BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Trần Thị Hoàng Anh

SỰ SUY BIẾN GROEBNER KHÔNG CHỨA BÌNH PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN ỨNG DỤNG

Hà Nội - 2023

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Trần Thị Hoàng Anh

SỰ SUY BIẾN GROEBNER KHÔNG CHỨA BÌNH PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 8 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC :
PGS. TS. Đoàn Trung Cường

Cuongdoan

Hà Nội - 2023

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những gì viết trọng luận văn là do sự tìm tòi, học hỏi của bản thân dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy Đoàn Trung Cường. Mọi kết quả nghiên cứu cũng như ý tưởng của tác giả khác, nếu có đều được trích dẫn cụ thể. Đề tài luận văn này cho đến nay chưa được bảo vệ tại bất kỳ một hội đồng bảo vệ luận văn thạc sĩ nào và cũng chưa công bố trên bất kỳ một phương tiện nào. Tôi xin chịu trách nhiệm về những lời cam đoan.

Hà Nội, tháng 9 năm 2023

Học viên

Hoàng Anh

Trần Thị Hoàng Anh

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành nhất của mình đến PGS. TS. Đoàn Trung Cường. Thầy là người hướng dẫn tôi tìm ra hướng nghiên cứu, thầy đã dành rất nhiều thời gian quý báu của mình để hướng dẫn và giảng dạy cho tôi. Thầy cũng luôn quan tâm và động viên tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn. Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy trong suốt một thời gian dài.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô thuộc phòng Đại số và Lý thuyết số, Viện Toán học đã luôn tạo điều kiện giúp tôi hoàn thành luận văn. Đặc biệt, tôi xin cảm ơn TS. Nguyễn Đăng Hợp vì những tiết học Đại số giao hoán thú vị cùng sự giúp đỡ tận tình của thầy.

Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn sự giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi của cơ sở đào tạo là Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam trong quá trình thực hiện luận văn.

Tôi cũng xin cảm ơn Quỹ Đổi mới sáng tạo VINIF đã tài trợ học bổng thạc sĩ với mã số VINIF.2021.ThS.70 và VINIF.2022.ThS.005 cho tôi.

Lời cảm ơn cuối cùng tôi xin được gửi đến gia đình và bạn bè của tôi đã luôn động viên và khích lệ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Hà Nội, tháng 9 năm 2023

Học viên

Hoàng Anh

Trần Thị Hoàng Anh

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những gì viết trong luận văn là do sự tìm tòi, học hỏi của bản thân dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy Đoàn Trung Cường. Mọi kết quả nghiên cứu cũng như ý tưởng của tác giả khác, nếu có đều được trích dẫn cụ thể. Đề tài luận văn này cho đến nay chưa được bảo vệ tại bất kỳ một hội đồng bảo vệ luận văn thạc sĩ nào và cũng chưa công bố trên bất kỳ một phương tiện nào. Tôi xin chịu trách nhiệm về những lời cam đoan.

Hà Nội, tháng 9 năm 2023

Học viên

Trần Thị Hoàng Anh

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành nhất của mình đến PGS. TS. Đoàn Trung Cường. Thầy là người hướng dẫn tôi tìm ra hướng nghiên cứu, thầy đã dành rất nhiều thời gian quý báu của mình để hướng dẫn và giảng dạy cho tôi. Thầy cũng luôn quan tâm và động viên tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn. Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy trong suốt một thời gian dài.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô thuộc phòng Đại số và Lý thuyết số, Viện Toán học đã luôn tạo điều kiện giúp tôi hoàn thành luận văn. Đặc biệt, tôi xin cảm ơn TS. Nguyễn Đăng Hợp vì những tiết học Đại số giao hoán thú vị cùng sự giúp đỡ tận tình của thầy.

Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn sự giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi của cơ sở đào tạo là Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam trong quá trình thực hiện luận văn.

Tôi cũng xin cảm ơn Quỹ Đổi mới sáng tạo VINIF đã tài trợ học bổng thạc sĩ với mã số VINIF.2021.ThS.70 và VINIF.2022.ThS.005 cho tôi.

Lời cảm ơn cuối cùng tôi xin được gửi đến gia đình và bạn bè của tôi đã luôn động viên và khích lệ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Hà Nội, tháng 9 năm 2023

Học viên

Trần Thị Hoàng Anh

Mục lục

MỞ ĐẦU

Cho I là một iđêan thuần nhất trong vành đa thức $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ gồm n biến trên trường k. Với mỗi thứ tự từ $\leq$, ta xác định được một iđêan khởi đầu $J = \mathrm{in}_{\leq}(\mathrm{I})$ của I và một iđêan khởi đầu phổ dụng $\mathrm{gin}_{\leq}(I)$ của I. Quá trình chuyển từ S/I sang S/J được gọi là *suy biến Gröbner*. Khi đó, các bất biến đại số như số Betti và hàm Hilbert của môđun đối đồng điều địa phương có giá là iđêan cực đại thuần nhất sẽ tăng theo quá trình này. Mặt khác, nếu chuyển từ I sang iđêan khởi đầu phổ dụng $\mathrm{gin}_{\leq}(I)$ thì một số bất biến không đổi. Trong [1], Bayer và Stillman đã chứng minh rằng $\mathrm{reg}(S/I) = \mathrm{reg}(S/\mathrm{gin}_{\leq}(I))$ và $\mathrm{depth}(S/I) = \mathrm{depth}(S/\mathrm{gin}_{\leq}(I))$ đối với thứ tự từ điển ngược `rlex`. Sau đó, Bayer, Charalambus và Popescu [2] đã tổng quát hóa kết quả của Bayer và Stillman khi chỉ ra rằng S/I và $S/\mathrm{gin}_{\leq}(I)$ có cùng số Betti góc (corner/extremal Betti number).

Herzog đã đưa ra một giả thuyết về số Betti như sau: "*Cho I là iđêan thuần nhất của vành đa thức S và J là iđêan khởi đầu của I đối với thứ tự từ nào đó. Nếu iđêan J không chứa bình phương thì các số Betti góc của S/I và S/J là trùng nhau.*"

Gần đây, Conca-Varbaro [3] chứng minh một kết quả rất mạnh về hàm Hilbert của môđun đối đồng điều địa phương có giá cực đại. Cụ thể, "*Cho I là iđêan thuần nhất của vành đa thức S và J là iđêan khởi đầu của I đối với thứ tự từ nào đó. Giả sử J không chứa bình phương. Khi đó,*

$$h^i_{S/I}(j) = h^i_{S/J}(j) \text{ với mọi } i, j,$$

trong đó $h^i_{S/I}(j) = \dim_k(H^i_{\mathfrak{m}}(S/I)_j)$." Vì các số Betti góc của S/I có thể được đặc trưng theo các giá trị $h^i_{S/I}(j)$ nên từ đó họ đưa ra câu trả lời khẳng định cho giả thuyết trên của Herzog.

Trong luận văn này, chúng tôi hướng tới tìm hiểu một số quan hệ bất biến của suy biến Gröbner của iđêan thuần nhất có iđêan khởi đầu không chứa bình phương như hàm Hilbert của môđun đối đồng điều địa phương có giá cực đại, số Betti góc, độ sâu và chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford. Đồng thời, chúng tôi tìm hiểu một số tính chất của lớp iđêan Cartwright-Sturmfels, một trường hợp riêng của lớp iđêan thuần nhất có iđêan khởi đầu không chứa bình phương đối với thứ tự từ nào đó. Trước hết, chúng tôi trình bày một số kiến thức cần thiết về cơ sở Gröbner, thuần nhất hóa một iđêan theo trọng số, môđun đối đồng điều địa phương và vành đầy đủ đối đồng điều. Trong đó, vành đầy đủ đối đồng điều có vai trò quan trọng để chứng minh định lý chính của luận văn. Tiếp theo, chúng tôi sẽ tìm hiểu một số quan hệ bất biến của quá trình suy biến Gröbner của iđêan thuần nhất có iđêan khởi đầu không chứa bình phương như là hàm Hilbert, độ sâu, số Betti góc và chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford. Một số ví dụ tính toán bằng Macaulay2 sẽ được đưa ra để minh họa cho các kết quả trên. Sau đó, chúng tôi trình bày một số tính chất thú vị của lớp iđêan thuần nhất có iđêan khởi đầu không chứa bình phương Cartwright-Sturmfels.

Nội dung của luận văn gồm 03 chương:

Chương 1: *Kiến thức chuẩn bị*. Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về cơ sở Gröbner, quá trình thuần nhất hóa một iđêan theo trọng số và môđun đối đồng điều địa phương để chuẩn bị cho các chương tiếp theo. Một số kết quả quan trọng trong chương này là Định lý Macaulay, Định lý 1.2.8, Định lý đối ngẫu địa phương và Định lý triệt tiêu của Grothendieck.

Chương 2: *Iđêan thuần nhất có iđêan khởi đầu không chứa bình phương*. Đây là chương cốt lõi của luận văn, gồm 3 tiết. Trong tiết thứ nhất, chúng tôi tìm hiểu định nghĩa và một số tính chất của vành đầy đủ đối đồng điều. Ở hai tiết còn lại, trước hết chúng tôi chứng minh hàm Hilbert của môđun đối đồng điều địa phương có giá là iđêan cực đại thuần nhất của S/I và S/J là như nhau. Sau đó, chúng tôi chứng minh các bất biến như là độ sâu, số Betti góc và chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford của S/I và S/J bằng nhau.

Chương 3: *Iđêan Cartwright-Sturmfels*. Chương này mô tả một lớp các iđêan thuần nhất có iđêan khởi đầu không chứa bình phương, gọi là iđêan Cartwright-

Sturmfels. Mô tả hai lớp iđêan con trong lớp các iđêan Cartwright-Sturmfels, đó là lớp iđêan cạnh nhị thức và lớp iđêan đa chiều (multiview). Trong đó, lớp iđêan đa chiều được quan tâm trong lĩnh vực nghiên cứu về thị giác máy tính.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm, tính chất cơ bản về cơ sở Gröbner, quá trình thuần nhất hóa và môđun đối đồng điều địa phương. Tài liệu tham khảo trong phần này là [4], [5], [6] và [8].

Trong luận văn, nếu không đề cập gì thêm, ta luôn xét $S = k[x_1, ..., x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường k, có cấu trúc phân bậc $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S_i$. Trong đó, S_i là k-không gian véctơ gồm các đa thức thuần nhất bậc i và $\mathbb{N}$ là tập các số nguyên không âm.

1.1 Cơ sở Gröbner

Một *đơn thức* trong vành $S = k[x_1, ..., x_n]$ là biểu thức có dạng $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} := x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$, trong đó $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ được gọi là bộ số mũ của đơn thức. *Từ* là biểu thức có dạng $a_u u = a_u x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$, trong đó $a_u \in k$ được gọi là *hệ số* của từ. Tập các đơn thức trong S được kí hiệu là

$$\mathcal{M} = \{ x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mid (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n \}.$$

Một *đa thức* f trong vành S là một tổng hình thức của các từ

$$f = \sum_{u \in \mathcal{M}} a_u u,$$

trong đó chỉ có một số hữu hạn hệ số $0 \neq a_u \in k$. Khi đó, tập

$$\operatorname{supp}(f) = \{u \in \mathcal{M} \mid a_u \neq 0\}$$

được gọi là *giá* của f.

1.1.1. Iđêan khởi đầu

Trước hết, ta sẽ giới thiệu các thứ tự từ dùng trong cơ sở Gröbner.

Định nghĩa 1.1.1. *Thứ tự từ* $\leq$ là một thứ tự toàn phần trên $\mathcal{M}$ thoả mãn các tính chất sau:

1. Với mọi $m \in \mathcal{M}, 1 \leq m$;
2. Nếu $m_1, m_2, m \in \mathcal{M}$ mà $m_1 \leq m_2$ thì $mm_1 \leq mm_2$.

Từ định nghĩa, ta thấy rằng trên vành đa thức một biến $k[x]$ chỉ có thứ tự xác định bởi bậc của đơn thức là một thứ tự từ. Tiếp theo, ta sẽ thấy có nhiều thứ tự từ khác nhau khi số biến nhiều hơn một.

Định nghĩa 1.1.2. *Thứ tự từ điển* $\leq_{\texttt{lex}}$ là một thứ tự toàn phần trên $\mathcal{M}$ và được xác định như sau:

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \leq_{\texttt{lex}} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$$

nếu thành phần đầu tiên khác không kể từ bên trái của véctơ $(a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n)$ là một số âm.

Định nghĩa 1.1.3. *Thứ tự từ điển phân bậc* $\leq_{\texttt{glex}}$ là một thứ tự toàn phần trên $\mathcal{M}$ và được xác định như sau:

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \leq_{\texttt{glex}} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$$

nếu $a_1 + \cdots + a_n < b_1 + \cdots + b_n$ hoặc $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ và $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \leq_{\texttt{lex}} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$.

Định nghĩa 1.1.4. *Thứ tự từ điển ngược* $\leq_{\texttt{rlex}}$ là một thứ tự toàn phần trên $\mathcal{M}$ và được xác định như sau:

$$x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n} \leq_{\texttt{rlex}} x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$$

nếu $a_1 + \cdots + a_n < b_1 + \cdots + b_n$ hoặc $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ và tồn tại $1 \leq i \leq n$ sao cho $a_n = b_n, \ldots, a_{i+1} = b_{i+1}$ nhưng $a_i > b_i$.

Mệnh đề 1.1.5. [4, Mệnh đề 8.10] *Ba thứ tự kể trên là các thứ tự từ.*

Từ bây giờ, nếu không đề cập gì thêm thì ta luôn giả sử $I \subset S$ là một iđêan khác không của vành S và $\leq$ là một thứ tự từ trên $\mathcal{M}$.

Định nghĩa 1.1.6. Cho $f \in S$ và một thứ tự từ $\leq$. *Đơn thức đầu của* f, kí hiệu là $\mathrm{lm}_{\leq}(f)$, là đơn thức lớn nhất của đa thức f đối với thứ tự từ $\leq$.

Nếu $\mathrm{lm}_{\leq}(f) = x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ có hệ số là $0 \neq a_f \in k$ thì $\mathrm{lc}_{\leq}(f) = a_f$ được gọi là *hệ số đầu* và $\mathrm{in}_{\leq}(f) = a_f x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ được gọi là *từ khởi đầu* của f đối với thứ tự từ $\leq$. Ta quy ước $\mathrm{in}_{\leq}(0) = \mathrm{lc}_{\leq}(0) = \mathrm{lm}_{\leq}(0) = 0$.

Định nghĩa 1.1.7. *Iđêan khởi đầu* của I, kí hiệu $\mathrm{in}_{\leq}(I)$, là iđêan của S được sinh bởi các từ khởi đầu của các phần tử của I, nghĩa là

$$\mathrm{in}_{\leq}(I) = \langle \mathrm{in}_{\leq}(f) \mid f \in I\rangle.$$

Rõ ràng, ta cũng có $\mathrm{in}_{\leq}(I) = \langle \mathrm{lm}_{\leq}(f) \mid f \in I\rangle$ nên $\mathrm{in}_{\leq}(I)$ là iđêan đơn thức. Nó có vai trò quan trọng trước hết vì kết quả sau đây.

Mệnh đề 1.1.8. (Định lý Macaulay) *Với mọi thứ tự từ $\leq$, tập $\mathcal{B}$ tất cả các đơn thức của $\mathcal{M}$ nằm ngoài $\mathrm{in}_{\leq}(I)$ lập thành một cơ sở của không gian véctơ S/I trên trường k.*

Chứng minh. Xét tập $\mathcal{B} = \{u \mid u \in \mathcal{M} \text{ và } u \notin \mathrm{in}_{\leq}(I)\}$. Trước tiên, ta sẽ chỉ ra rằng $\mathcal{B}$ là độc lập tuyến tính trên k. Giả sử ngược lại, nghĩa là lấy

$$f = c_1u_1 + \cdots + c_ru_r \in I,$$

trong đó tồn tại $0 \neq c_i \in k$ với $i = 1, \ldots, r$ và $u_i \in \mathcal{B}$ với mọi $i = 1, \ldots, r$. Cho $u_1 > \cdots > u_r$. Ta có thể giả sử $a_1 \neq 0$. Do đó, $0 \neq f \in I$ và $u_1 = \mathrm{in}_{\leq}(f) \in \mathrm{in}_{\leq}(I)$. Điều này mâu thuẫn với $u_i \in \mathcal{B}$ với mọi $i = 1, \ldots, r$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\mathcal{B}$ là hệ sinh của S/I trên k. Ta viết $\langle \mathcal{B} \rangle$ là không gian con của S/I được sinh bởi $\mathcal{B}$. Lấy $0 \neq f \in S$. Khi đó, ta sẽ chứng minh $f \in \langle \mathcal{B} \rangle$ bằng quy nạp theo $\mathrm{in}_{\leq}(f)$. Gọi $u = \mathrm{lm}_{\leq}(f)$ và $c = \mathrm{lc}_{\leq}(f)$. Nếu $u \in \mathcal{B}$ thì theo giả thiết quy nạp, ta có $f - c \cdot u \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Do đó, $f \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Giả sử $u \notin \mathcal{B}$. Vì $u \in \mathrm{in}_{\leq}(I)$ nên tồn tại đa thức $g \in I$ sao cho $u = \mathrm{in}_{\leq}(g)$. Gọi $c' = \mathrm{lc}_{\leq}(g)$. Khi đó, theo giả thiết quy nạp ta có $c'f - cg \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Tuy nhiên, cả hai đa thức $c'f - cg$ và $c'f$ cùng thuộc một lớp tương đương trong vành S/I. Vì $c' \neq 0$ nên $f \in \langle \mathcal{B} \rangle$. □

Mệnh đề 1.1.9. *Cho $\leq'$ là thứ tự từ khác trên $\mathcal{M}$. Khi đó, nếu $\mathrm{in}_{\leq}(I) \subseteq \mathrm{in}_{\leq'}(I)$ thì $\mathrm{in}_{\leq}(I) = \mathrm{in}_{\leq'}(I)$.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.1.8, ta có tập các đơn thức trong $S \setminus \mathrm{in}_{\leq}(I)$ cũng như tập các đơn thức trong $S \setminus \mathrm{in}_{\leq'}(I)$ tạo thành một cơ sở của không gian véctơ S/I trên k. Giả sử rằng $\mathrm{in}_{\leq}(I) \neq \mathrm{in}_{\leq'}(I)$. Khi đó, $S \setminus \mathrm{in}_{\leq'}(I)$ là một tập con thực sự của $S \setminus \mathrm{in}_{\leq}(I)$ (vô lý). Do đó, $\mathrm{in}_{\leq}(I) = \mathrm{in}_{\leq'}(I)$. □

1.1.2. Cơ sở Gröbner

Trong vành đa thức S, khi thực hiện phép chia đa thức cho đa thức, ta có thể dùng thứ tự từ thay cho bậc của đa thức để giảm dần từ khởi đầu của đa thức bị chia cho đến khi không thể chia được thì dừng. Bằng cách này, nếu thực hiện phép chia đa thức cho nhiều đa thức cùng lúc thì ta có định lý sau.

Định lý 1.1.10 (Định lý chia đa thức)**.** *Cố định một thứ tự từ $\leq$ trên $\mathcal{M}$ và cho $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\} \subset S$. Khi đó, mọi đa thức $g \in S$ có thể viết được dưới dạng*

$$g = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s + r,$$

trong đó $q_i, r \in S$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. *Hoặc* $r = 0$ *hoặc không có từ nào của* r *chia hết cho một trong các từ khởi đầu* $\mathrm{in}_{\leq}(g_1), \cdots, \mathrm{in}_{\leq}(g_s)$*. Hơn nữa,* $\mathrm{in}_{\leq}(r) \leq \mathrm{in}_{\leq}(g)$*;*

2. *Nếu* $q_i \neq 0$ *thì* $\mathrm{in}_{\leq}(q_i g_i) \leq \mathrm{in}_{\leq}(f), i = 1, \ldots, s$*.*

Định nghĩa 1.1.11. Tập hữu hạn các đa thức $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ với mỗi $0 \neq g_i \in I$ được gọi là một *cơ sở Gröbner* của I đối với thứ tự từ $\leq$ nếu

$$\mathrm{in}_{\leq}(I) = \langle \mathrm{in}_{\leq}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\leq}(g_s) \rangle.$$

Nếu $m = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ và $m' = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ thì kí hiệu $\mathrm{BCNN}(m, m')$ là đơn thức bậc nhỏ nhất chia hết cho m và m' và kí hiệu $\mathrm{UCLN}(m, m')$ là đơn thức bậc lớn nhất chia hết m và m'. Khi đó,

$$\mathrm{BCNN}(m, m') = x_1^{\max\{a_1, b_1\}} \cdots x_n^{\max\{a_n, b_n\}},$$

$$\mathrm{UCLN}(m, m') = x_1^{\min\{a_1, b_1\}} \cdots x_n^{\min\{a_n, b_n\}}.$$

Định nghĩa 1.1.12. Cho $0 \neq f, g \in S$. Kí hiệu

$$m_f = \frac{\mathrm{BCNN}(\mathrm{lm}(f), \mathrm{lm}(g))}{\mathrm{in}(f)} \text{ và } m_g = \frac{\mathrm{BCNN}(\mathrm{lm}(f), \mathrm{lm}(g))}{\mathrm{in}(g)}.$$

S-đa thức của f và g là đa thức

$$S(f, g) = m_f f - m_g g.$$

Bổ đề 1.1.13. [4, Chú ý 11.8] *Nếu* $\mathrm{in}_{\leq}(f)$ *và* $\mathrm{in}_{\leq}(g)$ *nguyên tố cùng nhau thì phần dư của* $S(f, g)$ *trong phép chia cho* f, g *bằng* 0*.*

Định lý 1.1.14 (Tiêu chuẩn Buchberger)**.** *Cho* $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ *là hệ sinh của* I*. Khi đó,* $\mathcal{G}$ *là một cơ sở Gröbner của* I *nếu và chỉ nếu với mọi cặp* $1 \leq i \neq j \leq s$*, một (hoặc mọi) đa thức dư của* S*-đa thức* $S(g_i, g_j)$ *trong phép chia cho* $\mathcal{G}$ *bằng 0.*

Định nghĩa 1.1.15. Cơ sở Gröbner $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ của iđêan I đối với một thứ tự từ $\leq$ được gọi là *cơ sở Gröbner tối tiểu* của I nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

1. $\mathrm{lc}_{\leq}(g_i) = 1$ với mọi $g_i \in \mathcal{G}$;
2. Với mọi $g_i \in \mathcal{G}$, không tồn tại $g_j \in \mathcal{G} \setminus \{g_i\}$ để $\mathrm{in}_{\leq}(g_j) \mid \mathrm{in}_{\leq}(g_i)$.

Định nghĩa 1.1.16. Cơ sở Gröbner $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ của iđêan I đối với một thứ tự từ đã cho được gọi là *cơ sở Gröbner rút gọn* của I nếu thoả mãn các điều kiện sau:

1. $\mathrm{lc}_{\leq}(g_i) = 1$ với mọi $g_i \in \mathcal{G}$;
2. Với mọi $g_i \in \mathcal{G}$ và mọi từ m của g_i, không tồn tại $g_j \in \mathcal{G} \setminus \{g_i\}$ để $\mathrm{in}_{\leq}(g_j) \mid m$.

Rõ ràng, mọi cơ sở Gröbner rút gọn đều là cơ sở Gröbner tối tiểu. Định lý sau đây khẳng định rằng cơ sở Gröbner rút gọn tồn tại duy nhất.

Định lý 1.1.17. [4, Mệnh đề 9.12] *Cho $0 \neq I \subseteq S$. Khi đó, I có duy nhất một cơ sở Gröbner rút gọn đối với mỗi thứ tự từ.*

1.1.3. Iđêan khởi đầu phổ dụng

Ở mục này, ta xét $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường vô hạn k và $\mathrm{GL}_n(k)$ là *nhóm tuyến tính tổng quát*, gồm các ma trận vuông khả nghịch cấp n với các phần tử thuộc k . Với $\alpha = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}_n(k)$, xét tự đồng cấu tuyến tính

$$\alpha : S \longrightarrow S, \quad f(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i).$$

Định lý 1.1.18. [5, Theorem 4.1.2] Cho $I \subset S$ là một iđêan thuần nhất. Khi đó, tồn tại một tập con mở khác rỗng $U \subset \mathrm{GL}_n(k)$ sao cho $\mathrm{in}_{\leq}(\alpha I) = \mathrm{in}_{\leq}(\alpha' I)$ với mọi $\alpha, \alpha' \in U$.

Định nghĩa 1.1.19. Iđêan $\operatorname{in}_{\leq}(\alpha I)$ với $\alpha \in U$ và $U \subset \mathrm{GL}_n(k)$ được đề cập ở Định lý 1.1.18 được gọi là *iđêan khởi đầu phổ dụng* (generic initial ideal) của I đối với thứ tự từ $\leq$. Nó được kí hiệu là $\operatorname{gin}_{\leq}(I)$.

Nhóm con $B \subset \mathrm{GL}_n(k)$ gồm tất cả các ma trận vuông tam giác trên cấp n khả nghịch được gọi là *nhóm con Borel* của $\mathrm{GL}_n(k)$.

Định nghĩa 1.1.20. Một iđêan $I \subset S$ được gọi là *Borel-fixed* nếu $\alpha(I) = I$ với mọi $\alpha \in B$.

Định lý sau sẽ chỉ ra rằng $\operatorname{gin}_{\leq}(I)$ là cố định dưới tác động của B.

Định lý 1.1.21. [5, Theorem 4.2.1] Cho $I \subset S$ là một iđêan thuần nhất. Khi đó, $\operatorname{gin}_{\leq}(I)$ là một iđêan Borel-fixed, nghĩa là $\alpha(\operatorname{gin}_{\leq}(I)) = \operatorname{gin}_{\leq}(I)$ với mọi $\alpha \in B$.

1.2 Thuần nhất hóa

1.2.1. Thứ tự từ và trọng số

Một trọng số $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ là một véctơ. Với mỗi trọng số $\mathbf{w}$, vành đa thức $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ có cấu trúc phân bậc cho bởi $\deg_{\mathbf{w}} x_i = w_i$, với $i = 1, \ldots, n$. Khi đó,

$$\deg_{\mathbf{w}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i.$$

Một đa thức $f \in S$ bất kỳ được gọi là *thuần nhất bậc* d đối với trọng số $\mathbf{w}$ nếu $\deg_{\mathbf{w}}(u) = d$ với mọi $u \in \operatorname{supp}(f)$. Khi đó, ta viết $\deg_{\mathbf{w}}(f) = d$.

Ví dụ 1.2.1. Đa thức $f = 3x_1^6 - x_1x_2x_3 - 2x_1^2x_2^2$ là thuần nhất bậc 6 đối với trọng số $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$.

Bậc của $f \in S$ đối với trọng số $\mathbf{w}$ được định nghĩa là

$$\deg_{\mathbf{w}}(f) := \max\{d \mid f_d \text{ là thành phần thuần nhất bậc } d \text{ của } f \text{ đối với } \mathbf{w}\}.$$

Nếu $\deg_{\mathbf{w}}(f) = d$ thì f_d được gọi là *từ khởi đầu của* f đối với **w**, kí hiệu là $\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(f)$. Do đó, $\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(f)$ không nhất thiết là đơn thức.

Định nghĩa 1.2.2. *Iđêan khởi đầu* của I đối với **w** là iđêan

$$\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle \mathrm{in}_{\mathbf{w}}(f) \mid f \in I \rangle.$$

Từ định nghĩa trên, ta thấy rằng $\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(\mathrm{I})$ không nhất thiết là iđêan đơn thức nhưng nó là iđêan thuần nhất đối với **w** và hữu hạn sinh. Tập các đa thức $f_1, \ldots, f_s \in I$ sao cho $\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle \mathrm{in}_{\mathbf{w}}(f_1), \ldots, \mathrm{in}_{\mathbf{w}}(f_s) \rangle$ được gọi là *cơ sở chuẩn* của I đối với **w**.

Ví dụ 1.2.3. Cho $I = \langle x_1^5x_2^2 + x_1^4x_2^4 + x_1^4 + x_1^2x_2^5 + x_1x_2^2 + x_2^6 + x_2 \rangle \subset S$. Nếu $\mathbf{w} = (1, 1)$ thì $\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle x_1^4x_2^4 \rangle$ là một iđêan đơn thức. Tuy nhiên, nếu $\mathbf{w} = (1, 2)$ thì $\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle x_1^4x_2^4 + x_1^2x_2^5 + x_2^6 \rangle$ không phải là iđêan đơn thức.

Định nghĩa 1.2.4. Cho $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ và thứ tự từ $\leq$ trên $\mathcal{M}$. Khi đó, thứ tự từ $\leq_{\mathbf{w}}$ trên $\mathcal{M}$ được xác định như sau:

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \leq_{\mathbf{w}} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$$

nếu $\sum_{i=1}^n a_iw_i < \sum_{i=1}^n b_iw_i$ hoặc $\sum_{i=1}^n a_iw_i = \sum_{i=1}^n b_iw_i$ và $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \leq x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$.

Mệnh đề 1.2.5. *Với mọi iđêan* $I \subset S$*, ta có* $\mathrm{in}_{\leq}(\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I)) = \mathrm{in}_{\leq_{\mathbf{w}}}(I)$.

Chứng minh. Với mọi đa thức $f \in I$, ta có $\mathrm{in}_{\leq}(\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(f)) = \mathrm{in}_{\leq_{\mathbf{w}}}(f)$. Điều này suy ra $\mathrm{in}_{\leq}(\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I))$ và $\mathrm{in}_{\leq_{\mathbf{w}}}(I)$ chứa các đơn thức giống nhau. Vì vậy, $\mathrm{in}_{\leq}(\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I)) = \mathrm{in}_{\leq_{\mathbf{w}}}(I)$. □

Mệnh đề 1.2.5 có hệ quả sau đây.

Hệ quả 1.2.6. *Giả sử* **w** *là trọng số. Nếu* $\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I)$ *là iđêan đơn thức thì*

$$\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I) = \mathrm{in}_{\leq_{\mathbf{w}}}(I).$$

Tiếp theo, ta sẽ có mối liên hệ giữa cơ sở Gröbner và cơ sở chuẩn.Trước hết ta đến với bổ đề sau.

Bổ đề 1.2.7. *Xét một số hữu hạn các cặp đơn thức* $(u_1, v_1), \ldots, (u_m, v_m)$ *sao cho* $u_i > v_i$ *với mọi* $i = 1, \ldots, m$. *Khi đó, tồn tại một trọng số* $\mathbf{w}$ *sao cho* $\deg_{\mathbf{w}} u_i > \deg_{\mathbf{w}} v_i$ *với mọi* $i = 1, \ldots, m$.

Chứng minh. Cho $u_i = \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i}$ và $v_i = \mathbf{x}^{\mathbf{b}_i}$ với mọi $i = 1, \ldots, m$. Ta cần chỉ ra rằng tồn tại véctơ nguyên $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^n$ sao cho $\langle \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i, \mathbf{w} \rangle > 0$ với mọi i. Giả sử rằng $\langle \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i, \mathbf{w} \rangle \leq 0$ với mọi $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^n$. Theo Bổ đề Farkas ([6, Corollary 7.1d]), tồn tại các số nguyên không âm c_i không đồng thời bằng không sao cho véctơ $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{m} c_i(\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)$. Khi đó, ta có

$$\prod_{i=1}^{m} (\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i})^{c_i} = \prod_{i=1}^{m} (\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i})^{c_i} \mathbf{x}^{-\mathbf{g}},$$

$$\text{hay } \prod_{i=1}^{m} (v_i)^{c_i} = \prod_{i=1}^{m} (u_i)^{c_i} \mathbf{x}^{-\mathbf{g}}.$$

Ta có $\mathbf{a}_i = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$, $\mathbf{b}_i = (b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})$ và $\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i = (a_{i_1} - b_{i_1}, \ldots, a_{i_n} - b_{i_n})$. Ta chọn $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Khi đó, $\langle \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i, e_j \rangle \leq 0$, nghĩa là $\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{b}_{ij} \leq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, m$ và $j = 1, \ldots, n$. Từ đó suy ra véctơ $\mathbf{g}$ có các thành phần tọa độ nhỏ hơn không nên $\mathbf{x}^{-\mathbf{g}} > 1$. Do đó, $\prod_{i=1}^{m} (u_i)^{c_i} \mid \prod_{i=1}^{m} (v_i)^{c_i}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng $u_i > v_i$ với mọi $i = 1, \ldots, m$. Vì vậy, tồn tại trọng số $\mathbf{w}$ sao cho $\deg_{\mathbf{w}} u_i > \deg_{\mathbf{w}} v_i$ với mọi $i = 1, \ldots, m$. □

Định lý sau đây là kết quả chính của mục này và là kết quả quan trọng được sử dụng trong chương sau.

Định lý 1.2.8. *Cho một thứ tự từ* $\leq$ *và iđêan* I, *tồn tại trọng số* $\mathbf{w}$ *sao cho*

$$\mathrm{in}_{\leq}(I) = \mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I).$$

Chứng minh. Giả sử $g_1, \ldots, g_m$ là cơ sở Gröbner rút gọn của I. Ta xét tất cả các cặp $(\text{in}_{\leq}(g_i), u)$, trong đó $u \in \text{supp}(g_i)$ và $u \neq \text{in}_{\leq}(g_i)$. Ta thấy có hữu hạn các cặp như vậy. Theo Bổ đề 1.2.7 suy ra tồn tại trọng số nguyên không âm **w** sao cho

$$\deg_{\mathbf{w}} \text{in}_{\leq}(g_i) > \deg_{\mathbf{w}} u,$$

với mọi $u \in \text{supp}(g_i)$ mà $u \neq \text{in}_{\leq}(g_i)$ và với mọi $i = 1, \ldots, m$. Khi đó, $\text{in}_{\leq}(g_i) = \text{in}_{\mathbf{w}}(g_i)$ suy ra

$$\text{in}_{\leq}(I) = \langle \text{in}_{\leq}(g_1), \ldots, \text{in}_{\leq}(g_m) \rangle \subset \text{in}_{\mathbf{w}}(I).$$

Do đó, ta có

$$\text{in}_{\leq}(I) = \text{in}_{\leq}(\text{in}_{\leq}(I)) \subset \text{in}_{\leq}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) = \text{in}_{\leq_{\mathbf{w}}}(I).$$

Theo Mệnh đề 1.1.9 suy ra $\text{in}_{\leq}(I) = \text{in}_{\leq_{\mathbf{w}}}(I)$. Vì $\mathbf{w} \geq 0$ và $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ là iđêan đơn thức nên theo Hệ quả 1.2.6 ta có $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \text{in}_{\leq_{\mathbf{w}}}(I)$. Vậy tồn tại trọng số **w** sao cho $\text{in}_{\leq}(I) = \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$. □

1.2.2. Thuần nhất hóa

Ta sẽ trình bày quá trình thuần nhất hoá cho vành phân bậc được xác định bởi trọng số **w**.

Cho $0 \neq f \in S$ là một đa thức có các thành phần thuần nhất f_j có bậc $\deg_{\mathbf{w}}(f_j) = j$ đối với trọng số **w**. Ta gán thêm biến mới t và định nghĩa *thuần nhất hóa* của f đối với **w** là đa thức

$$f^h = \sum_j f_j t^{\deg_{\mathbf{w}} f - \deg_{\mathbf{w}}(f_j)} \in S[t].$$

Vì các số hạng của f^h đều có bậc $\deg_{\mathbf{w}}(f)$ nên f^h là đa thức thuần nhất thuộc $S[t]$ đối với *trọng số mở rộng* **w**'$= (w_1, \ldots, w_n, 1) \in \mathbb{N}^{n+1}$, trong đó $\deg(t) = 1$.

Ví dụ 1.2.9. Cho $f = x_1x_2 - 1$. Nếu $\mathbf{w} = (1,1)$ thì $f^h = x_1x_2 - t^2$ là đa thức thuần nhất bậc 2. Nếu $\mathbf{w} = (1,2)$ thì $f^h = x_1x_2 - t^3$ là đa thức thuần nhất bậc 3.

Định nghĩa 1.2.10. Thuần nhất hóa của iđêan I được định nghĩa là iđêan

$$I^h = \langle f^h \mid f \in I \rangle \subset S[t].$$

Cho $f_1, \ldots, f_m$ là hệ sinh của I. Nói chung, $I^h \neq \langle f_1^h, \ldots, f_m^h \rangle$. Tuy nhiên, ta có thể sử dụng cơ sở Gröbner để tính toán hệ sinh của I^h.

Định nghĩa 1.2.11. Cho $\mathbf{w}$ là trọng số trên S. Một thứ tự từ $\leq$ được gọi là *phân bậc* đối với $\mathbf{w}$ nếu khi $\deg_{\mathbf{w}}(u) \leq \deg_{\mathbf{w}}(v)$ với $u, v \in \mathcal{M}$ thì $u \leq v$.

Định nghĩa 1.2.12. Cho thứ tự từ $\leq$ phân bậc đối với $\mathbf{w}$. Thứ tự từ $\leq'$ trên $S[t]$ được xác định như sau:

$$\mathbf{x^a}t^c \leq' \mathbf{x^b}t^d \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \mathbf{x^a} \leq \mathbf{x^b}, \\ \mathbf{x^a} = \mathbf{x^b} \text{ và } \; c \leq d. \end{array}\right.$$

Thứ tự từ $\leq'$ có tính chất sau.

Bổ đề 1.2.13. *Cho* $0 \neq g \in S$. *Khi đó,* $\mathrm{in}_{\leq}(g) = \mathrm{in}_{\leq'}(g^h)$. *Nói riêng,* $\mathrm{in}_{\leq'}(g^h) \in S$.

Chứng minh. Giả sử $g = \sum_j g_j$ có $\deg_{\mathbf{w}}(g_j) = j$ và $\deg_{\mathbf{w}} g = l$. Ta có

$$g^h = \sum_{j=0}^{l} g_j t^{l-j} = g_l + \sum_{j=0}^{l-1} g_j t^{l-j},$$

trong đó $g_l = \sum_i g_{l_i} \in S$ với $\deg_{\mathbf{w}} g_{l_i} = l$. Vì $\deg_{\mathbf{w}} g_j \leq \deg_{\mathbf{w}} g_{l_i}$ với mọi $j = 1, \ldots, l-1$, với mọi i và $\leq$ là thứ tự từ phân bậc đối với $\mathbf{w}$ nên $g_j \leq g_{l_i}$. Xét các $g_{l_i} \in \mathrm{supp}(g_l)$ ta thấy $\mathrm{in}_{\leq}(g_l) = \mathrm{in}_{\leq}(g)$. Do đó, $\mathrm{in}_{\leq}(g) = \mathrm{in}_{\leq'}(g^h)$. □

Mệnh đề 1.2.14. [5, Proposition 3.2.2] Cho $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ là cơ sở Gröbner của I đối với thứ tự từ $\leq$ phân bậc đối với $\mathbf{w}$. Khi đó, $\mathcal{G}^h = \{g_1^h, \ldots, g_s^h\}$ là cơ sở Gröbner của I^h đối với $\leq'$.

Ví dụ 1.2.15. Cho $I = \langle x_1x_2 - 1, x_1^2 - x_2\rangle$. Khi đó, I có cơ sở Gröbner $\mathcal{G} = \{x_1x_2 - 1, x_1^2 - x_2, x_2^2 - x_1\}$ đối với thứ tự từ điển ngược $\leq_{\texttt{rlex}}$. Do đó,

$$I^h = \langle x_1x_2 - t^2, x_1^2 - tx_2, x_2^2 - tx_1\rangle.$$

Bao hàm thức $k[t] \subset S[t]$ cảm sinh đồng cấu k-đại số $k[t] \longrightarrow S[t]/I^h$. Khi đó, $S[t]/I^h$ là $k[t]$-môđun. Hơn nữa, ta có

Mệnh đề 1.2.16. *$S[t]/I^h$ là $k[t]$-môđun tự do.*

Chứng minh. Giả sử $\{g_1, \ldots, g_s\}$ là cơ sở Gröbner của I đối với thứ tự từ $\leq$ phân bậc đối với **w**. Theo Mệnh đề 1.2.14, $\{g_1^h, \ldots, g_s^h\}$ là cơ sở Gröbner của I^h đối với $\leq'$. Theo Mệnh đề 1.1.8, các lớp thặng dư modulo I^h của các đơn thức thuộc $S[t]$ mà nằm ngoài $\mathrm{in}_{\leq'}(I^h)$ lập thành một cơ sở của k-không gian véctơ $S[t]/I^h$. Nghĩa là,

$$S[t]/I^h = \bigoplus_i k\overline{u_i}, \text{ với } u_i \in \mathcal{M}_{S[t]} \setminus \mathrm{in}_{\leq'}(I^h).$$

Theo Bổ đề 1.2.13, $\mathrm{in}_{\leq}(g_i) = \mathrm{in}_{\leq'}(g_i^h)$ với mọi $i = 1, \ldots, s$ dẫn đến $u_i = v_it^a$ với $v_i \in \mathcal{M}_S \setminus \mathrm{in}_{\leq}(I)$ và $a \in \mathbb{N}$. Do đó, $S[t]/I^h$ là $k[t]$-môđun tự do. □

Bổ đề sau đây là hệ quả của Mệnh đề 1.2.16.

Bổ đề 1.2.17. [5, Corollary 3.2.5] Với mọi $a \in k$, phần tử $t - a$ không phải là ước của không trên $S[t]/I^h$.

Bổ đề tiếp theo là kết quả chính của mục này và là thông tin quan trọng được sử dụng cho chương sau.

Bổ đề 1.2.18. *Cho $I \subset S$ là một iđêan, $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^n$ là một trọng số và $\leq$ là thứ tự từ phân bậc đối với **w**. Khi đó, ta có các đẳng cấu k-đại số*

$$(S[t]/I^h) \otimes_{k[t]} (k[t]/\langle t\rangle) \cong S/\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I),$$

và

$$(S[t]/I^h) \otimes_{k[t]} (k[t]/\langle t-a\rangle) \cong S/I,$$

trong đó $0 \neq a \in k$.

Chứng minh. Xét S-đồng cấu $\varphi : S[t] \longrightarrow S$ với $\varphi(t) = 0$. Đồng cấu φ là toàn cấu và $\varphi(I^h) = \mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I)$ do Bổ đề 1.2.13. Ta có sơ đồ giao hoán sau

$$\begin{tikzcd} S[t] \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\varphi^*"'] & S \arrow[d, two heads] \\ & S/\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I) \end{tikzcd}.$$

Khi đó, $\mathrm{Ker}(\varphi^*) = \langle t, I^h\rangle$ và

$$\frac{S[t]}{\mathrm{Ker}(\varphi^*)} \cong \frac{S[t]}{\langle t, I^h\rangle} \cong \frac{S}{\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I)}.$$

Vì $(S[t]/I^h) \otimes_{k[t]} (k[t]/\langle t\rangle) \cong (S[t]/I^h)/(\langle t, I^h\rangle/I^h) \cong S[t]/\langle t, I^h\rangle$ nên

$$(S[t]/I^h) \otimes_{k[t]} (k[t]/\langle t\rangle) \cong S/\mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I).$$

Theo Mệnh đề 1.2.14 ta thấy rằng nếu $g_1, \ldots, g_s$ là cơ sở Gröbner của I thì $g_1^h, \ldots, g_s^h$ là cơ sở Gröbner của I^h. Xét đồng cấu k-đại số $\varphi : S[t] \longrightarrow S$ cho bởi $\varphi(t) = a$ với $0 \neq a \in k$. Ta có φ là toàn cấu. Nếu viết $g_i = \sum_u c_u^i u \in I$ thì

$$\varphi(g_i^h) = g_{i,a} = \sum_u c_u^i a^{\deg_{\mathbf{w}} g_i - \deg_{\mathbf{w}} u} u \in S.$$

Xét tự đồng cấu $\varphi' : S \longrightarrow S$ với $\varphi'(x_i) = a^{w_i} x_i$ với mọi i. Khi đó,

$$\varphi'(g_{i,a}) = \sum_u c_u^i a^{\deg_{\mathbf{w}} g_i - \deg_{\mathbf{w}} u} \varphi'(u) = \sum_u c_u^i a^{\deg_{\mathbf{w}} g_i - \deg_{\mathbf{w}} u} a^{\deg_{\mathbf{w}} u} u = a^{\deg_{\mathbf{w}} g_i} g_i.$$

Đặt $\alpha := \varphi' \circ \varphi$. Khi đó, $\alpha(I^h) = I$ và xét sơ đồ giao hoán

$$\begin{tikzcd} S[t] \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "\alpha^*"'] & S \arrow[d, two heads] \\ & S/I \end{tikzcd}.$$

Ta có $\mathrm{Ker}(\alpha^*) = \langle t - a, I^h \rangle$ và

$$\frac{S[t]}{\mathrm{Ker}(\alpha^*)} \cong \frac{S[t]}{\langle t - a, I^h \rangle} \cong \frac{S}{I}.$$

Vì $(S[t]/I^h) \otimes_{k[t]} (k[t]/\langle t - a \rangle) \cong S[t]/\langle t - a, I^h \rangle$ với $0 \neq a \in k$ nên

$$(S[t]/I^h) \otimes_{k[t]} (k[t]/\langle t - a \rangle) \cong S/I.$$

Vậy ta được điều cần phải chứng minh. $\square$

1.3 Môđun đối đồng điều địa phương

Trước hết, xét S là một vành Noether bất kỳ, M là một S-môđun, $I \subset S$ là một iđêan khác không và $\mathfrak{m} \subset S$ là iđêan cực đại.

Định nghĩa 1.3.1. Môđun con I-xoắn của môđun M được xác định như sau:

$$\Gamma_I(M) := \bigcup_{n \geq 1} (0 \underset{M}{:} I^n) = \{x \in M \mid \exists n \geq 1 : I^n x = 0\}.$$

$\Gamma_I(\bullet)$ cho một tương ứng trên phạm trù các S-môđun. Tương ứng này xác định một hàm tử tuyến tính hiệp biến, khớp trái giữa các S-môđun. Hàm tử dẫn xuất phải (xem [7, 6.2.3 Covariant Right Derived Functors]) thứ i của $\Gamma_I(\bullet)$, kí hiệu là $H_I^i(\bullet)$, được gọi là hàm tử đối đồng điều địa phương thứ i có giá là iđêan I.

Mệnh đề 1.3.2. [8, Theorem 4.2.1] *Cho S là vành Noether, $I \subset S$ là iđêan, $\phi : S \longrightarrow S'$ là đồng cấu vành và M là S'-môđun. Khi đó, có một đẳng cấu* *giữa các S-môđun $H^i_I(M) \cong H^i_{IS'}(M)$ với mọi $i \in \mathbb{N}$.*

Tuy các môđun đối đồng điều địa phương nhìn chung là không hữu hạn sinh nhưng chúng vẫn có cấu trúc đại số tốt như trong định lý sau.

Định lý 1.3.3. [8, Theorem 7.1.3] *Giả sử $(S, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M là S-môđun hữu hạn sinh. Khi đó, các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là các S-môđun Artin với mọi $i \geq 0$.*

Tiếp theo là một số kết quả thú vị về tính triệt tiêu và không triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương. Từ đó cung cấp thông tin về độ sâu và chiều của S-môđun hữu hạn sinh.

Định lý 1.3.4. (Định lý triệt tiêu của Grothendieck) *Cho $M \neq 0$ là S-môđun hữu hạn sinh và $\mathfrak{m} \subset S$ là iđêan cực đại. Khi đó,*

1. *$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ với $i = \dim(M)$ và $i = \operatorname{depth}(M)$;*

2. *$H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ với mọi $i < \operatorname{depth}(M)$ và $i > \dim(M)$.*

Nói cách khác, ta có

$$\operatorname{depth}(M) = \min\{i \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\},$$

$$\dim(M) = \max\{i \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\}.$$

Nếu $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường k, M là S-môđun phân bậc hữu hạn sinh và $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subset S$ là iđêan cực đại thuần nhất thì môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} H^i_{\mathfrak{m}}(M)_j$ có cấu trúc S-môđun phân bậc. Do tính chất Artin của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ theo Định lý 1.3.3 nên ta có $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_j$ triệt tiêu tại bậc đủ lớn.

Mệnh đề 1.3.5. [8, Theorem 16.1.5] *Cho M là S-môđun phân bậc hữu hạn sinh. Khi đó,*

1. *Tồn tại $r \in \mathbb{Z}$ sao cho $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_j = 0$ với mọi $i \in \mathbb{N}$ và $j \geq r$;*

2. *Với mọi $i \in \mathbb{N}$ và với mọi $j \in \mathbb{Z}$, $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_j$ là k-không gian véctơ hữu hạn sinh.*

Từ Mệnh đề này, ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.3.6. *Hàm Hilbert* của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là hàm số học

$$h^i_M : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad h^i_M(j) = \dim_k(H^i_{\mathfrak{m}}(M)_j).$$

Kết quả quan trọng sau cho mối liên hệ giữa môđun phân bậc $\operatorname{Ext}^{n-i}_S(S/I, S)$ (xem [7, 6.2.3 Covariant Right Derived Functors]) và môđun đối đồng điều địa phương phân bậc $H^i_{\mathfrak{m}}(S/I)$.

Định lý 1.3.7. (Định lý đối ngẫu địa phương) *Cho $\mathfrak{m} \subset S$ là iđêan cực đại thuần nhất và E là bao nội xạ* (xem[8, Reminders 10.1.1]) của S/I-môđun $S/\mathfrak{m}$. Khi đó, ta có đẳng cấu các S/I-môđun

$$H^i_{\mathfrak{m}}(S/I) \cong \operatorname{Hom}_{S/I}(\operatorname{Ext}^{n-i}_S(S/I, S), E).$$

Chương 2

Iđêan thuần nhất có iđêan khởi đầu không chứa bình phương

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số bất biến của sự suy biến Gröbner của iđêan thuần nhất có iđêan khởi đầu không chứa bình phương: hàm Hilbert đối đồng điều, độ sâu, số Betti và chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford. Tài liệu tham khảo chính của chương này là [3], [8] và [9].

Cho $S = k[x_1, \dots, x_n]$ là vành đa thức trên trường k, $\mathfrak{m}$ là iđêan cực đại thuần nhất của S và M là một S-môđun phân bậc hữu hạn sinh.

2.1 Vành đầy đủ đối đồng điều

Trong mục này, chúng tôi tìm hiểu định nghĩa và một số tính chất của vành đầy đủ đối đồng điều. Các kết quả được tham khảo chủ yếu trong bài báo [3] và [9].

Nhắc lại rằng, cho R là vành giao hoán có đơn vị. Nếu tồn tại số nguyên dương m sao cho $m \cdot 1 = 0$ thì số m nhỏ nhất có tính chất đó được gọi là *đặc số* của vành R, được kí hiệu là char(R). Một vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$ được gọi là *đẳng đặc trưng* nếu char(R) = char$(R/\mathfrak{m})$.

Định nghĩa 2.1.1. Vành Noether địa phương $(A, \mathfrak{n})$ được gọi là *đầy đủ đối đồng điều (cohomologically full)* nếu với mọi vành địa phương $(B, \mathfrak{m})$ sao cho $\text{char}(B) = \text{char}(A)$ và $\text{char}(B/\mathfrak{m}) = \text{char}(A/\mathfrak{n})$ và với mọi toàn ánh $\phi : (B, \mathfrak{m}) \to (A, \mathfrak{n})$ sao cho ánh xạ cảm sinh $\overline{\phi} : B/\sqrt{(0)} \to A/\sqrt{(0)}$ là đẳng cấu thì ánh xạ cảm sinh của các B-môđun $H^i_{\mathfrak{m}}(B) \to H^i_{\mathfrak{m}}(A) \cong H^i_{\mathfrak{n}}(A)$ là toàn ánh với mọi $i \in \mathbb{N}$.

Mệnh đề 2.1.2. *Cho $(R, \mathfrak{t})$ là vành Artin địa phương và $(A, \mathfrak{n})$ là R-đại số Noether phẳng địa phương sao cho thớ đặc biệt $A/\mathfrak{t}A$ là đầy đủ đối đồng điều. Giả sử R là đẳng đặc trưng, N là R-môđun hữu hạn sinh và $N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_q \supseteq N_{q+1} = 0$ là một dãy lọc của các môđun con sao cho $N_j/N_{j+1} \cong R/\mathfrak{t}$ với mọi $j = 0, \ldots, q$. Khi đó, với mọi $i \in \mathbb{N}$ và $j = 0, \ldots, q$, dãy phức các A- môđun sau là khớp:*

$$0 \to H^i_{\mathfrak{n}}(N_{j+1} \otimes_R A) \to H^i_{\mathfrak{n}}(N_j \otimes_R A) \to H^i_{\mathfrak{n}}((N_j/N_{j+1}) \otimes_R A) \to 0.$$

Chứng minh. Xét vành Noether địa phương $(A/\mathfrak{t}A, \mathfrak{n}/\mathfrak{t}A)$. Ta sẽ chứng minh toàn ánh $\phi : A \to A/\mathfrak{t}A$ cảm sinh đẳng cấu giữa $A/\sqrt{(0)}$ và $(A/\mathfrak{t}A)/\sqrt{(0)}$. Thật vậy, ta có sơ đồ giao hoán

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "\phi'"'] & A' = A/\mathfrak{t}A \arrow[d, two heads] \\ & A'/\sqrt{(0)_{A'}} \end{tikzcd}$$

Vì $(R, \mathfrak{t})$ là vành Artin địa phương nên tồn tại $n \gg 0$ sao cho $\mathfrak{t}^n = 0$. Do đó,

$$\mathfrak{t}A \subset \mathfrak{p}, \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A).$$

Ta có

$$\mathrm{Ker}(\phi') = \left\{a \in A \mid \phi'(a) \in \sqrt{(0)_{A'}}\right\} = \left\{a \in A \mid \phi(a) \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A)} \mathfrak{p}/\mathfrak{t}A\right\}$$
$$= \{a \in A \mid a + \mathfrak{t}A \in \mathfrak{p} + \mathfrak{t}A, \forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A), \mathfrak{p} \supset \mathfrak{t}A\}$$
$$= \{a \in A \mid a \in \mathfrak{p}, \forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\}$$
$$= \left\{a \in A \mid a \in \sqrt{(0)_A}\right\}.$$

Theo Định lý đẳng cấu Noether thứ nhất ta có $A/\mathrm{Ker}(\phi') \cong \mathrm{Im}(\phi')$, nghĩa là $A/\sqrt{(0)} \cong (A/\mathfrak{t}A)/\sqrt{(0)}$. Vì $A/\mathfrak{t}A$ là đầy đủ đối đồng điều nên ánh xạ cảm sinh của các A-môđun $H^i_{\mathfrak{n}}(\phi) : H^i_{\mathfrak{n}}(A) \to H^i_{\mathfrak{n}}(A/\mathfrak{t}A)$ là toàn ánh với mọi $i \in \mathbb{N}$.

Vì tích tenxơ là khớp phải nên ta có một toàn ánh của các A-môđun

$$N_j \otimes_R A \xrightarrow{\beta} (N_j/N_{j+1}) \otimes_R A \cong (R/\mathfrak{t}) \otimes_R A \cong A/\mathfrak{t}A,$$

trong đó $\alpha' : (N_j/N_{j+1}) \otimes_R A \longrightarrow A/\mathfrak{t}A$. Kí hiệu $\beta' := \alpha' \circ \beta$. Vì β' là toàn ánh nên tồn tại $x \in N_j \otimes_R A$ sao cho $\beta'(x) = 1$. Kí hiệu $\alpha : A \longrightarrow N_j \otimes_R A$ là phép nhân với x. Khi đó, $\phi = \beta' \circ \alpha : A \longrightarrow A/\mathfrak{t}A$. Với mọi $i \in \mathbb{N}$, ánh xạ cảm sinh của các A-môđun

$$H^i_{\mathfrak{n}}(\beta' \circ \alpha) = H^i_{\mathfrak{n}}(\beta') \circ H^i_{\mathfrak{n}}(\alpha) : H^i_{\mathfrak{n}}(A) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{n}}(A/\mathfrak{t}A)$$

là toàn ánh dẫn đến $H^i_{\mathfrak{n}}(\beta')$ là toàn ánh. Vì $H^i_{\mathfrak{n}}(\alpha')$ là song ánh với mọi $i \in \mathbb{N}$ nên

$$H^i_{\mathfrak{n}}(\beta) : H^i_{\mathfrak{n}}(N_j \otimes_R A) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{n}}((N_j/N_{j+1}) \otimes_R A)$$

là toàn ánh với mọi $i \in \mathbb{N}$.

Với mỗi $j = 0, \ldots, q$, ta có dãy khớp ngắn các A-môđun

$$0 \longrightarrow N_{j+1} \longrightarrow N_j \longrightarrow N_j/N_{j+1} \longrightarrow 0.$$

Vì A là R-đại số phẳng nên ta có dãy khớp ngắn các A-môđun

$$0 \longrightarrow N_{j+1} \otimes_R A \longrightarrow N_j \otimes_R A \longrightarrow (N_j/N_{j+1}) \otimes_R A \longrightarrow 0.$$

Khi đó, dãy khớp trên sẽ cảm sinh dãy khớp dài của các A-môđun đối đồng điều địa phương có giá là iđêan $\mathfrak{n}$

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}_{\mathfrak{n}}(N_j \otimes_R A) \xrightarrow{H^{i-1}_{\mathfrak{n}}(\beta)} H^{i-1}_{\mathfrak{n}}((N_j/N_{j+1}) \otimes_R A) \xrightarrow{H^{i-1}_{\mathfrak{n}}(\delta)}$$

$$H^{i}_{\mathfrak{n}}(N_{j+1} \otimes_R A) \longrightarrow H^{i}_{\mathfrak{n}}(N_j \otimes_R A) \xrightarrow{H^{i}_{\mathfrak{n}}(\beta)} H^{i}_{\mathfrak{n}}((N_j/N_{j+1}) \otimes_R A) \xrightarrow{H^{i}_{\mathfrak{n}}(\delta)} \cdots.$$

Với mỗi $i \in \mathbb{N}$, xét dãy khớp ngắn các A-môđun

$$H^{i-1}_{\mathfrak{n}}((N_j/N_{j+1}) \otimes_R A) \xrightarrow{H^{i-1}_{\mathfrak{n}}(\delta)} H^{i}_{\mathfrak{n}}(N_{j+1} \otimes_R A) \xrightarrow{H^{i}_{\mathfrak{n}}(\alpha)} H^{i}_{\mathfrak{n}}(N_j \otimes_R A) \xrightarrow{H^{i}_{\mathfrak{n}}(\beta)}$$

$$H^{i}_{\mathfrak{n}}((N_j/N_{j+1}) \otimes_R A) \xrightarrow{H^{i}_{\mathfrak{n}}(\delta)} H^{i+1}_{\mathfrak{n}}(N_{j+1} \otimes_R A).$$

Vì $H^{i}_{\mathfrak{n}}(\beta)$ là toàn ánh nên

$$\mathrm{Im}(H^{i-1}_{\mathfrak{n}}(\delta)) = 0 \text{ và } \mathrm{Ker}(H^{i}_{\mathfrak{n}}(\delta)) = \mathrm{Im}(H^{i}_{\mathfrak{n}}(\beta)) = H^{i}_{\mathfrak{n}}((N_j/N_{j+1}) \otimes_R A).$$

Khi đó, $\mathrm{Coker}(H^{i-1}_{\mathfrak{n}}(\delta)) = H^{i}_{\mathfrak{n}}(N_{j+1} \otimes_R A)$. Do đó, với mọi $i \in \mathbb{N}$ và $j = 0, \ldots, q$, ta có dãy khớp cảm sinh các A-môđun

$$0 \to H^{i}_{\mathfrak{n}}(N_{j+1} \otimes_R A) \to H^{i}_{\mathfrak{n}}(N_j \otimes_R A) \to H^{i}_{\mathfrak{n}}((N_j/N_{j+1}) \otimes_R A) \to 0.$$

Vậy ta được điều cần chứng minh. □

Tiếp theo, ta sẽ giới thiệu khái niệm iđêan đơn thức không chứa bình phương.

Định nghĩa 2.1.3. Nếu $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ là đơn thức trong S thì *căn* $\sqrt{u}$ của nó là

$$\sqrt{u} = \prod_{a_i > 0} x_i.$$

Một đơn thức u được gọi là *không chứa bình phương* nếu $u = \sqrt{u}$. Một iđêan đơn thức J được gọi là *iđêan không chứa bình phương* nếu J sinh bởi các đơn thức không chứa bình phương.

Ví dụ 2.1.4. $\sqrt{x_1^5x_2x_3^2x_4^5} = x_1x_2x_3x_4$.

Mệnh đề dưới đây là ví dụ cụ thể về vành đầy đủ đối đồng điều.

Mệnh đề 2.1.5. [9, Remark 2.4 (5)] Cho $J \subset S = k[x_1, \ldots, x_n]$ là iđêan đơn thức không chứa bình phương. Khi đó, $(S/J)_\mathfrak{m}$ là đầy đủ đối đồng điều.

Bây giờ, ta xét thêm một biến t và vành địa phương $R = k[t]_{\langle t \rangle}$. Đặt $P = R[x_1, \ldots, x_n] = R \otimes_{k[t]} S$. Kí hiệu $\mathfrak{n} = tP + \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ thì $\mathfrak{n}$ là iđêan cực đại thuần nhất duy nhất của P.

Cho A là một vành thương phân bậc của P và giả sử A là R-đại số phẳng. Nếu $(A/tA)_\mathfrak{n}$ là đầy đủ đối đồng điều thì theo [3, proof of Proposition 2.4], $\operatorname{Ext}^i_{P_\mathfrak{n}}(A_\mathfrak{n}, P_\mathfrak{n})$ là R-môđun phẳng. Vì $\operatorname{Ext}^i_{P_\mathfrak{n}}(A_\mathfrak{n}, P_\mathfrak{n}) \cong (\operatorname{Ext}^i_P(A, P))_\mathfrak{n}$ nên $\operatorname{Ext}^i_P(A, P)$ là R-đại số phẳng, dẫn đến $\operatorname{Ext}^i_P(A, P)_j$ là R-môđun phẳng. Vì $\operatorname{Ext}^i_P(A, P)_j$ là hữu hạn sinh nên $\operatorname{Ext}^i_P(A, P)_j$ là R-môđun tự do. Từ đó, ta có mệnh đề

Mệnh đề 2.1.6. *Cho A là một vành thương phân bậc của P. Giả sử A là một R-đại số phẳng và $(A/tA)_\mathfrak{n}$ là đầy đủ đối đồng điều. Khi đó, $\operatorname{Ext}^i_P(A, P)_j$ là R-môđun tự do với mọi $i, j \in \mathbb{Z}$.*

2.2 Hàm Hilbert và độ sâu

Trong mục này, chúng tôi chứng minh kết quả của Conca-Varbaro về mối liên hệ hàm Hilbert của môđun đối đồng điều địa phương có giá là iđêan cực đại thuần nhất $\mathfrak{m}$ của S/I và S/J khi iđêan thuần nhất I có iđêan khởi đầu J không chứa bình phương đối với thứ tự từ nào đó.

Ta bắt đầu với định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.2.1. Một R-môđun A được gọi là *biểu diễn hữu hạn* nếu tồn tại các R-môđun tự do hữu hạn sinh R^n, R^m trong đó n, m là các số nguyên dương sao cho dãy các R-môđun $R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow A \longrightarrow 0$ là khớp.

Bổ đề 2.2.2. [10, Theorem 7.11] Cho $\varphi : R \longrightarrow R'$ là đồng cấu phẳng, A và B là các R-môđun sao cho A có biểu diễn hữu hạn. Khi đó, ta có đẳng cấu R'-môđun

$$\mathrm{Hom}_R(A, B) \otimes_R R' \cong \mathrm{Hom}_{R'}(A \otimes_R R', B \otimes_R R').$$

Mệnh đề sau là hệ quả của Bổ đề 2.2.2.

Mệnh đề 2.2.3. *Cho $\varphi : R \longrightarrow R'$ là đồng cấu phẳng, trong đó R là vành Noether. Lấy A và B là các R-môđun bất kỳ sao cho A là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó, có một đẳng cấu của các R'-môđun với mọi $i \geq 0$*

$$\mathrm{Ext}^i_R(A, B) \otimes_R R' \cong \mathrm{Ext}^i_{R'}(A \otimes_R R', B \otimes_R R').$$

Chứng minh. Vì R là vành Noether và A là R-môđun hữu hạn sinh nên tồn tại một giải xạ ảnh của R-môđun A

$$\mathbb{P}_A : \cdots \longrightarrow P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0,$$

với mỗi P_i là hữu hạn sinh. Tác động hàm tử $\mathrm{Hom}_R(-, B)$ vào $\mathbb{P}_A$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}_A, B) : 0 \longrightarrow &\mathrm{Hom}_R(P_0, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_1, B) \longrightarrow \cdots \\ &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_{i-1}, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_i, B) \longrightarrow \cdots\end{aligned}$$

Tác động tenxơ $- \otimes_R R'$ vào dãy phức $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}_A, B)$ ta được

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}_A, B) \otimes_R R' : 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_0, B) \otimes_R R' \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_1, B) \otimes_R (R') \\ \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_{i-1}, B) \otimes_R (R') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_i, B) \otimes_R (R') \longrightarrow \cdots\end{aligned}$$

Theo Bổ đề 2.2.2, ta có đẳng cấu tự nhiên của các R'-môđun

$$\operatorname{Hom}_R(\mathbb{P}_A, B) \otimes_R R' \cong \operatorname{Hom}_{R'}(\mathbb{P}_A \otimes_R R', B \otimes_R R').$$

Với mỗi $i \in \mathbb{N}$, ta có đẳng cấu của các R'-môđun

$$\begin{aligned} H_i(\operatorname{Hom}_R(\mathbb{P}_A, B) \otimes_R R') &\cong H_i(\operatorname{Hom}_R(\mathbb{P}_A, B)) \otimes_R R' \\ &\cong \operatorname{Ext}^i_R(A, B) \otimes_R R'. \end{aligned}$$

Hơn nữa, $H_i(\operatorname{Hom}_{R'}(\mathbb{P}_A \otimes_R R', B \otimes_R R')) \cong \operatorname{Ext}^i_{R'}(A \otimes_R R', B \otimes_R R')$. Vậy $\operatorname{Ext}^i_R(A, B) \otimes_R R' \cong \operatorname{Ext}^i_{R'}(A \otimes_R R', B \otimes_R R')$. □

Ta biết rằng $x \in R$ được gọi là phần tử B-chính quy nếu với mọi $0 \neq b \in B$ thì $bx \neq 0$.

Bổ đề 2.2.4. *Cho A, B là các môđun trên vành R. Nếu x là phần tử R-chính quy và B-chính quy sao cho $x \cdot A = 0$ thì với mọi $i \geq 0$ ta có*

$$\operatorname{Ext}^{i+1}_R(A, B) \cong \operatorname{Ext}^i_{R/\langle x\rangle}(A, B/xB).$$

Chứng minh. Ta có $\operatorname{Hom}_R(A, B) = 0$. Thật vậy, nếu $a \in A$ thì $x \cdot a = 0$. Do đó, nếu $f \in \operatorname{Hom}_R(A, B)$ thì

$$xf(a) = f(xa) = f(0) = 0.$$

Vì x là phần tử B-chính quy nên $f(a) = 0$ với mọi $a \in A$. Do đó, $f = 0$.

Ta sẽ chứng minh hàm tử $\operatorname{Ext}^{i+1}_R(-, B)$ với $i \geq 0$ từ phạm trù các $R/\langle x\rangle$-môđun vào chính nó là hàm tử dẫn xuất phải của $\operatorname{Hom}_{R/\langle x\rangle}(-, B/xB)$. Rõ ràng, hàm tử $\operatorname{Ext}^{i+1}_R(-, B)$ với $i \geq 0$ là nối mạnh (strongly connected). Từ dãy khớp ngắn các R-môđun

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\cdot x} B \longrightarrow B/xB \longrightarrow 0$$

sẽ cảm sinh dãy khớp

$$\operatorname{Hom}_R(A,B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(A,B/xB) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(A,B) \xrightarrow{\cdot x} \operatorname{Ext}^1_R(A,B).$$

Vì A bị triệt tiêu bởi x nên $\operatorname{Ext}^1_R(A,B)$ cũng bị triệt tiêu bởi x. Kết hợp với $\operatorname{Hom}_R(A,B)=0$ suy ra

$$\operatorname{Hom}_R(A,B/xB) \cong \operatorname{Ext}^1_R(A,B).$$

Vì $\operatorname{Hom}_{R/\langle x\rangle}(A,B/xB) \cong \operatorname{Hom}_R(A,B/xB)$ nên

$$\operatorname{Hom}_{R/\langle x\rangle}(A,B/xB) \cong \operatorname{Ext}^1_R(A,B).$$

Do đó, các hàm tử $\operatorname{Ext}^1_R(-,B)$ và $\operatorname{Hom}_{R/\langle x\rangle}(-,B/xB)$ là tương đương với nhau. Bây giờ, ta cần chứng minh $\operatorname{Ext}^{i+1}_R(F,B)=0$ với mọi $i>0$ và mọi F là $R/\langle x\rangle$-môđun tự do. Chọn một cơ sở của $R/\langle x\rangle$-môđun F và lấy Q là R-môđun tự do có cùng cơ sở với F. Vì x là Q-phần tử chính quy nên ta có dãy khớp các R-môđun

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{x} Q \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Khi đó, ta có dãy khớp

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_R(Q,B) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n+1}_R(F,B) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n+1}_R(Q,B) \longrightarrow \cdots.$$

Vì Q là R-môđun tự do nên $\operatorname{Ext}^i_R(Q,B)=0$ với mọi $i>0$ dẫn đến $\operatorname{Ext}^{i+1}_R(F,B)=0$ với mọi $i>0$ và mọi R-môđun B. Vậy ta được điều cần phải chứng minh. $\square$

Định lý tiếp theo chứng minh rằng hàm Hilbert của môđun đối đồng điều địa phương có giá là iđêan $\mathfrak{m}$ của S/I và S/J là trùng nhau khi iđêan thuần nhất I có iđêan khởi đầu J là không chứa bình phương đối với thứ tự từ nào đó. Đây là kết quả chính của mục này.

Định lý 2.2.5. *Cho I là iđêan thuần nhất của vành đa thức S và J là iđêan khởi đầu của I đối với thứ tự từ nào đó. Giả sử J không chứa bình phương. Khi đó,*

$$h^i_{S/I}(j) = h^i_{S/J}(j),$$

với mọi i, j.

Chứng minh. Theo Định lý 1.2.8, tồn tại véctơ $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ sao cho $J = \mathrm{in}_{\mathbf{w}}(I)$. Lấy thêm một biến mới t, xét $R = k[t]_{\langle t\rangle}$ là vành địa phương và $P = R[x_1, \ldots, x_n]$ là vành phân bậc với $\deg(x_i) = 1$. Xét iđêan thuần nhất hóa $I^h \subset P$, đặt $A = P/\langle I^h\rangle$. Theo Mệnh đề 1.2.16, $S[t]/I^h$ là $k[t]$-môđun tự do, dẫn đến A là R-môđun tự do. Ta có $A/\langle t\rangle \cong S/J$. Theo Bổ đề 1.2.18, với $0 \neq a \in k$

$$(S[t]/I^h) \otimes_{k[t]} (k[t]/\langle t-a\rangle) \cong S/I.$$

Do đó,

$$\frac{S[t]}{I^h} \otimes_{k[t]} \frac{k[t]}{\langle t-a\rangle} \otimes_k k(t) \cong \frac{S[t]}{I^h} \otimes_{k[t]} k \otimes_k k(t) \cong \frac{S[t]}{I^h} \otimes_{k[t]} k(t) \cong (S/I) \otimes_k k(t).$$

Ta lại có

$$\frac{S[t]}{I^h} \otimes_{k[t]} k(t) \cong \frac{S[t]}{I^h} \otimes_{k[t]} k[t]_{\langle t\rangle} \otimes_{k[t]_{\langle t\rangle}} k(t) \cong \left(\frac{S[t]}{I^h}\right)_{\langle t\rangle} \otimes_{k[t]_{\langle t\rangle}} k(t).$$

Suy ra, $A \otimes_R k(t) \cong (S/I) \otimes_k k(t)$. Theo Mệnh đề 2.1.5, $(A/\langle t\rangle)_{\mathfrak{n}}$ là đầy đủ đối đồng điều, trong đó $\mathfrak{n}$ là iđêan cực đại thuần nhất duy nhất của P. Do đó, theo Mệnh đề 2.1.6, $\mathrm{Ext}^i_P(A, P)_j$ là R-môđun tự do hữu hạn sinh với mọi $j \in \mathbb{Z}$, hay $\mathrm{Ext}^i_P(A, P)_j \cong R^{r_{i,j}}$. Theo Bổ đề 1.2.17, $t \in P$ không phải là ước của không trên A nên ta có dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot t} A \longrightarrow A/\langle t\rangle \longrightarrow 0.$$

Tác động hàm tử $\mathrm{Hom}_P(-, P)$ vào dãy khớp trên ta được dãy khớp dài cảm sinh

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_P(A,P) \xrightarrow{\alpha_{i,t}} \mathrm{Ext}^i_P(A,P) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_P(A/\langle t\rangle, P) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_P(A,P) \xrightarrow{\alpha_{i+1,t}} \mathrm{Ext}^{i+1}_P(A,P) \longrightarrow \cdots,$$

trong đó $\alpha_{i,t}$ là phép nhân t vào $\mathrm{Ext}^i_P(A,P)$ với $i \in \mathbb{Z}$. Từ đó, ta có dãy khớp ngắn với mọi $i \in \mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha_{i,t}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_P(A/\langle t\rangle, P) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha_{i+1,t}) \longrightarrow 0.$$

Theo Bổ đề 2.2.4, ta có đẳng cấu $\mathrm{Ext}^i_S(A/\langle t\rangle, S) \cong \mathrm{Ext}^{i+1}_P(A/\langle t\rangle, P)$. Khi đó, với mọi $i \in \mathbb{Z}$ ta có dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha_{i,t}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_S(A/\langle t\rangle, S) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha_{i+1,t}) \longrightarrow 0.$$

Với mọi $j \in \mathbb{Z}$, dãy khớp ngắn trên cảm sinh dãy khớp ngắn của các k-không gian véctơ

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha_{i,t})_j \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_S(A/\langle t\rangle, S)_j \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha_{i+1,t})_j \longrightarrow 0.$$

Vì $\mathrm{Ext}^i_P(A,P)_j \cong R^{r_{i,j}}$ và t không phải là ước của không trên R nên

$$\mathrm{Ker}(\alpha_{i+1,t})_j = 0 \text{ và } \mathrm{Coker}(\alpha_{i,t})_j \cong \left(\frac{R}{\langle t\rangle}\right)^{r_{i,j}} \cong k^{r_{i,j}}.$$

Do đó, $\mathrm{Ext}^i_S(S/J,S)_j \cong \mathrm{Ext}^i_S(A/\langle t\rangle, S)_j \cong k^{r_{i,j}}$. Ta lại có,

$$S[t] \otimes_{k[t]} k(t) \cong S[t] \otimes_{k[t]} \frac{k[t]}{\langle t-a\rangle} \otimes_k k(t) \cong \frac{S[t]}{\langle t-a\rangle} \otimes_k k(t) \cong S \otimes_k k(t)$$

mà

$$S[t] \otimes_{k[t]} k(t) \cong S[t] \otimes_{k[t]} k[t]_{\langle t\rangle} \otimes_{k[t]_{\langle t\rangle}} k(t) \cong S[t]_{\langle t\rangle} \otimes_{k[t]_{\langle t\rangle}} k(t).$$

Do đó, $P \otimes_R k(t) \cong S \otimes_k k(t)$. Mặt khác,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ext}^i_S(S/I,S)_j)\otimes_k k(t) &\cong \mathrm{Ext}^i_{S\otimes_k k(t)}((S/I)\otimes_k k(t), S\otimes_k k(t))_j\\ &\cong \mathrm{Ext}^i_{P\otimes_R k(t)}(A\otimes_R k(t), P\otimes_R k(t))_j\\ &\cong (\mathrm{Ext}^i_P(A,P)_j)\otimes_R k(t)\\ &\cong k(t)^{r_{i,j}}.\end{aligned}$$

Do đó, $\mathrm{Ext}^i_S(S/J,S)_j \cong k^{r_{i,j}} \cong \mathrm{Ext}^i_S(S/I,S)_j$ với mọi $i,j \in \mathbb{Z}$. Hơn nữa, theo Định lý Đối ngẫu địa phương (Định lý 1.3.7) ta có

$$h^i_{S/I}(j) = \dim_k \mathrm{Ext}^{n-i}_S(S/I,S)_{j-n} \text{ và } h^i_{S/J}(j) = \dim_k \mathrm{Ext}^{n-i}_S(S/J,S)_{j-n},$$

với mọi $i,j \in \mathbb{Z}$. Vậy $h^i_{S/I}(j) = h^i_{S/J}(j)$. □

Tiếp theo là một kết quả tương tự cho độ sâu.

Định lý 2.2.6. *Cho $I \subset S$ là iđêan thuần nhất và J là iđêan khởi đầu của I đối với thứ tự từ nào đó. Nếu J không chứa bình phương thì*

$$\mathrm{depth}(S/I) = \mathrm{depth}(S/J).$$

Chứng minh. Ta có $\mathrm{depth}(S/I) = \min\{i \mid H^i_{\mathfrak{m}}(S/I) \neq 0\}$ và $\mathrm{depth}(J) = \min\{i \mid H^i_{\mathfrak{m}}(S/J) \neq 0\}$. Theo Định lý 2.2.5, ta có $H^i_{\mathfrak{m}}(S/I)_j \cong H^i_{\mathfrak{m}}(S/J)_j$ với mọi $i,j \in \mathbb{N}$ nên $\mathrm{depth}(S/I) = \mathrm{depth}(S/J)$. □

2.3 Số Betti và chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford

Nhắc lại rằng, theo Định lý Hilbert về xoắn (xem [11, Định lý 19.7]), S-môđun phân bậc hữu hạn sinh M có giải tự do phân bậc có độ dài hữu hạn.

Bây giờ, giả sử $F_\bullet$ là một giải tự do của S-môđun M

$$F_\bullet : 0 \longrightarrow F_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

trong đó $s \leq n$ và $F_i = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} S(-j)^{\beta_{i,j}(M)}$ là các S-môđun tự do phân bậc hữu hạn sinh. Ta có các định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.3.1. Chiều xạ ảnh của S-môđun M, được ký hiệu là $\operatorname{pd}_S(M)$, là

$$\sup\{i \mid \operatorname{Tor}_i^S(M,k) \neq 0\}.$$

Định nghĩa 2.3.2. *Số Betti phân bậc* của S-môđun phân bậc hữu hạn sinh M là

$$\beta_{i,j}(M) := \operatorname{rank}_k(F_i)_{i+j},$$

trong đó $(F_i)_j$ là thành phần phân bậc thứ $i+j$ của S-môđun phân bậc tự do hữu hạn sinh F_i trong giải tự do tối tiểu của M.

Chú ý 2.3.3. *Số Betti phân bậc* của S-môđun phân bậc hữu hạn sinh M còn được xác định như sau

$$\beta_{i,j}(M) := \dim_k(\operatorname{Tor}_i^S(M,k)_{i+j}).$$

Tiếp theo, ta có khái niệm chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford.

Định nghĩa 2.3.4. Cho M là S-môđun phân bậc hữu hạn sinh và $i \geq 0$ là một số nguyên bất kỳ. Đặt

$$a_i(M) := \begin{cases} \max\{t \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M)_t \neq 0\} & \text{nếu } H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0, \\ -\infty & \text{nếu } H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0. \end{cases}$$

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford hay nói ngắn gọn là *chỉ số chính quy* của môđun M được định nghĩa là

$$\operatorname{reg}(M) := \max\{a_i(M) + i \mid i \geq 0\}.$$

Chú ý 2.3.5. Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của S-môđun M có thể được tính qua số Betti như sau:

$$\operatorname{reg}(M) := \max\{j - i \mid \beta_{i,j}(M) \neq 0\}.$$

Ta có bảng Betti của S-môđun phân bậc M được biểu diễn như sau

	0	1	$\cdots$	s	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
i	$\beta_{0,i}$	$\beta_{1,i+1}$	$\cdots$	$\beta_{s,i+s}$	$\cdots$
$i+1$	$\beta_{0,i+1}$	$\beta_{1,i+2}$	$\cdots$	$\beta_{s,i+s+1}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
j	$\beta_{0,j}$	$\beta_{1,j+1}$	$\cdots$	$\beta_{s,j+s}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$

Ví dụ 2.3.6. Cho $S = k[x_1, x_2, x_3]$ và $M = S/I$ với $I = \langle x_2^5, x_1^3, x_1x_2\rangle$. Ta có giải tự do phân bậc tối tiểu của M là

$$0 \longrightarrow S(-6)\oplus S(-4) \longrightarrow S(-5)\oplus S(-3)\oplus S(-2) \longrightarrow S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0.$$

Bảng Betti của S-môđun M là

	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	1	1
3	0	0	0
4	0	1	1

Từ đó, ta có $\operatorname{reg}(M) = 4$.

Định nghĩa 2.3.7. Số Betti $\beta_{i,i+j}(M) \neq 0$ được gọi là *số Betti góc* (corner/extremal Betti number) nếu $\beta_{h,h+l}(M) = 0$ với mọi cặp $(h, l) \neq (i, j)$ với $h \geq i$ và $l \geq j$.

Ví dụ 2.3.8. Trong Ví dụ 2.3.6, $\beta_{2,6} = 1$ là số Betti góc của S/I.

Phần tiếp theo mô tả quan hệ giữa các số Betti phân bậc $\beta_{i,j}$ và chiều của các môđun phân bậc $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{j-i}$ là $\alpha_{i,j} := h^i_M(j - i)$.

Số Betti phân bậc:

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
 & & c-1 & c & c+1 & \cdots & \cdots & i & \cdots & \cdots & p & p+1 \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathrm{reg}+1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathrm{reg} & \cdots & \boxtimes & \boxtimes & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathrm{reg}-1 & \cdots & * & * & \square & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \cdots & * & * & \square & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \cdots & * & * & \boxplus & \boxtimes & \boxtimes & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \cdots & * & * & * & * & * & \boxplus & \boxtimes & \boxtimes & \blacksquare & 0 \\
 & \cdots & * & * & * & * & * & * & * & * & \square & 0 \\
 & \cdots & * & * & * & * & * & * & * & * & \square & 0 \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

trong đó $p := \mathrm{pd}_S(M)$ và $c := \mathrm{codim}(M)$.

Chiều của môđun $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{j-i}$:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & q-1 & q & \cdots & \cdots & i & \cdots & \cdots & d-1 & d & d+1 & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mathrm{reg}+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mathrm{reg} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \boxtimes & 0 & \cdots \\
\mathrm{reg}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \square & \ast & 0 & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \square & \ast & 0 & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \boxtimes & \boxtimes & \boxplus & \ast & 0 & \cdots \\
 & 0 & \blacksquare & \boxtimes & \boxtimes & \boxplus & \ast & \ast & \ast & \ast & 0 & \cdots \\
 & 0 & \square & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & 0 & \cdots \\
 & 0 & \square & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & 0 & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

trong đó $q := \operatorname{depth}(M) = n - p$ và $d := \dim(M) = n - c$.

Mệnh đề 2.3.9. [13, Lecture 4] Các số tại các vị trí được đánh dấu bởi $\blacksquare, \boxtimes, \boxplus$ hoặc $\square$ trong hai bảng trên thỏa mãn $\tilde{\alpha}_{i,j} \leq \beta_{i,j} \leq \tilde{\alpha}_{i,j} + \sum_{l>0} \binom{n}{l} \alpha_{i-l,j}$, trong đó $\tilde{\alpha}_{i,j} := \dim_k(\operatorname{Socle}(H^i_{\mathfrak{m}}(M))_{j-i})$.

Cụ thể là,

1. Tại các vị trí được đánh dấu bởi $\blacksquare$: $\alpha_{i,j} = \beta_{i,j} \neq 0$;
2. Tại các vị trí được đánh dấu bởi $\boxtimes$: $\alpha_{i,j} \leq \beta_{i,j} \leq \sum_{l\geq 0} \binom{n}{l} \alpha_{i,j-l}$;
3. Tại các vị trí được đánh dấu bởi $\square$: $\beta_{i,j} = \tilde{a}_{i,j}$;
4. Tại các vị trí được đánh dấu bởi $\boxplus$: $\tilde{\alpha}_{i,j} \leq \beta_{i,j} \leq \tilde{\alpha}_{i,j} + \sum_{l>0} \binom{n}{l} \alpha_{i-l,j}$.

Vì các số Betti góc của S/I được biểu diễn qua $h^i_{S/I}(j)$ nên theo Định lý 2.2.5, ta có

Định lý 2.3.10. *Cho $I \subset S$ là iđêan thuần nhất và J là iđêan khởi đầu của I đối với thứ tự nào đó. Nếu J không chứa bình phương thì các số Betti góc của S/I và S/J là trùng nhau (giá trị và vị trí).*

Ví dụ 2.3.11. Cho $S = k[x_1, ..., x_9]$ và $I \subset S$ là iđêan được sinh bởi các định thức con cấp 2 của ma trận

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$$

Ta sử dụng Macaulay2 và tính được

$$I = \langle x_1x_5 - x_2x_4, x_1x_8 - x_2x_7, x_4x_8 - x_5x_7, x_1x_6 - x_3x_4, x_1x_9 - x_3x_7,$$
$$x_4x_9 - x_6x_7, x_2x_6 - x_3x_5, x_2x_9 - x_3x_8, x_5x_9 - x_6x_8\rangle$$

là iđêan thuần nhất và iđêan khởi đầu của I đối với thứ tự từ điển ngược $\leq_{\texttt{rlex}}$

$$J = \mathrm{in}_{\leq_{\texttt{rlex}}}(I) = \langle x_6x_8, x_3x_8, x_6x_7, x_5x_7, x_3x_7, x_2x_7, x_3x_5, x_3x_4, x_2x_4\rangle$$

là iđêan không chứa bình phương. Ta cũng tính được các bảng số Betti của S/I và S/J tương ứng là

	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	0	9	16	9	0
2	0	0	0	0	1

	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	0	9	16	10	2
2	0	0	1	2	1

Ta thấy rằng các số Betti góc của S/I và S/J lần lượt là $\beta_{4,6}(S/I), \beta_{4,6}(S/J)$ và $\beta_{4,6}(S/I) = \beta_{4,6}(S/J) = 1$.

Ví dụ 2.3.12. Cho $S = \mathbb{Q}[x_1, ..., x_5]$ và $I \subset S$ là iđêan được sinh bởi các định thức con cấp 2 của ma trận

$$\begin{bmatrix} x_4 + x_5 & x_3 & x_2 \\ x_1 & x_4 & -x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Ta sử dụng Macaulay2 và tính được

$$I = \langle -x_1x_3+x_4^2+x_4x_5, -x_1x_2-x_2x_4-x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5, -x_2x_3-x_2x_4+x_3^2\rangle$$

là iđêan thuần nhất và iđêan khởi đầu của I đối với thứ tự từ điển $\leq_{\texttt{lex}}$

$$J = \mathrm{in}_{\leq_{\texttt{lex}}}(I) = \langle x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\rangle$$

là không chứa bình phương. Ta cũng tính được các bảng Betti của S/I và S/J lần lượt là

	0	1	2
0	1	0	0
1	0	3	2

	0	1	2
0	1	0	0
1	0	3	2

Ta thấy rằng các số Betti góc của S/I và S/J lần lượt là $\beta_{2,3}(S/I), \beta_{2,3}(S/J)$ và $\beta_{2,3}(S/I) = \beta_{2,3}(S/J) = 2$.

Định lý sau là hệ quả của Định lý 2.2.5.

Định lý 2.3.13. *Cho $I \subset S$ là iđêan thuần nhất và J là iđêan khởi đầu của I đối với thứ tự từ nào đó. Giả sử J không chứa bình phương. Khi đó,*

$$\mathrm{reg}(S/I) = \mathrm{reg}(S/J).$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$a_i(S/I) := \begin{cases} \max\{t \mid H^i_{\mathfrak{m}}(S/I)_t \neq 0\} & \text{nếu } H^i_{\mathfrak{m}}(S/I) \neq 0, \\ -\infty & \text{nếu } H^i_{\mathfrak{m}}(S/I) = 0. \end{cases}$$

Do đó, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của S/I là

$$\operatorname{reg}(S/I) := \max\{a_i(S/I) + i \mid i \geq 0\}.$$

Tương tự, ta có

$$a_i(S/J) := \begin{cases} \max\{t \mid H^i_{\mathfrak{m}}(S/J)_t \neq 0\} & \text{nếu } H^i_{\mathfrak{m}}(S/J) \neq 0, \\ -\infty & \text{nếu } H^i_{\mathfrak{m}}(S/J) = 0. \end{cases}$$

Do đó, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của S/J là

$$\operatorname{reg}(S/J) := \max\{a_i(S/J) + i \mid i \geq 0\}.$$

Vì $H^i_{\mathfrak{m}}(S/I)_j \cong H^i_{\mathfrak{m}}(S/J)_j$ với mọi $i, j \in \mathbb{N}$ nên $\operatorname{reg}(S/I) = \operatorname{reg}(S/J)$. $\square$

Chương 3

Iđêan Cartwright-Sturmfels

Trong chương này, chúng tôi mô tả một lớp các iđêan có iđêan khởi đầu không chứa bình phương, gọi là Cartwright-Sturmfels và mô tả hai lớp iđêan con của lớp iđêan này, đó là lớp iđêan cạnh nhị thức và lớp iđêan đa chiều (multiview).

3.1 Iđêan Cartwright-Sturmfels

Mục này giới thiệu khái niệm và một số tính chất của iđêan Cartwright-Sturmfels. Tài liệu tham khảo chính là [14].

Cho $n_1, \ldots, n_m$ là các số nguyên dương và xét $S' = k[x_{ij} : 1 \leq i \leq m$ và $1 \leq j \leq n_i]$ là vành đa thức $\mathbb{Z}^m$-phân bậc trên trường k vô hạn, trong đó $\deg(x_{ij}) = e_i \in \mathbb{Z}^m$. Giả sử nhóm $G = \mathrm{GL}_{n_1}(k) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_m}(k)$ là nhóm các k-tự đồng cấu tuyến tính $\mathbb{Z}^m$ phân bậc trên S' và $B = B_{n_1}(k) \times \cdots \times B_{n_m}(k)$ là nhóm con Borel của G gồm các ma trận tam giác trên khả nghịch.

Định nghĩa 3.1.1. Cho một iđêan thuần nhất $\mathbb{Z}^m$-phân bậc I của S và một thứ tự từ $\leq$ trên S'. Khi đó, nếu tồn tại một tập con mở khác rỗng $U \subset G$ sao cho $\mathrm{in}_{\leq}(\alpha(I)) = \mathrm{in}_{\leq}(\alpha'(I))$ với mọi $\alpha, \alpha' \in U$ thì $\mathrm{in}_{\leq}(\alpha(I))$, kí hiệu $\mathrm{gin}_{\leq}(I)$, được gọi là *iđêan khởi đầu phổ dụng $\mathbb{Z}^m$-phân bậc* của I đối với thứ tự từ $\leq$.

Mệnh đề 3.1.2. [14, Remark 1.3] *Cho $I \subset S'$ là iđêan thuần nhất $\mathbb{Z}^m$-phân* *bậc và $\leq$ là thứ tự từ trên S'. Khi đó,* $\mathrm{gin}_{\leq}(I)$ *là iđêan Borel-fixed, nghĩa là* $\alpha(\mathrm{gin}_{\leq}(I)) = \mathrm{gin}_{\leq}(I)$ *với mọi* $\alpha \in B$.

Xét M là S'-môđun $\mathbb{Z}^m$-phân bậc, kí hiệu M_a là thành phần thuần nhất bậc $a \in \mathbb{Z}^m$ của M. Khi đó, ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.1.3. Cho M là một S'-môđun $\mathbb{Z}^m$-phân bậc hữu hạn sinh. Khi đó, *chuỗi Hilbert $\mathbb{Z}^m$-phân bậc* của M là

$$\mathrm{HS}(M, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^m} (\dim_k M_a) z^a \in \mathbb{Q}[[z_1, \ldots, z_m]][z_1^{-1}, \ldots, z_m^{-1}].$$

Nếu m đã xác định, ta có thể ký hiệu $\mathrm{HS}(M, z_1, \ldots, z_m)$ là $\mathrm{HS}(M, z)$.

Ví dụ 3.1.4. Cho vành đa thức song phân bậc $S' = k[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}]$, trong đó $\deg(x_{11}) = \deg(x_{12}) = (1, 0)$ và $\deg(x_{21}) = \deg(x_{22}) = (0, 1)$. Xét $R = S'/I$ trong đó $I = \langle x_{11}, x_{21}\rangle \cap \langle x_{12}, x_{22}\rangle = \langle x_{11}x_{12}, x_{11}x_{22}, x_{12}x_{21}, x_{21}x_{22}\rangle$. Khi đó, I là iđêan song phân bậc. Ở đây, ta đặt $\mathrm{HF}_R(i, j) := \dim_k(R_{(i,j)})$. Vì các phần tử sinh của I có bậc là $(2, 0); (1, 1)$ và $(0, 2)$ nên $\dim_k(I_{(0,0)}) = \dim_k(I_{(1,0)}) = \dim_k(I_{(0,1)}) = 0$. Khi đó, $\mathrm{HF}_R(0, 0) = 1, \mathrm{HF}_R(1, 0) = 2$ và $\mathrm{HF}_R(0, 1) = 2$. Bây giờ, ta xét tại các bậc $(i, j) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0); (1, 0); (0, 1)\}$. Mọi đơn thức bậc (i, j) là phần tử của $I_{(i,j)}$ ngoại trừ phần tử $x_{11}^i x_{21}^j$ và $x_{12}^i x_{22}^j$. Do đó, $\dim_k(I_{(i,j)}) = (i + 1)(j + 1) - 2$. Từ đó suy ra, hàm Hilbert của S'-môđun R với $(i, j) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0); (1, 0); (0, 1)\}$

$$\mathrm{HF}_R(i, j) = (i + 1)(j + 1) - (i + 1)(j + 1) + 2 = 2.$$

Vậy chuỗi Hilbert song phân bậc của R là

$$\mathrm{HS}(R, z) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} (\dim_k(R_{(i,j)}) z_1^i z_2^j = 1 + \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \setminus (0,0)} 2 z_1^i z_2^j.$$

Định nghĩa 3.1.5. Cho I là iđêan $\mathbb{Z}^m$-thuần nhất của S'. Iđêan I được gọi là *iđêan Cartwright-Sturmfels* nếu tồn tại một iđêan căn Borel-fixed $\mathbb{Z}^m$-phân bậc J của S' sao cho $\mathrm{HS}(I, z) = \mathrm{HS}(J, z)$.

Mệnh đề sau khẳng định rằng iđêan Cartwright-Sturmfels có iđêan khởi đầu không chứa bình phương đối với thứ tự từ nào đó.

Mệnh đề 3.1.6. [15, Proposition 3.4] Cho I là một iđêan Cartwright-Sturmfels và J là một iđêan căn Borel-fixed sao cho $\mathrm{HS}(I, z) = \mathrm{HS}(J, z)$. Khi đó,

1. Iđêan I là iđêan căn và $\mathrm{gin}_{\leq}(I) = J$ với mọi thứ tự từ $\leq$;
2. $\mathrm{in}_{\leq}(\mathrm{I})$ là iđêan Cartwright-Sturmfels và nó là iđêan không chứa bình phương với mọi thứ tự từ $\leq$.

Hơn nữa, lớp iđêan Cartwright-Sturmfels (CS) có đặc trưng sau

$$\begin{aligned}\mathrm{CS} = \{I \mid I \text{ là iđêan } \mathbb{Z}^m\text{-thuần nhất và} \\ \mathrm{gin}_{\leq}(I) \text{ là iđêan căn đối với thứ tự từ } \leq \text{ nào đó}\}.\end{aligned}$$

3.2 Iđêan cạnh nhị thức

Trong mục này, chúng tôi mô tả iđêan khởi đầu phổ dụng $\mathbb{Z}^n$-phân bậc của iđêan cạnh nhị thức và chứng minh rằng mọi iđêan cạnh nhị thức là iđêan Cartwright-Sturmfels. Tài liệu tham khảo chính là bài báo [16].

Trước hết, ta đến với khái niệm của lớp iđêan này.

Cho $S' = k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ là vành đa thức với $2n$ biến trên trường k. Xét X là ma trận cấp $2 \times n$ như sau.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}.$$

Ta kí hiệu Δ_{ij} là định thức con cấp 2 của X tương ứng với hai cột i, j, nghĩa là

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = x_i y_j - x_j y_i.$$

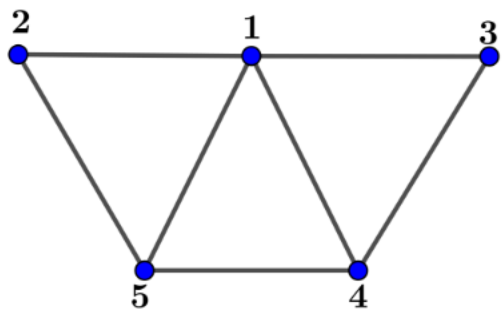
Ta nhắc lại một số khái niệm trong lý thuyết đồ thị. Một đồ thị là một cặp thứ tự $G = (V, E)$, trong đó V là một tập hữu hạn *những đỉnh* và $E \subset V \times V$ là một tập *những cạnh* của đồ thị G. Nghĩa là nếu $V = \{a_1, \ldots, a_n\}$ thì $E \subset \{(a_i, a_j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Một *đường đi* trong đồ thị $G = (V, E)$ là một dãy những cạnh liên tiếp

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_n, a_{n+1}) \in E.$$

Định nghĩa 3.2.1. Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị đơn có tập đỉnh $V = [n] = \{1, \ldots, n\}$. Iđêan $J_G \subset S'$ được gọi là *iđêan cạnh nhị thức của* G nếu

$$J_G = \langle \Delta_{ij} \mid i < j, (i, j) \in E \rangle.$$

Ví dụ 3.2.2. Xét đồ thị G được gắn nhãn như sau.



Hình 3.1: Đồ thị G

Khi đó, iđêan cạnh nhị thức của đồ thị G là

$$\begin{aligned} J_G &= \langle \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{15}, \Delta_{25}, \Delta_{34}, \Delta_{45} \rangle \\ &= \langle x_1y_2 - x_2y_1, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_4 - x_4y_1, x_1y_5 - x_5y_1 \\ &\quad x_2y_5 - x_5y_2, x_3y_4 - x_4y_3, x_4y_5 - x_5y_4 \rangle. \end{aligned}$$

Định lý sau sẽ chứng minh rằng J_G là một iđêan Cartwright-Sturmfels trên vành đa thức $\mathbb{Z}^n$-phân bậc S', trong đó $\deg(x_i) = \deg(y_i) = e_i \in \mathbb{Z}^n$.

Định lý 3.2.3. *Iđêan khởi đầu phổ dụng $\mathbb{Z}^n$-phân bậc của J_G được sinh bởi các đơn thức $y_{a_1} \cdots y_{a_v} x_i x_j$, trong đó $i, a_1, \cdots, a_v, j$ là một đường đi trong đồ thị G. Hơn nữa, J_G là một iđêan Cartwright-Sturmfels.*

Chứng minh. Xét $\leq$ là thứ tự từ bất kỳ trên $S' = k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ với giả thiết $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$. Để xác định iđêan khởi đầu phổ dụng, trước hết tác động một phép biến đổi đa phân bậc ϕ lên J_G sao cho với mỗi i ta có $\phi(x_i) = x_i$ và $\phi(y_i) = \alpha_i x_i + y_i$ với $\alpha_i \in k$. Khi đó, ta có ma trận

$$\phi(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \alpha_1 x_1 + y_1 & \alpha_2 x_2 + y_2 & \cdots & \alpha_n x_n + y_n \end{bmatrix},$$

trong đó các định thức con cấp 2 là

$$\phi(\Delta_{ij}) = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ \alpha_i x_i + y_i & \alpha_j x_j + y_j \end{vmatrix} = (\alpha_j - \alpha_i) x_i x_j + \Delta_{ij}.$$

Giả sử $\alpha_i \neq \alpha_j$ với mọi $i \neq j$ và đặt $\lambda_{ij} := (\alpha_i - \alpha_j)^{-1}$ là phần tử nghịch đảo của $(\alpha_i - \alpha_j)$. Ta có

$$F_{ij} = (\alpha_j - \alpha_i)^{-1} \phi(\Delta_{ij}) = x_i x_j - \lambda_{ij} \Delta_{ij}$$

là đa thức monic. Với mọi $1 \leq i < j < l \leq n$,

$$\begin{aligned} S'(F_{il}, F_{jl}) &= x_j F_{il} - x_i F_{jl} \\ &= -\lambda_{jl} y_j x_i x_l + \lambda_{il} y_i x_j x_l + (\lambda_{jl} - \lambda_{il}) y_l x_i x_j. \end{aligned}$$

Thực hiện phép chia $S'(F_{il}, F_{jl})$ cho F_{il}, F_{jl} và F_{ij}, ta được

$$S'(F_{il}, F_{jl}) = -\lambda_{jl} y_j F_{il} + \lambda_{il} y_i F_{jl} + (\lambda_{jl} - \lambda_{il}) y_l F_{ij} + r,$$

trong đó đa thức dư r

$$\begin{aligned} r =& -\lambda_{jl} y_j \lambda_{il} \Delta_{il} + \lambda_{il} y_i \lambda_{jl} \Delta_{jl} + (\lambda_{jl} - \lambda_{il}) y_l \lambda_{ij} \Delta_{ij} \\ =& \lambda_{jl} \lambda_{il} (-y_j \Delta_{il} + y_i \Delta_{jl}) + (\lambda_{jl} - \lambda_{il}) y_l \lambda_{ij} \Delta_{ij}. \end{aligned}$$

Vì $y_i \Delta_{jl} - y_j \Delta_{il} + y_l \Delta_{ij} = 0$ nên

$$\begin{aligned} r =& \lambda_{jl} \lambda_{il} (-y_j \Delta_{ij}) + (\lambda_{jl} - \lambda_{il}) y_l \lambda_{ij} \Delta_{ij} \\ =& (-\lambda_{jl} \lambda_{il} + \lambda_{jl} \lambda_{ij} - \lambda_{il} \lambda_{ij}) y_l \Delta_{ij}. \end{aligned}$$

Từ tính toán trực tiếp ta có

$$-\lambda_{jl} \lambda_{il} + \lambda_{jl} \lambda_{ij} - \lambda_{il} \lambda_{ij} = 0,$$

suy ra $r = 0$ dẫn đến

$$S'(F_{il}, F_{jl}) = -\lambda_{jl} y_j F_{il} + \lambda_{il} y_i F_{jl} + (\lambda_{jl} - \lambda_{il}) y_l F_{ij}. \tag{3.2.1}$$

Bây giờ, xét riêng iđêan J_G ta có

$$\phi(J_G) = \langle F_{ij} \mid (i, j) \in E \rangle.$$

Gọi

$$F = \{ y_a F_{ij} \mid i, a_1, \ldots, a_v, j \text{ là một đường đi trong } G \},$$

trong đó

$$y_a = y_{a_1} \cdots y_{a_v}.$$

Ta chứng minh rằng F là một cơ sở Gröbner của $\phi(J_G)$ với mọi ánh xạ ϕ thỏa mãn $\alpha_j \neq \alpha_i$ với mọi $i \neq j$. Trước hết, ta chỉ ra rằng $y_a F_{ij} \in \phi(J_G)$ với mỗi đường đi $i, a_1, \cdots, a_v, j$ trong G. Vì F_{ij} và $\phi(\Delta_{ij})$ chỉ sai khác hệ số khác không nên ta chứng minh $y_a \phi(\Delta_{ij}) \in \phi(J_G)$ với mỗi đường đi $i, a_1, \cdots, a_v, j$ trong G. Ta chứng minh quy nạp theo v. Thật vậy, với $v = 0$ ta có $(i, j) \in E(G)$

nên $F_{ij} \in \phi(J_G)$. Áp dụng cho ma trận $\phi(X)$ một quan hệ

$$\langle x_l, \alpha_l x_l + y_l \rangle \phi(\Delta_{i'j'}) \subset \langle \phi(\Delta_{i'a_l}), \phi(\Delta_{a_l j'}) \rangle,$$

trong đó $i' \neq j' \neq l$ là các chỉ số cột của ma trận X, ta được điều cần chứng minh. Thật vậy, với $v = 1$ ta cần chứng minh $y_{a_1}\phi(\Delta_{i'j'}) \in \phi(J_G)$, trong đó $(i', a_1), (a_1, j') \in E$. Vì $\langle x_{a_1}, \alpha_{a_1} x_{a_1} + y_{a_1} \rangle \phi(\Delta_{i'j'}) \subset \langle \phi(\Delta_{i'a_1}), \phi(\Delta_{a_1 j'}) \rangle$ nên $y_{a_1}\phi(\Delta_{i'j'}) \subset \langle \phi(\Delta_{i'a_1}), \phi(\Delta_{a_1 j'}) \rangle$. Do đó, $y_{a_1}\phi(\Delta_{i'j'}) \in \phi(J_G)$. Bây giờ, giả sử với $v = k - 1$ ta có

$$y_{a_{k-1}} \cdots y_{a_1} \phi(\Delta_{i'j'}) \in \langle y_{a_{k-1}} y_{a_{k-2}} \cdots y_{a_2} \phi(\Delta_{i'a_1}), \ldots, \phi(\Delta_{a_{k-2}a_{k-1}}), \phi(\Delta_{a_{k-1}j'}) \rangle,$$

trong đó $(i'a_1), \ldots, (a_{k-2}, a_{k-1}), (a_{k-1}, j') \in E$. Ta cần chứng minh

$$y_{a_k} y_{a_{k-1}} \cdots y_{a_1} \phi(\Delta_{i'j'}) \in \phi(J_G).$$

Vì

$$y_{a_k} \phi(\Delta_{a_{k-1}j'}) \in \langle \phi(\Delta_{a_{k-1}a_k}), \phi(\Delta_{a_k j'}) \rangle$$

nên

$$\begin{aligned} y_{a_k} y_{a_{k-1}} \cdots y_{a_1} \phi(\Delta_{i'j'}) \in \langle & y_{a_k} y_{a_{k-1}} \cdots y_{a_2} \phi(\Delta_{i'a_1}), \ldots, y_{a_k} \phi(\Delta_{a_{k-2}a_{k-1}}), \\ & \phi(\Delta_{a_{k-1}a_k}), \phi(\Delta_{a_k j'}) \rangle. \end{aligned}$$

Do đó $y_{a_k} y_{a_{k-1}} \cdots y_{a_1} \phi(\Delta_{i'j'}) \in \phi(J_G)$.

Tiếp theo, lấy bất kỳ hai phần tử $y_a F_{ij}$ và $y_b F_{hl}$ thuộc F, trong đó $a = a_1, \ldots, a_v, b = b_1, \ldots, b_r$ và i, a, j và h, b, l là các đường đi trong G. Ta sẽ chứng minh rằng đa thức dư của $S'(y_a F_{ij}, y_b F_{hl})$ trong phép chia cho F bằng 0. Xét ba trường hợp phân biệt sau.

Trường hợp 1. Nếu $(i, j) = (h, l)$ thì ta có thể giả sử $i = h$ và $j = l$. Khi đó, $S'(F_{ij}, F_{hl}) = 0$.

Trường hợp 2. Nếu $(i, j) \cap (h, l) = \emptyset$. Đặt $u = \mathrm{UCLN}(y_a, y_b)$. Ta có

$y_aF_{ij} = u(y_a/u)F_{ij}$ và $y_bF_{hl} = u(y_b/u)F_{hl}$. Vì $\mathrm{in}_\leq(y_a/u)F_{ij}$ và $\mathrm{in}_\leq(y_b/u)F_{hl}$ là nguyên tố cùng nhau nên theo Bổ đề 1.1.13, đa thức dư trong phép chia $S'((y_a/u)F_{ij}, (y_b/u)F_{hl})$ cho F bằng 0. Do đó, phần dư của $S'(y_aF_{ij}, y_bF_{hl})$ trong phép chia cho F bằng 0. Vậy $\{y_aF_{ij}, y_bF_{hl}\}$ thuộc cơ sở Gröbner của $\phi(J_G)$.

Trường hợp 3. Nếu $\#(i,j) \cap (h,l) = 1$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $i = 1, h = 2$ và $j = l = n$. Khi đó, y_aF_{ij}, y_bF_{hl} lần lượt tương ứng là y_aF_{1n}, y_bF_{2n}. Lấy $u = \mathrm{BCNN}(y_a, y_b)$. Ta có

$$S'(y_aF_{1n}, y_bF_{2n}) = ux_2F_{1n} - ux_1F_{2n} = uS'(F_{1n}, F_{2n}).$$

Áp dụng công thức (3.2.1) với $i = 1, j = 2$ và $l = n$ ta có

$$S'(F_{1n}, F_{2n}) = -\lambda_{2n}y_2F_{1n} + \lambda_{1n}y_1F_{2n} + (\lambda_{2n} - \lambda_{1n})y_nF_{12}. \tag{3.2.2}$$

Do đó,

$$S'(y_aF_{1n}, y_bF_{2n}) = -\lambda_{2n}y_2uF_{1n} + \lambda_{1n}y_1uF_{2n} + (\lambda_{2n} - \lambda_{1n})y_nuF_{12}. \tag{3.2.3}$$

Theo (3.2.2), đa thức dư của $S'(F_{1n}, F_{2n})$ trong phép chia cho F_{1n}, F_{2n} và F_{12} bằng 0. Rõ ràng, y_2uF_{1n} là bội đơn thức của y_aF_{1n} và y_1uF_{2n} là bội đơn thức của y_bF_{2n}. Xét y_nuF_{12}. Nếu u chia hết cho một đơn thức $y_d = y_{d_1}\cdots y_{d_t}$ sao cho $1, d_1, \cdots, d_t, 2$ là một đường đi trong G thì y_nuF_{12} là bội của y_dF_{12} của F. Mặt khác, nếu u không chia hết cho đơn thức $y_d = y_{d_1}\cdots y_{d_t}$ sao cho $1, d_1, \cdots, d_t, 2$ là một đường đi trong G thì

$$\{1, a_1, \ldots, a_v\} \cap \{2, b_1, \ldots, b_r\} = \emptyset \text{ và } u = y_ay_b.$$

Khi đó, $1, a, n, b, 2$ là một đường đi từ đỉnh 1 đến đỉnh 2 trong G. Do đó, $y_nuF_{12} = y_ny_ay_bF_{12}$ thực sự thuộc F.

Vậy tập F là cơ sở Gröbner của $\phi(J_G)$ đối với thứ tự từ $\leq$. Khi đó, iđêan khởi đầu phổ dụng $\mathbb{Z}^n$-phân bậc của J_G đối với thứ tự từ $\leq$

$$\mathrm{gin}_{\leq}(J_G) = \langle y_{a_1} \cdots y_{a_v} x_i x_j \mid i, a_1, \ldots, a_v, j \textit{ là một đường đi trong } G \rangle.$$

Vì J_G là iđêan $\mathbb{Z}^n$-thuần nhất và $\mathrm{gin}_{\leq}(J_G)$ là iđêan căn nên theo Mệnh đề 3.1.6, J_G là iđêan Cartwright-Sturmfels. □

Ví dụ 3.2.4. Với iđêan J_G đã biết ở Ví dụ 3.2.2, ta sử dụng Macaulay2 và tính được iđêan khởi đầu phổ dụng $\mathbb{Z}^5$-phân bậc của J_G đối với thứ tự từ điển $\leq_{\texttt{lex}}$

$$\begin{aligned}\mathrm{gin}_{\leq_{\texttt{lex}}}(J_G) = \langle & x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_3x_4, x_1x_5, x_2x_5, x_4x_5, y_1x_2x_3, \\ & y_1x_2x_4, y_1x_3x_5, y_4x_3x_5, y_5x_2x_4, y_4y_5x_2x_3\rangle.\end{aligned}$$

3.3 Iđêan đa chiều

Trong mục này, chúng tôi tìm hiểu lớp iđêan đa chiều. Đây là lớp iđêan đặc biệt cũng là iđêan Cartwright-Sturmfels xuất hiện trong lĩnh vực nghiên cứu về thị giác máy tính. Tài liệu tham khảo chính là bài báo [17].

Cho k là trường đóng đại số bất kỳ. Mỗi máy ảnh là một ma trận A_i cấp 3×4 có hạng 3. Mỗi ma trận xác định một ánh xạ hữu tỷ từ $\mathbb{P}^3$ vào $\mathbb{P}^2$. Phép chiếu này xác định tốt trên $\mathbb{P}^3 \setminus \{f_i\}$, trong đó f_i là phần tử sinh của hạt nhân của A_i, được gọi là *tiêu điểm* của máy ảnh thứ i. Không gian ảnh từ $n \geq 2$ máy ảnh là ảnh của ánh xạ hữu tỷ

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow & \underbrace{\mathbb{P}^2 \times \cdots \times \mathbb{P}^2}_{n} \\ \mathbf{x} \longmapsto & (A_1\mathbf{x}, A_2\mathbf{x}, \ldots, A_n\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Ta đặt $(\mathbb{P}^2)^n := \underbrace{\mathbb{P}^2 \times \cdots \times \mathbb{P}^2}_{n}$. Tập con $V_{\mathcal{A}} := \overline{\mathrm{Im}(\phi_{\mathcal{A}})}$ của $(\mathbb{P}^2)^n$ là đa tạp đại số, được gọi là *đa tạp đa chiều* của bộ n ma trận cỡ 3×4 có hạng 3, $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Định nghĩa 3.3.1. $J_{\mathcal{A}}$ là iđêan tương ứng với đa tạp $V_{\mathcal{A}}$, nghĩa là $J_{\mathcal{A}}$ là iđêan gồm tất cả các đa thức triệt tiêu trên đa tạp $V_{\mathcal{A}}$. Ta gọi $J_{\mathcal{A}}$ là *iđêan đa chiều (multiview).*

Iđêan $J_{\mathcal{A}}$ nằm trong vành đa thức $k[x, y, z]$ với $3n$ biến (x_i, y_i, z_i) biểu thị tọa độ liên kết trên $(\mathbb{P}^2)^n$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. Iđêan $J_{\mathcal{A}}$ là nguyên tố vì đa tạp $V_{\mathcal{A}}$ của nó là ảnh của một đa tạp bất khả quy.

Bây giờ, ta sẽ xác định một iđêan khởi đầu phổ dụng của iđêan đa chiều của họ n máy ảnh.

Ta nói rằng $\mathcal{A}$ là *phổ dụng* (generic) nếu mọi định thức con cấp 4 của ma trận $[A_1^T \quad A_2^T \quad \cdots \quad A_n^T]$ cấp $4 \times 3n$ đều khác không. Đối với tập con $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\} \subseteq [n]$ bất kỳ, xét ma trận cấp $3s \times (s + 4)$

$$\mathcal{A}_\sigma := \begin{bmatrix} A_{\sigma_1} & p_{\sigma_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ A_{\sigma_2} & \mathbf{0} & p_{\sigma_2} & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{\sigma_s} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & p_{\sigma_s} \end{bmatrix},$$

trong đó $p_i := [x_i \quad y_i \quad z_i]^T$ với $i \in [n]$. Giả sử rằng $s \geq 2$, mỗi định thức con cấp lớn nhất của $\mathcal{A}_\sigma$ là một đa thức thuần nhất bậc $s = |\sigma|$, tuyến tính trong p_i với $i \in \sigma$.

Bổ đề 3.3.2. *Các định thức con cấp lớn nhất của $\mathcal{A}_\sigma$ với $|\sigma| \geq 2$ đều thuộc vào iđêan nguyên tố $J_{\mathcal{A}}$.*

Chứng minh. Thật vậy, nếu $(p_1, \ldots, p_n) \in (k^3)^n$ đại diện cho một điểm trong $\mathrm{Im}(\phi_{\mathcal{A}})$ thì tồn tại một véctơ khác không $q \in k^4$ và $c_1, \ldots, c_n \in k$ khác không sao cho $A_i q = c_i p_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. Điều đó có nghĩa các cột của $\mathcal{A}_\sigma$ là phụ thuộc tuyến tính. Vì $\mathcal{A}_\sigma$ có số dòng ít nhất bằng số cột nên các định thức con cấp lớn nhất của $\mathcal{A}_\sigma$ phải triệt tiêu tại mọi điểm $p \in V_{\mathcal{A}}$. □

Giả sử $M_n \subset k[x, y, z]$ là iđêan sinh bởi $\binom{n}{2}$ đơn thức $x_i x_j$, $3\binom{n}{3}$ đơn thức $x_i y_j y_m$ và $\binom{n}{4}$ đơn thức $y_i y_j y_m y_l$, trong đó i, j, m, l là các chỉ số phân biệt trong $[n]$. Xét thứ tự từ điển $\prec$ trên $k[x, y, z]$ với thứ tự các biến

$$x_1 \succ \cdots \succ x_n \succ y_1 \succ \cdots \succ y_n \succ z_1 \succ \cdots \succ z_n.$$

Bổ đề 3.3.3. *Cho $\prec$ là thứ tự từ. Nếu $\mathcal{A}$ phổ dụng thì $M_n \subset \mathrm{in}_\prec(J_\mathcal{A})$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh x_ix_j, $x_iy_jy_m$ và $y_iy_jy_my_l$, trong đó i, j, m, l là các chỉ số phân biệt trong $[n]$ tương ứng là những đơn thức khởi đầu của các định thức con cấp lớn nhất của $\mathcal{A}_{\{ij\}}, \mathcal{A}_{\{ijm\}}$ và $\mathcal{A}_{\{ijml\}}$ đối với thứ tự từ $\prec$.

Xét ma trận $\mathcal{A}_{\{ij\}}$ vuông cấp 6, ta có

$$\det(\mathcal{A}_{\{ij\}}) = \det \begin{bmatrix} A_i^1 & x_i & 0 \\ A_i^2 & y_i & 0 \\ A_i^3 & z_i & 0 \\ A_j^1 & 0 & x_j \\ A_j^2 & 0 & y_j \\ A_j^3 & 0 & z_j \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_i^2 \\ A_i^3 \\ A_j^2 \\ A_j^3 \end{bmatrix} x_ix_j + \texttt{lex}.\text{ các từ nhỏ hơn}, \tag{3.3.5}$$

trong đó A_i^r là hàng thứ r của ma trận A_i. Vì $\mathcal{A}$ phổ dụng nên hệ số của x_ix_j là khác không. Do đó, $\mathrm{lm}_\prec(\det(\mathcal{A}_{\{ij\}})) = x_ix_j$.

Xét ma trận $\mathcal{A}_{\{ijm\}}$ cấp 9×7

$$\mathcal{A}_{\{ijm\}} = \begin{bmatrix} A_i & p_i & 0 & 0 \\ A_j & 0 & p_j & 0 \\ A_m & 0 & 0 & p_m \end{bmatrix}. \tag{3.3.6}$$

Ta có $x_iy_jy_m$ là đơn thức khởi đầu của định thức con cấp 7 được tạo thành bằng cách bỏ hàng thứ tư và hàng thứ bảy của $\mathcal{A}_{\{ijm\}}$. Vì $\mathcal{A}$ phổ dụng nên các véctơ $A_i^2, A_i^3, A_j^3, A_m^3$ là độc lập tuyến tính dẫn đến hệ số của $x_iy_jy_m$ là khác không.

Do đó, $\mathrm{lm}_{\prec}(\det(\mathcal{A}_{\{ijm\}})) = x_i y_j y_m$.

Xét ma trận $\mathcal{A}_{\{ijml\}}$ cấp 12×8

$$\mathcal{A}_{\{ijml\}} = \begin{bmatrix} A_i & p_i & 0 & 0 & 0 \\ A_j & 0 & p_j & 0 & 0 \\ A_m & 0 & 0 & p_m & 0 \\ A_l & 0 & 0 & 0 & p_l \end{bmatrix}. \tag{3.3.7}$$

Lập luận tương tự như trên. Ta có $y_i y_j y_m y_l$ là đơn thức khởi đầu đối với thứ tự từ $\prec$ của định thức con cấp 8 được tạo thành bằng cách bỏ hàng đầu tiên của các ma trận A_i, A_j, A_m và A_l. □

Kết quả sau khẳng định M_n là iđêan khởi đầu của $J_{\mathcal{A}}$ đối với thứ tự từ $\prec$ nếu $\mathcal{A}$ phổ dụng.

Bổ đề 3.3.4. [17, Lemma 2.5] Nếu $\mathcal{A}$ là phổ dụng thì $M_n = \mathrm{in}_{\prec}(J_{\mathcal{A}})$.

Định lý 3.3.5. *$J_{\mathcal{A}}$ là iđêan Cartwright-Sturmfels với iđêan khởi đầu phổ dụng đối với thứ tự từ $\prec$ là M_n.*

Chứng minh. Thật vậy, xét bộ n ma trận cấp 3×4 có hạng 3, $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ với các hạt nhân $k\{f_i\}$ đôi một phân biệt. Nếu $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ là phổ dụng trong $G = (\mathrm{GL}_3(k))^n$ thì $g \circ \mathcal{A}$ là phổ dụng, nghĩa là mọi định thức con cấp 4 của ma trận cấp $4 \times 3n$

$$\begin{bmatrix} (g_1 A_1)^T & (g_2 A_2)^T & \cdots & (g_n A_n)^T \end{bmatrix}$$

khác không. Theo Bổ đề 3.3.4, M_n là iđêan khởi đầu của $J_{g \circ \mathcal{A}}$. Do đó, M_n là iđêan khởi đầu phổ dụng của $J_{\mathcal{A}}$. Vì M_n là iđêan căn nên $J_{\mathcal{A}}$ là iđêan Cartwright-Sturmfels. □

Ví dụ 3.3.6. Xét $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ phổ dụng, trong đó

$$\mathrm{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{A}_2 = \begin{bmatrix} -0,22 & 0,95 & -0,18 & 1 \\ 0,96 & 0,24 & 0,08 & 1,44 \\ -0,12 & 0,15 & 0,97 & 0,97 \end{bmatrix} \quad \mathrm{A}_3 = \begin{bmatrix} 0,17 & 0,94 & -0,28 & 1,41 \\ -0,95 & 0,22 & 0,18 & -0,13 \\ -0,24 & -0,23 & -0,94 & -1,16 \end{bmatrix}.$$

Ta có $J_{\mathcal{A}}$ được sinh bởi các định thức con cấp cao nhất của $\begin{bmatrix} A_1 & p_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_2 & \mathbf{0} & p_2 & \mathbf{0} \\ A_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & p_3 \end{bmatrix}$,

$\det \begin{bmatrix} A_1 & p_1 & \mathbf{0} \\ A_2 & \mathbf{0} & p_2 \end{bmatrix}$, $\det \begin{bmatrix} A_1 & p_1 & \mathbf{0} \\ A_3 & \mathbf{0} & p_3 \end{bmatrix}$ và $\det \begin{bmatrix} A_2 & p_2 & \mathbf{0} \\ A_3 & \mathbf{0} & p_3 \end{bmatrix}$.

Sử dụng Macaulay2, ta tính được iđêan khởi đầu phổ dụng $\mathbb{Z}^3$-phân bậc

$$\mathrm{gin}_{\prec}(J_{\mathcal{A}}) = \langle x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1y_2y_3, x_2y_1y_3, x_3y_1y_2 \rangle.$$

KẾT LUẬN CHUNG

Trong luận văn này, chúng tôi đã trình bày một số vấn đề sau.

1. Giới thiệu một số kiến thức về cơ sở Gröbner, môđun đối đồng điều địa phương và một số định lý quan trọng như là Định lý Macaulay, Định lý triệt tiêu của Grothendiek và Định lý đối ngẫu địa phương.

2. Giới thiệu khái niệm và một số tính chất của vành đầy đủ đối đồng điều. Trình bày định lý về mối liên hệ về hàm Hilbert của môđun đối đồng điều địa phương có giá là iđêan cực đại thuần nhất của S/I và S/J khi I là iđêan thuần nhất trong vành đa thức n biến có iđêan khởi đầu J không chứa bình phương đối với thứ tự từ nào đó. Từ đó, chứng minh rằng độ sâu, các số Betti góc và chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford của vành S/I và S/J là như nhau.

3. Trình bày khái niệm và một số tính chất của một lớp các iđêan thuần nhất có iđêan khởi đầu không chứa bình phương, gọi là các iđêan Cartwright-Sturmfels. Mô tả iđêan khởi đầu phổ dụng phân bậc của lớp iđêan cạnh nhị thức và lớp iđêan đa chiều (multiview) và chứng minh hai lớp iđêan này là các iđêan Cartwright-Sturmfels.

Tài liệu tham khảo

[1] Bayer D., Stillman M., 1987, A criterion for detecting m-regularity, *Invent. Math.* **87**, pp. 1-12.

[2] Bayer D., Charalambous H., Popescu S., 1999, Extremal Betti numbers and applications to monomial ideals, *J. Algebra* **221**, pp. 497-512.

[3] Conca A., Varbaro M., 2020, Square-free Gröbner degenerations, *Invent. Math.* **221**, pp. 713-730.

[4] Lê Tuấn Hoa, 2003, *Đại số Máy tính Cơ sở Gröbner*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

[5] Herzog J., Hibi T., 2011, *Monomial Ideals*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York.

[6] Schrijver A., 1998, *Theory of linear and integer programming*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics.

[7] Rotman J., 2009, *An introduction to homological algebra*, Springer, New York.

[8] Brodmann M., Sharp R. Y., 1998, *Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications*, Cambridge University Press.

[9] Dao H., De Stefani A., Ma L., 2021, Cohomologically full rings, *IMRN* (17), pp. 13508-13545.

[10] Matsumura H., 1986, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge.

[11] Eisenbud D., 1995, *Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer-Verlag.

[12] Elias J., Giral J. M., Miró-Roig R. M., Zarzuela S., 1998, *Six Lectures on Commutative Algebra*, Progress in Mathematics **166**.

[13] Chardin M., 2007, *Some results and questions on Castelnuovo-Mumford regularity, Syzygies and Hilbert functions*, Lect. Note. Pure Appl. Math. **254**, pp. 1-40.

[14] Conca A., De Negri E., Gorla E., 2020, Universal Gröbner bases and Cartwright-Sturmfels ideals, *IMRN* (7), pp. 1979-1991.

[15] Conca A., De Negri E., Gorla E., 2022, Radical generic initial ideals, *Vietnam J. Math.* **50**(3), pp. 807-827.

[16] Conca A., De Negri E., Gorla E., 2018, Cartwright-Sturmfels ideals associated to graphs and linear spaces, *J. Comb. Algebra* **2**, pp. 231-257.

[17] Chris A., Bernd S., Rekha T., 2013, A Hilbert Scheme in Computer Vision, *Canad. J. Math.* **65**(5), pp. 961-988.