

**BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO**

**VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM**

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ



Nguyễn Phương Đông

**NGHIÊN CỨU MỘT SỐ MÔ HÌNH TRUYỀN NHIỆM
PHÂN THỨ MỜ VÀ ỨNG DỤNG TRONG MẠNG
CẢM BIẾN KHÔNG DÂY**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN ỨNG DỤNG

Hà Nội - Năm 2023

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Nguyễn Phương Đông

NGHIÊN CỨU MỘT SỐ MÔ HÌNH TRUYỀN NHIỄM
PHÂN THỬ MỜ VÀ ỨNG DỤNG TRONG MẠNG
CẢM BIẾN KHÔNG DÂY

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 9 46 01 12

Xác nhận của Học viện
Khoa học và Công nghệ

Người hướng dẫn 1
(Ký, ghi rõ họ tên)

Người hướng dẫn 2
(Ký, ghi rõ họ tên)

Hoàng Việt Long

Nguyễn Long Giang

Hà Nội - Năm 2023

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận án: “**Nghiên cứu một số mô hình truyền nhiễm phân thứ mờ và ứng dụng trong mạng cảm biến không dây**” là công trình nghiên cứu của chính mình dưới sự hướng dẫn khoa học của tập thể hướng dẫn. Luận án sử dụng thông tin trích dẫn từ nhiều nguồn tham khảo khác nhau và các thông tin trích dẫn được ghi rõ nguồn gốc. Các kết quả nghiên cứu của tôi được công bố chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các số liệu, kết quả được trình bày trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ một công trình nào khác ngoài các công trình công bố của tác giả. Luận án được hoàn thành trong thời gian tôi làm nghiên cứu sinh tại Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Hà Nội, ngày ... tháng ... năm 2023

Tác giả luận án

LỜI CẢM ƠN

Luận án tiến sĩ được thực hiện tại Khoa Công nghệ thông tin và Viễn thông, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam (Viện HL KH&CN Việt Nam), dưới sự hướng dẫn khoa học tận tình của PGS.TS. Hoàng Việt Long và PGS. TS. Nguyễn Long Giang. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sự kính trọng sâu sắc đối với các thầy trong Tập thể hướng dẫn khoa học, những người không chỉ truyền đạt nhiều kiến thức quý báu, kinh nghiệm nghiên cứu khoa học mà còn khuyến khích, động viên tác giả vượt qua những khó khăn trong chuyên môn và cuộc sống. Sự chuyên nghiệp, nghiêm túc trong nghiên cứu và những định hướng đúng đắn của các thầy là tiền đề quan trọng giúp tác giả có được những kết quả trình bày trong luận án này.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban lãnh đạo Viện Công nghệ Thông tin, Ban Giám đốc Học viện Khoa học và Công nghệ, Phòng Đào tạo, các Phòng Ban chức năng của Học viện và đặc biệt các nhà giáo, nhà khoa học tại Viện HL KH&CN Việt Nam đã quan tâm giúp đỡ, tạo mọi điều kiện thuận lợi về cơ sở vật chất, nguồn học liệu và các thủ tục hành chính cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án này.

Trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu tại Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện HL KH&CN Việt Nam, tác giả đã nhận được sự hỗ trợ về tài chính và tạo nhiều điều kiện tham dự các bài giảng đại chúng của các nhà khoa học hàng đầu, tham gia trao đổi học thuật từ Quỹ Đổi mới Sáng tạo VinGroup (VinIF), Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn (VinBigData) thông qua Học bổng tiến sĩ trong nước các năm 2020, 2021 và 2022. Qua đây, tác giả xin bày tỏ sự biết ơn sâu sắc với sự hỗ trợ kịp thời của Quỹ Đổi mới Sáng tạo VinGroup để tác giả có thể toàn tâm tập trung cho việc học tập, nghiên cứu và đạt được các kết quả trong luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn sự quan tâm, động viên và những ý kiến góp ý quý báu của các giáo sư, các nhà khoa học, các chuyên gia và các bạn đồng nghiệp trong những lần trao đổi chuyên môn tại seminar “Giải tích-Toán ứng dụng”, (Khoa Toán - Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2), seminar “Toán ứng dụng” (Trung tâm Tin học và Tính toán - Viện HLKH&CN Việt Nam) và seminar “Giải tích mờ và ứng dụng” do PGS. TS. Hoàng Việt Long và PGS. TS. Nguyễn Thị Kim Sơn chủ trì. Đặc biệt, tác giả xin gửi sự biết ơn và kính trọng sâu sắc tới PGS. TS. Hoàng Việt Long và PGS. TS. Nguyễn Thị Kim Sơn, những vị ân sư đã tận tình dìu dắt tác giả từ khi còn là sinh viên và đã hết lòng chỉ dạy, động viên để tác giả có thể toàn tâm trên con đường nghiên cứu khoa học.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, Ban Chủ nhiệm khoa Toán, Bộ môn Giải tích và các bạn bè đồng nghiệp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 đã luôn động

viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong công tác giảng dạy cho tác giả xuyên suốt quá trình học tập, nghiên cứu và thực hiện luận án.

Sự quan tâm, chia sẻ và động viên của mọi thành viên trong gia đình là một động lực quan trọng để tác giả nỗ lực học tập, nghiên cứu và vượt qua những khó khăn. Tác giả xin chân thành cảm ơn tất cả và luận án này như một món quà tinh thần xin đáp lại sự quan tâm, ủng hộ của gia đình, các thầy cô, đồng nghiệp và những người bạn thân hữu.

Hà Nội, ngày ... tháng ... năm 2023

Tác giả luận án

Mục lục

Lời cam đoan	i
Lời cảm ơn	ii
Danh mục ký hiệu và viết tắt	1
Danh sách hình vẽ	4
Danh sách bảng	5
Mở đầu	6
1. Tổng quan vấn đề nghiên cứu	6
2. Mục tiêu, đối tượng và phạm vi nghiên cứu	11
3. Nội dung nghiên cứu	12
4. Phương pháp nghiên cứu	15
5. Các kết quả đã đạt được	16
6. Cấu trúc của luận án	17
CHƯƠNG 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	19
1.1. Một số vấn đề về giải tích phân thứ	19
1.2. Tập mờ và giải tích mờ	24
1.3. Hệ mờ Takagi-Sugeno	31
1.4. Hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết	35
1.5. Mạng quy mô tự do	36
CHƯƠNG 2. MÔ HÌNH LAN TRUYỀN MÃ ĐỘC SIQR PHÂN THỨ VỚI	
DỮ LIỆU MỜ	40
2.1. Thiết lập mô hình	40
2.2. Đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu phân thứ và tích phân Riemann-Liouville Atangana-Baleanu phân thứ cho hàm nhận giá trị mờ	44
2.3. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm mờ cho bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân phân thứ dưới tính gH-khả vi	52
2.4. Mô phỏng và thảo luận	59
2.5. Kết luận chương	65

CHƯƠNG 3. MÔ HÌNH LAN TRUYỀN MÃ ĐỘC SE_1E_2IQR PHÂN THỨ DỰA TRÊN MẠNG VỚI HÀM LAN TRUYỀN XÁC ĐỊNH BỞI LOGIC MỜ	67
3.1. Thiết lập mô hình	67
3.2. Tính chất định tính của mô hình.....	74
3.2.1. Sự tồn tại tập bất biến dương.....	74
3.2.2. Chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và các trạng thái cân bằng.....	78
3.2.3. Dáng điệu tiệm cận của điểm cân bằng không có mã độc P_0	82
3.2.4. Phân tích tính rẽ nhánh	89
3.3. Một số thảo luận	91
3.3.1. Phân tích độ nhạy tham số của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0	91
3.3.2. Một số mô phỏng và thảo luận.....	94
3.4. Kết luận chương.....	102
CHƯƠNG 4. BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH HÓA CHO MÔ HÌNH LAN TRUYỀN MÃ ĐỘC SIRS PHÂN THỨ DỰA TRÊN MẠNG CÓ ĐIỀU KHIỂN	104
4.1. Thiết lập mô hình	104
4.2. Tính chất định tính của mô hình.....	107
4.2.1. Sự tồn tại tập bất biến dương	107
4.2.2. Chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và các trạng thái cân bằng.....	111
4.2.3. Dáng điệu tiệm cận của điểm cân bằng không có mã độc P_0	116
4.2.4. Tính rẽ nhánh lùi.....	120
4.3. Bài toán ổn định hóa cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển	122
4.4. Kết luận chương.....	134
Kết luận chung	135
Danh mục công trình của nghiên cứu sinh.....	137
Tài liệu tham khảo.....	138
Phụ lục	148

DANH MỤC KÝ HIỆU VÀ VIẾT TẮT

		Trang
\mathbb{R}^n	Không gian vectơ thực n chiều	20
\mathbb{R}_+	Tập hợp các số thực không âm	23
\mathbb{R}_+^n	Tập hợp các vectơ thực với các thành phần không âm	71
\mathcal{E}	Tập hợp các số mờ trên đường thẳng thực	27
$[u]^\alpha$	Tập mức hay α -cắt của số mờ u , $[u]^\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$	27
$u \ominus v$	Hiệu Hukuhara của số mờ u cho số mờ v	27
$u \ominus_{gH} v$	Hiệu Hukuhara suy rộng của số mờ u cho số mờ v	27
$C([a, b], X)$	Không gian các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ nhận giá trị trong không gian X	20, 51
$C^1((a, b), X)$	Không gian các hàm khả vi liên tục trên khoảng (a, b) nhận giá trị trong không gian X	19, 29
$L^1([a, b], X)$	Không gian các hàm khả tích trên đoạn $[a, b]$ nhận giá trị trong không gian X	19, 29
$\ \mathbf{x}\ $	Chuẩn của vectơ \mathbf{x} trong \mathbb{R}^n	20
$d_\infty(u_1, u_2)$	Metric giữa hai số mờ $u_1, u_2 \in \mathcal{E}$	27
$\ u\ _*$	Chuẩn của số mờ u , $\ u\ _* = d_\infty(u, \hat{0})$ với $\hat{0}$ là số mờ không	27
$\mathbb{D}_n(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$	Metric tổng quát giữa hai vectơ mờ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{E}^n$	28
$\mathcal{H}_\lambda(\varphi, \psi)$	Metric có trọng giữa các hàm $\varphi, \psi \in C([a, b], X)$, trong đó $\mathcal{H}_\lambda(\varphi, \psi) = \sup_{[0, T]} \{\mathbb{D}_n(\varphi(t), \psi(t))e^{-\lambda t}\}$	51
$\bar{0}$	Vectơ không trong không gian \mathbb{R}^n	20
$\hat{0}$	Vectơ không trong không gian \mathcal{E}^n	51
A^\top	Ma trận chuyển vị của ma trận A	23
\mathbb{O}_n	Ma trận không cấp n	75
\mathbb{I}_n	Ma trận đơn vị cấp n	75
\mathbf{S}^n	Tập hợp các ma trận đối xứng cấp n	120
\mathbf{S}_{++}^n	Tập hợp các ma trận đối xứng xác định dương cấp n	23
$A \succeq 0$	Ma trận A xác định không âm	120
$A \succ 0$	Ma trận A xác định dương	120
$\lambda_{\min}(A)$	$\min \{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \text{ là giá trị riêng của } A\}$	124
$\lambda_{\max}(A)$	$\max \{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \text{ là giá trị riêng của } A\}$	124
$\ A\ $	Chuẩn phổ của ma trận A , $\ A\ = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$	20
$\arg(\lambda)$	Agumen của số phức λ	21
$\mathbb{E}_{\beta_1, \beta_2}(x)$	Hàm Mittag-Leffler với hai tham số β_1, β_2 theo biến x	22

${}_a\mathcal{J}_t^\beta \mathbf{x}(t)$	Tích phân Riemann-Liouville phân thứ với bậc β của hàm thực $\mathbf{x}(t)$	19
${}_a^C\mathcal{D}_t^\beta \mathbf{x}(t)$	Đạo hàm Caputo phân thứ với bậc β của hàm thực $\mathbf{x}(t)$	19
${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta \mathbf{x}(t)$	Đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu phân thứ với bậc β của hàm thực $\mathbf{x}(t)$	23
${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \mathbf{x}(t)$	Tích phân Riemann-Liouville Atangana-Baleanu phân thứ với bậc β của hàm thực $\mathbf{x}(t)$	24
$\mathcal{I}_+^\beta \tilde{\mathbf{x}}(t)$	Tích phân Riemann-Liouville phân thứ với bậc β của hàm mờ $\tilde{\mathbf{x}}(t)$	30
${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta \tilde{\mathbf{x}}(t)$	Đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu phân thứ với bậc β của hàm mờ $\tilde{\mathbf{x}}(t)$	43
${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \tilde{\mathbf{x}}(t)$	Tích phân Riemann-Liouville Atangana-Baleanu phân thứ với bậc β của hàm mờ $\tilde{\mathbf{x}}(t)$	46
$\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}(s)$	Biến đổi Laplace của hàm thực $\mathbf{x}(t)$	30
$\tilde{\mathcal{L}}\{\tilde{\mathbf{x}}(t)\}(s)$	Biến đổi Laplace của hàm mờ $\tilde{\mathbf{x}}(t)$	30
\mathfrak{R}_0	Chỉ số ngưỡng lan truyền (Basic reproduction number)	75, 109
\mathbf{P}_0	Trạng thái cân bằng không có mã độc (Malware-free equilibrium state)	74, 108
\mathbf{P}_*	Trạng thái cân bằng đặc hữu (Endemic equilibrium state)	77, 110
gH	Hukuhara suy rộng (generalized Hukuhara)	29
TS	Takagi-Sugeno	30
MISO	Đa đầu vào một đầu ra (Multi Input Single Output)	66
LMI	Bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI: Linear matrix inequality)	120

Danh sách hình vẽ

1.1	Minh họa cho các khái niệm ổn định [Hình 1.1 (a)] và ổn định tiệm cận [Hình 1.1 (b)]	21
1.2	Miền ổn định của phương trình vi phân phân thứ	22
1.3	Các tập mờ để mô tả mật độ phần mềm độc hại: “Thấp”, “Trung bình”, “Cao”	25
1.4	Một số loại số mờ thông dụng	27
1.5	Minh họa cho khái niệm tập mức của số mờ u trong mặt phẳng và trong không gian	27
1.6	Lược đồ của phương pháp phi tuyến đoạn	34
1.7	Lược đồ của phương pháp tuyến tính hóa	34
1.8	Mạng quy mô tự do Barabási-Albert với $N_0 = 5$ và $m = 2$	38
2.1	Lược đồ của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ	41
2.2	Hàm nhận giá trị mờ $f(t)$ và các gH-đạo hàm trên đoạn $[0, \pi]$	46
2.3	Dáng điệu theo thời gian của nghiệm số cho mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ trong Trường hợp tham số (a)	61
2.4	Dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR với $\beta = 0.5$ và $\mathfrak{R}_0 < 1$	62
2.5	Dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR với $\beta = 0.7$ và $\mathfrak{R}_0 < 1$	62
2.6	Dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR với $\beta = 0.95$ và $\mathfrak{R}_0 < 1$	62
2.7	Dáng điệu theo thời gian của nghiệm số cho mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ trong Trường hợp tham số (b)	64
2.8	Dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR với $\beta = 0.5$ và $\mathfrak{R}_0 > 1$	64
2.9	Dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR với $\beta = 0.7$ và $\mathfrak{R}_0 > 1$	65
2.10	Dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR với $\beta = 0.95$ và $\mathfrak{R}_0 > 1$	65
3.1	Sáu ngăn trong mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR trên mạng cảm biến không dây	68
3.2	Sơ đồ lan truyền mã độc giữa các ngăn: Mẫn cảm (S), Mạng mã độc loại 1 (E_1), Mạng mã độc loại 2 (E_2), Lan truyền mã độc (I), Cách ly (Q), Hồi phục (R)	69
3.3	Tập mờ cho các biến ngôn ngữ “Thấp”, “Trung bình”, “Cao”	70
3.4	Đầu ra của hệ suy luận mờ	71
3.5	Bảng biến thiên cho phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ trong Trường hợp 3.1	85
3.6	Bảng biến thiên cho phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ trong Trường hợp 3.2	85

3.7	Bảng biến thiên cho phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ trong Trường hợp 3.3	86
3.8	Minh họa cho hiện tượng rẽ nhánh: (a) Rẽ nhánh tiến, (b) Rẽ nhánh lùi	89
3.9	Minh họa cho kết quả đánh giá độ nhạy tham số của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0	93
3.10	Ảnh hưởng của các tham số cách ly đối với chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0	94
3.11	Biểu diễn trong không gian ba chiều giá trị của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 theo các tham số cách ly	94
3.12	Dáng điệu theo thời gian của $S(t)$, $E_1(t)$, $E_2(t)$, $I(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ khi $\mathfrak{R}_0 < 1$	95
3.13	Dáng điệu theo thời gian của $S(t)$, $E_1(t)$, $E_2(t)$, $I(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ khi $\mathfrak{R}_0 > 1$	96
3.14	Ảnh hưởng của tham số lan truyền mã độc dựa trên luật mờ M_q đến mật độ của các trạng thái nhạy cảm và lan truyền mã độc	96
3.15	So sánh mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR với các mô hình khác	98
3.16	Ảnh hưởng của đạo hàm phân thứ đối với mô hình SE_1E_2IQR trong trường hợp $\mathfrak{R}_0 < 1$	98
3.17	Ảnh hưởng của đạo hàm phân thứ đối với mô hình SE_1E_2IQR trong trường hợp $\mathfrak{R}_0 > 1$	99
3.18	Không gian pha giữa trạng thái lan truyền mã độc và các trạng thái khác với các giá trị khác nhau của tham số cách ly c	100
3.19	Không gian pha giữa trạng thái lan truyền mã độc và các trạng thái khác với các giá trị khác nhau của tham số cách ly ω_1	101
3.20	Không gian pha giữa trạng thái lan truyền mã độc và các trạng thái khác với các giá trị khác nhau của tham số cách ly ω_2	102
4.1	Mô tả của mô hình lan truyền mã độc ba ngăn: Mẫn cảm (S), Lan truyền mã độc (I), Hồi phục (R)	105
4.2	Sơ đồ của lan truyền phần mềm độc hại giữa ba ngăn: Mẫn cảm (S), Lan truyền mã độc (I) và Hồi phục (R) trong nhóm thứ k	105
4.3	Minh họa cho tính rẽ nhánh lùi	120
4.4	Mô hình mạng cảm biến không dây đơn giản với $n = 2$	130
4.5	Hàm thuộc của các tập mờ tiền đề F_{ik}^1 và F_{ik}^2	131

Danh sách bảng

1	Một số nghiên cứu về các mô hình dịch dựa trên mạng với đạo hàm phân thứ	9
1.1	So sánh mạng quy mô tự do Barabási-Albert và mạng quy mô tự do Barabási-Albert giới hạn năng lượng	38
2.1	Các tham số của mô hình lan truyền mã độc SIQR	44
2.2	Bán kính phổ của các ma trận $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0$ và $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_1$ trong Trường hợp (a)	60
2.3	Bán kính phổ của các ma trận $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0$ và $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_1$ trong Trường hợp (b)	63
3.1	Các tham số sử dụng trong mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR	72
3.2	Bảng ký hiệu viết tắt	75
3.3	Chỉ số độ nhạy của giá trị ngưỡng \mathfrak{R}_0 đối với các tham số	92

MỞ ĐẦU

1. Tổng quan vấn đề nghiên cứu

Mạng cảm biến không dây (“Wireless Sensor Network - WSN”) bao gồm một tập hợp các thiết bị cảm biến có năng lượng giới hạn, gọi là các *nút*, sử dụng các liên kết không dây nhằm các mục đích đặc thù như thu thập thông tin dữ liệu phân tán với quy mô lớn, khảo sát, thu thập, đánh giá thông tin trong các lĩnh vực sản xuất, y tế, sinh thái học, khí tượng thủy văn hay an ninh. Vài thập kỷ qua, sự phổ biến nhanh chóng của mạng cảm biến không dây luôn phải đối mặt với thách thức về đảm bảo an toàn thông tin trước sự tấn công của các loại mã độc như virus, sâu mạng hay phần mềm gián điệp. Với mục tiêu đánh giá và dự báo sự lan truyền của các loại mã độc, cách tiếp cận dựa trên mô hình hóa được sử dụng phổ biến với các mô hình hệ vi phân [1–6], mô hình mạng [7, 8] hay mô hình dữ liệu [9, 10]. Mô hình hóa đầu tiên của sự lan truyền các đối tượng độc hại được giới thiệu năm 1927 bởi Kermack và McKendrick [1] với việc mô tả sự lây nhiễm dịch bệnh trong cộng đồng bằng mô hình toán học dạng ngăn SIR (Mẫn cảm - Lây nhiễm - Hồi phục) và sau đó, các tác giả phân tích đặc trưng dịch tễ và dự báo chiều hướng bùng phát của dịch bệnh dựa trong các công trình [2, 3]. Nghiên cứu tiên phong này đã mở ra một hướng tiếp cận mới và được ứng dụng rộng rãi trong nhiều nghiên cứu để mô hình hóa sự lan truyền của các loại dịch bệnh trong cộng đồng như sự lây nhiễm của virus corona [11, 12], virus HIV [13], virus viêm gan E [14], virus Ebola [15], virus ZIKA [16] hay virus viêm gan B [17]. Lấy cảm hứng từ sự tương đồng giữa sự lây nhiễm các loại bệnh dịch trong các quần thể sinh học với sự lan truyền các loại mã độc trên các hệ thống thông tin khi chúng ta xem xét một nút mạng không nhiễm mã độc với cá thể khỏe mạnh, nút mang mã độc với cá thể lây nhiễm và nút đã được loại bỏ mã độc với cá thể đã khỏi bệnh, hướng nghiên cứu sử dụng mô hình dịch tễ để mô hình hóa và phân tích sự lan truyền của các loại mã độc trên các hệ thống thông tin hiện đang nhận được nhiều sự quan tâm (tham khảo [4–8, 10, 18–22]).

Trong thực tế, các hệ thống điều tiết giao thông, giám sát môi trường và sinh thái, các hệ thống thông tin hoặc mạng lưới sinh học, v.v. . . . thường được mô tả chính xác hơn bởi các mô hình mạng phức hợp không đồng nhất (“heterogenous complex network”), trong đó các mạng quy mô tự do (“scale-free networks”) là một lớp mạng phức hợp không đồng nhất quan trọng mô tả tốt cho nhiều hệ thống thông tin như mạng xã hội [23], World Wide Web [24], mạng cảm biến không dây [25], hệ thống an ninh [26] hoặc Internet [27]. Trong các mô hình cổ điển mô tả sự lan truyền mã độc, các tác giả thường giả sử các nút trong mạng được phân bố đều và do đó, tỷ lệ nhiễm mã độc do tiếp xúc là như nhau

với mọi nút trong mạng, tức là vai trò của các nút trong mạng là tương đồng. Giả sử này giúp cho việc nghiên cứu trở nên đơn giản và dễ xử lý hơn nhưng trong thực tế, điều này chưa hợp lý khi mà các loại mạng phức hợp như Internet, mạng xã hội hay mạng cảm biến, v.v., luôn có số lượng nút rất lớn và vai trò của các nút khác nhau trong mạng hiển nhiên là không giống nhau. Vì vậy, việc thiết lập các mô hình lan truyền mã độc trên mạng đòi hỏi cần xét đến tính không đồng nhất về tiếp xúc của các nút mạng. Nghiên cứu của Pastor-Satorras và Vespignani [28] được biết đến như một công trình tiên phong cho nghiên cứu các mô hình toán học mô tả sự lây nhiễm của đối tượng độc hại trên mạng phức hợp. Cụ thể, công trình này đề xuất mô hình dịch SIS dựa trên mạng và trình bày một nghiên cứu chi tiết về đặc tính dịch tễ cơ bản và kết quả giải số cho mô hình dịch tễ đề xuất. Được tạo động lực từ [28], nhiều nghiên cứu tiếp theo về các mô hình dịch tễ dựa trên mạng phức hợp được tiến hành và thu được nhiều kết quả đáng chú ý. Trong bài báo [29], Huo và cộng sự đã đề xuất một mô hình dịch ba ngăn với các trạng thái miễn cảm, lan truyền virus và phục hồi để mô tả quá trình lan truyền virus trên mạng quy mô tự do. Trong nghiên cứu này, các tác giả xác định hệ số lây nhiễm thứ phát \mathcal{R}_0 và thảo luận vai trò của giá trị ngưỡng \mathcal{R}_0 đối với dáng điệu tiệm cận của mô hình. Trong nghiên cứu [30], Li và Yousef đã giới thiệu mô hình dịch SIRS dựa trên mạng với hàm xử lý mã độc bão hòa để mô tả rõ hơn kịch bản thực tế khi số lượng người nhiễm bệnh có thể vượt quá khả năng điều trị. Bài báo [30] đã chỉ ra hệ số lây nhiễm thứ phát \mathcal{R}_0 và liên kết giá trị này với sự ổn định tiệm cận của điểm cân bằng cũng hiện tượng rẽ nhánh lồi tại $\mathcal{R}_0 = 1$. Một điểm mới của nghiên cứu này là việc sử dụng hàm xử lý mã độc bão hòa thay vì tuyến tính để phù hợp hơn với kịch bản bùng phát dịch trong thực tế. Ngoài ra, các mô hình dựa trên mạng cũng được ứng dụng để nghiên cứu sự lan truyền thông tin trên mạng xã hội như mô hình lan truyền tin đồn trên mạng xã hội được nghiên cứu bởi Zan và cộng sự [22], trong đó các tác giả xây dựng mô hình lan truyền SICR dựa trên mạng gồm 4 ngăn: Miễn cảm (Susceptible) - Tung tin (Infective) - Phản bác (Counterattack) - Kiên định (Refractory) và thảo luận về dự báo xu hướng lan truyền của tin đồn cũng như điều kiện để tin đồn được dập tắt. Điểm mới của nghiên cứu này là giới thiệu ngăn phản bác tin đồn (C) trong mô hình để đánh giá hiệu quả của việc ngăn chặn lan truyền dựa trên đính chính tin đồn. Trong một nghiên cứu gần đây, Hosseini và Zandvakili [8] đã đề xuất một mô hình toán học SEIRS-C để mô tả quá trình tin đồn lan truyền trên mạng xã hội. Kế thừa ý tưởng từ [22], nghiên cứu này cũng đề xuất sử dụng một ngăn mới (C) để nghiên cứu tác động của yếu tố phản công trong việc kiểm soát tin đồn. Ngoài ra, việc sử dụng logic mờ để biểu diễn tốc độ truyền cũng là một điểm mới của nghiên cứu. Sau khi thiết lập mô hình dịch SEIRS-C dựa trên mạng, bài báo này đã tính toán hệ số lây nhiễm thứ phát \mathcal{R}_0 tương ứng với mô hình và đưa ra một số thảo luận về tính ổn định tiệm cận địa phương của trạng thái cân bằng không tin đồn cũng như hiệu quả

của cách tiếp cận dựa trên logic mờ đối với của mô hình đề xuất. Một số nghiên cứu liên quan khác về các mô hình dịch tễ dựa trên mạng có thể tham khảo tại [31–35].

Giải tích phân thứ mà cụ thể là khái niệm đạo hàm với bậc α tùy ý xuất hiện lần đầu vào năm 1695 và có một quá trình dài hoàn thiện và phát triển. Mặc dù lĩnh vực nghiên cứu này ra đời khá sớm nhưng trong khoảng 30 năm trở lại đây, giải tích phân thứ nói chung và các hệ động lực phân thứ nói riêng mới có những bước phát triển mạnh mẽ và đang là một vấn đề nghiên cứu tính thời sự và ứng dụng. Cụ thể, giải tích phân thứ được chứng minh trong các công trình [36–38] là một công cụ hữu hiệu khi mô hình hóa các hiện tượng không địa phương, các quá trình có nhớ, quá trình có tính di truyền hay các chuyển động trong môi trường đàn hồi nhớt. Ở đây, tính nhớ được thể hiện trong hàm nhân của đạo hàm phân thứ, gọi là hàm nhớ. Ví dụ, để thể hiện các thuộc tính của vật liệu đàn hồi nhớt với bộ nhớ trong mô hình Kelvin, mô hình Voigt, mô hình Maxwell, các tác giả đã đề xuất sử dụng hàm nhân $(t - s)^\alpha$, trong khi để biểu diễn cho các quá trình vật lý phân rã, hàm nhân dạng $\exp(t - s)^\alpha$ hoặc $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}((t - s)^\alpha)$ được sử dụng. Điều này dẫn tới các khái niệm đạo hàm phân thứ khác nhau. Một số đạo hàm phân thứ nổi tiếng như đạo hàm phân thứ Caputo, Riemann–Liouville hoặc đạo hàm phân thứ theo nghĩa của Grünwald, xem [39–41]. Song song với sự phổ biến nhanh chóng của tính toán phân thứ, việc nghiên cứu hệ động lực phân thứ cũng được các nhà nghiên cứu quan tâm và đạt được nhiều kết quả đáng chú ý ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học cơ bản và kỹ thuật như hệ thống mạch [42, 43], nhiệt động học [44], sinh thái học [45], động lực học chất lỏng [46], khoa học vật liệu [47], mã hóa ảnh [48] hay dịch tễ học [49]. Một trong những vấn đề định tính quan trọng khi nghiên cứu các hệ động lực phân thứ là khảo sát đáng điệu tiệm cận của các hệ động lực này. Gần 15 năm qua, các nghiên cứu về lý thuyết ổn định cũng như các phương pháp ổn định theo nghĩa Lyapunov cho các hệ động lực phân thứ đã và đang thu hút nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà nghiên cứu trong và ngoài nước và trở thành tiền đề cho nhiều nghiên cứu lý thuyết và ứng dụng, tham khảo Diethelm [50], Li và cộng sự [51, 52], Duarte-Mermoud và cộng sự [53], Tuấn và cộng sự [54, 55]. Từ thực tế rằng cơ chế phát tán mã độc dựa trên quá trình truyền dẫn tín hiệu trong mạng và quá trình này có sự phụ thuộc đáng kể vào đặc tính của môi trường và kết cấu, tính chất của vật liệu, nhiều nghiên cứu gần đây đã sử dụng các mô hình phương trình vi phân phân thứ để mô hình hóa sự lan truyền của mã độc trên các hệ thống mạng như mạng xã hội Instagram [56] hay mạng máy tính [57]. Tuy nhiên, cần chú ý rằng mạng máy tính hay mạng xã hội Instagram có tính phân bậc rõ ràng và do đó, chúng ta cần tính đến tính không đồng nhất của mạng để thiết lập được mô hình thực tế hơn. Kế thừa ý tưởng trên, một số mô hình dịch như [11, 12, 58, 59] đã cung cấp những nghiên cứu ban đầu về các mô hình dịch trên mạng phức hợp không đồng nhất với đạo hàm phân thứ. Nội dung nghiên cứu của các công trình này được cho trong Bảng 1:

Bảng 1: Một số nghiên cứu về các mô hình dịch dựa trên mạng với đạo hàm phân thứ

TT	Tài liệu	Mô hình	Kết quả chính
1	Chen và cộng sự (2014), [58]	Mô hình dịch SIR phân thứ dựa trên mạng có điều khiển	Tính toán hệ số lây nhiễm thứ phát \mathfrak{R}_0 ; Khảo sát tính ổn định tiệm cận địa phương và toàn cục của các điểm cân bằng; Nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu cách ly-điều trị.
2	Huo và Zhao (2016), [59]	Mô hình dịch SIRS phân thứ dựa trên mạng	Xác định hệ số lây nhiễm thứ phát và điều kiện cho sự tồn tại điểm cân bằng đặc hữu; Dáng điệu tiệm cận của các điểm cân bằng liên kết với giá trị $\mathfrak{R}_0 - 1$.
3	El Saka và cộng sự (2019), [16]	Mô hình dịch SIRS phân thứ dựa trên mạng cho sự lây nhiễm virus ZIKA	Xác định tập bất biến dương tương ứng với mô hình; Xác định các điểm cân bằng và điều kiện cho sự ổn định tiệm cận của các điểm này.
4	Lu và cộng sự (2020), [12]	Mô hình lây nhiễm COVID SEIHRD liên thành phố	Sự tồn tại nghiệm không âm của mô hình; Tính toán hệ số lây nhiễm thứ phát và sự ổn định tiệm cận của điểm cân bằng không dịch.
5	Fu và Wang (2022), [11]	Mô hình dịch SEIQR phân thứ dựa trên mạng có cách ly	Sự tồn tại duy nhất nghiệm và tính ổn định Ulam; Tính toán hệ số lây nhiễm thứ phát \mathfrak{R}_0 và ước lượng độ nhạy tham số; Bài toán điều khiển tối ưu với điều khiển ngừa chủng và cách ly.

Trong thực tế, do môi trường của các quá trình truyền dẫn thông tin luôn bị ảnh hưởng bởi những yếu tố bất định như chính sách bảo mật của mạng, tính đồng bộ của hệ thống,... nên chúng ta cần tính đến các đại lượng biểu thị sự không chắc chắn khi mô hình hóa và diễn giải các vấn đề trong môi trường tự nhiên. Chú ý rằng nếu các tham số-dữ kiện đầu vào là các đại lượng bất định với sai lệch không quá lớn thì chúng ta thường biểu diễn chúng dưới dạng *tập mờ* (fuzzy sets) và kéo theo các mô hình thiết lập được là các mô hình mờ. Các mô hình mờ mô tả bởi các phương trình vi phân-đạo hàm riêng mờ đã và đang thu hút nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học trong khắp các lĩnh vực khoa học-kỹ thuật, tham khảo [60–67]. Trong nghiên cứu [62], Agarwal cùng các cộng sự đã đưa ra khái niệm *phương trình vi phân phân thứ mờ* (“fuzzy fractional differential equations”), đại diện cho một loại phương trình vi phân kết hợp giữa đạo hàm phân thứ và hàm nhận giá trị mờ. Lớp phương trình này là một công cụ hiệu quả cho phép mô tả dáng điệu không chắc chắn của các hệ động lực theo cả không gian và thời gian. Một số nghiên cứu tiêu biểu về phương trình vi phân phân thứ mờ có thể kể đến như công trình [68] với nghiên cứu về điều kiện tối ưu cho bài toán điều khiển tối ưu với ràng buộc

hệ phương trình vi phân phân thứ mờ với đạo hàm kiểu Caputo. Trong bài báo [69], Hòa và các cộng sự đã nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm mờ cho bài toán Cauchy của phương trình vi phân phân thứ Caputo-Katugampola mờ. Trong lĩnh vực lý thuyết điều khiển, Mani và cộng sự [48] đã giải quyết bài toán đồng bộ hóa của các mạng nơ-ron tế bào mờ phân thứ hỗn loạn thông qua việc thiết kế một lược đồ điều khiển thích ứng. Trong bài báo [70], Moezi và cộng sự đã sử dụng phương pháp điều khiển chế độ trượt bước lùi phân thứ giá trị số mờ khoảng loại 2 thích ứng để thiết kế bộ điều khiển cho một số lớp cơ hệ phi tuyến với giá trị không chắc chắn. Tính ổn định tiệm cận của các hệ động lực phân thứ mờ cũng được quan tâm nghiên cứu trong bài báo [71], trong đó các tác giả đã thiết lập một số tiêu chuẩn cho tính ổn định thời gian hữu hạn của một lớp hệ phương trình vi phân phân thứ mờ với trễ tỷ lệ và ứng dụng để nghiên cứu tính ổn định cho mạng nơ-ron mờ. Ngoài ra, các phương pháp số cho hệ phương trình vi phân phân thứ mờ cũng được quan tâm nghiên cứu (tham khảo [67, 72]). Trong lĩnh vực dịch tễ học, một số mô hình dịch thiết lập bởi các phương trình vi phân mờ với bậc nguyên được thảo luận trong [61, 66, 73, 74]. Điểm mới của công trình này là xem xét tốc độ lan truyền mã độc và hàm xử lý mã độc dưới dạng số mờ và từ đó, đưa ra các đánh giá ban đầu về đặc điểm dịch tễ của mô hình đề xuất. Tuy nhiên, các kết quả mới dừng lại ở việc giới thiệu mô hình dịch tổng quát với tham số hoặc điều kiện đầu mờ, các tính chất giải tích sâu sắc hơn và đặc trưng dịch tễ của các mô hình lan truyền mã độc chưa được thảo luận một cách chi tiết. Một số nghiên cứu gần đây về các mô hình lan truyền mã độc đã kết hợp lý thuyết hệ động lực với lý thuyết mạng và lý thuyết tập mờ. Cụ thể, Zan và các cộng sự [22] đã nghiên cứu sự lan truyền của tin đồn trên mạng xã hội với việc sử dụng mô hình toán học dựa trên mạng kết hợp với đại lượng bất định dạng số mờ trong tham số phản bác tin đồn. Trong một nghiên cứu gần đây, bằng cách sử dụng logic mờ và cơ sở luật mờ, Hosseini và Zandvakili [8] đã nghiên cứu sự lan truyền tin giả trên mạng và chứng minh ý nghĩa của lý thuyết mờ trong ngăn chặn tin giả.

Từ những vấn đề tổng quan trên, nghiên cứu sinh nhận thấy các vấn đề mở và triển vọng phát triển hướng nghiên cứu về mô hình hóa và dự báo lan truyền mã độc trên mạng cảm biến không dây dựa trên các mô hình phương trình vi phân phân thứ và lý thuyết mờ. Cụ thể, các hướng tiếp cận khả thi của luận án bao gồm:

- (A1) Nghiên cứu các mô hình lan truyền mã độc phân thứ trên mạng cảm biến không dây với dữ liệu ban đầu mờ. Với hướng tiếp cận này, do dữ liệu ban đầu được giả sử nhận giá trị số mờ, luận án thiết lập mô hình lan truyền mã độc trên mạng cảm biến không dây với hàm tương tác dựa trên biểu thức giá trị mờ và đạo hàm phân thứ mờ. Sau đó, luận án sẽ xây dựng cơ sở lý thuyết về giải tích phân thứ mờ theo nghĩa Atangana-Baleanu và bài toán giá trị ban đầu cho hệ phương trình vi phân phân thứ mờ mô tả mô hình lan truyền mã độc với dữ liệu ban đầu mờ.

(A2) Nghiên cứu các mô hình lan truyền mã độc phân thứ trên mạng cảm biến không dây thiết lập bởi mô hình phương trình vi phân phân thứ dựa trên mạng (“network-based systems”) và logic mờ. Khi mô hình hóa sự lan truyền mã độc trên mạng, chúng ta luôn cố gắng đưa vào mô hình nhiều thông tin, đặc điểm của sự lây lan trong thực tế để giúp cho mô hình thiết lập được sát với thực tế hơn và cho những đánh giá chính xác và phù hợp hơn. Với mục tiêu này, nhằm thể hiện đồng thời cấu trúc phức hợp không đồng nhất của mạng cảm biến không dây và ảnh hưởng của các yếu tố bất định trong quá trình lan truyền, luận án sử dụng cách tiếp cận nghiên cứu sự lan truyền mã độc trên mạng dựa trên kết hợp mô hình phương trình vi phân dựa trên mạng, giải tích phân thứ và lý thuyết tập mờ-logic mờ.

2. Mục tiêu, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

2.1. Mục tiêu nghiên cứu

Luận án nghiên cứu một số mô hình toán học mô tả sự lan truyền các phần mềm độc hại trên một lớp mạng phức hợp không đồng nhất (mạng cảm biến không dây). Cụ thể, ba mục tiêu chính của luận án gồm:

- Thiết lập được một số mô hình toán học mô tả sự lan truyền mã độc trên mạng cảm biến không dây.
- Xác định được chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 -giá trị ngưỡng đặc trưng của các mô hình lan truyền mã độc.
- Khảo sát các tính chất định tính như: sự tồn tại duy nhất và tính dương của nghiệm đối với bài toán Cauchy cho các mô hình lan truyền mã độc, sự tồn tại các điểm cân bằng, tính ổn định tiệm cận, sự rẽ nhánh và bài toán điều khiển ổn định hóa.

2.2. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận án tập trung nghiên cứu các mô hình toán học mô tả sự lan truyền mã độc trên mạng cảm biến không dây với đối tượng và phạm vi nghiên cứu như sau:

- Các mô hình toán học của sự lan truyền mã độc trên một lớp mạng phức hợp không đồng nhất biểu diễn bởi các lớp hệ phương trình vi phân phân thứ với tham số mờ hoặc thiết lập bởi logic mờ;
- Tính chất định tính như tính dương, chỉ số ngưỡng lan truyền, sự ổn định tiệm cận và bài toán điều khiển cho mô hình lan truyền mã độc đề xuất.

3. Nội dung nghiên cứu

Nghiên cứu của luận án tập trung vào các nội dung sau đây:

Nội dung 1: Mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ với dữ liệu mờ:

Trong nghiên cứu [75], Gómez và cộng sự đã chỉ ra rằng một số hiện tượng có tính phân rã được mô tả tốt hơn bằng loại hàm nhân khác thay vì nhân dạng lũy thừa, chẳng hạn như mô hình sinh học mô tả cơ chế mệt mỏi của vận động viên điền kinh, quá trình phân hủy của xác chết trong môi trường yếm khí hoặc quá trình truyền dẫn sóng trong môi trường có sức nén. Gần đây, Caputo và Fabrizio [76] đã đề xuất khái niệm đạo hàm phân thứ với nhân dạng hàm mũ. Tiếp đó, Atangana và Baleanu [44] nghiên cứu giải tích phân thứ với nhân dạng hàm Mittag-Leffler. Các khái niệm mới về tính toán phân thứ Atangana-Baleanu được kỳ vọng sẽ mô hình hóa tốt hơn hiệu ứng của bộ nhớ trong các hệ vật lý phức tạp. Trong tài liệu [77], Saad và cộng sự đã so sánh ba khái niệm đạo hàm phân thứ: Liouville-Caputo, Caputo Fabrizio, Mittag-Leffler và áp dụng để nghiên cứu các mô hình phân thứ cải tiến cho phương trình Burgers. Một số ứng dụng khác có thể tham khảo tại [14, 42, 78, 79]. Một kết quả gần đây về phép tính phân thứ của hàm nhận giá trị mờ được đề xuất bởi Sơn và các cộng sự trong [80] với việc nghiên cứu các đạo hàm phân thứ Caputo Fabrizio và Riemann-Liouville Fabrizio mờ dưới tính khả vi Fréchet của một lớp hàm mờ tương quan tuyến tính. Trong luận án này, tác giả đề xuất kết hợp giải tích mờ và giải tích phân thứ kiểu Atangana-Baleanu để mô tả và dự báo lan truyền mã độc trên mạng cảm biến không dây với dữ liệu bất định thông qua mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ dạng (FDE1) như sau:

$$\begin{cases} {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta S(t) &= A - \lambda S(t)I(t) + \omega Q(t) + \sigma R(t) - \mu S(t) \\ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta I(t) &= \lambda S(t)I(t) - (\nu + \gamma + \mu)I(t) \\ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta Q(t) &= \gamma I(t) - (\eta + \mu + \omega)Q(t) \\ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta R(t) &= \nu I(t) + \eta Q(t) - (\sigma + \mu)R(t), \end{cases} \quad (\text{FDE1})$$

với điều kiện ban đầu $(S(0), I(0), Q(0), R(0)) = (S_0, I_0, Q_0, R_0) \in \mathcal{E}^4$, trong đó ${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta(\cdot)$ ký hiệu cho toán tử đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu phân thứ mờ bậc $\beta \in (0, 1)$ và các hàm nhận giá trị mờ $S(t), I(t), Q(t), R(t)$ lần lượt ký hiệu cho các trạng thái miễn cảm, lan truyền virus, cách ly và hồi phục. Các tham số của mô hình được giả thiết không âm và được giải thích trong Bảng 2.1. Đối với mô hình (FDE1), luận án tiến hành kết hợp các kỹ thuật của giải tích mờ, giải tích phân thứ để xây dựng nền tảng lý thuyết cơ bản về phép tính phân thứ kiểu Atangana-Baleanu cho hàm nhận giá trị số mờ và ứng dụng để thiết lập bài toán Cauchy cho mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ dưới tính gH-khả vi và chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm cho bài toán này.

Nội dung 2: Mô hình lan truyền mã độc SE₁E₂IQR phân thứ dựa trên mạng

với hàm lan truyền xác định bởi logic mờ:

Do các khu vực mục tiêu của mạng cảm biến không dày trong thế giới thực luôn có địa hình phức tạp và khí hậu bất thường, tốc độ truyền thông tin trong mạng bị ảnh hưởng sâu sắc bởi các yếu tố địa lý và khí hậu. Thêm vào đó, do các nút cảm biến có năng lượng giới hạn và không thể tự sạc nên hoạt động của mạng cảm biến không dây sẽ dựa trên cơ chế tiết kiệm năng lượng và tốc độ truyền dữ liệu sẽ thay đổi phụ thuộc vào năng lượng thặng dư của mạng. Ngoài ra, trong mạng cảm biến không dây, các cụm mạng khác nhau sẽ thực hiện các tác vụ cảm biến, đo lường và thu thập khác nhau nên dễ thấy rằng tốc độ truyền dữ liệu sẽ không đồng đều. Mặt khác, việc một nút cảm biến bị nhiễm mã độc nhanh hay chậm cũng phụ thuộc vào mật độ của các nút nhiễm mã độc lân cận. Các yếu tố này thường không thể đo lường chính xác mà được thể hiện phù hợp hơn thông qua các biến ngôn ngữ như “cao”, “trung bình”, “thấp”. Sự xuất hiện của các yếu tố bất định gợi ra ý tưởng sử dụng lý thuyết tập mờ cho các mô hình lan truyền mã độc trên mạng cảm biến. Với mục tiêu thể hiện đồng thời tính không đồng nhất của mạng cảm biến không dây và độ bất định của quá trình truyền dẫn đối với mô hình lan truyền mã độc, luận án đề xuất nghiên cứu mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với hàm lan truyền dựa trên luật mờ gồm n hệ phương trình vi phân phân thứ, trong đó lớp hệ thứ k cho bởi:

$$\begin{cases} {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta S_k(t) &= \Lambda(k) - (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) S_k(t) \Theta(t) - \mu S_k(t) + \theta R_k(t) \\ {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta E_{1,k}(t) &= \sigma_1(k) S_k(t) \Theta(t) - (\eta + \omega_1 + \mu) E_{1,k}(t) \\ {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta E_{2,k}(t) &= \sigma_2(k) S_k(t) \Theta(t) - (\mu + \omega_2 + \omega_3) E_{2,k}(t) + \eta E_{1,k}(t) \\ {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta I_k(t) &= \omega_3 E_{2,k}(t) - (\mu + c + r_1) I_k(t) \\ {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta Q_k(t) &= \omega_1 E_{1,k}(t) + \omega_2 E_{2,k}(t) + c I_k(t) - (r_2 + \mu) Q_k(t) \\ {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta R_k(t) &= r_1 I_k(t) + r_2 Q_k(t) - (\mu + \theta) R_k(t), \end{cases} \quad (\text{FDE2})$$

với điều kiện ban đầu $S_k(0) = S_k^0$, $E_{1,k}(0) = E_{1,k}^0$, $E_{2,k}(0) = E_{2,k}^0$, $I_k(0) = I_k^0$, $Q_k(0) = Q_k^0$, $R_k(0) = R_k^0$, trong đó các điều kiện ban đầu và các tham số được giả sử là các số thực không âm. Hàm $\Theta(t)$ cho bởi đại diện cho xác suất mà một liên kết cho trước kết nối với một nút lan truyền mã độc. Đối với mô hình lan truyền mã độc dạng (FDE2), luận án kết hợp giải tích phân thứ, lý thuyết mạng phức hợp không đồng nhất với cơ sở luật mờ để thiết lập mô hình lan truyền mã độc dựa trên mạng gồm 6 ngăn, trong đó nhóm các nút nhiễm mã độc chiếm 3 ngăn bao gồm: Mạng mã độc loại 1, Mạng mã độc loại 2 và Lan truyền mã độc. Ở đây, logic mờ được áp dụng để biểu thị tính không đồng nhất của mạng, xác định sự chuyển trạng thái giữa các ngăn và ước tính hằng số lan truyền mã độc. Sau đó, luận án tiến hành khảo sát các tính chất định tính của mô hình đề xuất gồm sự tồn tại và duy nhất của nghiệm không âm, sự tồn tại tập bất biến dương, tính toán

chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và liên hệ chỉ số ngưỡng này để khảo sát tính ổn định tiệm cận địa phương-toàn cục và tính rẽ nhánh của mô hình.

Nội dung 3: Bài toán ổn định hóa cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển với hàm xử lý mã độc bão hòa

Trong thực tế, khả năng ứng phó với sự lây lan mã độc của mỗi hệ thống mạng và chương trình xử lý mã độc đều có một mức tối đa nên chỉ khi số nút nhiễm mã độc chưa đạt ngưỡng của giới hạn xử lý mã độc, giá trị hàm xử lý mới tỷ lệ thuận với số lượng nút bị nhiễm mã độc. Ngược lại, khi mà số nút bị nhiễm đã đạt cực đại và vượt giới hạn xử lý của hệ thống thì hiện tượng các nút bị nhiễm mã độc nhưng bị chậm trễ xử lý có thể xảy ra. Điều này nảy sinh nhu cầu thiết lập các mô hình lan truyền mã độc có tính đến yếu tố sự lan truyền mã độc bùng phát để nghiên cứu được đặc điểm, động lực của mô hình trong trường hợp này. Hiện tượng này đã được xem xét nghiên cứu trong các công trình [13, 30, 81, 82]. Gần đây, nghiên cứu về bài toán điều khiển tối ưu cho các mô hình lan truyền mã độc dựa trên mạng với đạo hàm nguyên đã có một số kết quả lý thuyết như [11, 31, 34, 35, 58]. Các công trình này tiếp cận nghiên cứu tính ổn định hóa dựa vào nguyên lý cực trị Pontryagin để đưa ra các điều kiện đủ cho tính tối ưu của một cặp chấp nhận được $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$. Tuy nhiên, các điều kiện thu được cũng đặt ra một thách thức cho việc kiểm tra, đánh giá cũng như giải số. Trong nội dung này, luận án xem xét mô hình hóa hiện tượng mã độc lan truyền rộng rãi trong mạng cảm biến không dây bởi mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển với hàm xử lý mã độc bão hòa gồm n hệ phương trình vi phân phân thứ có dạng sau:

$$\begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta S_k(t) &= \Lambda - \sigma_k \Theta(t) S_k(t) - (\mu + \mathbf{u}_k(t)) S_k(t) + \omega R_k(t) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta I_k(t) &= \sigma_k \Theta(t) S_k(t) - \mu I_k(t) - \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta R_k(t) &= \mathbf{u}_k(t) S_k(t) + \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} - (\mu + \omega) R_k(t) \end{cases} \quad (\text{FDE3})$$

với $k = 1, 2, \dots, n$, điều kiện ban đầu $S_k(0) = S_k^0$, $I_k(0) = I_k^0$ và $R_k(0) = R_k^0$, trong đó \mathbf{u}_k đại diện cho hàm điều khiển cách ly các nút miễn cảm khỏi sự tấn công của mã độc. Đối với mô hình lan truyền mã độc dạng (FDE3), luận án tiến hành khảo sát các tính chất định tính đặc trưng như: sự tồn tại duy nhất nghiệm không âm và tập bất biến dương, tính toán chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 , nghiên cứu dáng điệu tiệm cận địa phương và toàn cục; xác định điều kiện cho sự rẽ nhánh lồi của mô hình. Cuối cùng, luận án nghiên cứu bài toán điều khiển ổn định hóa cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng nhằm khống chế sự lan truyền của mã độc trong mạng dựa trên cách tiếp cận *hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết* (interconnected fractional Takagi-Sugeno fuzzy system). Hệ mờ Takagi-Sugeno gần đây đã được ứng dụng rộng rãi để nghiên cứu các phương trình vi phân phân thứ [33, 83–86] hoặc phương trình vi phân dựa trên mạng [84, 87, 88]. Tuy

nhiên, hiện tại chưa có nghiên cứu nào về hệ mờ Takagi-Sugeno cho mô hình lan truyền mã độc phân thứ dựa trên mạng để giải quyết đồng thời tính phức hợp không đồng nhất của mạng phức hợp không đồng nhất và tính không địa phương của mô hình lan truyền mã độc phân thứ. Do đó, luận án đã đề xuất khái niệm hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết để nghiên cứu bài toán điều khiển ổn định hóa cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển. Cụ thể, luận án đưa mô hình lan truyền mã độc này về hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết gồm n hệ con có dạng:

$${}^C_0\mathcal{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) \left\{ A_i^p \mathbf{e}_i(t) + B_i^p \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t) \right\},$$

trong đó $i = 1, 2, \dots, n$, A_i^p, B_i^p và α_{ij}^p là các ma trận, $\mathbf{z}_i(t)$ là biến tiền đề đo được, $w_i^p(\mathbf{z}_i(t))$ là hàm trọng chuẩn tắc cho biết mức độ kích hoạt của luật mờ thứ p trong hệ con thứ i . Sau đó, luận án xây dựng vectơ điều khiển phản hồi trạng thái $\mathbf{u}(t)$ và các điều kiện đủ ở dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính dựa trên phương pháp hàm Lyapunov.

4. Phương pháp nghiên cứu

Luận án đã kết hợp các phương pháp của giải tích phân thứ, lý thuyết tập mờ, lý thuyết ổn định cho các hệ động lực phân thứ, giải tích ma trận và các kỹ thuật ước lượng, biến đổi bất đẳng thức ma trận. Cụ thể:

- Đối với Nội dung 1, luận án đã kết hợp lý thuyết của giải tích mờ và tính toán phân thứ để xây dựng các khái niệm đạo hàm và tích phân phân thứ với nhân hàm Mittag-Leffler và sử dụng nguyên lý ánh xạ co tổng quát để chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm cho mô hình lan truyền mã độc đề xuất.
- Đối với Nội dung 2, luận án sử dụng cơ sở luật mờ để thiết lập mô hình lan truyền mã độc và sau đó, áp dụng lý thuyết định tính của hệ động lực phân thứ để chứng minh tính tồn tại duy nhất nghiệm không âm của mô hình. Tiếp đó, phương pháp ma trận thế hệ mới (“next-generation matrix method”) được sử dụng để xác định chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và các phương pháp ổn định theo nghĩa Lyapunov cho hệ động lực phân thứ được áp dụng để khảo sát đáng điều tiệm cận của mô hình.
- Đối với Nội dung 3, luận án sử dụng hàm xử lý phi tuyến để mô tả cho trường hợp số lượng nút nhiễm mã độc vượt quá khả năng xử lý của phần mềm diệt mã độc. Lý thuyết định tính của hệ động lực phân thứ sau đó được áp dụng để chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm không âm của mô hình. Bằng cách áp dụng phương pháp ma trận thế hệ mới, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 được xác định. Phương pháp ổn

định theo nghĩa Lyapunov cho hệ động lực phân thứ được sử dụng để khảo sát đáng điệu tiệm cận của mô hình. Cuối cùng, luận án sử dụng hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết và phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu bài toán ổn định hóa cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển.

5. Các kết quả đã đạt được

Luận án thiết lập và nghiên cứu tính chất định tính của các mô hình toán học mô tả cho sự lan truyền mã độc trên mạng cảm biến không dây. Các kết quả đạt được của luận án góp phần hoàn thiện lý thuyết định tính và ứng dụng của phương trình vi phân phân thứ và lý thuyết mờ trong mô hình hóa và nghiên cứu các quá trình trong thực tế. Một số ý tưởng và phương pháp nghiên cứu sử dụng trong luận án này có thể dùng để nghiên cứu mở rộng cho một số lớp mô hình khác. Các kết quả đạt được của luận án bao gồm:

- Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ với dữ liệu mờ sử dụng các khái niệm đạo hàm Caputo-Atangana-Baleanu phân thứ mờ (Định nghĩa 2.1) và tích phân Riemann-Liouville Atangana-Baleanu phân thứ mờ (Định nghĩa 2.2), chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm tích phân mờ của mô hình (Định lý 2.3 và Định lý 2.4) và thực hiện một số mô phỏng số.
- Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với hàm lan truyền xác định bởi các luật mờ và chứng minh một số tính chất định tính của mô hình này như tính dương của nghiệm, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 (Công thức (3.8), sự ổn định tiệm cận của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 (Định lý 3.3 và Định lý 3.4) và tính rẽ nhánh tiến tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ (Định lý 3.5).
- Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển với hàm xử lý mã độc bão hòa và bài toán ổn định hóa cho mô hình này dựa trên hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết với các kết quả đạt được gồm tính dương của nghiệm, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 (Công thức (4.4)), tính ổn định tiệm cận (Định lý 4.3 và Định lý 4.4), tính rẽ nhánh lùi tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ (Định lý 4.5) và một số điều kiện đủ dạng bất đẳng thức ma trận cho tính ổn định hóa (Định lý 4.6) của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 .

Các kết quả chính của luận án được công bố trong 03 bài báo ở các tạp chí thuộc danh mục ISI, 01 bản thảo đã gửi đăng:

- P1. N.P. Dong, H.V. Long, N.L. Giang, 2022, The fuzzy fractional SIQR model of computer virus propagation in Wireless Sensor Network using Caputo Atangana–Baleanu derivatives, *Fuzzy Sets and Systems*, 429, pp. 28-59. (SCIE-Q1)**

- P2. N.P. Dong**, H.V. Long, N.T.K. Son, 2022, The dynamical behaviors of fractional-order SE_1E_2IQR epidemic model for malware propagation on Wireless Sensor Network, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 111, 106428. **(SCIE-Q1)**
- P3. N.P. Dong**, H.V. Long, N.T.K. Son, 2023, The analysis of a fractional network-based epidemic model with saturated treatment function and fuzzy transmission, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 20(1), pp. 1-18. **(SCIE-Q2)**
- P4. N.P. Dong**, N.L. Giang, H.V. Long, 2023, Interconnected Takagi-Sugeno intelligent system and fractional SIRS epidemic model for stabilization of Wireless Sensor Network. **(đã gửi đăng)**

và đã được báo cáo tại các Hội nghị, Hội thảo khoa học và Seminar:

- The 9th Iranian Joint Congress of Fuzzy and Intelligent Systems (CFIS2022), March 2-4, Bam city, Iran 2022.
- Hội thảo khoa học cán bộ trẻ trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 - Viện Toán học, tháng 11, 2021.
- Hội thảo khoa học các nhà nghiên cứu trẻ: Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 - Viện Toán học - Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, tháng 8, 2022.
- Seminar *Giải tích - Toán ứng dụng*, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2.
- Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ X, năm 2023, Tiểu ban Phương trình vi phân và Hệ động lực.
- Hội thảo quốc tế “Optimization and Control Theory with Applications”, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 - Viện Toán học, tháng 8/2023.
- Hội thảo Quốc gia lần thứ XXVI “Một số vấn đề chọn lọc về Công nghệ thông tin và Truyền thông” (VNICT 2023)

6. Cấu trúc của luận án

Ngoài các phần “Mở đầu”, “Kết luận chung”, “Danh mục công trình của nghiên cứu sinh” và “Tài liệu tham khảo”, luận án được kết cấu gồm 4 chương, trong đó các kết quả chính được trình bày tại Chương 2, Chương 3 và Chương 4.

Chương 1: Đây là chương kiến thức chuẩn bị gồm 5 mục. Mục 1.1 giới thiệu tổng quan về giải tích phân thứ. Mục 1.2 trình bày về lý thuyết tập mờ, logic mờ và giải tích của

các hàm nhận giá trị mờ. Mục 1.3 và 1.4 giới thiệu sơ lược về hệ mờ Takagi-Sugeno và hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết. Mục cuối cùng của chương này giới thiệu về mạng quy mô tự do Barabási-Albert.

Chương 2: Chương này nghiên cứu ứng dụng của giải tích phân thứ mờ trong biểu diễn dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ với dữ liệu mờ trên mạng cảm biến không dây. Trước tiên, luận án thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIQR mờ dựa trên hệ phương trình vi phân phân thứ. Với mục tiêu này, luận án trình bày trong Mục 2.1 và Mục 2.2 các kết quả về đạo hàm và tích phân phân thứ kiểu Atangana-Baleanu và bài toán giá trị ban đầu cho phương trình vi phân phân thứ mờ dưới tính gH-khả vi và đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu. Các mục sau đó giới thiệu mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ và mô phỏng dáng điệu của mô hình đề xuất.

Chương 3: Chương này nghiên cứu mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với hàm lan truyền dựa trên luật mờ. Trong Mục 3.1, luận án thiết lập mô hình lan truyền mã độc gồm $6n$ phương trình vi phân phân thứ. Mục tiếp theo trình bày về các tính chất định tính của mô hình đề xuất như tính không âm của nghiệm, tính toán chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và các trạng thái cân bằng, tính rẽ nhánh tiến và dáng điệu tiệm cận của mô hình. Cuối cùng, Mục 3.3 trình bày một số đánh giá và tính toán mô phỏng cho mô hình đề xuất.

Chương 4: Chương này nghiên cứu mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển với hàm xử lý mã độc bão hòa và bài toán điều khiển ổn định hóa. Sau khi thiết lập mô hình trong Mục 4.1, các tính chất định tính của mô hình này được thảo luận trong Mục 4.2 bao gồm tính không âm của nghiệm, tính toán chỉ số ngưỡng lan truyền và các trạng thái cân bằng, sự ổn định tiệm cận của trạng thái cân bằng \mathbf{P}_0 và tính rẽ nhánh lùi. Mục 4.3 trình bày bài toán điều khiển ổn định hóa dựa trên hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết và các điều kiện đủ dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, luận án trình bày một số khái niệm cơ bản liên quan đến giải tích phân thứ và phương trình vi phân phân thứ [44, 50, 52, 53, 89, 90], tập mờ và logic mờ [65, 91], lý thuyết mạng phức hợp không đồng nhất [92, 93], hệ mờ Takagi-Sugeno và hệ mờ Takagi-Sugeno liên kết [88, 101]. Đồng thời, luận án cũng trình bày một số kiến thức bổ trợ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận án.

1.1. Một số vấn đề về giải tích phân thứ

Gần đây, giải tích phân thứ và các hệ động lực phân thứ dần là một chủ đề thu hút với nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của khoa học và kỹ thuật [12, 15, 39, 43–45, 48, 49, 75, 94]. Sau đây, luận án sẽ trình bày một số khái niệm cơ bản về đạo hàm, tích phân phân thứ và tính ổn định của các hệ động lực phân thứ:

Định nghĩa 1.1 ([50], Definition 1.2). Hàm Gamma $\Gamma(z)$ được định nghĩa dưới dạng tích phân Euler loại hai như sau:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \tau^{z-1} e^{-\tau} d\tau, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa 1.2 ([50], Definition 2.1). Với mỗi $\beta > 0$ và $[a, b] \subset \mathbb{R}$, cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$. Khi đó, tích phân Riemann-Liouville phân thứ với bậc $\beta > 0$ của hàm $f(t)$ được cho bởi

$${}_a \mathcal{J}_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - \tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a.$$

Định nghĩa 1.3 ([50], Definition 3.1). Cho $m := [\beta]$ là số nguyên bé nhất lớn hơn hoặc bằng β . Khi đó, đạo hàm Caputo phân thứ với bậc β của hàm số $f \in C^m((a, b), \mathbb{R})$ được cho bởi

$${}_a^C \mathcal{D}_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \beta)} \int_a^t (t - \tau)^{m-\beta-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \quad t > a.$$

Đặc biệt, nếu $\beta \in (0, 1]$ thì đạo hàm Caputo phân thứ với bậc $\beta \in (0, 1]$ của hàm số $f \in C^1((a, b), \mathbb{R})$ được cho bởi

$${}_a^C \mathcal{D}_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_a^t (t - \tau)^{-\beta} f'(\tau) d\tau.$$

Tổng quát, đạo hàm Caputo bậc phân thứ của một hàm vectơ $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n)^\top$ được định nghĩa như sau:

$${}^C \mathfrak{D}_t^\beta f(t) = \left({}^C \mathfrak{D}_t^\beta f_1(t) \ {}^C \mathfrak{D}_t^\beta f_2(t) \ \dots \ {}^C \mathfrak{D}_t^\beta f_n(t) \right)^\top.$$

Định nghĩa 1.4 ([50], Definition 4.2). Với mỗi cặp tham số $\alpha, \beta > 0$, hàm Mittag-Leffler $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}(z)$ với hai tham số α, β theo biến z được định nghĩa bởi

$$\mathbb{E}_{\alpha, \beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Đặc biệt, nếu $\beta = 1$ thì chúng ta có hàm Mittag-Leffler $\mathbb{E}_{\alpha, 1}(z) := \mathbb{E}_\alpha(z)$ cho bởi

$$\mathbb{E}_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Xét bài toán Cauchy cho phương trình vi phân phân thứ dưới đây:

$${}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{x}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)), \quad t > 0 \quad (1.1)$$

với điều kiện ban đầu

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.2)$$

trong đó $\beta \in (0, 1]$ và $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ là hàm khả vi liên tục, thỏa mãn điều kiện $f(t, \bar{0}) = \bar{0}$ và Lipschitz theo biến thứ hai. Tiếp theo, luận án trình bày định lý tồn tại duy nhất nghiệm cho bài toán Cauchy (1.1)-(1.2):

Định lý 1.1 ([50], Corollary 6.9). Cho $G = [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ và $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ là ánh xạ liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ hai với hằng số Lipschitz $L > 0$. Khi đó, bài toán Cauchy (1.1)-(1.2) có duy nhất nghiệm $\mathbf{x} \in C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$.

Nhận xét 1.1. Đặc biệt, nếu ánh xạ $f(t, \mathbf{x}(t))$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(t, \mathbf{x}(t)) = A\mathbf{x}(t) + g(\mathbf{x}(t)),$$

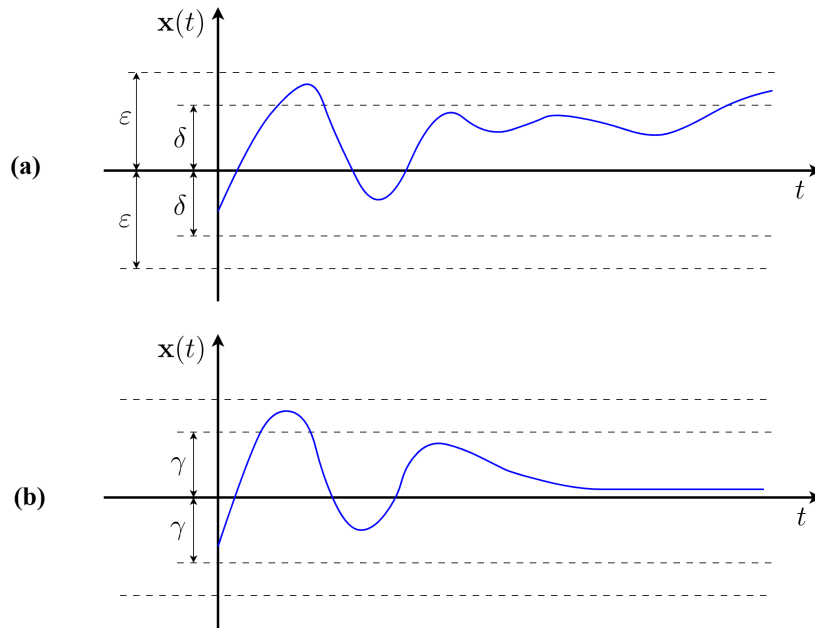
trong đó $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ và $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ là ánh xạ khả vi liên tục thì hằng số Lipschitz cho bởi $L = \|A\| + L_g$ với $L_g > 0$ là hằng số Lipschitz của ánh xạ g .

Cho $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ là nghiệm của bài toán Cauchy (1.1)-(1.2). Tiếp theo, luận án trình bày khái niệm ổn định và ổn định tiệm cận của nghiệm tầm thường của (1.1).

Định nghĩa 1.5 ([50], Definition 7.2). Nghiệm tầm thường $\mathbf{x}^* \equiv \bar{0}$ của phương trình vi phân phân thứ (1.1) được gọi là

- *ổn định* nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi nghiệm $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ của bài toán Cauchy (1.1)–(1.2) thỏa mãn $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ sẽ kéo theo $\|\varphi(t, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ với mọi $t \geq 0$.
- *ổn định tiệm cận địa phương* nếu nghiệm này *ổn định* và *hút*, tức là, tồn tại hằng số $\gamma > 0$ sao cho với mọi nghiệm $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$ của bài toán Cauchy (1.1)–(1.2) thỏa mãn $\|\mathbf{x}_0\| < \gamma$ sẽ kéo theo $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{x}_0)\| = 0$.

Các khái niệm trên được minh họa trong Hình 1.1.



Hình 1.1: Minh họa cho các khái niệm ổn định [Hình 1.1 (a)] và ổn định tiệm cận [Hình 1.1 (b)]

Nhận xét 1.2. Nghiệm tầm thường $\mathbf{x}^* \equiv \bar{\mathbf{0}}$ của phương trình vi phân phân thứ (1.1) được gọi là *ổn định tiệm cận toàn cục* nếu nghiệm này là *ổn định* và *hút* với mọi điều kiện ban đầu $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

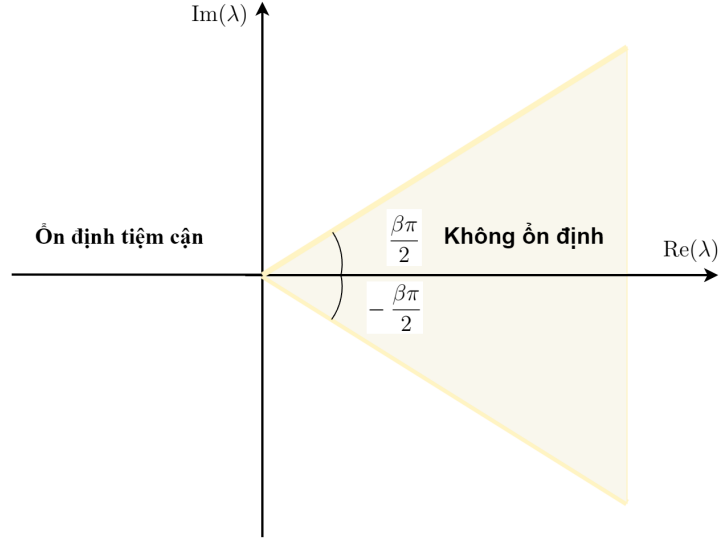
Tiếp theo, luận án trình bày các điều kiện cho sự ổn định của lớp phương trình vi phân tuyến tính phân thứ:

Định lý 1.2 ([50], Theorem 7.20). Cho $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ và xét hệ phương trình vi phân tuyến tính phân thứ ${}^C\mathcal{D}_t^\beta \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$. Khi đó, nghiệm tầm thường $\mathbf{x}^* \equiv \bar{\mathbf{0}}$ là

- *ổn định tiệm cận* nếu và chỉ nếu $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\beta\pi}{2}$ đúng với mọi giá trị riêng λ_i của ma trận A .

- ổn định nếu và chỉ nếu $|\arg(\lambda_i)| \geq \frac{\beta\pi}{2}$ đúng với mọi giá trị riêng λ_i của ma trận A và các giá trị riêng tới hạn, tức là chúng thỏa mãn điều kiện $|\arg(\lambda_i)| = \frac{\beta\pi}{2}$, có bội hình học bằng 1.

Hình 1.2 minh họa cho sự ổn định cho nghiệm tầm thường $\mathbf{x}^* \equiv \bar{\mathbf{0}}$ của hệ phương trình vi phân tuyến tính phân thứ ${}_0^C \mathcal{D}_t^\beta \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$:



Hình 1.2: Miền ổn định của phương trình vi phân phân thứ

Định nghĩa 1.6 ([52], Definition 6.1). Hàm liên tục $\gamma : [0, t) \rightarrow [0, \infty)$ được gọi là thuộc vào \mathcal{H} -lớp nếu hàm này tăng ngặt và thỏa mãn $\gamma(0) = 0$.

Tiếp theo, luận án trình bày một mở rộng của phương pháp hàm Lyapunov cho hệ động lực phân thứ không ô-tô-nôm (1.1):

Định lý 1.3 ([52], Theorem 6.2). Cho $\mathbf{x}^* \equiv \bar{\mathbf{0}}$ là một điểm cân bằng của phương trình vi phân phân thứ (1.1). Giả sử rằng tồn tại hàm Lyapunov $\mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t))$ và các hàm $\gamma_i(\cdot)$ thuộc vào \mathcal{H} -lớp ($i = 1, 2, 3$) sao cho

$$\begin{aligned} \gamma_1(\|\mathbf{x}(t)\|) &\leq \mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t)) \leq \gamma_2(\|\mathbf{x}(t)\|) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta \mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t)) &\leq -\gamma_3(\|\mathbf{x}(t)\|). \end{aligned}$$

Khi đó, điểm cân bằng $\mathbf{x}^* \equiv \bar{\mathbf{0}}$ của phương trình vi phân phân thứ (1.1) là ổn định tiệm cận toàn cục.

Bổ đề 1.1 ([50], Theorem 4.2). Với mọi $\beta_1, \beta_2 > 0$, ta có

$$\mathbb{E}_{\beta_1, \beta_2}(x) = x\mathbb{E}_{\beta_1, \beta_1 + \beta_2}(x) + \frac{1}{\Gamma(\beta_2)}.$$

Để khảo sát kết quả về tính ổn định tiệm cận toàn cục, luận án xét một đánh giá quan trọng liên quan đến đạo hàm phân thứ được tham khảo từ Lemma 3.1 trong [89]:

Bổ đề 1.2 ([89], Lemma 3.1). Cho $\mathbf{x} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục tuyệt đối trên $[0, \infty)$ and $\beta \in (0, 1]$. Khi đó, với mỗi $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^+$ và $t > 0$, bất đẳng thức sau thỏa mãn

$${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \left(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^* \ln \left(\frac{\mathbf{x}(t)}{\mathbf{x}^*} \right) \right) \leq \left(1 - \frac{\mathbf{x}^*}{\mathbf{x}(t)} \right) {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{x}(t).$$

Nhận xét 1.3. Cho $\Psi_{\mathbf{x}^*} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi

$$\Psi_{\mathbf{x}^*}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^* \ln \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*} \right).$$

Để thấy rằng $\Psi_{\mathbf{x}^*}(\mathbf{x})$ là một hàm số không âm và đạt cực tiểu toàn cục tại điểm $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$. Do đó, hàm Lyapunov cho bởi dạng

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^* \ln \left(\frac{\mathbf{x}(t)}{\mathbf{x}^*} \right)$$

được gọi là hàm Lyapunov kiểu Volterra.

Bổ đề 1.3 ([90], Theorem 1). Cho $\beta \in (0, 1]$ và giả sử rằng các hàm $\mathbf{x}(\cdot)$, ${}_a^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{x}(\cdot)$ thuộc lớp $C([a, b], \mathbb{R})$. Khi đó, ta có

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(a) + \frac{(t-a)^\beta}{\Gamma(\beta)} {}_a^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{x}(\xi)$$

trong đó $a \leq \xi \leq t$ và $t \in (a, b]$.

Bổ đề 1.4 ([53], Lemma 4). Cho $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ là hàm vectơ khả vi liên tục và $P \in \mathbf{S}_{++}^n$. Khi đó, với mỗi $\beta \in (0, 1]$ và $t \geq 0$, bất đẳng thức sau đây đúng

$$\frac{1}{2} {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta (\mathbf{x}^\top(t) P \mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{x}^\top(t) P {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{x}(t).$$

Dưới đây, luận án giới thiệu hai khái niệm về đạo hàm và tích phân phân thứ với nhân chính quy được đề xuất bởi Atangana và các cộng sự (xem [44, 45]):

Định nghĩa 1.7 ([44], Definition 2). Cho $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số thuộc lớp $C^1([0, b], \mathbb{R})$. Khi đó, đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ bậc $\beta \in (0, 1)$ của hàm $f(t)$ được cho bởi

$${}^{abc}D_+^\beta f(t) := \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \int_0^t \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{(t-\tau)^\beta}{1-\beta} \right] f'(\tau) d\tau,$$

trong đó $\Phi(\beta)$ là hàm chuẩn hóa thỏa mãn $\Phi(0) = \Phi(1) = 1$. Biến đổi Laplace của đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ ${}^{abc}D_+^\beta f(t)$ được xác định bởi

$$\mathcal{L} \left\{ {}^{abc}D_+^\beta f(t) \right\} (s) = \frac{\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left[s^\beta \mathcal{L} \{ f(t) \} (s) - s^{\beta-1} f(0) \right].$$

Định nghĩa 1.8 ([44], Definition 4). Cho $f : [0, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số thuộc lớp $L^1([0, b], \mathbb{R})$. Khi đó, tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ bậc $\beta \in (0, 1)$ của hàm $f(t)$ được cho bởi

$${}^{ab}I_+^\beta f(t) := \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} f(t) + \frac{\beta}{\Phi(\beta)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

1.2. Tập mờ và giải tích mờ

Trong mục này, luận án nhắc lại một số khái niệm cơ bản về tập mờ, suy luận mờ, giải tích mờ và giải tích phân thứ mờ được tham khảo từ [65, 91, 95–98].

Định nghĩa 1.9 ([97], trang 339). Một tập mờ A trên không gian nền X được định nghĩa bởi ánh xạ $A : X \rightarrow [0, 1]$, trong đó giá trị $A(x)$ biểu thị độ liên thuộc của một phần tử $x \in X$ đối với tập mờ A . Tập hợp tất cả các tập mờ của không gian nền X được ký hiệu bởi $\mathcal{F}(X)$.

Nhận xét 1.4. Tập mờ có thể xem là mở rộng của tập hợp cổ điển với hàm thuộc cho bởi hàm đặc trưng $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$.

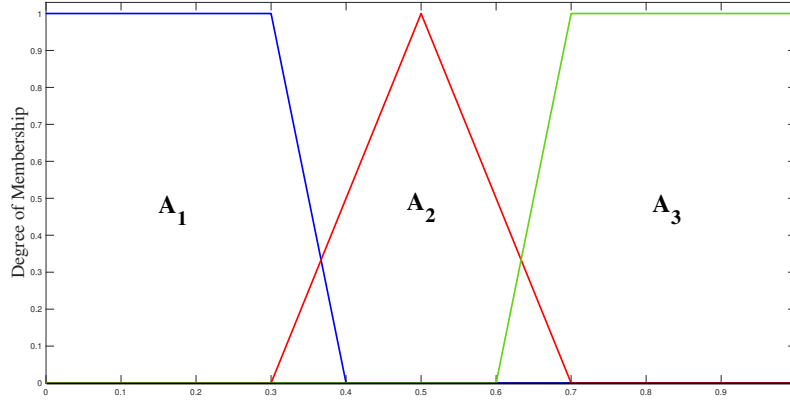
Định nghĩa 1.10 ([91], Definition 1.7). Cho $A : X \rightarrow [0, 1]$ là một tập mờ. Khi đó,

- (i) Tập mức của A là $[A]^\alpha = \{x \in X : A(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0, 1]$.
- (ii) Giá của A là $\text{supp } A = \{x \in X : A(x) > 0\}$.

Sau đây, luận án trình bày ứng dụng của tập mờ trong biểu diễn và mô hình hóa độ bất định của trong ngôn ngữ thực tế:

Ví dụ 1.1. Các tập mờ có thể được sử dụng để biểu diễn các nhận thức chủ quan dưới dạng toán học. Cho $X = [0, 1]$ đại diện cho tỷ lệ nút nhiễm mã độc trên một mạng. Các tập mờ A_1, A_2, A_3 có thể được sử dụng để mô hình hóa các mức độ về mật độ phần mềm độc hại: Thấp, Trung bình, Cao (xem Hình 1.3).

Định nghĩa 1.11 ([91], trang 6). Cho $A, B \in \mathcal{F}(X)$. Khi đó, ta có



Hình 1.3: Các tập mờ để mô tả mật độ phân mềm độc hại: “Thấp”, “Trung bình”, “Cao”

(i) Giao của hai tập A và B , ký hiệu bởi $A \wedge B$, là một tập mờ C sao cho

$$C(x) = \min \{A(x), B(x)\} = A(x) \wedge B(x) \quad \text{với mọi } x \in X.$$

(ii) Hợp của hai tập A và B , ký hiệu bởi $A \vee B$, là một tập mờ C sao cho

$$C(x) = \max \{A(x), B(x)\} = A(x) \vee B(x) \quad \text{với mọi } x \in X.$$

Định nghĩa 1.12 ([98], trang 199). Một biến ngôn ngữ là một bộ bốn (X, T, U, G, M) , ở đó X là tên biến, T là tập hợp các biểu thức ngôn ngữ có thể là giá trị của biến, U là không gian nền, G là tập hợp các luật cú pháp tạo ra các biểu thức có nghĩa trong T và M là tập hợp các luật ngữ nghĩa liên kết T vào các tập mờ trong U .

Ví dụ 1.2. Sau đây, luận án nhắc lại bài toán về mô hình hóa mật độ phân mềm độc hại trên mạng bởi tập mờ trong Ví dụ 1.1. Xét một biến ngôn ngữ (X, T, U, G, M) , trong đó

- $X = \text{Mật độ}$.
- $T = \{\text{rất thấp, thấp, khá thấp, ..., trung bình, ..., khá cao, cao, rất cao, ...}\}$.
- $U = [0, 1]$ là tập hợp diễn ngôn cho mật độ.
- G : Các quy tắc cú pháp có thể được diễn đạt như sau: Nếu biến ngôn ngữ “thấp” thuộc G thì “rất thấp”, “khá thấp” thuộc G .
- $M : T \rightarrow \mathcal{F}(X)$ sao cho $M(\text{thấp}) = (0, 0, 0.3, 0.4)$, $M(\text{trung bình}) = (0.3, 0.5, 0.7)$, $M(\text{cao}) = (0.6, 0.7, 1, 1)$.

Định nghĩa 1.13 ([91], trang 81). Một luật mờ là một bộ ba (A, B, R) bao gồm tiền đề $A \in \mathcal{F}(X)$, kết luận $B \in \mathcal{F}(X)$ là các biến ngôn ngữ, liên kết với nhau qua một quan hệ mờ $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$. Một luật mờ có thể viết dưới dạng mệnh đề như sau:

“Nếu x thuộc A thì y thuộc B .”

Ví dụ 1.3. Xét bài toán biểu thị mật độ phần mềm độc hại trên mạng cho trong Ví dụ 1.2. Khi đó luận án xét một luật mờ trong bài toán này như sau:

“Nếu mật độ mã độc CAO thì nút mạng thành nút LAN TRUYỀN MÃ ĐỘC.”

Nhận xét 1.5. Thông thường, một luật mờ đơn lẻ không thể thể hiện đầy đủ thông tin của bài toán cũng như không thể hỗ trợ đưa ra quyết định chính xác cho mọi tình huống. Do đó, chúng ta thường phải xét các bài toán với một cơ sở luật mờ, tức là một tập hợp các luật mờ. Ví dụ như

“Nếu mật độ mã độc THẤP thì nút mạng thành nút MANG MÃ ĐỘC LOẠI 1.”

“Nếu mật độ mã độc TRUNG BÌNH thì nút mạng thành nút MANG MÃ ĐỘC LOẠI 2.”

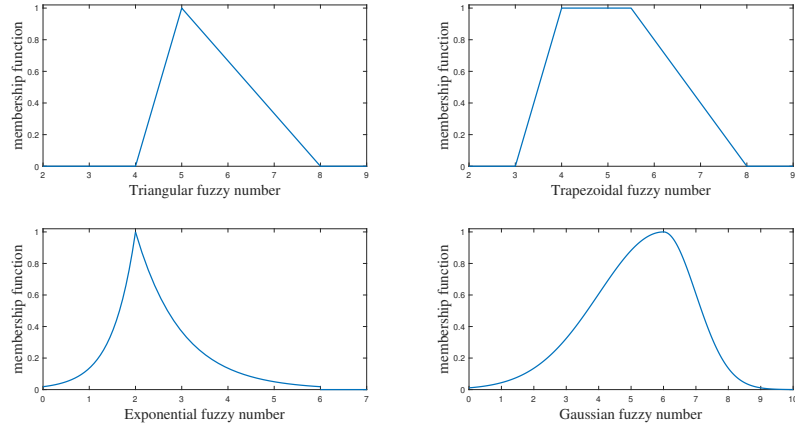
“Nếu mật độ mã độc CAO thì nút mạng thành nút LAN TRUYỀN MÃ ĐỘC.”

Tiếp theo, luận án sẽ trình bày một cách sơ lược về các kết quả đối với giải tích mờ làm động lực cho các nghiên cứu trình bày trong Chương 2:

Định nghĩa 1.14 ([91], Definition 4.1). Xét một tập mờ u trên đường thẳng thực bởi ánh xạ $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ cho bởi $x \mapsto u(x)$. Khi đó, tập mờ u được gọi là *số mờ* nếu các tính chất sau thỏa mãn:

- (i) u chuẩn tắc, tức là tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $u(x_0) = 1$,
- (ii) u lồi mờ, tức là $u(\mu x + (1 - \mu)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ và $\mu \in [0, 1]$,
- (iii) u nửa liên tục trên trên \mathbb{R} , tức là với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|x - x_0| < \delta$, ta có $u(x) - u(x_0) < \varepsilon$,
- (iv) Tập $\text{cl}(\text{supp } u) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) \neq 0\}}$ là tập compact.

Để trực quan hơn, Hình 1.4 giới thiệu biểu diễn hình học của một số mờ thông dụng:



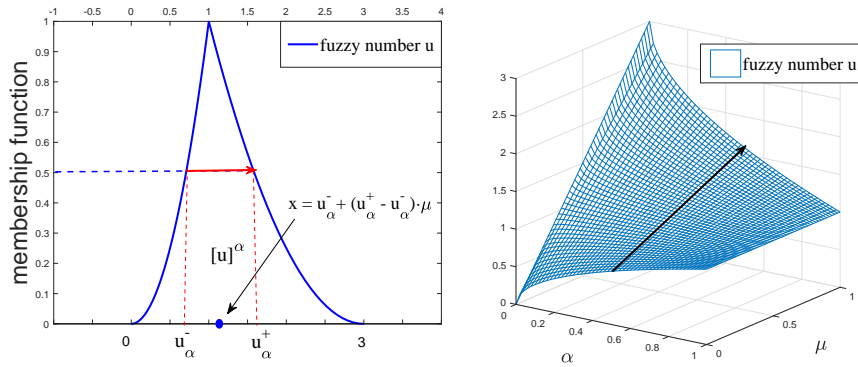
Hình 1.4: Một số loại số mờ thông dụng

Kí hiệu bởi \mathcal{E} tập tất cả các số mờ trên \mathbb{R} . Khi đó, với mỗi $u, v \in \mathcal{E}$, luận án tổng hợp từ các tài liệu [91, 95, 96] một số kết quả quan trọng đối với không gian số mờ \mathcal{E} như sau:

(i) Tập mức hoặc α -cắt của số mờ u , ký hiệu bởi $[u]^\alpha$, được định nghĩa bởi

$$[u]^\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\} & \text{nếu } \alpha \in [0, 1] \\ \text{cl}(\text{supp } u) & \text{nếu } \alpha = 0, \end{cases}$$

và có thể viết lại dưới dạng tham số $[u]^\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$, $\alpha \in [0, 1]$ (xem Hình 1.5).



Hình 1.5: Minh họa cho khái niệm tập mức của số mờ u trong mặt phẳng và trong không gian

(ii) Với mỗi $\alpha \in [0, 1]$, độ dài α -cắt của số mờ u được ký hiệu bởi

$$\text{len}([u]^\alpha) = u_\alpha^+ - u_\alpha^-.$$

(iii) Hiệu Hukuhara suy rộng (hay ký hiệu đơn giản là gH-hiệu) của của số mờ u đối với

số mờ v , ký hiệu bởi $u \ominus_{gH} v$, là một phần tử $w \in \mathcal{E}$ sao cho

$$u \ominus_{gH} v = w \iff \begin{cases} \text{(i)} & u = v + w \\ \text{(ii)} & u = v \ominus (-1)w, \end{cases}$$

trong đó $+$ và \ominus tương ứng là tổng theo nghĩa Minkovski và hiệu Hukuhara.

(iv) Không gian metric \mathcal{E} là đầy đủ với metric

$$d_\infty(u, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \{ |u_\alpha^- - v_\alpha^-|, |u_\alpha^+ - v_\alpha^+| \}.$$

Thêm vào đó, chuẩn $\|\cdot\|_*$ trên không gian \mathcal{E} được cho bởi

$$\|u\|_* = d_\infty(u, \hat{0}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([u_\alpha^-, u_\alpha^+], [0, 0]),$$

trong đó $\hat{0} \in \mathcal{E}$ là số mờ không và $[\hat{0}]^\alpha = [0, 0]$ với mọi $\alpha \in [0, 1]$. Tuy nhiên, không gian metric (\mathcal{E}, d_∞) không phải không gian tuyến tính (xem [91]).

(v) Ký hiệu $\mathcal{E}^n := \underbrace{\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}}_n$. Khi đó, metric tổng quát trên \mathcal{E}^n xác định bởi ánh xạ $\mathbb{D}_n : \mathcal{E}^n \times \mathcal{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, trong đó

$$\mathbb{D}_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left(d_\infty(u_1, v_1) \quad d_\infty(u_2, v_2) \quad \cdots \quad d_\infty(u_n, v_n) \right)^\top,$$

với mọi vectơ $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{E}^n$ và ký hiệu \top biểu thị chuyển vị của vectơ.

Ví dụ 1.4. Xét một số mờ A dạng L–R cho bởi

$$A = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } 0 \leq x < 1 \\ \frac{(3-x)^2}{4} & \text{nếu } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0, 3], \end{cases}$$

mô tả cho nhận định “Các số gần 1”. Khi đó, α -cắt của số mờ A được cho bởi $[A]^\alpha = [\sqrt{\alpha}, 3 - 2\sqrt{\alpha}]$, $\alpha \in [0, 1]$. Thêm vào đó, chuẩn của A cho bởi

$$\|A\|_* = d_\infty(A, \hat{0}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \{ |\sqrt{\alpha}|, |3 - 2\sqrt{\alpha}| \} = 3.$$

Tiếp theo, luận án trình bày định lý đặc trưng Negoita-Ralescu, một kết quả quan trọng để xác định một số mờ u từ họ các tập mức $[u]^\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$:

Định lý 1.4 ([91], Theorem 4.8). *Xét một họ các tập hợp $\{M_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) Với mỗi $\alpha \in [0, 1]$, M_α là một đoạn đóng khác rỗng.

(ii) Nếu $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ thì $M_{\alpha_2} \subseteq M_{\alpha_1}$.

(iii) Với mọi dãy $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ hội tụ về $\alpha_0 \in (0, 1]$, ta có $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} = M_{\alpha_0}$.

(iv) Với mọi dãy $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ hội tụ về 0, ta có $cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}\right) = M_0$.

Khi đó, tồn tại duy nhất số mờ u sao cho $M_\alpha = [u]^\alpha$ với mọi $\alpha \in [0, 1]$.

Nhận xét 1.6. Trong luận án này, khi đề cập tới khái niệm hàm nhận giá trị mờ, chúng ta sẽ xét hàm nhận giá trị mờ f thuộc một trong hai dạng sau:

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E} \quad \text{hoặc} \quad f : \mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}.$$

Các khái niệm về giới hạn hàm mờ, tính liên tục, tính khả tích và tính gH-khả vi có thể tham khảo trong các tài liệu [65, 91, 95]. Dưới đây, luận án sẽ nhắc lại một số tính chất cốt yếu nhất liên quan đến giải tích của các hàm nhận giá trị mờ được sử dụng trong luận án này:

Định nghĩa 1.15 ([95], Definition 20). Hàm nhận giá trị mờ $f : (0, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ được gọi là khả vi Hukuhara suy rộng hay gH-khả vi trên khoảng $(0, b)$ nếu và chỉ nếu hàm này gH-khả vi tại mọi điểm $t_0 \in (0, b)$, tức là tồn tại $f'_{gH}(t_0) \in \mathcal{E}$ sao cho với mọi $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(t_0 + h) \ominus_{gH} f(t_0) = f'_{gH}(t_0)h + \varepsilon(h),$$

trong đó $\varepsilon_h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{E}$ thỏa mãn $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} d_\infty(\varepsilon_h(h), \hat{0}) = 0$. Khi đó, số mờ $f'_{gH}(t_0)$ được gọi là đạo hàm Hukuhara suy rộng hoặc gH-đạo hàm của hàm $f(t)$ tại điểm t_0 . Ký hiệu $C^1((0, b), \mathcal{E})$ là không gian các hàm mờ gH-khả vi liên tục trên khoảng $(0, b)$.

Mệnh đề 1.1 ([95], Definition 26). Giả sử rằng hàm nhận giá trị mờ $f \in C^1((0, b), \mathcal{E})$ và α -cắt của nó được viết dưới dạng tham số $[f(t)]^\alpha = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$ với mỗi $t \in (0, b)$ và $\alpha \in [0, 1]$. Khi đó

(i) Nếu hàm f là gH-khả vi loại 1 tại t_0 thì $[f'_{1-gH}(t_0)]^\alpha = [(f_\alpha^-)'(t_0), (f_\alpha^+)'(t_0)]$.

(ii) Nếu hàm f là gH-khả vi loại 2 tại t_0 thì $[f'_{2-gH}(t_0)]^\alpha = [(f_\alpha^+)'(t_0), (f_\alpha^-)'(t_0)]$.

Định nghĩa 1.16 ([65], Definition 2.4.1). Giả sử rằng α -cắt của hàm nhận giá trị mờ $f(t)$ có thể viết dưới dạng tham số $[f(t)]^\alpha = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$ với mỗi $t \in [0, b]$, $\alpha \in [0, 1]$ và $f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)$ là các hàm đo được, khả tích Lebesgue trên đoạn $[0, b]$. Khi đó, tích phân Lebesgue của hàm $f(t)$ được ký hiệu hình thức bởi $\int_0^b f(t)dt$ với α -cắt được cho bởi

$$\left[\int_0^b f(t)dt \right]^\alpha = \left[\int_0^b f_\alpha^-(t)dt, \int_0^b f_\alpha^+(t)dt \right] \text{ với mỗi } \alpha \in [0, 1].$$

Không gian các hàm nhận giá trị mờ khả tích Lebesgue trên đoạn $[0, b]$ được ký hiệu bởi $L^1([0, b], \mathcal{E})$. Các tính chất sâu sắc hơn về đạo hàm, tích phân của các hàm nhận giá trị mờ có thể tham khảo tại [65, 91].

Tiếp theo, luận án nhắc lại từ tài liệu [99] một trong các khái niệm quan trọng của giải tích phân thứ mờ, đó là tích phân Riemann–Liouville phân thứ của hàm nhận giá trị mờ. Khái niệm này là cơ sở cho nghiên cứu trình bày ở Chương 2.

Định nghĩa 1.17 ([99], Definition 3.1). Tích phân Riemann–Liouville phân thứ $\beta > 0$ của một hàm nhận giá trị mờ $f \in L^1([0, b], \mathcal{E})$ được cho bởi

$$\mathcal{I}_+^\beta f(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

Đặc biệt, giả sử rằng hàm nhận giá trị mờ $f(t)$ có α -cắt cho bởi $[f(t)]^\alpha = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$ với mỗi $t \in [0, b]$, $\alpha \in [0, 1]$ và $f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)$ là các hàm đo được, khả tích Lebesgue trên đoạn $[0, b]$. Khi đó, ta có

$$\left[\mathcal{I}_+^\beta f(t) \right]^\alpha = \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} f_\alpha^-(\tau) d\tau, \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} f_\alpha^+(\tau) d\tau \right].$$

Cuối cùng, luận án nhắc lại khái niệm về biến đổi Laplace cho hàm nhận giá trị mờ đề xuất bởi Allahviranloo và Ahmadi trong [100].

Định nghĩa 1.18 ([100], Definition 3.1). Cho $f : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{E}$ là hàm nhận giá trị mờ liên tục và thỏa mãn $f(t)e^{-st}$ khả tích trên nửa khoảng $[0, \infty)$. Khi đó, biến đổi Laplace mờ của hàm $f(t)$ được xác định bởi

$$\mathcal{F}(s) = \tilde{\mathcal{L}}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Thêm vào đó, α -cắt của biến đổi Laplace mờ $\tilde{\mathcal{L}}\{f(t)\}(s)$ được cho bởi $\left[\tilde{\mathcal{L}}\{f(t)\}(s) \right]^\alpha = [\mathcal{L}\{f_\alpha^-(t)\}(s), \mathcal{L}\{f_\alpha^+(t)\}(s)]$, trong đó $\alpha \in [0, 1]$ và các hàm $\mathcal{L}\{f_\alpha^-(t)\}(s), \mathcal{L}\{f_\alpha^+(t)\}(s)$ tương ứng là các biến đổi Laplace của các hàm thực $f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)$.

Nhận xét 1.7. Tổng quát, nếu $f : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{E}^m$ là hàm nhận giá trị vectơ mờ xác định bởi $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_m(t) \end{pmatrix}^\top$ thì biến đổi Laplace mờ của hàm vectơ $f(t)$ là vectơ của các biến đổi Laplace mờ của các hàm thành phần, tức là,

$$\tilde{\mathcal{L}}\{f(t)\}(s) = \left(\tilde{\mathcal{L}}\{f_1(t)\}(s) \quad \tilde{\mathcal{L}}\{f_2(t)\}(s) \quad \cdots \quad \tilde{\mathcal{L}}\{f_m(t)\}(s) \right)^\top.$$

1.3. Hệ mờ Takagi-Sugeno

Hệ mờ Takagi-Sugeno (TS) đề xuất bởi Takagi và Sugeno (tham khảo [101]) là một hệ xây dựng trên nền tảng các luật mờ dạng *IF-THEN*. Các hệ mờ Takagi-Sugeno đã được chứng minh là một biểu diễn xấp xỉ tốt cho nhiều quá trình trong vật lý, sinh thái và kỹ thuật với độ phi tuyến cao. Trong mục này, luận án sẽ trình bày một số vấn đề cơ bản về hệ mờ Takagi-Sugeno và hệ mờ Takagi-Sugeno cho các hệ động lực phi tuyến từ tài liệu [102]. Đầu tiên, một hệ mờ Takagi-Sugeno được xây dựng dựa trên tổ hợp có trọng của một họ các luật mờ, trong đó luật mờ thứ i được cho bởi

Luật thứ i : Nếu z_1 thuộc Z_1^i , z_2 thuộc Z_2^i , \dots và z_p thuộc Z_p^i thì $\mathbf{y} = F_i(\mathbf{z})$,

trong đó $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_p)$ là vectơ biến tiền đề và z_j , $j = \overline{1, p}$. Các biến z_j còn được gọi là các biến lập biểu (scheduling variables) vì giá trị của chúng xác định mức độ hoạt động của các luật mờ. Giả sử hệ mờ Takagi-Sugeno được dựng với m luật. Khi đó, các tập Z_j^i được gọi là các tập mờ tiền đề với $i = 1, 2, \dots, m$ và $j = 1, 2, \dots, p$. Giá trị của biến lập biểu z_j thuộc vào tập mờ Z_j^i với độ chắc chắn cho bởi hàm thuộc $\omega_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Độ đúng dẫn cho một luật cho trước được xác định dựa vào các biến tiền đề độc lập nhờ việc sử dụng hàm minimum $\varphi_i(\mathbf{z}) = \min_j \omega_{ij}(z_j)$ hoặc hàm tích $\varphi_i(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^p \omega_{ij}(z_j)$. Trong các hệ mờ Takagi-Sugeno, chúng ta thường xét hàm đánh giá độ đúng dẫn của luật thứ i ở dạng chuẩn tắc

$$w_i(\mathbf{z}) = \frac{\varphi_i(\mathbf{z})}{\sum_{k=1}^m \varphi_k(\mathbf{z})},$$

với giả sử rằng luôn có ít nhất một trong các luật có giá trị đúng dẫn lớn hơn không, tức là $\sum_{k=1}^m \varphi_k(\mathbf{z}) > 0$. Do đầu ra của luật thứ i được xác định qua hàm vectơ hệ quả F_i và phụ thuộc vào các biến lập biểu z_j nên đầu ra \mathbf{y} của hệ mờ TS được xác định dưới dạng tổ hợp có trọng của đầu ra các luật thành phần

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{z}) F_i(\mathbf{z}).$$

Ví dụ 1.5. Đặt A_1 , A_2 và A_3 lần lượt ký hiệu cho các tập mờ đặc tả cho các trạng thái “Lớn”, “Trung bình” và “Nhỏ”. Xét hệ mờ Takagi-Sugeno với hệ luật mờ sau:

Luật 1: Nếu z_1 thuộc A_1 và z_2 thuộc A_3 thì $\mathbf{y} = F_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Luật 2: Nếu z_1 thuộc A_2 và z_2 thuộc A_1 thì $\mathbf{y} = F_2(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$

Cho các giá trị đầu vào $x_1^0 = 3$ và $x_2^0 = 2$. Giả sử rằng $\omega_{A_1}(3) = 0.8$, $\omega_{A_3}(2) = 0.2$, $\omega_{A_2}(3) = 0.6$, $\omega_{A_1}(2) = 0.9$. Khi đó, độ đúng dẫn của các luật cho bởi

$$w_1 = 0.8 \wedge 0.2 = 0.2 \quad w_2 = 0.6 \wedge 0.9 = 0.6.$$

Giá trị đầu ra của các luật được cho bởi

$$\begin{aligned} F_1(x_1^0, x_2^0) &= x_1^0 + x_2^0 = 5, \\ F_2(x_1^0, x_2^0) &= 2x_1^0 - x_2^0 = 4. \end{aligned}$$

Do đó, đầu ra của hệ mờ Takagi-Sugeno cho bởi

$$\mathbf{y} = \frac{0.2 \times 5 + 0.6 \times 4}{0.2 + 0.6} = 4.25.$$

Tiếp theo, luận án nhắc lại về hệ mờ Takagi-Sugeno cho các hệ động lực phi tuyến. Cụ thể, xét hệ động lực phi tuyến dưới đây:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \theta(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \zeta(t)), \end{cases} \quad (1.3)$$

trong đó \mathbf{f} là hàm trạng thái đặc trưng cho sự thay đổi của các trạng thái theo thời gian, \mathbf{h} là một hàm đo, \mathbf{x} là vectơ trạng thái, \mathbf{u} là vectơ đầu vào hoặc biến điều khiển, θ , ζ là các tham số và \mathbf{y} ký hiệu cho vectơ đo. Khi đó, hệ mờ Takagi-Sugeno biểu diễn hệ động lực phân thứ (1.3) được cho bởi hệ m luật mờ, trong đó

Luật thứ i : Nếu z_1 thuộc Z_1^i , z_2 thuộc Z_2^i , ... và z_p thuộc Z_p^i thì

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) &= \widehat{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \theta(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \widehat{\mathbf{h}}_i(\mathbf{x}(t), \zeta(t)), \end{cases} \quad (1.4)$$

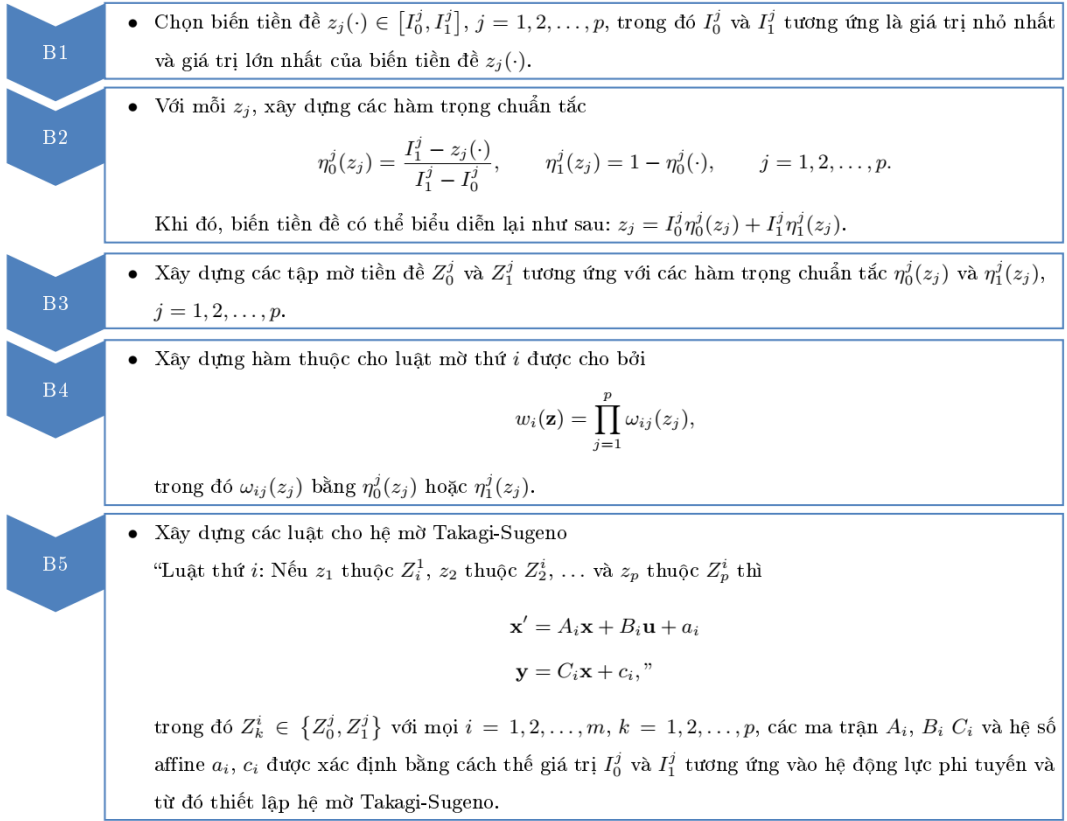
trong đó z_j , $j = 1, 2, \dots, p$, là các biến lập biểu và được chọn là hàm của biến trạng thái, biến đầu vào hoặc biến đầu ra. Các hàm $\widehat{\mathbf{f}}_i$, $\widehat{\mathbf{h}}_i$ là các hàm hệ quả của luật mờ thứ i và thường được chọn bằng cách xấp xỉ hệ động lực phi tuyến (1.3) ở dạng tuyến tính hoặc affine. Thêm vào đó, do các hàm thuộc $\omega_{ij}(z_j)$ được chọn sao cho $\omega_{ij}(z_j) \in [0, 1]$ và với mỗi giá trị cho phép của \mathbf{z} , ít nhất một trong m luật mờ được kích hoạt. Do đó, hệ động

lực phi tuyến (1.3) có thể biểu diễn lại như sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}'(t) = \frac{\sum_{i=1}^m \varphi_i(\mathbf{z}) \widehat{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \theta(t))}{\sum_{i=1}^m \varphi_i(\mathbf{z})} \\ \quad = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{z}) \widehat{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \theta(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \frac{\sum_{i=1}^m \varphi_i(\mathbf{z}) \widehat{\mathbf{h}}_i(\mathbf{x}(t), \zeta(t))}{\sum_{i=1}^m \varphi_i(\mathbf{z})} \\ \quad = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{z}) \widehat{\mathbf{h}}_i(\mathbf{x}(t), \zeta(t)). \end{array} \right.$$

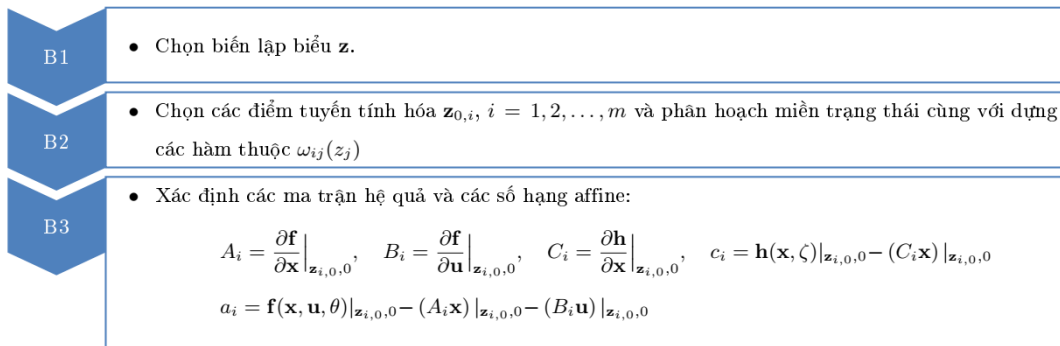
Nhận xét 1.8. Chú ý rằng trong mỗi luật mờ, các hàm phi tuyến \mathbf{f} , \mathbf{h} được xấp xỉ bởi các hàm hệ quả đơn giản hơn $\widehat{\mathbf{f}}$, $\widehat{\mathbf{h}}$ thường là hàm tuyến tính hoặc hàm affine. Tuy nhiên, các hàm hệ quả này chỉ có tính chính xác trong miền mà hàm thuộc chuẩn tắc $\omega_{ij}(\mathbf{z})$ dương, tức là chúng có tính chất địa phương. Do đó, các hệ dạng (1.4) còn được gọi là các mô hình địa phương.

Tiếp theo, luận án giới thiệu sơ lược về hai phương pháp giải tích: phương pháp phi tuyến đoạn (xem Hình 1.6) và phương pháp tuyến tính hóa (xem Hình 1.7) để xấp xỉ các hệ động lực phi tuyến dạng (1.3) thành hệ mờ Takagi-Sugeno (tham khảo [102]).



Hình 1.6: Lược đồ của phương pháp phi tuyến đoạn

Nhận xét 1.9. Một điểm hạn chế của phương pháp phi tuyến đoạn là số lượng các mô hình địa phương trong hệ mờ Takagi-Sugeno là hàm số mũ theo số thành phần phi tuyến của hệ động lực ban đầu. Trong thực tế, nếu số lượng các mô hình địa phương lớn sẽ dẫn đến những khó khăn trong các bài toán thiết kế quan sát, điều khiển do chi phí tính toán hoặc hạn chế của thuật toán.



Hình 1.7: Lược đồ của phương pháp tuyến tính hóa

Nhận xét 1.10. Phương pháp tuyến tính hóa cho hệ động lực phi tuyến (1.3) về bản chất chính là phép khai triển Taylor cho hàm vectơ phi tuyến $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \theta(t))$ và $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \zeta(t))$ tại các điểm đại diện khác nhau, trong đó các điểm đại diện này có thể là điểm cân bằng của hệ hoặc một điểm tùy ý nào đó. Trong phương pháp tuyến tính hóa, số lượng các điểm đại diện càng nhiều thì độ chính xác của phép xấp xỉ càng tăng lên. Tuy nhiên, việc tăng số lượng điểm đại diện cũng sẽ tăng độ phức tạp cho tính toán và các bài toán điều khiển, quan sát kéo theo.

1.4. Hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết

Trong mục này, luận án xét một hệ động lực phi tuyến liên tục dựa trên mạng bao gồm N hệ con phi tuyến liên kết với quan sát:

$$\begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta \mathbf{x}_i(t) &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{u}_i(t)) + \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) \\ \mathbf{y}_i(t) &= \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_i(t)), \end{cases}$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, trong đó \mathbf{H} , $\bar{\mathbf{H}}$ và \mathbf{H}_{ij} là các hàm phi tuyến trơn. Giả sử rằng bằng cách áp dụng phương pháp tuyến tính hóa (*linearization method*) hoặc phương pháp phi tuyến đoạn (*sector nonlinearity method*), luận án thu được một hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết \mathbf{E} bao gồm N hệ con liên kết \mathbf{E}_i , và mỗi hệ con \mathbf{E}_i được biểu diễn bởi hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ sau:

Luật mờ \mathbf{E}_i^p : Nếu $z_{i1}(t)$ thuộc F_{i1}^p , $z_{i2}(t)$ thuộc F_{i2}^p và ... và $z_{iq}(t)$ thuộc F_{iq}^p thì

$$\begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta \mathbf{x}_i(t) &= \mathbf{A}_i^p \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i^p \mathbf{u}_i(t) + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^p \mathbf{x}_j(t) \\ \mathbf{y}_i(t) &= \mathbf{D}_i^p \mathbf{x}_i(t), \end{cases}$$

với mọi $p = 1, 2, \dots, r_i$, trong đó \mathbf{E}_i^p ký hiệu cho luật mờ thứ p của hệ con liên kết \mathbf{E}_i và các số hạng khác được giải thích như sau:

- \mathbf{A}_i^p , \mathbf{B}_i^p và \mathbf{D}_i^p là các ma trận hằng với số chiều phù hợp.
- Các vectơ $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ và $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ tương ứng là biến trạng thái và biến điều khiển của hệ con \mathbf{E}_i .
- Vectơ $\mathbf{z}_i(t) = (z_{i1}(t) \ z_{i2}(t) \ \dots \ z_{iq}(t))^T$ là biến tiền đề cho hệ con \mathbf{E}_i .
- Chỉ số r_i là số luật mờ cho hệ con \mathbf{E}_i .

- Với mỗi $j = 1, 2, \dots, q$, F_{ij}^p là tập mờ tiền đề cho luật thứ p và $F_{ij}^p(z_{ij}(t))$ biểu thị mức độ liên thuộc của biến $z_{ij}(t)$ trong F_{ij}^p .
- Ma trận α_{ij}^p là ma trận liên kết giữa hệ con \mathbf{E}_i và hệ con \mathbf{E}_j trong luật mờ thứ p .

Khi đó, bằng cách áp dụng phương pháp suy luận mờ, hệ con \mathbf{E}_i trở thành

$$\begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta \mathbf{x}_i(t) &= \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) \left\{ A_i^p \mathbf{x}_i(t) + B_i^p \mathbf{u}_i(t) + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^p \mathbf{x}_j(t) \right\} \\ \mathbf{y}_i(t) &= \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) D_i^p \mathbf{x}_i(t), \end{cases} \quad (1.5)$$

trong đó

$$w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) = \frac{\varphi_i^p(\mathbf{z}_i(t))}{\sum_{p=1}^{r_i} \varphi_i^p(\mathbf{z}_i(t))}, \quad \varphi_i^p(\mathbf{z}_i(t)) = \prod_{j=1}^q F_{ij}^p(z_{ij}(t)). \quad (1.6)$$

Chú ý rằng hàm số $\varphi_i^p(\mathbf{z}_i(t)) \geq 0$ với mỗi $p = 1, 2, \dots, r_i$ và $i = 1, 2, \dots, N$. Hơn nữa, hàm $w_i^p(\mathbf{z}_i(t))$ thỏa mãn $\sum_{p=1}^{r_i} w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) = 1$ có thể xem như hàm trọng chuẩn tắc của các luật mờ IF-THEN với mọi $i = 1, 2, \dots, N$.

1.5. Mạng quy mô tự do

Vì vai trò của các nút trong các hệ thống mạng thực tế là không đồng nhất nên dễ thấy rằng tốc độ lan truyền các đối tượng độc hại qua tương tác giữa các nút mạng cũng không đồng nhất. Nhiều nghiên cứu trong hơn hai thập kỷ trở lại đây tập trung vào việc nghiên cứu cơ chế, đặc điểm phát tán các phần mềm độc hại trong các mạng phức hợp có tính đến các yếu tố bậc của nút và không đồng nhất trong kết nối. Để có những nghiên cứu chi tiết hơn, người ta tiến hành phân loại các loại mạng phức hợp không đồng nhất dựa trên các đặc trưng về cấu trúc mạng và số các liên kết của một nút. Một trong những mô hình mạng phức hợp không đồng nhất thường gặp là mạng quy mô tự do Barabási-Albert [92]. Bằng cách nhúng cấu trúc mạng phức hợp này vào các nghiên cứu về mô hình lan truyền đối tượng độc hại, nhiều kết quả quan trọng [8, 15, 29, 30, 33, 59, 103] đã đạt được trong hai thập kỷ qua. Thật vậy, người ta tổng kết được rằng nhiều hệ thống mạng trong thực tế như mạng Internet, World Wide Web, mạng thông tin, mạng cảm biến hoặc các mạng xã hội đều có hai thuộc tính sau:

- Các mạng quy mô tự do có mức tăng trưởng mạng xác định, trong đó tốc độ tăng trưởng mạng cho biết các nút mới tham gia mạng với tốc độ xác định.

- Các mạng được thiết lập theo quy tắc kết nối ưu tiên. Thuộc tính này có nghĩa là một nút có độ kết nối cao luôn có xu hướng thu hút nhiều kết nối mới hơn.

Trong phần này, luận án giới thiệu một mô hình mạng quy mô tự do chính tắc có tên là mạng quy mô tự do Barabási-Albert (*Barabási-Albert scale-free network*). Đây là lớp mạng phức hợp phổ biến nhất có tính đến yếu tố tăng trưởng mạng và ưu tiên kết nối của mạng. Sau đây, luận án giới thiệu sơ lược về hoạt động của mô hình mạng quy mô tự do Barabási-Albert:

Khởi tạo: Tại thời điểm ban đầu, mạng có tập cô lập gồm N_0 nút và giả sử rằng các kết nối giữa các nút được thiết lập tùy ý miễn là mỗi nút kết nối với ít nhất một nút khác.

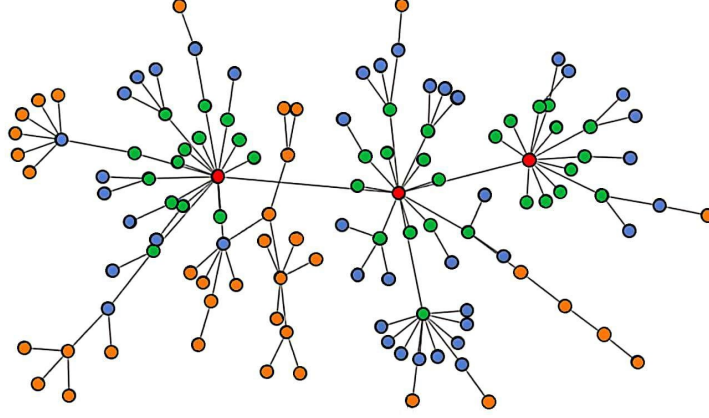
Tăng trưởng mạng: Tại mỗi bước thời gian, một nút mới bậc m được thêm vào mạng. Khi đó, sau t bước thời gian, mô hình đang xét sẽ sinh ra một mạng gồm $N = t + N_0$ nút và $N_0 + mt$ kết nối.

Gán ưu tiên: Xác suất để một nút mới kết nối với một nút cũ bậc i tỷ lệ với bậc p_i của nút i và được tính bởi công thức sau:

$$\mathbb{P}(i) = \frac{p_i}{\sum_j p_j}.$$

Thêm vào đó, chú ý rằng xác suất một nút có k kết nối cho bởi $\mathbb{P}(k) = ck^{-\gamma}$, trong đó số mũ $\gamma = 3$ và c là hằng số sao cho $\sum_k ck^{-\gamma} = 1$. Tiếp theo, luận án đưa ra một mô tả cho mạng quy mô tự do Barabási-Albert có kích thước mạng mong muốn là 100 (xem Hình 1.8). Ở đây, luận án giả sử rằng số nút ban đầu là $N_0 = 5$ và một nút mới gia nhập mạng được liên kết ngẫu nhiên với hai nút khác trong mạng, tức là $m = 2$.

Trong một mạng cảm biến không dây, chúng ta biết rằng các nút cảm biến thường không được sạc hoặc tự nạp năng lượng và do đó, năng lượng dư của các nút cảm biến là một vấn đề khá quan trọng và cần được xem xét cẩn thận trong quá trình gán ưu tiên. Thực tế là khi một nút mới tham gia vào mạng, nút này có xu hướng sẽ kết nối với các nút có bậc cao hơn. Hơn nữa, các nút mới cũng sẽ có xu hướng kết nối với những nút có năng lượng dư lớn hơn. Do đó, yếu tố về năng lượng dư của nút cảm biến cũng là một vấn đề cần tính đến trong xây dựng cấu trúc topo của mạng. Trong phần sau, luận án trình bày tổng quan về các đặc trưng của mạng quy mô tự do Barabási-Albert so sánh với mạng quy mô tự do Barabási-Albert giới hạn năng lượng (*Energy-Aware Barabási-Albert scale-free network*) (xem Bảng 1.1).



Hình 1.8: Mạng quy mô tự do Barabási-Albert với $N_0 = 5$ và $m = 2$

Bảng 1.1: So sánh mạng quy mô tự do Barabási-Albert và mạng quy mô tự do Barabási-Albert giới hạn năng lượng

	Mạng Barabási-Albert	Mạng Barabási-Albert giới hạn năng lượng
Khởi tạo	Mạng có tập cơ lập gồm N_0 nút và giả sử rằng các kết nối giữa các nút cảm biến được thiết lập tùy ý miễn là mỗi nút kết nối với ít nhất một nút khác	Mạng có tập cơ lập gồm N_0 nút và giả sử rằng các kết nối giữa các nút cảm biến được thiết lập tùy ý miễn là mỗi nút kết nối với ít nhất một nút khác.
Tăng trưởng mạng	Tại mỗi bước thời gian, chúng ta thêm một nút mới với m liên kết để kết nối một nút mới với m nút sẵn có của mạng. Sau t bước thời gian, mô hình mạng quy mô tự do Barabási-Albert sinh ra một mạng với $N = t + N_0$ nút và $N_0 + mt$ kết nối	Tại mỗi bước thời gian, chúng ta thêm một nút mới với m liên kết để kết nối một nút mới với m nút sẵn có của mạng. Sau t bước thời gian, mô hình mạng quy mô tự do Barabási-Albert giới hạn năng lượng sinh ra một mạng với $N = t + N_0$ nút và $N_0 + mt$ kết nối
Gán ưu tiên	Xác suất để một nút mới kết nối với một nút cũ bậc i tỷ lệ với bậc p_i của nút bậc i và cho bởi $\mathbb{P}(i) = \frac{p_i}{\sum_j p_j}$. Thêm vào đó, xác suất để một nút có k cạnh tuân theo phân phối lũy thừa $\mathbb{P}(k)$.	Một nút mới kết nối với m nút cũ để tạo thành các cạnh mới với xác suất $\mathbb{P}(i)$ tỷ lệ thuận với cả bậc và năng lượng còn lại của nút thứ i : $\mathbb{P}(i) = \frac{\lambda_d p_i}{\sum_j p_j} + \frac{\lambda_e E_i}{\sum_j E_j}$, trong đó $\lambda_d + \lambda_e = 1$, $\lambda_d, \lambda_e \in [0, 1]$ là các tham số hiệu chỉnh được, p_i và E_i lần lượt là độ và năng lượng dư của nút thứ i .

Nhận xét 1.11. Trong biểu thức cho biết xác suất để một nút mới kết nối với một nút

cũ bậc i , chúng ta thấy rằng có hai tham số hiệu chỉnh được là λ_d và λ_e , lần lượt đại diện cho độ kết nối và năng lượng còn lại của nút thứ i . Giá trị của chúng đóng một vai trò quan trọng trong cấu trúc của mạng. Nếu $\lambda_d > \lambda_e$ thì độ kết nối giữa các nút chi phối cấu trúc mạng, ngược lại, năng lượng dư sẽ chi phối cấu trúc mạng. Đặc biệt, nếu $\lambda_d = 1$ và $\lambda_e = 0$ thì mô hình mạng quy mô tự do Barabási-Albert giới hạn năng lượng trở thành mô hình mạng Barabási-Albert quen thuộc. Ngược lại, trong trường hợp $\lambda_d = 0$ và $\lambda_e = 1$, chỉ còn lại năng lượng quyết định cấu trúc mạng và tất cả các nút cảm biến đều ở trạng thái tiêu thụ năng lượng cân bằng, điều này làm cho tuổi thọ của mạng cảm biến được cải thiện đáng kể.

Nhận xét 1.12. Trong mô hình mạng quy mô tự do Barabási-Albert giới hạn năng lượng, cấu trúc liên kết của mạng bị chi phối không chỉ bởi xác suất liên p_i mà còn cả năng lượng dư của nút cảm biến. Ở đây, năng lượng dư của nút cảm biến thứ i được xác định bởi

$$E_i = E_0 - p_i \Delta E,$$

trong đó E là năng lượng ban đầu của nút và ΔE là năng lượng tiêu hao khi thiết lập một kết nối cho mỗi nút. Do đó, tổng năng lượng dư của các nút tại một bước thời gian t có thể viết lại như sau:

$$\sum_i E_i = \sum_i (E_0 - p_i \Delta E) = (N_0 + t)E_0 - 2mt\Delta E,$$

trong đó $N_0 + t$ là số nút cảm biến tại bước thời gian t và $2mt$ là tổng bậc.

Chương 2

MÔ HÌNH LAN TRUYỀN MÃ ĐỘC SIQR PHÂN THỨ VỚI DỮ LIỆU MỜ

Chương này tập trung mô tả dáng điệu của quá trình lan truyền mã độc trên mạng cảm biến không dây dựa trên mô hình hóa toán học. Khác với các mô hình lan truyền mã độc nghiên cứu trước đó bởi Hassouna và cộng sự [104], Mishra và Keshri [5, 6], mô hình lan truyền mã độc đề xuất trong chương này xem xét đến yếu tố không chắc chắn trong dữ liệu đầu vào và do đó, nó được xem xét dưới dạng một hệ phương trình vi phân giá trị mờ. Một số nghiên cứu nổi bật về ứng dụng lý thuyết tập mờ vào các mô hình lan truyền mã độc có thể kể đến như Massad và cộng sự [66], Mondal và cộng sự [73], Nandi và cộng sự [74]. Tuy nhiên, chưa có nhiều nghiên cứu trình bày chi tiết về giải tích của các mô hình lan truyền mã độc mô tả bởi hệ động lực mờ cũng như mô hình lan truyền mã độc phân thứ mờ. Với mục tiêu này, luận án xây dựng mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ với dữ liệu mờ. Tiếp đó, luận án đề xuất khái niệm đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu phân thứ và tích phân Riemann-Liouville Atangana-Baleanu phân thứ cho hàm nhận giá trị mờ với một số tính chất định tính quan trọng để khảo sát dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ với dữ liệu mờ. Tiếp đó, biến đổi Laplace mờ cho đạo hàm phân thứ đề xuất được giới thiệu để xác định công thức nghiệm tích phân của bài toán Cauchy cho phương trình vi phân phân thứ mờ dưới tính gH-khả vi. Khi đó, sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm tích phân được chứng minh bằng nguyên lý ánh xạ co suy rộng. Cuối cùng, một số biểu diễn hình học được đưa ra để mô tả dáng điệu không chắc chắn của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ. Nội dung chương này được dựa trên kết quả của công bố [P1] trong Danh mục công bố của nghiên cứu sinh.

2.1. Thiết lập mô hình

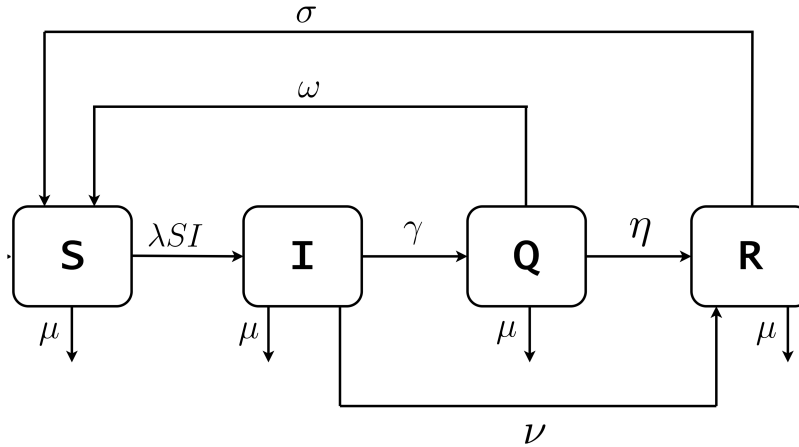
Trong mục này, luận án nghiên cứu sử dụng mô hình hệ phương trình vi phân phân thứ mờ gồm 4 ẩn hàm (S-I-Q-R) tương ứng với 4 ngăn của mô hình lan truyền mã độc để đặc tả sự lan truyền của phần mềm độc hại trên mạng cảm biến không dây với các yếu tố không chắc chắn. Đầu tiên, các ngăn trong mô hình lan truyền mã độc SIQR được mô tả như sau:

(S) Ngăn (S) bao gồm các nút cảm biến chưa bị nhiễm bất kỳ loại mã độc nào. Tuy nhiên, các nút trong ngăn này rất nhạy cảm với các loại mã độc và là đối tượng tấn

công của các loại mã độc. Do đó, chúng được gọi là các *nút mẫn cảm*.

- (I) Các nút trong ngăn (I) đã nhiễm các loại mã độc và hơn nữa, chúng có thể lan truyền mã độc sang các nút thuộc ngăn (S). Do đó, các nút thuộc ngăn này được gọi là *nút lan truyền mã độc*.
- (Q) Ngăn (Q) bao gồm các nút cảm biến lan truyền mã độc được cách ly khỏi mạng và chúng được gọi là các *nút cách ly*.
- (R) Các nút cảm biến trong ngăn (R) đã được loại sạch mã độc và được cài phần mềm diệt mã độc. Các nút thuộc ngăn này được gọi là *nút hồi phục*. Tuy nhiên, do hiệu quả của các phần mềm diệt mã độc chỉ có tính tạm thời nên các nút này có thể trở lại trạng thái mẫn cảm.

Ký hiệu $S(t)$, $I(t)$, $Q(t)$ và $R(t)$ lần lượt bởi mật độ các nút mẫn cảm, lan truyền mã độc, cách ly và hồi phục theo thời gian. Khi đó, mô hình lan truyền mã độc SIQR được mô tả bởi sơ đồ sau (xem Hình 3.2).



Hình 2.1: Lược đồ của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ

Để bảo vệ mạng cảm biến trước sự tấn công của mã độc, chúng ta cần nắm rõ các đặc điểm về dịch tễ của sự lan truyền. Trong chương này, luận án tiếp cận nghiên cứu cơ chế lan truyền phần mềm độc hại dựa trên mô hình hóa toán học. Đây được coi là một công cụ hiệu quả để không chỉ mô tả những đặc điểm của quá trình lan truyền mã độc trên các hệ thống mạng mà còn dự báo được chiều hướng của sự lan truyền. Một số mô hình phương trình vi phân thường mô tả sự lan truyền mã độc có đề xuất sử dụng ngăn cách ly đã được đưa ra gần đây bởi Mishra và Keshri [5] với mô hình lan truyền sâu máy tính SIQR hay mô hình lan truyền sâu máy tính SIQR với yếu tố tái nhiễm được giới thiệu bởi Khanh [19]. Trong mục này, luận án sẽ mở rộng các mô hình này với việc sử dụng đạo hàm phân thứ để mô tả tính không địa phương của môi trường truyền dẫn như trong

môi trường đầm lầy hay trong các dòng chảy phi Newton và sử dụng thiết lập dưới dạng mô hình phương trình vi phân giá trị mờ để mô tả tính không chắc chắn trong dữ liệu và tham số. Luận án giả sử rằng mọi nút cảm biến ở các ngăn **(S)**, **(I)**, **(Q)** hoặc **(R)** rời khỏi mạng với tốc độ μ do cạn năng lượng. Khi đó, cơ chế tương tác giữa các ngăn trong mô hình lan truyền mã độc SIQR được mô tả như sau:

Ngăn (S): Mật độ các nút miễn cảm giảm với tốc độ tương ứng là $\lambda I(t)$ và μ do các nút miễn cảm bị nhiễm mã độc chuyển sang và các nút hết năng lượng rời khỏi mạng. Bên cạnh đó, ngăn **(S)** cũng sẽ có sự tăng về số lượng do nhận nút từ các trạng thái hồi phục và cách ly với tốc độ lần lượt là σ và ω . Ngoài ra, để mô tả tính nhớ và tính chất không địa phương của sự lan truyền mã độc cùng quá trình truyền thông tin trong mạng, luận án đề xuất sử dụng khái niệm đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu phân thứ để biểu thị tốc độ thay đổi trạng thái của quá trình lan truyền giữa các ngăn. Thêm vào đó, với kỳ vọng mô hình hóa tốt hơn quá trình lan truyền trong thế giới thực luôn chứa đựng các yếu tố bất định, luận án cũng lựa chọn cách tiếp cận xây dựng mô hình lan truyền mã độc bởi các hệ động lực phân thứ mờ. Tóm lại, sự lan truyền mã độc trên ngăn **(S)** có thể mô tả bởi phương trình vi phân phân thứ mờ dưới đây:

$${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta S(t) = \omega Q(t) + \sigma R(t) - \mu S(t) - \lambda S(t)I(t).$$

Lập luận tương tự, chúng ta có thể thiết lập các phương trình vi phân phân thứ để mô tả tốc độ thay đổi trạng thái trong các ngăn **(I)**, **(Q)** và **(R)** như sau:

Ngăn (I): Từ thực tế là các loại mã độc lan truyền tới các nút cảm biến ở ngăn **(S)** và chuyển chúng sang trạng thái lan truyền mã độc với tốc độ $\lambda I(t)$. Các nút lan truyền mã độc trong mô hình đề xuất sẽ biến đổi như sau:

- (i) Nút lan truyền mã độc cạn năng lượng và rời mạng với tốc độ μ .
- (ii) Dưới hoạt động của các phần mềm phát hiện mã độc, các nút lan truyền mã độc bị cách ly khỏi mạng với tốc độ γ .
- (iii) Nhờ tác dụng của các phần mềm diệt mã độc, mỗi nút lan truyền mã độc hồi phục với tốc độ ν .

Do đó, phương trình mô tả sự lan truyền trên ngăn **(I)** được cho như sau:

$${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta I(t) = \lambda S(t)I(t) - (\nu + \gamma + \mu)I(t).$$

Ngăn (Q): Chú ý rằng một nút lan truyền mã độc có thể được cô lập để trở thành nút cách ly với xác suất γ . Sau đó, các nút cảm biến ở trạng thái **(Q)** có thể được chuyển sang một trong các trạng thái sau:

- (i) Mỗi nút cách ly có thể rời mạng với tốc độ μ do cạn năng lượng hoặc được giải phóng về trạng thái hồi phục với tốc độ η .
- (ii) Nút cách ly có thể được giải phóng về trạng thái miễn cảm với tốc độ ω nhờ cài đặt lại hệ thống.

Do đó, phương trình mô tả sự lan truyền trên ngăn **(Q)** được cho như sau:

$${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta Q(t) = \gamma I(t) - (\eta + \mu + \omega)Q(t).$$

Ngăn (R): Sự thay đổi trạng thái trong ngăn hồi phục **(R)** được mô tả như sau:

- (i) Mỗi nút hồi phục nhưng cạn năng lượng rời mạng với tốc độ μ và mỗi nút cách ly được đưa về về trạng thái hồi phục với tốc độ η .
- (ii) Nhờ sử dụng chương trình chống mã độc, mỗi nút lan truyền mã độc được phục hồi với tốc độ ν . Sau đó, các nút này hoạt động trở lại trong mạng và trở thành các nút miễn cảm với tốc độ σ .

Do đó, phương trình mô tả sự lan truyền trên ngăn **(R)** được cho như sau:

$${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta R(t) = \nu I(t) + \eta Q(t) - (\sigma + \mu)R(t).$$

Cuối cùng, dáng điệu động lực không chắc chắn của sự lan truyền mã độc trên mạng cảm biến được mô tả bởi hệ phương trình vi phân phân thứ dưới đây:

$$\begin{cases} {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta S(t) &= \omega Q(t) + \sigma R(t) - \mu S(t) - \lambda S(t)I(t) \\ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta I(t) &= \lambda S(t)I(t) - (\nu + \gamma + \mu)I(t) \\ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta Q(t) &= \gamma I(t) - (\eta + \mu + \omega)Q(t) \\ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta R(t) &= \nu I(t) + \eta Q(t) - (\sigma + \mu)R(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

với điều kiện ban đầu

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad Q(0) = Q_0, \quad R(0) = R_0, \quad (2.2)$$

trong đó các tham số của mô hình này được giải thích trong Bảng 2.1.

Bảng 2.1: Các tham số của mô hình lan truyền mã độc SIQR

Tham số	Ý nghĩa
ν	Tốc độ điều trị
σ	Tốc độ trở thành nút miễn cảm của nút hồi phục
λ	Tốc độ bị nhiễm mã độc của nút miễn cảm
μ	Tốc độ nút rời mạng vì hết năng lượng
η	Tốc độ một nút cách ly trở thành nút hồi phục
ω	Tốc độ trở thành nút miễn cảm của nút cách ly
γ	Tốc độ để nút lan truyền mã độc thành nút cách ly

Thêm vào đó, giả sử rằng tốc độ tham gia mạng của nút mới và tốc độ nút rời mạng vì hết năng lượng là bằng nhau để đảm bảo sự cân bằng của mạng. Ngoài ra, do số lượng nút của mạng là hữu hạn nên chúng ta giả sử rằng $N(t) = S(t) + I(t) + Q(t) + R(t) \leq 1$ với mọi $t \geq 0$. Các trạng thái cân bằng là một trong những chủ đề nhận được nhiều sự quan tâm khi nghiên cứu các mô hình lan truyền mã độc trên mạng. Bằng một số tính toán, chúng ta nhận được mô hình lan truyền mã độc SIQR có hai trạng thái cân bằng là trạng thái cân bằng không có mã độc $\mathbf{P}_0 = (1, 0, 0, 0)$ và trạng thái cân bằng đặc hữu $\mathbf{P}_* = (S_*, I_*, Q_*, R_*)$.

Chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 là một giá trị được sử dụng để mô tả khả năng gây nhiễm mã độc cho các nút mạng của các loại mã độc như virus, sâu mạng hay phần mềm gián điệp. Trong mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 được cho bởi $\mathfrak{R}_0 = \frac{\lambda}{\nu + \gamma + \mu}$. Trong lý thuyết các mô hình dịch tễ cổ điển, đáng điều kiện cận của mô hình sẽ phụ thuộc chặt chẽ vào giá trị \mathfrak{R}_0 . Tuy nhiên, đối với các mô hình lan truyền mã độc với tham số mờ, do hạn chế của các công cụ giải tích trong đánh giá đáng điều kiện cận của mô hình nên các nghiên cứu này vẫn là vấn đề mở.

2.2. Đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu phân thứ và tích phân Riemann-Liouville Atangana-Baleanu phân thứ cho hàm nhận giá trị mờ

Trong mục này, luận án đề xuất khái niệm đạo hàm và tích phân phân thứ với nhân không suy biến cho các hàm nhận giá trị mờ. Tiếp đó, một số tính chất đặc trưng liên quan đến các khái niệm này như biến đổi Laplace, công thức kiểu Newton-Leibniz cũng được thảo luận.

Định nghĩa 2.1. Giả sử rằng hàm $f(t)$ thuộc lớp $C^1([0, b], \mathcal{E})$. Khi đó, đạo hàm Caputo

Atangana–Baleanu phân thứ $\beta \in (0, 1)$ của hàm giá trị mờ $f(t)$ được xác định bởi

$${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) := \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \int_0^t \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{(t-\tau)^\beta}{1-\beta} \right] f'_{gH}(\tau) d\tau.$$

Nhận xét 2.1. Theo các tính chất trong Proposition 8.23 của [91], chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) &= \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-\beta(t-\tau)^\beta}{1-\beta}\right)^k}{\Gamma(k\beta+1)} f'_{gH}(\tau) d\tau \\ &= \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-\beta}{1-\beta}\right)^k}{\Gamma(k\beta+1)} \int_0^t (t-\tau)^{k\beta} f'_{gH}(\tau) d\tau \\ &= \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\beta}{1-\beta}\right)^k \mathcal{I}_+^{k\beta+1} f'_{gH}(t). \end{aligned}$$

Mệnh đề 2.1. Giả sử rằng hàm $f \in C^1([0, b], \mathcal{E})$ và các α -cắt của nó được biểu diễn dưới dạng tham số $[f(t)]^\alpha = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$ với mỗi $t \in [0, b]$ và $\alpha \in [0, 1]$. Khi đó

(i) Nếu f là hàm gH -khả vi loại 1 thì $\left[{}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right]^\alpha = \left[{}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t), {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t) \right]$.

(ii) Nếu f là hàm gH -khả vi loại 2 thì $\left[{}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right]^\alpha = \left[{}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t), {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t) \right]$.

Để minh họa cho kết quả lý thuyết, luận án xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.1. Cho $A_1 = (0, 1, 2)$ là số mờ tam giác biểu diễn cho nhận định “Số gần 1”. Tiếp theo, xét hàm nhận giá trị mờ $f : [0, \pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ cho bởi $f(t) = (t, t + \sin t, t + 2 \sin t)$. Chú ý rằng hàm $f(t)$ có thể viết lại dưới dạng sau:

$$f(t) = A_1 \sin t + t.$$

Hơn nữa, $f(t)$ là hàm nhận giá trị mờ gH -khả vi theo cả loại 1 và loại 2 trên đoạn $[0, \pi]$.

Thật vậy, ta có

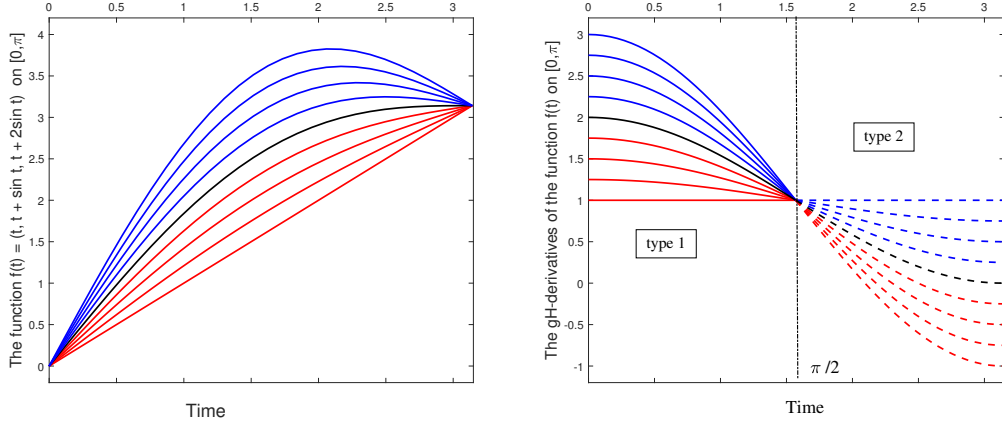
- (i) $f(t)$ là hàm gH -khả vi loại 1 trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ và gH -đạo hàm của nó cho bởi $f'_{1-gH}(t) = (1, \cos t + 1, 2 \cos t + 1)$ với tập mức

$$\left[f'_{1-gH}(t) \right]^\alpha = [1 + \alpha \cos t, 2 \cos t + 1 - \alpha \cos t].$$

- (ii) $f(t)$ là hàm gH -khả vi loại 2 trên đoạn $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ và gH -đạo hàm của nó cho bởi $f'_{2-gH}(t) = (2 \cos t + 1, \cos t + 1, 1)$ với tập mức

$$\left[f'_{2-gH}(t) \right]^\alpha = [2 \cos t + 1 - \alpha \cos t, 1 + \alpha \cos t].$$

Đồ thị của hàm $f(t)$ và các đạo hàm của nó được cho trong Hình 2.2.



Hình 2.2: Hàm nhận giá trị mờ $f(t)$ và các gH-đạo hàm trên đoạn $[0, \pi]$

Tiếp theo, luận án sẽ tính đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ của hàm nhận giá trị mờ $f(t)$ trên đoạn $[0, \pi]$. Với mục tiêu này, trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$, dựa trên tính toán (xem Bảng 9.1 trong [41]), ta có

$${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) = \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \int_0^t \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{(t-\tau)^\beta}{1-\beta} \right] f'_{gH}(\tau) d\tau = \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \int_0^t \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{(t-\tau)^\beta}{1-\beta} \right] f'_{1-gH}(\tau) d\tau$$

là hàm nhận giá trị số mờ tam giác $(a_1, b_1, c_1) := (a_1(t), b_1(t), c_1(t))$ với các thành phần cho bởi

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{t\Phi(\beta)}{1-\beta} \mathbb{E}_{\beta,2} \left[\frac{-\beta t^\beta}{1-\beta} \right], \\ b_1 &= \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \left(t \mathbb{E}_{\beta,2} \left[\frac{-\beta t^\beta}{1-\beta} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-\beta t^\beta}{1-\beta} \right)^k [{}_1F_1(1; k\beta+1; it) + {}_1F_1(1; k\beta+1; -it)]}{2\Gamma(k\beta+2)} \right), \\ c_1 &= \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \left(t \mathbb{E}_{\beta,2} \left[\frac{-\beta t^\beta}{1-\beta} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-\beta t^\beta}{1-\beta} \right)^k [{}_1F_1(1; k\beta+1; it) + {}_1F_1(1; k\beta+1; -it)]}{\Gamma(k\beta+2)} \right), \end{aligned}$$

trong đó i là số ảo và hàm Kummer siêu hình học suy biến (xem [50], trang 189) được xác định bởi

$${}_1F_1(a; b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)} \int_0^1 e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{b-a-1} ds.$$

Tiếp đó, với mỗi $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, ta có

$${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) = \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{(t-\tau)^\beta}{1-\beta} \right] f'_{1-gH}(\tau) d\tau + \int_{\frac{\pi}{2}}^t \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{(t-\tau)^\beta}{1-\beta} \right] f'_{2-gH}(\tau) d\tau \right).$$

Bằng lập luận và tính toán tương tự, ta cũng chứng minh được ${}^{abc}\mathcal{I}_+^\beta f(t)$ là một hàm nhận giá trị số mờ tam giác có dạng $(a_2, b_2, c_2) := (a_2(t), b_2(t), c_2(t))$, trong đó

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \left[\frac{\pi \mathbb{E}_{\beta,2} \left[\frac{-\beta\pi^\beta}{2^\beta(1-\beta)} \right]}{2} + \frac{(2t-\pi) \mathbb{E}_{\beta,2} \left[\frac{-\beta(2t-\pi)^\beta}{2^\beta(1-\beta)} \right]}{2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-\beta(2t-\pi)^\beta}{2^\beta(1-\beta)} \right)^k [{}_1F_1(1; k\beta+1; it) + {}_1F_1(1; k\beta+1; -it)]}{\Gamma(k\beta+2)} \right], \\
b_2 &= \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \left[\frac{\pi \mathbb{E}_{\beta,2} \left[\frac{-\beta\pi^\beta}{2^\beta(1-\beta)} \right]}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-\beta\pi^\beta}{2^\beta(1-\beta)} \right)^k [{}_1F_1(1; k\beta+1; it) + {}_1F_1(1; k\beta+1; -it)]}{2\Gamma(k\beta+2)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2t-\pi) \mathbb{E}_{\beta,2} \left[\frac{-\beta(2t-\pi)^\beta}{2^\beta(1-\beta)} \right]}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-\beta(2t-\pi)^\beta}{2^\beta(1-\beta)} \right)^k [{}_1F_1(1; k\beta+1; it) + {}_1F_1(1; k\beta+1; -it)]}{\Gamma(k\beta+2)} \right], \\
c_2 &= \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \left[\frac{\pi \mathbb{E}_{\beta,2} \left[\frac{-\beta\pi^\beta}{2^\beta(1-\beta)} \right]}{2} + \frac{(2t-\pi) \mathbb{E}_{\beta,2} \left[\frac{-\beta(2t-\pi)^\beta}{2^\beta(1-\beta)} \right]}{2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-\beta\pi^\beta}{2^\beta(1-\beta)} \right)^k [{}_1F_1(1; k\beta+1; it) + {}_1F_1(1; k\beta+1; -it)]}{\Gamma(k\beta+2)} \right].
\end{aligned}$$

Tiếp đó, luận án trình bày khái niệm tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ cho hàm nhận giá trị mờ $f : [0, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ liên kết với khái niệm đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ:

Định nghĩa 2.2. Cho $f : [0, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ là hàm nhận giá trị mờ. Khi đó, tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ với bậc $\beta \in (0, 1]$ của hàm $f(t)$ được định nghĩa như sau:

$${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta f(t) := \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} f(t) + \frac{\beta}{\Phi(\beta)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau = \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} f(t) + \frac{\beta}{\Phi(\beta)} \mathcal{I}_+^\beta f(t).$$

Thêm vào đó, với mỗi $\alpha \in [0, 1]$, α -cắt của tích phân phân thứ ${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta f(t)$ được cho bởi

$$\left[{}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta f(t) \right]^\alpha = \left[{}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta f_\alpha^-(t), {}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta f_\alpha^+(t) \right].$$

Nhận xét 2.2. Trong một số trường hợp đặc biệt của bậc phân thứ β , tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ đồng nhất với các khái niệm đã biết:

(i) Nếu $\beta = 0$ thì tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ trở thành

$${}^{ab}\mathcal{I}_+^0 f(t) = \frac{1-0}{\Phi(0)} f(t) + \frac{0}{\Phi(0)\Gamma(0)} \int_0^t (t-\tau)^{-1} f(\tau) d\tau = f(t).$$

(ii) Nếu $\beta = 1$ thì tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ trở thành

$${}^{ab}\mathcal{I}_+^1 f(t) = \frac{1-1}{\Phi(1)} f(t) + \frac{1}{\Phi(1)\Gamma(1)} \int_0^t (t-\tau)^{1-1} f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Ví dụ 2.2. Giả sử $f : [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ là hàm nhận giá trị mờ cho bởi

$$f(t) = (0, e^{\lambda t}, 2e^{\lambda t} + t^2),$$

trong đó λ và T là các hằng số dương. Khi đó, tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ bậc $\beta \in (0, 1]$ của hàm nhận giá trị mờ $f(t)$ cho bởi

$${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta f(t) = \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} f(t) + \frac{\beta}{\Phi(\beta)} \mathcal{I}_+^\beta f(t).$$

Đầu tiên, luận án xác định tích phân phân thứ $\mathcal{I}_+^\beta f(t) = (\mathcal{I}_+^\beta(0), \mathcal{I}_+^\beta(e^{\lambda t}), \mathcal{I}_+^\beta(2e^{\lambda t} + t^2))$, trong đó

$$\mathcal{I}_+^\beta(0) = \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} 0 d\tau = 0,$$

$$\mathcal{I}_+^\beta(e^{\lambda t}) = \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} e^{\lambda\tau} d\tau = t^\beta \mathbb{E}_{1, \beta+1}(\lambda t),$$

$$\mathcal{I}_+^\beta(2e^{\lambda t} + t^2) = \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} (2e^{\lambda\tau} + \tau^2) d\tau = 2t^\beta \mathbb{E}_{1, \beta+1}(\lambda t) + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\beta+3)} t^{\beta+3-1}.$$

Do đó,

$${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta f(t) = \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} (0, e^{\lambda t}, 2e^{\lambda t} + t^2) + \frac{\beta}{\Phi(\beta)} \left(0, t^\beta \mathbb{E}_{1, \beta+1}(\lambda t), 2t^\beta \mathbb{E}_{1, \beta+1}(\lambda t) + \frac{2}{\Gamma(\beta+3)} t^{\beta+2} \right).$$

Đặc biệt, nếu $\beta = 0$ thì ${}^{ab}\mathcal{I}_+^0 f(t) = \frac{1}{\Phi(0)} (0, e^{\lambda t}, 2e^{\lambda t} + t^2) = f(t)$ trong khi nếu $\beta = 1$ thì ta có

$$\begin{aligned} {}^{ab}\mathcal{I}_+^1 f(t) &= \frac{1}{\Phi(1)} \left(0, t\mathbb{E}_{1,2}(\lambda t), 2t\mathbb{E}_{1,2}(\lambda t) + \frac{2}{\Gamma(4)} t^3 \right) \\ &= \left(0, \frac{t(e^{\lambda t} - 1)}{\lambda t}, \frac{2t(e^{\lambda t} - 1)}{\lambda t} + \frac{1}{3} t^3 \right) \\ &= \left(0, \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda}, \frac{2(e^{\lambda t} - 1)}{\lambda} + \frac{1}{3} t^3 \right) \\ &= \int_0^t (0, e^{\lambda s}, 2e^{\lambda s} + s^2) ds. \end{aligned}$$

Các tính toán này minh họa cho mệnh đề (i) và (ii) trong Nhận xét 2.2.

Tiếp theo, luận án giới thiệu một công thức kiểu Newton–Leibniz cho đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu mờ phân thứ. Công thức này hỗ trợ trực tiếp cho việc xây dựng các kết quả quan trọng trong giải tích phân thứ và phương trình vi phân phân thứ với đạo hàm kiểu Atangana–Baleanu.

Định lý 2.1. Cho $\beta \in (0, 1)$ và $f : [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ là hàm nhận giá trị mờ gH-khả vi, không có điểm chuyển trên đoạn $[0, T]$. Khi đó, tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ và đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ của hàm nhận giá trị mờ $f(t)$ thỏa mãn công thức Newton–Leibniz:

$${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right) = f(t) \ominus_{gH} f(0), \quad t \in [0, T].$$

Chứng minh. Vì $f(t)$ là hàm gH-khả vi và không có điểm chuyển trên đoạn $[0, T]$, tức là kiểu gH-khả vi của hàm nhận giá trị mờ $f(t)$ là loại 1 hoặc loại 2 trên đoạn này.

Trường hợp 1: Nếu $f(t)$ là hàm nhận giá trị mờ gH-khả vi loại 1 thì với mỗi $t \in [0, T]$ và $\alpha \in [0, 1]$, ta có

$$\left[{}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right) \right]^\alpha = \left[{}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t) \right), {}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t) \right) \right].$$

Chú ý rằng theo định nghĩa của tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ cùng với công thức dạng chuỗi cho đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ, chúng ta suy ra

$$\begin{aligned} {}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t) \right) &= \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t) + \frac{\beta}{\Phi(\beta)} \mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\beta}{1-\beta} \right)^k \mathcal{I}_+^{k\beta+1} (f_\alpha^-)'(t) + \frac{\beta}{1-\beta} \mathcal{I}_+^\beta \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\beta}{1-\beta} \right)^k \mathcal{I}_+^{k\beta+1} (f_\alpha^-)'(t) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\beta}{1-\beta} \right)^k \mathcal{I}_+^{k\beta+1} (f_\alpha^-)'(t) - \left(\frac{-\beta}{1-\beta} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\beta}{1-\beta} \right)^k \mathcal{I}_+^{(k+1)\beta+1} (f_\alpha^-)'(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\beta}{1-\beta} \right)^k \mathcal{I}_+^{k\beta+1} (f_\alpha^-)'(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\beta}{1-\beta} \right)^{k+1} \mathcal{I}_+^{(k+1)\beta+1} (f_\alpha^-)'(t) \\ &= \mathcal{I}_+^1 (f_\alpha^-)'(t) = f_\alpha^-(t) - f_\alpha^-(0). \end{aligned}$$

Lập luận tương tự, chúng ta cũng nhận được ${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t) \right) = f_\alpha^+(t) - f_\alpha^+(0)$. Do đó, tập mức của biểu thức ${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right)$ cho bởi

$$\left[{}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right) \right]^\alpha = [f_\alpha^-(t) - f_\alpha^-(0), f_\alpha^+(t) - f_\alpha^+(0)] \quad \text{với mọi } \alpha \in [0, 1].$$

Theo định lý đặc trưng Negoita-Ralescu (xem Định lý 1.4), điều trên dẫn tới

$${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right) = f(t) \ominus f(0). \quad (2.3)$$

Trường hợp 2: Nếu $f(t)$ là hàm nhận giá trị mờ gH-khả vi loại 2 thì với mỗi $t \in [0, T]$ và $\alpha \in [0, 1]$, ta có

$$\left[{}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right) \right]^\alpha = \left[{}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t) \right), {}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t) \right) \right].$$

Bằng lập luận tương tự như Trường hợp 1, chúng ta cũng nhận được

$$\begin{aligned} {}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t) \right) &= f_\alpha^-(t) - f_\alpha^-(0) \\ {}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t) \right) &= f_\alpha^+(t) - f_\alpha^+(0). \end{aligned}$$

Điều trên kéo theo $\left[{}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right) \right]^\alpha = (-1) [f_\alpha^-(0) - f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(0) - f_\alpha^+(t)]$ với mọi $\alpha \in [0, 1]$. Do đó, theo định lý đặc trưng Negoita-Ralescu, chúng ta nhận được

$${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right) = (-1) (f(0) \ominus f(t)). \quad (2.4)$$

Kết hợp các đẳng thức (2.3) - (2.4) và theo định nghĩa của hiệu Hukuhara suy rộng, chúng ta nhận được ${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right) = f(t) \ominus_{gH} f(0)$. Định lý được chứng minh. \square

Cuối cùng, luận án trình bày công thức biến đổi Laplace mờ cho đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ nhằm xây dựng công thức nghiệm tích phân cho bài toán xét ở các mục sau.

Mệnh đề 2.2. Cho hàm nhận giá trị mờ $f : [0, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ thuộc lớp $C^1([0, b], \mathcal{E})$. Khi đó, biến đổi Laplace mờ cho đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ ${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t)$ của hàm nhận giá trị mờ $f(t)$ được cho bởi

$$\tilde{\mathcal{L}} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right\} (s) = \begin{cases} \frac{\Phi(\beta) s^\beta \tilde{\mathcal{L}}\{f(t)\}(s) \ominus s^{\beta-1} f(0)}{1 - \beta} & \text{nếu } f \text{ gH-khả vi loại 1} \\ \frac{(-1)\Phi(\beta) s^{\beta-1} f(0) \ominus s^\beta \tilde{\mathcal{L}}\{f(t)\}(s)}{1 - \beta} & \text{nếu } f \text{ gH-khả vi loại 2.} \end{cases}$$

Chứng minh. Với mỗi $\alpha \in [0, 1]$, α -cắt của hàm nhận giá trị mờ $\tilde{\mathcal{L}} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right\} (s)$ được cho dưới dạng thu gọn sau:

$$\left[\tilde{\mathcal{L}} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right\} (s) \right]^\alpha = \left[\mathcal{L} \left\{ \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f \right)_\alpha^-(t) \right\} (s), \mathcal{L} \left\{ \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f \right)_\alpha^+(t) \right\} (s) \right].$$

(i) Nếu $f(t)$ là hàm gH-khả vi loại 1 thì theo Định nghĩa 1.1 và Định nghĩa 2.1, ta có

$$\left[{}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right]^\alpha = \left[{}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t), {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t) \right].$$

Do đó, ta suy ra

$$\left[\tilde{\mathcal{L}} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right\} (s) \right]^\alpha = \left[\mathcal{L} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t) \right\} (s), \mathcal{L} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t) \right\} (s) \right].$$

Tiếp đó, áp dụng biến đổi Laplace cho đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ của hàm thực (xem công thức (10) trong [44]), chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t) \right\} (s) &= \frac{\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left(s^\beta \mathcal{L} \left\{ f_\alpha^-(t) \right\} (s) - s^{\beta-1} f_\alpha^-(0) \right), \\ \mathcal{L} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t) \right\} (s) &= \frac{\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left(s^\beta \mathcal{L} \left\{ f_\alpha^+(t) \right\} (s) - s^{\beta-1} f_\alpha^+(0) \right). \end{aligned}$$

Do đó, công thức dưới đây đúng với mọi $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &\left[\mathcal{L} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t) \right\} (s), \mathcal{L} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t) \right\} (s) \right] \\ &= \frac{\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left[s^\beta \mathcal{L} \left\{ f_\alpha^-(t) \right\} (s) - s^{\beta-1} f_\alpha^-(0), s^\beta \mathcal{L} \left\{ f_\alpha^+(t) \right\} (s) - s^{\beta-1} f_\alpha^+(0) \right]. \end{aligned}$$

Mặt khác, vì dạng tham số $[s^\beta \mathcal{L} \left\{ f_\alpha^-(t) \right\} (s) - s^{\beta-1} f_\alpha^-(0), s^\beta \mathcal{L} \left\{ f_\alpha^+(t) \right\} (s) - s^{\beta-1} f_\alpha^+(0)]$ đúng với mọi $\alpha \in [0, 1]$ nên chúng ta có thể viết

$$\left[s^\beta \mathcal{L} \left\{ f_\alpha^-(t) \right\} (s) - s^{\beta-1} f_\alpha^-(0), s^\beta \mathcal{L} \left\{ f_\alpha^+(t) \right\} (s) - s^{\beta-1} f_\alpha^+(0) \right] = \left[s^\beta \tilde{\mathcal{L}} \left\{ f(t) \right\} (s) \ominus s^{\beta-1} f(0) \right]^\alpha,$$

và do đó $\left[\tilde{\mathcal{L}} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right\} (s) \right]^\alpha = \frac{\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left[s^\beta \tilde{\mathcal{L}} \left\{ f(t) \right\} (s) \ominus s^{\beta-1} f(0) \right]^\alpha$ với mọi $\alpha \in [0, 1]$.

(ii) Sử dụng giả thiết về tính gH-khả vi loại 2 của hàm nhận giá trị mờ $f(t)$, ta có

$$\left[{}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right]^\alpha = \left[{}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t), {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t) \right].$$

Sử dụng biến đổi Laplace và lập luận tương tự Trường hợp (i), chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\mathcal{L}} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right\} (s) \right]^\alpha &= \left[\frac{\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left(s^\beta \mathcal{L} \left\{ f_\alpha^+(t) \right\} (s) - s^{\beta-1} f_\alpha^+(0) \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left(s^\beta \mathcal{L} \left\{ f_\alpha^-(t) \right\} (s) - s^{\beta-1} f_\alpha^-(0) \right) \right] \\ &= \left[\frac{(-1)\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left(s^{\beta-1} f_\alpha^-(0) - s^\beta \mathcal{L} \left\{ f_\alpha^-(t) \right\} (s) \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{(-1)\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left(s^{\beta-1} f_\alpha^+(0) - s^\beta \mathcal{L} \left\{ f_\alpha^+(t) \right\} (s) \right) \right], \end{aligned}$$

với mọi $\alpha \in [0, 1]$. Do đó, hiệu Hukuhara $\frac{(-1)\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left(s^{\beta-1} f(0) \ominus s^\beta \tilde{\mathcal{L}} \{f_\alpha^+(t)\} (s) \right)$ tồn tại và chúng ta có thể biểu diễn

$$\left[\frac{(-1)\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left(s^{\beta-1} f(0) \ominus s^\beta \tilde{\mathcal{L}} \{f_\alpha^+(t)\} (s) \right) \right]^\alpha = \left[\frac{(-1)\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left(s^{\beta-1} f_\alpha^-(0) - s^\beta \mathcal{L} \{f_\alpha^-(t)\} (s) \right), \frac{(-1)\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left(s^{\beta-1} f_\alpha^+(0) - s^\beta \mathcal{L} \{f_\alpha^+(t)\} (s) \right) \right],$$

tức là nếu $f(t)$ là hàm gH-khả vi loại 2 thì

$$\left[\tilde{\mathcal{L}} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right\} (s) \right]^\alpha = \left[\frac{(-1)\Phi(\beta)}{(1-\beta)s^\beta + \beta} \left(s^{\beta-1} f(0) \ominus s^\beta \tilde{\mathcal{L}} \{f_\alpha^+(t)\} (s) \right) \right]^\alpha,$$

với mọi $\alpha \in [0, 1]$. Định lý được chứng minh. \square

Mệnh đề 2.3. *Giả sử rằng $f : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{E}$ là hàm nhận giá trị mờ liên tục. Khi đó, với mỗi $t > 0$, ta có*

$$\tilde{\mathcal{L}} \left\{ \int_0^t \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{(t-\tau)^\beta}{1-\beta} \right] f(\tau) d\tau \right\} (s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + \frac{\beta}{1-\beta}} \tilde{\mathcal{L}} \{f(t)\} (s).$$

Chứng minh. Với mỗi $t > 0$, ký hiệu $g(t) = \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{t^\beta}{1-\beta} \right]$. Khi đó, tích chập của $f(t)$ và $g(t)$ được cho bởi

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{(t-\tau)^\beta}{1-\beta} \right] f(\tau) d\tau.$$

Bằng cách áp dụng phép biến đổi Laplace mờ của tích chập (xem Định lý 3.8, [105]), chúng ta trực tiếp thu được

$$\tilde{\mathcal{L}} \left\{ \int_0^t \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{(t-\tau)^\beta}{1-\beta} \right] f(\tau) d\tau \right\} (s) = \tilde{\mathcal{L}} \left\{ \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{t^\beta}{1-\beta} \right] \right\} (s) \tilde{\mathcal{L}} \{f(t)\} (s).$$

Theo tính toán trong ([106], trang 602), ta có $\tilde{\mathcal{L}} \left\{ \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{t^\beta}{1-\beta} \right] \right\} (s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + \frac{\beta}{1-\beta}}$. Vì vậy, định lý được chứng minh. \square

2.3. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm mờ cho bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân phân thứ dưới tính gH-khả vi

Trong mục này, luận án nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm tích phân mờ cho bài toán Cauchy dưới đây đối với phương trình vi phân phân thứ mờ dưới tính gH-khả vi và đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ:

$$\begin{cases} {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta x(t) & = F(t, x(t)) \\ x(0) & = x_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

trong đó ${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta x(t)$ là đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ của vectơ trạng thái $x(t)$, $t \in J = [0, T]$, điều kiện ban đầu $x_0 \in \mathcal{E}^n$ và $F : [0, T] \times \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ là hàm nhận giá trị vectơ mờ thỏa mãn các giả thiết sau :

(HF1) Hàm nhận giá trị vectơ mờ $F(\cdot, \xi) : [0, T] \rightarrow \mathcal{E}^n$ đo được mạnh với mỗi $\xi \in \mathcal{E}^n$ và $F(t, \cdot) : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ liên tục với hầu khắp $t \in [0, T]$;

(HF2) Tồn tại ma trận M_0 sao cho $\mathbb{D}_n(F(t, \xi), \hat{0}) \leq M_0 \mathbb{D}_n(\xi, \hat{0})$ với mọi $\xi \in \mathcal{E}^n$.

(HF3) Tồn tại ma trận M_1 sao cho $\mathbb{D}_n(F(t, \xi), F(t, \bar{\xi})) \leq M_1 \mathbb{D}_n(\xi, \bar{\xi})$ với mọi $\xi, \bar{\xi} \in \mathcal{E}^n$.

Xét không gian

$$C([0, T], \mathcal{E}^n) = \{\varphi : [0, T] \rightarrow \mathcal{E}^n : \varphi(t) \text{ là hàm liên tục trên đoạn } [0, T]\}$$

cùng metric tổng quát có trọng

$$\mathcal{H}_\lambda(\varphi, \psi) = \sup_{[0, T]} \{\mathbb{D}_n(\varphi(t), \psi(t))e^{-\lambda t}\},$$

trong đó $\lambda > 0$ là hằng số dương đủ lớn. Không gian metric $(C([0, T], \mathcal{E}^n), \mathcal{H}_\lambda)$ là một không gian metric đầy đủ. Trong mục này, luận án giả sử rằng tất cả các hàm thành phần của hàm giá trị vectơ mờ $x(t)$ có cùng kiểu gH-khả vi và không có điểm chuyển trên đoạn $J = [0, T]$. Định lý sau đây đóng vai trò quan trọng trong việc xác định nghiệm tích phân mờ của bài toán Cauchy (2.5).

Định lý 2.2. *Giả sử rằng $x \in C([0, T], \mathcal{E}^n)$ thỏa mãn bài toán Cauchy (2.5).*

(i) *Nếu $x(t)$ là hàm gH-khả vi gH loại 1 thì nó thỏa mãn phương trình tích phân sau*

$$x(t) = x_0 + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} F(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (2.6)$$

(ii) *Nếu $x(t)$ là hàm gH-khả vi gH loại 2 thì nó thỏa mãn phương trình tích phân sau*

$$x(t) = x_0 \ominus (-1) \left[\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} F(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau \right]. \quad (2.7)$$

Chứng minh. Với mỗi $t \in [0, T]$, bằng cách áp dụng biến đổi Laplace mờ cho cả hai vế của hệ phương trình vi phân phân thứ của bài toán (2.5), ta có

$$\tilde{\mathcal{L}} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta x(t) \right\} (s) = \tilde{\mathcal{L}} \{ F(t, x(t)) \} (s). \quad (2.8)$$

Áp dụng Mệnh đề 3.4, đẳng thức trên có thể được viết lại dưới hai dạng dưới đây tùy thuộc vào loại gH-khả vi của hàm nhận giá trị vectơ mờ $x(t)$.

Trường hợp 1: Nếu $x(t)$ là hàm gH-khả vi loại 1 trên đoạn $[0, T]$ thì đẳng thức (2.8) tương đương với

$$\frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \frac{s^\beta \tilde{\mathcal{L}}\{x(t)\}(s) \ominus s^{\beta-1}x(0)}{s^\beta + \frac{\beta}{1-\beta}} = \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s).$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} s^\beta \tilde{\mathcal{L}}\{x(t)\}(s) \ominus s^{\beta-1}x_0 &= \frac{(1-\beta)s^\beta + \beta}{\Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s) \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{L}}\{x(t)\}(s) &= \frac{1}{s}x_0 + \frac{(1-\beta)s^\beta + \beta}{s^\beta \Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s) \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{L}}\{x(t)\}(s) &= \frac{1}{s}x_0 + \frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s) + \frac{\beta}{s^\beta \Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s) \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{L}}\{x(t)\}(s) &= \frac{1}{s}x_0 + \frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s) + \frac{\beta}{\Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\left\{\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right\}(s) \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s). \end{aligned}$$

Sau đó, áp dụng định lý về biến đổi Laplace cho tích chập, chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}\{x(t)\}(s) &= \frac{1}{s}x_0 + \frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s) \\ &\quad + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\left\{\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau\right\}(s). \end{aligned}$$

Cuối cùng, bằng cách áp dụng biến đổi Laplace ngược, chúng ta nhận được

$$x(t) = x_0 + \frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)} F(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Trường hợp 2: Nếu $x(t)$ là hàm gH-khả vi loại 2 trên đoạn $[0, T]$ thì đẳng thức (2.8) trở thành

$$\frac{(-1)\Phi(\beta)}{1-\beta} \frac{s^{\beta-1}x(0) \ominus s^\beta \tilde{\mathcal{L}}\{x(t)\}(s)}{s^\beta + \frac{\beta}{1-\beta}} = \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s).$$

Đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} s^{\beta-1}x(0) \ominus s^\beta \tilde{\mathcal{L}}\{x(t)\}(s) &= \frac{(1-\beta)s^\beta + \beta}{\Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s) \\ \Leftrightarrow s^\beta \tilde{\mathcal{L}}\{x(t)\}(s) &= s^{\beta-1}x_0 \ominus \frac{(1-\beta)s^\beta + \beta}{\Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s) \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{L}}\{x(t)\}(s) &= \frac{1}{s}x_0 \ominus \frac{(1-\beta)s^\beta + \beta}{\Phi(\beta)s^\beta} \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s) \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{L}}\{x(t)\}(s) &= \frac{1}{s}x_0 \ominus \left[\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s) + \frac{\beta}{\Phi(\beta)s^\beta} \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s) \right]. \end{aligned}$$

Định lý về biến đổi Laplace cho tích chập dẫn tới

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{L}}\{x(t)\}(s) \\ &= \frac{1}{s}x_0 \ominus \left[\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\{F(t, x(t))\}(s) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \tilde{\mathcal{L}}\left\{ \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau \right\}(s) \right]. \end{aligned}$$

Cuối cùng, áp dụng biến đổi Laplace ngược, chúng ta nhận được

$$x(t) = x_0 \ominus (-1) \left[\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)} F(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau \right].$$

Định lý được chứng minh. \square

Nhận xét 2.3. Dựa trên khái niệm hiệu Hukuhara suy rộng, các phương trình tích phân (2.6) và (2.7) có thể viết gộp lại như sau:

$$x(t) \ominus_{gH} x_0 = \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} F(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Tiếp theo, luận án giới thiệu khái niệm nghiệm tích phân của bài toán Cauchy (2.5):

Định nghĩa 2.3. Cho $x : [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}^n$ là một hàm nhận giá trị vectơ mờ liên tục. Khi đó ta có

- (i) Hàm $x(t)$ được gọi là nghiệm tích phân loại (i) của bài toán Cauchy (2.5) nếu nó thỏa mãn phương trình tích phân (2.6).
- (ii) Hàm $x(t)$ được gọi là nghiệm tích phân loại (ii) của bài toán Cauchy (2.5) nếu nó thỏa mãn phương trình tích phân (2.7).

Sau đây, luận án sẽ chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân loại (i) của bài toán Cauchy (2.5):

Định lý 2.3. Nếu các giả thiết **(HF1)**, **(HF2)**, **(HF3)** thỏa mãn và bán kính phổ của các ma trận $\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)}M_0$ và $\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)}M_1$ đều nhỏ hơn 1 thì bài toán Cauchy (2.5) có duy nhất nghiệm tích phân loại (i) xác định trên đoạn $[0, T]$.

Chứng minh. Xét toán tử $\mathcal{P} : C([0, T], \mathcal{E}^n) \rightarrow C([0, T], \mathcal{E}^n)$ cho bởi

$$\mathcal{P}[x](t) = x_0 + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} F(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Đầu tiên, dễ thấy rằng \mathcal{P} là toán tử đi từ $C([0, T], \mathcal{E}^n)$ vào chính nó. Do đó, sự tồn tại duy nhất nghiệm tích phân loại (i) của bài toán (2.5) tương đương với sự tồn tại duy nhất điểm bất động của toán tử \mathcal{P} .

Do bán kính phổ của ma trận $\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)}M_0$ nhỏ hơn 1 nên ta suy ra ma trận $\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)}M_0$ hội tụ về ma trận không. Thêm vào đó, vì các phần tử của ma trận $\frac{G(\lambda, \beta)}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)}M_0$ không âm và có thể nhỏ tùy ý nhờ vào hiệu chỉnh tham số $\lambda > 0$ nên ma trận $\frac{(1-\beta)\Gamma(\beta)+G(\lambda, \beta)}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)}M_0$ cũng hội tụ tới ma trận không, trong đó $G(\lambda, \beta) = \frac{2}{\lambda^\beta} + \frac{1}{\lambda^{1+\frac{\beta}{2}}}$ (tham khảo tài liệu [107]). Định nghĩa và các tính chất của ma trận hội tụ về ma trận không tham khảo từ Chương 10 của [108].

Ký hiệu $r = \left[\mathbb{I}_n - \frac{(1-\beta)\Gamma(\beta)+G(\lambda, \beta)}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)}M_0 \right]^{-1} \mathbb{D}_n(x_0, \hat{\mathbf{0}})$ và đặt

$$\Omega_r = \{x \in C([0, T], \mathcal{E}^n) : \mathcal{H}_\lambda(x, \hat{\mathbf{0}}) \leq r\}.$$

Khi đó, chứng minh của định lý nào được chia thành các bước sau:

Bước 1. Toán tử \mathcal{P} là một lên, tức là $\mathcal{P}(\Omega_r) \subseteq \Omega_r$. Thật vậy, với mỗi $t \in [0, T]$ và $x \in \Omega_r$, ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_n(\mathcal{P}[x](t), \hat{\mathbf{0}}) &= \mathbb{D}_n\left(x_0 + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}F(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}F(\tau, x(\tau))d\tau, \hat{\mathbf{0}}\right) \\ &\leq \mathbb{D}_n(x_0, \hat{\mathbf{0}}) + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}\mathbb{D}_n(F(t, x(t)), \hat{\mathbf{0}}) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\mathbb{D}_n(F(\tau, x(\tau)), \hat{\mathbf{0}})d\tau \\ &\leq \mathbb{D}_n(x_0, \hat{\mathbf{0}}) + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0\mathbb{D}_n(x(t), \hat{\mathbf{0}}) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}M_0\mathbb{D}_n(x(\tau), \hat{\mathbf{0}})e^{-\lambda\tau}e^{\lambda\tau}d\tau \\ &\leq \mathbb{D}_n(x_0, \hat{\mathbf{0}}) + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0\mathcal{H}_\lambda(x, \hat{\mathbf{0}})e^{\lambda t} + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}e^{\lambda\tau}d\tau \right) M_0\mathcal{H}_\lambda(x, \hat{\mathbf{0}}) \\ &< \mathbb{D}_n(x_0, \hat{\mathbf{0}}) + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0\mathcal{H}_\lambda(x, \hat{\mathbf{0}})e^{\lambda t} + \frac{e^{\lambda t}}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \left(\frac{2}{\lambda^{\frac{\beta}{4}}} + \frac{1}{\lambda^{1+\frac{\beta}{2}}} \right) M_0\mathcal{H}_\lambda(x, \hat{\mathbf{0}}). \end{aligned}$$

Chú ý rằng đánh giá trên đã áp dụng ước lượng (xem Bổ đề 2.3, [109])

$$\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}e^{\lambda\tau}d\tau < \frac{e^{\lambda t}}{\beta}G(\lambda, \beta) = \frac{e^{\lambda t}}{\beta} \left(\frac{2}{\lambda^{\frac{\beta}{4}}} + \frac{1}{\lambda^{1+\frac{\beta}{2}}} \right).$$

Tiếp theo, chia hai vế cho $e^{\lambda t}$ và lấy supremum với $t \in [0, T]$, chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\lambda(\mathcal{P}[x], \hat{\mathbf{0}}) &< \mathbb{D}_n(x_0, \hat{\mathbf{0}}) + \left[\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} + \frac{G(\lambda, \beta)}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \right] M_0\mathcal{H}_\lambda(x, \hat{\mathbf{0}}) \\ &\leq \mathbb{D}_n(x_0, \hat{\mathbf{0}}) + \frac{(1-\beta)\Gamma(\beta) + G(\lambda, \beta)}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)}M_0r \leq r, \end{aligned}$$

nghĩa là toán tử \mathcal{P} đi từ Ω_r vào chính nó.

Hơn nữa, toán tử $\mathcal{P} : \Omega_r \rightarrow \Omega_r$ là một toán tử liên tục. Thật vậy, giả sử rằng $\{x_n\} \subset \Omega_r$ là một dãy sao cho $x_n \rightrightarrows x \in \Omega_r$. Chú ý rằng với mỗi $t \in [0, T]$, ta có

$$\mathcal{P}[x_n](t) = x_0 + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}F(t, x_n(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}F(\tau, x_n(\tau))d\tau.$$

Với mọi $0 \leq s \leq t \leq T$, giả thiết **(HF1)** dẫn tới

$$(t - \tau)^{\beta-1} F(\tau, x_n(\tau)) \rightarrow (t - \tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) \quad \text{khi } n \rightarrow \infty.$$

Tiếp đó, sử dụng giả thiết **(HF1)** và định lý hội tụ trội Lebesgue, chúng ta suy ra

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_n(\mathcal{P}[x_n](t), \mathcal{P}[x](t)) &\leq \frac{1 - \beta}{\Phi(\beta)} \mathbb{D}_n(F(t, x_n(t)), F(t, x(t))) \\ &\quad + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t - s)^{\beta-1} \mathbb{D}_n(F(\tau, x_n(\tau)), F(\tau, x(\tau))) d\tau \end{aligned}$$

tiến tới $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ khi $n \rightarrow \infty$, tức là toán tử \mathcal{P} liên tục trên Ω_r .

Bước 2. Để chứng minh \mathcal{P} là một toán tử co tổng quát (xem Định nghĩa 10.1, [108]), lấy $x, \bar{x} \in \Omega_r$ tùy ý và sau đó, luận án sẽ chỉ ra tồn tại một ma trận \mathcal{M} hội tụ về ma trận không sao cho

$$\mathcal{H}_\lambda(\mathcal{P}[x], \mathcal{P}[\bar{x}]) < \mathcal{M}\mathcal{H}_\lambda(x, \bar{x}).$$

Thật vậy, với mỗi $t \in [0, T]$, ta có

$$\begin{aligned} &\mathbb{D}_n(\mathcal{P}[x](t), \mathcal{P}[\bar{x}](t)) \\ &\leq \frac{1 - \beta}{\Phi(\beta)} \mathbb{D}_n(F(t, x(t)), F(t, \bar{x}(t))) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} \mathbb{D}_n(F(\tau, x(\tau)), F(\tau, \bar{x}(\tau))) d\tau \\ &\leq \frac{1 - \beta}{\Phi(\beta)} M_1 \mathbb{D}_n(x(t), \bar{x}(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} M_1 \mathbb{D}_n(x(\tau), \bar{x}(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1 - \beta}{\Phi(\beta)} M_1 \mathbb{D}_n(x(t), \bar{x}(t)) e^{-\lambda t} e^{\lambda t} + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} M_1 \mathbb{D}_n(x(\tau), \bar{x}(\tau)) e^{-\lambda \tau} e^{\lambda \tau} d\tau \\ &\leq \frac{1 - \beta}{\Phi(\beta)} M_1 \mathcal{H}_\lambda(x, \bar{x}) e^{\lambda t} + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \left(\int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} e^{\lambda \tau} d\tau \right) M_1 \mathcal{H}_\lambda(x, \bar{x}) \\ &< \frac{1 - \beta}{\Phi(\beta)} M_1 \mathcal{H}_\lambda(x, \bar{x}) e^{\lambda t} + \frac{e^{\lambda t} G(\lambda, \beta)}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} M_1 \mathcal{H}_\lambda(x, \bar{x}). \end{aligned}$$

Khi đó, bằng cách chia cả hai vế cho $e^{\lambda t}$ và lấy supremum với $t \in [0, T]$, ta có

$$\mathcal{H}_\lambda(\mathcal{P}[x], \mathcal{P}[\bar{x}]) < \frac{(1 - \beta)\Gamma(\beta) + G(\lambda, \beta)}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} M_1 \mathcal{H}_\lambda(x, \bar{x}).$$

Do giả thiết rằng bán kính phổ của ma trận $\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)} M_1$ nhỏ hơn 1 và các phần tử của ma trận $\frac{G(\lambda, \beta)}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} M_1$ có thể nhỏ tùy ý nên ta có

$$\frac{(1 - \beta)\Gamma(\beta) + G(\lambda, \beta)}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} M_1 = \frac{(1 - \beta)}{\Phi(\beta)} M_1 + \frac{G(\lambda, \beta)}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} M_1$$

hội tụ về ma trận không. Do đó, ta suy ra toán tử \mathcal{P} là toán tử co tổng quát. Cuối cùng, bằng cách áp dụng nguyên lý ánh xạ co theo nghĩa Perov (xem Định lý 10.1, [108]), chúng ta có thể kết luận rằng toán tử \mathcal{P} có một điểm bất động duy nhất $x^* \in \Omega_r$ và đó cũng là nghiệm tích phân loại (i) duy nhất của bài toán Cauchy (2.5). \square

Phần còn lại của mục này được dành để chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm tích phân loại (ii) của bài toán Cauchy (2.5). Với mỗi $x \in C([0, T], \mathcal{E}^n)$, chúng ta định nghĩa toán tử $\mathcal{F}[x]$ bởi

$$\mathcal{F}[x](t) = x_0 \ominus (-1) \left[\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)} F(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau \right]. \quad (2.9)$$

Đặt $\hat{C}([0, T], \mathcal{E}^n)$ là không gian các hàm $x \in C([0, T], \mathcal{E}^n)$ sao cho đẳng thức (2.9) thỏa mãn với mỗi $t \in [0, T]$.

Định lý 2.4. *Giả sử rằng*

(i) *Các giả thiết (HF1), (HF2) và (HF3) thỏa mãn.*

(ii) *Tập $\hat{C}([0, T], \mathcal{E}^n) \neq \emptyset$.*

(iii) *Bán kính phổ của ma trận $\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)} M_0$ và $\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)} M_1$ nhỏ hơn 1.*

Khi đó, bài toán Cauchy (2.5) có duy nhất nghiệm tích phân loại (ii) xác định trên $[0, T]$.

Chứng minh. Bằng lập luận tương tự như trong Định lý 2.3, sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm tích phân loại (ii) của bài toán (2.5) tương đương với tính giải được duy nhất của phương trình hàm $\mathcal{F}[x] = x$. Do đó, chứng minh của định lý này chuyển về chỉ ra rằng toán tử \mathcal{F} có một điểm bất động duy nhất $x^* \in \hat{C}([0, T], \mathcal{E}^n)$. Tương tự như Định lý 2.3, chúng ta chứng minh được toán tử \mathcal{F} là một toán tử co và do đó, nó có điểm bất động duy nhất $x^* \in \hat{C}([0, T], \mathcal{E}^n)$. Điểm bất động này là nghiệm tích phân loại (ii) duy nhất của bài toán (2.5). \square

Nhận xét 2.4. Trong mục này, luận án đã giả sử rằng tất cả hàm thành phần của vectơ nghiệm tích phân mờ $x(t)$ có cùng loại gH-khả vi và không có điểm chuyển trên $J = [0, T]$. Tổng quát, nếu các hàm thành phần của nghiệm tích phân mờ $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}^\top$ có loại gH-khả vi khác nhau trên J thì sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm trình bày trong Định lý 2.3 và Định lý 2.4 vẫn được đảm bảo. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử rằng các hàm nhận giá trị mờ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)$ là hàm gH-khả vi gH loại (i) và

các hàm nhận giá trị mờ $x_{p+1}(t), x_{p+2}(t), \dots, x_n(t)$ là gH-khả vi loại (ii). Sau đó, toán tử nghiệm $\mathcal{P}[x]$ là hàm giá trị vectơ $\mathcal{P}[x] = \left(\mathcal{P}_1[x] \ \dots \ \mathcal{P}_n[x] \right)^\top$ cho bởi

$$\mathcal{P}_i[x](t) = x_0^i + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} F_i(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F_i(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

nếu $i = 1, \dots, p$ và

$$\mathcal{P}_i[x](t) = x_0^i \ominus (-1) \left[\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)} F_i(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F_i(\tau, x(\tau)) d\tau \right]$$

nếu $i = p+1, \dots, n$. Vì các bất đẳng thức

$$d_\infty(u+v, w+e) \leq d_\infty(u, w) + d_\infty(v, e)$$

$$d_\infty(u \ominus v, w \ominus e) \leq d_\infty(u, w) + d_\infty(v, e)$$

đúng với mọi $u, v, w, e \in \mathcal{E}$ nên với mọi $i = \overline{1, n}$, chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} d_\infty(\mathcal{P}_i[x](t), \hat{0}) &\leq d_\infty(x_0^i, \hat{0}) + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} d_\infty(F_i(t, x(t)), \hat{0}) \\ &\quad + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} d_\infty(F_i(\tau, x(\tau)), \hat{0}) d\tau. \end{aligned}$$

Do đó, dễ thấy rằng các đánh giá trong chứng minh của Định lý 2.3 và Định lý 2.4 vẫn được đảm bảo. Tuy nhiên, trong trường hợp này, chúng ta không thể kết luận nghiệm thu được là nghiệm tích phân mờ loại (i) hay loại (ii).

2.4. Mô phỏng và thảo luận

Trong mục này, luận án tiến hành một số minh họa cho kết quả lý thuyết và biểu diễn dáng điệu động lực không chắc chắn theo thời gian của mô hình SIQR phân thứ và ảnh hưởng của đạo hàm phân thứ β đối với việc lan truyền phần mềm độc hại trên mạng dựa trên phần mềm MatLab. Đầu tiên, chúng ta nhắc lại mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ dưới dạng

$$\begin{cases} {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta S(t) &= \omega Q(t) + \sigma R(t) - \mu S(t) - \lambda S(t)I(t) \\ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta I(t) &= \lambda S(t)I(t) - (\nu + \gamma + \mu)I(t) \\ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta Q(t) &= \gamma I(t) - (\eta + \mu + \omega)Q(t) \\ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta R(t) &= \nu I(t) + \eta Q(t) - (\sigma + \mu)R(t), \end{cases} \quad (2.10)$$

với điều kiện ban đầu $S(0) = S_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0, R(0) = R_0$. Để thuận tiện trong biểu diễn, chúng ta ký hiệu

$$X(t) = \left(S(t) \ I(t) \ Q(t) \ R(t) \right)^\top, \quad X_0 = \left(S_0 \ I_0 \ Q_0 \ R_0 \right)^\top \in \mathcal{E}^4,$$

và các hàm vế phải của mô hình (2.10) ký hiệu bởi

$$G(t, X(t)) = \left(G_1(t, X(t)) \quad G_2(t, X(t)) \quad G_3(t, X(t)) \quad G_4(t, X(t)) \right)^\top.$$

Khi đó, chúng ta có thể kiểm tra được rằng các hàm $G_i(t, \cdot)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) liên tục với hầu khắp $t \in [0, T]$ và hàm $G_i(\cdot, X)$ đo được mạnh với mỗi $X \in \mathcal{E}^4$. Tiếp đó, chúng ta tính toán được các ma trận M_0 và M_1 như sau:

$$M_0 = \begin{pmatrix} \mu + \lambda & 0 & \omega & \sigma \\ \lambda & \nu + \gamma + \mu & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \eta + \mu + \omega & 0 \\ 0 & \nu & \eta & \sigma + \mu \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} \mu + \lambda & \lambda & \omega & \sigma \\ \lambda & \nu + \gamma + \mu + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \eta + \mu + \omega & 0 \\ 0 & \nu & \eta & \sigma + \mu \end{pmatrix}.$$

Chọn $\Phi(\beta) = 1 - \beta + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)}$. Tiếp theo, chúng ta sẽ tiến hành đánh giá mô hình với một số trường hợp của bộ tham số và bậc phân thứ $\beta \in \{0.5, 0.7, 0.95\}$.

(a) Xét mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ (2.1) với các tham số

$$\begin{aligned} \eta = 0.008 & & \mu = 0.02 & & \lambda = 0.2 & & \nu = 0.15 \\ \omega = 0.008 & & \sigma = 0.01 & & \gamma = 0.2 & & \end{aligned}$$

và điều kiện ban đầu không chắc chắn $S_0 = (0.63, 0.64, 0.65)$, $I_0 = (0.23, 0.24, 0.25)$, $Q_0 = (0.09, 0.095, 0.1)$ và $R_0 = (0, 0, 0)$. Khi đó, các ma trận M_0 và M_1 cho bởi

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0.22 & 0 & 0.008 & 0.01 \\ 0.2 & 0.37 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.036 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.008 & 0.03 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.2 & 0.008 & 0.01 \\ 0.2 & 0.57 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.036 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.008 & 0.03 \end{pmatrix}.$$

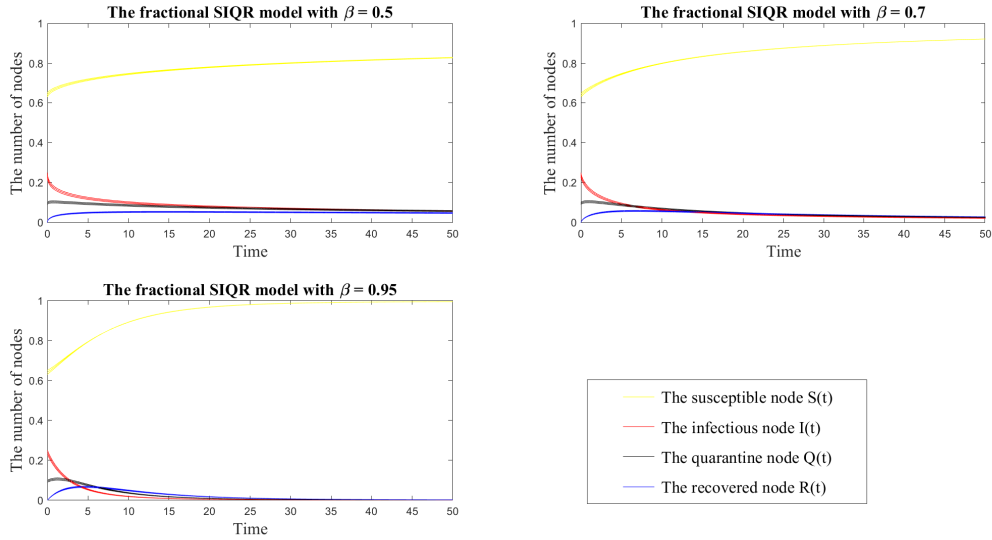
Do đó, các ma trận $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0$ và $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_1$ có bán kính phổ như sau:

Bảng 2.2: Bán kính phổ của các ma trận $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0$ và $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_1$ trong Trường hợp (a)

	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.95$
$\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0$	0.245	0.136	0.039
$\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_1$	0.424	0.237	0.068

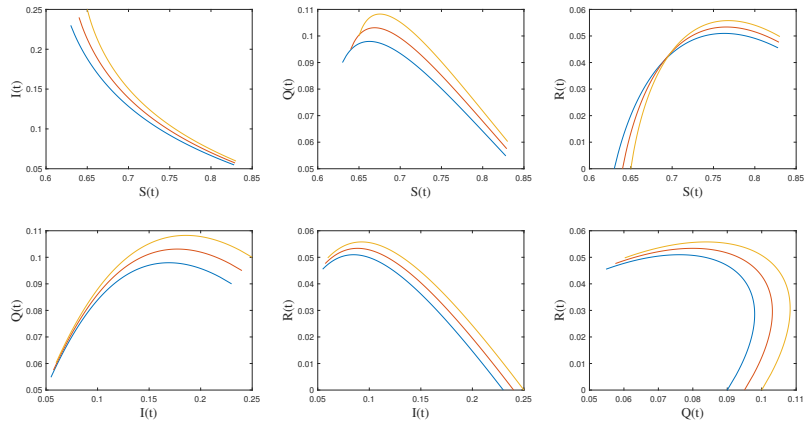
Khi đó, do bán kính phổ của các ma trận $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0$ và $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_1$ đều nhỏ hơn 1 nên chúng ta suy ra mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ luôn có duy nhất nghiệm.

Hình 2.3 biểu diễn dáng điệu theo thời gian của nghiệm số của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ với một số giá trị khác nhau của bậc phân thứ β . Đối với các tham số trên, chúng ta có thể tính toán được chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 xấp xỉ $\mathfrak{R}_0 = 0.541 < 1$, tức là theo lý thuyết dịch tễ học, chúng ta có trạng thái cân bằng không có mã độc của mô hình là ổn định tiệm cận. Trên thực tế, từ Hình 2.3, chúng ta có thể thấy rằng thành phần lan truyền mã độc $I(t)$ của nghiệm có xu hướng tiệm cận về 0 theo thời gian, nghĩa là mã độc có thể được loại bỏ khỏi mạng.

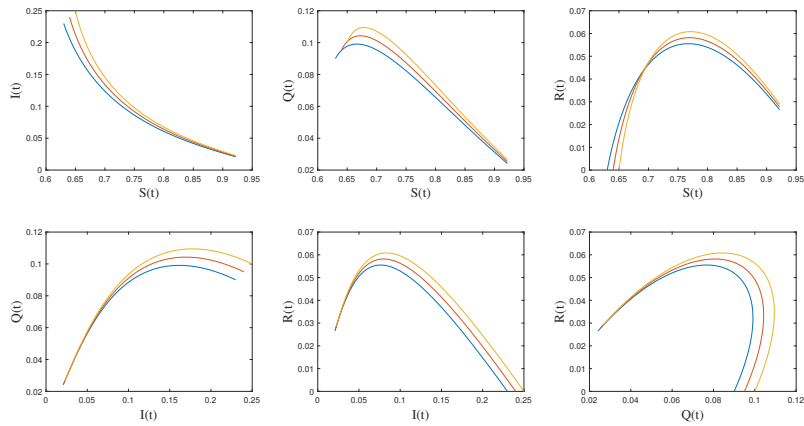


Hình 2.3: Dáng điệu theo thời gian của nghiệm số cho mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ trong Trường hợp tham số (a)

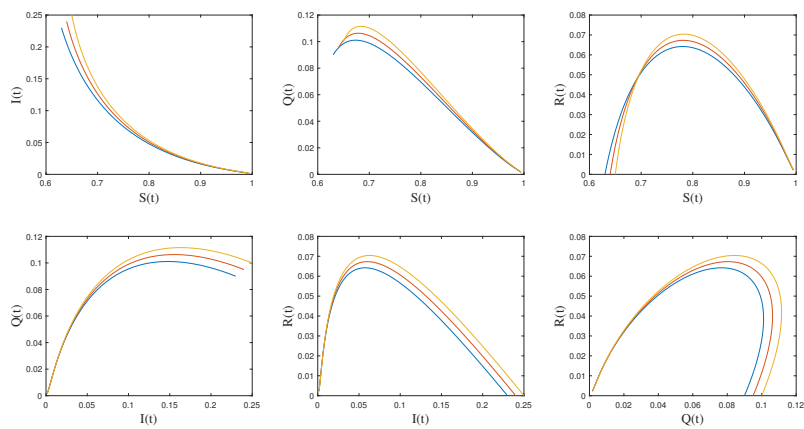
Thêm vào đó, mặt phẳng pha của các hàm trạng thái của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ (2.1) với một số giá trị khác nhau của đạo hàm phân thứ β được biểu diễn trong các hình: Hình 2.4, Hình 2.5 và Hình 2.6.



Hình 2.4: Dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR với $\beta = 0.5$ và $\mathfrak{R}_0 < 1$



Hình 2.5: Dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR với $\beta = 0.7$ và $\mathfrak{R}_0 < 1$



Hình 2.6: Dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR với $\beta = 0.95$ và $\mathfrak{R}_0 < 1$

(b) Xét mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ (2.1) với các tham số

$$\begin{array}{cccc} \eta = 0.008 & \mu = 0.02 & \lambda = 0.5 & \nu = 0.15 \\ \omega = 0.008 & \sigma = 0.01 & \gamma = 0.2 & \end{array}$$

với điều kiện ban đầu không chắc chắn $S_0 = (0.63, 0.64, 0.65)$, $I_0 = (0.23, 0.24, 0.25)$, $Q_0 = (0.09, 0.095, 0.1)$ và $R_0 = (0, 0, 0)$. Khi đó, các ma trận M_0 và M_1 cho bởi

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0.52 & 0 & 0.008 & 0.01 \\ 0.5 & 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.036 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.008 & 0.03 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0.52 & 0.5 & 0.008 & 0.01 \\ 0.5 & 0.87 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.036 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.008 & 0.03 \end{pmatrix}.$$

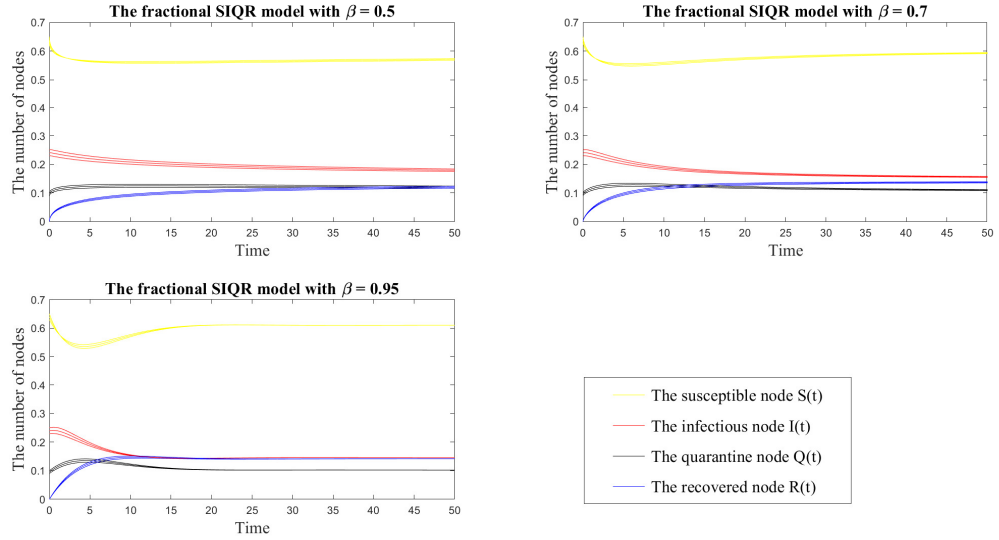
Do đó, các ma trận $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0$ và $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_1$ có bán kính phổ như sau:

Bảng 2.3: Bán kính phổ của các ma trận $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0$ và $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_1$ trong Trường hợp (b)

	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.95$
$\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0$	0.438	0.245	0.07
$\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_1$	0.784	0.438	0.126

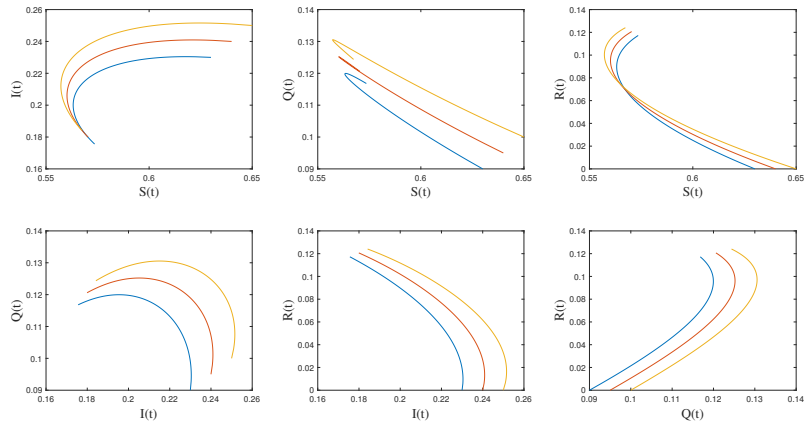
Khi đó, do bán kính phổ của các ma trận $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_0$ và $\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)}M_1$ đều nhỏ hơn 1 nên chúng ta suy ra mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ luôn có duy nhất nghiệm.

Hình 2.7 biểu diễn dáng điệu theo thời gian của nghiệm số của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ với một số giá trị khác nhau của bậc phân thứ β . Đối với các tham số trên, chúng ta có thể tính toán được chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 xấp xỉ $\mathfrak{R}_0 = 1.351 > 1$. Điều này có nghĩa là trạng thái cân bằng không có mã độc không ổn định và do đó, sự lan truyền của mã độc sẽ tiếp diễn trên mạng. Thật vậy, theo Hình 2.7, chúng ta có thể thấy rằng dáng điệu của hàm trạng thái lan truyền mã độc $I(t)$ tiệm cận một giá trị dương (thành phần I_* của điểm cân bằng đặc hữu) khi thời gian đủ lớn.

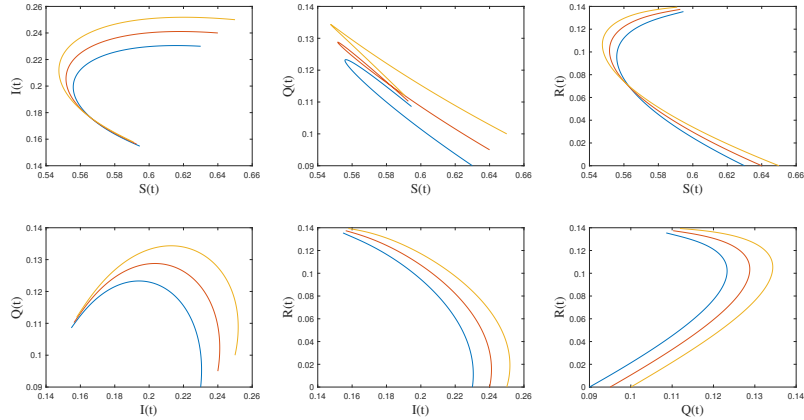


Hình 2.7: Dạng điệu theo thời gian của nghiệm số cho mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ trong Trường hợp tham số (b)

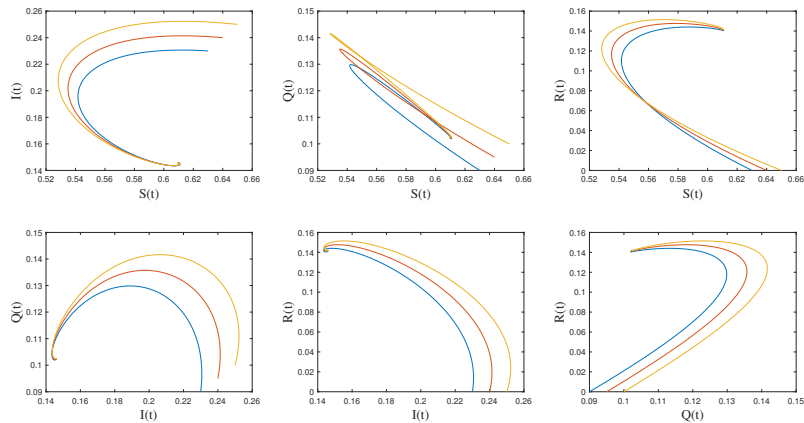
Trong trường hợp này, mặt phẳng pha của các hàm trạng thái của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ (2.1) với một số giá trị khác nhau của đạo hàm phân thứ β được biểu diễn trong các hình: Hình 2.8, Hình 2.9 và Hình 2.10.



Hình 2.8: Dạng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR với $\beta = 0.5$ và $\mathfrak{R}_0 > 1$



Hình 2.9: Dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR với $\beta = 0.7$ và $\mathfrak{R}_0 > 1$



Hình 2.10: Dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc SIQR với $\beta = 0.95$ và $\mathfrak{R}_0 > 1$

2.5. Kết luận chương

Trong chương này, với mục tiêu mô tả và dự báo dáng điệu lan truyền mã độc trên mạng cảm biến, luận án thiết lập mô hình toán học dưới dạng hệ động lực phân thứ mờ gồm 4 ngăn: Mẫn cảm - Lan truyền mã độc - Cách ly - Hồi phục. Các kết quả đã đạt được trong chương này bao gồm:

1. Đề xuất một số khái niệm đạo hàm và tích phân phân thứ với nhân dạng hàm Mittag-Leffler cho hàm nhận giá trị mờ như: đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu phân thứ, tích phân Riemann-Liouville Atangana-Baleanu phân thứ và mối liên hệ giữa hai khái niệm này với kết quả về công thức kiểu Newton-Leibniz (Định lý 2.1). Thêm vào đó, luận án thảo luận về biến đổi Laplace cho đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu phân thứ trong Mệnh đề 3.4. Đây là một kết quả quan trọng đối với việc

xây dựng công thức nghiệm tích phân của bài toán Cauchy cho hệ phương trình vi phân phân thứ mờ đề xuất.

2. Nghiên cứu bài toán Cauchy (2.5) đối với phương trình vi phân phân thứ mờ dưới tính gH-khả vi và đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu phân thứ cùng với các giả thiết thích hợp đặt vào hàm vế phải. Sau đó, luận án đã đạt được các kết quả về xây dựng công thức nghiệm tích phân loại (i) và loại (ii) cùng với các định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm tích phân mờ cho bài toán Cauchy (2.5). Chứng minh của Định lý 2.3 và Định lý 2.4 dựa trên nguyên lý ánh xạ co tổng quát với việc xây dựng hình cầu bất biến Ω_r phù hợp cùng ma trận hội tụ về ma trận \mathbb{O}_n .
3. Nghiên cứu mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ với dữ liệu mờ. Luận án đã mô tả lược đồ cũng như sự tương tác giữa các ngăn trong mô hình và từ đó, xây dựng mô hình hệ phương trình vi phân phân thứ tương thích cho mô hình. Sau đó, luận án tiến hành mô phỏng đáng điệu của mô hình lan truyền mã độc trong các trường hợp khác nhau của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và tham số bậc phân thứ β .

Tuy nhiên, mô hình lan truyền mã độc đề xuất là mô hình tĩnh và trong mô hình này, chúng ta xét tương tác giữa các nút cũng như tầm quan trọng của các nút trong quá trình lan truyền là như nhau. Tuy nhiên, chúng ta thấy rằng cấu trúc của mạng cảm biến cũng như nhiều loại mạng phức hợp trong thực tế luôn có tính phân bậc và không đồng nhất, tức là mỗi nút mạng sẽ có một vai trò khác nhau đối với việc truyền dữ liệu và do đó, sự lan truyền mã độc đối với các nút là không như nhau. Trong các chương sau, luận án sẽ tiếp cận các mô hình lan truyền mã độc với thiết lập tính đến vai trò riêng biệt của các nút mạng cũng như sự không đồng nhất trong tiếp xúc của các nút mạng.

Chương 3

MÔ HÌNH LAN TRUYỀN MÃ ĐỘC SE_1E_2IQR PHÂN THỨ DỰA TRÊN MẠNG VỚI HÀM LAN TRUYỀN XÁC ĐỊNH BỞI LOGIC MỜ

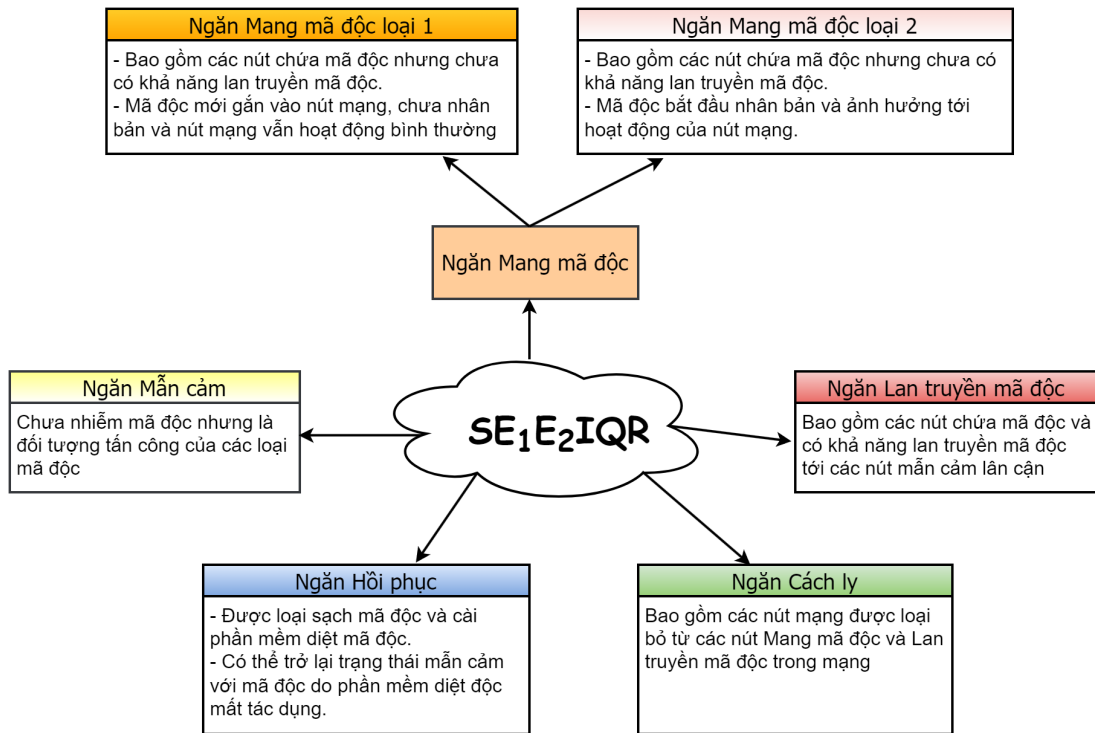
Với mục tiêu thể hiện đồng thời sự không đồng nhất trong tiếp xúc với phần mềm độc hại của các nút mạng trong mạng cảm biến không dây và các yếu tố không chắc chắn ảnh hưởng trực tiếp tới sự lan truyền, chương này tập trung nghiên cứu mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với hàm lan truyền mã độc được xác định bởi logic mờ, trong đó mô hình lan truyền mã độc đề xuất giới thiệu một ngăn cách ly (Q) và nhóm nút mạng mã độc gồm hai ngăn: E_1 (Mạng mã độc loại 1) và E_2 (Mạng mã độc loại 2). Những nội dung chính sẽ xuất hiện trong chương này bao gồm:

- Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ trên mạng phức hợp không đồng nhất với hàm lan truyền mã độc được xác định bởi logic mờ;
- Tập bất biến dương và sự tồn tại duy nhất của nghiệm không âm đối với mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR ;
- Chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và sự tồn tại các trạng thái cân bằng;
- Dáng điệu tiệm cận của trạng thái cân bằng không có mã độc P_0 ;
- Sự rẽ nhánh của mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR ;
- Một số đánh giá và thảo luận.

Nội dung trình bày trong Chương 3 được dựa trên kết quả của công bố [P2] trong Danh mục công trình của nghiên cứu sinh.

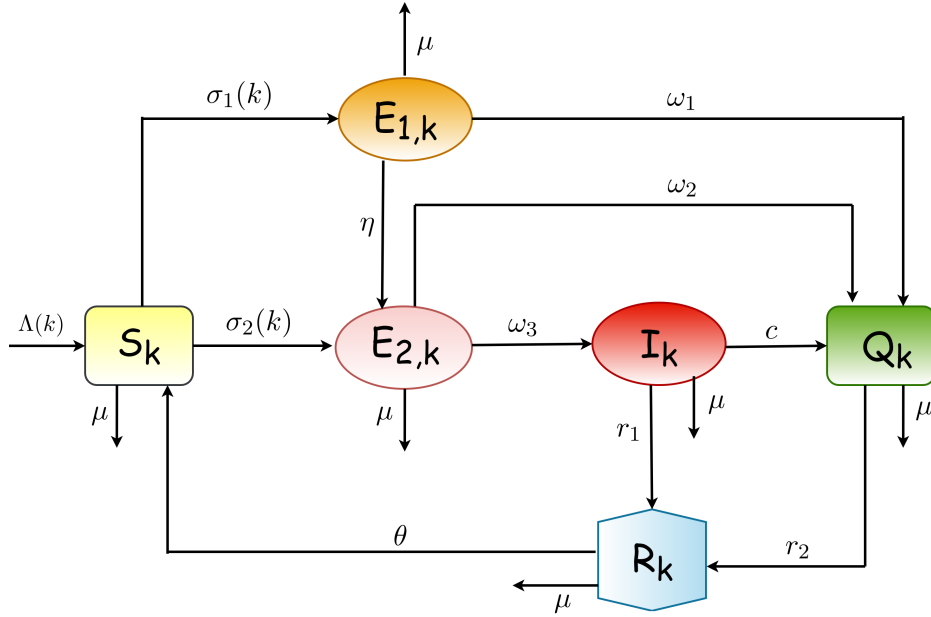
3.1. Thiết lập mô hình

Trong mục này, luận án xét mạng cảm biến không dây với cấu trúc như một mạng quy mô tự do Barabási-Albert giới hạn năng lượng. Tiếp đó, luận án tiến hành mô tả cơ chế lan truyền của các phần mềm độc hại trên mạng và nghiên cứu hiệu quả của biện pháp cách ly đối với việc kiểm soát sự lan truyền. Với mục đích này, luận án giả định rằng tổng số nút cảm biến là hữu hạn và có thể chia thành sáu ngăn như Hình 3.1.



Hình 3.1: Sáu ngăn trong mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR trên mạng cảm biến không dây

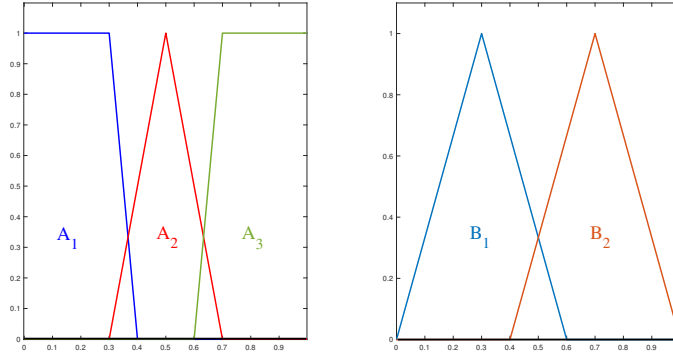
Trong các mô hình lan truyền mã độc cổ điển, chúng ta thường giả sử các nút được phân bố đều trong mạng và tốc độ gây nhiễm mã độc do tiếp xúc của các nút là như nhau. Dưới góc độ toán học, sự đồng nhất này hiển nhiên rằng làm cho việc phân tích và đánh giá trở nên đơn giản hơn nhưng những giả định này lại mâu thuẫn với thực tế. Thật vậy, trong nhiều mô hình dựa trên mạng như Facebook, World Wide Web hoặc mạng cảm biến, v.v., có cấu trúc liên kết mạng phức tạp, chúng ta thấy rằng tầm quan trọng của mỗi nút trong mạng hay số liên kết của mỗi nút khác nhau trong mạng có thể không giống nhau và tất nhiên khả năng lan truyền của phần mềm độc hại đến các nút này cũng là không giống nhau. Do đó, tính phức hợp không đồng nhất của mạng cần được tính đến khi mô hình hóa toán học cho sự lây lan của phần mềm độc hại trên mạng phức hợp không đồng nhất. Với mục tiêu này, dựa trên công trình tiên phong của Pastor-Satorras và cộng sự [27], luận án tiến hành chia tổng số nút mạng thành n nhóm dựa trên số liên kết mà một nút trong nhóm có trên một đơn vị thời gian. Điều này có nghĩa là các nút trong nhóm thứ k có cùng k liên kết với các nút khác. Thật vậy, ký hiệu $S_k(t)$, $E_{1,k}(t)$, $E_{2,k}(t)$, $I_k(t)$, $Q_k(t)$ và $R_k(t)$ lần lượt là mật độ của các nút mẫn cảm, chứa mã độc loại 1, chứa mã độc loại 2, lan truyền mã độc, cách ly và hồi phục bậc k tại thời điểm t với mỗi $k = 1, 2, \dots, n$. Khi đó, sự lan truyền mã độc trên mạng cảm biến không dây có thể được mô tả trong sơ đồ sau:



Hình 3.2: Sơ đồ lan truyền mã độc giữa các ngăn: Mẫn cảm (S), Mang mã độc loại 1 (E_1), Mang mã độc loại 2 (E_2), Lan truyền mã độc (I), Cách ly (Q), Hồi phục (R)

Do các khu vực mục tiêu của mạng cảm biến không dây trong thế giới thực luôn có địa hình phức tạp và khí hậu bất thường, tốc độ truyền thông tin trong mạng cảm biến bị ảnh hưởng sâu sắc bởi các yếu tố địa lý và khí hậu. Thêm vào đó, do các nút cảm biến có năng lượng giới hạn và không thể tự sạc nên hoạt động của mạng cảm biến không dây sẽ dựa trên cơ chế tiết kiệm năng lượng và tốc độ truyền dữ liệu sẽ thay đổi phụ thuộc vào năng lượng thặng dư của mạng và điều này cũng ảnh hưởng trực tiếp đến sự lan truyền mã độc trên mạng. Thêm vào đó, trong mạng cảm biến không dây, các cụm mạng khác nhau sẽ thực hiện các tác vụ cảm biến, đo lường và thu thập khác nhau nên dễ thấy rằng tốc độ truyền dữ liệu sẽ không đồng đều. Ngoài ra, khả năng nhiễm mã độc của một nút nhạy cảm cũng phụ thuộc vào mật độ của các nút lan truyền mã độc trong các nút lân cận, tức là không phải mọi nút nhạy cảm tiếp xúc với một nút lan truyền mã độc sẽ ngay lập tức trở thành một nút lan truyền mã độc. Chú ý rằng để biểu thị mật độ, chúng ta không dùng giá trị chính xác mà thường được diễn đạt qua các biến ngôn ngữ. Trong chương này, luận án đề xuất sử dụng biến ngôn ngữ q ($q \in \{\text{Thấp, Trung bình, Cao}\}$) để biểu thị những yếu tố không chắc chắn xảy ra khi mô hình hóa sự lan truyền của mã độc. Cụ thể, luận án sẽ gán ba biến ngôn ngữ trên với các giá trị mờ ứng với các luật mờ và sử dụng hệ suy luận mờ để đưa các luật này vào mô hình lan truyền mã độc đề xuất dưới dạng hàng số lan truyền M_q . Thật vậy, xét ba số mờ $A_1 = (0, 0, 0.3, 0.4)$, $A_2 = (0.3, 0.5, 0.7)$ và $A_3 = (0.6, 0.7, 1, 1)$ đại diện cho các thuật ngữ “thấp”, “trung bình”, “cao” và sử dụng hai số mờ tam giác $B_1 = (0, 0.3, 0.6)$ và $B_2 = (0.4, 0.7, 1.0)$ để xác định

trạng thái đầu ra khi kết hợp các luật sẽ thuộc ngăn Mạng mã độc loại 1 hay Mạng mã độc loại 2 (xem Hình 3.3).



Hình 3.3: Tập mờ cho các biến ngôn ngữ “Thấp”, “Trung bình”, “Cao”

Đặt x biểu thị cho mật độ của nút lan truyền mã độc, y biểu thị cho tốc độ truyền dữ liệu của mạng và z biểu thị cho trạng thái đầu ra của mỗi quy tắc. Bây giờ, luận án đề xuất một hệ mờ Mamdani (MISO - multi input single output) với 9 luật như sau:

Luật 1: Nếu x “THẤP” và y “THẤP” thì z thuộc trạng thái E_1 .

Luật 2: Nếu x “THẤP” và y “TRUNG BÌNH” thì z thuộc trạng thái E_1 .

Luật 3: Nếu x “TRUNG BÌNH” và y “THẤP” thì z thuộc trạng thái E_1 .

Luật 4: Nếu x “TRUNG BÌNH” và y “TRUNG BÌNH” thì z thuộc trạng thái E_2 .

Luật 5: Nếu x “THẤP” và y “CAO” thì z thuộc trạng thái E_2 .

Luật 6: Nếu x “TRUNG BÌNH” và y “CAO” thì z thuộc trạng thái E_2 .

Luật 7: Nếu x “CAO” và y “THẤP” thì z thuộc trạng thái E_2 .

Luật 8: Nếu x “CAO” và y “TRUNG BÌNH” thì z thuộc trạng thái E_2 .

Luật 9: Nếu x “CAO” và y “CAO” thì z thuộc trạng thái E_2 .

Sau đây, luận án sẽ dựa vào cơ sở luật mờ cho như trên để minh họa ước lượng tham số lan truyền M_q :

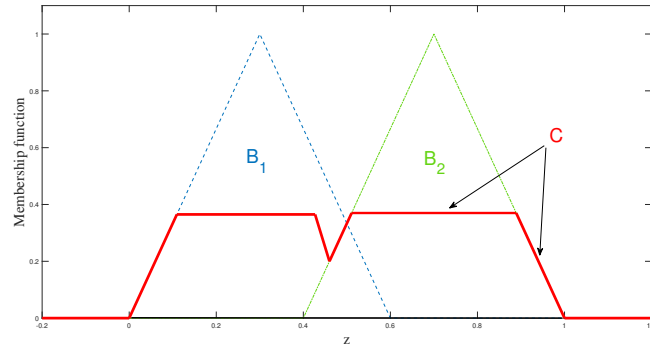
Ví dụ 3.1. Giả sử rằng mật độ nút lan truyền mã độc trong mạng ước lượng khoảng 35%, tức là chọn $x_0 = 0.35$, và tốc độ chuyển trạng thái của mạng đạt 65% tốc độ truyền dữ liệu tối đa (khoảng 100 Mbps), tức là chọn $y_0 = 0.65$. Độ mạnh (“firing strength”) của các luật mờ tính bởi (tham khảo Thuật toán 7.27, [91])

$$\begin{array}{lll}
f_1 = 0 & f_2 = 0.365 \wedge 0.57 = 0.365 & f_3 = 0 \\
f_4 = 0.37 \wedge 0.57 = 0.37 & f_5 = 0.365 \wedge 0.665 = 0.365 & f_6 = 0.37 \wedge 0.665 = 0.37 \\
f_7 = 0 & f_8 = 0 & f_9 = 0.
\end{array}$$

Khi đó, đầu ra của hệ suy luận mờ có thể nhận được bởi phép toán

$$C(z) = \left[\bigvee_{i=1}^4 (f_i \wedge B_1(z)) \right] \vee \left[\bigvee_{i=5}^9 (f_i \wedge B_2(z)) \right]$$

với biểu diễn hình học cho bởi Hình 3.4.



Hình 3.4: Đầu ra của hệ suy luận mờ

Hàm thuộc của đầu ra $C(z)$ cho như sau:

$$C(z) = \begin{cases} \frac{10}{3}z & \text{nếu } 0 \leq z \leq 0.1095 \\ 0.365 & \text{nếu } 0.1095 < z \leq 0.427 \\ -5z + \frac{5}{2} & \text{nếu } 0.427 < z \leq 0.46 \\ \frac{10}{3}z - \frac{4}{3} & \text{nếu } 0.46 < z \leq 0.511 \\ 0.37 & \text{nếu } 0.511 < z \leq 0.889 \\ -\frac{10}{3}z + \frac{10}{3} & \text{nếu } 0.889 < z \leq 1 \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Cuối cùng, bằng cách áp dụng phương pháp giải mờ trọng tâm (“COG-center of gravity”, tham khảo trang 107, [91]), tham số M_q được cho bởi

$$M_q = \left(\int_0^1 zC(z)dz \right) \left(\int_0^1 C(z)dz \right)^{-1} \approx 0.633.$$

Để thuận tiện cho việc theo dõi, luận án tổng kết các tham số sử dụng trong mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng trong Bảng 3.1.

Bảng 3.1: Các tham số sử dụng trong mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR

Tham số	Mô tả	Đơn vị
$\Lambda(k)$	Tốc độ nút mới tham gia mạng	PUT
c	Tốc độ cách ly của nút lan truyền mã độc	PUT
μ	Tốc độ nút rời mạng do cạn năng lượng	PUT
$\sigma_1(k)$	Tốc độ chuyển trạng thái từ miễn cảm sang mang mã độc loại 1	PUT
$\sigma_2(k)$	Tốc độ chuyển trạng thái từ miễn cảm sang mang mã độc loại 2	PUT
ω_1	Tốc độ cách ly của nút mang mã độc loại 1	PUT
ω_2	Tốc độ cách ly của nút mang mã độc loại 2	PUT
ω_3	Tốc độ nút mang mã độc loại 2 thành nút lan truyền mã độc	PUT
θ	Tốc độ trở lại trạng thái miễn cảm của nút hồi phục	PUT
r_1	Tốc độ hồi phục của nút lan truyền mã độc	PUT
r_2	Tốc độ hồi phục của nút được cách ly	PUT
η	Tốc độ chuyển trạng thái từ mang mã độc loại 1 sang mang mã độc loại 2	PUT

(PUT: trên đơn vị thời gian)

Theo lược đồ trong Hình 3.2 và tham số trong Bảng 3.1, các tương tác giữa sáu ngăn này được mô tả như sau:

- (r1) Tốc độ các nút mới tham gia vào mạng có bậc k được cho bởi $\Lambda(k)$.
- (r2) Một nút cảm biến cũng có thể đăng xuất khỏi mạng với tốc độ tự nhiên μ do cạn năng lượng.
- (r3) Khi các phần mềm độc hại xuất hiện trên mạng, một nút miễn cảm bậc k có thể bị nhiễm mã độc bởi các nút lan truyền mã độc lân cận. Tuy nhiên, nút nhạy cảm này sẽ không trở thành nút lan truyền mã độc ngay lập tức mà chuyển sang một trong các trạng thái mang mã độc (E_1) hoặc (E_2). Nó trở thành nút mang mã độc loại 1 với tốc độ $\sigma_1(k)$, trong khi nếu mật độ của các nút lan truyền mã độc lân cận đạt đến ngưỡng (được xác định bởi quy tắc mờ), nó sẽ chuyển sang trạng thái mang mã độc loại 2 với tốc độ $\sigma_2(k)$.
- (r4) Một nút mang mã độc loại 1 sẽ chuyển sang trạng thái mang mã độc loại 2 (E_2) với

tốc độ η nếu số lượng nút lan truyền mã độc lân cận của nút này đạt đến ngưỡng được xác định bởi quy tắc mờ.

- (r5) Nhờ sử dụng các chương trình phát hiện mã độc, các nút mang mã độc sẽ được cách ly khỏi mạng và chuyển sang trạng thái cách ly (Q) với tốc độ lần lượt là ω_1 và ω_2 .
- (r6) Mỗi nút mang mã độc loại 2 được giả sử có khả năng trở thành lan truyền mã độc với tốc độ ω_3 .
- (r7) Các chương trình phát hiện mã độc tìm ra nguồn lan truyền mã độc và chuyển chúng ra khỏi mạng với tốc độ c . Các nút này sau đó được đưa về trạng thái cách ly.
- (r8) Mỗi nút ở trạng thái (Q) được miễn dịch tạm thời và được phục hồi với tốc độ r_2 .
- (r9) Với hoạt động của các chương trình chống phần mềm độc hại, mỗi nút lan truyền mã độc được phục hồi với tốc độ r_1 . Ngoài ra, mỗi nút cảm biến hồi phục có một tốc độ θ trở lại thành nút miễn nhiễm.

Dựa vào các lập luận và giả sử trên, luận án thiết lập mô hình toán học mô tả sự lan truyền phần mềm độc hại giữa sáu ngăn (S), (E_1), (E_2), (I), (Q) và (R) trong mạng cảm biến không dây. Một lớp mô hình lan truyền mã độc liên quan xem xét xây dựng mô hình hóa cho sự lan truyền tin giả trên mạng phức hợp không đồng nhất với hai ngăn phơi nhiễm và logic mờ được giới thiệu bởi Hosseini và Zandvakili [8]. Tuy nhiên, mô hình này tiếp cận dựa trên việc sử dụng mô hình phương trình vi phân thường và cơ sở luật mờ được xây dựng ở đây vẫn khá tổng quát. Thêm vào đó, với mục tiêu thể hiện tính không địa phương và tính nhớ của quá trình khuếch tán dữ liệu, luận án sử dụng đạo hàm phân thứ Caputo để thiết lập một mô hình phương trình vi phân cỡ lớn, gọi là mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng, cho quá trình lan truyền phần mềm độc hại. Cụ thể, với mỗi $k = \overline{1, n}$, luận án xét hệ phương trình vi phân phân thứ sau:

$$\begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta S_k(t) &= \Lambda(k) - (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) S_k(t)\Theta(t) - \mu S_k(t) + \theta R_k(t) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta E_{1,k}(t) &= \sigma_1(k) S_k(t)\Theta(t) - (\eta + \omega_1 + \mu) E_{1,k}(t) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta E_{2,k}(t) &= \sigma_2(k) S_k(t)\Theta(t) - (\mu + \omega_2 + \omega_3) E_{2,k}(t) + \eta E_{1,k}(t) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta I_k(t) &= \omega_3 E_{2,k}(t) - (\mu + c + r_1) I_k(t) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta Q_k(t) &= \omega_1 E_{1,k}(t) + \omega_2 E_{2,k}(t) + c I_k(t) - (r_2 + \mu) Q_k(t) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta R_k(t) &= r_1 I_k(t) + r_2 Q_k(t) - (\mu + \theta) R_k(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

với điều kiện ban đầu

$$S_k(0) = S_k^0, E_{1,k}(0) = E_{1,k}^0, E_{2,k}(0) = E_{2,k}^0, I_k(0) = I_k^0, Q_k(0) = Q_k^0, R_k(0) = R_k^0, \quad (3.2)$$

trong đó $\sigma_1(k), \sigma_2(k)$ lần lượt là tốc độ nhiễm mã độc phụ thuộc bậc của nút cho bởi $\sigma_1(k) = \sigma_1 k, \sigma_2(k) = \sigma_2 k$. Ngoài ra, luận án giả sử rằng số nút bậc k ban đầu thỏa mãn

$$N_k(0) = S_k(0) + E_{1,k}(0) + E_{2,k}(0) + I_k(0) + Q_k(0) + R_k(0) = \frac{\Lambda(k)}{\mu}. \quad (3.3)$$

Cộng về sáu phương trình vi phân phân thứ của hệ (3.1), chúng ta thu được

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\beta N_k(t) = \Lambda(k) - \mu N_k(t), \quad (3.4)$$

trong đó $N_k = S_k + E_{1,k} + E_{2,k} + I_k + Q_k + R_k$. Áp dụng biến đổi Laplace cho phương trình (3.4), ta có

$$s^\beta \mathcal{L}\{N_k(t)\}(s) - s^{\beta-1} N_k(0) = \frac{\Lambda(k)}{s} - \mu \mathcal{L}\{N_k(t)\}(s),$$

hay tương đương với $\mathcal{L}\{N_k(t)\}(s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + \mu} N_k(0) + \frac{\Lambda(k)s^{\beta-(1+\beta)}}{s^\beta + \mu}$. Tiếp đó, áp dụng biến đổi Laplace ngược và sử dụng (3.3), chúng ta nhận được

$$N_k(t) = \frac{\Lambda(k)}{\mu} \mathbb{E}_\beta(-\mu t^\beta) + \Lambda(k) t^\beta \mathbb{E}_{\beta, \beta+1}(-\mu t^\beta).$$

Áp dụng Bổ đề 1.1 với $\beta_1 = \beta, \beta_2 = 1$ và $z = -\mu t^\beta$, chúng ta nhận được

$$N_k(t) = \frac{\Lambda(k)}{\mu} \mathbb{E}_\beta(-\mu t^\beta) + \frac{\Lambda(k)}{\mu} [1 - \mathbb{E}_{\beta, 1}(-\mu t^\beta)] = \frac{\Lambda(k)}{\mu} := b_k.$$

Hàm $\Theta(t)$ là đại diện cho xác suất mà một liên kết cho trước kết nối với một nút lan truyền mã độc và cho bởi dạng tổng quát sau:

$$\Theta(t) = \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{i=1}^n \frac{\nu(i)}{b_i} \mathbb{P}(i) I_i(t),$$

trong đó $\mathbb{P}(i)$ là xác suất để một nút được chọn ngẫu nhiên có bậc i , $\langle n \rangle = \sum_{i=1}^n i \mathbb{P}(i)$ biểu thị cho bậc kết nối trung bình của mạng, $M_q \in [0, 1]$ là tham số đầu ra của hệ MISO được suy ra từ các luật mờ cho biến ngôn ngữ q , hàm $\nu(i) = i$ đại diện cho số lượng liên kết trung bình mà một nút lan truyền mã độc bậc i sẽ lan truyền phần mềm độc hại đến các nút khác. Thêm vào đó, để đảm bảo số lượng nút cho mạng hoạt động bình thường, luận án giả sử rằng $\Lambda(i) \geq \mu$ với mọi $i = \overline{1, n}$.

3.2. Tính chất định tính của mô hình

3.2.1. Sự tồn tại tập bất biến dương

Ký hiệu

$$\mathbf{x}^k(t) = \left(E_{1,k}(t) \quad E_{2,k}(t) \quad I_k(t) \quad S_k(t) \quad Q_k(t) \quad R_k(t) \right)^\top \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{x}^1(t) \quad \mathbf{x}^2(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}^n(t) \right)^\top$$

$$f(\mathbf{x}^k(t)) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}^k(t)) \\ f_2(\mathbf{x}^k(t)) \\ f_3(\mathbf{x}^k(t)) \\ f_4(\mathbf{x}^k(t)) \\ f_5(\mathbf{x}^k(t)) \\ f_6(\mathbf{x}^k(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1(k)S_k(t)\Theta(t) - (\eta + \omega_1 + \mu)E_{1,k}(t) \\ \sigma_2(k)S_k(t)\Theta(t) - (\mu + \omega_2 + \omega_3)E_{2,k}(t) + \eta E_{1,k}(t) \\ \omega_3 E_{2,k}(t) - (\mu + c + r_1)I_k(t) \\ \Lambda(k) - (\sigma_1(k) + \sigma_2(k))S_k(t)\Theta(t) - \mu S_k(t) + \theta R_k(t) \\ \omega_1 E_{1,k}(t) + \omega_2 E_{2,k}(t) + cI_k(t) - (r_2 + \mu)Q_k(t) \\ r_1 I_k(t) + r_2 Q_k(t) - (\mu + \theta)R_k(t) \end{pmatrix},$$

Do đó, chúng ta ký hiệu hàm vectơ $\mathcal{F}(\mathbf{x}(t))$ bởi

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}(t)) = \left(f(\mathbf{x}^1(t)) \quad f(\mathbf{x}^2(t)) \quad \cdots \quad f(\mathbf{x}^n(t)) \right)^\top.$$

Mục này bắt đầu với kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm không âm và tập bất biến dương cho mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR . Trước tiên, xét bảng ký hiệu sau:

Bảng 3.2: Bảng ký hiệu viết tắt

Ký hiệu	Giá trị	Ký hiệu	Giá trị
b_k	$\frac{\Lambda(k)}{\mu}$	α_1	$\omega_1 + \mu + \eta$
α_2	$\omega_2 + \omega_3 + \mu$	α_3	$r_2 + \mu$
α_4	$\mu + \theta$	α_5	$r_1 + c + \mu$
$\alpha_{6,k}$	$\eta\sigma_1(k) + \alpha_1\sigma_2(k)$	$\alpha_{7,k}$	$\alpha_2\alpha_5\sigma_1(k)\omega_1 + \alpha_5\alpha_{6,k}\omega_2 + c\alpha_3\alpha_{6,k}\omega_3$

Định lý 3.1. *Giả sử rằng*

$$S_k^0 > 0, \quad E_{1,k}^0 \geq 0, \quad E_{2,k}^0 \geq 0, \quad I_k^0 \geq 0, \quad Q_k^0 \geq 0, \quad R_k^0 \geq 0 \quad (3.5)$$

với mọi $k = \overline{1, n}$. Khi đó, mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với điều kiện ban đầu $\mathbf{x}(0)$ thỏa mãn (3.5) luôn có nghiệm không âm duy nhất $\mathbf{x}(t)$ và hàm $\Theta(t)$ dương với mọi $t > 0$. Hơn nữa, tập

$$\Sigma^+ = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^{6n} : S_k + E_{1,k} + E_{2,k} + I_k + Q_k + R_k = b_k, k = \overline{1, n} \right\}.$$

là một tập bất biến dương của mô hình lan truyền mã độc đề xuất.

Chứng minh. Việc chứng minh định lý này được chia thành các bước như sau:

(Sự tồn tại và duy nhất). Với mỗi $k = \overline{1, n}$, hệ con (3.1) của mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng có thể viết lại như sau:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\beta \mathbf{x}^k(t) = f(\mathbf{x}^k(t)),$$

với điều kiện ban đầu $\mathbf{x}^k(0) = \mathbf{x}_0^k$. Khi đó, ma trận Jacobi của hàm vectơ $f(\mathbf{x}^k(t))$ cho bởi

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}^k} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & \frac{-\sigma_1(k)M_q\nu(k)\mathbb{P}(k)}{b_k\langle n \rangle} S_k(t) & -\sigma_1(k)\Theta(t) & 0 & 0 \\ \eta & -\alpha_2 & \frac{-\sigma_2(k)M_q\nu(k)\mathbb{P}(k)}{b_k\langle n \rangle} S_k(t) & -\sigma_2(k)\Theta(t) & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(\sigma_1(k)+\sigma_2(k))M_q\nu(k)\mathbb{P}(k)}{b_k\langle n \rangle} S_k(t) & -(\sigma_1(k)+\sigma_2(k))\Theta(t) & 0 & \theta \\ \omega_1 & \omega_2 & -c & 0 & -\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & 0 & r_2 & -\alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Với mỗi $t \geq 0$, hàm $\frac{\partial f(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}^k}$ là hàm ma trận liên tục trên \mathbb{R}_+^6 và do đó, theo Nhận xét 1.2.1 trong [110], ta suy ra hàm $f(\mathbf{x}^k(t))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương trên \mathbb{R}_+^6 . Cuối cùng, áp dụng Định lý 1.3.1 và Định lý 1.4.1 trong [110], chúng ta suy ra bài toán Cauchy (3.1) - (3.2) có duy nhất nghiệm $\mathbf{x}^k(t)$ với mỗi \mathbf{x}_0^k thỏa mãn (3.5).

(Tính không âm). Giả sử phản chứng với $k \in \{1, \dots, n\}$, tồn tại một thời điểm $t_0 > 0$ sao cho $S_k(t_0) = 0$, $S_k(t) > 0$ với mọi $0 \leq t < t_0$ và $S_k(t) < 0$ với $t > t_0$. Khi đó, chúng ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Giả sử rằng hàm $I_k(t) \geq 0$ với mọi $t \geq 0$. Khi đó, chúng ta xét các phương trình vi phân phân thứ sau:

$$\begin{aligned} {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta E_{1,k}(t) &= -\alpha_1 E_{1,k}(t) + \sigma_1(k) S_k(t) \Theta(t) \\ {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta E_{2,k}(t) &= -\alpha_2 E_{2,k}(t) + \sigma_2(k) S_k(t) \Theta(t) + \eta E_{1,k}(t) \\ {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta Q_k(t) &= -\alpha_3 Q_k(t) + \omega_1 E_{1,k}(t) + \omega_2 E_{2,k}(t) + c I_k(t) \\ {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta R_k(t) &= -\alpha_4 R_k(t) + r_1 I_k(t) + r_2 Q_k(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Từ tính không âm của $S_k(t)$ và $I_k(t)$ trên đoạn $[0, t_0]$, ta có

$${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta E_{1,k}(t) = -\alpha_1 E_{1,k}(t) + \sigma_1(k) S_k(t) \Theta(t) \geq -\alpha_1 E_{1,k}(t).$$

Bằng cách áp dụng nguyên lý so sánh nghiệm (xem Bổ đề 10 trong [51]), ta suy ra $E_{1,k}(t) \geq E_{1,k}(0) \mathbb{E}_\beta(-\alpha_1 t^\beta) \geq 0$ với mọi $t \in [0, t_0]$. Điều này kéo theo

$${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta E_{2,k}(t) = -\alpha_2 E_{2,k}(t) + \sigma_2(k) S_k(t) \Theta(t) + \eta E_{1,k}(t) \geq -\alpha_2 E_{2,k}(t),$$

và do đó, $E_{2,k}(t) \geq E_{2,k}(0) \mathbb{E}_\beta(-\alpha_2 t^\beta) \geq 0$ với mọi $t \in [0, t_0]$. Tương tự, ta cũng có các hàm $Q_k(t)$ và $R_k(t)$ không âm trên đoạn $[0, t_0]$. Thêm vào đó, tại thời điểm $t = t_0$, chúng ta nhận được ${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta S_k(t)|_{t=t_0} = \Lambda(k) + \omega R_k(t_0) > 0$. Do đó, từ Bổ đề 1.3, chúng ta suy ra

tồn tại lân cận $(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$ của điểm t_0 với $\varepsilon_0 > 0$ đủ nhỏ sao cho $S_k(t) > S_k(0) > 0$. Điều này mâu thuẫn với giả sử phản chứng.

Trường hợp 2: Nếu tồn tại thời điểm $t_1 > 0$ và một số $\varepsilon_1 > 0$ sao cho $I_k(t_1) = 0$, $I_k(t) > 0$ với mọi $t \in (0, t_1)$ và $I(t) < 0$ với mọi $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon_1)$ thì chứng minh của trường hợp này được tiến hành bằng cách xét các trường hợp sau:

Trường hợp 2.1: Nếu $t_1 \geq t_0$ thì bằng lập luận tương tự như **Trường hợp 1**, chúng ta có thể chứng minh rằng các hàm trạng thái $E_{1,k}(t)$, $E_{2,k}(t)$, $I_k(t)$, $Q_k(t)$ và $R_k(t)$ đều không âm trên $[0, t_1]$ và $S_k(t_0 + \varepsilon_0) > 0$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Trường hợp 2.2: Nếu $t_1 < t_0$ thì do giả thiết $S_k(t) > 0$ với mọi $t \in [0, t_0)$, ta suy ra $S(t) > 0$ với mọi $t \in [0, t_1]$. Ngoài ra, do giả sử có phần mềm độc hại trên mạng nên luôn tồn tại ít nhất một $k_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $I_{k_0}(0) > 0$. Kết hợp điều kiện và $I_k(0) \geq 0$ với mọi $k = \overline{1, n}$, ta suy ra $\Theta(0) > 0$. Phương trình thứ tư của hệ (3.1) dẫn tới

$${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \Theta(t) = \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{\nu(k)}{b_k} \mathbb{P}(k) [\omega_3 E_{2,k}(t) - \alpha_5 I_k(t)] \geq -\alpha_5 \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{\nu(k)}{b_k} \mathbb{P}(k) I_k(t) = -\alpha_5 \Theta(t).$$

Theo nguyên lý so sánh nghiệm, ta có $\Theta(t) \geq \Theta(0) \mathbb{E}_\beta(-\alpha_5 t^\beta) > 0$ với mọi $t > 0$. Sau đó, áp dụng Ví dụ 4.9 trong [39], phương trình vi phân thứ nhất của hệ (3.6) trở thành

$$E_{1,k}(t) = E_{1,k}^0 \mathbb{E}_\beta(-\alpha_1 t^\beta) + \int_0^t \frac{\mathbb{E}_{\beta,\beta}(-\alpha_1(t-\tau)^\beta)}{(t-\tau)^{1-\beta}} \sigma_1(k) S_k(\tau) \Theta(\tau) d\tau.$$

Do đó, $E_{1,k}(t) > 0$ với mọi $t \in [0, t_1]$. Lập luận tương tự, ta cũng có

$$E_{2,k}(t) = E_{2,k}^0 \mathbb{E}_\beta(-\alpha_2 t^\beta) + \int_0^t \frac{\mathbb{E}_{\beta,\beta}(-\alpha_2(t-\tau)^\beta)}{(t-\tau)^{1-\beta}} [\sigma_2(k) S_k(\tau) \Theta(\tau) + \eta E_{1,k}(\tau)] d\tau,$$

và vì vậy, $E_{2,k}(t) > 0$ với mọi $t \in [0, t_1]$. Tại thời điểm $t = t_1$, chúng ta nhận được

$${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta I_k(t)|_{t=t_1} = \omega_3 E_{2,k}(t_1) - \alpha_5 I_k(t_1) = \omega_3 E_{2,k}(t_1) > 0.$$

Do đó, có thể chọn $0 < \varepsilon_1 \ll 1$ sao cho trong lân cận $(t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1)$ của điểm t_1 , chúng ta nhận được $I_k(t) > I_k(0) \geq 0$ với mọi $t \in (t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1)$. Điều này mâu thuẫn với giả sử phản chứng. Như vậy, chúng ta đã chỉ ra rằng $S_k(t)$ luôn dương với mọi $t \geq 0$. Cuối cùng, bằng lập luận tương tự, chúng ta cũng có thể chứng minh rằng các hàm $E_{1,k}(t)$, $E_{2,k}(t)$, $I_k(t)$, $Q_k(t)$, $R_k(t)$ đều không âm với mọi $t \geq 0$. Tóm lại, mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với điều kiện ban đầu $\mathbf{x}(0)$ thỏa mãn (3.5) luôn có duy nhất nghiệm $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^{6n}$ và hàm $\Theta(t) > 0$ với mọi $t > 0$.

(Tập bất biến dương). Tiếp theo, chúng ta chứng minh tập Σ^+ là tập bất biến dương đối với mô hình lan truyền mã độc SE₁E₂IQR phân thứ dựa trên mạng. Dễ thấy rằng điều kiện ban đầu $\mathbf{x}(0)$ thỏa mãn ràng buộc (3.3) và do đó, $\mathbf{x}^k(0) \in \Sigma^+$. Sau đó, bằng cách cộng về sáu phương trình vi phân phân thứ của hệ (3.1), chúng ta thu được

$${}^C\mathcal{D}_t^\beta N_k(t) = \Lambda(k) - \mu N_k(t),$$

hay tương đương với $N_k(t) = S_k(t) + E_{1,k}(t) + E_{2,k}(t) + I_k(t) + Q_k(t) + R_k(t) = b_k$ với mọi $k = \overline{1, n}$ và $t \geq 0$. Kết hợp với tính không âm của nghiệm $\mathbf{x}(t)$, chúng ta suy ra Σ^+ là tập bất biến dương của mô hình lan truyền mã độc SE₁E₂IQR phân thứ dựa trên mạng. \square

3.2.2. Chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và các trạng thái cân bằng

Một vấn đề quan trọng khi nghiên cứu các mô hình lan truyền mã độc dựa trên mạng là xác định liệu rằng mạng có thể an toàn trước sự tấn công của các đối tượng độc hại. Với mục đích này, luận án sẽ thảo luận về tính ổn định tiệm cận của các trạng thái cân bằng của mô hình lan truyền mã độc đề xuất bao gồm trạng thái cân bằng không có mã độc và trạng thái cân bằng đặc hữu. Chú ý rằng các trạng thái cân bằng được xác định bởi hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \Lambda(k) - (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) S_k(t)\Theta(t) - \mu S_k(t) + \theta R_k(t) = 0 \\ \sigma_1(k) S_k(t)\Theta(t) - (\eta + \omega_1 + \mu) E_{1,k}(t) = 0 \\ \sigma_2(k) S_k(t)\Theta(t) - (\mu + \omega_2 + \omega_3) E_{2,k}(t) + \eta E_{1,k}(t) = 0 \\ \omega_3 E_{2,k}(t) - (\mu + c + r_1) I_k(t) = 0 \\ \omega_1 E_{1,k}(t) + \omega_2 E_{2,k}(t) + c I_k(t) - (r_2 + \mu) Q_k(t) = 0 \\ r_1 I_k(t) + r_2 Q_k(t) - (\mu + \theta) R_k(t) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Dễ thấy rằng ở trạng thái cân bằng không có mã độc, do chúng ta kỳ vọng không có mã độc trên mạng nên $E_{1,k} = E_{2,k} = I_k = 0$ với mọi $k = \overline{1, n}$. Do đó, mô hình lan truyền mã độc SE₁E₂IQR phân thứ dựa trên mạng có trạng thái cân bằng không có mã độc duy nhất \mathbf{P}_0 cho bởi

$$\mathbf{P}_0 = \underbrace{(0, 0, 0, b_1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, b_n, 0, 0)}_{6n}.$$

Tiếp theo, sử dụng phương pháp ma trận thế hệ tiếp theo (tham khảo [111]), luận án sẽ xác định được chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 của mô hình lan truyền mã độc SE₁E₂IQR phân thứ dựa trên mạng. Thật vậy, sự lan truyền mã độc trong mô hình lan truyền mã độc đề xuất có các đặc trưng sau:

- Chỉ có ba ngăn gây lan truyền mã độc trong mô hình lan truyền mã độc đề xuất, đó là ngăn mang mã độc loại 1 (E_1), mang mã độc loại 2 (E_2) và Lan truyền mã độc (I).
- Sự chuyển dịch các nút từ các ngăn mang mã độc sang ngăn lan truyền mã độc hoặc giữa hai ngăn mang mã độc chỉ là sự di chuyển của các nút nhiễm mã độc.

Với các giả sử trên, ta có số hạng thêm và số hạng mất ứng với mô hình lan truyền mã độc đề xuất được cho như sau:

- Số hạng thêm: $\left(\sigma_1(k)S_k(t)\Theta(t) \quad \sigma_2(k)S_k(t)\Theta(t) \quad 0 \right)^\top$.
- Số hạng mất: $\left(\alpha_1 E_{1,k} \quad -\eta E_{1,k}(t) + \alpha_2 E_{2,k}(t) \quad -\omega_3 E_{2,k}(t) + \alpha_5 I_k(t) \right)^\top$.

Sau đó, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 được xác định như sau:

Bước 1: Ma trận tỷ lệ \mathcal{F} cho sự xuất hiện của nút mang mã độc mới tại \mathbf{P}_0 cho bởi

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n \\ \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n \\ \sigma_1 \mathcal{B} & \sigma_2 \mathcal{B} & \mathbb{O}_n \end{pmatrix},$$

trong đó $\mathcal{B} = \frac{M_q}{\langle n \rangle} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ nb_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\nu(1)}{b_1} \mathbb{P}(1) & \frac{\nu(2)}{b_2} \mathbb{P}(2) & \dots & \frac{\nu(n)}{b_n} \mathbb{P}(n) \end{pmatrix}$ và $\nu(k) = k$.

Bước 2: Ma trận chuyển tiếp giữa các ngăn bị nhiễm mã độc \mathcal{V} cho bởi

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbb{I}_n & -\eta \mathbb{I}_n & \mathbb{O}_n \\ \mathbb{O}_n & \alpha_2 \mathbb{I}_n & -\omega_3 \mathbb{I}_n \\ \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n & \alpha_5 \mathbb{I}_n \end{pmatrix}.$$

Bước 3: Chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 của mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng là giá trị riêng thực lớn nhất của $\mathcal{F} \cdot \mathcal{V}^{-1}$, trong đó

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n \\ \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n \\ \sigma_1 \mathcal{B} & \frac{\eta \sigma_1 + \alpha_1 \sigma_2}{\alpha_1 \alpha_2} \mathcal{B} & \frac{\omega_3 (\eta \sigma_1 + \alpha_1 \sigma_2)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5} \mathcal{B} \end{pmatrix}.$$

Khi đó, chúng ta tìm được chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 như sau:

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 \mathbb{P}(k) \omega_3 (\eta \sigma_1 + \alpha_1 \sigma_2)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5} = \frac{\omega_3 M_q (\eta \sigma_1 + \alpha_1 \sigma_2) \langle n^2 \rangle}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 \langle n \rangle}, \quad (3.8)$$

trong đó $\langle n^2 \rangle = \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(k)$.

Nhận xét 3.1. Để xác định giá trị riêng của ma trận $\mathcal{F} \cdot \mathcal{V}^{-1}$, ký hiệu

$$v_1 = \sigma_1 \quad v_2 = \frac{\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2}{\alpha_1\alpha_2} \quad v_3 = \frac{\omega_3(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_5},$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{M_q}{\langle n \rangle} \left(0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad b_1 \quad 2b_2 \quad \dots \quad nb_n \right)^\top$$

$$\vec{\mathbf{b}} = \left(\frac{v_1 1\mathbb{P}(1)}{b_1} \quad \dots \quad \frac{v_1 n\mathbb{P}(n)}{b_n} \quad \frac{v_2 1\mathbb{P}(1)}{b_1} \quad \dots \quad \frac{v_2 n\mathbb{P}(n)}{b_n} \quad \frac{v_3 1\mathbb{P}(1)}{b_1} \quad \dots \quad \frac{v_3 n\mathbb{P}(n)}{b_n} \right)^\top.$$

Khi đó, ma trận $\mathcal{F} \cdot \mathcal{V}^{-1}$ có thể viết lại như sau $\mathcal{F} \cdot \mathcal{V}^{-1} = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}^\top$. Thêm vào đó, dễ thấy rằng $\mathcal{F} \cdot \mathcal{V}^{-1}$ là ma trận suy biến nên nó có giá trị riêng $\lambda = 0$. Giả sử rằng $\bar{\lambda}$ là giá trị riêng khác 0 của ma trận $\mathcal{F} \cdot \mathcal{V}^{-1}$. Khi đó, tồn tại một vectơ $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \{\vec{0}\}$ sao cho

$$\left(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}^\top \right) \cdot \vec{\mathbf{v}} = \bar{\lambda} \vec{\mathbf{v}}.$$

Theo tính chất kết hợp của phép nhân vectơ, đẳng thức trên tương đương với

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \left(\vec{\mathbf{b}}^\top \cdot \vec{\mathbf{v}} \right) = \bar{\lambda} \vec{\mathbf{v}}.$$

Chú ý rằng do $\vec{\mathbf{b}}^\top \cdot \vec{\mathbf{v}}$ là một vô hướng và hiển nhiên rằng $\bar{\lambda}$ cũng là đại lượng vô hướng nên $\vec{\mathbf{v}}$ cùng phương với $\vec{\mathbf{a}}$. Do đó, ta có

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \left(\vec{\mathbf{b}}^\top \cdot \vec{\mathbf{a}} \right) = \bar{\lambda} \vec{\mathbf{a}},$$

tương đương với $\vec{\mathbf{a}} \left(\bar{\lambda} - \vec{\mathbf{b}}^\top \cdot \vec{\mathbf{a}} \right) = \vec{0}$. Mặt khác, vì $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \{\vec{0}\}$ nên đẳng thức này dẫn tới $\bar{\lambda} = \vec{\mathbf{b}}^\top \cdot \vec{\mathbf{a}}$. Hơn nữa, dễ thấy rằng giá trị $\bar{\lambda} = \vec{\mathbf{b}}^\top \cdot \vec{\mathbf{a}} = \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n v_3 k^2 \mathbb{P}(k)$ là vết của ma trận $\mathcal{F} \cdot \mathcal{V}^{-1}$ và cũng là giá trị riêng lớn nhất của ma trận này.

Nhận xét 3.2. Theo công thức (3.8), dễ thấy rằng chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 không phụ thuộc vào tốc độ nút tham gia mạng $\Lambda(k)$, nghĩa là sự thay đổi tốc độ nút tham gia mạng không đóng bất cứ vai trò nào đối với sự lây lan phần mềm độc hại. Tuy nhiên, chỉ số ngưỡng \mathfrak{R}_0 tỷ lệ thuận với hệ số không đồng nhất của mạng $\frac{\langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle}$, tức là tăng tính không đồng nhất của mạng có thể làm cho các phần mềm độc hại phát tán nhanh hơn trên hệ thống mạng.

Tiếp theo, chúng ta ký hiệu $A_k = M_q k \mathbb{P}(k) \alpha_3 \alpha_4 \alpha_{6,k} \omega_3$, $\tilde{A}_2 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$ và

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1,k} &= \omega_3 (\alpha_3 \alpha_4 \alpha_{6,k} + r_1 \alpha_3 \alpha_{6,k}) + (\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_{6,k} + \alpha_4 \alpha_{7,k} + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \sigma_1(k) + r_2 \alpha_{7,k}) \\ &= \omega_3 \alpha_{8,k} + \alpha_{9,k}. \end{aligned}$$

trong đó các tham số $\alpha_{8,k}$ và $\alpha_{9,k}$ cho bởi

$$\begin{aligned}\alpha_{8,k} &= \alpha_3\alpha_4\alpha_{6,k} + r_1\alpha_3\alpha_{6,k} \\ \alpha_{9,k} &= \alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_{6,k} + \alpha_4\alpha_{7,k} + \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\sigma_1(k) + r_2\alpha_{7,k}.\end{aligned}$$

Định lý 3.2. *Nếu chỉ số ngưỡng lan truyền $\mathfrak{R}_0 > 1$ thì mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng có một trạng thái cân bằng đặc hữu duy nhất cho bởi*

$$\mathbf{P}_* = (E_{1,1}^*, E_{2,1}^*, I_1^*, S_1^*, Q_1^*, R_1^*, \dots, E_{1,n}^*, E_{2,n}^*, I_n^*, S_n^*, Q_n^*, R_n^*),$$

trong đó

$$\begin{aligned}S_k^* &= \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_5}{\omega_3\alpha_{6,k}\Theta^*}I_k^*, \quad E_{1,k}^* = \frac{\alpha_2\alpha_5\sigma_1(k)}{\omega_3\alpha_{6,k}}I_k^*, \quad E_{2,k}^* = \frac{\alpha_5}{\omega_3}I_k^*, \quad Q_k^* = \frac{\alpha_{7,k}}{\omega_3\alpha_3\alpha_{6,k}}I_k^*, \\ R_k^* &= \frac{r_1\alpha_3\alpha_{6,k}\omega_3 + r_2\alpha_{7,k}}{\alpha_3\alpha_4\alpha_{6,k}\omega_3}I_k^*, \quad \Theta^* = \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{i=1}^n \frac{i}{b_i} \mathbb{P}(i)I_i^*, \quad I_k^* = \frac{b_k\alpha_3\alpha_4\alpha_{6,k}\omega_3\Theta^*}{(\omega_3\alpha_{8,k} + \alpha_{9,k})\Theta^* + \tilde{A}_2}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Chứng minh. Dễ thấy rằng bộ tọa độ $(E_{1,k}^*, E_{2,k}^*, I_k^*, S_k^*, Q_k^*, R_k^*)$ của trạng thái cân bằng đặc hữu là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình đại số (3.7) với mọi $k = \overline{1, n}$. Khi đó, từ phương trình thứ tư của hệ (3.7), chúng ta suy ra $E_{2,k}^* = \frac{\alpha_5}{\omega_3}I_k^*$. Tiếp theo, bằng cách kết hợp phương trình thứ hai và thứ ba của hệ (3.7), chúng ta nhận được

$$E_{1,k}^* = \frac{\alpha_2\alpha_5\sigma_1(k)}{[\alpha_1\sigma_2(k) + \eta\sigma_1(k)]\omega_3}I_k^* = \frac{\alpha_2\alpha_5\sigma_1(k)}{\alpha_{6,k}\omega_3}I_k^*.$$

Do đó, bằng cách thế $E_{1,k}^*$ vào phương trình thứ hai, chúng ta nhận được

$$S_k^* = \frac{\alpha_1}{\sigma_1(k)\Theta^*}E_{1,k}^* = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_5}{\alpha_{6,k}\omega_3\Theta^*}I_k^*.$$

Từ hai phương trình cuối của hệ (3.7), chúng ta nhận được

$$\begin{aligned}Q_k^* &= \frac{\alpha_2\alpha_5\sigma_1(k)\omega_1 + \alpha_5\alpha_{6,k}\omega_2 + c\alpha_3\alpha_{6,k}\omega_3}{\alpha_3\alpha_{6,k}\omega_3}I_k^* = \frac{\alpha_{7,k}}{\alpha_3\alpha_{6,k}\omega_3}I_k^*, \\ R_k^* &= \frac{r_1\alpha_3\alpha_{6,k}\omega_3 + r_2\alpha_{7,k}}{\alpha_3\alpha_4\alpha_{6,k}\omega_3}I_k^*.\end{aligned}$$

Cuối cùng, bằng cách thế các số hạng S_k^* , $E_{1,k}^*$, $E_{2,k}^*$, I_k^* , Q_k^* và R_k^* vào phương trình thứ nhất, chúng ta xác định được giá trị của I_k^* như sau:

$$I_k^* = \frac{b_k\alpha_3\alpha_4\alpha_{6,k}\omega_3\Theta^*}{(\omega_3\alpha_{8,k} + \alpha_{9,k})\Theta^* + \tilde{A}_2}.\quad (3.10)$$

Từ đẳng thức (3.10), chúng ta nhận được phương trình tự nhất quán sau:

$$\Theta - \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{A_k\Theta}{\tilde{A}_{1,k}\Theta + \tilde{A}_2} = 0.\quad (3.11)$$

Để thấy rằng $\Theta \equiv 0$ luôn là một nghiệm của phương trình tự nhất quán (3.11). Mục tiêu của chúng ta là xác định điều kiện để phương trình tự nhất quán (3.11) có nghiệm không tầm thường Θ^* . Với mục đích này, xét hàm

$$F(\Theta) = 1 - \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\tilde{A}_{1,k}\Theta + \tilde{A}_2}, \quad \Theta \in [0, 1].$$

Do $\frac{A_k}{\tilde{A}_{1,k}} < \frac{M_q k \mathbb{P}(k) \alpha_3 \alpha_4 \alpha_{6,k} \omega_3}{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_{6,k} \omega_3} = M_q k \mathbb{P}(k)$ và $F(\Theta)$ là hàm số liên tục trên $[0, 1]$ nên chúng ta nhận được

$$F(1) = 1 - \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\tilde{A}_{1,k} + \tilde{A}_2} > 1 - \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\tilde{A}_{1,k}} > 1 - \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(k) > 0.$$

Ngoài ra, với mỗi $\Theta \in [0, 1]$, ta có $\frac{dF(\Theta)}{d\Theta} = \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{A_k \tilde{A}_{1,k}}{(\tilde{A}_{1,k}\Theta + \tilde{A}_2)^2} > 0$, tức là hàm $F(\Theta)$ đồng biến trên $(0, 1)$. Do đó, theo định lý giá trị trung gian, phương trình $F(\Theta) = 0$ có một nghiệm dương duy nhất $\Theta^* \in (0, 1)$ nếu $F(0) < 0$, hay tương đương với

$$\frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\tilde{A}_2} = \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(k) \frac{[\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2] \omega_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5} > 1.$$

Bất đẳng thức trên dẫn tới chỉ số ngưỡng \mathfrak{R}_0 thỏa mãn $\mathfrak{R}_0 > 1$. Khi đó, từ nghiệm dương duy nhất Θ^* của phương trình tự nhất quán (3.11), chúng ta sẽ tìm được trạng thái cân bằng đặc hữu duy nhất \mathbf{P}_* của mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng xác định bởi công thức (3.9). \square

3.2.3. Dáng điệu tiệm cận của điểm cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0

Trong phần này, luận án thảo luận về dáng điệu tiệm cận của mô hình lan truyền mã độc đề xuất. Đầu tiên, luận án nghiên cứu mối quan hệ giữa chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và sự ổn định tiệm cận địa phương của trạng thái cân bằng \mathbf{P}_0 :

Định lý 3.3. *Các mệnh đề sau đúng:*

- (i) Nếu $\mathfrak{R}_0 > 1$ thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 không ổn định.
- (ii) Nếu $\mathfrak{R}_0 < 1$ và $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_5 > \frac{\sigma_2 M_q \langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle}$ thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận địa phương.
- (iii) Nếu $\mathfrak{R}_0 < 1$ và $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_5 \leq \frac{\sigma_2 M_q \langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle}$ thì sự ổn định của trạng thái cân bằng không có mã độc phụ thuộc vào giá trị của các tham số và bậc phân thứ β .

Chứng minh. Để khảo sát tính ổn định tiệm cận địa phương của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 , luận án sẽ áp dụng phương pháp tuyến tính hóa quanh điểm cân bằng \mathbf{P}_0 . Thật vậy, xét ma trận Jacobi $J(\mathbf{P}_0)$ của mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng tại trạng thái cân bằng \mathbf{P}_0 như sau:

$$J(\mathbf{P}_0) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}_{6n \times 6n}$$

trong đó với mỗi $i, j = \overline{1, n}$, các ma trận vuông M_{ii}, M_{ij} xác định như sau:

$$M_{ii} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & \frac{M_q \sigma_1 i^2 \mathbb{P}(i)}{\langle n \rangle} & 0 & 0 & 0 \\ \eta & -\alpha_2 & \frac{M_q \sigma_2 i^2 \mathbb{P}(i)}{\langle n \rangle} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3 & -\alpha_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{M_q (\sigma_1 + \sigma_2) i^2 \mathbb{P}(i)}{\langle n \rangle} & -\mu & 0 & \theta \\ \omega_1 & \omega_2 & c & 0 & -\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & 0 & r_2 & -\alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{b_j M_q \sigma_1 i^2 \mathbb{P}(i)}{b_i \langle n \rangle} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_j M_q \sigma_2 i^2 \mathbb{P}(i)}{b_i \langle n \rangle} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_j M_q (\sigma_1 + \sigma_2) i^2 \mathbb{P}(i)}{b_i \langle n \rangle} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theo Định lý 7.20 trong [50], trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận địa phương khi và chỉ khi

$$\left| \arg(\tilde{\lambda}_j) \right| > \frac{\beta\pi}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, 6n.$$

Vì vậy, nhiệm vụ của chúng ta bây giờ là xác định tất cả các nghiệm $\tilde{\lambda}_j$ của phương trình đặc trưng $P_{6n}(\tilde{\lambda}) = 0$ ứng với ma trận Jacobi $J(\mathbf{P}_0)$. Thật vậy, bằng cách sử dụng nguyên lý quy nạp, chúng ta thu được

$$P_{6n}(\tilde{\lambda}) = (\tilde{\lambda} + \alpha_4)^n (\tilde{\lambda} + \alpha_3)^n (\tilde{\lambda} + \mu)^n (\tilde{\lambda} + \alpha_1)^{n-1} (\tilde{\lambda} + \alpha_2)^{n-1} (\tilde{\lambda} + \alpha_5)^{n-1} P_3(\tilde{\lambda}),$$

trong đó $P_3(\tilde{\lambda})$ là đa thức bậc ba cho bởi

$$\begin{aligned} P_3(\tilde{\lambda}) &= (\tilde{\lambda} + \alpha_1)(\tilde{\lambda} + \alpha_2)(\tilde{\lambda} + \alpha_5) - \frac{\sigma_2 M_q \langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle} \tilde{\lambda} - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 \frac{\omega_3 M_q (\eta \sigma_1 + \alpha_1 \sigma_2) \langle n^2 \rangle}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 \langle n \rangle} \\ &= \tilde{\lambda}^3 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5) \tilde{\lambda}^2 + \left(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_5 - \frac{\sigma_2 M_q \langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle} \right) \tilde{\lambda} + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 (1 - \mathfrak{R}_0). \end{aligned}$$

Để thấy rằng tập nghiệm của phương trình đặc trưng $P_{6n}(\tilde{\lambda}) = 0$ bao gồm ba nghiệm thực âm $\tilde{\lambda} = -\alpha_4$, $\tilde{\lambda} = -\alpha_3$, $\tilde{\lambda} = -\mu$ với cùng bội n và các nghiệm thực âm $\tilde{\lambda} = -\alpha_1$, $\tilde{\lambda} = -\alpha_2$, $\tilde{\lambda} = -\alpha_5$ với cùng bội $n - 1$. Thêm vào đó, do $6n - 3$ giá trị riêng $\tilde{\lambda}_j$ đều là số thực âm nên $|\arg(\tilde{\lambda}_j)| = \pi > \frac{\beta\pi}{2}$ với mọi $j = \overline{1, 6n - 3}$ và $\beta \in (0, 1)$. Do đó, tính ổn định của trạng thái cân bằng đặc hữu \mathbf{P}_0 phụ thuộc hoàn toàn vào nghiệm của phương trình bậc ba $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$. Để đơn giản, ký hiệu

$$a_0 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 (1 - \mathfrak{R}_0), \quad a_1 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_5 - \frac{\sigma_2 M_q \langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle}, \quad a_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5.$$

Tiếp theo, chúng ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $\mathfrak{R}_0 > 1$ thì chúng ta suy ra hệ số $a_0 < 0$ và do đó, nghiệm của phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ sẽ thuộc vào một trong các khả năng sau: 3 nghiệm dương, 1 nghiệm dương và 2 nghiệm phức liên hợp hoặc 2 nghiệm âm và 1 nghiệm dương, tức là ma trận Jacobi $J(\mathbf{P}_0)$ luôn có ít nhất một giá trị riêng dương $\tilde{\lambda}^*$ với argumen $\arg(\tilde{\lambda}^*) = 0 < \frac{\beta\pi}{2}$. Do đó, trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 không ổn định.

Trường hợp 2: Nếu $\mathfrak{R}_0 = 1$ thì phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ trở thành

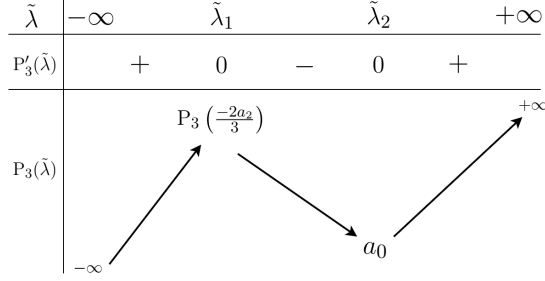
$$\tilde{\lambda} \left[\tilde{\lambda}^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5) \tilde{\lambda} + \left(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_5 - \frac{\sigma_2 M_q \langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle} \right) \right] = 0.$$

Chúng ta có thể thấy rằng phương trình trên luôn có giá trị riêng bằng 0 và do đó, chúng ta không có kết luận nào về tính ổn định của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 .

Trường hợp 3: Nếu $\mathfrak{R}_0 < 1$ thì chúng ta suy ra hệ số $a_0 > 0$ và do đó, các nghiệm của phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ sẽ thuộc vào một trong các khả năng sau: 3 nghiệm âm, 1 nghiệm âm và 2 nghiệm phức liên hợp hoặc 2 nghiệm dương và 1 nghiệm âm. Chú ý rằng phương trình $P'_3(\tilde{\lambda}) = 3\tilde{\lambda}^2 + 2a_2\tilde{\lambda} + a_1 = 0$ có biệt thức dương. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5)^2 - 3 \left(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_5 - \frac{\sigma_2 M_q \langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle} \right) \\ &= \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_5)^2 + (\alpha_2 - \alpha_5)^2}{2} + \frac{3\sigma_2 M_q \langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle} > 0. \end{aligned}$$

Trường hợp 3.1: Nếu $a_1 = 0$ thì phương trình $P'_3(\tilde{\lambda}) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\tilde{\lambda}_1 = \frac{-2a_2}{3} < 0$ và $\tilde{\lambda}_2 = 0$. Từ Hình 3.5, vì $a_0 > 0$ nên phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ có một nghiệm âm duy nhất $\tilde{\lambda}^*$ và hai nghiệm phức liên hợp.



Hình 3.5: Bảng biến thiên cho phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ trong Trường hợp 3.1

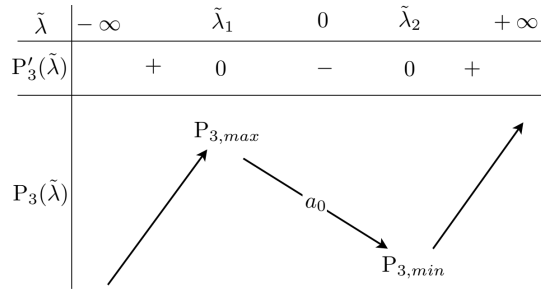
Do đó, phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ có thể viết lại như sau:

$$(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}^*) \left(\tilde{\lambda}^2 + (\tilde{\lambda}^* + a_2)\tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}^*(\tilde{\lambda}^* + a_2) \right) = 0.$$

Chú ý rằng phương trình $\tilde{\lambda}^2 + (\tilde{\lambda}^* + a_2)\tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}^*(\tilde{\lambda}^* + a_2) = 0$ có hai nghiệm phức liên hợp $\tilde{\lambda}_{c,1}$ và $\tilde{\lambda}_{c,2}$ nằm trong góc phần tư thứ nhất và thứ tư. Hơn nữa, argumen của chúng thỏa mãn $|\arg(\tilde{\lambda}_{c,i})| = \left| \arctan \left(\sqrt{\frac{3\tilde{\lambda}^* - a_2}{\tilde{\lambda}^* + a_2}} \right) \right|$. Do đó, theo Định lý 7.20 trong [50], trạng thái cân bằng không có mã độ \mathbf{P}_0 là

- ổn định tiệm cận nếu $\beta < \frac{2}{\pi} \left| \arctan \left(\sqrt{\frac{3\tilde{\lambda}^* - a_2}{\tilde{\lambda}^* + a_2}} \right) \right|$.
- ổn định nếu $\beta \leq \frac{2}{\pi} \left| \arctan \left(\sqrt{\frac{3\tilde{\lambda}^* - a_2}{\tilde{\lambda}^* + a_2}} \right) \right|$.
- không ổn định nếu $\beta > \frac{2}{\pi} \left| \arctan \left(\sqrt{\frac{3\tilde{\lambda}^* - a_2}{\tilde{\lambda}^* + a_2}} \right) \right|$.

Trường hợp 3.2: Nếu $a_1 < 0$ thì phương trình $P'_3(\tilde{\lambda}) = 3\tilde{\lambda}^2 + 2a_2\tilde{\lambda} + a_1 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt trái dấu $\tilde{\lambda}_1 < 0$ và $\tilde{\lambda}_2 > 0$. Tiếp theo, chúng ta xét bảng biến thiên sau (xem Hình 3.6)



Hình 3.6: Bảng biến thiên cho phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ trong Trường hợp 3.2

Vì $P_3(0) = a_0 > 0$ nên Hình 3.6 chỉ ra rằng phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thực âm $\tilde{\lambda}^*$ nhỏ hơn $\tilde{\lambda}_1$. Do đó, phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ có thể viết lại như sau:

$$(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}^*) \left[\tilde{\lambda}^2 + (\tilde{\lambda}^* + a_2)\tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}^*(\tilde{\lambda}^* + a_2) + a_1 \right] = 0.$$

Chú ý rằng vì $\tilde{\lambda}^* < 0$, $a_1 < 0$ và $a_0 > 0$ nên ta suy ra rằng $\tilde{\lambda}^* + a_2 < 0$. Khi đó, ta có

- Nếu $P_{3,\min} = P_3(\tilde{\lambda}_2) < 0$ thì phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ có một nghiệm âm và hai nghiệm dương. Do đó, trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 không ổn định.
- Nếu $P_{3,\min} = P_3(\tilde{\lambda}_2) > 0$ thì phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ có một nghiệm âm $\tilde{\lambda}^*$ và hai nghiệm phức liên hợp $\tilde{\lambda}_{c,1}$, $\tilde{\lambda}_{c,2}$ nằm trên góc phần tư thứ nhất và thứ tư của mặt phẳng phức. Hơn nữa, acgumen của chúng thỏa mãn

$$\left| \arg(\tilde{\lambda}_{c,i}) \right| = \left| \arctan \left(\frac{\sqrt{4a_1 - (\tilde{\lambda}^* + a_2)(a_2 - 3\tilde{\lambda}^*)}}{\tilde{\lambda}^* + a_2} \right) \right|.$$

Vì vậy, trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0

- ổn định tiệm cận nếu $\beta < \frac{2}{\pi} \left| \arctan \left(\frac{\sqrt{4a_1 - (\tilde{\lambda}^* + a_2)(a_2 - 3\tilde{\lambda}^*)}}{\tilde{\lambda}^* + a_2} \right) \right|$.
- ổn định nếu $\beta \leq \frac{2}{\pi} \left| \arctan \left(\frac{\sqrt{4a_1 - (\tilde{\lambda}^* + a_2)(a_2 - 3\tilde{\lambda}^*)}}{\tilde{\lambda}^* + a_2} \right) \right|$.
- không ổn định nếu $\beta > \frac{2}{\pi} \left| \arctan \left(\frac{\sqrt{4a_1 - (\tilde{\lambda}^* + a_2)(a_2 - 3\tilde{\lambda}^*)}}{\tilde{\lambda}^* + a_2} \right) \right|$.

Trường hợp 3.3: Nếu $a_1 > 0$ thì phương trình $P'_3(\tilde{\lambda}) = 3\tilde{\lambda}^2 + 2a_2\tilde{\lambda} + a_1 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt $\tilde{\lambda}_1$ và $\tilde{\lambda}_2$. Tiếp theo, ta xét bảng biến thiên (xem Hình 3.7)

$\tilde{\lambda}$	$-\infty$	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	0	$+\infty$
$P'_3(\tilde{\lambda})$	+	0	-	0	+
$P_3(\tilde{\lambda})$					

Hình 3.7: Bảng biến thiên cho phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ trong Trường hợp 3.3

Do $P_3(0) = a_0 > 0$ nên Hình 3.7 chỉ ra rằng phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ không thể có nghiệm với phần thực không âm nếu $a_1 > 0$. Khi đó, ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu $P_{3,\max} \cdot P_{3,\min} < 0$ thì phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ có ba nghiệm âm. Do đó, trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận.
- Nếu $P_{3,\max} \cdot P_{3,\min} > 0$ thì phương trình $P_3(\tilde{\lambda}) = 0$ có một nghiệm âm duy nhất và hai nghiệm phức liên hợp $\tilde{\lambda}_{c,1}$ và $\tilde{\lambda}_{c,2}$ nằm trong góc phần tư thứ hai và thứ ba của mặt phẳng phức. Do đó, acgumen của các nghiệm này thỏa mãn

$$\left| \arg(\tilde{\lambda}_{c,i}) \right| > \frac{\pi}{2} > \frac{\beta\pi}{2}.$$

Do đó, trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận.

□

Nhận xét 3.3. Từ kết quả của Định lý 3.3, chúng ta thấy rằng điều kiện $\mathfrak{R}_0 < 1$ là chưa đủ để loại bỏ hoàn toàn mã độc trên mạng phức hợp không đồng nhất và các tham số của mô hình cũng đóng vai trò quan trọng trong sự ổn định tiệm cận địa phương của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 .

Tiếp theo, luận án thảo luận về một vấn đề quan trọng trong lý thuyết dịch tễ học liên quan đáng điều tiệm cận toàn cục của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 :

Định lý 3.4. *Nếu giá trị ngưỡng*

$$\tilde{\mathfrak{R}}_0 = \frac{\omega_3 M_q (\sigma_1 + \sigma_2) \langle n^2 \rangle}{\alpha_2 \alpha_5 \langle n \rangle} < 1$$

thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 của mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng ổn định tiệm cận toàn cục trên Σ^+ .

Chứng minh. Với mỗi $k = \overline{1, n}$, giả sử $\mathbf{x}^k(t)$ là một nghiệm không âm của hệ phương trình vi phân phân thứ (3.1) và xét một điểm hàm $\mathbf{V} : \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k}{b_k} \mathbb{P}(k) \{ \Psi_{b_k}(S_k) + E_{1,k} + E_{2,k} + I_k + Q_k + R_k \}.$$

Theo Nhận xét 1.3 và do tính không âm của nghiệm $\mathbf{x}^k(t)$, chúng ta suy ra $\mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$ là hàm khả vi, xác định không âm và được gọi là hàm Lyapunov của mô hình lan truyền mã độc đề xuất. Sau đây, để đơn giản, chúng ta sẽ lược bỏ biến thời gian t trong các ẩn hàm, tức là chúng ta sẽ viết S_k thay vì $S_k(t)$. Khi đó, bằng cách lấy đạo hàm Caputo bậc phân thứ của hàm $\mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$ dọc theo nghiệm $\mathbf{x}(t)$ và sử dụng Bổ đề 1.2, chúng ta nhận được

$${}^C \mathcal{D}_t^\beta \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k}{b_k} \mathbb{P}(k) {}^C \mathcal{D}_t^\beta \left(S_k - b_k - b_k \ln \left(\frac{S_k}{b_k} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k}{b_k} \mathbb{P}(k) \left({}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta E_{1,k} + {}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta E_{2,k} + {}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta I_k + {}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta Q_k + {}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta R_k \right) \\
& \leq \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k}{b_k} \mathbb{P}(k) \left[\left(1 - \frac{b_k}{S_k} \right) {}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta S_k + {}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta (E_{1,k} + E_{2,k} + I_k + Q_k + R_k) \right],
\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{b_k}{S_k} \right) {}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta S_k & = \left(1 - \frac{b_k}{S_k} \right) [\Lambda(k) - (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) S_k \Theta - \mu S_k + \theta R_k] \\
& = \Lambda(k) - (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) S_k \Theta - \mu S_k + \theta R_k - \frac{b_k \Lambda(k)}{S_k} \\
& \quad + b_k (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) \Theta + \mu b_k - \frac{b_k \theta R_k}{S_k}, \tag{3.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta (E_{1,k} + E_{2,k} + I_k + Q_k + R_k) & = (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) S_k \Theta - \theta R_k \\
& \quad - \mu (E_{1,k} + E_{2,k} + I_k + Q_k + R_k) \\
& \leq (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) b_k \Theta - \mu I_k - \theta R_k. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Kết hợp các đánh giá (3.12) và (3.13), chúng ta nhận được

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{b_k}{S_k} \right) {}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta S_k + {}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta (E_{1,k} + E_{2,k} + I_k + Q_k + R_k) \\
& \leq \left(\Lambda(k) - \mu S_k - \frac{b_k \Lambda(k)}{S_k} + \mu b_k \right) - \frac{b_k \theta R_k}{S_k} - \mu I_k + b_k (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) \Theta.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng với mỗi $t \geq 0$ và $\mathbf{x}(t) \in \Sigma^+$, ta có

$$\Lambda(k) - \mu S_k - \frac{b_k \Lambda(k)}{S_k} + \mu b_k = \left(1 - \frac{b_k}{S_k} \right) (\Lambda(k) - \mu S_k) \leq 0.$$

Kết hợp các đánh giá trên, ta có

$$\begin{aligned}
{}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) & \leq \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k}{b_k} \mathbb{P}(k) [b_k (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) \Theta - \mu I_k] \\
& = \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(k) (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) \Theta - \mu \Theta \\
& = \alpha_5 \Theta \left(\frac{\alpha_2}{\omega_3} \tilde{\mathfrak{R}}_0 - \frac{\mu}{\alpha_5} \right).
\end{aligned}$$

Khi đó, ${}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) \leq 0$ nếu $\frac{\alpha_2}{\omega_3} \tilde{\mathfrak{R}}_0 - \frac{\mu}{\alpha_5} \leq 0$, hay tương đương với

$$\tilde{\mathfrak{R}}_0 \leq \frac{\mu \omega_3}{\alpha_2 \alpha_5} = \frac{\mu \omega_3}{(\mu + \omega_2 + \omega_3)(r_1 + c + \mu)} < 1.$$

Do đó, theo Định lý 1.3, chúng ta có thể kết luận rằng trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận toàn cục nếu $\tilde{\mathfrak{R}}_0 < 1$. \square

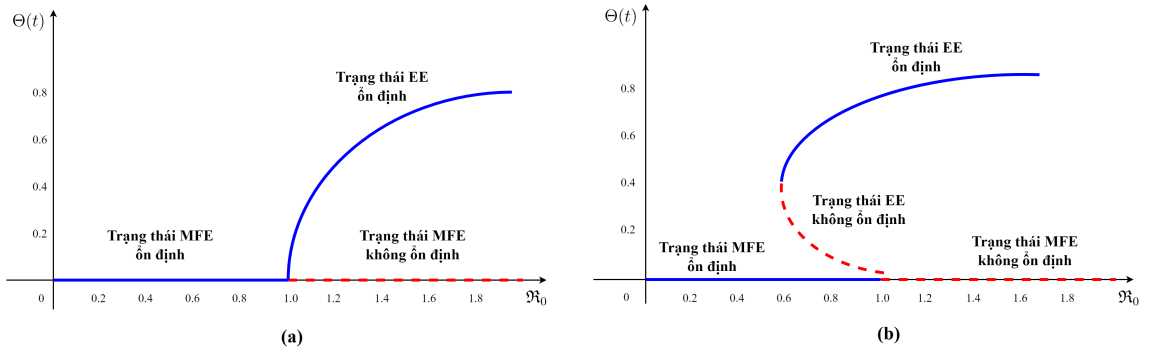
Nhận xét 3.4. Vì $\alpha_1 = \eta + \mu + \omega_1 > \eta$ nên ta có

$$\frac{\omega_3 (\sigma_1(k) + \sigma_2(k))}{\alpha_2 \alpha_5} > \frac{\omega_3 (\eta \sigma_1(k) + \alpha_1 \sigma_2(k))}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5},$$

tức là $\tilde{\mathfrak{R}}_0 > \mathfrak{R}_0$. Mặt khác, theo Định lý 3.4, do trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận toàn cục chỉ khi $\tilde{\mathfrak{R}}_0 > 1$ nên điều kiện $\mathfrak{R}_0 < 1$ là không đủ để loại bỏ dịch bệnh trên mạng phức hợp không đồng nhất.

3.2.4. Phân tích tính rẽ nhánh

Trong các mục trước, luận án đã chứng minh rằng nếu giá trị ngưỡng $\mathfrak{R}_0 < 1$ thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 là ổn định tiệm cận địa phương và trạng thái này là không ổn định nếu giá trị ngưỡng \mathfrak{R}_0 vượt quá 1. Tuy nhiên, trong trường hợp giá trị ngưỡng \mathfrak{R}_0 thay đổi qua lại ở giá trị 1, tức là trạng thái cân bằng \mathbf{P}_0 sẽ thay đổi từ ngưỡng ổn định tiệm cận địa phương sang không ổn định, chúng ta chưa có kết luận gì về đặc trưng đáng điệu của trạng thái cân bằng này. Trong lý thuyết định tính của các hệ động lực, để mô tả các hiện tượng một sự thay đổi nhỏ của tham số có thể gây ra một sự thay đổi đột ngột trong đáng điệu của mô hình, chúng ta tiến hành phân tích tính chất rẽ nhánh địa phương của mô hình bao gồm tính rẽ nhánh tiến và rẽ nhánh lùi.



Hình 3.8: Minh họa cho hiện tượng rẽ nhánh: (a) Rẽ nhánh tiến, (b) Rẽ nhánh lùi

Trong mục này, luận án sẽ thảo luận về hiện tượng rẽ nhánh của mô hình lan truyền mã độc đề xuất xảy ra khi $\mathfrak{R}_0 = 1$. Định lý được phát biểu như sau:

Định lý 3.5. *Mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng luôn rẽ nhánh tiến tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ với mọi giá trị của tham số.*

Chứng minh. Để xác định hướng của đường cong rẽ nhánh, luận án xét đáng điệu địa phương của ngăn lan truyền mã độc là một hàm của \mathfrak{R}_0 . Khi đó, hướng rẽ nhánh được

xác định bởi dấu của $\frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0}$ tại $(\mathfrak{R}_0, \Theta) = (1, 0)$. Do ở trạng thái cân bằng đặc hữu, hàm $I_k(t)$ dương với mọi $t \geq 0$ nên hàm $\Theta(t)$ cũng dương với mọi $t \geq 0$. Từ phương trình tự nhất quán (3.11), chúng ta suy ra rằng phương trình $F(\Theta) = 0$ phải có ít nhất một nghiệm không tầm thường Θ^* . Xét phương trình sau:

$$\frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\tilde{A}_{1,k} \Theta + \tilde{A}_2} = 1,$$

trong đó A_k , $\tilde{A}_{1,k}$ và \tilde{A}_2 được cho trong Định lý 3.2. Bằng cách nhân cả tử số và mẫu số của biểu thức $\frac{A_k}{\tilde{A}_{1,k} \Theta + \tilde{A}_2}$ với số hạng $\frac{M_q(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)\langle n^2 \rangle}{\alpha_1\alpha_2\alpha_5\langle n \rangle}$, chúng ta nhận được

$$\frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_3\alpha_4\alpha_{6,k}k\mathbb{P}(k)\mathfrak{R}_0}{\alpha_{8,k}\mathfrak{R}_0\Theta + \frac{M_q(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)\langle n^2 \rangle}{\alpha_1\alpha_2\alpha_5\langle n \rangle} [\alpha_{9,k}\Theta + \tilde{A}_2]} = 1. \quad (3.14)$$

Chú ý rằng $\mathfrak{R}_0 = \frac{\omega_3 M_q(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)\langle n^2 \rangle}{\alpha_1\alpha_2\alpha_5\langle n \rangle}$ và phương trình trên xác định đường cong cân bằng đặc hữu trong góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ (\mathfrak{R}_0, Θ) . Khi đó, để thu được điều kiện cho hướng rẽ nhánh của đường cong cân bằng đặc hữu, chúng ta lấy đạo hàm hàm ẩn của phương trình (3.14) theo \mathfrak{R}_0 và xác định dấu của $\frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0}$ tại $(\mathfrak{R}_0, \Theta) = (1, 0)$. Thật vậy, ta có

$$\frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_3\alpha_4\alpha_{6,k}k\mathbb{P}(k)(P_{1,k} - P_{2,k})}{\left[\alpha_{8,k}\mathfrak{R}_0\Theta + \frac{M_q(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)\langle n^2 \rangle}{\alpha_1\alpha_2\alpha_5\langle n \rangle} (\alpha_{9,k}\Theta + \tilde{A}_2) \right]^2} = 0, \quad (3.15)$$

trong đó các số hạng $P_{1,k}$ và $P_{2,k}$ được xác định như sau:

$$P_{1,k} = \alpha_{8,k}\mathfrak{R}_0\Theta + \frac{M_q(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)\langle n^2 \rangle}{\alpha_1\alpha_2\alpha_5\langle n \rangle} (\alpha_{9,k}\Theta + \tilde{A}_2)$$

$$P_{2,k} = \mathfrak{R}_0 \left[\alpha_{8,k}\Theta + \alpha_{8,k}\mathfrak{R}_0 \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} + \alpha_{9,k} \frac{M_q(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)\langle n^2 \rangle}{\alpha_1\alpha_2\alpha_5\langle n \rangle} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} \right].$$

Sau đây, để đơn giản, chúng ta ký hiệu $\frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} \Big|_{(\mathfrak{R}_0, \Theta) = (1, 0)}$ bởi $\frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} \Big|_{(1, 0)}$. Khi đó, với $\mathfrak{R}_0 = 1$ và $\Theta = 0$, phương trình (3.15) tương đương với

$$\frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_3\alpha_4\alpha_{6,k}k\mathbb{P}(k) \left[\frac{M_q(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)\langle n^2 \rangle}{\alpha_1\alpha_2\alpha_5\langle n \rangle} (\tilde{A}_2 - \alpha_{9,k} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} \Big|_{(1, 0)}) - \alpha_{8,k} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} \Big|_{(1, 0)} \right]}{\left(\frac{M_q(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)\langle n^2 \rangle}{\alpha_1\alpha_2\alpha_5\langle n \rangle} \tilde{A}_2 \right)^2} = 0. \quad (3.16)$$

Chú ý rằng

$$\frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_3\alpha_4\alpha_{6,k}k\mathbb{P}(k) \frac{M_q(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)\langle n^2 \rangle}{\alpha_1\alpha_2\alpha_5\langle n \rangle} \tilde{A}_2}{\left(\frac{M_q(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)\langle n^2 \rangle}{\alpha_1\alpha_2\alpha_5\langle n \rangle} \tilde{A}_2 \right)^2} = 1.$$

Do đó, phương trình (3.16) trở thành

$$\left\{ \frac{M_q}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_{6,k} k \mathbb{P}(k) \left[\frac{\alpha_{9,k} M_q (\eta \sigma_1 + \alpha_1 \sigma_2) \langle n^2 \rangle}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 \langle n \rangle} + \alpha_{8,k} \right]}{\left(\frac{M_q (\eta \sigma_1 + \alpha_1 \sigma_2) \langle n^2 \rangle}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 \langle n \rangle} \tilde{A}_2 \right)^2} \right\} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} \Big|_{(1,0)} = 1.$$

Cuối cùng, vì các tham số của mô hình lan truyền mã độc SE₁E₂IQR phân thứ dựa trên mạng đều không âm nên chúng ta suy ra $\frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} \Big|_{(1,0)}$ luôn dương với mọi giá trị của tham số. Vì vậy, chúng ta suy ra mô hình lan truyền mã độc SE₁E₂IQR phân thứ dựa trên mạng luôn rẽ nhánh tiến tại $\mathfrak{R}_0 = 1$. \square

3.3. Một số thảo luận

Mục này thực hiện một số tính toán liên quan đến cấu trúc mạng và các tham số để giải thích cho các kết quả lý thuyết. Vì mạng cảm biến không dây là mạng quy mô tự do Barabási-Albert giới hạn năng lượng nên hai tham số hiệu chỉnh được λ_d và λ_e được giả sử nhận giá trị dương để thể hiện vai trò của cả bậc của nút lẫn năng lượng dư của nút trong mạng. Ngoài ra, luận án cũng giả sử rằng $\lambda_d = \frac{4}{5} > \lambda_e = \frac{1}{5}$, tức là khả năng kết nối giữa các nút chiếm ưu thế trong cấu trúc mạng. Thêm vào đó, theo công thức (11) trong [25], xác suất $\mathbb{P}(k) = \frac{C}{(79.94k + 120)^{3.5}}$ và C là hằng số sao cho $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(k) = 1$. Trong mục này, luận án xét số nhóm $n = 10$, tốc độ nhiễm mã độc $\sigma_1(k) = \sigma_1 k$, $\sigma_2(k) = \sigma_2 k$ và mức độ nhiễm $\nu(k) = k$ với $\sigma_1 = 0.35$, $\sigma_2 = 0.25$. Sau đây, bằng cách sử dụng công cụ tính toán chuỗi symsum trong MatLab, ta có

$$\langle n \rangle = 1.7837, \quad \langle n^2 \rangle = 5.2435.$$

Ngoài ra, các tham số khác được cho như sau: $\Lambda(k) = 0.04$, $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 0.12$, $\omega_3 = 0.2$, $c = 0.17$, $\mu = 0.04$, $r_1 = 0.05$, $\theta = 0.03$, $r_2 = 0.06$ và $\eta = 0.15$. Do đó, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 cho bởi

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\omega_3 M_q (\eta \sigma_1 + \alpha_1 \sigma_2) \langle n^2 \rangle}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 \langle n \rangle} \approx 1.1467 M_q,$$

tức là nếu hằng số tương tác dựa trên luật mờ M_q đủ lớn thì chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 có thể vượt quá 1. Điều này chứng tỏ vai trò quan trọng của sự kiểm soát việc truyền dữ liệu khi mạng bị nhiễm phần mềm độc hại.

3.3.1. Phân tích độ nhạy tham số của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0

Trong một mô hình lan truyền mã độc, các chỉ số độ nhạy cho biết mức độ ảnh hưởng của các tham số khác nhau đối với dáng điệu tổng thể của mô hình và đồng thời, cho

phép chúng ta ước tính tốc độ thay đổi của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 khi các tham số thay đổi. Với mục tiêu xác định độ nhạy tham số của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 , đầu tiên, luận án nhắc lại từ [112] định nghĩa sau:

Định nghĩa 3.1 ([112], Definition, pp. 1280). Chỉ số độ nhạy chuẩn hóa của một đại lượng u phụ thuộc khả vi vào tham số p được xác định bởi

$$\Upsilon_p^u = \frac{\partial u}{\partial p} \times \frac{p}{u}.$$

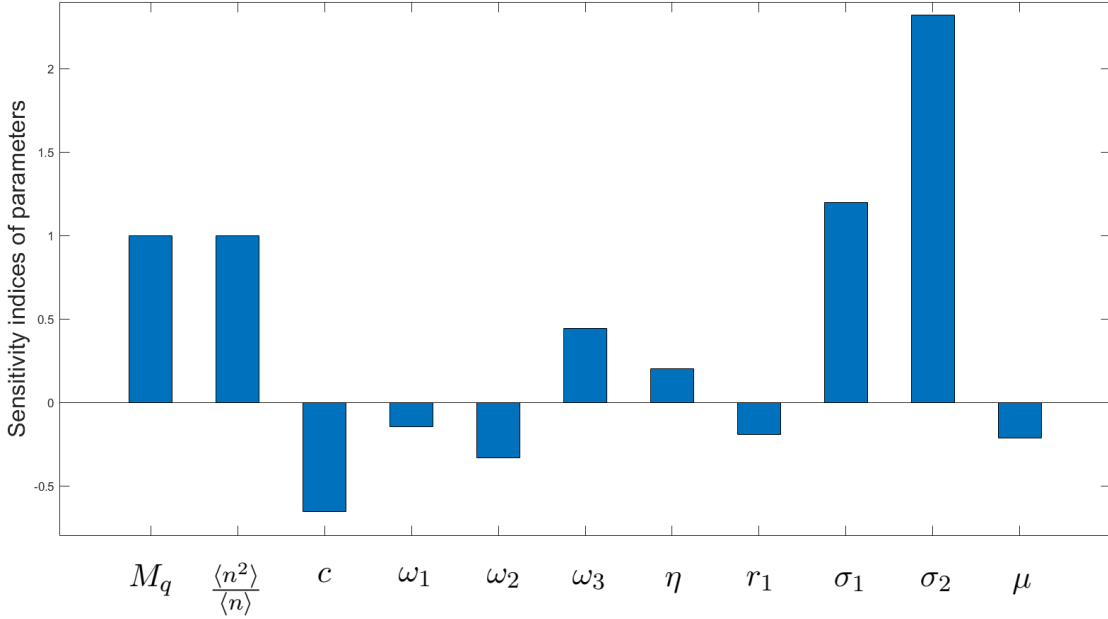
Theo định nghĩa trên, độ nhạy chuẩn hóa đối với các tham số của \mathfrak{R}_0 cho bởi

$$\begin{aligned} \Upsilon_{M_q}^{\mathfrak{R}_0} &= 1, & \Upsilon_{\frac{\langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle}}^{\mathfrak{R}_0} &= 1, & \Upsilon_c^{\mathfrak{R}_0} &= -\frac{c}{c + \mu + r_1}, & \Upsilon_{\omega_2}^{\mathfrak{R}_0} &= -\frac{\omega_2}{\omega_2 + \omega_3 + \mu} \\ \Upsilon_{r_1}^{\mathfrak{R}_0} &= -\frac{r_1}{r_1 + c + \mu}, & \Upsilon_{\sigma_1}^{\mathfrak{R}_0} &= \frac{\eta}{\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2}, & \Upsilon_{\sigma_2}^{\mathfrak{R}_0} &= \frac{\alpha_1}{\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2}, \\ \Upsilon_{\omega_1}^{\mathfrak{R}_0} &= -\frac{\omega_1\eta\sigma_1}{\alpha_1(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)}, & \Upsilon_{\omega_3}^{\mathfrak{R}_0} &= \frac{\omega_2 + \mu}{\omega_3 + \omega_2 + \mu}, & \Upsilon_{\eta}^{\mathfrak{R}_0} &= \frac{\eta\sigma_1(\omega_1 + \mu)}{\alpha_1(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)} \\ \Upsilon_{\mu}^{\mathfrak{R}_0} &= \frac{\mu\sigma_1(\mu + \omega)}{\alpha_1(\eta\sigma_1 + \alpha_1\sigma_2)} - \frac{\mu(\alpha_2 + \alpha_5)}{\alpha_2\alpha_5}. \end{aligned}$$

Bảng 3.3 cho biết chỉ số độ nhạy chi tiết của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 đối với các tham số và Hình 3.9 được dựng với gói lệnh `bar` trong MatLab, cung cấp biểu diễn hình học cho các giá trị trong Bảng 3.3.

Bảng 3.3: Chỉ số độ nhạy của giá trị ngưỡng \mathfrak{R}_0 đối với các tham số

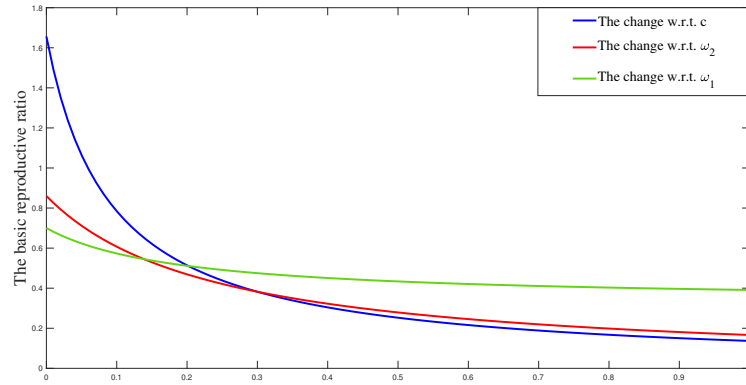
TT	Tham số	Mô tả	Chỉ số độ nhạy
1	M_q	Hằng số tương tác dựa trên luật mờ	+1
2	$\frac{\langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle}$	Tham số cấu trúc mạng	+1
3	c	Tốc độ các nút lan truyền mã độc bị cách ly	-0.6538
4	ω_1	Tốc độ các nút mang mã độc loại 1 bị cách ly	-0.1448
5	ω_2	Tốc độ các nút mang mã độc loại 2 bị cách ly	-0.333
6	ω_3	Tốc độ thành nút lan truyền mã độc của nút mang mã độc loại 2	0.444
7	η	Tốc độ chuyển từ nút mang mã độc loại 1 sang mang mã độc loại 2	0.20276
8	r_1	Tốc độ hồi phục của nút lan truyền mã độc	-0.1923
9	σ_1	Tốc độ chuyển trạng thái từ miễn cảm sang mang mã độc loại 1	1.2
10	σ_2	Tốc độ chuyển trạng thái từ miễn cảm sang mang mã độc loại 2	2.32
11	μ	Tốc độ nút rời mạng	-0.21089



Hình 3.9: Minh họa cho kết quả đánh giá độ nhạy tham số của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0

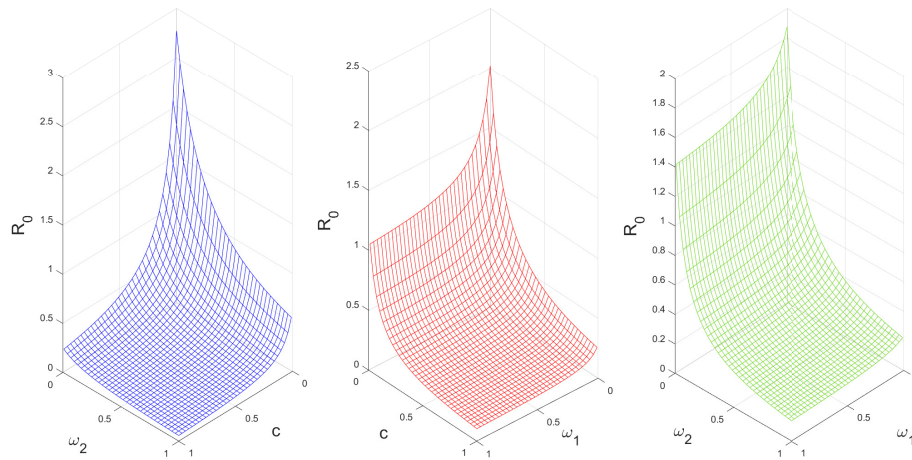
Các kết quả trong bảng trên chỉ ra rằng chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 ít nhạy nhất với tham số ω_1 , sau đó là tốc độ hồi phục r_1 . Tham số lan truyền mã độc dựa trên luật mờ M_q và tham số cấu trúc mạng $\frac{\langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle}$ có cùng độ nhạy với chỉ số ngưỡng lan truyền. Thật vậy, nếu hai tham số này tăng 10% thì chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 tương ứng cũng sẽ tăng 10%. Đặc biệt, các tham số có độ nhạy lớn nhất đối với \mathfrak{R}_0 là tham số chuyển từ trạng thái (S) sang các trạng thái mang mã độc σ_1 và σ_2 . Thêm vào đó, chúng ta cũng thấy rằng giá trị ngưỡng \mathfrak{R}_0 nhạy với tốc độ cách ly c hơn so với tốc độ cách ly ω_2 và độ nhạy của \mathfrak{R}_0 với tốc độ trở thành nút lan truyền mã độc ω_3 xấp xỉ $\frac{4}{9}$. Thật vậy, theo dữ liệu trong Bảng 3.3, chúng ta thấy rằng nếu tốc độ cách ly c tăng thêm 10% thì giá trị của giá trị ngưỡng \mathfrak{R}_0 sẽ giảm 6.538%, trong khi cần phải giảm 1.448% của tốc độ cách ly ω_1 mới có thể tăng giá trị của \mathfrak{R}_0 thêm 10%. Ngoài ra, để giảm giá trị của \mathfrak{R}_0 xuống 10%, chúng ta cần giảm giá trị của các tham số η , ω_3 tương ứng là 2.0276% và 4.44%. Ngược lại, tăng giá trị của ω_2 sẽ giúp giảm giá trị của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 .

Mặt khác, Định lý 3.3 đã chỉ ra rằng điều kiện $\mathfrak{R}_0 < 1$ là một trong cách điều kiện đảm bảo cho tính ổn định tiệm cận địa phương của điểm cân bằng \mathbf{P}_0 . Tiếp theo, bằng cách coi chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 là một hàm của các biến c , ω_1 và ω_2 , luận án đánh giá ảnh hưởng của các hằng số cách ly ω_1, ω_2, c đối với \mathfrak{R}_0 (xem Hình 3.10).



Hình 3.10: Ảnh hưởng của các tham số cách ly đối với chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0

Tiếp đó, luận án biểu diễn trong Hình 3.11 sự biến thiên trong không gian ba chiều của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 theo các cặp tham số cách ly. Theo Hình 3.11, chúng ta thấy rằng giá trị của \mathfrak{R}_0 giảm đáng kể theo các tham số c và ω_2 , trong khi giá trị ngưỡng này giảm khá chậm khi tham số ω_1 biến thiên từ 0 đến 1. Nhìn chung, các tham số cách ly càng lớn thì hiệu số $\mathfrak{R}_0 - 1$ càng nhỏ.

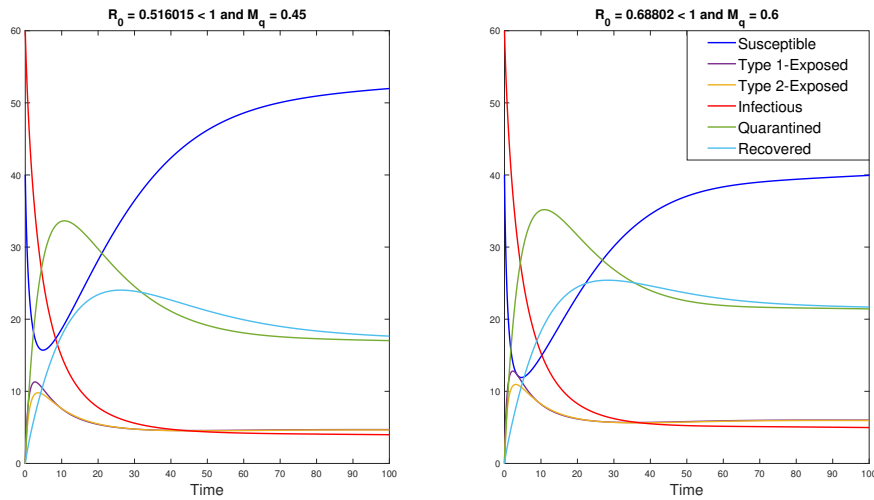


Hình 3.11: Biểu diễn trong không gian ba chiều giá trị của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 theo các tham số cách ly

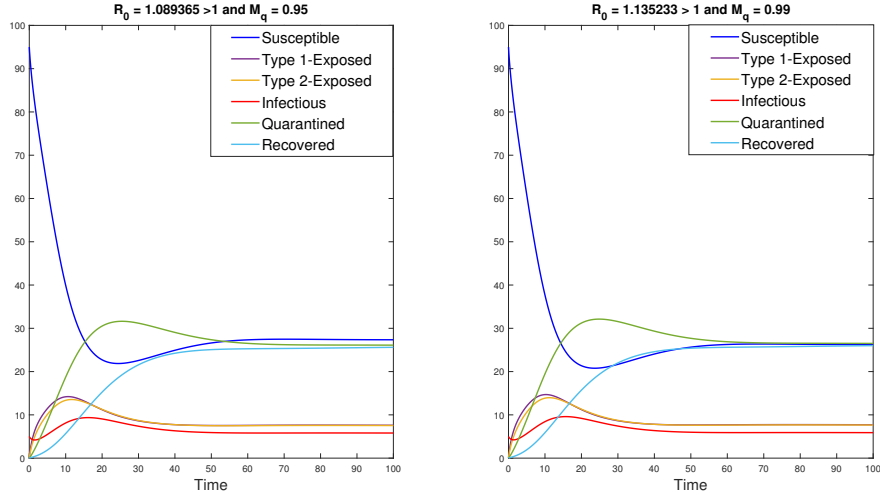
3.3.2. Một số mô phỏng và thảo luận

Sau đây, dựa trên phương pháp dự báo-hiệu chỉnh Adams-Bashforth-Moulton cải tiến và chương trình Matlab `fde12.m`, luận án sẽ biểu diễn hình học đáng điệu theo thời gian

của mô hình lan truyền mã độc đề xuất và minh họa cho các kết quả lý thuyết. Trong Hình 3.12, luận án giả định tham số tương tác dựa trên luật mờ $M_q \in \{0.45, 0.6\}$. Khi đó, chúng ta thấy rằng $\mathfrak{R}_0 < 1$ và điều kiện $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_5 > \frac{\sigma_2 M_q \langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle}$ thỏa mãn. Do đó, theo Định lý 3.3, trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận địa phương. Hơn nữa, giá trị ngưỡng $\tilde{\mathfrak{R}}_0$ tính được khi đó lần lượt bằng 0.7183 và 0.9578, tức là trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 cũng ổn định tiệm cận toàn cục (theo Định lý 3.4). Thật vậy, dáng điệu của mô hình trong trường hợp này được mô tả bởi Hình 3.12 với kịch bản chung là mật độ nút lan truyền mã độc có xu hướng giảm mạnh trong khi mật độ nút nhạy cảm tăng nhanh sau khi đạt điểm cực tiểu tại thời điểm $t = 5$. Thêm vào đó, Hình 3.12 cũng chỉ ra rằng tham số M_q càng nhỏ thì mật độ các nút nhạy cảm càng cao, điều đó có nghĩa là việc giảm kết nối tạm thời hoặc thậm chí tạm dừng truyền dữ liệu khi mạng bị tấn công bởi phần mềm độc hại là một trong những giải pháp để giảm tốc độ lây lan của phần mềm độc hại trên mạng. Hình 3.13 xem xét dáng điệu của mô hình lan truyền mã độc đề xuất trong trường hợp $\mathfrak{R}_0 > 1$. Trong trường hợp này, chúng ta có thể thấy rằng mặc dù mật độ nút nhạy cảm ban đầu khá cao, nhưng nó có xu hướng giảm đáng kể, đạt đến điểm thấp nhất khi $t = 20$ và không thay đổi đáng kể trong suốt thời gian sau đó. Hình 3.13 minh họa cho kết quả của Định lý 3.2 phần mềm độc hại tồn tại lâu dài trên mạng khi $\mathfrak{R}_0 > 1$.

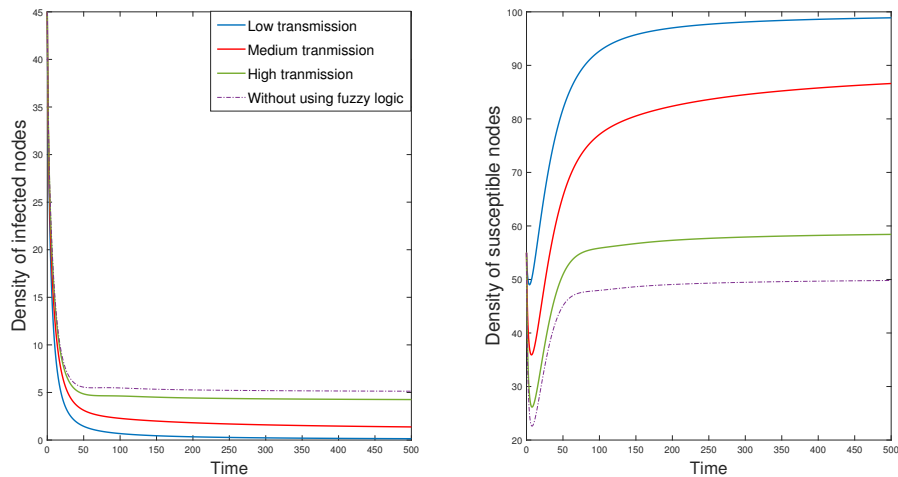


Hình 3.12: Dáng điệu theo thời gian của $S(t)$, $E_1(t)$, $E_2(t)$, $I(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ khi $\mathfrak{R}_0 < 1$



Hình 3.13: Dạng điệu theo thời gian của $S(t)$, $E_1(t)$, $E_2(t)$, $I(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ khi $\mathfrak{R}_0 > 1$

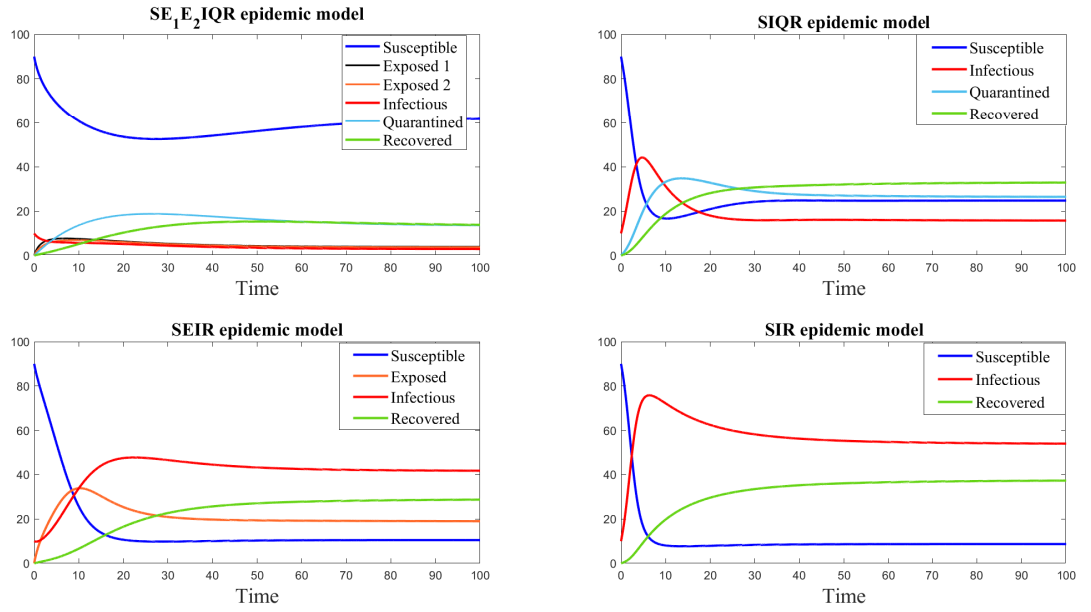
Ngoài ra, để đánh giá ảnh hưởng của bậc nút và tốc độ đổi trạng thái của nút đối với sự lan truyền phần mềm độc hại trên mạng phức hợp không đồng nhất, luận án khảo sát dạng điệu theo thời gian của trạng thái miễn cảm và trạng thái lan truyền mã độc với một số giá trị khác nhau của M_q , trong đó đường nét đứt biểu diễn kết quả khi không sử dụng logic mờ và các đường liền nét biểu thị kết quả với một số M_q khác nhau. Theo Hình 3.14, dễ thấy rằng tham số M_q càng lớn thì mật độ nút lan truyền mã độc càng cao và mật độ nút miễn cảm càng thấp. Đặc biệt, trong trường hợp mô hình lan truyền mã độc không sử dụng logic mờ, mật độ nút lan truyền mã độc cho kết quả cao nhất và mật độ nút miễn cảm cho kết quả thấp nhất.



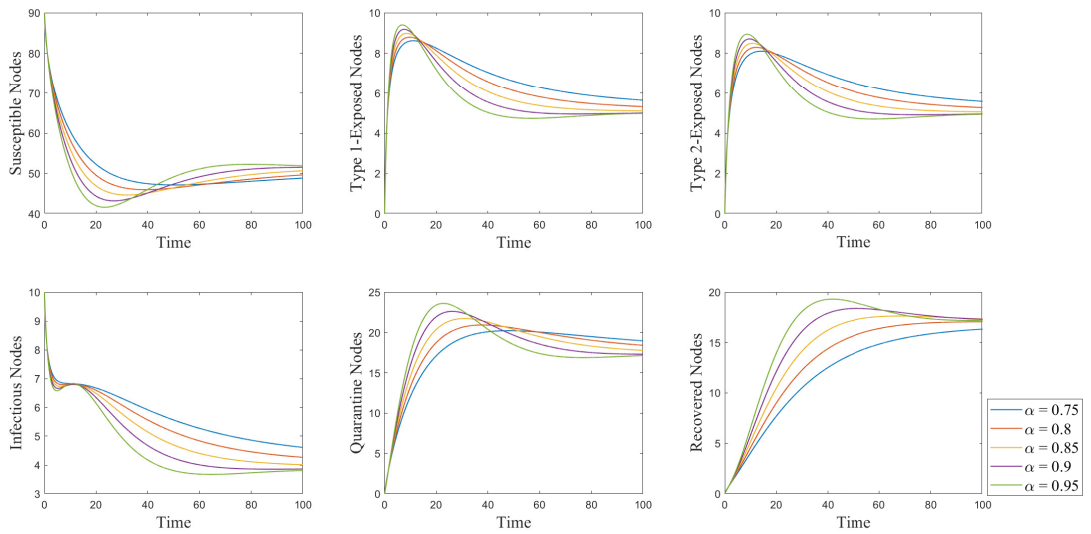
Hình 3.14: Ảnh hưởng của tham số lan truyền mã độc dựa trên luật mờ M_q đến mật độ của các trạng thái nhạy cảm và lan truyền mã độc

Trong Hình 3.15, luận án thảo luận về dáng điệu tiệm cận của mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng đề xuất so sánh với ba mô hình lan truyền mã độc phân thứ khác bao gồm mô hình lan truyền mã độc SIR, mô hình lan truyền mã độc SEIR và mô hình lan truyền mã độc SIQR. Trong các mô hình lan truyền mã độc này, chúng ta thấy rằng mật độ các nút lan truyền mã độc đều có xu hướng giảm dần, trong đó các nút lan truyền mã độc trong mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR có tốc độ giảm nhanh nhất so với 3 mô hình còn lại. Trong mô hình lan truyền mã độc SIR, mức độ giảm của trạng thái lan truyền mã độc thấp hơn so với các mô hình khác do không xem xét các biện pháp cách ly các nút mang mã độc. Ngược lại, có thể thấy mật độ nút lan truyền mã độc giảm đáng kể trong các mô hình lan truyền mã độc SIQR và SE_1E_2IQR nhờ tính đến biện pháp cách ly. Đặc biệt, trong mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR , các nút nhiễm bị được phân thành ba loại: trạng thái mang mã độc loại 1, trạng thái mang mã độc loại 2 và trạng thái lan truyền mã độc. Sau đó, với các biện pháp cách ly thích hợp, các nút chứa các phần mềm độc hại bị cô lập khỏi mạng với tốc độ lần lượt là ω_1, ω_2 và c . Ở đây, do không chỉ các nút lan truyền mã độc mà cả các nút mang mã độc cũng được cách ly khỏi mạng nên chúng ta có thể giảm đáng kể số lượng nút lan truyền mã độc trong mạng, ngăn các nút mang mã độc thành lan truyền mã độc và đó cũng là lý do tại sao mật độ các nút lan truyền mã độc trong mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR thấp hơn các mô hình khác. Tóm lại, điểm khác biệt lớn nhất giữa mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR với các mô hình lan truyền mã độc khác là việc cách ly thích hợp sẽ làm tăng số nút miễn cảm và giảm số nút bị nhiễm.

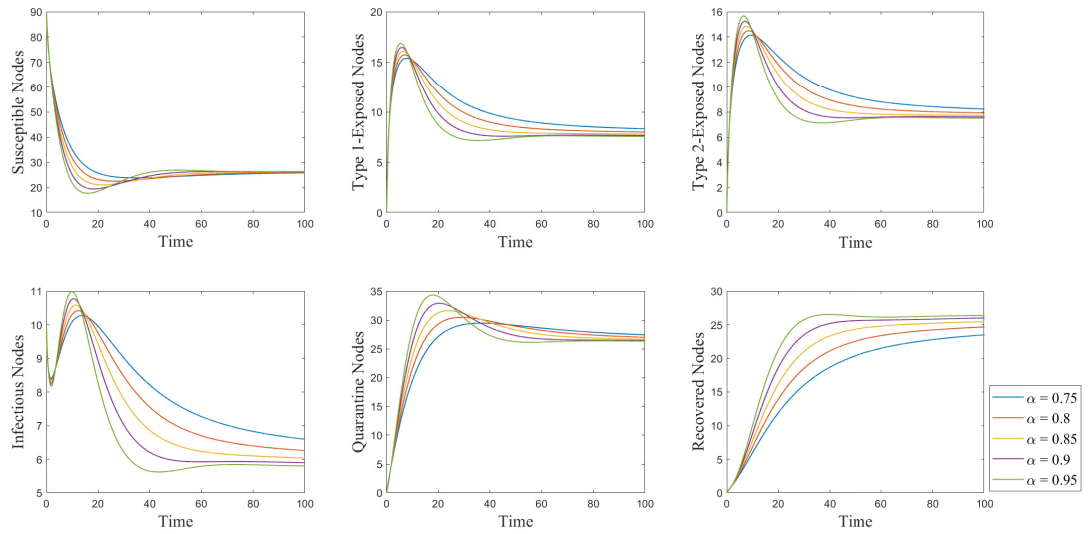
Hình 3.16 và Hình 3.17 mô tả động lực của mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với một số bậc đạo hàm phân thứ β trong trường hợp $\mathfrak{R}_0 < 1$ và $\mathfrak{R}_0 > 1$. Dễ thấy rằng nếu giá trị của bậc phân thứ β tăng lên thì mật độ các nút mang mã độc và lan truyền mã độc sẽ giảm nhẹ.



Hình 3.15: So sánh mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR với các mô hình khác

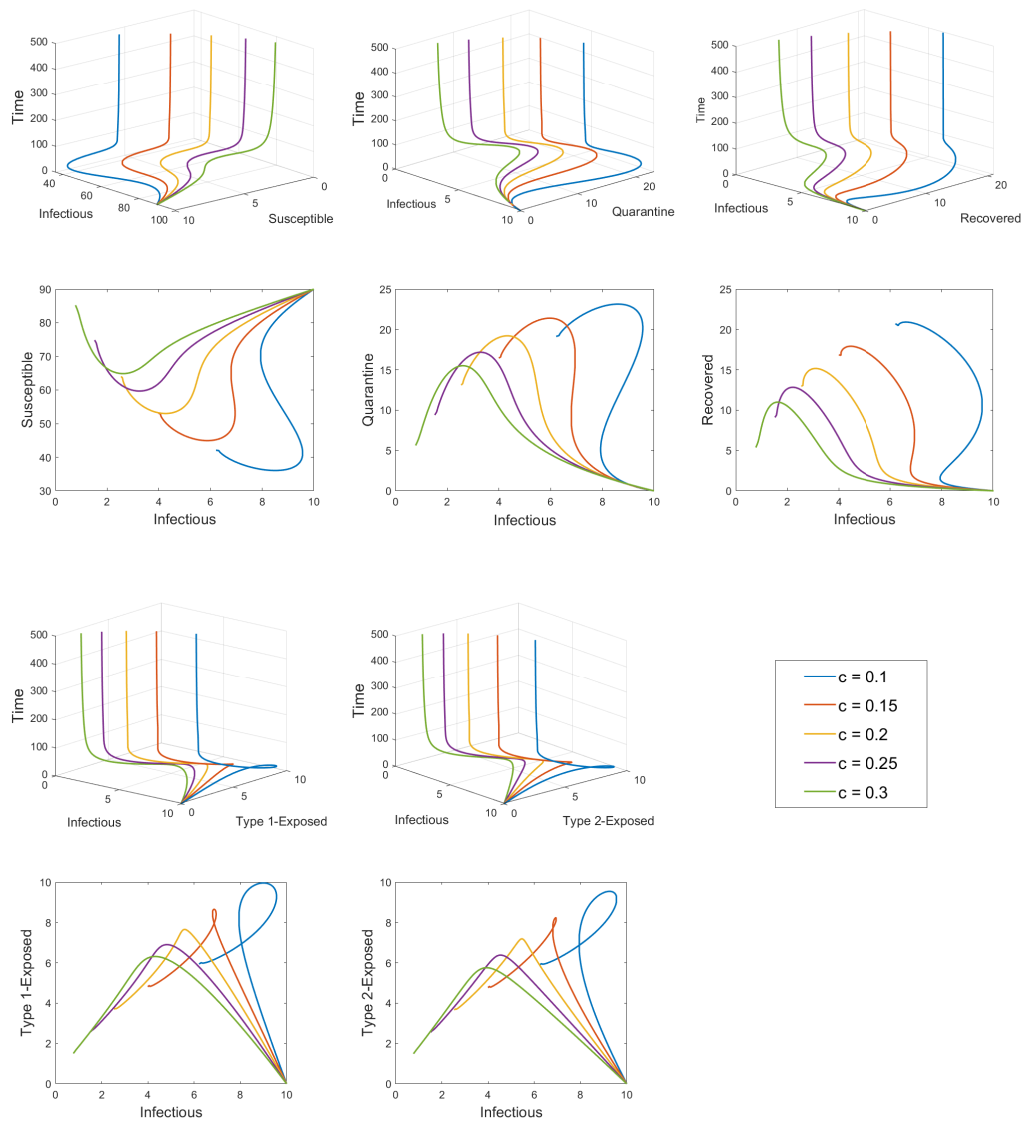


Hình 3.16: Ảnh hưởng của đạo hàm phân thứ đối với mô hình SE_1E_2IQR trong trường hợp $\mathfrak{R}_0 < 1$

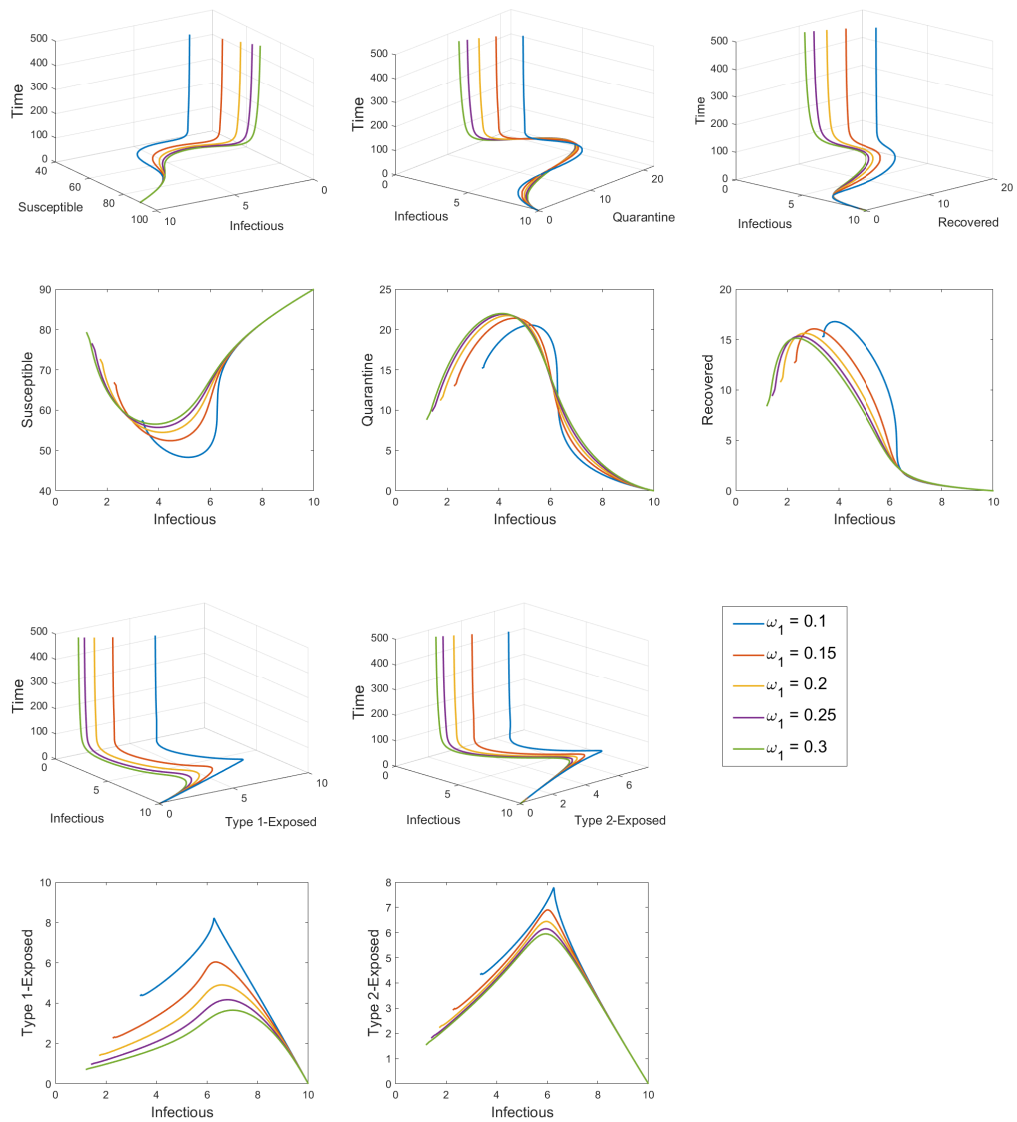


Hình 3.17: Ảnh hưởng của đạo hàm phân thứ đối với mô hình SE_1E_2IQR trong trường hợp $\mathfrak{R}_0 > 1$

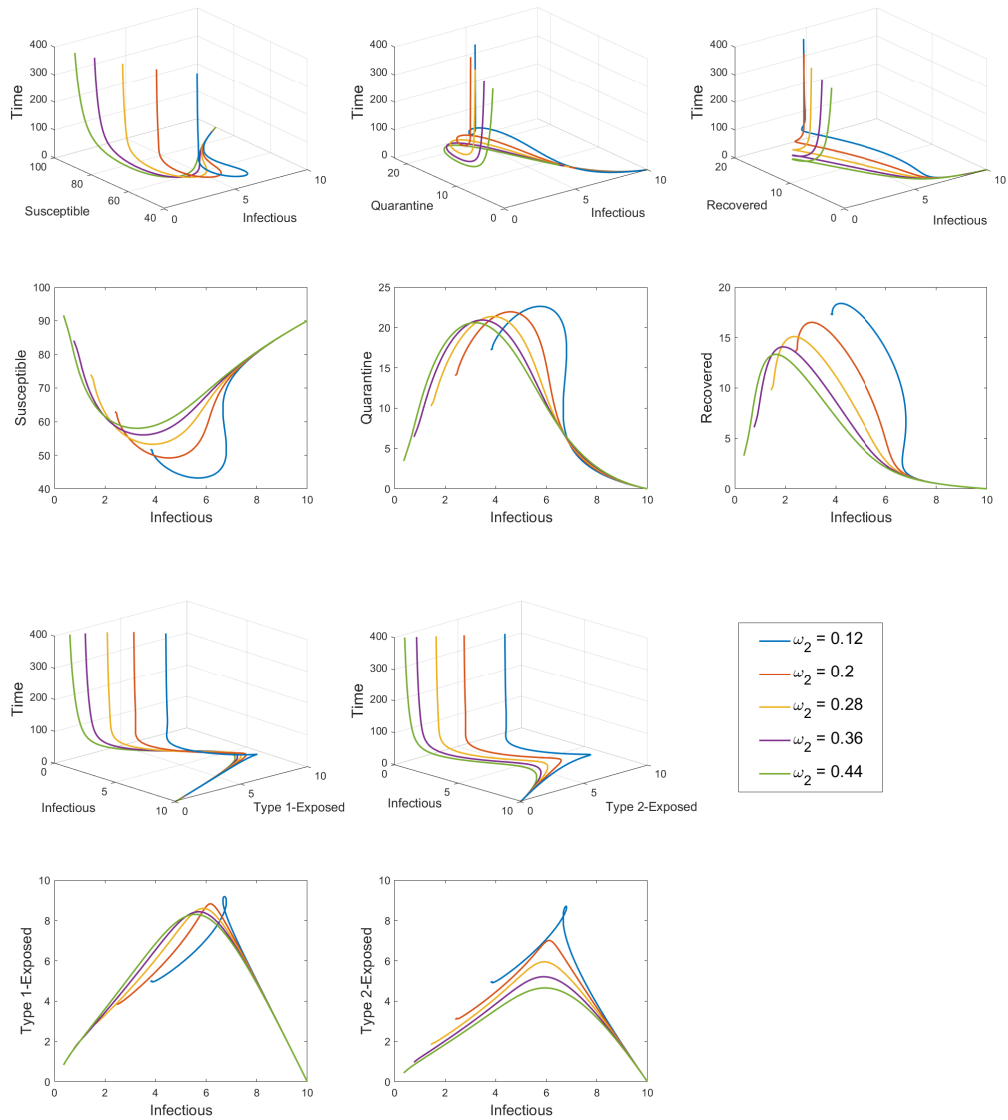
Hình 3.18, Hình 3.19 và Hình 3.20 thể hiện ảnh hưởng của các tham số cách ly c , ω_1 và ω_2 đối với dáng điệu theo thời gian của mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng. Hiển nhiên rằng khi hệ thống mạng bị tấn công bởi các loại phần mềm độc hại, việc cách ly các nút mạng mã độc và lan truyền mã độc đóng một vai trò then chốt trong việc ngăn chặn sự lây lan phần mềm độc hại từ các nút bị nhiễm sang nút miễn cảm. Thật vậy, ba hình dưới đây đều chỉ ra rằng khi tốc độ cách ly được tăng lên, mật độ của các nút miễn cảm có xu hướng tăng trong khi mật độ của các nút lan truyền mã độc giảm đáng kể.



Hình 3.18: Không gian pha giữa trạng thái lan truyền mã độc và các trạng thái khác với các giá trị khác nhau của tham số cách ly c



Hình 3.19: Không gian pha giữa trạng thái lan truyền mã độc và các trạng thái khác với các giá trị khác nhau của tham số cách ly ω_1



Hình 3.20: Không gian pha giữa trạng thái lan truyền mã độc và các trạng thái khác với các giá trị khác nhau của tham số cách ly ω_2

3.4. Kết luận chương

Chương 3 tiếp tục nghiên cứu sự lây lan của các phần mềm độc hại trên mạng cảm biến không dây và hiệu quả của các biện pháp cách ly đối với kiểm soát sự phát tán mã độc. Tuy nhiên, từ thực tế rằng mạng cảm biến không dây có cấu trúc mạng không quy mô Barabási-Albert giới hạn năng lượng và nhằm tính tới ảnh hưởng của tính không đồng nhất trong tiếp xúc của các nút mạng khác nhau đối với quá trình lan truyền, luận án đề

xuất xây dựng và nghiên cứu mô hình lan truyền mã độc phân thứ dựa trên mạng gồm 6 ngăn S-E₁-E₂-I-Q-R. Các kết quả chính đã đạt được trong chương này bao gồm:

1. Luận án đã sử dụng logic mờ để xác định tham số lan truyền mã độc dựa trên luật mờ M_q . Cách thiết lập như vậy có tính động và thuận tiện cho việc hiệu chỉnh mô hình khi tham số mạng thay đổi.
2. Luận án đã chứng minh được tính đặt đúng của mô hình lan truyền mã độc phân thứ dựa trên mạng đề xuất với việc chứng minh được mô hình luôn có duy nhất nghiệm không âm và mọi nghiệm đều thuộc một tập bất biến dương Σ^+ .
3. Bằng cách sử dụng phương pháp ma trận thế hệ tiếp theo, luận án đã xác định được chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và chỉ ra được các trạng thái cân bằng không có mã độc, trạng thái cân bằng đặc hữu của mô hình. Đây là các yếu tố dịch tễ quan trọng trong việc dự báo đáng điệu theo thời gian của mô hình lan truyền mã độc đề xuất. Đặc biệt, sự tồn tại của trạng thái cân bằng đặc hữu đã được chỉ ra dựa trên phương pháp thế và áp dụng định lý giá trị trung gian quen thuộc.
4. Giá trị của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và các tham số được liên hệ để khảo sát đáng điệu tiệm cận của mô hình về trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 . Cụ thể, luận án đã khẳng định được sự ổn định tiệm cận địa phương của \mathbf{P}_0 với điều kiện $\mathfrak{R}_0 < 1$ và một số ràng buộc tham số. Đối với sự ổn định tiệm cận toàn cục của \mathbf{P}_0 , dựa trên phương pháp hàm Lyapunov, luận án đã chỉ ra điều kiện cần là $\tilde{\mathfrak{R}}_0 < 1$ với chỉ số ngưỡng $\tilde{\mathfrak{R}}_0 > \mathfrak{R}_0$. Thêm vào đó, kết quả về hướng rẽ nhánh của mô hình lan truyền mã độc đề xuất khi $\mathfrak{R}_0 = 1$ được thảo luận tại Định lý 3.5.
5. Các kết quả mô phỏng và thảo luận trong Mục 3.3 đã đánh giá được ý nghĩa của các tham số đối với giá trị ngưỡng \mathfrak{R}_0 thông qua các chỉ số độ nhạy. Hơn nữa, tầm quan trọng của các biện pháp cách ly hay cấu trúc mạng cũng đã được thảo luận cuối chương này.

Tuy nhiên, nghiên cứu của chương này mới chỉ tiếp cận các biện pháp kiểm dịch cho mạng với cách ly hằng số và dễ thấy rằng việc cách ly kiểm dịch hằng số là điều kiện khá lý tưởng, khó đạt được trong thực tế. Do đó, trong chương sau, luận án sẽ đề xuất nghiên cứu bài toán ổn định hóa cho mô hình lan truyền mã độc phân thứ dựa trên mạng với hàm cách ly biến thiên $\mathbf{u}(t)$.

Chương 4

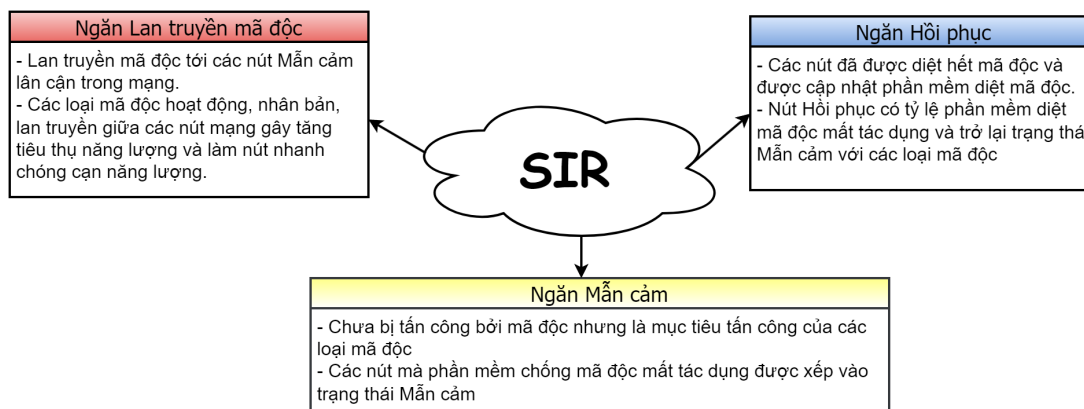
BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH HÓA CHO MÔ HÌNH LAN TRUYỀN MÃ ĐỘC SIRS PHÂN THỨ DỰA TRÊN MẠNG CÓ ĐIỀU KHIỂN

Với mục tiêu cuối cùng là kiểm soát sự lây lan phần mềm độc hại trên mạng, các bài toán điều khiển cho các mô hình lan truyền mã độc dựa trên mạng cũng là một chủ đề thiết thực, có tính thời sự. Tuy nhiên, các bài toán điều khiển cho các mô hình lan truyền mã độc dựa trên mạng cũng mới xuất hiện trong 10 năm trở lại đây [11, 31, 34, 35, 58] với các kết quả lý thuyết ban đầu về sự tồn tại điều khiển tối ưu cho các mô hình lan truyền mã độc dựa trên mạng với đạo hàm bậc nguyên. Chương 4 tập trung vào nghiên cứu bài toán điều khiển ngừa chủng cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng theo cách tiếp cận hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết. Trong chương này, đầu tiên luận án sử dụng mô hình hóa toán học để thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển với hàm xử lý mã độc bão hòa nhằm mô tả động lực tấn công của các phần mềm độc hại trên mạng cảm biến không dây trong trường hợp số nút bị nhiễm vượt quá khả năng xử lý phần mềm độc hại của mạng. Sau đó, luận án chỉ ra một số tính chất định tính của mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng đề xuất. Đặc biệt, để nghiên cứu tính đáng điều kiện tiệm cận cũng như sự tồn tại trạng thái cân bằng đặc hữu của mô hình lan truyền mã độc, luận án dựa trên đánh giá giá trị ngưỡng dịch tễ học \mathfrak{R}_0 , tức là chỉ số ngưỡng lan truyền, và đưa ra các điều kiện cần cho sự ổn định tiệm cận địa phương cũng như ổn định tiệm cận toàn cục. Tiếp đó, các điều kiện cho sự rẽ nhánh lồi của mô hình cũng được chỉ ra. Cuối cùng, do luận án đã chỉ ra rằng trạng thái cân bằng \mathbf{P}_0 không ổn định khi $\mathfrak{R}_0 > 1$ nên phần còn lại của chương này là giải quyết bài toán ổn định hóa cho mô hình đề xuất và đưa ra các tiêu chuẩn cho sự ổn định hóa với điều khiển phản hồi trạng thái liên quan đến bất đẳng thức ma trận tuyến tính và ma trận xác định dương. Chương này được viết dựa trên kết quả của bài báo [P3] và bản thảo [P4] trong Danh mục công trình của nghiên cứu sinh.

4.1. Thiết lập mô hình

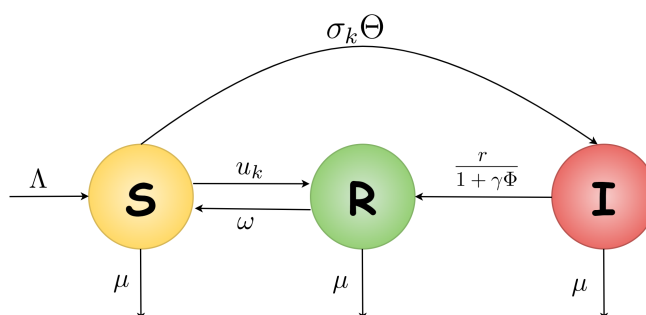
Trong chương này, luận án đề xuất sử dụng mô hình lan truyền mã độc ba ngăn dựa trên mạng, cụ thể là mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng, để nghiên cứu ảnh hưởng của sự lây lan phần mềm độc hại trên mạng phức hợp không đồng nhất.

mô hình lan truyền mã độc đề xuất chia toàn bộ các nút mạng thành ba lớp với mô tả cho trong Hình 4.1.



Hình 4.1: Mô tả của mô hình lan truyền mã độc ba ngăn: Mẫn cảm (S), Lan truyền mã độc (I), Hồi phục (R)

Để có mô tả tốt hơn cho các mô hình lan truyền mã độc trong thực tế và xem xét ảnh hưởng của tính không đồng nhất trong tiếp xúc của các nút mạng, luận án thiết lập một mô hình lan truyền mã độc ba ngăn dựa trên mạng. Hướng tiếp cận này được đề xuất bởi nghiên cứu của Pastor-Satorras và cộng sự [28], trong đó các tác giả chia tổng số nút thành n nhóm dựa trên bậc của nút, tức là nhóm thứ k bao gồm các nút có cùng k kết nối với các nút khác. Tiếp đó, ký hiệu $S_k(t)$, $I_k(t)$ và $R_k(t)$ lần lượt là mật độ của các nút mẫn cảm, lan truyền mã độc và phục hồi bậc k tại thời điểm t . Ngoài ra, luận án giả sử rằng $N_k(t) = S_k(t) + I_k(t) + R_k(t)$ là mật độ các nút có bậc k tại thời điểm t . Sự lan truyền phần mềm độc hại trong nhóm thứ k được sơ đồ hóa trong Hình 4.2.



Hình 4.2: Sơ đồ của lan truyền phần mềm độc hại giữa ba ngăn: Mẫn cảm (S), Lan truyền mã độc (I) và Hồi phục (R) trong nhóm thứ k

Sơ đồ chuyển trạng thái trong Hình 4.2 minh họa cách các nút được chuyển từ trạng thái này sang trạng thái khác trong quá trình lan truyền phần mềm độc hại. Cụ thể, sự thay đổi giữa ba trạng thái này được dựa trên các quy tắc sau:

- Mỗi nút trở thành nút chết với tốc độ μ khi nó cạn kiệt năng lượng và một nút mới có thể bổ sung vào mạng với tốc độ Λ . Tốc độ bổ sung nút mới Λ vào trạng thái miễn cảm và tốc độ rời mạng μ được giả sử là bằng nhau để đảm bảo sự cân bằng và liên tục của mạng, tức là mạng xem xét là một hệ thống khép kín trong đó các nút bị loại khỏi mạng được thay thế tích cực bởi các nút mới đầy năng lượng.
- Khi một nút miễn cảm bậc k tiếp xúc với phần mềm độc hại, nó sẽ chuyển sang trạng thái lan truyền mã độc theo tốc độ $\sigma_k \Theta(t)$, trong đó tham số σ_k là tốc độ truyền khi các nút nhạy cảm tiếp xúc với phần mềm độc hại. Ngoài ra, dưới sự bảo vệ của tường lửa và các chương trình chống mã độc, một nút miễn cảm có thể được chuyển sang trạng thái (R) với tốc độ điều chỉnh được phụ thuộc thời gian $\mathbf{u}_k(t)$ và sau đó, chúng ta nói rằng nút này đã được bảo vệ. Trong nghiên cứu này, luận án xem xét giữa chủng bằng tường lửa là một chiến lược kiểm soát lây lan.
- Trong các mô hình lan truyền mã độc cổ điển, tốc độ điều trị của nút lan truyền mã độc thường được giả sử là tỷ lệ thuận với số lượng nút này, nghĩa là hàm xử lý mã độc là tuyến tính. Tuy nhiên, có một thực tế là đối với các mô hình lan truyền mã độc trên mạng phức hợp không đồng nhất, các chương trình diệt virus chỉ có một giới hạn xử lý tối đa để xử lý các phần mềm độc hại hoặc trong trường hợp sự lây lan mã độc bùng nổ, số lượng nút mang mã độc vượt quá khả năng xử lý của các chương trình diệt virus. Thúc đẩy bởi nghiên cứu của Li và cộng sự [30], luận án đề xuất sử dụng hàm xử lý mã độc phi tuyến dưới dạng

$$\varphi(I_k) = \frac{r I_k}{1 + \gamma \Theta},$$

để xử lý cho các nút lan truyền mã độc ở nhóm thứ k , trong đó r là tốc độ xử lý và tham số γ được sử dụng để đo mức độ ảnh hưởng của các nút nhiễm bệnh bị trì hoãn xử lý. Hàm xử lý mã độc này được cho là phù hợp hơn các hàm tuyến tính trong nhiều trường hợp.

- Các nút ở trạng thái (R) đăng xuất mạng với tốc độ μ do cạn năng lượng. Mặt khác, vì việc ngừa chủng của các chương trình xử lý mã độc chỉ là tạm thời, nên các nút hồi phục có thể mất khả năng tự bảo vệ trước mã độc và trở lại gần các nút nhạy cảm với tốc độ ω .

Trong bài báo [30], Li và Yousef đã đề xuất nghiên cứu mô hình dịch SIRS dựa trên mạng với hàm điều trị phi tuyến dựa trên mô hình phương trình vi phân thường. Sau đó, bài báo đưa ra một số thảo luận ban đầu về điều kiện đủ cho đáng điệu tiệm cận của mô hình dịch dựa trên mạng đề xuất. Dựa trên những ưu điểm của đạo hàm bậc không nguyên trong mô hình hóa các quá trình không địa phương và nhằm thể hiện ảnh

hưởng của tính nhớ trong các quá trình lây lan phần mềm độc hại trên mạng phức hợp không đồng nhất, luận án sử dụng các công cụ của giải tích phân thứ để nghiên cứu sự lan truyền mã độc phần mềm độc hại trên mạng cảm biến không dây với đạo hàm bậc phân. Cụ thể, luận án xét hệ phương trình vi phân phân thứ cho nhóm thứ k sau:

$$\begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta S_k(t) &= \Lambda - \sigma_k \Theta(t) S_k(t) - (\mu + \mathbf{u}_k(t)) S_k(t) + \omega R_k(t) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta I_k(t) &= \sigma_k \Theta(t) S_k(t) - \mu I_k(t) - \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta R_k(t) &= \mathbf{u}_k(t) S_k(t) + \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} - (\mu + \omega) R_k(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

với điều kiện ban đầu

$$S_k(0) = S_k^0 > 0, \quad I_k(0) = I_k^0 \geq 0, \quad R_k(0) = R_k^0 \geq 0. \quad (4.2)$$

trong đó tốc độ lan truyền σ_k thỏa mãn $\sigma_k = k\sigma$ và giả sử rằng tất cả các tham số khác của mô hình dương. Hàm $\Theta(t)$ là xác suất để một liên kết cho trước được kết nối với một nút lan truyền mã độc và theo kết quả của Huang và các cộng sự [32], hàm này được cho bởi biểu thức sau:

$$\Theta(t) = \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \varphi(k) \mathbb{P}(k) I_k(t),$$

trong đó $\mathbb{P}(k)$ là xác suất để một nút được chọn ngẫu nhiên có bậc k , $\varphi(k) = k$ là khả năng lan truyền của nút có bậc k và $\langle n \rangle = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(k)$ biểu thị cho bậc kết nối trung bình của mạng cảm biến.

4.2. Tính chất định tính của mô hình

4.2.1. Sự tồn tại tập bất biến dương

Để thuận tiện trong trình bày, ký hiệu

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(t) = \begin{pmatrix} S_k(t) & I_k(t) & R_k(t) \end{pmatrix}^\top$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) & \tilde{\mathbf{x}}_2(t) & \cdots & \tilde{\mathbf{x}}_n(t) \end{pmatrix}^\top$$

$$\Sigma^+ = \{ \tilde{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}_+^{3n} : S_k(t) + I_k(t) + R_k(t) = 1, k = \overline{1, n}, t \geq 0 \}$$

$$F_k(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{pmatrix} \Lambda - \sigma_k \Theta(t) S_k(t) - (\mu + \mathbf{u}_k(t)) S_k(t) + \omega R_k(t) \\ \sigma_k \Theta(t) S_k(t) - \mu I_k(t) - \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} \\ \mathbf{u}_k(t) S_k(t) + \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} - (\mu + \omega) R_k(t) \end{pmatrix}$$

$$F(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) = \left(F_1(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad F_2(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad \cdots \quad F_n(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \right)^\top.$$

Ngoài ra, một trong các mục tiêu của chương này liên quan đến bài toán điều khiển với điều khiển đầu vào $\mathbf{u}_k(t)$ được xem như tỷ lệ các nút mắc cảm được bảo vệ bởi tường lửa trên một đơn vị thời gian và do đó, luận án ký hiệu

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \mathbf{u}(\cdot) \in (L^1[0, T])^n : 0 \leq \mathbf{u}_k(t) \leq b, \quad k = \overline{1, n} \right\} \quad (0 < b < 1),$$

là tập điều khiển chấp nhận được bao gồm các hàm đo được Lebesgue trên đoạn $[0, T]$. Ở đây, do việc ngừa chủng cho tất cả nút mắc cảm cùng một lúc là không thực tế, luận án giả định rằng mỗi điều khiển đầu vào $\mathbf{u}_k(t)$ bị giới bởi điều kiện $0 \leq \mathbf{u}_k(t) \leq b < 1$.

Tiếp theo, do sự tồn tại của các phần mềm độc hại trên mạng phức hợp không đồng nhất và theo định nghĩa của hàm xác suất $\Theta(t)$, luận án giả sử rằng $\Theta(t) > 0$ với mỗi $t \geq 0$. Như vậy, theo quan điểm dịch tễ học, chúng ta chỉ cần tập trung vào sự tồn tại của nghiệm không âm và tập bất biến dương của mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng.

Định lý 4.1. *Với mỗi điều khiển đầu vào $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad}$, bài toán Cauchy cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển có duy nhất một nghiệm không âm $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Thêm vào đó, nếu điều kiện ban đầu thỏa mãn $\tilde{\mathbf{x}}(0) \in \Sigma^+$ thì với mọi $t > 0$, nghiệm $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ thuộc vào tập Σ^+ .*

Chứng minh. Chứng minh của định lý này được chia thành các bước sau:

Bước 1 (Sự tồn tại duy nhất nghiệm): Để chứng minh sự tồn tại duy nhất của nghiệm $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, chúng ta sẽ chỉ ra rằng bài toán giá trị ban đầu (4.1) - (4.2) có nghiệm duy nhất $\tilde{\mathbf{x}}_k(t)$ với mọi $t \geq 0$. Với mục tiêu này, chúng ta viết lại hệ động lực phân thứ dựa trên mạng (4.1) như sau:

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\beta \begin{pmatrix} S_k(t) \\ I_k(t) \\ R_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu - \mathbf{u}_k(t) & 0 & \omega \\ 0 & -\mu & 0 \\ \mathbf{u}_k(t) & 0 & -(\mu + \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_k(t) \\ I_k(t) \\ R_k(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda - \sigma_k \Theta(t) S_k(t) \\ -\frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} \\ \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} \end{pmatrix}.$$

Vì điều khiển đầu vào $\mathbf{u}_k(t)$ bị chặn với mỗi $k = \overline{1, n}$, chúng ta thấy rằng ma trận

$$A(\mathbf{u}_k) = \begin{pmatrix} -\mu - \mathbf{u}_k(t) & 0 & \omega \\ 0 & -\mu & 0 \\ \mathbf{u}_k(t) & 0 & -(\mu + \omega) \end{pmatrix}$$

là hàm ma trận bị chặn với mọi $t \geq 0$ và chuẩn

$$\|A(\mathbf{u}_k)\| = \max \{\mu + 2b, \mu, \mu + 2\omega\} = \mu + 2 \max \{b, \omega\}.$$

Thêm vào đó, chúng ta ký hiệu $\mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{x}}(t)) = \left(\mathbf{f}_1(t, \tilde{\mathbf{x}}(t)) \quad \mathbf{f}_2(t, \tilde{\mathbf{x}}(t)) \quad \dots \quad \mathbf{f}_n(t, \tilde{\mathbf{x}}(t)) \right)^\top$ và với mỗi $k = 1, 2, \dots, n$, ta có

$$\mathbf{f}_k(t, \tilde{\mathbf{x}}(t)) = \left(\Lambda - \sigma_k \Theta(t) S_k(t) \quad -\frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} \quad \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} \right)^\top.$$

Chú ý rằng với mỗi $\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \Sigma^+$ và $k = 1, 2, \dots, n$, ta có

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_k(t, \tilde{\mathbf{x}}(t))\| &\leq \Lambda + \sigma_k |\Theta(t)| |S_k(t)| + \frac{2r |I_k(t)|}{|1 + \gamma \Theta(t)|} \\ &\leq \Lambda + \sigma_k |S_k(t)| + 2r |I_k(t)| \\ &\leq \Lambda + \max \{\sigma_k, 2r\} \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \end{aligned}$$

và

$$\|\mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{x}}(t))\| \leq n \left(\Lambda + \max_k \{\sigma_k, 2r\} \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \right).$$

Đặt

$$\begin{aligned} a_f &= \max \left\{ n\Lambda, n \left(\mu + 2 \max \{b, \omega\} + \max_k \{\sigma_k, 2r\} \right) \right\} \\ &= n \left(\mu + 2 \max \{b, \omega\} + \max_k \{\sigma_k, 2r\} \right) > 0. \end{aligned}$$

Do đó, với mọi $\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \Sigma^+$, $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ và $t > 0$, ta nhận được

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))\| &\leq n \left[\Lambda + \left(\mu + 2 \max \{b, \omega\} + \max_k \{\sigma_k, 2r\} \right) \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \right] \\ &\leq a_f (1 + \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|). \end{aligned}$$

Mặt khác, với mỗi $\tilde{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{x}}(t) \in \Sigma^+$ và $t \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{f}_k(t, \tilde{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{f}_k(t, \bar{\mathbf{x}}(t)) \right\| &\leq \sigma_k |S_k(t) \Theta(t) - \bar{S}_k(t) \bar{\Theta}(t)| + 2r \left| \frac{I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} - \frac{\bar{I}_k(t)}{1 + \gamma \bar{\Theta}(t)} \right| \\ &\leq \sigma_k \left(1 + \frac{\sqrt{\langle n^2 \rangle}}{\langle n \rangle} \right) \|\tilde{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)\| + 2r \left(1 + \frac{2\gamma \sqrt{\langle n^2 \rangle}}{\langle n \rangle} \right) \|\tilde{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)\|. \end{aligned}$$

Ký hiệu $L_f = n \left(\mu + 2 \max \{b, \omega\} \right) + \max_k \left[\sigma_k \left(1 + \frac{\sqrt{\langle n^2 \rangle}}{\langle n \rangle} \right) + 2r \left(1 + \frac{2\gamma \sqrt{\langle n^2 \rangle}}{\langle n \rangle} \right) \right] > 0$. Khi đó, với mỗi $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad}$, $\tilde{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{x}}(t) \in \Sigma^+$ và với mọi $t > 0$, ta nhận được

$$\|\mathbf{F}(t, \tilde{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{F}(t, \bar{\mathbf{x}}(t))\| \leq L_f \|\tilde{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)\|,$$

nghĩa là hàm $F(t, \tilde{\mathbf{x}}(t))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz đối với biến trạng thái $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Cuối cùng, bằng cách áp dụng Hệ quả 6.9 trong [50], chúng ta có thể kết luận rằng bài toán Cauchy cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng luôn có đúng một nghiệm $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ được xác định với $t \geq 0$.

Bước 2 (Tính dương của nghiệm): Đối với chứng minh này, giả sử phản chứng rằng với giá trị $k \in \{1, \dots, n\}$ nào đó, tồn tại một thời điểm $t_0 > 0$ sao cho

$$\begin{cases} S_k(t_0) = 0 \\ S_k(t) > 0 & \text{với mọi } 0 \leq t < t_0 \\ S_k(t) < 0 & \text{với } t > t_0. \end{cases}$$

Khi đó, chúng ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu hàm $I_k(t)$ không âm với mọi $t \geq 0$ thì ta có

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\beta R_k(t) = \mathbf{u}_k(t) S_k(t) + \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} - (\omega + \mu) R_k(t) \geq -(\omega + \mu) R_k(t).$$

Sau đó, bằng cách áp dụng định lý so sánh nghiệm cho phương trình bậc phân thứ (xem Bổ đề 10, [51]), ta nhận được

$$R_k(t) \geq R_k(0) \mathbb{E}_\beta(-(\omega + \mu)t^\beta) \geq 0 \quad \text{với mọi } t \in [0, t_0].$$

Tiếp theo, bằng cách thay các kết quả trên vào phương trình vi phân đầu tiên của hệ phương trình (4.1), chúng ta nhận được

$${}_0^C \mathcal{D}_t^\beta S_k(t)|_{t=t_0} = \Lambda + \omega R_k(t_0) > 0.$$

Theo hệ quả của Bổ đề 1.3, tồn tại $\varepsilon_0 > 0$ đủ nhỏ sao cho trong lân cận $(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$ của điểm t_0 , chúng ta có $S_k(t) > S_k(0) > 0$ với mọi $t \in (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$. Điều trên dẫn đến mâu thuẫn với giả sử phản chứng.

Trường hợp 2: Nếu tồn tại thời điểm $t_1 > 0$ sao cho

$$\begin{cases} I_k(t) = 0 & \text{nếu } t = t_1 \\ I_k(t) > 0 & \text{nếu } t \in [0, t_1) \\ I_k(t) < 0 & \text{nếu } t > t_1. \end{cases}$$

Khi đó, chúng minh được tiến hành với hai trường hợp phụ sau:

Trường hợp 1: Nếu $t_1 \geq t_0$ thì bằng cách lập luận tương tự như trong Trường hợp 1, chúng

ta có thể chứng minh được rằng các hàm $I_k(t), R_k(t)$ đều không âm trên đoạn $[0, t_0]$ và $S_k(t) > 0$ với $t \in (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Nếu $t_1 < t_0$ thì ta có $S(t_1) > 0$ và $\Theta(t_1) > 0$. Hơn nữa, tại thời điểm $t = t_1$, ta có

$${}^C\mathfrak{D}_t^\beta I_k(t)|_{t=t_1} = \sigma_k(\tau)S_k(t_1)\Theta(t_1) > 0.$$

Khi đó, từ hệ quả của Bổ đề 1.3, chúng ta có thể chọn $0 < \varepsilon_1 \ll 1$ sao cho $I_k(t) > I_k(0)$ với mọi $t \in (t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1)$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn với giả sử phản chứng ban đầu. Do đó, chúng ta có thể kết luận rằng hàm $S_k(t) > 0$ luôn dương với mọi $t \geq 0$. Bằng lập luận tương tự, chúng ta cũng có thể chứng minh rằng các hàm $I_k(t)$ và $R_k(t)$ đều không âm với mọi $t \geq 0$ và $k = \overline{1, n}$.

Bước 3 (Tập bất biến dương): Bằng cách cộng về tất cả các phương trình vi phân phân thứ trong hệ (4.1), ta nhận được phương trình vi phân phân thứ sau:

$${}^C\mathfrak{D}_t^\beta N_k(t) = \Lambda - \mu N_k(t).$$

Bằng cách áp dụng kết quả của Ví dụ 4.9 trong [39], ta nhận được

$$\begin{aligned} N_k(t) &= N_k(0)\mathbb{E}_\beta(-\mu t^\beta) + \Lambda t^\beta \mathbb{E}_{\beta, \beta+1}(-\mu t^\beta) \\ &= N_k(0)\mathbb{E}_\beta(-\mu t^\beta) + \frac{\Lambda}{\mu} [1 - \mathbb{E}_\beta(-\mu t^\beta)]. \end{aligned}$$

Ở đây, luận án áp dụng Bổ đề 1.1 với $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = 1$ và $z = -\mu t^\beta$. Sau đó, với giả sử rằng $\tilde{\mathbf{x}}(0) \in \Sigma^+$, ta thu được

$$N_k(t) = \frac{\Lambda}{\mu} \mathbb{E}_\beta(-\mu t^\beta) + \frac{\Lambda}{\mu} [1 - \mathbb{E}_\beta(-\mu t^\beta)] = \frac{\Lambda}{\mu} = 1,$$

vì tốc độ nút mới tham gia và nút cạn năng lượng rời mạng được giả định bằng nhau. Điều này có nghĩa là tập Σ^+ là tập bất biến dương cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng. \square

4.2.2. Chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và các trạng thái cân bằng

Trong lý thuyết dịch tễ học, một vấn đề cốt yếu trong nhiều nghiên cứu là xác định các trạng thái cân bằng của mô hình lan truyền mã độc được đề xuất bao gồm trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 và trạng thái cân bằng đặc hữu \mathbf{P}_* . Bên cạnh đó, luận án cũng tập trung xác định một giá trị ngưỡng quan trọng của lý thuyết dịch tễ học, đó là

chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 . Giá trị này đóng một vai trò quan trọng không chỉ trong sự tồn tại của trạng thái cân bằng đặc hữu mà còn trong việc nghiên cứu đáng điệu tiệm cận của mô hình. Các trạng thái cân bằng của mô hình lan truyền mã độc SIRS được xác định bằng cách giải hệ phương trình đại số sau:

$$\begin{cases} \Lambda - \sigma_k \Theta S_k - (\mu + \mathbf{u}_k) S_k + \omega R_k & = 0 \\ \sigma_k \Theta S_k - \mu I_k - \frac{r I_k}{1 + \gamma \Theta} & = 0 \\ \mathbf{u}_k S_k + \frac{r I_k}{1 + \gamma \Theta} - (\mu + \omega) R_k & = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Nếu mạng không có phần mềm độc hại thì mô hình lan truyền mã độc đề xuất nhận trạng thái cân bằng không có mã độc duy nhất $\mathbf{P}_0 = (S_1^0, I_1^0, R_1^0, \dots, S_n^0, I_n^0, R_n^0)$ cho bởi

$$\mathbf{P}_0 = \underbrace{\left(\frac{\mu + \omega}{\mu + \omega + \mathbf{u}_1}, 0, \frac{\mathbf{u}_1}{\mu + \omega + \mathbf{u}_1}, \dots, \frac{\mu + \omega}{\mu + \omega + \mathbf{u}_n}, 0, \frac{\mathbf{u}_n}{\mu + \omega + \mathbf{u}_n} \right)}_{3n},$$

trong khi nếu tồn tại các phần mềm độc hại đang lan truyền trên mạng thì mô hình lan truyền mã độc đề xuất có ít nhất một trạng thái cân bằng đặc hữu \mathbf{P}_* với một số điều kiện nhất định liên quan đến chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 . Tiếp theo, để xác định chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 , luận án sẽ áp dụng phương pháp ma trận thế hệ tiếp theo (*next-generation matrix method*, tham khảo [111]) với các giả thiết sau:

- (i) Chỉ có duy nhất một ngăn gây ra quá trình phát tán phần mềm độc hại trên mạng là ngăn chứa các nút lan truyền mã độc (I).
- (ii) Sự thay đổi trạng thái từ ngăn (I) sang các ngăn khác chỉ được coi là sự chuyển đổi của các cá thể bị nhiễm bệnh qua các ngăn khác nhau.

Do đó, theo phương pháp ma trận thế hệ tiếp theo, số hạng thêm và số hạng mất của mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng cho bởi $\sigma_k \Theta(t) S_k(t)$ và $\mu I_k(t) + \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)}$. Ký hiệu \mathcal{F} và \mathcal{V} lần lượt là ma trận tỷ lệ cho sự xuất hiện của nút nhiễm mã độc mới và ma trận chuyển tiếp giữa các ngăn nhiễm mã độc tại điểm cân bằng \mathbf{P}_0 . Khi đó, chúng ta nhận được $\mathcal{V}^{-1} = \frac{1}{\mu + r} \mathbb{I}_n$ và \mathcal{F} là ma trận vuông cấp n cho bởi

$$\mathcal{F} = \frac{\sigma(\mu + \omega)}{\langle n \rangle} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu + \omega + \mathbf{u}_1} \\ \frac{2}{\mu + \omega + \mathbf{u}_2} \\ \vdots \\ \frac{n}{\mu + \omega + \mathbf{u}_n} \end{pmatrix} \left(\mathbb{P}(1) \quad 2\mathbb{P}(2) \quad \dots \quad n\mathbb{P}(n) \right).$$

Theo phương pháp ma trận thế hệ tiếp theo, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 là giá trị riêng lớn nhất của ma trận $\mathcal{F} \cdot \mathcal{V}^{-1}$, tức là

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\sigma(\mu + \omega)}{(\mu + r) \langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 \mathbb{P}(k)}{(\mu + \omega + \mathbf{u}_k)} = \frac{\sigma(\mu + \omega) \langle k^2 \mathbf{u} \rangle}{(\mu + r) \langle n \rangle}, \quad (4.4)$$

trong đó $\langle k^2 \mathbf{u} \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 \mathbb{P}(k)}{(\mu + \omega + \mathbf{u}_k)}$.

Để hiểu hơn về sự ảnh hưởng của các tham số tới chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 , luận án đánh giá chỉ số nhạy chuẩn hóa của các tham số với giá trị ngưỡng \mathfrak{R}_0 bằng cách áp dụng phương pháp của Nakul và cộng sự [112]. Ở đây, để đơn giản, luận án giả sử rằng $\mathbf{u}_k = \bar{\mathbf{u}} := \text{const}$ với mọi $k = \overline{1, n}$. Hệ quả là chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 có thể viết lại như sau:

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\sigma(\mu + \omega) \langle n^2 \rangle}{(\mu + r) (\mu + \omega + \bar{\mathbf{u}}) \langle n \rangle}.$$

Nhận xét 4.1. Nếu mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng được nghiên cứu không có điều khiển, tức là $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{0}}$, thì chúng ta nhận được một công thức quen thuộc về trạng thái cân bằng không có mã độc được giới thiệu trong công trình [P3] trong Danh mục công trình của NCS.

Theo phương pháp đề xuất trong [112], chỉ số độ nhạy của một đại lượng \mathbf{X} phụ thuộc vào tham số λ được xác định bởi $\Upsilon_{\lambda}^{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \lambda} \times \frac{\lambda}{\mathbf{X}}$. Khi đó, chúng ta nhận được các chỉ số độ nhạy như sau:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\sigma}^{\mathfrak{R}_0} &= 1, & \Upsilon_{\frac{\langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle}}^{\mathfrak{R}_0} &= 1, & \Upsilon_r^{\mathfrak{R}_0} &= -\frac{r}{\mu + r}, & \Upsilon_{\bar{\mathbf{u}}}^{\mathfrak{R}_0} &= -\frac{\bar{\mathbf{u}}}{\mu + \omega + \bar{\mathbf{u}}}, \\ \Upsilon_{\omega}^{\mathfrak{R}_0} &= \frac{\omega \bar{\mathbf{u}}}{(\mu + \omega) (\mu + \omega + \bar{\mathbf{u}})}, & \Upsilon_{\mu}^{\mathfrak{R}_0} &= \frac{\mu}{\mu + \omega} \left(1 - \frac{\mu + \omega}{\mu + \omega + \bar{\mathbf{u}}} - \frac{\mu + \omega}{\mu + r} \right). \end{aligned}$$

Nhận xét 4.2. Do chỉ số nhạy của chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 ứng với điều khiển ngừa chủng \mathbf{u}_k là âm, ta có thể kết luận rằng giá trị ngưỡng \mathfrak{R}_0 có thể được kiểm soát bằng cách tăng giá trị điều khiển đầu vào. Tuy nhiên, để kiểm tra rằng mô đun của cả $\Upsilon_{\mathbf{u}_k}^{\mathfrak{R}_0}$ và $\Upsilon_r^{\mathfrak{R}_0}$ đều nhỏ hơn 1. Điều này chỉ ra rằng cần phải kết hợp nhiều biện pháp khác nhau để kiểm soát sự lây lan của phần mềm độc hại. Ngoài ra, vì σ là tham số đặc trưng cho sự lây lan của phần mềm độc hại nên chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 phụ thuộc khá lớn vào σ . Thật vậy, chỉ số nhạy $\Upsilon_{\sigma}^{\mathfrak{R}_0}$ cho biết rằng tham số σ tăng bao nhiêu phần trăm thì chỉ số ngưỡng lan truyền cũng tăng bấy nhiêu phần trăm. Ngoài ra, tham số $\frac{\langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle}$ của cấu trúc mạng cũng là một trong những tham số nhạy nhất và việc tăng tham số này 10% cũng

sẽ dẫn đến việc chỉ số ngưỡng \mathfrak{R}_0 tăng với cùng một tỷ lệ. Điều này có nghĩa là mạng có bậc trung bình càng cao hay cấu trúc càng phức tạp thì càng làm phần mềm độc hại phát tán nhanh hơn.

Tiếp theo, luận án nghiên cứu mối liên hệ giữa sự tồn tại của trạng thái cân bằng đặc hữu \mathbf{P}_* và chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 . Ở đây, ký hiệu

$$\mathbf{P}_* = (S_1^*, I_1^*, R_1^*, \dots, S_n^*, I_n^*, R_n^*).$$

Khi đó, điều kiện cần cho sự tồn tại của trạng thái cân bằng đặc hữu \mathbf{P}_* được đưa ra trong định lý sau:

Định lý 4.2. *Nếu chỉ số ngưỡng lan truyền $\mathfrak{R}_0 > 1$ thì mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng luôn có ít nhất một trạng thái cân bằng đặc hữu $\mathbf{P}_* = (S_1^*, I_1^*, R_1^*, \dots, S_n^*, I_n^*, R_n^*)$ xác định bởi*

$$\begin{aligned} S_k^* &= \frac{1}{\sigma_k \Theta^*} \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta^*} \right) I_k^*, \\ R_k^* &= \frac{1}{\mu + \omega} \left[\frac{r}{1 + \gamma \Theta^*} + \frac{\mathbf{u}_k}{\sigma_k \Theta^*} \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta^*} \right) \right] I_k^*, \\ I_k^* &= \frac{\sigma_k \Theta^*}{\left\{ \mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta^*} + \sigma_k \Theta^* + \frac{\sigma_k \Theta^*}{\mu + \omega} \left[\frac{r}{1 + \gamma \Theta^*} + \frac{\mathbf{u}_k}{\sigma_k \Theta^*} \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta^*} \right) \right] \right\}}. \end{aligned}$$

Chứng minh. Ta có trạng thái cân bằng đặc hữu $\mathbf{P}_* = (S_1^*, I_1^*, R_1^*, \dots, S_n^*, I_n^*, R_n^*)$ của mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng là một nghiệm không tầm thường của hệ phương trình đại số (4.3). Do đó, bằng cách thế các biến S_k và R_k bởi I_k , ta nhận được

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{\sigma_k \Theta} \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta} \right) I_k \\ R_k &= \frac{1}{\mu + \omega} \left[\frac{r}{1 + \gamma \Theta} + \frac{\mathbf{u}_k}{\sigma_k \Theta} \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta} \right) \right] I_k, \end{aligned}$$

với mỗi $k = \overline{1, n}$. Mặt khác, bằng cách cộng các vế của hệ (4.3), ta thu được

$$\mu (S_k + I_k + R_k) = \Lambda,$$

và do đó, ta có

$$I_k = \frac{\sigma_k \Theta}{\left\{ \mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta} + \sigma_k \Theta + \frac{\sigma_k \Theta}{\mu + \omega} \left[\frac{r}{1 + \gamma \Theta} + \frac{\mathbf{u}_k}{\sigma_k \Theta} \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta} \right) \right] \right\}}.$$

Theo định nghĩa của hàm $\Theta(t)$, chúng ta nhận được phương trình tự nhất quán sau:

$$\Theta = \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k\mathbb{P}(k)\sigma_k\Theta}{\left\{ \mu + \frac{r}{1+\gamma\Theta} + \sigma_k\Theta + \frac{\sigma_k\Theta}{\mu+\omega} \left[\frac{r}{1+\gamma\Theta} + \frac{\mathbf{u}_k}{\sigma_k\Theta} \left(\mu + d + \frac{r}{1+\gamma\Theta} \right) \right] \right\}}, \quad (4.5)$$

hay tương đương với

$$\Theta \left(\frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k\mathbb{P}(k)\sigma_k}{\left\{ \mu + \frac{r}{1+\gamma\Theta} + \sigma_k\Theta + \frac{\sigma_k\Theta}{\mu+\omega} \left[\frac{r}{1+\gamma\Theta} + \frac{\mathbf{u}_k}{\sigma_k\Theta} \left(\mu + \frac{r}{1+\gamma\Theta} \right) \right] \right\}} - 1 \right) = 0.$$

Chúng ta thấy rằng phương trình tự nhất quán (4.5) là một phương trình phi tuyến với biến Θ và nếu phương trình (4.5) có một nghiệm không tầm thường $\Theta \in (0, 1)$ thì mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng sẽ tương ứng có một trạng thái cân bằng đặc hữu \mathbf{P}_* . Do đó, mục đích của chúng ta là xác định điều kiện để tồn tại ít nhất một nghiệm không tầm thường $\Theta \in (0, 1)$ của phương trình (4.5). Với mục tiêu này, ký hiệu

$$\mathcal{F}(\Theta) = \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k\mathbb{P}(k)\sigma_k\Theta}{\left\{ \mu + \frac{r}{1+\gamma\Theta} + \sigma_k\Theta + \frac{\sigma_k\Theta}{\mu+\omega} \left[\frac{r}{1+\gamma\Theta} + \frac{\mathbf{u}_k}{\sigma_k\Theta} \left(\mu + \frac{r}{1+\gamma\Theta} \right) \right] \right\}}.$$

Khi đó, nghiệm $\Theta^* \in (0, 1)$ của phương trình $\mathcal{F}(\Theta) - 1 = 0$ cũng là nghiệm không tầm thường của phương trình (4.5). Ngoài ra, cần lưu ý rằng

- Hàm $\mathcal{F}(\Theta)$ liên tục trên $[0, 1]$ và khả vi trong $(0, 1)$.
- Tại $\Theta = 1$, ta có

$$\mathcal{F}(1) = \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k\mathbb{P}(k)\sigma_k}{\left\{ \mu + \frac{r}{1+\gamma} + \sigma_k + \frac{\sigma_k}{\mu+\omega} \left[\frac{r}{1+\gamma} + \frac{\mathbf{u}_k}{\sigma_k} \left(\mu + \frac{r}{1+\gamma} \right) \right] \right\}} < 1.$$

- Tại $\Theta = 0$, ta có

$$\mathcal{F}(0) = \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k^2\mathbb{P}(k)\sigma(\mu+\omega)}{(\mu+r)(\mu+\omega+\mathbf{u}_k)} = \mathfrak{R}_0.$$

Do đó, nếu chỉ số ngưỡng lan truyền $\mathfrak{R}_0 > 1$ thì nó kéo theo bất phương trình $\mathcal{F}(0) > 1$. Theo định lý giá trị trung gian, ta có thể kết luận rằng phương trình $\mathcal{F}(\Theta) - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm $\Theta^* \in (0, 1)$ và nghiệm đó tương ứng giải ra một trạng thái cân bằng đặc hữu \mathbf{P}_* của mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng. \square

Nhận xét 4.3. Lưu ý rằng điều kiện $\mathfrak{R}_0 > 1$ chỉ đảm bảo sự tồn tại của ít nhất một trạng thái cân bằng đặc hữu \mathbf{P}_* nhưng không bao hàm tính duy nhất của trạng thái cân bằng này. Hơn nữa, ngay cả khi điều kiện $\mathfrak{R}_0 < 1$ được thỏa mãn, chúng ta vẫn không thể kết luận rằng mạng hoàn toàn sạch phần mềm độc hại, tức là điều kiện $\mathfrak{R}_0 < 1$ là không đủ để loại bỏ hoàn toàn phần mềm độc hại khỏi mạng. Bây giờ, luận án sẽ xác định một giá trị ngưỡng đảm bảo cho mạng không tồn tại bất kỳ trạng thái cân bằng đặc hữu nào \mathbf{P}_* . Với mục tiêu này, ký hiệu

$$\bar{\mathfrak{R}}_0 = \frac{\sigma(\mu + \omega)}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 \mathbb{P}(k)}{(\mu + \omega + v_k) \left(\mu + \frac{r}{1+\gamma} \right)} = \frac{\sigma(\mu + \omega) \langle k^2 u \rangle}{\left(\mu + \frac{r}{1+\gamma} \right) \langle n \rangle}.$$

Để thấy rằng giá trị ngưỡng $\bar{\mathfrak{R}}_0$ thỏa mãn $\bar{\mathfrak{R}}_0 > \mathfrak{R}_0$. Ngoài ra, với mỗi $\Theta \in (0, 1)$, ta có

$$\mathcal{F}(\Theta) < \frac{\sigma}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 \mathbb{P}(k)}{\mu + \frac{r}{1+\gamma\Theta} + \frac{u_k}{\mu+\omega} \left(\mu + \frac{r}{1+\gamma\Theta} \right)} < \bar{\mathfrak{R}}_0.$$

Hệ quả là nếu $\bar{\mathfrak{R}}_0 < 1$ thì ta cũng có $\mathcal{F}(\Theta) < 1$ với mọi $\Theta \in [0, 1]$ và do đó, phương trình $\mathcal{F}(\Theta) - 1 = 0$ không có nghiệm $\Theta \in [0, 1]$ hay nói cách khác, không tồn tại bất kỳ trạng thái cân bằng đặc hữu \mathbf{P}_* nào khi $\bar{\mathfrak{R}}_0 < 1$.

4.2.3. Dáng điệu tiệm cận của điểm cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0

Sau đây, dựa trên phương pháp tuyến tính hóa cho các phương trình vi phân phân thứ (tham khảo [54]), luận án thảo luận về mối quan hệ giữa chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và sự ổn định tiệm cận địa phương của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 .

Định lý 4.3. Các mệnh đề sau đây đúng:

- (i) Nếu $\mathfrak{R}_0 > 1$ thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 không ổn định.
- (ii) Nếu $\mathfrak{R}_0 < 1$ thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận địa phương.

Chứng minh. Theo lý thuyết ổn định của phương trình vi phân phân thứ, sự ổn định tiệm cận địa phương của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 phụ thuộc vào mô-đun của $\arg(\lambda_j)$, trong đó λ_j là giá trị riêng của ma trận Jacobi $J(\mathbf{P}_0)$ xác định bởi

$$J(\mathbf{P}_0) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n} \\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n1} & J_{n2} & \cdots & J_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ở đây, với mỗi $k, j = \overline{1, n}$, các ma trận J_{kk} và J_{kj} là các ma trận vuông cấp 3 cho bởi

$$J_{kk} = \begin{pmatrix} -(\mu + \mathbf{u}_k) & -\frac{\sigma_k S_k^0 \mathbb{P}(k)}{\langle n \rangle} & \omega \\ 0 & \frac{\sigma_k S_k^0 \mathbb{P}(k)}{\langle n \rangle} - (\mu + r) & 0 \\ \mathbf{u}_k & r & -(\mu + \omega) \end{pmatrix},$$

$$J_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sigma_k S_k^0 j \mathbb{P}(j)}{\langle n \rangle} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_k S_k^0 j \mathbb{P}(j)}{\langle n \rangle} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tiếp đó, bằng cách áp dụng nguyên lý quy nạp, chúng ta nhận được đa thức đặc trưng đối với ma trận Jacobi $J(\mathbf{P}_0)$ cho bởi

$$\begin{aligned} \det(\bar{\lambda} \mathbb{I}_{3n} - J(\mathbf{P}_0)) &= (\bar{\lambda} + \mu)^n \left[\prod_{k=1}^n (\bar{\lambda} + (\mu + \omega + \mathbf{u}_k)) \right] (\bar{\lambda} + (\mu + r))^{n-1} \times \\ &\quad \left[\bar{\lambda} + (\mu + r) - \frac{\sigma(\mu + \omega)}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 \mathbb{P}(k)}{\mu + \omega + \mathbf{u}_k} \right] \\ &= (\bar{\lambda} + \mu)^n \left[\prod_{k=1}^n (\bar{\lambda} + (\mu + \omega + \mathbf{u}_k)) \right] (\bar{\lambda} + (\mu + r))^{n-1} [\bar{\lambda} + (\mu + r)(1 - \mathfrak{R}_0)]. \end{aligned}$$

Để thấy rằng phương trình đặc trưng $\det(\bar{\lambda} \mathbb{I}_{3n} - J(\mathbf{P}_0)) = 0$ có $3n$ nghiệm thực gồm nghiệm âm $\bar{\lambda}_{11} = -\mu$ với bội n , nghiệm âm $\bar{\lambda}_{21} = -(\mu + r)$ với bội $n - 1$ và n nghiệm âm dạng $\bar{\lambda}_{3k} = -(\mu + \omega + \mathbf{u}_k)$ với mỗi $k = \overline{1, n}$. Theo Định lý 7.20 trong [50], trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận địa phương khi và chỉ khi

$$|\arg(\bar{\lambda}_j)| > \frac{\beta\pi}{2} \quad \text{với mọi } j = \overline{1, 3n}.$$

Thật vậy, do $3n - 1$ giá trị riêng đầu tiên của ma trận Jacobi $J(\mathbf{P}_0)$ đều là số thực âm nên ta có $|\arg(\bar{\lambda}_j)| = \pi > \frac{\beta\pi}{2}$ với mọi $j = \overline{1, 3n - 1}$. Vì vậy, sự ổn định tiệm cận địa phương của \mathbf{P}_0 chỉ phụ thuộc vào giá trị riêng cuối cùng

$$\bar{\lambda}_{3n} = -(\mu + r)(1 - \mathfrak{R}_0).$$

Do đó, chúng ta có kết luận như sau:

- Nếu $\mathfrak{R}_0 > 1$ thì giá trị riêng $\bar{\lambda}_{3n}$ là số thực dương và do đó, $|\arg(\bar{\lambda}_{3n})| = 0$, tức là trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 không ổn định.
- Nếu $\mathfrak{R}_0 < 1$ thì giá trị riêng $\bar{\lambda}_{3n}$ là số thực âm và do đó, $|\arg(\bar{\lambda}_{3n})| = \pi > \frac{\beta\pi}{2}$. Vì vậy, trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận địa phương.

Định lý được chứng minh. \square

Nhận xét 4.3 đã chỉ ra rằng điều kiện $\mathfrak{R}_0 < 1$ là không đủ để loại bỏ phần mềm độc hại trên mạng phức hợp không đồng nhất. Do đó, trong phần tiếp theo, luận án sẽ thảo luận về các điều kiện để trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 hút toàn cục, tức là sự lây lan của phần mềm độc hại dần biến mất.

Định lý 4.4. *Đặt $\tilde{\mathfrak{R}}_0 = \frac{\sigma(\mu + \omega)\langle k^2 \mathbf{u} \rangle}{\mu \langle n \rangle}$. Khi đó, nếu giá trị ngưỡng $\tilde{\mathfrak{R}}_0 < 1$ thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận toàn cục.*

Chứng minh. Giả sử $(S_1(t), I_1(t), R_1(t), \dots, S_n(t), I_n(t), R_n(t))$ là một nghiệm không âm của mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng thỏa mãn điều kiện ban đầu (4.2). Vì tập Σ^+ là một tập bất biến dương của mô hình lan truyền mã độc đề xuất nên chúng ta suy ra

$$0 < S_k(t) \leq 1, \quad R_k(t) \leq 1 - S_k(t) - I_k(t),$$

với mỗi $k = \overline{1, n}$ và $t \geq 0$. Do đó, từ phương trình vi phân phân thứ đầu tiên của hệ (4.3), chúng ta suy ra

$$\begin{aligned} {}^C \mathfrak{D}_t^\beta S_k(t) &\leq \Lambda - (\mu + \mathbf{u}_k) S_k(t) + \omega (1 - S_k(t) - I_k(t)) \\ &\leq (\mu + \omega) - (\mu + \omega + \mathbf{u}_k) S_k(t). \end{aligned}$$

Xét phương trình bổ trợ sau:

$${}^C \mathfrak{D}_t^\beta \bar{S}_k(t) = (\mu + \omega) - (\mu + \omega + \mathbf{u}_k) \bar{S}_k(t).$$

Chúng ta thấy rằng phương trình vi phân phân thứ này có một trạng thái cân bằng dương ổn định tiệm cận toàn cục duy nhất $S_k^0 = \frac{\mu + \omega}{\mu + \omega + \mathbf{u}_k}$. Sau đó, bằng cách sử dụng nguyên lý so sánh nghiệm cho phương trình vi phân phân thứ, chúng ta suy ra với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một thời điểm đủ lớn T_0 sao cho bất đẳng thức $S_k(t) \leq S_k^0 + \varepsilon$ đúng với mọi $t > T_0$. Khi đó, với mỗi $k = \overline{1, n}$ và với mọi $t > T_0$, tính không âm của hàm $I_k(t)$ dẫn tới

$${}^C \mathfrak{D}_t^\beta I_k(t) = \sigma_k \Theta(t) S_k(t) - \mu I_k(t) - \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} \leq \sigma_k (S_k^0 + \varepsilon) \Theta(t) - \mu I_k(t).$$

Theo định nghĩa của hàm xác suất $\Theta(t)$, chúng ta nhận được

$${}^C \mathfrak{D}_t^\beta \Theta(t) \leq \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(k) [\sigma_k (S_k^0 + \varepsilon) \Theta(t) - \mu I_k(t)]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(k) \sigma_k \left(\frac{\mu + \omega}{\mu + \omega + \mathbf{u}_k} + \varepsilon \right) \right] \Theta(t) - \mu \Theta(t) \\
&= \mu \Theta(t) \left[\tilde{\mathfrak{A}}_0 - 1 + \frac{\varepsilon \sigma \langle n^2 \rangle}{\mu \langle n \rangle} \right],
\end{aligned}$$

trong đó $\langle n^2 \rangle = \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(k)$. Do đó, từ giả thiết $\tilde{\mathfrak{A}}_0 < 1$, chúng ta có thể chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$\tilde{\mathfrak{A}}_0 + \frac{\varepsilon \sigma \langle n^2 \rangle}{\mu \langle n \rangle} < 1.$$

Ngoài ra, do giả sử phần mềm độc hại đang lan truyền trên mạng nên $\Theta(0) > 0$. Áp dụng nguyên lý so sánh nghiệm, chúng ta nhận được

$$0 \leq \Theta(t) \leq \Theta(0) \mathbb{E}_\beta \left(\mu \left(\tilde{\mathfrak{A}}_0 - 1 + \frac{\varepsilon \sigma \langle n^2 \rangle}{\mu \langle n \rangle} \right) t^\beta \right), \quad t \geq 0.$$

Điều trên dẫn tới $\lim_{t \rightarrow \infty} \Theta(t) = 0$. Theo định nghĩa của $\Theta(t)$ và tính không âm của hàm $I_k(t)$, chúng ta suy ra $\lim_{t \rightarrow \infty} I_k(t) = 0$ với mọi $k = \overline{1, n}$. Do đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại thời điểm $T_1 > 0$ đủ lớn sao cho hàm $I_k(t) < \varepsilon$ với mọi $t > T_1$. Hệ quả là

$$\Theta(t) = \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(k) I_k(t) < \frac{\varepsilon}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(k) = \varepsilon \quad \text{với mọi } t > T_1.$$

Với mọi $t > T_1$, ta có

$$\begin{aligned}
{}^C \mathfrak{D}_t^\beta S_k(t) &> \Lambda - S_k(t) (\sigma_k \varepsilon + \mu + \omega + \mathbf{u}_k) + \omega - \omega \varepsilon \\
&= (\mu + \omega - \omega \varepsilon) - (\sigma_k \varepsilon + \mu + \omega + \mathbf{u}_k) S_k(t).
\end{aligned}$$

Chú ý rằng hệ hỗ trợ ${}^C \mathfrak{D}_t^\beta \bar{S}_k(t) = (\mu + \omega - \omega \varepsilon) - (\sigma_k \varepsilon + \mu + \omega + \mathbf{u}_k) \bar{S}_k(t)$ có trạng thái cân bằng duy nhất $S_k^{0, \varepsilon} = \frac{\mu + \omega - \omega \varepsilon}{\sigma_k \varepsilon + \mu + \omega + \mathbf{u}_k}$. Do đó, với $t > 0$ đủ lớn, ta có

$$S_k(t) > \frac{\mu + \omega - \omega \varepsilon}{\sigma_k \varepsilon + \mu + \omega + \mathbf{u}_k}.$$

Hơn nữa, với mọi $t > T_1$, ta cũng có ${}^C \mathfrak{D}_t^\beta R_k(t) > -(\mu + \omega) R_k(t) + \frac{\mathbf{u}_k (\mu + \omega - \omega \varepsilon)}{\sigma_k \varepsilon + \mu + \omega + \mathbf{u}_k}$. Từ đó, chúng ta nhận được

$$R_k(t) > \frac{\mathbf{u}_k (\mu + \omega - \omega \varepsilon)}{(\sigma_k \varepsilon + \mu + \omega + \mathbf{u}_k) (\mu + \omega)}.$$

Cuối cùng, cho $\varepsilon \rightarrow 0$, ta nhận được

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_k(t) = \frac{\mu + \omega}{\mu + \omega + \mathbf{u}_k} = S_k^0$$

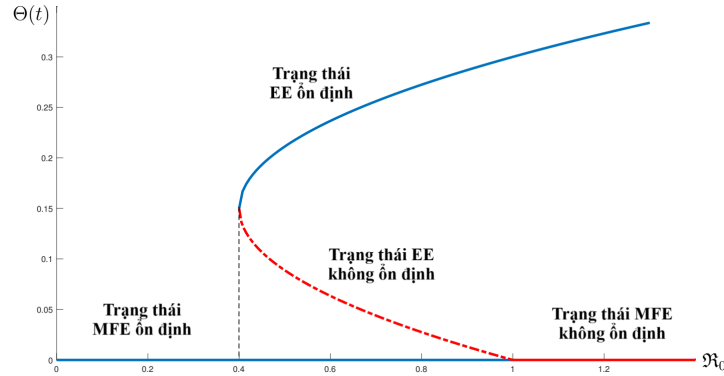
$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_k(t) = \frac{\mathbf{u}_k}{\mu + \omega + \mathbf{u}_k} = R_k^0.$$

Định lý được chứng minh. \square

Nhận xét 4.4. Dễ thấy rằng $\mathfrak{R}_0 < \tilde{\mathfrak{R}}_0$, tức là điều kiện $\mathfrak{R}_0 < 1$ không đủ để đảm bảo cho tính hút toàn cục của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 và trong trường hợp này, chúng ta không thể loại bỏ các cuộc tấn công của phần mềm độc hại trừ khi giá trị của \mathfrak{R}_0 giảm sao cho $\mathfrak{R}_0 < \tilde{\mathfrak{R}}_0 < 1$.

4.2.4. Tính rẽ nhánh lùi

Theo kết quả của Định lý 4.4, luận án đã chỉ ra rằng điều kiện $\mathfrak{R}_0 < 1$ là không đủ để loại bỏ hoàn toàn phần mềm độc hại khỏi mạng. Thêm vào đó, theo Nhận xét 4.3, chúng ta thấy rằng ngay cả khi $\mathfrak{R}_0 < 1$, vẫn có thể xảy ra trường hợp có trạng thái cân bằng đặc hữu \mathbf{P}_* cùng tồn tại với trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 . Điều này dẫn đến hiện tượng rẽ nhánh lùi trong quỹ đạo nghiệm của mô hình lan truyền mã độc đề xuất. Trong thực tế, một số cơ chế dịch tễ có thể gây ra hiện tượng rẽ nhánh lùi bao gồm: việc sử dụng phần mềm phát hiện và chống mã độc không hoàn thiện, ảnh hưởng từ sự hạn chế của phần mềm diệt mã độc, tái nhiễm trong quá trình truyền dẫn dữ liệu hoặc do số nút lan truyền mã độc ban đầu quá lớn, v.v. (xem Hình 4.3)



Hình 4.3: Minh họa cho tính rẽ nhánh lùi

Sau đây, luận án sẽ thiết lập một điều kiện đủ đối với các tham số để hiện tượng rẽ nhánh lùi tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ xảy ra.

Định lý 4.5. *Mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển diễn ra hiện tượng rẽ nhánh lùi tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ nếu*

$$\gamma > \frac{(\mu + r)\langle k^3 a \rangle \langle n \rangle}{r\langle k^2 u \rangle} \left(1 + \frac{r}{\mu + \omega} \right),$$

trong đó $\langle k^3 a \rangle = \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k^3 \mathbb{P}(k)}{\mu + \omega + \mathbf{u}_k}$.

Chứng minh. Trong chứng minh này, luận án giả sử trạng thái cân bằng đặc hữu tồn tại, tức là hàm $I_k(t)$ dương với mọi $t \geq 0$ và với một số $k = 1, 2, \dots, n$. Điều này dẫn tới $\Theta(t) > 0$ với mọi $t \geq 0$. Ngoài ra, chú ý rằng trạng thái cân bằng đặc hữu của mô hình lan truyền mã độc đề xuất là một nghiệm không tầm thường của phương trình tự nhất quán (4.5) hay nói cách khác, nó thỏa mãn phương trình phi tuyến sau:

$$\frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{\sigma k^2 \mathbb{P}(k)}{\left\{ \left(1 + \frac{\mathbf{u}_k}{\mu + \omega}\right) \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta}\right) + \sigma k \Theta \left(1 + \frac{r}{(\mu + \omega)(1 + \gamma \Theta)}\right) \right\}} = 1.$$

Tiếp theo, bằng cách nhân hai vế của phương trình trên với $\frac{(\mu + \omega) \langle k^2 u \rangle}{(\mu + r) \langle n \rangle}$, phương trình này có thể viết lại dưới dạng một biểu thức của các số hạng \mathfrak{R}_0 và Θ . Vì vậy, chúng ta nhận được

$$\frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{\mathfrak{R}_0 k^2 \mathbb{P}(k)}{\left\{ \frac{(\mu + \omega) \langle k^2 u \rangle}{(\mu + r) \langle n \rangle} \left(1 + \frac{\mathbf{u}_k}{\mu + \omega}\right) \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta}\right) + k \mathfrak{R}_0 \Theta \left(1 + \frac{r}{(\mu + \omega)(1 + \gamma \Theta)}\right) \right\}} = 1. \quad (4.6)$$

Khi đó, đẳng thức (4.6) có thể xem là phương trình ẩn của đường cong cân bằng đặc hữu trong góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ (\mathfrak{R}_0, Θ) và hàm Θ được xem như một hàm của \mathfrak{R}_0 . Để đưa ra điều kiện đủ cho sự rẽ nhánh lùi, chúng ta tính biểu thức $\frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0}$ tại điểm $(\mathfrak{R}_0, \Theta) = (1, 0)$. Thật vậy, ta có

$$\sum_{k=1}^n \frac{\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2}{\left\{ \frac{(\mu + \omega) \langle k^2 u \rangle}{(\mu + r) \langle n \rangle} \left(1 + \frac{\mathbf{u}_k}{\mu + \omega}\right) \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta}\right) + k \mathfrak{R}_0 \Theta \left(1 + \frac{r}{(\mu + \omega)(1 + \gamma \Theta)}\right) \right\}^2} = 0, \quad (4.7)$$

trong đó các số hạng \mathcal{A}_1 và \mathcal{A}_2 được cho bởi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{k^2 \mathbb{P}(k)}{\langle n \rangle} \left\{ \frac{(\mu + \omega) \langle k^2 u \rangle}{(\mu + r) \langle n \rangle} \left(1 + \frac{\mathbf{u}_k}{\mu + \omega}\right) \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta}\right) + k \mathfrak{R}_0 \Theta \left(1 + \frac{r}{(\mu + \omega)(1 + \gamma \Theta)}\right) \right\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \frac{\mathfrak{R}_0 k^2 \mathbb{P}(k)}{\langle n \rangle} \left\{ -\frac{(\mu + \omega) \langle k^2 u \rangle}{(\mu + r) \langle n \rangle} \left(1 + \frac{\mathbf{u}_k}{\mu + \omega}\right) \frac{r \gamma}{(1 + \gamma \Theta)^2} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} + k \Theta \left(1 + \frac{r}{(\mu + \omega)(1 + \gamma \Theta)}\right) \right. \\ &\quad \left. + k \mathfrak{R}_0 \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} \left(1 + \frac{r}{(\mu + \omega)(1 + \gamma \Theta)}\right) - \frac{r \gamma k \mathfrak{R}_0 \Theta}{(\mu + \omega)(1 + \gamma \Theta)^2} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} \right\}. \end{aligned}$$

Tại điểm $(\mathfrak{R}_0, \Theta) = (1, 0)$, ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{k^2 \mathbb{P}(k)}{\langle n \rangle} \left\{ \frac{(\mu + \omega) \langle k^2 u \rangle}{\langle n \rangle} \left(1 + \frac{\mathbf{u}_k}{\mu + \omega}\right) \right\} \\ \mathcal{A}_2 &= \frac{k^2 \mathbb{P}(k)}{\langle n \rangle} \left\{ -\frac{r \gamma (\mu + \omega) \langle k^2 u \rangle}{(\mu + r) \langle n \rangle} \left(1 + \frac{\mathbf{u}_k}{\mu + \omega}\right) + k \left(1 + \frac{r}{\mu + \omega}\right) \right\} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} \Big|_{(\mathfrak{R}_0, \Theta) = (1, 0)}. \end{aligned}$$

Do đó, phương trình (4.7) trở thành

$$\frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(k) \frac{\left\{ -\frac{r\gamma(\mu + \omega)\langle k^2 u \rangle}{(\mu + r)\langle n \rangle} \left(1 + \frac{\mathbf{u}_k}{\mu + \omega} \right) + k \left(1 + \frac{r}{\mu + \omega} \right) \right\} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} \Big|_{(\mathfrak{R}_0, \Theta) = (1, 0)}}{\left\{ \frac{(\mu + \omega)\langle k^2 u \rangle}{\langle n \rangle} \left(1 + \frac{\mathbf{u}_k}{\mu + \omega} \right) \right\}^2} = 1,$$

hay tương đương với

$$\left\{ -\frac{r\gamma}{\mu + r} + \frac{\langle k^3 a \rangle \langle n \rangle}{\langle k^2 u \rangle} \left(1 + \frac{r}{\mu + \omega} \right) \right\} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0} \Big|_{(\mathfrak{R}_0, \Theta) = (1, 0)} = 1.$$

Do Θ đang được xét là hàm của \mathfrak{R}_0 nên sự rẽ nhánh lùi sẽ được đặc trưng bởi giá trị âm của đạo hàm $\frac{\partial \Theta}{\partial \mathfrak{R}_0}$ tại điểm $(\mathfrak{R}_0, \Theta) = (1, 0)$, tức là

$$-\frac{r\gamma}{\mu + r} + \frac{\langle k^3 a \rangle \langle n \rangle}{\langle k^2 u \rangle} \left(1 + \frac{r}{\mu + \omega} \right) < 0.$$

Định lý được chứng minh. \square

4.3. Bài toán ổn định hóa cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển

Trong phần này, luận án xét kịch bản khi sự lan truyền phần mềm độc hại bùng phát trong mạng, tức là khi đó $\mathfrak{R}_0 > 1$ và trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 không ổn định. Khi đó, chúng ta sẽ cần thiết kế các biện pháp điều trị và ngừa chủng phù hợp để kiểm soát sự lây lan của phần mềm độc hại. Thêm vào đó, chúng ta thấy rằng việc can thiệp ngừa chủng với tốc độ không đổi $\mathbf{u}(t) \equiv \text{const}$ để đối phó với sự lan truyền phần mềm độc hại trong mạng phức hợp không đồng nhất trên thực tế là không hợp lý. Với những động cơ nói ở trên, luận án sẽ xây dựng hàm ngừa chủng phụ thuộc thời gian $\mathbf{u}(t)$ để ổn định hóa trạng thái cân bằng không có mã độc, tức là vectơ điều khiển đầu vào sẽ chuyển trạng thái của mô hình lan truyền mã độc có điều khiển đề xuất về trạng thái cân bằng không có mã độc $\tilde{\mathbf{P}}_0 = \underbrace{(1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0)}_{3n}$ sau một khoảng thời gian. Khi đó,

bằng cách ký hiệu

$$\tilde{\mathbf{e}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{P}}_0 = \underbrace{(S_1 - 1, I_1, R_1, S_2 - 1, I_2, R_2, \dots, S_n - 1, I_n, R_n)}_{3n},$$

bài toán ổn định hóa trạng thái cân bằng không có mã độc sẽ tương đương với bài toán ổn định hóa vectơ trạng thái $\mathbf{e}(t)$ về vectơ $\bar{\mathbf{0}}$ sau một khoảng thời gian. Với cách tiếp cận này, mô hình lan truyền mã độc đã cho được chuyển về hệ gồm n phương trình vi phân

phân thứ sau đây:

$$\begin{cases} {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta S_i(t) &= \Lambda - \sigma_i \Theta(t) (S_i(t) - 1) - \mu (S_i(t) - 1) - \mathbf{u}_i(t) (S_i(t) - 1) + \omega R_i(t) \\ {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta I_i(t) &= \sigma_i \Theta(t) (S_i(t) - 1) - \mu I_i(t) - \frac{r I_i(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} \\ {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta R_i(t) &= \mathbf{u}_i(t) (S_i(t) - 1) + \frac{r I_i(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} - (\mu + \omega) R_i(t), \end{cases} \quad (4.8)$$

với $i = 1, 2, \dots, n$. Dựa trên những ưu điểm của hệ mờ Takagi-Sugeno trong việc xấp xỉ các hệ động lực phi tuyến và thiết kế các bài toán điều khiển-quan sát, trong mục này, luận án sẽ áp dụng cách tiếp cận hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết (*interconnected fractional Takagi-Sugeno fuzzy system*) để xây dựng hàm điều khiển phản hồi trạng thái mờ thích hợp $\mathbf{u}(t)$ nhằm ổn định hóa mô hình lan truyền mã độc đề xuất. Cụ thể, luận án xét hệ phương trình vi phân phân thứ (4.8) là hệ con thứ i của mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng và áp dụng phương pháp phi tuyến đoạn (tham khảo [102]) để xây dựng hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết cho hệ con này. Do $\Lambda = \mu$, tức là tổng mật độ $N_i(t)$ không đổi nên chúng ta thế $S_i = 1 - I_i - R_i$. Khi đó, nhằm giảm độ phức tạp của tính toán, chúng ta chỉ cần xét động lực của mô hình theo hai họ ẩn hàm I_i và R_i . Mặt khác, theo kết quả của Định lý 4.1, chúng ta thấy rằng hàm $S_i(t)$ luôn dương và bị chặn trên bởi 1. Ngoài ra, nhóm thứ i được giả định là nhận được tốc độ tham gia của nút mới không đổi là Λ . Do đó, luận án có thể giả định một cách hợp lý rằng $S_i(t) \in [0.1, 0.9]$ với mọi $t > 0$ và kéo theo $I_i(t) + R_i(t) \in [0.1, 0.9]$. Khi đó, chúng ta có thể viết lại hệ phương trình vi phân phân thứ (4.8) dưới dạng hệ động lực phi tuyến tính sau với vectơ trạng thái $\mathbf{e}_i(t) = \begin{pmatrix} I_i(t) & R_i(t) \end{pmatrix}^\top$ và điều khiển đầu vào $\mathbf{u}_i(t)$:

$$\begin{aligned} {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) &= \begin{pmatrix} -\mu - \frac{r}{1 + \gamma \Theta(t)} + \frac{\sigma_i i \mathbb{P}(i) (S_i(t) - 1)}{\langle n \rangle} & 0 \\ \frac{r}{1 + \gamma \Theta(t)} & -(\mu + \omega) \end{pmatrix} \mathbf{e}_i(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ S_i(t) - 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}_i(t) \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \begin{pmatrix} \frac{\sigma_i (S_i(t) - 1)}{\langle n \rangle} j \mathbb{P}(j) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_j(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ký hiệu $\mathbf{z}_i(t) = \begin{pmatrix} z_{i1}(t) & z_{i2}(t) & \dots & z_{iq}(t) \end{pmatrix}^\top$ là vectơ biến tiền đề đo được. Tiếp theo, luận án thiết lập một hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết cho hệ phi tuyến (4.9) với các luật mờ như sau:

Luật \mathbf{E}_i^p : Nếu z_{i1} thuộc F_{i1}^p và z_{i2} thuộc F_{i2}^p và \dots và z_{iq} thuộc F_{iq}^p thì

$${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = A_i^p \mathbf{e}_i(t) + B_i^p \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t),$$

trong đó A_i^p , B_i^p và α_{ij}^p là các ma trận thực với mọi $i = \overline{1, n}$ và $p = \overline{1, r_i}$. Bằng cách áp dụng công thức (1.5), hệ phi tuyến (4.9) có thể được đặc trưng bởi hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết sau đây:

$${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) \left\{ A_i^p \mathbf{e}_i(t) + B_i^p \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t) \right\} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (4.10)$$

trong đó $w_i^p(\mathbf{z}_i(t))$ là hàm thuộc thích hợp cho biết mức độ kích hoạt của mô hình địa phương thứ p của hệ con \mathbf{E}_i . Do đó, hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng được biểu diễn dưới dạng vectơ như sau:

$${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^{r_1} w_1^p(\mathbf{z}_1(t)) \left\{ A_1^p \mathbf{e}_1(t) + B_1^p \mathbf{u}_1(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{1j}^p \mathbf{e}_j(t) \right\} \\ \vdots \\ \sum_{p=1}^{r_n} w_n^p(\mathbf{z}_n(t)) \left\{ A_n^p \mathbf{e}_n(t) + B_n^p \mathbf{u}_n(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{nj}^p \mathbf{e}_j(t) \right\} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Tiếp theo, dựa trên ý tưởng phương pháp bù phân phối song song (*parallel distributed compensation–PDC*) được giới thiệu trong [113], luận án xây dựng điều khiển phản hồi trạng thái mờ $\mathbf{u}(t)$ để ổn định hóa trạng thái cân bằng không có mã độc không ổn định của mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng. Với mục tiêu này, theo cách tiếp cận trong [88, 101], mỗi hệ con phi tuyến ở dạng (4.9) của mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có thể được biểu diễn bằng hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết (4.11). Do đó, luật mờ thứ p của điều khiển mờ trong hệ con \mathbf{E}_i có thể xét dưới dạng PDC sau:

Luật \mathbf{E}_i^p : Nếu z_{i1} thuộc F_{i1}^p và z_{i2} thuộc F_{i2}^p và \dots và z_{iq} thuộc F_{iq}^p thì

$$\mathbf{u}_i(t) = K_i^p \mathbf{x}_i(t).$$

Do đó, đầu ra của điều khiển phản hồi trạng thái mờ $\mathbf{u}_i(t)$ cho hệ con \mathbf{E}_i là

$$\mathbf{u}_i(t) = \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) K_i^p \mathbf{x}_i(t) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4.12)$$

Ký hiệu $\mathbf{u}(t) = \left(\mathbf{u}_1(t) \ \dots \ \mathbf{u}_n(t) \right)^\top$ bởi điều khiển phản hồi trạng thái mờ cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng. Sau đây, luận án sẽ thiết lập một số điều kiện đủ để điều khiển phản hồi trạng thái mờ $\mathbf{u}(t)$ được xây dựng ổn định hóa trạng thái cân bằng không dịch:

Định lý 4.6. Giả sử rằng tồn tại các ma trận $P_i \in \mathbf{S}_{++}^n$, $U_i^{pm}, U_{ij}^{pm} \in \mathbf{S}^n$ và các ma trận K_i^p thỏa mãn các bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau:

$$Q_i^{pm} \preceq U_i^{pm} \quad (\text{LMI.1})$$

$$(\alpha_{ij}^p)^\top P_i + P_i \alpha_{ij}^p + (\alpha_{ji}^m)^\top P_j + P_j \alpha_{ji}^m \preceq 2U_{ij}^{pm} \quad (\text{LMI.2})$$

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} U_1 & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ U_{12}^\top & U_2 & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{1n}^\top & U_{2n}^\top & \cdots & U_n \end{pmatrix} \prec 0, \quad (\text{LMI.3})$$

trong đó với mỗi $i, j = \overline{1, n}$, các ma trận U_i và U_{ij} ($i \neq j$) được cho bởi

$$U_i = \begin{pmatrix} U_i^{11} & U_i^{12} & \cdots & U_i^{1r_i} \\ (U_i^{12})^\top & U_i^{22} & \cdots & U_i^{2r_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (U_i^{1r_i})^\top & (U_i^{2r_i})^\top & \cdots & U_i^{r_i r_i} \end{pmatrix}, \quad U_{ij} = \begin{pmatrix} U_{ij}^{11} & U_{ij}^{12} & \cdots & U_{ij}^{1r_j} \\ U_{ij}^{21} & U_{ij}^{22} & \cdots & U_{ij}^{2r_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{ij}^{r_i 1} & U_{ij}^{r_i 2} & \cdots & U_{ij}^{r_i r_j} \end{pmatrix}.$$

Khi đó, hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết (4.11) ổn định hóa được với điều khiển phản hồi trạng thái mờ $\mathbf{u}(t)$, trong đó

$$Q_i^{pm} = (G_i^{pm})^\top P_i + P_i G_i^{pm} \quad \text{và} \quad G_i^{pm} = A_i^p + B_i^p K_i^m.$$

Chứng minh. Để thuận tiện trong trình bày, luận án sẽ sử dụng các ký hiệu w_i^p, w_i^m thay cho $w_i^p(\mathbf{z}_i(t))$ và $w_i^m(\mathbf{z}_i(t))$. Khi đó, với điều khiển phản hồi trạng thái mờ $\mathbf{u}_i(t)$ cho bởi (4.12), hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết (4.11) trở thành

$$\begin{aligned} {}^C_0 \mathcal{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) &= \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) w_i^m(\mathbf{z}_i(t)) \left(A_i^p + B_i^p K_i^m \right) \mathbf{e}_i(t) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{j=1}^n w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Chú ý rằng bài toán ổn định hóa của hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết (4.11) với điều khiển phản hồi trạng thái mờ $\mathbf{u}_i(t)$ tương đương với bài toán xét sự ổn định tiệm cận của hệ kín (4.13). Khi đó, chúng ta viết lại hệ phương trình (4.13) như sau:

$${}^C_0 \mathcal{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{m=1}^{r_i} w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) w_i^m(\mathbf{z}_i(t)) \left(A_i^p + B_i^p K_i^m \right) \mathbf{e}_i(t) + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{j=1}^n w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=1}^{r_i} [w_i^p(\mathbf{z}_i(t))]^2 \left(A_i^p + B_i^p K_i^p \right) \mathbf{e}_i(t) + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{j=1}^n w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t) \\
&\quad + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{m=p+1}^{r_i} w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) w_i^m(\mathbf{z}_i(t)) \left\{ \left(A_i^p + B_i^p K_i^m \right) \mathbf{e}_i(t) + \left(A_i^m + B_i^m K_i^p \right) \mathbf{e}_i(t) \right\}.
\end{aligned}$$

Với mỗi $p, m = \overline{1, r_i}$ và $i = \overline{1, n}$, bằng cách ký hiệu $G_i^{pm} = A_i^p + B_i^p K_i^m$ và $Q_i^{pm} = (G_i^{pm})^\top P_i + P_i G_i^{pm}$, hệ kín trên có thể viết lại như sau:

$$\begin{aligned}
{}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) &= \sum_{p=1}^{r_i} (w_i^p)^2 G_i^{pp} \mathbf{e}_i(t) + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{j=1}^n w_i^p \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t) \\
&\quad + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{m=p+1}^{r_i} w_i^p w_i^m \left(G_i^{pm} + G_i^{mp} \right) \mathbf{e}_i(t). \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Tiếp theo, chúng ta xét hàm Lyapunov cho hệ phương trình (4.14) như sau:

$$\mathbf{V}(\mathbf{e}(t)) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i(\mathbf{e}(t)),$$

trong đó hàm $\mathbf{V}_i(\mathbf{e}(t))$ được cho ở dạng toàn phương $\mathbf{V}_i(\mathbf{e}(t)) = \mathbf{e}_i^\top(t) P_i \mathbf{e}_i(t)$. Tiếp theo, bằng cách lấy đạo hàm phân thứ Caputo bậc β của hàm $\mathbf{V}_i(\mathbf{e}(t))$ dọc theo nghiệm của (4.14) và sử dụng Bổ đề 1.4, ta nhận được

$${}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{V}_i(\mathbf{e}(t)) \leq \left[{}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i^\top(t) \right] P_i \mathbf{e}_i(t) + \mathbf{e}_i^\top(t) P_i \left[{}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) \right].$$

Sử dụng vế phải của phương trình vi phân phân thứ (4.14), ta thu được

$$\begin{aligned}
{}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{V}_i(\mathbf{e}(t)) &\leq \sum_{p=1}^{r_i} (w_i^p)^2 \mathbf{e}_i^\top(t) \left\{ (G_i^{pp})^\top P_i + P_i G_i^{pp} \right\} \mathbf{e}_i(t) \\
&\quad + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{m=p+1}^{r_i} w_i^p w_i^m \mathbf{e}_i^\top(t) \left\{ (G_i^{pm})^\top P_i + P_i G_i^{pm} + (G_i^{mp})^\top P_i + P_i G_i^{mp} \right\} \mathbf{e}_i(t) \\
&\quad + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{j=1}^n w_i^p \mathbf{e}_j^\top(t) (\alpha_{ij}^p)^\top P_i \mathbf{e}_i(t) + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{j=1}^n w_i^p \mathbf{e}_i^\top(t) P_i \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t) \\
&= \sum_{p=1}^{r_i} (w_i^p)^2 \mathbf{e}_i^\top(t) Q_i^{pp} \mathbf{e}_i(t) + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{m=p+1}^{r_i} w_i^p w_i^m \mathbf{e}_i^\top(t) \{ Q_i^{pm} + Q_i^{mp} \} \mathbf{e}_i(t) \\
&\quad + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{j=1}^n w_i^p \mathbf{e}_j^\top(t) (\alpha_{ij}^p)^\top P_i \mathbf{e}_i(t) + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{j=1}^n w_i^p \mathbf{e}_i^\top(t) P_i \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t).
\end{aligned}$$

Thêm vào đó, do $\sum_{m=1}^{r_j} w_j^m(\mathbf{z}_j(t)) = 1$ và sử dụng điều kiện (LMI.1), chúng ta suy ra

$${}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{V}_i(\mathbf{e}(t)) \leq \sum_{p=1}^{r_i} (w_i^p)^2 \mathbf{e}_i^\top(t) U_i^{pp} \mathbf{e}_i(t) + \sum_{p=1}^{r_i} \sum_{m=p+1}^{r_i} w_i^p w_i^m \mathbf{e}_i^\top(t) \{ U_i^{pm} + U_i^{mp} \} \mathbf{e}_i(t)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \mathbf{e}_j^\top(t) (\alpha_{ij}^p)^\top P_i \mathbf{e}_i(t) + \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \mathbf{e}_i^\top(t) P_i \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t) \\
& \leq \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{pmatrix} w_i^1 \mathbf{e}_i(t) & \cdots & w_i^{r_i} \mathbf{e}_i(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{11} & \cdots & U_i^{1r_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (U_i^{1r_i})^\top & \cdots & U_i^{r_i r_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i^1 \mathbf{e}_i(t) \\ \vdots \\ w_i^{r_i} \mathbf{e}_i(t) \end{pmatrix} \right\} \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \mathbf{e}_j^\top(t) (\alpha_{ij}^p)^\top P_i \mathbf{e}_i(t) \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \mathbf{e}_i^\top(t) P_i \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t) \\
& = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{pmatrix} w_i^1 \mathbf{e}_i(t) & \cdots & w_i^{r_i} \mathbf{e}_i(t) \end{pmatrix} U_i \begin{pmatrix} w_i^1 \mathbf{e}_i(t) \\ \vdots \\ w_i^{r_i} \mathbf{e}_i(t) \end{pmatrix} \right\} \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \frac{\mathbf{e}_j^\top(t) (\alpha_{ij}^p)^\top P_i \mathbf{e}_i(t)}{2} \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \frac{\mathbf{e}_i^\top(t) P_i \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t)}{2} \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \frac{\mathbf{e}_j^\top(t) (\alpha_{ij}^p)^\top P_i \mathbf{e}_i(t)}{2} \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \frac{\mathbf{e}_i^\top(t) P_i \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t)}{2}.
\end{aligned}$$

Sau đó, bằng cách thay đổi chỉ số và sử dụng bất đẳng thức (LMI.2), chúng ta nhận được

$$\begin{aligned}
{}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{V}_i(\mathbf{e}(t)) & \leq \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{pmatrix} w_i^1 \mathbf{e}_i(t) & \cdots & w_i^{r_i} \mathbf{e}_i(t) \end{pmatrix} U_i \begin{pmatrix} w_i^1 \mathbf{e}_i(t) \\ \vdots \\ w_i^{r_i} \mathbf{e}_i(t) \end{pmatrix} \right\} \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \frac{\mathbf{e}_j^\top(t) (\alpha_{ij}^p)^\top P_i \mathbf{e}_i(t)}{2} \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \frac{\mathbf{e}_i^\top(t) P_i \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t)}{2} \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \frac{\mathbf{e}_i^\top(t) (\alpha_{ji}^m)^\top P_j \mathbf{e}_j(t)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \frac{\mathbf{e}_j^\top(t) \mathbf{P}_j \alpha_{ji}^m \mathbf{e}_i(t)}{2} \\
& = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{c} \left(w_i^1 \mathbf{e}_i(t) \quad \cdots \quad w_i^{r_i} \mathbf{e}_i(t) \right) \mathbf{U}_i \begin{pmatrix} w_i^1 \mathbf{e}_i(t) \\ \vdots \\ w_i^{r_i} \mathbf{e}_i(t) \end{pmatrix} \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \mathbf{e}_j^\top(t) \frac{(\alpha_{ij}^p)^\top \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_j \alpha_{ji}^m}{2} \mathbf{e}_i(t) \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \mathbf{e}_i^\top(t) \frac{\mathbf{P}_i \alpha_{ij}^p + (\alpha_{ji}^m)^\top \mathbf{P}_j}{2} \mathbf{e}_j(t) \end{array} \right\} \\
& \leq \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{c} \left(w_i^1 \mathbf{e}_i(t) \quad \cdots \quad w_i^{r_i} \mathbf{e}_i(t) \right) \mathbf{U}_i \begin{pmatrix} w_i^1 \mathbf{e}_i(t) \\ \vdots \\ w_i^{r_i} \mathbf{e}_i(t) \end{pmatrix} \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \mathbf{e}_j^\top(t) \frac{\mathbb{U}_{ij}^{pm}}{2} \mathbf{e}_i(t) \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{r_j} w_j^m \mathbf{e}_i^\top(t) \frac{\mathbb{U}_{ij}^{pm}}{2} \mathbf{e}_j(t). \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Ký hiệu $\mathbf{w}\mathbf{e}(t) = \left(w_1^1 \mathbf{e}_1(t) \quad \cdots \quad w_1^{r_1} \mathbf{e}_1(t) \quad \cdots \quad w_n^1 \mathbf{e}_n(t) \quad \cdots \quad w_n^{r_n} \mathbf{e}_n(t) \right) \in \mathbb{R}^{n \times r_i}$. Khi đó, chúng ta nhận được

$${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{V}_i(\mathbf{e}(t)) \leq [\mathbf{w}\mathbf{e}(t)] \mathbb{U} [\mathbf{w}\mathbf{e}(t)]^\top.$$

Chú ý rằng $\mathbb{U} \in \mathbf{S}^n$. Do đó, theo bất đẳng thức ma trận (LMI.3) và bất đẳng thức Rayleigh, chúng ta suy ra tồn tại hằng số âm $\lambda_{\max}(\mathbb{U})$ sao cho

$${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{V}_i(\mathbf{e}(t)) \leq \lambda_{\max}(\mathbb{U}) \|\mathbf{w}\mathbf{e}(t)\|^2 < 0.$$

Ngoài ra, vì ma trận $\mathbf{P}_i \in \mathbf{S}_{++}^n$ nên bằng cách áp dụng bất đẳng thức Rayleigh, tồn tại các hằng số dương $\lambda_{\min}(\mathbf{P}_i)$ và $\lambda_{\max}(\mathbf{P}_i)$ sao cho

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}_i) \|\mathbf{e}(t)\|^2 \leq \mathbf{V}_i(\mathbf{e}(t)) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}_i) \|\mathbf{e}(t)\|^2.$$

Cuối cùng, bằng áp dụng Định lý 1.3, chúng ta có thể kết luận rằng hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết (4.11) ổn định hóa được với điều khiển phản hồi trạng thái mờ $\mathbf{u}(t)$. \square

Nhận xét 4.5. Để áp dụng chương trình MatLab để giải hệ điều kiện trong Định lý 4.6, luận án sẽ áp dụng định lý phần bù Schur (Tính chất 3.2, [102]) để biến đổi các bất đẳng

thức ma trận tuyến tính (LMI.1), (LMI.2) và (LMI.3) thành các bất đẳng thức ma trận tuyến tính ở dạng thuận tiện cho giải số hơn. Với mục tiêu này, luận án thực hiện các phép biến đổi sau:

$$C_i = P_i^{-1}, \quad K_i^p = W_i^p C_i^{-1}, \quad \tilde{U}_i^{pm} = C_i U_i^{pm} C_i, \quad \tilde{U}_{ij}^{pm} = C_i U_{ij}^{pm} C_j + C_j U_{ij}^{pm} C_i$$

và $\tilde{Q}_i^{pm} = C_i \left\{ (G_i^{pm})^\top P_i + P_i G_i^{pm} \right\} C_i = C_i (A_i^p)^\top + A_i^p C_i + B_i^p W_i^m + (W_i^m)^\top (B_i^p)^\top$. Tiếp đó, bằng cách nhân cả bên trái và bên phải của các ma trận U_i, U_{ij} với ma trận chéo dạng diag $\underbrace{[C_i, \dots, C_i]}_n$, chúng ta thu được

$$\tilde{U}_i = \begin{pmatrix} \tilde{U}_i^{11} & \tilde{U}_i^{12} & \dots & \tilde{U}_i^{1r_i} \\ (\tilde{U}_i^{12})^\top & \tilde{U}_i^{22} & \dots & \tilde{U}_i^{2r_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde{U}_i^{1r_i})^\top & (\tilde{U}_i^{2r_i})^\top & \dots & \tilde{U}_i^{r_i r_i} \end{pmatrix}, \quad \tilde{U}_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{ij}^{11} & \tilde{U}_{ij}^{12} & \dots & \tilde{U}_{ij}^{1r_j} \\ \tilde{U}_{ij}^{21} & \tilde{U}_{ij}^{22} & \dots & \tilde{U}_{ij}^{2r_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{U}_{ij}^{r_i 1} & \tilde{U}_{ij}^{r_i 2} & \dots & \tilde{U}_{ij}^{r_i r_j} \end{pmatrix}.$$

Do đó, chúng ta có thể viết lại hệ bất đẳng thức ma trận của Định lý 4.6 như sau:

$$\tilde{Q}_i^{pm} \preceq \tilde{U}_i^{pm} \quad (\text{LMI.4})$$

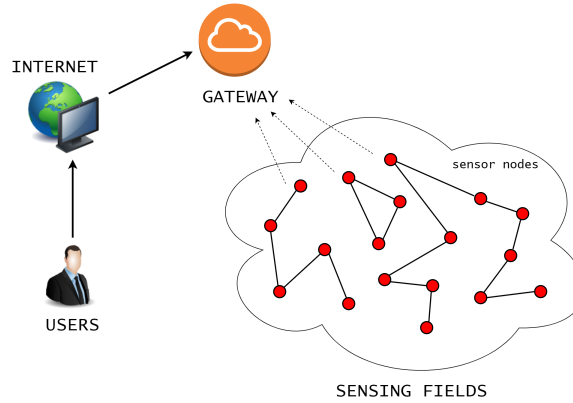
$$(\alpha_{ij}^p)^\top C_i + C_i \alpha_{ij}^p + (\alpha_{ji}^m)^\top C_j + C_j \alpha_{ji}^m \preceq 2\tilde{U}_{ij}^{pm} \quad (\text{LMI.5})$$

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 & \tilde{U}_{12} & \dots & \tilde{U}_{1n} \\ \tilde{U}_{12}^\top & \tilde{U}_2 & \dots & \tilde{U}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{U}_{1n}^\top & \tilde{U}_{2n}^\top & \dots & \tilde{U}_n \end{pmatrix} \prec 0. \quad (\text{LMI.6})$$

Nhận xét 4.6. Tuy nhiên, các điều kiện ở Định lý 4.6 chỉ là các điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được của hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết (4.11). Thật vậy, Định lý 4.6 xây dựng tiêu chuẩn cho tính ổn định tiệm cận của hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết (4.11) bởi hàm Lyapunov dạng toàn phương $\mathbf{V}(\mathbf{e}(t)) = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^\top(t) P_i \mathbf{e}_i(t)$. Chú ý rằng các điều kiện đưa ra là chặt khi đòi hỏi tính xác định âm của ma trận \tilde{U} và các ma trận $\tilde{Q}_i^{pm} - \tilde{U}_i^{pm}$. Tham khảo Ví dụ 3.4 trong [102], chúng ta thấy rằng các tiêu chuẩn ổn định hóa sinh bởi việc chọn hàm Lyapunov toàn phương trong một số trường hợp sẽ không hiệu quả để đánh giá tính ổn định hay ổn định hóa của các hệ mờ Takagi-Sugeno. Cụ thể, ví dụ này đã chỉ ra rằng hệ mờ Takagi-Sugeno đang xét không ổn định tiệm cận theo tiêu chuẩn ổn định toàn phương (Định lý 3.1, [102]) nhưng ổn định tiệm cận nếu xét

một hàm Lyapunov xác định từng khúc theo biến lập biểu. Do đó, hướng phát triển tiếp theo của luận án cũng sẽ hướng tới xây dựng các hàm Lyapunov phụ thuộc vào các biến lập biểu để thu được các tiêu chuẩn ổn định hóa tốt hơn.

Ví dụ 4.1. Trong ví dụ này, chúng ta sẽ minh họa kết quả của Định lý 4.6 bằng một ví dụ liên quan đến bài toán ổn định hóa cách ly đối với mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển trên mạng cảm biến không dây. Ở đây, luận án xét kịch bản quá trình lan truyền phần mềm độc hại đang bùng nổ trên mạng và xét mạng cảm biến không dây với cấu trúc mạng quy mô tự do Barabási-Albert (xem Hình 4.4).



Hình 4.4: Mô hình mạng cảm biến không dây đơn giản với $n = 2$

Xét các tham số của mô hình lan truyền mã độc SIRS như sau:

$$\Lambda = \mu = 0.14, \quad \omega = 0.1, \quad \sigma = 0.8, \quad r = 0.6, \quad \gamma = 2. \quad (4.15)$$

Ở đây, luận án xét mạng với số tiếp xúc tối đa của một nút là $n = 2$ và xác suất để một nút ngẫu nhiên có bậc k cho bởi $\mathbb{P}(k) = ck^{-3}$, trong đó c thỏa mãn $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(k) = 1$. Bằng tính toán trực tiếp, ta có $c = \frac{8}{9}$. Ngoài ra, các tham số $\langle n \rangle$ và $\langle n^2 \rangle$ được cho như sau:

$$\langle n \rangle = \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(k) = \frac{10}{9},$$

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{k=1}^n k^2\mathbb{P}(k) = \frac{4}{3}.$$

Với các tham số trên, ta có chỉ số ngưỡng lan truyền $\mathfrak{R}_0 = 1.8018 > 1$, tức là trạng thái cân bằng không có mã độc không ổn định. Tiếp theo, luận án sẽ thiết lập hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết tương ứng với mô hình lan truyền mã độc đề xuất. Với

mục tiêu này, luận án xét hai số hạng biến thiên $S_i(t)$ và $\frac{r}{1 + \gamma\Theta(t)}$ trong hệ phi tuyến (4.9) là các biến tiền đề. Khi đó, các hàm trọng của hệ con thứ i cho bởi

(i) Biến tiền đề $z_{i1} = S_i \in [0.1, 0.9]$ có các hàm trọng tương ứng là

$$\eta_{i0}^1(z_{i1}) = \frac{1 - z_{i1}}{0.8},$$

$$\eta_{i1}^1(z_{i1}) = 1 - \eta_{i0}^1(z_{i1}) = \frac{z_{i1} - 0.2}{0.8}.$$

Áp dụng Bổ đề 1.1 trong [83], biến tiền đề z_{i1} được biểu diễn dưới dạng

$$z_{i1} = 0.1\eta_{i0}^1(z_{i1}) + 0.9\eta_{i1}^1(z_{i1}).$$

(ii) Biến tiền đề $z_{i2} = \frac{r}{1 + \gamma\Theta(t)} \in \left[\frac{r}{1+\gamma}, r\right] = [0.2, 0.6]$ có các hàm trọng tương ứng là

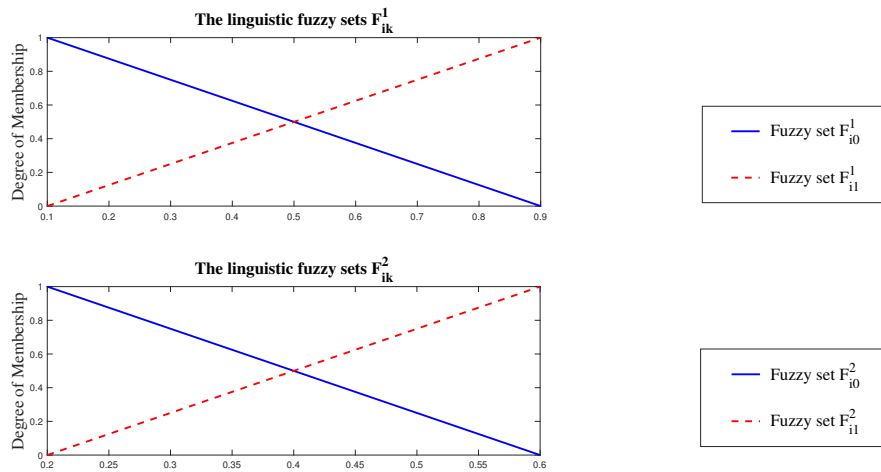
$$\eta_{i0}^2(z_{i2}) = \frac{5(1 - z_{i2})}{2},$$

$$\eta_{i1}^2(z_{i2}) = 1 - \eta_{i0}^2(z_{i2}) = \frac{5z_{i2} - 3}{2}.$$

Bằng lập luận tương tự, biến tiền đề z_{i2} được biểu diễn dưới dạng

$$z_{i2} = 0.2\eta_{i0}^2(z_{i2}) + 0.6\eta_{i1}^2(z_{i2}).$$

Ký hiệu vectơ biến tiền đề đo được bởi $\mathbf{z}_i(t) = \begin{pmatrix} z_{i1}(t) & z_{i2}(t) \end{pmatrix}^\top$ và các tập mờ tương ứng với các hàm trọng bởi F_{ik}^χ với mỗi $i = 1, 2$, $k = 0, 1$ và $\chi = 1, 2$. Thêm vào đó, luận án sử dụng hàm thuộc mờ dạng tam giác đối với tập mờ trong các luật mờ. Biểu diễn hình học của tập mờ tiền đề F_{ik}^χ được cho trong Hình 4.5.



Hình 4.5: Hàm thuộc của các tập mờ tiền đề F_{ik}^1 và F_{ik}^2

Cách xây dựng này dẫn đến $4n$ mô hình địa phương bằng cách kết hợp $2n$ hàm thuộc của các tập mờ tiền đề F_{ik}^1 và F_{ik}^2 . Sau đó, hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết cho mô hình lan truyền mã độc đề xuất được biểu diễn bằng các luật mờ sau:

$$\text{Luật } \mathbf{E}_i^1 : \text{ Nếu } z_{i1} \text{ thuộc } F_{i0}^1 \text{ và } z_{i2} \text{ thuộc } F_{i0}^2 \text{ thì } {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = A_i^1 \mathbf{e}_i(t) + B_i^1 \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \alpha_{ij}^1 \mathbf{e}_j(t),$$

$$\text{Luật } \mathbf{E}_i^2 : \text{ Nếu } z_{i1} \text{ thuộc } F_{i0}^1 \text{ và } z_{i2} \text{ thuộc } F_{i1}^2 \text{ thì } {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = A_i^2 \mathbf{e}_i(t) + B_i^2 \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \alpha_{ij}^2 \mathbf{e}_j(t),$$

$$\text{Luật } \mathbf{E}_i^3 : \text{ Nếu } z_{i1} \text{ thuộc } F_{i1}^1 \text{ và } z_{i2} \text{ thuộc } F_{i0}^2 \text{ thì } {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = A_i^3 \mathbf{e}_i(t) + B_i^3 \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \alpha_{ij}^3 \mathbf{e}_j(t),$$

$$\text{Luật } \mathbf{E}_i^4 : \text{ Nếu } z_{i1} \text{ thuộc } F_{i1}^1 \text{ và } z_{i2} \text{ thuộc } F_{i1}^2 \text{ thì } {}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = A_i^4 \mathbf{e}_i(t) + B_i^4 \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \alpha_{ij}^4 \mathbf{e}_j(t),$$

trong đó với mọi $i, j = 1, 2$ và $p = \overline{1, 4}$, các ma trận A_i^p , B_i^p và α_{ij}^p cho bởi

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \begin{pmatrix} -0.916 & 0 \\ 0.2 & -0.24 \end{pmatrix}, & B_1^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.9 \end{pmatrix}, & \alpha_{12}^1 &= \begin{pmatrix} -0.144 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_1^2 &= \begin{pmatrix} -1.316 & 0 \\ 0.6 & -0.24 \end{pmatrix}, & B_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.9 \end{pmatrix}, & \alpha_{12}^2 &= \begin{pmatrix} -0.144 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_1^3 &= \begin{pmatrix} -0.404 & 0 \\ 0.2 & -0.24 \end{pmatrix}, & B_1^3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix}, & \alpha_{12}^3 &= \begin{pmatrix} -0.016 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_1^4 &= \begin{pmatrix} -0.804 & 0 \\ 0.6 & -0.24 \end{pmatrix}, & B_1^4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix}, & \alpha_{12}^4 &= \begin{pmatrix} -0.016 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_2^1 &= \begin{pmatrix} -0.628 & 0 \\ 0.2 & -0.24 \end{pmatrix}, & B_2^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.9 \end{pmatrix}, & \alpha_{21}^1 &= \begin{pmatrix} -1.152 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_2^2 &= \begin{pmatrix} -1.028 & 0 \\ 0.6 & -0.24 \end{pmatrix}, & B_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.9 \end{pmatrix}, & \alpha_{21}^2 &= \begin{pmatrix} -1.152 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_2^3 &= \begin{pmatrix} -0.372 & 0 \\ 0.2 & -0.24 \end{pmatrix}, & B_2^3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix}, & \alpha_{21}^3 &= \begin{pmatrix} -0.128 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_2^4 &= \begin{pmatrix} -0.772 & 0 \\ 0.6 & -0.24 \end{pmatrix}, & B_2^4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix}, & \alpha_{21}^4 &= \begin{pmatrix} -0.128 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Khi đó, hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết (4.10) được viết lại như sau:

$${}^C_0\mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = \sum_{p=1}^4 w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) \left\{ A_i^p \mathbf{e}_i(t) + B_i^p \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t) \right\},$$

trong đó $i = 1, 2$ và $w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) = \frac{\varphi_i^p(\mathbf{z}_i(t))}{\sum_{p=1}^4 \varphi_i^p(\mathbf{z}_i(t))}$, $\varphi_i^p(\mathbf{z}_i(t)) = \eta_{ik}^1 \eta_{ij}^2$. Vì vậy, hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết cho mô hình lan truyền mã độc đề xuất cho bởi

$${}^C_0\mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^4 w_1^p(\mathbf{z}_1(t)) \left\{ A_1^p \mathbf{e}_1(t) + B_1^p \mathbf{u}_1(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \alpha_{1j}^p \mathbf{e}_j(t) \right\} \\ \sum_{p=1}^4 w_2^p(\mathbf{z}_2(t)) \left\{ A_2^p \mathbf{e}_2(t) + B_2^p \mathbf{u}_2(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \alpha_{2j}^p \mathbf{e}_j(t) \right\} \end{pmatrix}.$$

Thêm vào đó, với mỗi $p = \overline{1, 4}$, điều khiển phản hồi trạng thái mờ trong luật thứ p của hệ con \mathbf{E}_i cho bởi

“**Luật \mathbf{E}_i^p** : Nếu z_{i1} thuộc F_{i0}^X và z_{i2} thuộc F_{i1}^X thì $\mathbf{u}_i(t) = K_i^p \mathbf{x}_i(t)$.”

Kết hợp 4 luật mờ của hệ con \mathbf{E}_i , điều khiển phản hồi trạng thái mờ $\mathbf{u}_i(t)$ cho bởi

$$\mathbf{u}_i(t) = \sum_{p=1}^4 w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) K_i^p \mathbf{x}_i(t) \quad (i = 1, 2). \quad (4.16)$$

Cuối cùng, bằng cách áp dụng công cụ LMI trong MATLAB cho các bất đẳng thức ma trận tuyến tính sinh bởi các điều kiện (LMI.4), (LMI.5) và (LMI.6), chúng ta thu được các ma trận $C_i \in \mathbf{S}_{++}^n$, $P_i \in \mathbf{S}_{++}^n$ và các ma trận đạt được K_i^p như sau¹:

(i) Với hệ con \mathbf{E}_1 , ta có

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{pmatrix} 21.8174 & 1.3860 \\ 1.3860 & 92.7029 \end{pmatrix}, & P_1 &= \begin{pmatrix} 0.0459 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0108 \end{pmatrix}, \\ K_1^1 &= \begin{pmatrix} 0.1067 & 0.2151 \end{pmatrix}, & K_1^2 &= \begin{pmatrix} 0.2983 & 0.0581 \end{pmatrix}, \\ K_1^3 &= \begin{pmatrix} 0.3112 & -0.0300 \end{pmatrix}, & K_1^4 &= \begin{pmatrix} 0.3358 & -0.0330 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

¹File chứa code MATLAB có thể tải xuống tại đường link URL: <https://github.com/DongNP16/TS-fuzzy-system.git>

(ii) Với hệ con \mathbf{E}_2 , ta có

$$\begin{aligned} C_2 &= \begin{pmatrix} 18.5841 & 1.0680 \\ 1.0680 & 91.7758 \end{pmatrix}, & P_2 &= \begin{pmatrix} 0.0538 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0109 \end{pmatrix} \\ K_2^1 &= \begin{pmatrix} 0.0605 & 0.2203 \end{pmatrix}, & K_2^2 &= \begin{pmatrix} 0.2944 & 0.0617 \end{pmatrix} \\ K_2^3 &= \begin{pmatrix} 0.3172 & -0.0280 \end{pmatrix}, & K_2^4 &= \begin{pmatrix} 0.3598 & -0.0315 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Do đó, chúng ta thấy rằng hệ bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI.1), (LMI.2) và (LMI.3) trong Định lý 4.6 có nghiệm chấp nhận được, hay tương đương với trạng thái cân bằng không có mã độc của mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng ổn định hóa được với điều khiển phản hồi trạng thái mờ $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) & \mathbf{u}_2(t) \end{pmatrix}^\top$, trong đó điều khiển $\mathbf{u}_i(t)$ được xác định bởi công thức (4.16).

4.4. Kết luận chương

Trong chương này, luận án đề xuất nghiên cứu mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển với hàm xử lý mã độc bão hòa trên mạng phức hợp không đồng nhất. Các kết quả trình bày trong chương này là mở rộng và nối tiếp kết quả trong công bố [P3] của NCS với việc nghiên cứu bài toán điều khiển cách ly ổn định hóa cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng. Cụ thể:

1. Mô tả sự lây lan của mã độc trên mạng cảm biến không dây dựa vào việc thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng. Hơn nữa, luận án xét trường hợp khi số lượng các nút nhiễm mã độc lớn dẫn tới hiện tượng bão hòa trong điều trị bằng cách sử dụng hàm xử lý mã độc phi tuyến và do đó, việc ngừa chủng cách ly các nút miễn cảm khỏi các phần mềm độc hại càng có nhiều ý nghĩa.
2. Xác định được chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 cho mô hình lan truyền mã độc và tính toán được độ nhạy tham số đối với giá trị ngưỡng này. Đồng thời, luận án cũng thảo luận về mối liên hệ giữa chỉ số ngưỡng \mathfrak{R}_0 và sự ổn định tiệm cận của trạng thái cân bằng không có mã độc, sự tồn tại của trạng thái cân bằng đặc hữu cũng như xác định điều kiện xảy ra hiện tượng rẽ nhánh lồi tại $\mathfrak{R}_0 = 1$;
3. Đề xuất hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết, hàm Lyapunov toàn phương và thiết lập một số điều kiện cần dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính để giải quyết bài toán điều khiển cách ly ổn định hóa cho trạng thái cân bằng không có mã độc của mô hình. Cuối cùng, bằng các công cụ tính toán trong MatLab, luận án đã minh họa cho các kết quả lý thuyết cũng như cung cấp nghiệm số cho bài toán ổn định hóa đề xuất.

KẾT LUẬN CHUNG

1. Các kết quả đạt được của luận án

Luận án nghiên cứu bài toán mô hình hóa sự lan truyền mã độc dựa trên các mô hình phương trình vi phân phân thứ và lý thuyết tập mờ. Bằng cách kết hợp các lý thuyết của hệ động lực phân thứ, lý thuyết tập mờ và lý thuyết về mạng phức hợp không đồng nhất, luận án đã thiết lập 3 lớp mô hình lan truyền mã độc và khảo sát đáng điệu tiệm cận của các mô hình này nhằm dự báo lan truyền trên mạng. Các kết quả về dự báo và điều khiển cho các mô hình lan truyền mã độc trên mạng là một chủ đề có tính thời sự và đang được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu và phát triển mạnh mẽ trong thời gian gần đây. Cụ thể, các kết quả đạt được trong luận án này gồm:

- (i) Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ với dữ liệu mờ sử dụng các khái niệm đạo hàm Caputo-Atangana-Baleanu phân thứ mờ (Định nghĩa 2.1) và tích phân Riemann-Liouville Atangana-Baleanu phân thứ mờ (Định nghĩa 2.2), chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm tích phân mờ của mô hình (Định lý 2.3 và Định lý 2.4) và thực hiện một số mô phỏng số.
- (ii) Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với hàm lan truyền xác định bởi các luật mờ và chứng minh một số tính chất định tính của mô hình này như tính dương của nghiệm, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 (Công thức (3.8)), sự ổn định tiệm cận của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 (Định lý 3.3 và Định lý 3.4) và tính rẽ nhánh tiến tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ (Định lý 3.5).
- (iii) Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển với hàm xử lý mã độc bão hòa và bài toán ổn định hóa cho mô hình này dựa trên hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết với các kết quả đạt được gồm tính dương của nghiệm, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 (Công thức (4.4)), tính ổn định tiệm cận (Định lý 4.3 và Định lý 4.4), tính rẽ nhánh lùi tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ (Định lý 4.5) và một số điều kiện đủ dạng bất đẳng thức ma trận cho tính ổn định hóa (Định lý 4.6) của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 .

2. Một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được, luận án cũng tổng kết được một số vấn đề mở có thể tiếp tục nghiên cứu mở rộng như:

- Các nghiên cứu về đặc trưng dịch tễ của các mô hình lan truyền mã độc dựa trên nền tảng giải tích mờ như tính chất tiệm cận, tính rẽ nhánh hay các bài toán điều khiển, quan sát liên quan đang gặp nhiều thách thức từ sự hạn chế của các công cụ giải tích trên không gian số mờ. Gần đây, các cách tiếp cận dựa trên tập mờ tương quan tuyến tính [114], số mờ dạng granular [115] hay số Z [116] đã gợi mở những hướng nghiên cứu mới cho các hệ động lực không chắc chắn, đặc biệt trong các lĩnh vực nghiên cứu các mô hình lan truyền mã độc luôn chứa đựng các yếu tố bất định.
- Bên cạnh các nghiên cứu về dáng điệu tiệm cận để dự báo lan truyền, do các mô hình lan truyền mã độc cùng các tham số luôn có sự biến đổi liên tục và thường có ràng buộc về đầu ra như khống chế lan truyền mã độc với chi phí điều khiển thấp nhất hoặc không vượt quá một ngưỡng cho trước, bài toán mở đặt ra là nghiên cứu các bài toán điều khiển tối ưu đảm bảo ngưỡng cho các mô hình lan truyền mã độc. Ngoài ra, đối với đặc trưng của trạng thái cân bằng đặc hữu \mathbf{P}_* , luận án đã đạt được các kết quả về điều kiện tồn tại nhưng những thảo luận về dáng điệu tiệm cận của trạng thái cân bằng này hiện vẫn là vấn đề mở.
- Ngoài ra, do các tham số và dữ kiện đo đạc của mô hình trong thực tế thường không đầy đủ nên có một câu hỏi mở là làm thế nào để thiết lập các tiêu chí về tính ổn định, tính đạt được hoặc tính quan sát được của mô hình lan truyền mã độc chứa nhiều hay yếu tố bất định. Mặt khác, do hiện tượng trễ thường xuất hiện trong các quá trình sinh hóa, kỹ thuật nên các nghiên cứu về mô hình lan truyền mã độc trên mạng với trễ cũng là một vấn đề có ý nghĩa thực tiễn cao. Đặc biệt, trong Chương 4, luận án đã đề xuất và bước đầu sử dụng hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết cho các mô hình dựa trên mạng. Tuy nhiên, các bài toán về điều khiển, quan sát cho lớp hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ dựa trên mạng với yếu tố trễ hay yếu tố bất định vẫn là một vấn đề mở, có tính thời sự và có giá trị khoa học.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA NGHIÊN CỨU SINH

- P1.** N.P. Dong, H.V. Long, N.L. Giang, 2022, The fuzzy fractional SIQR model of computer virus propagation in Wireless Sensor Network using Caputo Atangana–Baleanu derivatives, *Fuzzy Sets and Systems*, 429, pp. 28-59. **(SCIE-Q1)**
- P2.** N.P. Dong, H.V. Long, N.T.K. Son, 2022, The dynamical behaviors of fractional-order SE_1E_2IQR epidemic model for malware propagation on Wireless Sensor Network, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 111, 106428. **(SCIE-Q1)**
- P3.** N.P. Dong, H.V. Long, N.T.K. Son, 2023, The analysis of a fractional network-based epidemic model with saturated treatment function and fuzzy transmission, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 20(1), pp. 1-18. **(SCIE-Q2)**
- P4.** N.P. Dong, N.L. Giang, H.V. Long, 2023, Interconnected Takagi-Sugeno intelligent system and fractional SIRS epidemic model for stabilization of Wireless Sensor Network. **(đã gửi đăng).**

Tài liệu tham khảo

- [1] W.O. Kermack, A.G. McKendrick, 1927, A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proceedings of the Royal Society of London*, 115(772), pp. 700-721.
- [2] W.O. Kermack, A.G. McKendrick, 1932, Contributions to the mathematical theory of epidemics, II. The problem of endemicity, *Proceedings of the Royal Society of London*, 138(834), pp. 55-83.
- [3] W.O. Kermack, A.G. McKendrick, 1933, Contributions to the mathematical theory of epidemics, III. Further studies of the problem of endemicity, *Proceedings of the Royal Society of London*, 141(843), pp. 94-122.
- [4] B.K. Mishra, D.K. Saini, 2007, SEIRS epidemic model with delay for transmission of malicious objects in computer network, *Applied Mathematics and Computation*, 188(2), pp. 1476-1482.
- [5] B.K. Mishra, N. Keshri, 2013, Mathematical model on the transmission of worms in wireless sensor network, *Applied Mathematical Modelling*, 37(6), pp. 4103-4111.
- [6] B.K. Mishra, N. Keshri, 2014, Stability analysis of a predator-prey model in wireless sensor network, *International Journal of Computer Mathematics*, 91(5), pp. 928-943.
- [7] C. Gan, X. Yang, W. Liu, Q. Zhu, J. Jin, L. He, 2014, Propagation of computer virus both across the Internet and external computers: a complex-network approach, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(8), pp. 2785-2792.
- [8] S. Hosseini, A. Zandvakili, 2022, The SEIRS-C model of information diffusion based on rumour spreading with fuzzy logic in social networks, *International Journal of Computer Mathematics*, 99(9), pp. 1918-1940.
- [9] Ş. Bahtiyar, M.B. Yaman, C.Y. Altiniğne, 2019, A multi-dimensional machine learning approach to predict advanced malware, *Computer Networks*, 160, pp. 118-129.
- [10] M. Rhode, P. Burnap, K. Jones, 2018, Early-stage malware prediction using recurrent neural networks, *Computers & Security*, 77, pp. 578-594.
- [11] X. Fu, J. Wang, 2022, Fractional dynamic analysis and optimal control problem for an SEIQR model on complex networks, *Chaos*, 32(12), 123123.

-
- [12] Z. Lu, Y. Yu, Y. Chen, G. Ren, C. Xu, S. Wang, Z. Yin, 2020, A fractional-order SEIHDR model for COVID-19 with inter-city networked coupling effects, *Nonlinear Dynamics*, 101, pp. 1717-1730.
- [13] J. Huo, H. Zhao, L. Zhu, 2015, The effect of vaccines on backward bifurcation in a fractional order HIV model, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 26, pp. 289-305.
- [14] M.A. Khan, Z. Hammouch, D. Baleanu, 2019, Modeling the dynamics of hepatitis E via the Caputo–Fabrizio derivative, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 14(3), pp. 311-330.
- [15] V.P. Latha, F.A. Rihan, R. Rakkiyappan, G. Velmurugan, 2018, A fractional-order model for Ebola virus infection with delayed immune response on heterogeneous complex networks, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 339, pp. 134-146.
- [16] H.A.A. El-Saka, A.A.M. Arafa, M.I. Gouda, 2019, Dynamical analysis of a fractional SIRS model on homogeneous networks, *Advances in Difference Equations*, 144.
- [17] H.M. Tuan, 2023, Dynamical analysis of a generalized hepatitis B epidemic model and its dynamically consistent discrete model, *Mathematics and Computers in Simulation*, 205, pp. 291-314.
- [18] T.T. Hong, P.T. Tuoi, N.P. Khu, 2022, Modeling information diffusion in social networks with ordinary linear differential equations, *Information Sciences*, 593, pp. 614-636
- [19] N.H. Khanh, 2016, Dynamics of a worm propagation model with quarantine in wireless sensor networks, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 10(5), pp. 1739-1746.
- [20] N.H. Khanh, N.B. Huy, 2016, Stability analysis of a computer virus propagation model with antidote in vulnerable system, *Acta Mathematica Scientia*, 36(1), pp. 49-61.
- [21] H.M Tuan, 2023, Dynamical analysis of two fractional-order SIQRA malware propagation models and their discretizations, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 72, pp. 751–771.
- [22] Y. Zan, J. Wua, P. Li, Q. Yu, 2014, SICR rumor spreading model in complex networks: Counterattack and self-resistance, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 405(1), pp. 159-170.

-
- [23] L.A.N. Amaral, A. Scala, M. Barthélemy, H.E. Stanley, 2000, Classes of behavior of small-world networks, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(21), pp. 11149-11152.
- [24] B. Huberman, L. Adamic, 1999, Growth dynamics of the World-Wide Web, *Nature*, 401, pp. 131.
- [25] Y. Jian, E. Liu, Y. Wang, Z. Zhang, C. Lin, 2013, Scale-free model for wireless sensor networks, *2013 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, pp. 2329-2332.
- [26] V. Latora, M. Marchiori, 2004, How the science of complex networks can help developing strategies against terrorism, *Chaos, Solitons & Fractals*, 20(1), pp. 69-75.
- [27] R. Pastor-Satorras, A. Vázquez, A. Vespignani, 2001, Dynamical and correlation properties of the Internet, *Physical Review Letters*, 87, 258701.
- [28] R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, 2001, Epidemic spreading in scale-free networks, *Physical Review Letters*, 86, pp. 3200-3203.
- [29] H.F. Huo, P. Yang, H. Xiang, 2019, Dynamics for an SIRS epidemic model with infection age and relapse on a scale-free network, *Journal of the Franklin Institute*, 356(13), pp. 7411-7443.
- [30] C. Li, A.M. Yousef, 2019, Bifurcation analysis of a network-based SIR epidemic model with saturated treatment function, *Chaos*, 29(3), 033129.
- [31] L. Chen, J. Sun, 2014, Global stability and optimal control of an SIRS epidemic model on heterogeneous networks, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 410, pp. 196-204.
- [32] S. Huang, F. Chen, L. Chen, 2017, Global dynamics of a network-based SIQRS epidemic model with demographics and vaccination, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 43, pp. 296-310.
- [33] T. Li, Y. Wang, Z.H. Guan, 2014, Spreading dynamics of a SIQRS epidemic model on scale-free networks, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19, pp. 686-692.
- [34] K. Li, G. Zhu, Z. Ma, L. Chen, 2019, Dynamic stability of an SIQS epidemic network and its optimal control, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 66, pp. 84-95.

-
- [35] L.X. Yang, M. Draief, X. Yang, 2016, The optimal dynamic immunization under a controlled heterogeneous node-based SIRS model, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 450, pp. 403-415.
- [36] N.H. Can, H. Jafari, M.N. Ncube, 2020, Fractional calculus in data fitting, *Alexandria Engineering Journal*, 59(5), pp. 3269-3274.
- [37] V.D. Djordjević, J. Jarić, B. Fabry, J.J. Fredberg, D. Stamenović, 2003, Fractional derivatives embody essential features of cell rheological behavior, *Annals of Biomedical Engineering*, 31(6), pp. 692-699.
- [38] M. Di Paola, A. Pirrotta, A. Valenza, 2011, Visco-elastic behavior through fractional calculus: An easier method for best fitting experimental results, *Mechanics of Materials*, 43(12), pp. 799-806.
- [39] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, 2006, *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
- [40] I. Podlubny, 1999, *Fractional differential equations*, vol. 198, Mathematics in Science and Engineering, Technical University of Kosice, Slovak Republic.
- [41] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, 1993, *Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, USA.
- [42] B.S.T. Alkahtani, 2016, Chua's circuit model with Atangana–Baleanu derivative with fractional order, *Chaos, Solitons & Fractals*, 89, pp. 547-551.
- [43] I. Pan, S. Das, 2016, Fractional order fuzzy control of hybrid power system with renewable generation using chaotic PSO, *ISA Transactions*, 62, pp. 19-29.
- [44] A. Atangana, D. Baleanu, 2016, New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and Application to heat transfer model, *Thermal Science*, 20(2), pp. 763-769.
- [45] A. Atangana, 2016, On the new fractional derivative and application to nonlinear Fisher's reaction-diffusion equation, *Applied Mathematics and Computation*, 273, pp. 948-956.
- [46] E.F.D. Goufo, S. Kumar, 2017, Shallow water wave models with and without singular kernel: Existence, uniqueness and similarities, *Mathematical Problems in Engineering*, 2, pp. 1-9.

-
- [47] J. Long, R. Xiao, W. Chen, 2018, Fractional viscoelastic models with non-singular kernels, *Mechanics of Materials*, 127, pp. 55-64.
- [48] P. Mani, R. Rajan, L. Shanmugam, Y.H. Joo, 2019, Adaptive control for fractional order induced chaotic fuzzy cellular neural networks and its application to image encryption, *Information Sciences*, 491, pp. 74-89.
- [49] Y. Chen, F. Liu, Q. Yu, T. Li, 2021, Review of fractional epidemic models, *Applied Mathematical Modelling*, 97, pp. 281-307.
- [50] K. Diethelm, 2010, *The analysis of fractional differential equations. An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2004, Springer-Verlag, Berlin.
- [51] Y. Li, Y. Chen, I. Podlubny, 2009, Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems, *Automatica*, 45(8), pp. 1965-1969.
- [52] Y. Li, Y. Chen, I. Podlubny, 2010, Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability, *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5), pp. 1810-1821.
- [53] M.A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J.A. Gallegos, R. Castro-Linares, 2015, Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1-3), pp. 650-659.
- [54] N.D. Cong, D.T. Son, S. Stefan, H.T Tuan, 2016, Linearized asymptotic stability for fractional differential equations, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 39, pp. 1-13.
- [55] H.T. Tuan, H. Trinh, 2018, Stability of fractional-order nonlinear systems by Lyapunov direct method, *IET Control Theory and Applications*, 12, pp. 2417-2422.
- [56] J.R. Graef, L. Kong, A. Ledoan, M. Wang, 2020, Stability analysis of a fractional online social network model, *Mathematics and Computers in Simulation*, 178, pp. 625-645.
- [57] J. Singh, D. Kumar, Z. Hammouch, A. Atangana, 2018, A fractional epidemiological model for computer viruses pertaining to a new fractional derivative, *Applied Mathematics and Computation*, 316, pp. 504-515.
- [58] L. Chen, J. Sun, 2014, Optimal vaccination and treatment of an epidemic network model, *Physics Letters A*, 378(41), pp. 3028-3036.

-
- [59] J. Huo, H. Zhao, 2016, Dynamical analysis of a fractional SIR model with birth and death on heterogeneous complex networks, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 448, pp. 41-56.
- [60] S.M.M. Abbasi, A. Jalali, 2019, Fuzzy tracking control of fuzzy linear dynamical systems, *ISA Transactions*, 97, pp. 102-115.
- [61] S. Adak, S. Jana, 2022, Dynamical behavior of an epidemic model with fuzzy transmission and fuzzy treatment control, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 68, pp. 1929-1948.
- [62] R.P. Agarwal, V. Lakshmikantham, J.J. Nieto, 2010, On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty, *Nonlinear Analysis*, 72, pp. 59-62.
- [63] T. Allahviranloo, S. Salahshour, S. Abbasbandy, 2012, Explicit solutions of fractional differential equations with uncertainty, *Soft Computing*, 16, pp. 297-302.
- [64] M.V. Kumar, Dr.T. Lalitha, 2016, Soft computing: Fuzzy logic approach in wireless sensors networks, *Circuits and Systems*, 7(8), pp. 1242-1249.
- [65] V. Lakshmikantham, R.N. Mohapatra, 2003, *Theory of fuzzy differential equations and inclusions*, Taylor & Francis, Ltd, London, United Kingdom.
- [66] E. Massad, N.R.S. Ortega, L.C. de Barros, C.J. Struchiner, 2008, *Fuzzy logic in action: Application in epidemiology and beyond*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 232, Springer Berlin, Heidelberg.
- [67] V. Wasques, E. Esmi, L.C. Barros, P. Sussner, 2019, Numerical solution for Lotka-Volterra model of oscillating chemical reactions with interactive fuzzy initial conditions, *Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2019)*, Atlantis Press, 8, pp. 544-549.
- [68] M. Alinezhad, T. Allahviranloo, 2017, On the solution of fuzzy fractional optimal control problems with the Caputo derivative, *Information Sciences*, 421, pp. 218-236.
- [69] N.V. Hoa, H. Vu, T.M. Duc, 2019, Fuzzy fractional differential equations under Caputo-Katugampola fractional derivative approach, *Fuzzy Sets and Systems*, 375, pp. 70-99.
- [70] S.A. Moezi, E. Zakeri, M. Eghtesad, 2019, Optimal adaptive interval type-2 fuzzy fractional-order back-stepping sliding mode control method for some classes of nonlinear systems, *ISA Transactions*, 93, pp. 23-39.

-
- [71] S. Tyagi, S.C. Martha, 2020, Finite-time stability for a class of fractional-order fuzzy neural networks with proportional delay, *Fuzzy Sets and Systems*, 381, pp. 68-77.
- [72] S. Mirzajani, M.P Aghababa, A. Heydari, 2019, Adaptive T–S fuzzy control design for fractional-order systems with parametric uncertainty and input constraint, *Fuzzy Sets and Systems*, 365, pp. 22-39.
- [73] P.K. Mondal, S. Jana, P. Haldar, 2015, Dynamical behavior of an epidemic model in a fuzzy transmission, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 23(5), pp. 651-665.
- [74] S.K. Nandi, S. Jana, M. Manadal, T.K. Kar, 2018, Analysis of a fuzzy epidemic model with saturated treatment and disease transmission, *International Journal of Biomathematics*, 11(1), pp. 1-18.
- [75] J.F. Gómez, L. Torres, R.F. Escobar, 2019, *Fractional derivatives with Mittag-Leffler kernel: Trends and applications in science and engineering*, Studies in Systems, Decision and Control 194, Springer International Publishing.
- [76] M. Caputo, M. Fabrizio, 2015, A new definition of fractional derivative without singular kernel, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1(2), pp. 73-85.
- [77] K.M. Saad, A. Atangana, D. Baleanu, 2018, New fractional derivatives with non-singular kernel applied to the Burgers equation, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 28(6), pp. 1-10.
- [78] A. Atangana, Z. Hammouch, 2019, Fractional calculus with power law: The cradle of our ancestors*, *The European Physical Journal Plus*, 134(9), pp. 429-444.
- [79] K.M. Owolabi, A. Atangana, 2017, Numerical approximation of nonlinear fractional parabolic differential equations with Caputo-Fabrizio derivative in Riemann-Liouville sense, *Chaos, Solitons & Fractals*, 99, pp. 171-179.
- [80] N.T.K. Son, H.T.P. Thao, N.P. Dong, H.V. Long, 2020, Fractional calculus of linear correlated fuzzy-valued functions related to Fréchet differentiability, *Fuzzy Sets and Systems*, 419, pp. 35-66.
- [81] Y. Lu, G. Jiang, 2014, Backward bifurcation and local dynamics of epidemic model on adaptive networks with treatment, *Neurocomputing*, 145, pp. 113-121.
- [82] X. Zhang, X. Liu, 2008, Backward bifurcation of an epidemic model with saturated treatment function, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 348(1), pp. 433-443.

-
- [83] A. Benzaouia, A.E. Hajjaji, 2014, *Advanced Takagi–Sugeno fuzzy systems: Delay and Saturation*, Studies in Systems, Decision and Control, Springer Cham, Switzerland.
- [84] Y. Li, Y. Wu, S. He, 2019, Synchronization of network systems subject to nonlinear dynamics and actuators saturation, *Circuits Systems and Signal Processing*, 38, pp. 1596-1618.
- [85] H. Liu, Y. Pan, J. Cao, Y. Zhou, H. Wang, 2021, Positivity and stability analysis for fractional-order delayed systems: A T-S fuzzy model approach, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 29(4), pp. 927-939.
- [86] B. Wang, J. Xue, F. Wu, D. Zhu, 2016, Robust Takagi-Sugeno fuzzy control for fractional order hydro-turbine governing system, *ISA Transactions*, 65, pp. 72-80.
- [87] R.F. Araújo, L.A.B. Torres, R.M. Palhares, 2021, Distributed control of networked nonlinear systems via interconnected Takagi–Sugeno fuzzy systems with nonlinear consequent, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 51(8), pp. 4858-4867.
- [88] W.W. Lin, W.J. Wang, S.H. Yang, 2007, A novel stabilization criterion for large-scale T-S fuzzy systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 37(4), pp. 1074-1079.
- [89] C.V. de León, 2015, Volterra-type Lyapunov functions for fractional-order epidemic systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 24, pp. 75-85.
- [90] Z.M. Odibat, N.T. Shawagfeh, 2007, Generalized Taylor's formula, *Applied Mathematics and Computation*, 186(1), pp. 286-293.
- [91] B. Bede, 2013, *Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer Berlin, Heidelberg.
- [92] A.L. Barabási, R. Albert, 1999, Emergence of scaling in random networks, *Science*, 286(5439), pp. 509-512.
- [93] H. Zhu, H. Luo, H. Peng, L. Li, Q. Luo, 2009, Complex networks-based energy-efficient evolution model for wireless sensor networks, *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(4), pp. 1828-1835.
- [94] A. Atangana, J.F. Gómez-Aguilar, 2018, Decolonisation of fractional calculus rules: Breaking commutativity and associativity to capture more natural phenomena, *The European Physical Journal Plus*, 133(4), pp. 166-188.

-
- [95] B. Bede, L. Stefanini, 2013, Generalized differentiability of fuzzy functions, *Fuzzy Sets and Systems*, 230, pp. 119-141.
- [96] L. Stefanini, B. Bede, 2009, Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(3-4), pp. 1311-1328.
- [97] L.A. Zadeh, 1965, Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8(3), pp. 338-353.
- [98] L.A. Zadeh, 1975, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, *Information Sciences*, 8 (3), (1975), pp. 199-249.
- [99] S. Salahshour, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, D. Baleanu, 2012, Existence and uniqueness results for fractional differential equations with uncertainty, *Advances in Difference Equations*, 112, pp. 1-16.
- [100] T. Allahviranloo, M.B. Ahmadi, 2010, Fuzzy Laplace transforms, *Soft Computing*, 14(3), pp. 235-243.
- [101] T. Takagi, M. Sugeno, 1985, Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15(1), pp. 116-132.
- [102] Z. Lendek, T. Guerra, R. Babuska, B. De Schutter, 2010, *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 262, Springer Berlin, Heidelberg.
- [103] C.H. Li, C.C. Tsai, S.Y. Yang, 2014, Analysis of epidemic spreading of an SIRS model in complex heterogeneous networks, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(4), pp. 1042-1054.
- [104] M. Hassouna, A. Ouhadan, E.H. El-Kinani, 2018, On the solution of fractional order SIS epidemic model, *Chaos, Solitons & Fractals*, 117, pp. 168-174.
- [105] M. Ghaffari, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, M. Azhini, 2021, On the fuzzy solutions of time-fractional problems, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 18(3), pp. 51-66.
- [106] G.S. Teodoro, E. Capelas de Oliveira, 2014, Laplace transform and the Mittag-Leffler function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(4), pp. 595-604.
- [107] H.V. Long, N.P. Dong, 2018, An extension of Krasnoselskii's fixed point theorem and its application to nonlocal problems for implicit fractional differential systems with uncertainty, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 20(1), pp. 1-27.

-
- [108] R. Precup, 2002, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Springer Dordrecht, Kluwer.
- [109] H.V. Long, N.T.K. Son, H.T.T. Tam, J.C. Yao, 2017, Ulam stability for fractional partial integro-differential equation with uncertainty, *Acta Mathematica Vietnamica*, 42(4), pp. 675-700.
- [110] Q. Kong, 2014, *A short course in ordinary differential equations*, Universitext, Springer Cham, New York.
- [111] P. van den Driessche, J. Watmough, 2002, Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Mathematical Biosciences*, 180(1–2), pp. 29-48.
- [112] C. Nakul, J.M. Hyman, J.M. Cushing, 2008, Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model, *Bulletin of Mathematical Biology*, 70, pp. 1272-1296.
- [113] Y.Y. Cao, P.M. Frank, 2001, Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi–Sugeno fuzzy models, *Fuzzy Sets and Systems*, 124(2), pp. 213-229.
- [114] E. Esmi, F.S. Pedro, L.C. Barros, W. Lodwick, 2018, Fréchet derivative for linearly correlated fuzzy function, *Information Sciences*, 435, pp. 150-160.
- [115] M. Mazandarani, N. Pariz, A.V. Kamyad, 2018, Granular differentiability of fuzzy number-valued functions, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(1), pp. 310-323.
- [116] M. Mazandarani, Y. Zhao, 2020, Z-differential equations, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 28(3), pp. 462–473.
- [117] A. Jajarmi, D. Baleanu, 2018, A new fractional analysis on the interaction of HIV with CD4+ T-cells, *Chaos, Solitons & Fractals*, 113, pp. 221-229.
- [118] M. Toufik, A. Atangana, 2017, New numerical approximation of fractional derivative with non-local and non-singular kernel: Application to chaotic models, *The European Physical Journal Plus*, 132, pp. 1-16.

PHỤ LỤC

Lược đồ số cho mô hình phương trình vi phân phân thứ mờ với đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu

Mệnh đề 4.1. Với mỗi $\alpha \in (0, 1)$ và $0 < y \leq x$, ta có $x^\alpha - y^\alpha \leq (x - y)^\alpha$.

Chứng minh. Với mỗi $\alpha \in (0, 1)$ và $0 < y \leq x$, xét hàm số $h(t)$ cho bởi $h(t) = (t - y)^\alpha - t^\alpha$ trên $[y, \infty)$. Vì $h'(t) = \alpha(t - y)^{\alpha-1} - \alpha t^{\alpha-1} \geq 0$ với mọi $t \geq y$ nên chúng ta suy ra $h(t)$ là hàm tăng trên $[y, \infty)$. Do đó, chúng ta nhận được

$$h(x) = (x - y)^\alpha - x^\alpha \geq h(y) = -y^\alpha,$$

hay tương đương với $(x - y)^\alpha \geq x^\alpha - y^\alpha$. Định lý được chứng minh. \square

Tiếp theo luận án giới thiệu lược đồ số để giải bài toán giá trị ban đầu (2.1)–(2.2) với đạo hàm phân thứ Caputo Atangana–Baleanu. Theo ký hiệu giới thiệu trong Mục 2.4, bài toán (2.1)–(2.2) có thể viết lại ở dạng sau:

$$\begin{cases} {}^{abc}\mathfrak{D}_+^\beta X(t) & = G(t, X(t)) \\ X(0) & = X_0, \end{cases} \quad (4.17)$$

trong đó, hàm vectơ mờ $G(t, X(t))$ thỏa mãn các giả thiết **(HF1)**, **(HF2)** và **(HF3)**. Theo Định lý 2.2, nghiệm tích phân mờ của bài toán (4.17) được cho bởi

$$X(t) = X_0 + \frac{1 - \beta}{\Phi(\beta)} G(t, X(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} G(\tau, X(\tau)) d\tau, \quad (4.18)$$

$$X(t) = X_0 \ominus (-1) \left[\frac{1 - \beta}{\Phi(\beta)} G(t, X(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} G(\tau, X(\tau)) d\tau \right], \quad (4.19)$$

trong đó \ominus là hiệu Hukuhara và hàm $\Phi(\beta) = 1 - \beta + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)}$. Khi đó, lược đồ số để giải gần đúng các phương trình tích phân dạng (4.18) và (4.19). Đầu tiên, xét lưới đều

$$\Pi = \{t_k = kh : k = 0, 1, \dots, N\},$$

trong đó N là số nguyên dương thỏa mãn $h = \frac{T}{N}$. Với mỗi $\alpha \in [0, 1]$, α -cắt của biểu thức (4.18) được cho bởi

$$\begin{aligned} X_\alpha^-(t) &= X_{0,\alpha}^- + \frac{1 - \beta}{\Phi(\beta)} G(t, X_\alpha^-(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} G(\tau, X_\alpha^-(\tau)) d\tau, \\ X_\alpha^+(t) &= X_{0,\alpha}^+ + \frac{1 - \beta}{\Phi(\beta)} G(t, X_\alpha^+(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} G(\tau, X_\alpha^+(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Đặt $n = 0, 1, 2, \dots$, ký hiệu $X_{\alpha,n}^- = X_{\alpha}^-(t_n)$, $X_{\alpha,n}^+ = X_{\alpha}^+(t_n)$. Khi đó, các số hạng $X_{\alpha,n+1}^-$ and $X_{\alpha,n+1}^+$ có thể được xác định dựa trên xấp xỉ phương trình tích phân sau:

$$X_{\alpha}^-(t_{n+1}) = X_{0,\alpha}^- + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} G(t_n, X_{\alpha,n}^-) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \sum_{k=0}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\beta-1} G(\tau, X_{\alpha}^-(\tau)) d\tau, \quad (4.20)$$

$$X_{\alpha}^+(t_{n+1}) = X_{0,\alpha}^+ + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} G(t_n, X_{\alpha,n}^+) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \sum_{k=0}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\beta-1} G(\tau, X_{\alpha}^+(\tau)) d\tau. \quad (4.21)$$

Sau đó, luận án ước lượng các tích phân trong vế phải của phương trình (4.20) và (4.21) trên đoạn $[t_k, t_{k+1}]$ dựa trên đa thức nội suy Lagrange bậc hai

$$G(\tau, X_{\alpha}^*(\tau)) \cong \frac{G(t_{k+1}, X_{\alpha,k+1}^*)}{h} (\tau - t_k) - \frac{G(t_k, X_{\alpha,k}^*)}{h} (\tau - t_{k+1}),$$

trong đó “*” ký hiệu cho “+” hoặc “-”. Khi đó, chúng ta thu được

$$\begin{aligned} & \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\beta-1} G(\tau, X_{\alpha}^*(\tau)) d\tau \\ & \cong \frac{G(t_{k+1}, X_{\alpha,k+1}^*)}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\beta-1} (\tau - t_k) d\tau - \frac{G(t_k, X_{\alpha,k}^*)}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\beta-1} (\tau - t_{k+1}) d\tau. \end{aligned}$$

Thực hiện phép đổi biến $s = t_{n+1} - \tau$, chúng ta thu được

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\beta-1} (\tau - t_k) d\tau &= \frac{h^{\beta+1}}{\beta(\beta+1)} [(n+1-k)^{\beta+1} - (n-k)^{\beta}(n+1-k+\beta)] \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\beta-1} (\tau - t_{k+1}) d\tau &= \frac{h^{\beta+1}}{\beta(\beta+1)} [(n-k)^{\beta+1} + (n-k+1)^{\beta}(n-k+\beta)]. \end{aligned}$$

Do đó, chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\beta-1} G(\tau, X_{\alpha}^*(\tau)) d\tau &\cong \frac{h^{\beta} G(t_{k+1}, X_{\alpha,k+1}^*)}{\beta(\beta+1)} [(n+1-k)^{\beta+1} - (n-k)^{\beta}(n+1-k+\beta)] \\ &\quad - \frac{h^{\beta} G(t_k, X_{\alpha,k}^*)}{\beta(\beta+1)} [(n-k)^{\beta+1} + (n-k+1)^{\beta}(n-k+\beta)]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Thế biểu thức trên vào các phương trình (4.20)–(4.21), nghiệm xấp xỉ xác định như sau

$$X_{\alpha,n+1}^- = X_{0,\alpha}^- + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} G(t_n, X_{\alpha,n}^-) + h^{\beta} \sum_{k=0}^n \left[C_{k,n}^{\beta} G(t_{k+1}, X_{\alpha,k+1}^-) - \bar{C}_{k,n}^{\beta} G(t_k, X_{\alpha,k}^-) \right], \quad (4.23)$$

$$X_{\alpha,n+1}^+ = X_{0,\alpha}^+ + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} G(t_n, X_{\alpha,n}^+) + h^{\beta} \sum_{k=0}^n \left[C_{k,n}^{\beta} G(t_{k+1}, X_{\alpha,k+1}^+) - \bar{C}_{k,n}^{\beta} G(t_k, X_{\alpha,k}^+) \right], \quad (4.24)$$

trong đó các hệ số $C_{k,n}^{\beta}$, $\bar{C}_{k,n}^{\beta}$ được cho bởi

$$\begin{aligned} C_{k,n}^{\beta} &= \frac{\beta}{\Phi(\beta)\Gamma(\beta+2)} [(n+1-k)^{\beta+1} - (n-k)^{\beta}(n+1-k+\beta)] \\ \bar{C}_{k,n}^{\beta} &= \frac{\beta}{\Phi(\beta)\Gamma(\beta+2)} [(n-k)^{\beta+1} + (n-k+1)^{\beta}(n-k+\beta)]. \end{aligned}$$

Nhận xét 4.7 (Ước lượng sai số). Để ước lượng sai số của nghiệm xấp xỉ thu được, chúng ta giả sử rằng hàm vectơ $X_\alpha^*(\cdot) \in C^2([0, T], \mathbb{R}^4)$ với mọi $\alpha \in [0, 1]$. Điều này dẫn tới đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 G(t, X_\alpha^*(t))}{\partial t^2}$ liên tục trên $[0, T]$ và do đó, nó bị chặn trên đoạn này. Thêm

vào đó, do số hạng tích phân $\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\beta-1} G(\tau, X_\alpha^*(\tau)) d\tau$ được xấp xỉ bởi đa thức nội suy Lagrange nên sai số của ước lượng tích phân được cho bởi

$$\left\| G(\tau, X_\alpha^*(\tau)) - \left[\frac{G(t_{k+1}, X_{\alpha, k+1}^*)}{h} (\tau - t_k) - \frac{G(t_k, X_{\alpha, k}^*)}{h} (\tau - t_{k+1}) \right] \right\| \leq \frac{M_n}{2!} (\tau - t_k)(t_{k+1} - \tau).$$

trong đó $M_n = \sup_{[0, t_{n+1}]} d_\infty \left(\frac{\partial_{gH}^2 G(\tau, X(\tau))}{\partial \tau^2}, \bar{0} \right)$ và $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$. Do đó, sai số phương pháp được cho bởi

$$R_n^\alpha = \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \sum_{k=0}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\beta-1} \frac{M_n}{2!} (\tau - t_k)(t_{k+1} - \tau) d\tau.$$

Chú ý rằng ánh xạ $\tau \mapsto (t_{n+1} - \tau)^{\beta-1} (\tau - t_k)$ là hàm dương trên đoạn $[t_k, t_{k+1}]$. Do đó, bằng cách áp dụng định lý giá trị trung bình cho tích phân, tồn tại $c_k \in [t_k, t_{k+1}]$ sao cho

$$\begin{aligned} R_n^\alpha &= \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \sum_{k=0}^n \frac{M_n}{2} (t_{k+1} - c_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\beta-1} (\tau - t_k) d\tau \\ &\leq \frac{M_n h^{\beta+2} \beta}{2\Gamma(\beta+2)\Phi(\beta)} \sum_{k=0}^n [(n+1-k)^{\beta+1} - (n-k)^\beta (n+1-k+\beta)] \\ &= \frac{M_n h^{\beta+2} \beta}{2\Gamma(\beta+2)\Phi(\beta)} \sum_{k=0}^n \{(n+1-k+\beta) [(n+1-k)^\beta - (n-k)^\beta] - \beta(n+1-k)^\beta\}. \end{aligned}$$

Áp dụng Mệnh đề 4.1, ta có $(n+1-k)^\beta - (n-k)^\beta \leq (n+1-k - (n-k))^\beta = 1$ và vì vậy, chúng nhận được

$$\begin{aligned} R_n^\alpha &\leq \frac{M_n h^{\beta+2} \beta}{2\Gamma(\beta+2)\Phi(\beta)} \sum_{k=0}^n [(n+1-k+\beta) - \beta(n+1-k)^\beta] \\ &= \frac{M_n \beta}{2\Gamma(\beta+2)\Phi(\beta)} \left[\frac{n(n+1)}{2} + n\beta - \frac{(n+1)^\beta}{\beta} \right] h^{\beta+2}. \end{aligned}$$

Do đó, chúng ta thấy rằng chặn sai số của lược đồ số đề xuất là $Ch^{\beta+2}$, tương đồng với kết quả trong [118] và cho tốc độ hội tụ nhanh hơn so với tốc độ hội tụ $\tilde{C}h$ thu được trong [117].

Nhận xét 4.8. Bằng lập luận tương tự, chúng ta cũng nhận được lược đồ số cho nghiệm tích phân mờ loại 2 của bài toán giá trị ban đầu (4.17):

$$X_{\alpha, n+1}^- = X_{0, \alpha}^- + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} G(t_n, X_{\alpha, n}^+) + h^\beta \sum_{k=0}^n \left[C_{k, n}^\beta G(t_{k+1}, X_{\alpha, k+1}^+) - \bar{C}_{k, n}^\beta G(t_k, X_{\alpha, k}^+) \right],$$

$$X_{\alpha,n+1}^+ = X_{0,\alpha}^+ + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} G(t_n, X_{\alpha,n}^-) + h^\beta \sum_{k=0}^n \left[C_{k,n}^\beta G(t_{k+1}, X_{\alpha,k+1}^-) - \bar{C}_{k,n}^\beta G(t_k, X_{\alpha,k}^-) \right].$$

Nhận xét 4.9 (Lược đồ số). Sau đây, luận án sẽ tổng hợp lược đồ số để tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán giá trị ban đầu (4.17) như sau:

Algorithm 1: Lược đồ số

Input: Giá trị β – Số phân hoạch N – Tham số – Giá trị ban đầu X_0 .

Output: Nghiệm xấp xỉ của bài toán (4.17)

Data: Khởi tạo

```

1  a = 0; T = 50;                                     // set up starting and ending points
2  h = (T - a)/N;                                     // set up step size
3   $\Phi(\beta) = 1 - \beta + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)}$ ;           // set up normalization function
   /* preallocation size                               */
4  x = zeros(1, N); y = zeros(1, N); z = zeros(1, N); v = zeros(1, N);
5  X = zeros(4, N);                                   // The solution vector X = (x, y, z, v)t
   /* Numerical solution of the problem (4.17)         */
6  for n = 1, 2, ..., N do
7   $C_{k,n}^\beta = \frac{\beta}{\Phi(\beta)\Gamma(\beta+2)} [(n+1-k)^{\beta+1} - (n-k)^\beta(n+1-k+\beta)]$ ;
8   $\bar{C}_{k,n}^\beta = \frac{\beta}{\Phi(\beta)\Gamma(\beta+2)} [(n-k)^{\beta+1} + (n-k+1)^\beta(n-k+\beta)]$ ;
9   $X_{\alpha,n+1}^- =$ 
    $X_{0,\alpha}^- + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} G(t_n, X_{\alpha,n}^*) + h^\beta \sum_{k=0}^n [C_{k,n}^\beta G(t_{k+1}, X_{\alpha,k+1}^*) - \bar{C}_{k,n}^\beta G(t_k, X_{\alpha,k}^*)]$ ;
10  $X_{\alpha,n+1}^+ =$ 
    $X_{0,\alpha}^+ + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} G(t_n, X_{\alpha,n}^*) + h^\beta \sum_{k=0}^n [C_{k,n}^\beta G(t_{k+1}, X_{\alpha,k+1}^*) - \bar{C}_{k,n}^\beta G(t_k, X_{\alpha,k}^*)]$ ;
   // for k = 0, 1, 2, ..., n,  $\alpha \in [0, 1]$ 
   /* Plot the solution                               */
11 plot(t, X)                                         // plot the numerical solution

```

Ma trận hội tụ về ma trận không

Sau đây, luận án nhắc lại từ tài liệu [108] một số khái niệm liên quan tới không gian metric suy rộng và ma trận hội tụ về ma trận không.

Định nghĩa 4.1 ([108], Definition 10.1). Cho (X, d) là không gian metric suy rộng. Ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được gọi là ánh xạ co nếu tồn tại ma trận $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ sao cho

$$M^k \rightarrow \mathbb{O}_n \quad \text{khi } k \rightarrow \infty \quad (4.25)$$

và

$$d(T(u), T(v)) \leq Md(u, v) \quad \text{với mọi } u, v \in X.$$

Ma trận M thỏa mãn điều kiện (4.25) được gọi là ma trận hội tụ về ma trận không.

Nhận xét 4.10 ([108], Remark 10.1). Tính chất (4.25) tương đương với tính chất các giá trị riêng của ma trận M đều nằm trong đĩa đơn vị, hay nói cách khác, bán kính phổ của ma trận M nhỏ hơn 1.

Phương pháp ma trận thế hệ tiếp theo

Tiếp theo, luận án trình bày phương pháp ma trận thế hệ tiếp theo để tính toán chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 :

Giả sử toàn bộ nút của một hệ thống mạng được chia thành N nhóm trong đó có m ngăn gồm các nút nhiễm mã độc. Đặt $\mathbf{x}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$ là mật độ các nút nhiễm mã độc ở ngăn thứ i . Đặt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left(\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_1(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_m(t) \right)^\top \\ F(\mathbf{x}) &= \left(F_1(\mathbf{x}) \quad F_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad F_m(\mathbf{x}) \right)^\top \\ V(\mathbf{x}) &= \left(V_1(\mathbf{x}) \quad V_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad V_m(\mathbf{x}) \right)^\top, \end{aligned}$$

trong đó $F_i(\mathbf{x})$ đại diện cho tỷ lệ xuất hiện của nút mang mã độc lớn trong ngăn thứ i , $V_i^+(\mathbf{x})$ đại diện cho ma trận chuyển các nút nhiễm mã độc vào ngăn thứ i từ các ngăn nhiễm mã độc khác và $V_i^-(\mathbf{x})$ đại diện cho ma trận chuyển các nút nhiễm mã độc ra khỏi ngăn thứ i . Khi đó, chúng ta nhận được

$${}^C\mathcal{D}_t^\beta \mathbf{x}_i(t) = F_i(\mathbf{x}) - V_i(\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}) - [V_i^-(\mathbf{x}) - V_i^+(\mathbf{x})],$$

và

$${}^C\mathcal{D}_t^\beta \mathbf{x}_i(t) = F(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}).$$

Giả sử \mathbf{x}_0 là trạng thái cân bằng không có mã độc. Khi đó, luận án xét ma trận Jacobi của các hàm $F(\mathbf{x})$ và $V(\mathbf{x})$ tại \mathbf{P}_0 được cho bởi

$$DF(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{F} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad DV(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{V} & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

trong đó \mathcal{F} và \mathcal{V} là các ma trận cho bởi $\mathcal{F} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}_0) \right)_{i,j=\overline{1,m}}$ và $\mathcal{V} = \left(\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}_0) \right)_{i,j=\overline{1,m}}$.
Ma trận $\mathcal{F} \cdot \mathcal{V}^{-1}$ được gọi là ma trận thế hệ tiếp theo (next-generation matrix) và giá trị riêng có modulus lớn nhất của ma trận $\mathcal{F} \cdot \mathcal{V}^{-1}$ được gọi là hệ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 .