DOF đến trạng thái mong muốn trong S-DOF. Giao thức cho nhiệm vụ thứ hai khác so với nhiệm vụ một. Giai đoạn đầu tiên của nó khai thác thành phần P-DOF của kênh lượng tử để chuyển trạng thái trong P-DOF từ Alice sang Bob và giai đoạn thứ hai khai thác phần S-DOF của kênh

lượng tử để chuyển trạng thái trong P-DOF tại vị trí của Bob đến trạng thái S-DOF tại nơi của Alice và Alice cũng cần một số toán tử khác để chuyển trạng thái cô ấy có được trong S-DOF sang trạng thái mong muốn trong P-DOF. Nhiệm vụ thứ ba, giống như nhiệm vụ đầu tiên, khai thác thành phần S-DOF của kênh lượng tử trong giai đoạn đầu tiên và thành phần P-DOF của nó trong giai đoạn thứ hai. Tuy nhiên, nhiệm vụ thứ ba chỉ xử lý các toán tử giới hạn với các tính chất đặc biệt, vì vậy trong giai đoạn đầu, trạng thái photon mong muốn trong S-DOF dễ dàng thu được, để lại trạng thái photon P-DOF mong muốn đến giai đoạn thứ hai. Vai trò của người kiểm soát được thực hiện trong từng giai đoạn của mỗi nhiệm vụ. Tất cả các các nhiệm vụ được hỗ trợ bởi phi tuyến Kerr chéo và phép đo X-quadrature.

## Kết luận chung

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu về hai loại rối đó là rối lai và rối tăng cường đồng thời xem xét những ứng dụng cụ thể của chúng trong xử lý thông tin lượng tử.

Thứ nhất: Chúng tôi đã xây dựng thành công sơ đồ lý thuyết để tạo trạng thái rối lai hai mode giữa trạng thái kết hợp có xét tính phân cực và trạng thái phân cực của photon đơn có dạng như trong công thức (2.25). Cụ thể, trong điều kiện lý tưởng, sơ đồ của chúng tôi cho tổng xác suất thành công lớn gấp đôi so với trong [99, 101] và độ tin cậy luôn cực đại. Chúng tôi cũng xét đến điều kiện thực tế trong quá trình thiết kế sơ đồ để đánh giá ảnh hưởng của chúng đến xác suất thành công và đến độ tin cậy của trạng thái thu được so với trạng thái ở điều kiện lý tưởng. Các điều kiện thực tế đó bao gồm chất lượng của các trạng thái đầu vào, chất lượng các thiết bị quang học được sử dụng trong sơ đồ. Các phân tích về hiệu ứng suy giảm liên quan đến các trạng thái đầu vào và sự không hoàn hảo của các thiết bị quang học cho thấy rằng giao thức của chúng tôi vẫn có khả năng chống lại những nhiễu loạn nhỏ.

Thứ hai: Tạo thành công rối lai bốn mode giữa trạng thái kết hợp và trạng thái qubit đơn tuyến có dạng như trong công thức (2.70). Sau đó chúng tôi sử dụng trạng thái đã tạo này làm kênh lượng tử để thực hiện viễn chuyển lượng tử có kiểm soát giữa một qubit đơn tuyến và một qubit ở trạng thái kết hợp. Quá trình thực hiện có xét đến ảnh hưởng của môi trường. Chúng tôi sau đó tính giá trị trung bình của xác suất thành công và độ tin cậy trong hai trường hợp viễn chuyển từ DV sang CV và chiều ngược lại từ CV sang DV. Chúng tôi cũng phân tích rõ ràng các kết quả và so sánh chúng với nhau.

Thứ 3: Chúng tôi đã thiết kế một sơ đồ quang học để tạo ra trạng thái rối tăng cường giữa 5 photon với mười qubit. Tiếp theo, kênh rối năm

photon này được dùng cho quá trình viễn tạo hai chiều có kiểm soát trạng thái tăng cường. Hai bậc tự do khác biệt được khai thác đồng thời ở đây là sự phân cực và lộ trình không gian. Sơ đồ thiết kế kênh lượng tử cho xác suất thành công là gần tuyệt đối. Một khi trạng thái rối tăng cường giữa 5 photon được tạo ra thành công thì giao thức viễn tạo hai chiều các siêu trạng thái có kiểm soát là tất định.

Thứ 4: Chúng tôi đưa ra ba giao thức để thực hiện quá trình viễn tác có kiểm soát toán tử trên photon trong S-DOF, P-DOF và đồng thời trong cả S-DOF và P-DOF. Mỗi trong số ba nhiệm vụ có thể được thực hiện trong hai giai đoạn thông qua một trạng thái rối tăng cường GHZ. Chúng tôi đồng thời xem xét vai trò của người kiểm soát trong từng giai đoạn của mỗi nhiệm vụ. Tất cả các các nhiệm vụ được hỗ trợ bởi phi tuyến Kerr chéo kết hợp phép đo X-quadrature và đều thành công 100%.

## Những đóng góp mới của luận án

1. Chúng tôi xây dựng thành công trạng thái rối lai hai mode giữa trạng thái kết hợp có phân cực và trạng thái phân cực của photon đơn. Sơ đồ thiết lập có xác suất cao gấp đôi so với các giao thức đã công bố trước đó. Một ưu điểm khác nữa đó là sơ đồ không cần dùng đến toán tử dịch chuyển, là toán tử không thể thực hiện được trong thực tế một cách chính xác.
2. Chúng tôi đã xây dựng thành công trạng thái rối lai bốn bên giữa trạng thái kết hợp và trạng thái qubit đơn tuyến và xét ảnh hưởng của môi trường trong quá trình tạo rối. Từ nguồn rối lai bốn bên này, chúng tôi đã xây dựng thành công giao thức viễn chuyển lượng tử giữa trạng thái qubit đơn tuyến và trạng thái kết hợp có kiểm soát của hai người, một người hoạt động trong không gian DV, người còn lại hoạt động trong không gian CV. Giao thức với hai kiểm soát viên như thế chưa được xem xét trước đó.
3. Chúng tôi tạo thành công trạng thái rối tăng cường giữa năm photon và sử dụng trạng thái đó để thiết kế giao thức cho việc viễn tạo hai chiều có kiểm soát trạng thái tăng cường.
4. Chúng tôi đã xây dựng ba giao thức viễn tác toán tử có kiểm soát lên photon trong S-DOF, P-DOF và trong đồng thời S-DOF và P-DOF, tương ứng sử dụng chỉ một trạng thái GHZ tăng cường.

## Danh mục các công trình đã công bố

1. Dat Thanh Le, Cao Thi Bich, Nguyen Ba An, “Feasible and economical scheme to entangle a polarized coherent state and a polarized photon”, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics* **225**, 165820 (2021).
2. Cao Thi Bich and Nguyen Ba An, “Teleporting DV qubit to CV qubit and vice versa via DV-CV hybrid entanglement across lossy environment supervised simultaneously by both DV and CV controllers”, *Pramana – J. Phys.* **96**, 33 (2022).
3. Nguyen Ba An and Bich Thi Cao , “Controlled remote implementation of operators via hyperentanglement”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **55**, 225307 (2022).
4. Cao Thi Bich and Nguyen Ba An, “Bidirectional remote hyperstate preparation under common quantum control using hyperentanglement”, *Journal of the Optical Society of America B* **1**, 11 (2023).



## Phụ lục A: Trạng thái đầu vào thực tế

Sử dụng trạng thái nén chân không  $|sv\rangle$  trong công thức (2.54) như gần đúng của trạng thái con mèo Schrödinger chẵn trong mode 1 và cặp rối phân cực photon  $|\Theta\rangle_{34}$  trong công thức (2.29) như trạng thái đầu vào của mode 3 và 4. Lưu ý việc áp dụng BS tổng quát trên các trạng thái Fock trong công thức (2.34), tổng trạng thái  $|\Sigma\rangle$  trong công thức (2.33) của các mode 1, 2, 3, và 4 khi đã đi qua phần 1 và BS tổng quát trong phần 2 của quá trình thiết lập trong Hình 2.1 được thay đổi thành

$$\begin{aligned}
 |\Sigma^{\text{ap}}\rangle &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\bar{n}} \sum_{q=0}^m \sum_{p'=0}^{\bar{n}-p+q} \sum_{q'=0}^{m-q+p} F_{p,q,p',q'}^{n,m}(s, \beta, r, t) \\
 &\quad \times |(\bar{n}-p+q-p')_H, (m-q+p-q')_V\rangle_1 |p'_H, q'_V\rangle_2 \\
 &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2}} (|HV\rangle_{34} + |VH\rangle_{34}), \tag{3.128}
 \end{aligned}$$

ở đây  $\bar{n} = 2n$  và

$$\begin{aligned}
 F_{p,q,p',q'}^{n,m}(s, \beta, r, t) &= c_n(s) f_m(\beta) B_{p,q}^{\bar{n},m}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
 &\quad \times B_{p',0}^{\bar{n}-p+q,0}(r, t) B_{q',0}^{\bar{n}-q+p,0}(r, t), \tag{3.129a}
 \end{aligned}$$

$$c_n(s) = \frac{(-\tanh s)^n \sqrt{(2n)!}}{(\cosh s)^{1/2} 2^n n!}, \tag{3.129b}$$

với  $f_n(x)$  là hệ số trạng thái kết hợp được xác định ở công thức (2.33) và  $B_{p,q}^{j,k}(r, t)$  là hệ số của BS trong công thức (2.35). Mode 2 và 4 sau đó đi vào BBS2 và sau đó đi qua hai PBS (xem phần 2 của thiết lập trong Hình 2.1), mang lại đầu ra

$$\begin{aligned}
|\Sigma^{\text{ap}'}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\bar{n}} \sum_{q=0}^m \sum_{p'=0}^{\bar{n}-p+q} \sum_{q'=0}^{m-q+p} F_{p,q,p',q'}^{n,m}(s, \beta, t, r) \\
&|(\bar{n} - p + q - p')_H, (m - q + p - q')_V\rangle_1 |1_H\rangle_3 \\
&\times \sum_{k=0}^{p'} \sum_{k'=0}^{q'} \sum_{l'=0}^1 B_{k,0}^{p',0}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) B_{k',l'}^{q',1}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) |(p' - k)_H\rangle_2 |k_H\rangle_4 \\
&|(q' - k' + l')_V\rangle_{2'} |(1 - l' + k')_V\rangle_{4'} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\bar{n}} \sum_{q=0}^m \sum_{p'=0}^{\bar{n}-p+q} \sum_{q'=0}^{m-q+p} F_{p,q,p',q'}^{n,m}(s, \beta, t, r) \\
&|(\bar{n} - p + q - p')_H, (m - q + p - q')_V\rangle_1 |1_V\rangle_3 \\
&\times \sum_{k=0}^{p'} \sum_{l=0}^1 \sum_{k'=0}^{q'} B_{k,l}^{p',1}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) B_{k',0}^{q',0}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) |(p' - k + l)_H\rangle_2 \\
&|(1 - l + k)_H\rangle_4 |(q' - k')_V\rangle_{2'} |k'_V\rangle_{4'}. \tag{3.130}
\end{aligned}$$

Sau phép đo  $\Pi_1$  định nghĩa trong (2.40), mode 1 và 3 trong trạng thái  $|\Sigma^{\text{ap}'}\rangle$  trở thành

$$\rho_1^{(13)} = \frac{\text{Tr}_{22'44'}(\Pi_1 |\Sigma^{\text{ap}'}\rangle \langle \Sigma^{\text{ap}'}|)}{P_{1,\Theta}^{\text{re}}}, \tag{3.131}$$

ở đây

$$P_{1,\Theta}^{\text{re}} = \langle \Sigma^{\text{ap}' | \Pi_1 | \Sigma^{\text{ap}'}\rangle. \tag{3.132}$$

Độ tin cậy giữa trạng thái chuẩn bị và trạng thái lai lý tưởng là

$$F_{1,\Theta}^{\text{re}} =_{13} \langle \Psi | \rho_1^{(13)} | \Psi \rangle_{13}. \tag{3.133}$$

Tương tự, chúng ta có thể tính xác suất  $P_{j,\Theta}^{\text{re}}$  và độ tin cậy  $F_{j,\Theta}^{\text{re}}$  đối với các phép đo khác  $\Pi_j$  với  $j = 2, 3, 4$  được định nghĩa trong các công thức (2.41) - (2.43). Các tính toán trên có thể được lặp lại khi thay thế cặp rối phân cực  $(|HV\rangle + |VH\rangle)/\sqrt{2}$  của mode 3 và 4 trong công thức (3.128) với chân không để có được  $P_{j,0}^{\text{re}}$  và/hoặc thay thế trạng thái nén chân không  $|sv\rangle$  như trạng thái đầu vào của mode 1 với trạng thái nén một photon  $|ss\rangle$  trong công thức (2.55). Chúng tôi cũng lưu ý để thực hiện các phép tính số, giới hạn trên của ngưỡng cho các chỉ số  $n$  và  $m$  trong biểu thức (3.130) được chọn là 7 [99].

## Phụ lục B: Sự không hoàn hảo của bộ tách chùm cân bằng

Để xem xét sự không hoàn hảo của các bộ tách chùm cân bằng, chúng ta thay thế hai BBS hoàn hảo trong quá trình thiết lập Hình 2.1, BBS1 và BBS2 tương ứng bằng  $BS(r_1, t_1)$  và  $BS(r_2, t_2)$ , với  $r_k$  và  $t_k$  hơi khác với  $1/2$  bởi các tham số không hoàn hảo  $\epsilon_k$  như được định nghĩa trong (2.61). Sau đó, chúng ta tính toán lại Ch. 2.1 với các BS tổng quát này cho phép đo  $\Pi_1$  được xác định trong (2.40) và tìm  $P_1^{\text{im}}$  và  $F_1^{\text{im}}$  như trong các công thức (2.62) và (2.63) với

$$\gamma_1 = \beta(\sqrt{t_1} + \sqrt{r_1})\sqrt{r}, \quad (3.134a)$$

$$\gamma_2 = \beta(\sqrt{r_1} - \sqrt{t_1})\sqrt{r}, \quad (3.134b)$$

$$\delta_1 = \beta(\sqrt{t_1} + \sqrt{r_1})\sqrt{t}, \quad (3.134c)$$

$$\delta_2 = \beta(\sqrt{r_1} - \sqrt{t_1})\sqrt{t}. \quad (3.134d)$$

Tương tự cho ba phép đo khác  $\{\Pi_j; j = 2, 3, 4\}$  được định nghĩa trong (2.41) - (2.43), chúng ta tìm thấy xác suất thành công  $P_j^{\text{im}}$  và độ tin cậy

$F_j^{\text{im}}$  tương ứng như sau

$$P_2^{\text{im}} = N^2(\beta) \left[ (r_2^2 + t_2^2) r \beta^2 e^{-2r\beta^2} - (r_2^2 - t_2^2) \gamma_1 \gamma_2 e^{-2\beta^2} \right], \quad (3.135)$$

$$F_2^{\text{im}} = \frac{N^2(\beta) e^{-2r\beta^2}}{4P_2^{\text{im}}} \left[ \gamma_2 f_0(\delta_1) (t_2 \langle \delta | \delta_2 \rangle - r_2 \langle -\delta | \delta_2 \rangle) + \gamma_1 f_0(\delta_2) \langle \delta | \delta_1 \rangle \right]^2, \quad (3.136)$$

$$P_3 = 4r_2 t_2 P, \quad (3.137)$$

$$F_3 = \frac{N^2(\beta)}{4P_3} (A_3 + B_3)^2, \quad (3.138)$$

$$A_3 = 2f_0(\delta_2) \sqrt{r_2 t_2} \gamma_1 e^{-r\beta^2} \langle \delta | \delta_1 \rangle, \quad (3.139)$$

$$B_3 = f_0(\delta_1) \sqrt{r_2 t_2} \gamma_2 e^{-r\beta^2} (\langle \delta | \delta_2 \rangle - \langle -\delta | \delta_2 \rangle), \quad (3.140)$$

$$P_4 = P_3, \quad (3.141)$$

$$F_4 = F_3, \quad (3.142)$$

ở đây  $f_n(x)$  là hệ số trạng thái kết hợp xác định trong (2.33) và  $P$  cho bởi (2.44). Không khó khăn để kiểm tra được

$$\sum_j^4 P_j^{\text{im}} = 4P \equiv P_T, \quad (3.143)$$

ở đây  $P_T$  là tổng xác suất thành công trong trường hợp lý tưởng.

## Tài liệu tham khảo

- [1] W. K. Wootters, W. H. Zurek, “A Single state quantum cannot be cloned”, *Nature*, 1982, **299**, 802.
- [2] C. H. Bennett, G. Brassard, Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing, in Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India (IEEE, New York, 1984), 175.
- [3] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, D. J. Wineland, “Demonstration of a fundamental quantum logic gate”, *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**, 4714.
- [4] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, S. Haroche, “Obseving the progressive decoherence of the meter in a quantum measurement”, *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **77**, 4887.
- [5] John F Clauser, Michael A Horne and Abner A Holt, “Proposed experiment to test local hidden - variable theories”, *Phys. Rev. Lett.*, 1970, **24**, 549.
- [6] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter and A. Zeilinger, “Violation of Bell’s inequality under strict Einstein locality conditions”, *Phys. Rev. Lett.* 1998, **81**, 5039.
- [7] Aspect, Alain; Grangier, Philippe; Roger, Gérard, “Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedanken experiment: A new violation of Bell’s inequalities”, *Physical Review Letters*. American Physical Society (APS), 1982, **49**, 91.
- [8] E. Schrödinger, Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, *Naturwissenschaften*, 1935, **23**, 807.

- [9] O. Morin, K. Huang, J. Liu, H. L. Jeannic, C. Fabre and J. Laurat, “Remote creation of hybrid entanglement between particle-like and wave-like optical qubits”, *Nature Photonics*, 2014, **8**, 570.
- [10] P. G. Kwiat, “Hyper-entangled states”, *J. Mod. Opt.* 1997, **44**, 2173.
- [11] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein–Podolsky–Rosen channels”, *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**, 1895.
- [12] N. B. An, “Quantum dialogue”, *Phys. Lett. A*, 2004, **328**, 6.
- [13] L. Vaidman, N. Yoran, “Methods for reliable teleportation”, *Phys. Rev. A*, 1999, **59**, 116.
- [14] N. Lutkenhaus, J. Calsamiglia, K. A. Suominen, “Bell measurements for teleportation”, *Phys. Rev. A*, 1999, **59**, 3295.
- [15] D. P. Kang, L. G. Helt, *et al.*, “Hyperentangled photon sources in semiconductor waveguides”, *Phys. Rev. A*, 2014, **89**, 023833.
- [16] B. L. Hu, Y. B. Zhan, “Generation of hyperentangled states between remote noninteracting atomic ions”, *Phys. Rev. A*, 2010, **82**, 054301.
- [17] Y. B. Sheng, F. G. Deng, G. L. Long, “Complete hyperentangled-Bell-state analysis for quantum communication”, *Phys. Rev. A*, 2010, **82**, 032318.
- [18] B. C. Ren, W. R. Wei, *et al.*, “Complete hyperentangled-Bell-state analysis for photon systems assisted by quantum-dot spins in optical microcavities”, *Opt. Express*, 2012, **20**, 24664.
- [19] T. J. Wang, Y. Lu and G. L. Long, “Generation and complete analysis of the hyperentangled Bell state for photons assisted by quantum-dot spins in optical microcavities”, *Phys. Rev. A*, 2012, **86**, 042337.
- [20] Q. Liu, M. Zhang, “Generation and complete nondestructive analysis of hyperentanglement assisted by nitrogen-vacancy centers in resonators”, *Phys. Rev. A*, 2015, **91**, 062321.

- [21] Q. Liu, G. Y. Wang, *et al.*, “Complete nondestructive analysis of two-photon six-qubit hyperentangled Bell states assisted by cross-Kerr nonlinearity”, *Sci. Rep.*, 2016, **6**, 22016.
- [22] X. H. Li, S. Ghose, “Self-assisted complete maximally hyperentangled state analysis via the cross-Kerr nonlinearity”, *Phys. Rev. A*, 2016, **93**, 022302.
- [23] X. H. Li, S. Ghose, “Complete hyperentangled Bell state analysis for polarization and time-bin hyperentanglement”, *Opt. Express*, 2016, **24**, 18388.
- [24] T. J. Wang, C. Wang, “Complete hyperentangled-Bell-state analysis for photonic qubits assisted by a three-level Lambda-type system”, *Sci. Rep.* 2016, **6**, 19497.
- [25] T. C. Wei, J. T. Barreiro, P. G. Kwiat, “Hyperentangled Bellstate analysis”, *Phys. Rev. A*, 2007, **75**, 060305(R).
- [26] Y. Xia, Q. Q. Chen, *et al.*, “Efficient hyperentangled Greenberger-Horne-Zeilinger states analysis with cross-Kerr nonlinearity”, *J. Opt. Soc. Am. B*, 2012, **29**, 1029.
- [27] T. E. Kiess, Y. H. Shih, A. V. Sergienko, *et al.*, “EinsteinPodolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by type II parametric down conversion”, *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **71**, 3893.
- [28] P. G. Kwiat, E. Waks, A. G. White, *et al.*, “Ultrabright source of polarization-entangled photons”, *Phys. Rev. A*, 1999, **60**, R773.
- [29] M. Barbieri, F. De Martini, *et al.*, “Generation and characterization of Werner states and maximally entangled mixed states by a universal source of entanglement”, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **92**, 177901.
- [30] S. P. Walborn, “Breaking the communication barrier”, *Nature Physics*, 2008, **4**, 268.
- [31] B. C. Ren, F. G. Deng, “Hyperentanglement purification and concentration assisted by diamond NV centers inside photonic crystal cavities”, *Laser. Phys. Lett.*, 2013, **10**, 115201.

- [32] B. C. Ren, F. F. Du, F. G. Deng, “Two-step hyperentanglement purification with the quantum-state-joining method”, *Phys. Rev. A*, 2014, **90**, 052309.
- [33] Y. G. Wang, Q. Liu, F. G. Deng, “Hyperentanglement purification for two-photon six-qubit quantum systems”, *Phys. Rev. A*, 2016, **94**, 032319.
- [34] T. J. Wang, L. L. Liu, *et al.*, “One-step hyperentanglement purification and hyperdistillation with linear optics”, *Opt. Express*, 2015, **23**, 9284.
- [35] T. J. Wang, C. Wang, “High-efficient entanglement distillation from photon loss and decoherence”, *Opt. Express*, 2015, **23**, 31550.
- [36] X. L. Wang, X. D. Cai, Z. E. Su, M. C. Chen, D. Wu, L. Li, N. L. Liu, C. Y. Lu and J. W. Pan, “Quantum teleportation of multiple degrees of freedom of a single photon”, *Nature*, 2015, **518** 516.
- [37] T. M. Graham, H. J. Bernstein, T. C. Wei, M. Junge and P. G. Kwiat, “Superdense teleportation using hyperentangled photons”, *Nat. Commun.*, 2015, **6**, 7185.
- [38] M. X. Luo, H. R. Li, H. Lai and X. Wang, “Teleportation of a ququart system using hyperentangled photons assisted by atomic-ensemble memories”, *Phys. Rev. A*, 2016, **93**, 012332.
- [39] M. Nawaz and M. Ikram, “Remote state preparation through hyperentangled atomic states”, *J. Phys. B*, 2018, **51**, 075501.
- [40] P. Zhou, X. F. Jiao and S. X. Lv, “Parallel remote state preparation of arbitrary single-qubit states via linear-optical elements by using hyperentangled Bell states as the quantum channel”, *Quant. Inf. Process.*, 2018, **17**, 298.
- [41] X. F. Jiao, P. Zhou, S. X. Lv and Z. Y. Wang, “Remote preparation for single-photon two-qubit hybrid state with hyperentanglement via linear-optical elements”, *Sci. Rep.*, 2019, **9**, 4663.
- [42] P. Zhou and L. Lv, “Joint remote preparation of single-photon three qubit state with hyperentangled state via linear-optical elements”, *Quant. Inf. Process.*, 2020, **19**, 283.



- [43] T. Yang, Q. Zhang, *et al.*, “All-versus-nothing violation of local realism by two-photon, four-dimensional entanglement”, *Phys. Rev. Lett.* 2005, **95**, 240406.
- [44] J. T. Barreiro, N. K. Langford, *et al.*, “Generation of hyperentangled photon pairs”, *Phys. Rev. Lett.*, 2005, **95**, 260501.
- [45] G. Vallone, R. Ceccarelli, *et al.*, “Hyperentanglement of two photons in three degrees of freedom”, *Phys. Rev. A*, 2009, **79**, 030301R.
- [46] R. Ceccarelli, G. Vallone, *et al.*, “Experimental entanglement and non-locality of a two-photon six-qubit cluster state”, *Phys. Rev. Lett.*, 2009, **103**, 160401.
- [47] G. Vallone, G. Donati, *et al.*, “Six-qubit twophoton hyperentangled cluster states: characterization and application to quantum computation”, *Phys. Rev. A*, 2010, **81**, 052301.
- [48] W. B. Gao, C. Y. Lu, *et al.*, “Experimental demonstration of a hyperentangled ten-qubit Schrödinger cat state”, *Nat. Phys.*, 2010, **6**, 331.
- [49] D. P. Kang, L. G. Helt, *et al.*, “Hyperentangled photon sources in semiconductor waveguides”, *Phys. Rev. A*, 2014, **89**, 023833.
- [50] C. Gerry and P. Knight, *Introductory quantum optics*, Cambridge University Press, New York (2005).
- [51] K. Nemoto and W. J. Munro, “Nearly deterministic linear optical controlled-NOT gate”, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **93**, 250502.
- [52] W. J. Munro, K. Nemoto and T. P. Spiller, "Weak nonlinearities: a new route to optical quantum computation", *New J. Phys.*, 2005, **7**, 137.
- [53] N. B. An, K. Kim and J. Kim, “Generation of cluster-type entangled coherent states using weak nonlinearities and intense laser beams”, *Quant. Inf. Comput.*, 2011, **11**, 0124.
- [54] M. X. Luo, H. R. Li and H. Lai, “Quantum computation based on photonic systems with two degrees of freedom assisted by the weak cross-Kerr nonlinearity”, *Scientific Reports*, 2016, **6**, 29939.

- [55] X. H. Li and S. Ghose, “Self-assisted complete maximally hyperentangled state analysis via the cross-Kerr nonlinearity”, *Phys. Rev. A*, 2017, **93**, 022302.
- [56] P. Zhou and L. Lv, “Hyper-parallel nonlocal CNOT operation with hyperentanglement assisted by cross-Kerr nonlinearity”, *Sci. Rep.*, 2019, **9**, 15939.
- [57] Z. Zeng and K. D. Zhu, “Complete hyperentangled state analysis using weak cross-Kerr nonlinearity and auxiliary entanglement”, *New Journal of Physics*, 2020, **22**, 083051.
- [58] W. J. Munro, K. Nemoto, *et al.*, “A near deterministic linear optical CNOT gate”, quant-ph/0408117.
- [59] S. D. Barrett, P. Kok, K. Nemoto, R. G. Beausoleil, W. J. Munro, T. P. Spiller, “A symmetry analyser for non-destructive Bell state detection using EIT”, arXiv:quant-ph/0408117.
- [60] C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, (SpringerVerlag, Berlin, 2000, pg 103, Eqn 4.3.39).
- [61] D. T. Smithey *et al.*, “Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum”, *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**, 1244.
- [62] G. Breitenbach, S. Schiller, and J. Mlynek, “Measurement of the quantum states of squeezed light”, *Nature*, 1997, **387**, 471.
- [63] M. Vasilyev *et al.*, “Tomographic measurement of joint photon statistics of the twin-beam quantum state”, *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **84**, 2354.
- [64] M. H. M. Wiseman and R. B. Killip, “Adaptive single-shot phase measurements: A semiclassical approach”, *Phys. Rev. A*, 1997, **56**, 944.
- [65] H. M. Wiseman and R. B. Killip, “Adaptive single-shot phase measurements: The full quantum theory”, *Phys. Rev. A*, 1998, **57**, 2169.

- [66] T. C. Ralph, A. P. Lund and H. M. Wiseman, “Adaptive phase measurements in linear optical quantum computation”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2005, **7**, S245.
- [67] A. J. F. Hayes, A. Gilchrist, C. R. Myers and T. C. Ralph, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2004, **6**, 533.
- [68] H. M. Wiseman, “Adaptive Phase Measurements of Optical Modes: Going Beyond the Marginal Distribution”, *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**, 4587.
- [69] E. Lombardi, F. Sciarrino, S. Popescu and F. De Martini, “Teleportation of a vacuum–one-photon qubit”, *Phys. Rev. Lett.*, 2002, **88**, 070402.
- [70] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Phys. Rev.*, 1935, **47**, 777.
- [71] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Zeilinger, In: *Bell’s Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*, Kluwer, Dordrecht., 1989.
- [72] W. Dur, G. Vidal, J. I. Cirac, “Three qubits can be entangled in two inequivalent ways”, *Phys. Rev. A*, 2000, **62**, 062314.
- [73] E. Knill, L. Laflamme and G. J. Milburn, “A scheme for efficient quantum computation with linear optics”, *Nature*, 2001, **46**, 409.
- [74] P. Kok, W. J. Munro, *et al.*, “Linear optical quantum computing with photonic qubits”, *Rev. Mod. Phys.*, 2007, **79**, 135.
- [75] S. L. Braunstein and A. Pati 2003 (eds) *Continuous variable*.
- [76] S. L. Braunstein and P. van Loock, “Quantum information with continuous variables”, *Rev. Mod. Phys.*, 2005, **77**, 513.
- [77] D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eible, H. Weinfurter and A. Zeilinger, “Experimental quantum teleportation”, *Nature*, 1997, **390**, 575.

- [78] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy and S. Popescu S, “Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”, *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **80**, 1121.
- [79] H. Jeong, M. S. Kim and J. Lee, “Quantum-information processing for a coherent superposition state via a mixed entangled coherent channel”, *Phys. Rev. A*, 2001, **64**, 052308.
- [80] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, UK), 2000.
- [81] T. B. Pittman, M. J. Fitch, B. C. Jacobs and J. D. Franson, “Experimental controlled-NOT logic gate for single photons in the coincidence basis”, *Phys. Rev. A*, 2003, **68**, 032316.
- [82] S. L. Braunstein and H. J. Kimble, “Teleportation of continuous quantum variables”, *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **80**, 869.
- [83] K. Park and H. Jeong, “Entangled coherent states versus entangled photon pairs for practical quantum-information processing”, *Phys. Rev. A*, 2010, **82**, 062325.
- [84] S. W. Lee and H. Jeong, “Near-deterministic quantum teleportation and resource-efficient quantum computation using linear optics and hybrid qubits”, *Phys. Rev. A*, 2013, **87**, 022326.
- [85] O. Morin, J. D. Bancal , M. Ho, P. Sekatski, V. D’Auria, N. Gisin, J. Laurat and N. Sangouard, “Witnessing trustworthy single-photon entanglement with local homodyne measurements”, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **110**, 130401.
- [86] G. Kurizki, P. Bertet, Y. Kubo, K. Mølmer, D. Petrosyan, P. Rabl, J. Schmiedmayer, “Quantum technologies with hybrid systems”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2015, **112** (13), 3866,
- [87] U. L. Andersen, J. S. Neergaard-Nielsen, P. van Loock, A. Furusawa, “Hybrid discrete- and continuous-variable quantum information”, *Nat. Phys.*, 2015. **11** (9), 713.

- [88] A. W. Elshaari, W. Pernice, K. Srinivasan, O. Benson, V. Zwiller, “Hybrid integrated quantum photonic circuits”, *Nat. Photonics* (2020) <http://dx.doi.org/10.1038/s41566-020-0609-x>.
- [89] G. Guccione, T. Darras, H. Le Jeannic, V.B. Verma, S.W. Nam, A. Cavaillès, J. Laurat, “Connecting heterogeneous quantum networks by hybrid entanglement swapping”, *Sci. Adv.*, 2020, **6**, 22.
- [90] N. B. An, L. T. Dat, J. Kim, “Nonstandard protocols for joint remote preparation of a general quantum state and hybrid entanglement of any dimension”, *Phys. Rev. A*, 2018, **98**, 042329.
- [91] Z.-X. Man, Y.-J. Xia, N. B. An, “Simultaneous observation of particle and wave behaviors of entangled photons”, *Sci. Rep.*, 2017, **7** (1), 42539.
- [92] A. S. Rab, E. Polino, Z.-X. Man, N. B. An, Y.-J. Xia, N. Spagnolo, R. Lo Franco, F. Sciarrino, “Entanglement of photons in their dual wave-particle nature”, *Nature Commun.*, 2017, **8**, 915.
- [93] L. S. Costanzo, A. Zavatta, S. Grandi, M. Bellini, H. Jeong, M. Kang, S.-W. Lee, T. C. Ralph, “Experimental hybrid entanglement between quantum and classical states of light”, *Int. J. Quantum Inf.*, 2014, **12**, 1560015.
- [94] H. Jeong, A. Zavatta, M. Kang, S.-W. Lee, L. S. Costanzo, S. Grandi, T. C. Ralph, M. Bellini, “Generation of hybrid entanglement of light”, *Nat. Photonics*, 2014, **8**, 564.
- [95] E. Agudelo, J. Sperling, L.S. Costanzo, M. Bellini, A. Zavatta, W. Vogel, “Conditional hybrid nonclassicality”, *Phys. Rev. Lett.* , 2017, **119**, 120403.
- [96] D. V. Sychev, A. E. Ulanov, A. A. Pushkina, M. W. Richards, I. A. Fedorov, A. I. Lvovsky, “Enlargement of optical Schrödinger’s cat states”, *Nat. Photonics*, 2017, **11**, 379.
- [97] H. L. Jeannic, A. Cavaillès, J. Raskop, K. Huang, J. Laurat, “Remote preparation of continuous-variable qubits using loss-tolerant hybrid entanglement of light”, *Optica* , 2018, **5**, 1012.

- [98] K. Huang, H. L. Jeannic, O. Morin, T. Darras, G. Guccione, A. Cavaillès, J. Laurat, “Engineering optical hybrid entanglement between discrete- and continuous-variable states”, *New J. Phys.*, 2019, **21**, 083033.
- [99] H. Kwon, H. Jeong, “Generation of hybrid entanglement between a single-photon polarization qubit and a coherent state”, *Phys. Rev. A*, 2015, **91**, 012340.
- [100] D. V. Sychev, A. E. Ulanov, E. S. Tiunov, A. A. Pushkina, A. Kuzhamuratov, V. Novikov, A. I. Lvovsky, “Entanglement and teleportation between polarization and wave-like encodings of an optical qubit”, *Nature Commun.*, 2018, **9**, 3672.
- [101] S. Li, H. Yan, Y. He, H. Wang, “Experimentally feasible generation protocol for polarized hybrid entanglement”, *Phys. Rev. A*, 2018, **98**, 022334.
- [102] F. De Martini, F. Sciarrino, C. Vitelli, “Entanglement test on a microscopic-macroscopic system”, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, **100**, 253601.
- [103] P. Sekatski, N. Sangouard, M. Stobińska, F. Bussières, M. Afzelius, N. Gisin, “Proposal for exploring macroscopic entanglement with a single photon and coherent states”, *Phys. Rev. A*, 2012, **86**, 060301.
- [104] N. Bruno, A. Martin, P. Sekatski, N. Sangouard, R.T. Thew, N. Gisin, Displacement of entanglement back and forth between the micro and macro domains, *Nat. Phys.*, 2013, **9**, 545.
- [105] A. I. Lvovsky, R. Ghobadi, A. Chandra, A. S. Prasad, C. Simon, Observation of micro–macro entanglement of light, *Nat. Phys.*, 2013, **9**, 541.
- [106] U. L. Andersen, J. S. Neergaard-Nielsen, “Heralded generation of a micro-macro entangled state”, *Phys. Rev. A*, 2013, **88**, 022337.
- [107] R. Ghobadi, A. Lvovsky, C. Simon, “Creating and detecting micro-macro photon-number entanglement by amplifying and deamplifying a single-photon entangled state”, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **110**, 170406.

- [108] R. Ghobadi, S. Kumar, B. Pepper, D. Bouwmeester, A. I. Lvovsky, C. Simon, “Optomechanical micro-macro entanglement”, *Phys. Rev. Lett.*, 2014, **112**, 080503.
- [109] A. Tiranov, J. Lavoie, P.C. Strassmann, N. Sangouard, M. Afzelius, F. Bussi eres, N. Gisin, “Demonstration of light-matter micro-macro quantum correlations”, *Phys. Rev. Lett.*, 2016, **116**, 190502.
- [110] L. S. Costanzo, A. Zavatta, S. Grandi, M. Bellini, H. Jeong, M. Kang, S. W. Lee and T. C. Ralph, *Phys. Scr.*, 2015, **90**, 074045.
- [111] W. Son, M. S. Kim, L. Lee and D. Ahn, “Entanglement transfer from continuous variables to qubits”, *J. Mod. Opt.*, 2002, **49**, 1739.
- [112] M. Paternostro, W. Son and M. S. Kim, “Complete conditions for entanglement transfer”, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **92**, 197901.
- [113] K. Park, S.-W. Lee, H. Jeong, “Quantum teleportation between particlelike and fieldlike qubits using hybrid entanglement under decoherence effects”, *Phys. Rev. A*, 2012, **86**, 062301.
- [114] P. Kok, B. W. L. Lovett, Introduction to Optical Quantum Information Processing, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [115] M. Lobino, C. Kupchak, E. Figueroa, A. I. Lvovsky, “Memory for light as a quantum process”, *Phys. Rev. Lett.*, 2009, **102**, 203601.
- [116] H. Jeong, S. Bae, S. Choi, “Quantum teleportation between a single-rail single-photon qubit and a coherent-state qubit using hybrid entanglement under decoherence effects”, *Quantum Inf. Process.*, 2016, **15**, 913.
- [117] H. Kim, S.-W. Lee, H. Jeong, “Two different types of optical hybrid qubits for teleportation in a lossy environment”, *Quantum Inf. Process.*, 2016, **15**, 4729.
- [118] M. G. Paris, “Displacement operator by beam splitter”, *Phys. Lett. A*, 1996, **217**, 78.

- [119] S.-Y. Lee, C.-W. Lee, P. Kurzyński, D. Kaszlikowski, J. Kim, “Duality in entanglement of macroscopic states of light”, *Phys. Rev. A*, 2016, **94**, 022314.
- [120] H. Jeong, M.S. Kim, “Efficient quantum computation using coherent states”, *Phys. Rev. A*, 2002, **65**, 042305.
- [121] G. A. Barbosa, E. Corndorf, P. Kumar, H. P. Yuen, “Secure communication using mesoscopic coherent states”, *Phys. Rev. Lett.*, 2003, **90**, 227901.
- [122] G. A. Barbosa, “Fast and secure key distribution using mesoscopic coherent states of light”, *Phys. Rev. A*, 2003, **68**, 052307.
- [123] W.-H. Kye, C.-M. Kim, M. S. Kim, Y.-J. Park, “Quantum key distribution with blind polarization bases”, *Phys. Rev. Lett.*, 2005, **95**, 040501.
- [124] S. Lorenz, J. Rigas, M. Heid, U. L. Andersen, N. Lütkenhaus, G. Leuchs, “Witnessing effective entanglement in a continuous variable prepare-and-measure setup and application to a quantum key distribution scheme using postselection”, *Phys. Rev. A*, 2006, **74**, 042326.
- [125] H. F. Hofmann, T. Ono, “High-photon-number path entanglement in the interference of spontaneously down-converted photon pairs with coherent laser light”, *Phys. Rev. A*, 2007, **76**, 031806.
- [126] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York, 1997).
- [127] Y. Israel, L. Cohen, X.-B. Song, J. Joo, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, “Entangled coherent states created by mixing squeezed vacuum and coherent light”, *Optica*, 2019, **6**, 753–757.
- [128] H. Takahashi, K. Wakui, S. Suzuki, M. Takeoka, K. Hayasaka, A. Furusawa, M. Sasaki, “Generation of large-amplitude coherent-state superposition via ancilla-assisted photon subtraction”, *Phys. Rev. Lett.*, 2018, **101**, 233605.



- [129] T. Gerrits, S. Glancy, T. S. Clement, B. Calkins, A. E. Lita, A.J. Miller, A. L. Migdall, S. W. Nam, R. P. Mirin, E. Knill, “Generation of optical coherent-state superpositions by number-resolved photon subtraction from the squeezed vacuum”, *Phys. Rev. A*, 2010, **82**, 031802.
- [130] A. P. Lund, H. Jeong, T. C. Ralph, M. S. Kim, “Conditional production of superpositions of coherent states with inefficient photon detection”, *Phys. Rev. A*, 2004, **70**, 020101.
- [131] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A.V. Sergienko, Y. Shih, “New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs”, *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**, 4337.
- [132] S. Barz, G. Cronenberg, A. Zeilinger, P. Walther, “Heralded generation of entangled photon pairs”, *Nat. Photonics*, 2010, **4**, 553.
- [133] C. Wagenknecht, C.-M. Li, A. Reingruber, X.-H. Bao, A. Goebel, Y.-A. Chen, Q. Zhang, K. Chen, J.-W. Pan, “Experimental demonstration of a heralded entanglement source”, *Nat. Photonics*, 2010, **4**, 549.
- [134] L.-K. Chen, H.-L. Yong, P. Xu, X.-C. Yao, T. Xiang, Z.-D. Li, C. Liu, H. Lu, N.-L. Liu, L. Li, T. Yang, C.-Z. Peng, B. Zhao, Y.-A. Chen, J.-W. Pan, “Experimental nested purification for a linear optical quantum repeater”, *Nat. Photonics*, 2017, **11**, 695.
- [135] A. E. Lita, A. J. Miller, S. W. Nam, “Counting near-infrared single-photons with 95% efficiency”, *Opt. Express*, 2008, **16**, 3032.
- [136] D. H. Smith, G. Gillett, M. P. de Almeida, C. Branciard, A. Fedrizzi, T. J. Weinhold, A. Lita, B. Calkins, T. Gerrits, H. M. Wiseman, S. W. Nam, A. G. White, “Conclusive quantum steering with superconducting transition-edge sensors”, *Nature Commun.*, 2012, **3**, 625.
- [137] J. Borregaard, M. Zugenmaier, J. M. Petersen, H. Shen, G. Vasilakis, K. Jensen, E. S. Polzik, A. S. Sørensen, “Scalable photonic network architecture based on motional averaging in room temperature gas”, *Nature Commun.*, 2016, **7**, 11356.
- [138] T. Heindel, A. Thoma, M. von Helversen, M. Schmidt, A. Schlehahn, M. Gschrey, P. Schnauber, J. H. Schulze, A. Strittmatter, J. Beyer, S.

- Rodt, A. Carmele, A. Knorr, S. Reitzenstein, “A bright triggered twin-photon source in the solid state”, *Nature Commun.*, 2017, **8**, 14870.
- [139] A. P. Lund, and T. C. Ralph, “Nondeterministic gates for photonic single-rail quantum logic”, *Phys. Rev. A*, 2002, **66**, 032307.
- [140] N. Horiuchi, “Single-photon subtraction”, *Nat. Photon.*, 2017, **11**, 532.
- [141] K. Zyczkowski and H. J. Sommers, “Induced measures in the space of mixed quantum states”, *J. Phys. A*, 2001, **34**, 7111.
- [142] D. Drahi, D. V. Sychev, K. K. Pirov, E. A. Sazhina, V. A. Novikov, I. A. Walmsley and A. I. Lvovsky, “Entangled resource for interfacing single-and dual-rail optical qubits”, *Quantum*, 2021, **5**, 416.
- [143] H. K. Lo, “Classical-communication cost in distributed quantum-information processing: a generalization of quantum-communication complexity”, *Phys. Rev. A*, 2000, **62**, 012313.
- [144] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, W. P. Shor, *et al.*, "Remote state preparation", *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**, 077902.
- [145] N. B. An, C. T. Bich, N. V. Don, J. Kim, “Remote State Preparation with Unit Success Probability”, *Adv. Nat. Sci: Nanosci. Nanotechnol.*, 2011, **2**, 035009.
- [146] X. W. Zha, Z. C. Zou, J. X. Qi and Y. H. Song, “Bidirectional quantum controlled teleportation via five-qubit cluster state”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2013, **52** 1740.
- [147] Y. H. Li and L. P. Nie, “Bidirectional controlled teleportation by using a five-qubit composite GHZ-Bell state”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2013, **52**, 1630.
- [148] A. Yan, “Bidirectional controlled teleportation via six-qubit cluster state”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2013, **52** 3870.
- [149] X. Sun and X. Zha, “A Scheme of bidirectional quantum controlled teleportation via six-qubit maximally entangled state”, *Acta Photonica Sin*, 2013, **48**, 1052.

- [150] Y. Chen, “Bidirectional quantum controlled teleportation by using a genuine six-qubit entangled state”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2015, **54**, 269.
- [151] W. P. Hong, “Asymmetric bidirectional controlled teleportation by using a seven-qubit entangled state”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2016, **55**, 384.
- [152] S. Hassanpour and M. Houshmand, “Bidirectional teleportation of a pure EPR state by using GHZ states”, *Quant. Inf. Process.*, 2016, **15**, 905.
- [153] M. S. S. Zadeh, M. Houshmand and H. Aghababa, “Bidirectional teleportation of a two-qubit state by using eight-qubit entangled state as a quantum channel”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2017, **56**, 2101.
- [154] Y. Chen, “Bidirectional controlled quantum teleportation by using five-qubit entangled state”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2014, **53**, 1454.
- [155] P. C. Ma, G. B. Chen, X. W. Li and Y. B. Zhan, “Bidirectional controlled quantum teleportation in the three-dimension system”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2018, **57**, 2233.
- [156] Y. Hao, *et al.*, “Improving the scheme of bidirectional controlled teleportation with a five-qubit composite GHZ-Bell state”, *Laser Phys. Lett.*, 2022, **19**, 085202.
- [157] C. T. Bich and N. B. An, “Deterministic controlled bidirectional remote state preparation”, *Adv. Nat. Sci.: Nanosci. Nanotechnol.*, 2014, **5**, 015003.
- [158] C. T. Bich, “Controlled simultaneously state preparation at many remote locations with a new cluster state type”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2015, **54**, 139.
- [159] J. Y. Peng, M. Q. Bai and Z. W. Mo, “Bidirectional controlled joint remote state preparation”, *Quant. Inf. Process.*, 2015, **14**, 4263.
- [160] D. Zhang, W. Zha, Y. J. Duan and Z. H. Wei, “Deterministic controlled bidirectional remote state preparation via a six-qubit maximally entangled state”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2016, **55**, 440.

- [161] Q. C. Lu, *et al.*, “Linear-optics-based bidirectional controlled remote state preparation via five-photon cluster-type states for quantum communication network”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2016, **55**, 535.
- [162] Y. Bai, P. C. Ma, G. B. Chen, X. W. Li and Y. B. Zhan, “Bidirectional controlled remote state preparation in three-dimensional system”, *Modern Physics Letters A*, 2019, **39**, 1950328.
- [163] P. C. Ma, G. B. Chen, X. W. Li and Y. B. Zhan, “Asymmetric controlled bidirectional remote state preparation by using a ten-qubit entangled state”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2017, **56**, 2716.
- [164] P. C. Ma, G. B. Chen, X. W. Li and Y. B. Zhan, “Asymmetric and deterministic bidirectional remote state preparation under the supervision of a third party”, *Laser Phys.*, 2017, **27**, 095201.
- [165] N. B. An, B. S. Choudhury and S. Samanta, “Two-way remote preparations of inequivalent quantum states under a common control”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2021, **60**, 47.
- [166] J. Shi, P. C. Ma and G. B. Chen, “Schemes for bidirectional quantum teleportation via a hyper-entangled state”, *Int. J. Theor. Phys.*, 2019, **58**, 372.
- [167] A. W. Harrow, and A. Montanaro, “Quantum computational supremacy”, *Nature*, 2017, **549**, 203.
- [168] J. I. Cirac, A. K. Ekert, S. F. Huelga, and C. Macchiavello, “Distributed quantum computation over noisy channels”, *Phys. Rev. A*, 1999, **59**, 4249.
- [169] D. P. DiVincenzo, “The physical implementation of quantum computation”, *Fortschr. Phys.*, 2000, **48**, 771.
- [170] M. Pompili, S. L. N. Hermans, S. Baier, H. K. C. Beukers, P. C. Humphreys, *et al.*, “Realization of a multinode quantum network of remote solid-state qubits”, *Science*, 2021, **372**, 259.
- [171] S. F. Huelga, J. A. Vaccaro, A. Chefles and M. B. Plenio, “Quantum remote control: teleportation of unitary operations”, *Phys. Rev. A*, 2001, **63**, 042303.

- [172] S. F. Huelga, M. B. Plenio and J. A. Vaccaro, “Remote control of restricted sets of operations: teleportation of angles”, *Phys. Rev. A*, 2002, **65**, 042316.
- [173] G. Y. Xiang, J. Li and G. C. Guo, “Teleporting a rotation on remote photons”, *Phys. Rev. A*, 2005, **71**, 044304.
- [174] C. P. Yang and J. G. Banacloche, “Teleportation of rotations and receiver-encoded secret sharing”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2001, **3**, 407.
- [175] D. Collins, N. Linden and S. Popescu, “Nonlocal content of quantum operations”, *Phys. Rev. A*, 2001, **64**, 032302.
- [176] Y. F. Huang, X. F. Ren, Y. S. Zhang, L. M. Duan and G. C. Guo, “Experimental Teleportation of a Quantum Controlled-NOT Gate”, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **93**, 240501.
- [177] B. Reznik, Y. Aharonov and B. Groisman, “Remote operations and interactions for systems of arbitrary-dimensional Hilbert space: State-operator approach”, *Phys. Rev. A*, 2002, **65**, 032312.
- [178] B. Groisman and B. Reznik, “Implementing nonlocal gates with non-maximally entangled states”, *Phys. Rev. A*, 2005, **71**, 032322.
- [179] S. F. Huelga, M. B. Plenio, G. Y. Xiang, J. Li and G. C. Guo, “Remote implementation of quantum operations”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2005, **7**, S384.
- [180] A. M. Wang, “Remote implementations of partially unknown quantum operations of multiqubits”, *Phys. Rev. A*, 2006, **74**, 032317.
- [181] A. M. Wang, “Combined and controlled remote implementations of partially unknown quantum operations of multiqubits using Greenberger-Horne-Zeilinger states”, *Phys. Rev. A*, 2007, **75**, 062323.
- [182] F. Q. Bo and L. D. Dong, “Controlled remote implementation of partially unknown quantum operation”, *Sci China Ser G-Phys Mech Astron*, 2008, **51**, 1661.

- [183] N. B. Zhao, and A. M. Wang, “Hybrid protocol of remote implementations of quantum operations”, *Phys. Rev. A*, 2007, **76**, 062317.
- [184] N. B. An, “Remote application of hidden operators”, *Phys. Lett. A*, 2007, **364**, 198.
- [185] H. S. Zhong, Wang, Hui, Y. H, Deng, *et al.*, “Quantum computational advantage using photons”, *Science*, 2020, **370**, 1460.
- [186] N. B. An “Joint remote implementation of operators”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2022, **55**, 395304.
- [187] X. F. Jiao, P. Zhou and S. X. Lv, “Remote implementation of single-qubit operations via hyperentangled states with cross-Kerr nonlinearity”, *J. Opt. Soc. Am. B*, 2019, **36**, 867.
- [188] A. Karlsson and M. Bourennane, “Quantum teleportation using three-particle entanglement”, *Phys. Rev. A*, 1998, **58**, 4394.
- [189] N. B. An, “Teleportation of coherent-state superpositions within a network”, *Phys. Rev. A*, 2003, **68**, 022321.
- [190] X. L. Wang, Y. H. Luo, H. L. Huang, M. C. Chen, *et al.*, “18-qubit entanglement with six photons’ three degrees of freedom”, *Phys. Rev. Lett.*, 2018, **120**, 260502.
- [191] D. Ding and F. L. Yan, “Efficient scheme for three-photon Greenberger–Horne–Zeilinger state generation”, *Phys. Lett. A*, 2013, **377**, 1088.
- [192] A. P. Liu, X. Han, L. Y. Cheng, Q. Guo, S. L. Su, H. F. Wang and S. Zhang, “Generation of large scale hyperentangled photonic GHZ states with an error-detected pattern”, *The Euro. Phys. J. D*, 2019, **73**, 118.
- [193] J. Gianni and Z. Qu, “New quantum private comparison using hyperentangled GHZ state”, *J. Quant. Comput.*, 2021, **3**, 46.