BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

NGUYỄN THỊ DUNG

BÀI TOÁN STURM-LIOUVILLE NGƯỢC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN ỨNG DỤNG

HÀ NỘI - 2023

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

NGUYỄN THỊ DUNG

BÀI TOÁN STURM-LIOUVILLE NGƯỢC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 8460112

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: GS.TSKH. ĐINH NHO HÀO

HÀ NỘI - 2023

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận văn này là kết quả của quá trình tự tìm hiểu, học hỏi và thấu hiểu kiến thức cá nhân, và được thầy Dinh Nho Hào hỗ trợ và hướng dẫn một cách tận tâm. Tất cả thông tin và kết quả nghiên cứu, cũng như bất kì ý tưởng nào của các tác giả khác, đều đã được trích dẫn cụ thể và rõ ràng. Tôi xin chịu trách nhiệm nếu có sự không trung thực trong thông tin sử dụng trong luận văn này.

Hà Nội, tháng 10 năm 2023

Học viên

Dung

Nguyễn Thị Dung

LỜI CẢM ƠN

Lòng biết ơn sâu sắc xin gửi tới giáo viên hướng dẫn GS.TSKH. Đinh Nho Hào đã hết lòng tận tình dìu dắt, hướng dẫn, động viên và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình thực hiện đề tài.

Qua đây, tôi cũng xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ của các thầy giáo, cô giáo trong Viện Toán học, các anh chị, bạn bè, những người đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Viện.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Viện Toán học và cơ sở đào tạo là Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã tạo điều kiện về môi trường học tập thuận lợi cho tôi để tôi thực hiện Luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn và xin được sẻ chia những thành quả đạt được với bố mẹ và em trai của tôi, những người đã tạo nguồn động viên lớn cho tôi.

Dung

Nguyễn Thị Dung

MỤC LỤC

KÝ HIỆU

Ký hiệu	**Tên gọi**
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực
$\mathbb{C}$	Tập hợp các số phức
$\mathbb{Z}_+$	Tập hợp các số nguyên không âm
$\|\cdot\|$	Chuẩn của một vectơ hoặc ma trận
$C([c,d])$	Không gian các hàm liên tục trên $[c,d]$
$C^k([c,d])$	Không gian các hàm có đạo hàm cấp k liên tục trên $[c,d]$
$C_c(\Omega)$	Không gian các hàm liên tục và có giá compact trong Ω
$C_c^k(\Omega)$	Không gian các hàm khả vi liên tục k lần
	và có giá compact trong Ω
$C_c^\infty(\Omega)$	Không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong Ω
D_t^α	Đạo hàm Riemann-Liouville
$\mathcal{D}(A)$	Miền của toán tử tuyến tính A
X'	Không gian đối ngẫu của không gian Banach X
A'	Toán tử tuyến tính đối ngẫu của toán tử tuyến tính A

MỞ ĐẦU

Lý thuyết toán tử là một lĩnh vực quan trọng của Toán học. Ngày nay, nhiều ngành Khoa học như Vật lý, Khoa học dữ liệu,... đều liên quan đến lý thuyết toán tử.

Trong số đó, bài toán Sturm-Liouville ngược là bài toán cổ điển của lý thuyết toán tử. Bài toán Sturm-Liouville ngược được nhà vật lý Viktor Ambarzumian (Über Einige Fragen der Eigenwerttheorie. Z. Phys., 53 (1929), 690-695) đề xuất nghiên cứu vào năm 1928. Đó là bài toán xác định hàm thế vị qua phổ của toán tử. Bài toán này sau đó được Göran Borg (Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte. Acta Math. 78 (1946), 1–96) nghiên cứu và kể từ đó tới nay có hàng ngàn bài báo và sách chuyên khảo viết về bài toán này.

Bởi tầm quan trọng của toán tử Sturm-Liouville và được sự gợi ý, hướng dẫn của GS. TSKH. Đinh Nho Hào nên tôi đã thực hiện đề tài **"Bài toán Sturm-Liouville"** để hoàn thành luận văn tốt nghiệp cao học của mình. Luận văn bao gồm ba chương.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày những kiến thức cơ bản về không gian L^2 và các bất đẳng thức, định nghĩa thặng dư, nguyên lý cực đại, phương trình tích phân Volterra.

Chương 2: Bài toán Sturm-Liouville ngược. Chương này tập trung vào việc giới thiệu công thức tiệm cận của các giá trị riêng trong bài toán Sturm-Liouville, phân tích tính chất của các hàm riêng tương ứng, xem xét toán tử biến đổi, và nghiên cứu tính duy nhất nghiệm của bài toán ngược.

Chương 3: Phương pháp Gelfand-Levitan. Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kết quả bổ trợ và khôi phục các toán tử vi phân từ dữ liệu phổ.

Chương 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi tổng hợp một số kiến thức hiện có về không gian Lebesgue L^2, định nghĩa thặng dư, nguyên lý cực đại, phương trình tích phân Volterra.

1.1. Không gian L^2 và các bất đẳng thức

Định nghĩa 1.1 (Không gian L^2[1])**.** Đối với tập Ω mở ra trong $\mathbb{R}^n$, ta định nghĩa không gian $L^2(\Omega)$ là không gian các hàm g đo được trên Ω thỏa mãn điều kiện sau

$$\|g\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Ta định nghĩa không gian $L^\infty(\Omega)$ là không gian các hàm g đo được trên Ω thỏa mãn điều kiện

$$\|g\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup} |g| < \infty,$$

trong đó ess sup $|g| := \inf\{M > 0 : \mu(t \in \Omega : |g(t)| > M) = 0\}$ với μ là độ đo Lebesgue. Trong không gian L^2, hai hàm được coi là đồng nhất khi chúng bằng nhau hầu khắp nơi.

Định nghĩa 1.2 (Không gian L^2_{loc} [1])**.** Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Chúng ta định nghĩa không gian $L^2_{loc}(\Omega)$ là không gian của các hàm g đo được trên Ω sao cho đối với mọi tập mở H nằm trong tập mở Ω, thì $g \in L^2(\mathrm{H})$.

Định lý 1.1 (Định lý hội tụ đơn điệu [1])**.** *Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ là một dãy hàm trong không gian $L^1(\Omega)$ thoả mãn*

(i) $g_h(t) \le g_{h+1}(t)$ *h.k.n trong Ω với mọi $h \in \mathbb{N}$.*

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_n(t)dt < \infty$.

Khi đó $g_n(t)$ hội tụ h.k.n trong Ω khi n dần tới ∞. Ta đặt

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = g(t),$$

h.k.n trong Ω thì hàm g thuộc vào $L^1(\Omega)$ và khi đó

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n(t)dt = \int_\Omega g(t)dt.$$

Định lý 1.2 (Định lý hội tụ chặn [1])**.** *Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ là một dãy hàm trong không gian $L^1(\Omega)$, thoả mãn*

(i) Hàm $g_n(t)$ tiến tới hàm $g(t)$ h.k.n trong Ω khi n dần tới ∞.

(ii) Tồn tại một hàm f thuộc vào $L^1(\Omega)$ sao cho $|g_n(t)|$ nhỏ hơn hoặc bằng $f(t)$ h.k.n trong Ω với mọi n thuộc $\mathbb{N}$.

Khi đó, hàm g thuộc $L^1(\Omega)$ và giới hạn của $\int_\Omega g_n(t)dt$ khi n dần tới ∞ và $\int_\Omega g(t)dt$ bằng nhau.

Bổ đề 1.1 (Bổ đề Fatou [1])**.** *Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ là một dãy hàm trong không gian $L^1(\Omega)$, thoả mãn*

(i) Hàm $g_n(t)$ lớn hơn hoặc bằng 0 h.k.n trong Ω với mọi n thuộc $\mathbb{N}$.

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_\Omega g_n(t)dt < \infty$.

Ta đặt

$$\liminf_{n\to\infty} g_n(t) = g(t),$$

với hầu khắp t trong Ω.
Khi đó, hàm g thuộc $L^1(\Omega)$ và

$$\int_\Omega g(t)dt \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega g_n(t)dt.$$

Định lý 1.3 (Định lý Fubini [1])**.** *Với Ω_1 là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và Ω_2 là tập mở trong $\mathbb{R}^m$ và giả sử G thuộc không gian $L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$, thì đối với hầu hết các t trong Ω_1,*

$$G(t,z)\in L_z^1(\Omega_2) \text{ và } \int_{\Omega_2} G(t,z)dz \in L_t^1(\Omega_1).$$

Tương tự như vậy, với hầu hết các z trong Ω_2,

$$G(t,z)\in L_t^1(\Omega_1) \text{ và } \int_{\Omega_1} G(t,z)dz \in L_z^1(\Omega_2).$$

Ta cũng có

$$\int_{\Omega_1} dt\int_{\Omega_2} G(t,z)dz = \int_{\Omega_2} dz\int_{\Omega_1} G(t,z)dt = \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} G(t,z)dtdz.$$

Định lý 1.4 (Định lý Tonelli [1]). *Giả sử Ω_1 là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và Ω_2 là tập mở trong $\mathbb{R}^m$ và giả sử $G : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ là một hàm đo được thoả mãn các điều kiện sau*

(i) $\int_{\Omega_2} |G(t,z)|dz < \infty$ *với hầu khắp t trong Ω_1.*

(ii) $\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |G(t,z)|dz \right) dt < \infty.$

Khi đó G thuộc $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Định lý 1.5 (Bất đẳng thức Hölder [2]). *Giả sử g thuộc không gian $L^2(\Omega)$ và f cũng thuộc không gian $L^2(\Omega)$. Khi đó*

$$\int_{\Omega} |g(t)f(t)|dt \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Định nghĩa 1.3 (Định nghĩa tích chập [1]). Với g và f là các hàm đo được từ $\mathbb{R}^d$ vào $\mathbb{R}$, chúng ta định nghĩa tích chập của g và f như sau:

$$(g * f)(t) := \int_{\mathbb{R}^d} g(t-z)f(z)dz.$$

Định lý 1.6 (Bất đẳng thức Young [1]). *Giả sử g thuộc $L^2(\mathbb{R}^d)$ và f thuộc $L^q(\mathbb{R}^d)$ với $1 \leq q \leq \infty$. Khi đó ta có $g * f$ thuộc $L^r(\mathbb{R}^d)$ và $\|g * f\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}$ nhỏ hơn hoặc bằng $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$, trong đó $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$.*

Mệnh đề 1.1 (xem Mệnh đề IV.19 trong [1]). *Giả sử hàm g thuộc $C_c(\mathbb{R}^d)$ (trong đó $C_c(\mathbb{R}^d)$ là không gian các hàm liên tục và có giá compact trong $\mathbb{R}^d$) và hàm f thuộc $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Khi đó $(g * f)(t)$ luôn được xác định với mọi t thuộc vào $\mathbb{R}^d$ và $g * f$ thuộc trong $C(\mathbb{R}^d)$.*

Mệnh đề 1.2 (xem Mệnh đề IV.20 trong [1]). *Giả sử g thuộc $C^k_c(\mathbb{R}^d)$ với k thuộc $\mathbb{N}$ và f thuộc $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Khi đó $(g * f)(t)$ luôn được xác định với mọi t thuộc $\mathbb{R}^d$ và $g * f$ thuộc $C(\mathbb{R}^d)$. Hơn nữa*

$$D^\alpha (g * f) = (D^\alpha g) * f,$$

với mọi α thuộc $\mathbb{Z}^d_+$ sao cho $|\alpha|$ nhỏ hơn hoặc bằng k.
Hơn nữa, nếu g thuộc $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ và f thuộc $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ thì ta có $g * f$ cũng thuộc trong $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Hệ quả 1.1 (xem Hệ quả IV.23 trong [1]). *Giả sử Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^d$ thì $C^\infty_c(\Omega)$ là trù mật trong $L^2(\Omega)$.*

1.2. Định nghĩa thặng dư

Trong giải tích phức, thặng dư là một số phức tỷ lệ với tích phân đường của hàm phân hình dọc theo một đường cong kín bao quanh một điểm kì dị của nó.

Định nghĩa 1.4 (Định nghĩa thặng dư (giải tích phức))**.** Thặng dư của hàm phân hình g tại một điểm kì dị b, thường được kí hiệu $Res(g, b)$ hoặc $Res_b(g)$, là

1. Giá trị $\frac{1}{2\pi i}\int_C g(y)dy$, với C là một đường cong kín định hướng dương bao quanh một điểm kì dị cô lập b.

2. Cũng là giá trị duy nhất R sao cho $g(y) - \frac{R}{y-b}$ có một nguyên hàm giải tích trong một đĩa bị thủng $0 < |y - b| < \delta$.

3. Cũng là giá trị hệ số b_{-1} của khai triển Laurent của hàm g tại điểm b.

Ví dụ: Tại một điểm cực điểm đơn c, thặng dư của hàm g thỏa mãn

$$Res(g, c) = \lim_{y \to c}(y - c)g(y).$$

1.3. Nguyên lý cực đại

Nguyên lý 1.7 (Nguyên lý cực đại)**.** *Cho $g : D \to \mathbb{R}$ là hàm điều hòa, trong D là miền (mở, liên thông) bị chặn trong $\mathbb{R}_n$ được bao quanh bởi biên C. Giả sử thêm g liên tục đến tận biên C. Khi đó, hàm g hoặc là hàm hằng hoặc chỉ đạt giá trị lớn nhất trên biên C.*

1.4. Phương trình tích phân Volterra

Định lý 1.8. *Cho H là một ánh xạ liên tục từ $[0, c] \times [0, c]$ vào $\mathbb{R}$. Đặt E là không gian các ánh xạ liên tục từ $[0, c]$ vào $\mathbb{R}^m$ với chuẩn*

$$||t|| = \sup_{0 \le x \le c}(|t(x)|)$$

với mọi t trong E. Cho b là một phần tử trong E và μ trong $\mathbb{R}$. Khi đó phương trình tích phân Volterra tuyến tính sau đây có một nghiệm duy nhất trong E

$$t(x) = b(x) + \mu \int_0^x H(x, s)t(s)ds.$$

Chương 2

BÀI TOÁN STURM-LIOUVILLE NGƯỢC

2.1. Công thức tiệm cận của giá trị riêng của bài toán Sturm-Liouville

Xét bài toán giá trị biên $D= D(q(t), k, K)$:

$$d_z = -z^{''} + q(t)z = mz, \quad 0 < t < \pi, \tag{2.1.1}$$

$$U(z) = z^{'}(0) - kz(0) = 0, \quad V(z) = z^{'}(\pi) + Kz(\pi) = 0 \tag{2.1.2}$$

Ở đây, m là tham số phổ; k và K là số thực; $q(t) \in L_2(0, \pi)$, q được gọi là thế vị. Toán tử d được gọi là *toán tử Sturm-Liouville.*

Chúng ta quan tâm đến nghiệm không tầm thường của bài toán giá trị biên (2.1.1)-(2.1.2).

Định nghĩa 2.1. [3] Các giá trị của tham số m mà D có các nghiệm khác 0 được gọi là các *giá trị riêng*, và nghiệm không tầm thường tương ứng được gọi là *hàm riêng.* Tập tất cả các giá trị riêng được gọi là *phổ* của D.

Trong phần này, chúng ta nghiên cứu các tính chất phổ đơn giản nhất của D, cũng như dáng điệu tiệm cận của các giá trị riêng và hàm riêng. Lưu ý rằng chúng ta cũng có thể nghiên cứu cho các loại điều kiện biên khác, như

(i) $U(z)= 0,\ z(\pi) = 0;$

(ii) $z(0)= 0,\ V(z) = 0;$

(iii) $z(0) = z(\pi) = 0.$

Gọi $S(t, m)$,$C(t, m)$, $u(t, m)$, $v(t, m)$ là các nghiệm của (2.1.1) với điều kiện ban đầu tương ứng là

$$S(0, m) = 1,\ S^{'}(0, m) = 0,\ C(0, m) = 0,\ C^{'}(0, m) = 1,$$
$$u(0, m) = 1,\ u^{'}(0, m) = k,\ v(\pi, m) = 1\ ,\ v^{'}(\pi, m) = -K.$$

Với mỗi t cố định, $u(t,m)$, $v(t,m)$, $S(t,m)$,$C(t,m)$ là các hàm nguyên theo m. Rõ ràng rằng,

$$U(u) = u^{'}(0,m) - ku(0,m) = 0, V(v) = v^{'}(\pi,m) + Kv(\pi,m) = 0. \tag{2.1.3}$$

Kí hiệu

$$\Delta(m) = \langle v(t,m), u(t,m)\rangle, \tag{2.1.4}$$

trong đó $\langle z(t), y(t)\rangle = z(t)y^{'}(t) - z^{'}(t)y(t)$ là Wronskian của z và y.

Theo công thức Liouville $\langle v(t,m), u(t,m)\rangle$ không phụ thuộc vào t. Hàm $\Delta(m)$ được gọi là *hàm đặc trưng* của D. Thay $t = 0$ và $t = \pi$ vào (2.1.4), ta được

$$\Delta(m) = V(u) = -U(v). \tag{2.1.5}$$

Do $\Delta(m)$ là hàm nguyên theo m, nên nó có nhiều nhất là tập đếm được các không điểm $\{m_n\}$: $\quad \Delta(m_n) = 0$.

Định lý 2.1. *[3] Các không điểm $\{m_n\}$ của hàm đặc trưng trùng các giá trị riêng của bài toán giá trị biên D. Các hàm $u(t,m_n)$ và $v(t,m_n)$ là hàm riêng và tồn tại dãy $\{\beta_n\}$ sao cho*

$$v(t,m_n) = \beta_n u(t,m_n), \quad \beta_n \neq 0. \tag{2.1.6}$$

Chứng minh. 1) Giả sử m_0 là không điểm của $\Delta(m)$. Khi đó, theo (2.1.3)-(2.1.5), ta có $v(t,m_0) = \beta_0 u(t,m_0)$ và hàm $v(t,m_0)$, $u(t,m_0)$ thỏa mãn điều kiện biên (2.1.2). Do đó, m_0 là một giá trị riêng, và $v(t,m_0)$, $u(t,m_0)$ là các hàm riêng tương ứng với m_0.

2) Cho m_0 là một giá trị riêng của D, và z_0 là hàm riêng tương ứng. Khi đó, ta có

$$U(z_0) = z_0^{'}(0) - kz_0(0) = 0,$$
$$V(z_0) = z_0^{'}(0) + Kz_0(0) = 0.$$

Nên $U(z_0) = V(z_0) = 0$.

Rõ ràng $z_0(0) \neq 0$. Vì nếu $z_0(0) = 0$ thì $z_0^{'}(0) = 0$, theo định lý duy nhất nghiệm cho (2.1.1) , $z_0(t) \equiv 0$. Không mất tính tổng quát, ta đặt: $z_0(0) = 1$. Khi đó $z_0^{'}(0) = k$ và do đó, $z_0(t) \equiv u(t,m_0)$. Vậy nên, từ (2.1.5) ta có $\Delta(m_0) = V(u(t,m_0)) = V(z_0(t))$. Chúng ta chứng minh được rằng đối với mỗi giá trị riêng chỉ tồn tại một hàm riêng theo một nhân tố hằng số. ■

Trong toàn bộ chương này, chúng ta sử dụng kí hiệu

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} u^2(t,m_n)dt. \tag{2.1.7}$$

Các số $\{\alpha_n\}$ được gọi là số trọng số và các số $\{m_n, \alpha_n\}$ được gọi là *"dữ liệu phổ của D"*.

Bổ đề 2.1. *Ta có*

$$\beta_n \alpha_n = -\dot{\Delta}(m_n), \tag{2.1.8}$$

trong đó các số β_n được xác định bởi (2.1.6) và $\dot{\Delta}(m) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\Delta(m)$.

Chứng minh. Vì $-v^{"}(t,m)+q(t)v(t,m) = mv(t,m)$ và $-u^{"}(t,m_n)+q(t)u(t,m_n) = m_n u(t,m_n)$

Hơn nữa $\langle v(t,m), u(t,m_n)\rangle = v(t,m)u^{'}(t,m_n) - v^{'}(t,m)u(t,m_n)$ nên chúng ta có

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle v(t,m), u(t,m_n)\rangle = v(t,m)u^{''}(t,m_n) - v^{''}(t,m)u(t,m_n)$$

$$= v(t,m)\cdot[q(t)u(t,m_n) - m_n u(t,m_n)] - [q(t)v(t,m) - mv(t,m)]\cdot u(t,m_n)$$

$$= (m-m_n)\cdot v(t,m)\cdot u(t,m_n).$$

Từ (2.1.5), ta có

$$(m-m_n)\int_0^\pi v(t,m)u(t,m_n)dt = \langle v(t,m), u(t,m_n)\rangle \,|_0^\pi$$

$$= u^{'}(\pi,m_n) + Ku(\pi,m_n) + v^{'}(0,m) - kv(0,m)$$

$$= -\Delta(m).$$

Khi m dần tới m_n, ta nhận được rằng

$$\int_0^\pi v(t,m_n)u(t,m_n)dt = -\dot{\Delta}(m_n).$$

Sử dụng (2.1.6) và (2.1.7), ta được (2.1.8). ■

Định lý 2.2. *[3] Các giá trị riêng $\{m_n\}$ và các hàm riêng $u(t,m_n)$, $v(t,m_n)$ là thực. Tất cả các không điểm của $\Delta(m)$ đều là nghiệm đơn, tức là $\dot{\Delta}(m_n) \neq 0$. Các hàm riêng tương ứng với các giá trị riêng khác nhau là trực giao trong $L_2(0,\pi)$.*

Chứng minh. Cho m_n và m_h ($m_n \neq m_h$) là các giá trị riêng tương ứng với các hàm riêng $z_n(t)$ và $z_h(t)$.

Lấy tích phân từng phần ta nhận được

$$\int_0^\pi dz_n(t)z_h(t)dt = \int_0^\pi z_n(t)dz_h(x)dt.$$

Do vậy $m_n\int_0^\pi z_n(t)z_h(t)dt = m_h\int_0^\pi z_n(t)z_h(t)dt$, hay là $\int_0^\pi z_n(t)z_h(t)dt = 0$.

Hơn nữa, giả sử $m^0 = \varphi + i\psi, \psi \neq 0$ là một giá trị riêng không thực ứng với hàm riêng $z^0(t) \neq 0$. Vì k và K là thực nên ta có: $\overline{m^0} = \varphi - i\psi$ cũng là giá trị riêng ứng với hàm riêng $\overline{z^0(t)}$. Vì $m^0 \neq \overline{m^0}$, nên ta có

$||z^0||^2_{L_2} = \int_0^\pi z^0(t)\overline{z^0(t)}dt = 0.$

Mà điều này không thể xảy ra.

Vậy tất cả các giá trị riêng $\{m_n\}$ của D là thực, và do đó, các hàm riêng $u(t, m_n)$ và $v(t, m_n)$ cũng là thực. Vì $\alpha_n \neq 0, \beta_n \neq 0$, nên từ (2.1.8) ta nhận được $\dot{\Delta}(m_n) \neq 0$.

■

Bổ đề 2.2. *Khi $|\tau| \to \infty$, ta có các công thức tiệm cận sau đây*

$$\left.\begin{aligned} u(t,m) &= \cos\tau t + O\left(\tfrac{1}{|\tau|}\exp(|\rho|t)\right) = O\left(\exp(|\rho|t)\right), \\ u'(t,m) &= -\tau\sin\tau t + O\left(\exp(|\rho|t)\right) = O\left(|\tau|\exp(|\rho|t)\right), \end{aligned}\right\} \tag{2.1.9}$$

$$\left.\begin{aligned} v(t,m) &= \cos\tau(\pi-t) + O\left(\tfrac{1}{|\tau|}\exp(|\rho|(\pi-t))\right) = O\left(\exp(|\rho|(\pi-t))\right), \\ v'(t,m) &= \tau\sin\tau(\pi-t) + O\left(\exp(|\rho|(\pi-t))\right) = O\left(|\tau|\exp(|\rho|(\pi-t))\right), \end{aligned}\right\} \tag{2.1.10}$$

đều đối với $t \in [0, \pi]$. Ở đây và phần tiếp theo, $m = \tau^2, \rho = Im\tau$, còn O là kí hiệu Landau.

(*Nhắc lại về ký hiệu O:* Giả sử $g(t)$ và $f(t)$ là hai hàm số định nghĩa trên tập số thực. Ta viết như sau

$g(t) = O(f(t))$ khi $t \to \infty$ khi và chỉ khi tồn tại một hằng số M khác 0 sao cho với mọi giá trị đủ lớn của t, $g(t)$ nhỏ hơn M lần $f(t)$ về giá trị tuyệt đối. Có nghĩa là, $g(t) = O(f(t))$ khi và chỉ khi tồn tại số thực dương M và số thực t_0 sao cho $|g(t)| \leq M|f(t)|$ với mọi $t > t_0$.

Trong nhiều trường hợp, giả thiết t tiến đến vô cùng là ngầm hiểu, và ta chỉ cần viết $g(t) = O(f(t))$. Ký hiệu này cũng có thể dùng để mô tả giá trị của g xung quanh giá trị b (thông thường, $b = 0$), ta nói $g(t) = O(f(t))$ khi $t \to b$ khi và chỉ khi tồn tại các số thực dương δ và M sao cho $|g(t)| \leq M|f(t)|$ khi $|t - b| < \delta$.

Nếu $f(t)$ là khác không khi t đủ gần b, cả hai định nghĩa đều có thể được viết bằng giới hạn trên:

$g(t) = O(f(t))$ khi $t \to b$

khi và chỉ khi

$$\limsup_{t\to b} |\frac{g(t)}{f(t)}| < \infty.)$$

Chứng minh. Ta chứng minh rằng

$$u(t,m) = \cos\tau t + k\frac{\sin\tau t}{\tau} + \int_0^t \frac{\sin\tau(t-x)}{\tau}q(x)u(x,m)dx. \tag{2.1.11}$$

Thật vậy, phương trình tích phân Volterra

$$z(t,m) = \cos\tau t + k\tfrac{\sin\tau t}{\tau} + \int_0^t \tfrac{\sin\tau(t-x)}{\tau}q(x)z(x,m)dx$$

có một nghiệm duy nhất. Mặt khác, nếu một hàm $z(t,m)$ thỏa mãn phương trình này thì bằng cách lấy đạo hàm chúng ta sẽ có

$z^{''}(t,m) + \tau^2 z(t,m) = q(t)z(t,m), \quad z(0,m) = 1,\ z^{'}(0,m) = k$, tức là $z(t,m) \equiv u(t,m)$ và (2.1.11) là đúng.

Lấy đạo hàm (2.1.11), ta được

$$u^{'}(t,m) = -\tau\sin\tau t + k\cos\tau t + \int_0^t \cos\tau(t-x)q(x)u(x,m)dx. \tag{2.1.12}$$

Kí hiệu

$$\mu(m) = \max_{0\le t\le\pi}(|u(t,m)|\exp(-|\rho|t)).$$

Vì $|\sin\tau t| \le \exp(|\rho|t)$ và $|\cos\tau t| \le \exp(|\rho|t)$, từ (2.1.11) ta có với $|\tau| \ge 1$, $t \in [0,\pi]$,

$|u(t,m)|\exp(-|\rho|t) \le 1 + \frac{1}{|\tau|}(k + \mu(m)\int_0^t |q(x)|dx) \le C_1 + \frac{C_2}{|\tau|}\mu(m)$,

và do đó

$$\mu(m) \le C_1 + \frac{C_2}{|\tau|}\mu(m).$$

Với $|\tau|$ đủ lớn, bất đẳng thức này chứng tỏ $\mu(m) = O(1)$. Vậy $u(t,m) = O(\exp(|\rho|t))$. Thay đánh giá này vào vế phải của (2.1.11) và (2.1.12), chúng ta có (2.1.9). Tương tự, ta có (2.1.10). Chú ý rằng (2.1.10) cũng có thể suy ra từ (2.1.9). Thật vậy, vì

$$-v''(t,m) + q(t)v(t,m) = mv(t,m), \quad v(\pi,m) = 1, \quad v'(\pi,m) = -K,$$

nên hàm $\tilde{u}(t,m) := v(\pi - t, m)$ thỏa mãn hệ

$$-\tilde{u}''(t,m) + q(\pi - t)\tilde{u}(t,m) = m\tilde{u}(t,m), \quad \tilde{u}(0,m) = 1, \quad \tilde{u}'(0,m) = K.$$

Vì vậy, các công thức tiệm cận (2.1.9) cũng đúng cho hàm $\tilde{u}(t,m)$. Từ đó, ta có (2.1.10). ■

Kết quả sau đây nói về sự tồn tại và tiệm cận của các giá trị riêng và hàm riêng của D.

Định lý 2.3. *[3] Tập giá trị riêng $\{m_n\}_{n\geq 0}$ của bài toán giá trị biên D đếm được. Với $n \geq 0$,*

$$\tau_n = \sqrt{m_n} = n + \frac{\kappa}{\pi n} + \frac{\omega_n}{n}, \quad \{\omega_n\} \in d_2, \tag{2.1.13}$$

$$u\left(t, m_n\right) = \cos nt + \frac{\xi_n(t)}{n}, \quad |\xi_n(t)| \leq C, \tag{2.1.14}$$

trong đó

$$\kappa = k + K + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)dx.$$

Bắt đầu từ đây $\{\omega_n\}$ kí hiệu các chuỗi d_2, và còn C kí hiệu các hằng số dương không phụ thuộc vào t, m và n.

(Nhắc lại về định lý Rouchè trong giải tích phức: Nếu $g(z)$ và $f(z)$ là hai hàm giải tích bên trong và trên một đường cong đóng đơn X sao cho $|g(z)| > |f(z)|$ tại mỗi điểm trên X, thì cả hai $g(z)$ và $g(z) + f(z)$ có cùng các không điểm bên trong X.)

Chứng minh. 1) Thay các công thức tiệm cận của $u(t, m)$ từ (2.1.9) vào vế phải của (2.1.11) và (2.1.12), ta nhận được

$$\left.\begin{aligned} u(t,m) &= \cos\tau t + q_1(t)\tfrac{\sin\tau t}{\tau} + \tfrac{1}{2\tau}\textstyle\int_0^t q(x)\sin\tau(t-2x)dx + O\left(\tfrac{\exp(|\tau|t)}{\tau^2}\right) \\ u'(t,m) &= -\tau\sin\tau t + q_1(t)\cos\tau t + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t q(x)\cos\tau(t-2x)dx + O\left(\tfrac{\exp(|\rho|t)}{\tau}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.1.15}$$

trong đó

$$q_1(t) = k + \frac{1}{2}\int_0^t q(x)dx.$$

Theo (2.1.5), $\Delta(m) = u'(\pi, m) + Ku(\pi, m)$. Nên từ (2.1.15), ta có

$$\Delta(m) = -\tau\sin\tau\pi + \kappa\cos\tau\pi + \omega(\tau), \tag{2.1.16}$$

với

$$\omega(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\cos\tau(\pi - 2x)dx + O\left(\frac{1}{\tau}\exp(|\rho|\pi)\right).$$

2) Kí hiệu $F_\delta = \{\tau : |\tau - h| \geq \delta, h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}, \delta > 0$. Ta sẽ chứng minh

$$|\sin\tau\pi| \geq C_\delta \exp(|\rho|\pi), \quad \tau \in F_\delta, \tag{2.1.17}$$

$$|\Delta(m)| \geq C_\delta|\tau|\exp(|\rho|\pi), \quad \tau \in F_\delta, |\tau| \geq \tau^*, \tag{2.1.18}$$

với $\tau^* = \tau^*(\delta)$ đủ lớn. Giả sử $\tau = \sigma + i\rho$. Ta chỉ cần chứng minh (2.1.17) cho tập

$$L_\delta = \left\{\tau : \sigma \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \rho \geq 0, |\tau| \geq \delta\right\}.$$

Kí hiệu $\theta(\tau) = |\sin\tau\pi|\exp(-|\rho|\pi)$. Giả sử $\tau \in L_\delta$. Với $\rho \le 1, \quad \theta(\tau) \ge C_\delta$. Vì $\sin\tau\pi = (\exp(i\tau\pi) - \exp(-i\tau\pi))/(2i)$, ta có với $\tau \ge 1, \quad \theta(\tau) = |1 - \exp(2i\sigma\pi)\exp(-2\rho\pi)|/2 \ge 1/4$. Do đó, (2.1.17) được chứng minh. Ngoài ra, sử dụng (2.1.16) ta nhận được với $\tau \in F_\delta$,

$$\Delta(m) = -\tau\sin\tau\pi\left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)$$

và do đó (2.1.18) được chứng minh.

3) Kí hiệu

$$\Gamma_n = \left\{m : |m| = (n + 1/2)^2\right\}.$$

Theo (2.1.16),

$$\Delta(m) = g(m) + f(m), \quad g(m) = -\tau\sin\tau\pi, \quad |f(m)| \le C\exp(|\rho|\pi).$$

Theo (2.1.17), $|g(m)| > |f(m)|, \quad m \in \Gamma_n$, với $n\,(n \ge n^*)$ đủ lớn. Khi đó theo định lý Rouchè, số các không điểm của $\Delta(m)$ trong Γ_n trùng với số các không điểm của $g(m) = -\tau\sin\tau\pi$, và do vậy bằng $n+1$. Do đó, trong hình tròn $|m| < (n+1/2)^2$ tồn tại đúng $n+1$ giá trị riêng của $D : m_0, \ldots, m_n$. Áp dụng định lý Rouchè cho hình tròn $\gamma_n(\delta) = \{\tau : |\tau - n| \le \delta\}$, ta kết luận rằng với n đủ lớn, trong $\gamma_n(\delta)$ có đúng một không điểm của $\Delta\left(\tau^2\right)$, đó chính là $\tau_n = \sqrt{m_n}$. Vì $\delta > 0$ tùy ý, nên ta có

$$\tau_n = n + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = o(1), n \to \infty. \tag{2.1.19}$$

Thay (2.1.19) vào (2.1.16) ta có

$$0 = \Delta\left(\tau_n^2\right) = -\left(n + \varepsilon_n\right)\sin\left(n + \varepsilon_n\right)\pi + \kappa\cos\left(n + \varepsilon_n\right)\pi + \omega_n,$$

và do đó

$$-\,n\sin\varepsilon_n\pi + \kappa\cos\varepsilon_n\pi + \omega_n = 0. \tag{2.1.20}$$

Nên $\sin\varepsilon_n\pi = O\left(\frac{1}{n}\right)$, tức là $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Sử dụng (2.1.20) một lần nữa chúng ta thu được chính xác hơn $\varepsilon_n = \frac{\kappa}{\pi n} + \frac{\omega_n}{n}$, tức là (2.1.13) được chứng minh. Thay (2.1.13) vào (2.1.15) ta thu được (2.1.14), với

$$\xi_n(t) = \left(k + \frac{1}{2}\int_0^t q(x)dx - t\frac{\kappa}{\pi} - t\omega_n\right)\sin nt + \frac{1}{2}\int_0^t q(x)\sin n(t-2x)dx + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.1.21}$$

Do đó $|\xi_n(t)| \le C$, và Định lý 2.3 được chứng minh. ∎

Theo (2.1.6) với $t = \pi$, thì

$$\beta_n = \left(u\left(\pi, m_n\right)\right)^{-1}.$$

Khi đó, sử dụng (2.1.7), (2.1.8), (2.1.14) và (2.1.21) ta tính được

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega_n}{n}, \quad \beta_n = (-1)^n + \frac{\omega_n}{n}, \quad \dot{\Delta}(m_n) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + \frac{\omega_n}{n} \tag{2.1.22}$$

Vì $\Delta(m) = 0$ chỉ có các nghiệm đơn giản, ta có $\operatorname{sign}\dot{\Delta}(m_n) = (-1)^{n+1}$ với $n \geq 0$. Kí hiệu W_2^N là không gian Sobolev của các hàm $g(t), t \in [0,\pi]$, với $g^{(j)}(t), j = \overline{0, N-1}$ liên tục tuyệt đối, và $g^{(N)}(t) \in L_2(0,\pi)$.

Nhận xét 2.4. *Nếu $q(t) \in W_2^N, N \geq 1$, thì ta có thể thu được các công thức tiệm cận chính xác hơn các công thức trước. Đặc biệt,*

$$\left.\begin{array}{l} \tau_n = n + \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\kappa_j}{n^j} + \frac{\omega_n}{n^{N+1}}, \qquad \kappa_{2p} = 0, p \geq 0, \qquad \kappa_1 = \frac{\kappa}{\pi} \\ \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\kappa_j^+}{n^j} + \frac{\omega_n}{n^{N+1}}, \quad \kappa_{2p+1}^+ = 0, p \geq 0, \quad \alpha_n > 0. \end{array}\right\} \tag{2.1.23}$$

Thật vậy, giả sử $q(t) \in W_2^1$. Lấy tích phân từng phần ta thu được

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\int_0^t q(x)\cos\tau(t-2x)dx = \frac{\sin\tau t}{4\tau}(q(t)+q(0)) + \frac{1}{4\tau}\int_0^t q'(x)\sin\tau(t-2x)dx \\ \frac{1}{2\tau}\int_0^t q(x)\sin\tau(t-2x)dx = \frac{\cos\tau t}{4\tau^2}(q(t)-q(0)) - \frac{1}{4\tau^2}\int_0^t q'(x)\cos\tau(t-2x)dx. \end{array}\right\} \tag{2.1.24}$$

Từ (2.1.15) và (2.1.24) ta suy ra rằng

$$u(t,m) = \cos\tau t + \left(k + \frac{1}{2}\int_0^t q(x)dx\right)\frac{\sin\tau t}{\tau} + O\left(\frac{\exp(|\rho|t)}{\tau^2}\right).$$

Thay công thức tiệm cận này vào vế phải của (2.1.11)-(2.1.12), rồi sử dụng (2.1.24) và (2.1.5), có thể thu được các tiệm cận chính xác hơn với $u^{(\nu)}(t,m)$ và $\Delta(m)$ so với (2.1.15)-(2.1.16):

$$u(t,m) = \cos\tau t + q_1(t)\frac{\sin\tau t}{\tau} + q_{20}(t)\frac{\cos\tau t}{\tau^2} - \frac{1}{4\tau^2}\int_0^t q'(x)\cos\tau(t-2x)dx + O\left(\frac{\exp(|\rho|t)}{\tau^3}\right)$$

$$u'(t,m) = -\tau\sin\tau t + q_1(t)\cos\tau t + q_{21}(t)\frac{\sin\tau t}{\tau} + \frac{1}{4\tau}\int_0^t q'(x)\sin\tau(t-2x)dx + O\left(\frac{\exp(|\rho|t)}{\tau^2}\right)$$

$$\Delta(m) = -\tau\sin\tau\pi + \kappa\cos\tau\pi + \kappa_0\frac{\sin\tau\pi}{\tau} + \frac{\omega_0(\tau)}{\tau} \tag{2.1.25}$$

trong đó

$$q_1(t) = k + \frac{1}{2}\int_0^t q(x)dx, \qquad \kappa_0 = q_{21}(\pi) + Kq_1(\pi),$$

$$q_{2j}(t) = \frac{1}{4}\big(q(t) + (-1)^{j+1}q(0)\big) + \frac{(-1)^{j+1}}{2}\int_0^t q(x)q_1(x)dx, \qquad j = 0,1,$$

$$\omega_0(\tau) = \frac{1}{4}\int_0^\pi q'(x)\sin\tau(\pi-2x)dx + O\left(\frac{\exp(|\rho|\pi)}{\tau}\right).$$

Từ (2.1.25), cũng lập luận như trên, ta suy ra

$$\tau_n = n + \varepsilon_n, \quad -n \sin \varepsilon_n \pi + \kappa \cos \varepsilon_n \pi + \frac{\omega_n}{n} = 0.$$

Nên

$$\tau_n = n + \frac{\kappa}{\pi n} + \frac{\omega_n}{n^2}, \quad \{\omega_n\} \in d_2.$$

Các công thức khác trong (2.1.23) có thể suy ra tương tự.

Định lý 2.5. *[3] Phổ $\{m_n\}_{n\geq 0}$ xác định duy nhất hàm đặc trưng $\Delta(m)$ bởi công thức*

$$\Delta(m) = \pi (m_0 - m) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{m_n - m}{n^2}. \tag{2.1.26}$$

Chứng minh. Từ (2.1.16) ta suy ra rằng $\Delta(m)$ là hàm nguyên theo biến m cấp 1/2, và do đó theo định lý phân tích nhân tử của Hadamard, $\Delta(m)$ được xác định duy nhất đến nhân tử hằng số nhân qua các không điểm của nó:

$$\Delta(m) = C \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{m}{m_n}\right) \tag{2.1.27}$$

(trường hợp khi $\Delta(0) = 0$ cần phải có sửa đổi nhỏ). Xét hàm

$$\tilde{\Delta}(m) := -\tau \sin \tau\pi = -m\pi \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{m}{n^2}\right).$$

Khi đó

$$\frac{\Delta(m)}{\tilde{\Delta}(m)} = C \frac{m - m_0}{m_0 \pi m} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{m_n} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{m_n - n^2}{n^2 - m}\right).$$

Sử dụng (2.1.13) và (2.1.16) chúng ta tính được

$$\lim_{m\to-\infty} \frac{\Delta(m)}{\tilde{\Delta}(m)} = 1, \quad \lim_{m\to-\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{m_n - n^2}{n^2 - m}\right) = 1,$$

và do đó

$$C = \pi m_0 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{n^2}.$$

Thay thế điều này vào (2.1.27) chúng ta thu được (2.1.26). ∎

Nhận xét 2.6. *Các kết quả tương tự có giá trị đối với toán tử Sturm-Liouville với các điều kiện biên tách được khác. Cụ thể là*

(i) Xét bài toán giá trị biên $D_1 = D_1(q(t), k)$ cho phương trình (2.1.1) với điều kiện biên $U(z) = 0, z(\pi) = 0$. Các giá trị riêng $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ của D_1 là đơn và trùng với các không điểm của hàm đặc trưng $l(m) := u(\pi, m)$, và

$$l(m) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n - m}{(n + 1/2)^2}. \tag{2.1.28}$$

Đối với dữ liệu phổ $\{\mu_n, \alpha_{n1}\}_{n\geq 0}$, $\alpha_{n1} := \int_0^\pi u^2(t,\mu_n)\,dt$ *của* D_1 *ta thu được các công thức tiệm cận:*

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\kappa_1}{\pi n} + \frac{\omega_n}{n}, \quad \{\omega_n\} \in d_2. \tag{2.1.29}$$

$$\alpha_{n1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega_{n1}}{n}, \quad \{\omega_{n1}\} \in d_2. \tag{2.1.30}$$

trong đó $\kappa_1 = k + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)dx$.

(ii) Xét bài toán giá trị biên $D^0 = D^0(q(t), K)$ *cho phương trình (2.1.1) với các điều kiện biên* $z(0) = V(z) = 0$. *Các giá trị riêng* $\left\{m_n^0\right\}_{n\geq 0}$ *của* D^0 *là đơn và trùng với các không điểm của hàm đặc trưng* $\Delta^0(m) := v(0,m) = C'(\pi,m) + KC(\pi,m)$. *Hàm* $C(t,m)$ *thỏa mãn phương trình tích phân Volterra*

$$C(t,m) = \frac{\sin\tau t}{\tau} + \int_0^t \frac{\sin\tau(t-x)}{\tau} q(x)C(x,m)dx \tag{2.1.31}$$

và với $|\tau| \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} C(t,m) &= \tfrac{\sin\tau t}{\tau} + O\left(\tfrac{1}{|\tau|^2}\exp(|\rho|t)\right) = O\left(\tfrac{1}{|\tau|}\exp(|\rho|t)\right),\\ C'(t,m) &= \cos\tau t + \left(\tfrac{1}{|\tau|}\exp(|\rho|t)\right) = O(\exp(|\rho|t)),\\ \Delta^0(m) &= \cos\tau\pi + \left(\tfrac{1}{|\tau|}\exp(|\rho|\pi)\right), \quad \rho = \operatorname{Im}\tau. \end{aligned}\right\} \tag{2.1.32}$$

Hơn nữa,

$$\Delta^0(m) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{m_n^0 - m}{(n+1/2)^2}.$$

$$\sqrt{m_n^0} = n + \frac{1}{2} + \frac{\kappa^0}{\pi n} + \frac{\omega_n}{n}, \quad \{\omega_n\} \in d_2,$$

trong đó $\kappa^0 = K + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)dx$.

(iii) Xét bài toán giá trị biên $D_1^0 = D_1^0(q(t))$ *cho phương trình (2.1.1)với các điều kiện biên* $z(0) = z(\pi) = 0$. *Các giá trị riêng* $\left\{\mu_n^0\right\}_{n\geq 1}$ *của* D_1^0 *là đơn và trùng với các không điểm của hàm đặc trưng* $l^0(m) := C(\pi,m)$, *và*

$$d^0(m) = \pi\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^0 - m}{n^2}.$$

$$\sqrt{\mu_n^0} = n + \frac{\kappa_1^0}{\pi n} + \frac{\omega_n}{n}, \quad \{\omega_n\} \in d_2,$$

trong đó $\kappa_1^0 = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)dx$.

Bổ đề 2.3. *Ta có*

$$m_n < \mu_n < m_{n+1}, n \geq 0. \tag{2.1.33}$$

hay các giá trị riêng của hai bài toán giá trị biên D *và* D_1 *nằm xen kẽ nhau.*

Chứng minh. Như trong chứng minh Bổ đề 2.1 ta có

$$\frac{d}{dt}\langle u(t,m),u(t,\mu)\rangle = (m-\mu)u(t,m)u(t,\mu) \tag{2.1.34}$$

và do đó,

$$(m-\mu)\int_0^\pi u(t,m)u(t,\mu)dt = \langle u(t,m),u(t,\mu)\rangle|_0^\pi$$
$$= u(\pi,m)u'(\pi,\mu) - u'(\pi,m)u(\pi,\mu) = d(m)\Delta(\mu) - d(\mu)\Delta(m).$$

Khi $\mu \to m$ ta thu được

$$\int_0^\pi u^2(t,m)dt = \dot{d}(m)\Delta(m) - d(m)\dot{\Delta}(m) \text{ với } \dot{\Delta}(m) = \frac{d}{dm}\Delta(m), \quad \dot{d}(m) = \frac{d}{dm}d(m).$$

Suy ra

$$\alpha_n = -\dot{\Delta}\left(m_n\right) d\left(m_n\right), \tag{2.1.35}$$
$$\frac{1}{d^2(m)}\int_0^\pi u^2(t,m)dt = -\frac{d}{dm}\left(\frac{\Delta(m)}{d(m)}\right), \quad -\infty < m < \infty, \quad d(m) \neq 0.$$

Do đó, hàm $\frac{\Delta(m)}{d(m)}$ là đơn điệu trên $\mathbb{R}\setminus\{\mu_n \mid n \geq 0\}$ với

$$\lim_{m\to\mu_n\pm 0}\frac{\Delta(m)}{d(m)} = \pm\infty.$$

Do đó theo (2.1.13) và (2.1.29), ta thu được (2.1.33). ■

2.2. Tính chất của các hàm riêng

2.2.1. Định lý về tính đầy đủ và định lý về khai triển

Trong mục này ta chứng minh hệ các hàm riêng của bài toán giá trị biên Sturm-Liouville D là đầy đủ và tạo thành một cơ sở trực giao trong $L_2(0,\pi)$. Định lý này lần đầu tiên được Steklov chứng minh vào cuối thế kỷ XIX. Ta đưa ra điều kiện đủ để chuỗi Fourier cho các hàm riêng hội tụ đều trên $[0,\pi]$. Các định lý đầy đủ và khai triển rất quan trọng để giải các bài toán khác nhau trong vật lý toán học bằng phương pháp Fourier, cũng như cho chính lý thuyết phổ. Để chứng minh các định lý này, ta áp dụng phương pháp tích phân vòng cho các giả thức trong mặt phẳng phức của tham số phổ (vì phương pháp này dựa trên định lý Cauchy nên đôi khi được gọi là phương pháp Cauchy).

Định lý 2.7. *[3] (i) Hệ các hàm riêng $\{u\left(t,m_n\right)\}_{n\geq 0}$ của bài toán giá trị biên D đầy đủ trong $L_2(0,\pi)$.*

(ii) Cho $g(t), t\in[0,\pi]$ là một hàm liên tục tuyệt đối. Khi đó

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u\left(t,m_n\right), \quad b_n = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi g(x)u\left(x,m_n\right)dx \tag{2.2.1}$$

và chuỗi hội tụ đều trên $[0, \pi]$. (ở đây α_n được xác định bằng công thức (2.1.7))

(iii) Với $g(t) \in L_2(0, \pi)$, chuỗi (2.2.1) hội tụ trong $L_2(0, \pi)$, và

$$\int_0^\pi |f(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |b_n|^2 \qquad \text{(đẳng thức Parseval).} \tag{2.2.2}$$

Chứng minh. 1) Kí hiệu

$$F(t, x, m) = -\frac{1}{\Delta(m)} \begin{cases} u(t, m)v(x, m), & t \leq x \\ u(x, m)v(t, m), & t \geq x \end{cases}$$

và xét hàm

$$\begin{aligned} Z(t, m) &= \int_0^\pi F(t, x, m) g(x) dx \\ = -\frac{1}{\Delta(m)} & \left(v(t, m) \int_0^t u(x, m) g(x) dx + u(t, m) \int_t^\pi v(x, m) g(x) dx \right). \end{aligned}$$

Hàm $F(t, x, m)$ được gọi là hàm Green với D. Hàm $F(t, x, m)$ là nhân của toán tử nghịch đảo của toán tử Sturm-Liouville, có nghĩa là $Z(t, m)$ là nghiệm của bài toán giá trị biên

$$dZ - mZ + g(t) = 0, \quad U(Z) = V(Z) = 0 \tag{2.2.3}$$

và điều này dễ dàng chứng minh bằng cách lấy đạo hàm của Z. Sử dụng (2.1.6) và Định lý 2.2 ta được

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{m=m_n} Z(t, m) = -\frac{1}{\dot{\Delta}(m_n)} & \left(v(t, m_n) \int_0^t u(x, m_n) g(x) dx + u(t, m_n) \int_t^\pi v(x, m_n) g(x) dx \right) \\ &= -\frac{\beta_n}{\dot{\Delta}(m_n)} u(t, m_n) \int_0^\pi g(x) u(x, m_n) dx \end{aligned}$$

và theo (2.1.8),

$$\operatorname{Res}_{m=m_n} Z(t, m) = \frac{1}{\alpha_n} u(t, m_n) \int_0^\pi g(x) u(x, m_n) dx. \tag{2.2.4}$$

2) Giả sử $g(t) \in L_2(0, \pi)$ sao cho

$$\int_0^\pi g(x) u(x, m_n) dx = 0, \quad n \geq 0$$

Khi đó theo (2.2.4), $\operatorname{Res}_{m=m_n} Z(t, m) = 0$, và do đó (sau khi mở rộng $Z(t, m)$ liên tục đến toàn bộ mặt phẳng m) với mỗi $t \in [0, \pi]$ cố định, hàm $Z(t, m)$ là hàm nguyên theo biến m. Hơn nữa, từ (2.1.9), (2.1.10) và (2.1.18) ta suy ra với một giá trị $\delta > 0$ cố định và $\tau^* > 0$ đủ lớn:

$$|Z(t,m)| \le \frac{C_\delta}{|\tau|}, \quad \tau \in F_\delta, |\tau| \ge \tau^*.$$

Sử dụng nguyên lý cực đại và Định lý Liouville, ta kết luận rằng $Z(t,m) \equiv 0$. Từ đây và (2.2.3) suy ra $g(t) = 0$ hầu khắp nơi trên $(0,\pi)$. Như vậy (i) được chứng minh.

3) Giả sử $g \in AC[0,\pi]$ là hàm liên tục tuyệt đối tùy ý. Vì $u(t,m)$ và $v(t,m)$ là nghiệm của (2.1.1), ta biến đổi $Z(t,m)$ như sau

$$Z(t,m) = -\frac{1}{m\Delta(m)}\left(v(t,m)\int_0^t \big(-u''(x,m) + q(x)u(x,m)\big) f(x)dx\right.$$
$$\left.+u(t,m)\int_t^\pi \big(-v''(x,m) + q(x)v(x,m)\big) f(x)dx\right).$$

Tích phân các số hạng chứa đạo hàm bậc hai theo từng phần, từ (2.1.4) ta nhận được

$$Z(t,m) = \frac{f(t)}{m} - \frac{1}{m}\left(Y_1(t,m) + Y_2(t,m)\right) \tag{2.2.5}$$

trong đó

$$Y_1(t,m) = \frac{1}{\Delta(m)}\left(v(t,m)\int_0^t f(x)u'(x,m)dx + u(t,m)\int_t^\pi f(x)v'(x,m)dx\right), \quad f(x) := g'(x),$$
$$Y_2(t,m) = \frac{1}{\Delta(m)}(kg(0)v(t,m) + Kg(\pi)u(t,m)$$
$$+v(t,m)\int_0^t q(x)u(x,m)g(x)\Big) dx + u(t,m)\int_t^\pi q(x)v(x,m)g(x)\Big) dx\Big).$$

Áp dụng (2.1.9), (2.1.10) and (2.1.18), ta thu được với $\delta > 0$ cố định, và $\tau^* > 0$ đủ lớn :

$$\max_{0\le t\le\pi} |Y_2(t,m)| \le \frac{C}{|\tau|}, \quad \tau \in F_\delta, \quad |\tau| \ge \tau^*. \tag{2.2.6}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng

$$\lim_{\substack{|\tau|\to\infty \\ \tau\in F_\delta}} \max_{0\le t\le\pi} |Y_1(t,m)| = 0. \tag{2.2.7}$$

Trước tiên chúng ta giả sử rằng $f(t)$ là liên tục trên $[0,\pi]$. Trong trường hợp này, lấy tích phân từng phần ta nhận được

$$Y_1(t,m) = \frac{1}{\Delta(m)}\left(v(t,m)f(x)u(x,m)|_0^t + u(t,m)f(x)v(x,m)|_t^\pi\right.$$
$$\left.-v(t,m)\int_0^t f'(x)u(x,m)dx - u(t,m)\int_t^\pi f'(x)v(x,m)dx\right).$$

Từ (2.1.9), (2.1.10) và (2.1.18), ta suy ra

$$\max_{0\le t\le\pi}|Y_1(t,m)|\le\frac{C}{|\tau|},\quad \tau\in F_\delta,\quad |\tau|\ge\tau^*.$$

Giả sử $f(x)\in L(0,\pi)$. Cố định $\varepsilon>0$ và chọn một hàm liên tục tuyệt đối $f_\varepsilon(x)$ sao cho

$$\int_0^\pi |f(x)-f_\varepsilon(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2C^+}$$

trong đó

$$C^+=\max_{0\le t\le\pi}\sup_{\tau\in F_\delta}\frac{1}{|\Delta(m)|}\left(|v(t,m)|\int_0^t\left|u'(x,m)\right|dx+|u(t,m)|\int_t^\pi\left|v'(x,m)\right|dx\right).$$

Sau đó, với $\tau\in F_\delta,|\tau|\ge\tau^*$, ta có

$$\max_{0\le t\le\pi}|Y_1(t,m)|\le\max_{0\le t\le\pi}|Y_1(t,m;f_\varepsilon)|+\max_{0\le t\le\pi}|Y_1(t,m;f-f_\varepsilon)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{C(\varepsilon)}{|\tau|}.$$

Do đó, tồn tại $\tau^0>0$ sao cho $\max_{0\le t\le\pi}|Y_1(t,m)|\le\varepsilon$ với $|\tau|>\tau^0$. Do $\varepsilon>0$ tùy ý, ta nhận được (2.2.7). Xét tích phân vòng biên

$$I_N(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}Z'(t,m)dm$$

trong đó $\Gamma_N=\left\{m:|m|=(N+1/2)^2\right\}$ (lấy theo hướng ngược chiều kim đồng hồ). Từ (2.2.5)-(2.2.7) ta suy ra rằng

$$I_N(t)=g(t)+\varepsilon_N(t),\quad \lim_{N\to\infty}\max_{0\le t\le\pi}|\varepsilon_N(t)|=0.\tag{2.2.8}$$

Mặt khác, ta có thể tính $I_N(t)$ nhờ định lý thặng dư. Từ (2.2.4),

$$I_N(t)=\sum_{n=0}^N b_n u\left(t,m_n\right),\quad b_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi_1}g(x)u\left(x,m_n\right)dx.$$

So sánh điều này với (2.2.8) ta nhận được (2.2.1), với chuỗi hội tụ đều trên $[0,\pi]$, hay (ii) đã được chứng minh.

4) Vì các hàm riêng $\{u\left(t,m_n\right)\}_{n\ge0}$ là đầy đủ và trực giao trên $L_2(0,\pi)$, chúng tạo thành một cơ sở trực giao trong $L_2(0,\pi)$, nên ta có đẳng thức Parseval (2.2.2). ∎

2.2.2. Dao động của các hàm riêng

Bài toán giá trị biên (2.1.1)-(2.1.2) với $q(t)\equiv0,k=K=0$, có các hàm riêng là $\cos nt$. Ta thấy rằng hàm riêng thứ n có đúng n không điểm trong đoạn $(0,\pi)$. Tính chất này vẫn đúng cho bài toán biên tổng quát, là kết quả của Sturm.

Định lý 2.8. *[3] Các hàm riêng $u(t, m_n)$ của bài toán giá trị biên D có đúng n không điểm trong khoảng $0 < t < \pi$.*

Đầu tiên ta chứng minh một số khẳng định bổ trợ.

Bổ đề 2.4. *Gọi $\varphi_j(t), j = 1, 2, t \in [c, d]$ là các nghiệm của phương trình*

$$\varphi_j'' + f_j(t)\varphi_j = 0, \quad f_1(t) < f_2(t), \quad j = 1, 2, t \in [c, d] \tag{2.2.9}$$

Giả sử rằng $t_1, t_2 \in [c, d]$, $\varphi_1(t_1) = \varphi_1(t_2) = 0$, và $\varphi_1(t) \neq 0, t \in (t_1, t_2)$. Khi đó tồn tại $t^* \in (t_1, t_2)$ sao cho $\varphi_2(t^*) = 0$. Mặt khác, hàm $\varphi_2(t)$ có ít nhất một không điểm nằm giữa hai không điểm bất kì của $\varphi_1(t)$.

Chứng minh. Ngược lại, giả sử rằng $\varphi_2(t) \neq 0$ với $t \in (t_1, t_2)$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $\varphi_j(t) > 0$ với $t \in (t_1, t_2), j = 1, 2$. Từ (2.2.9), ta có

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_2'\varphi_1\right) = (f_2 - f_1)\varphi_1\varphi_2$$

và do đó

$$\int_{t_1}^{t_2} (f_2 - ff_1)\varphi_1\varphi_2 dt = \left(\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_2'\varphi_1\right)\Big|_{t_1}^{t_2} = \varphi_1'(t_2)\varphi_2(t_2) - \varphi_1'(t_1)\varphi_2(t_1) \tag{2.2.9}$$

Tích phân trong (2.2.10) hoàn toàn dương. Mặt khác, vì $\varphi_1'(t_1) > 0, \varphi_1'(t_2) < 0$, và $\varphi_2(t) \geq 0$ với $t \in [t_1, t_2]$, nên vế phải của (2.2.10) không dương. Đây là điều mâu thuẫn, vậy bổ đề được chứng minh. ■

Hệ quả 2.1. *Cho $f_1(t) < -\gamma^2 < 0$. Khi đó mỗi nghiệm không tầm thường của phương trình $\varphi_1'' + f_1(t)\varphi_1 = 0$ không thể có nhiều hơn một không điểm.*

Thật vậy, điều này suy ra từ Bổ đề 2.4 với $f_2(t) = -\gamma^2$ vì phương trình $\varphi_2'' - \gamma^2\varphi_2 = 0$ có nghiệm $\varphi_2(t) = \exp(\gamma t)$, không có không điểm.

Ta xét hàm $u(t, m)$ với m thực. Các không điểm của $u(t, m)$ tương ứng t là các hàm của m. Ta chứng minh các không điểm này là hàm liên tục theo m.

Bổ đề 2.5. *Cho $u(t_0, m_0) = 0$. Với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $|m - m_0| < \delta$, khi đó hàm $u(t, m)$ có đúng một không điểm trong khoảng $|t - t_0| < \varepsilon$.*

Chứng minh. Nếu t_0 là một không điểm của nghiệm $u(t, m_0)$ của phương trình vi phân (2.1.1) thì nó có không điểm đơn, vì nếu ta có $u'(t_0, m_0) = 0$, thì nó theo định lý duy nhất nghiệm từ phương trình (2.1.1) ta có $u(t, m_0) \equiv 0$. Do vậy, $u'(t_0, m_0) \neq 0$. Để cho tiện giả sử rằng $u'(t_0, m_0) > 0$. Chọn $\varepsilon_0 > 0$ sao cho $u'(t, m_0) > 0$ với $|t - t_0| \leq \varepsilon_0$. Khi đó $u(t, m_0) < 0$ với $t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0)$, và $u(t, m_0) > 0$ với $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon_0]$. Lấy $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Bởi tính liên tục của $u(t,m)$ và $u'(t,m)$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với $|m - m_0| < \delta, |t - t_0| < \varepsilon$ ta có $u'(t,m) > 0, u(t_0 - \varepsilon_0, m) < 0, u(t_0 + \varepsilon_0, m) > 0$. Do đó, hàm $u(t,m)$ có đúng một không điểm trong khoảng $|t - t_0| < \varepsilon$. ■

Bổ đề 2.6. *Giả sử rằng μ là một số thực cố định, hàm $u(t,\mu)$ có λ không điểm trong khoảng $0 < t \leq b$. Cho $m > \mu$. Khi đó hàm $u(t,m)$ có không ít hơn λ không điểm trong cùng một khoảng và không điểm thứ h của $u(t,m)$ nhỏ hơn không điểm thứ h của $u(t,\mu)$.*

Chứng minh. Gọi $t_1 > 0$ là không điểm dương nhỏ nhất của $u(t,\mu)$. Theo Bổ đề 2.4 chỉ cần chứng minh rằng hàm $u(t,m)$ có ít nhất một không điểm trong khoảng $0 < t < t_1$.

Ngược lại, giả sử rằng $u(t,m) \neq 0, t \in [0, t_1)$. Vì $u(0,m) = 1$, ta có $u(t,m) > 0, u(t,\mu) > 0, t \in [0, t_1)$; $\quad u(t_1, \mu) = 0, u'(t_1, \mu) < 0$. Từ (2.1.34) ta suy ra rằng

$$(m - \mu) \int_0^{t_1} u(t,m)u(t,\mu)dt = \langle u(t,m), u(t,\mu)\rangle|_0^{t_1} = u(t_1, m)\, u'(t_1, \mu) \leq 0.$$

Nhưng tích phân ở vế trái hoàn toàn dương, vậy đây là điều mâu thuẫn. Do vậy, bổ đề được chứng minh. ■

Chứng minh. (Chứng minh Định lý 2.8) Ta xét hàm $u(t,m)$ với m thực . Theo (2.1.9), hàm $u(t,m)$ không có không điểm khi m là số âm đủ lớn: $u(t,m) > 0, m \leq -m^* < 0, t \in [0, \pi]$. Mặt khác, $u(\pi, \mu_n) = 0$, trong đó $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ là các giá trị riêng của bài toán giá trị biên D_1.

Áp dụng Bổ đề 2.5-2.6 ta thấy nếu m dịch chuyển từ $-\infty$ tới ∞, thì các không điểm của $u(t,m)$ trên đoạn $[0,\pi]$ dịch chuyển sang trái. Các không điểm mới chỉ có thể xuất hiện thông qua điểm $t = \pi$. Điều này cho thấy

(i) Hàm $u(t, \mu_n)$ có đúng n không điểm trên đoạn $t \in [0, \pi)$.

(ii) Nếu $m \in (\mu_{n-1}, \mu_n), n \geq 1, \mu_1 := -\infty$, thì hàm $u(t,m)$ có đúng n không điểm trên đoạn $t \in [0, \pi]$. Theo (2.1.33),

$$m_0 < \mu_0 < m_1 < \mu_1 < m_2 < \mu_2 < \dots$$

Do đó, hàm $u(t, m_n)$ có đúng n không điểm trên $[0, \pi]$. ■

2.3. Toán tử biến đổi

Toán tử biến đổi đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết bài toán ngược Sturm-Liouville, nó kết nối nghiệm của hai phương trình Sturm-Liouville khác nhau cho tất cả m. Trong phần này chúng tôi xây dựng toán tử biến đổi và tìm hiểu các thuộc tính của nó. Toán tử biến đổi lần đầu tiên xuất hiện trong lý thuyết toán tử suy rộng của Delsarte và Levitan. Các toán tử biến đổi cho các phương trình Sturm-Liouville bất kỳ được Povzner xây dựng. Trong lý thuyết bài toán ngược, các toán tử biến đổi đã được Gelfand, Levitan và Marchenko sử dụng.

Định lý 2.9. *[3] Hàm $S(t,m)$ (được định nghĩa ngay sau Định nghĩa 2.1) có biểu diễn như sau*

$$S(t,m) = \cos\tau t + \int_0^t H(t,x)\cos\tau x dx, \quad m = \tau^2, \tag{2.3.1}$$

trong đó $H(t,x)$ là một hàm liên tục thực và

$$H(t,t) = \frac{1}{2}\int_0^t q(x)dx. \tag{2.3.2}$$

Chứng minh. Từ (2.1.11) với $k=0$, ta suy ra rằng, hàm $C(t,m)$ là nghiệm của phương trình tích phân sau

$$S(t,m) = \cos\tau t + \int_0^t \frac{\sin\tau(t-x)}{\tau} q(x)C(x,m)dx. \tag{2.3.3}$$

Vì

$$\frac{\sin\tau(t-x)}{\tau} = \int_x^t \cos\tau(s-x)ds,$$

nên (2.3.3) trở thành

$$S(t,m) = \cos\tau t + \int_0^t q(x)C(x,m)\left(\int_x^t \cos\tau(s-x)ds\right)dx,$$

và do đó

$$S(t,m) = \cos\tau t + \int_0^t \left(\int_0^x q(\rho)S(\rho,m)\cos\tau(x-\rho)d\rho\right)dx.$$

Phương pháp xấp xỉ liên tiếp cho ta công thức nghiệm của phương trình tích phân này

$$S(t,m) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t,m), \tag{2.3.4}$$

$$S_0(t,m) = \cos\tau t, \quad S_{n+1}(t,m) = \int_0^t \left(\int_0^x q(\rho)S_n(\rho,m)\cos\tau(x-\rho)d\rho\right)dx \tag{2.3.5}$$

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng

$$S_n(t,m) = \int_0^t H_n(t,x)\cos\tau x dx. \tag{2.3.6}$$

trong đó $H_n(t,x)$ không phụ thuộc vào m.

Đầu tiên ta tính $S_1(t,m)$, sử dụng công thức $\cos\varphi\cos\psi = \frac{1}{2}(\cos(\varphi+\psi)+\cos(\varphi-\psi))$ ta có

$$\begin{aligned}S_1(t,m) &= \int_0^t \left(\int_0^x q(\rho)\cos\tau\rho\cos\tau(x-\rho)d\rho\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \cos\tau x\left(\int_0^x q(\rho)d\rho\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_0^x q(\rho)\cos\tau(x-2\rho)d\rho\right)dx.\end{aligned}$$

Đổi biến $x-2\rho = s$ trong tích phân thứ hai cho kết quả

$$S_1(t,m) = \frac{1}{2}\int_0^t \cos\tau x\left(\int_0^x q(\rho)d\rho\right)dx + \frac{1}{4}\int_0^t\left(\int_{-x}^x q\left(\frac{x-s}{2}\right)\cos\tau s ds\right)dx.$$

Hoán đổi thứ tự tích phân trong tích phân thứ hai ta thu được

$$\begin{aligned}S_1(t,m) &= \frac{1}{2}\int_0^t \cos\tau x\left(\int_0^x q(\rho)d\rho\right)dx + \frac{1}{4}\int_0^t \cos\tau s\left(\int_s^t q\left(\frac{x-s}{2}\right)dx\right)ds\\ &+\frac{1}{4}\int_{-t}^0 \cos\tau s\left(\int_{-s}^t q\left(\frac{x-s}{2}\right)dx\right)ds = \frac{1}{2}\int_0^t \cos\tau x\left(\int_0^x q(\rho)d\rho\right)dx\\ &+\frac{1}{4}\int_0^t \cos\tau s\left(\int_s^t \left(q\left(\frac{x-s}{2}\right)+q\left(\frac{x+s}{2}\right)\right)dx\right)ds.\end{aligned}$$

Vì vậy, (2.3.6) là đúng đối với $n=1$, trong đó

$$\begin{aligned}H_1(t,x) &= \frac{1}{2}\int_0^x q(\rho)d\rho + \frac{1}{4}\int_x^t\left(q\left(\frac{s-x}{2}\right)+q\left(\frac{s+x}{2}\right)\right)ds\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)d\xi, \quad x\le t.\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Giả sử rằng (2.3.6) là đúng với $n\ge 1$ nào đó. Thay (2.3.6) vào (2.3.5) ta có

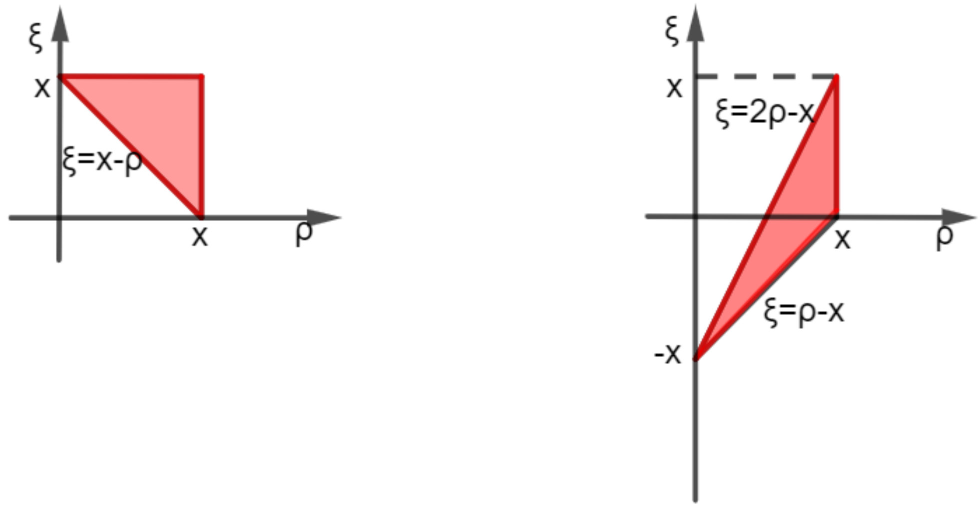
$$\begin{aligned}S_{n+1}(t,m) &= \int_0^t\int_0^x q(\rho)\cos\tau(x-\rho)\int_0^\rho H_n(\rho,s)\cos\tau s ds d\rho dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x q(\rho)\int_0^\rho H_n(\rho,s)(\cos\tau(s+x-\rho)+\cos\tau(s-x+\rho))ds d\rho dx.\end{aligned}$$

Đổi biến $s+x-\rho=\xi$ và $s-x+\rho=\xi$, tương ứng, dẫn đến

$$\begin{aligned}S_{n+1}(t,m) &= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x q(\rho)\int_{x-\rho}^x H_n(\rho,\xi+\rho-x)\cos\tau\xi d\xi d\rho dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x q(\rho)\int_{\rho-x}^{2\rho-x} H_n(\rho,\xi+x-\rho)\cos\tau\xi d\xi d\rho dx\end{aligned}$$

Hoán đổi thứ tự tích phân (xem hình 2.1) ta thu được

$$S_{n+1}(t,m) = \int_0^t H_{n+1}(t,x)\cos\tau x dx,$$



Hình 2.1

trong đó

$$H_{n+1}(t,x) = \frac{1}{2}\int_x^t \left(\int_{\xi-x}^{\xi} q(\rho)H_n(\rho, x+\rho-\xi)d\rho \right.$$
$$\left. + \int_{\frac{\xi+x}{2}}^{\xi} q(\rho)H_n(\rho, x-\rho+\xi)d\rho + \int_{\frac{\xi-x}{2}}^{\xi-x} q(\rho)H_n(\rho,-x-\rho+\xi)d\rho \right) d\xi. \tag{2.3.8}$$

Thay (2.3.6) vào (2.3.4) ta nhận được (2.3.1), trong đó

$$H(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t,x). \tag{2.3.9}$$

Từ (2.3.7) và (2.3.8) suy ra rằng

$$|H_n(t,x)| \le (Q(t))^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad Q(t) := \int_0^t |q(\xi)|d\xi$$

Thật vậy, (2.3.7) cho ta đánh giá với $x \le t$,

$$|H_1(t,x)| \le \frac{1}{2}\int_0^{\frac{t+x}{2}} |q(\xi)|d\xi + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{t-x}{2}} |q(\xi)|d\xi \le \int_0^t |q(\xi)|d\xi = Q(t).$$

Hơn nữa, nếu với một $n \ge 1$ nào đó, đánh giá $|H_n(t,x)|$ là đúng, thì từ (2.3.8), ta có

$$|H_{n+1}(t,x)| \le \frac{1}{2}\int_x^t \left(\int_{\frac{\xi+1}{2}}^{\xi} |q(\rho)|(Q(\rho))^n \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}d\rho + \int_{\frac{\xi-x}{2}}^{\xi} |q(\rho)|(Q(\rho))^n \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}d\rho \right) d\xi$$
$$\le \int_0^t \int_0^{\xi} |q(\rho)|(Q(\rho))^n \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}d\rho d\xi \le \int_0^t (Q(\xi))^{n+1}\frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}d\xi \le (Q(x))^{n+1}\frac{x^n}{n!}.$$

Do đó, chuỗi (2.3.9) hội tụ đều và tuyệt đối với $0 \leq x \leq t \leq \pi$, và hàm $H(t,x)$ là liên tục. Hơn nữa, từ (2.3.7)-(2.3.9) suy ra rằng độ trơn của $H(t,x)$ như độ trơn của hàm $\int_0^t q(x)dx$. Vì theo (2.3.7) và (2.3.8)

$$H_1(t,t) = \frac{1}{2}\int_0^t q(x)dx, \quad H_{n+1}(t,t) = 0, n \geq 1,$$

ta nhận được (2.3.2). ■

Toán tử T, được xác định bởi

$$Tf(t) = f(t) + \int_0^t H(t,x)f(x)dx,$$

biến đổi $\cos\tau t$, là nghiệm của phương trình $-z'' = mz$ với thế vị bằng 0, thành hàm $S(t,m)$, là nghiệm của phương trình (2.1.1) thỏa mãn cùng điều kiện ban đầu (tức là $S(t,m) = T(\cos\tau t)$). Toán tử T được gọi là *toán tử biến đổi* của $S(t,m)$. Điều quan trọng là nhân $H(t,x)$ không phụ thuộc vào m.

Tương tự, người ta có thể thu được các toán tử chuyển đổi cho các hàm $C(t,m)$ và $u(t,m)$:

Định lý 2.10. *[3] Các hàm $C(t,m)$ và $u(t,m)$ có biểu diễn sau*

$$C(t,m) = \frac{\sin\tau t}{\tau} + \int_0^t M(t,m)\frac{\sin\tau x}{\tau}dx, \tag{2.3.10}$$

$$u(t,m) = \cos\tau t + \int_0^t F(t,x)\cos\tau x dx, \tag{2.3.11}$$

trong đó $M(t,x)$ và $F(t,x)$ là các hàm liên tục thực có độ trơn như độ trơn của $\int_0^t q(x)dx$, và

$$F(t,t) = k + \frac{1}{2}\int_0^t q(x)dx. \tag{2.3.12}$$

$$M(t,t) = \frac{1}{2}\int_0^t q(x)dx. \tag{2.3.13}$$

Chứng minh. Hàm $C(t,m)$ thỏa mãn (2.1.31), và do đó

$$C(t,m) = \frac{\sin\tau t}{\tau} + \int_0^t \int_0^x q(\rho)S(\rho,m)\cos\tau(x-\rho)d\rho dx.$$

Phương pháp xấp xỉ liên tiếp cho

$$C(t,m) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t,m) \tag{2.3.14}$$

với

$$C_0(t,m) = \frac{\sin\tau t}{\tau}, \quad C_{n+1}(t,m) = \int_0^t \int_0^x q(\rho) C_n(\rho,m)\cos\tau(x-\rho)d\rho dx.$$

Tương tự như trong chứng minh Định lý 2.9, ta thu được biểu diễn sau

$$C_n(t,m) = \int_0^t M_n(t,x)\frac{\sin\tau x}{\tau}dx$$

trong đó

$$M_1(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{t+x}{2}} q(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\xi)d\xi$$

$$M_{n+1}(t,x) = \frac{1}{2}\int_x^t \left(\int_{\xi-x}^{\xi} q(\rho)M_n(\rho, x+\rho-\xi)d\rho\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\xi+x}{2}}^{\xi} q(\rho)M_n(\rho, x-\rho+\xi)d\rho - \int_{\frac{\xi-x}{2}}^{\xi-x} q(\rho)M_n(\rho, -x-\rho+\xi)d\rho\right) d\xi$$

và

$$|M_n(t,x)| \le (Q(t))^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad Q(t) := \int_0^t |q(\xi)|d\xi.$$

Do đó, chuỗi (2.3.14) hội tụ đều và tuyệt đối với $0 \le x \le t \le \pi$, vậy ta nhận được (2.3.10) và (2.3.13). Mối quan hệ (2.3.11) có thể nhận được trực tiếp từ (2.3.1) và (2.3.10):

$$u(t,m) = S(t,m) + kC(t,m) = \cos\tau t + \int_0^t H(t,x)\cos\tau x dx + k\int_0^t \cos\tau x dx$$

$$+k\int_0^t M(t,x)\left(\int_0^x \cos\tau\rho d\rho\right)dx = \cos\rho t + \int_0^t F(t,x)\cos\tau x dx$$

trong đó

$$F(t,x) = H(t,x) + k + k\int_x^t M(t,\rho)d\rho.$$

Thay $x = t$ ta có (2.3.12). ■

2.4. Tính duy nhất nghiệm của bài toán ngược

Chúng ta tiếp tục giải bài toán ngược của giải tích phổ cho các toán tử Sturm-Liouville. Trong phần này chúng ta đưa ra các cách đặt bài toán khác nhau của các bài toán ngược và chứng minh các định lý duy nhất tương ứng.

2.4.1. Định lý Ambarzumian

Kết quả đầu tiên trong lý thuyết bài toán ngược là do Ambarzumian [4]. Xét bài toán giá trị biên $D(q(t), 0, 0)$:

$$-z'' + q(t)z = mz, \quad z'(0) = z'(\pi) = 0. \tag{2.4.1}$$

Rõ ràng, nếu $q(t) = 0$ trên $(0, \pi)$ thì các giá trị riêng của (2.4.1) có dạng $m_n = n^2, n \geq 0$. Ambarzumian đã chứng minh khẳng định ngược lại:

Định lý 2.11. *Nếu giá trị riêng của (2.4.1) là $m_n = n^2, n \geq 0$, thì $q(t) = 0$ trên $(0, \pi)$.*

Chứng minh. Từ (2.1.13) suy ra rằng $\kappa = 0$, tức là $\int_0^\pi q(t)dt = 0$. Gọi $z_0(t)$ là hàm riêng cho giá trị riêng đầu tiên $m_0 = 0$. Khi đó

$$z_0''(t) - q(t)z_0(t) = 0, \quad z_0'(0) = z_0'(\pi) = 0.$$

Theo Định lý 2.8, hàm $z_0(t)$ không có không điểm trong khoảng $t \in [0, \pi]$. Sử dụng công thức

$$\frac{z_0''(t)}{z_0(t)} = \left(\frac{z_0'(t)}{z_0(t)}\right)^2 + \left(\frac{z_0'(t)}{z_0(t)}\right)',$$

ta thu được

$$0 = \int_0^\pi q(t)dt = \int_0^\pi \frac{z_0''(t)}{z_0(t)}dt = \int_0^\pi \left(\frac{z_0'(t)}{z_0(t)}\right)^2 dt.$$

Vậy $z_0'(t) \equiv 0$, hay $z_0(x) \equiv \text{const}$, $q(t) = 0$ trên $(0, \pi)$. ■

2.4.2. Tính duy nhất của việc khôi phục các phương trình vi phân từ dữ liệu phổ

Kết quả của Ambarzumian là một ngoại lệ. Nói chung, phổ không xác định một cách duy nhất toán tử.

Bài toán ngược 2.4.1. Cho dữ liệu phổ $\{m_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$, hãy xây dựng thế vị $q(t)$ và các hệ số k và K của các điều kiện biên.

Mục tiêu của mục này là chứng minh định lý duy nhất nghiệm cho bài toán ngược 2.4.1.

Cùng với D, ta xét thêm bài toán giá trị biên $\tilde{D} = D(\tilde{q}(t), \tilde{k}, \tilde{K})$ cùng dạng nhưng có hệ số khác của D. Nếu một kí hiệu γ nào đó sử dụng cho D, thì ký hiệu tương ứng $\tilde{\gamma}$ với dấu ngã kí hiệu đối tượng ứng cho $\tilde{D}$ và $\hat{\gamma} := \gamma - \tilde{\gamma}$.

Định lý 2.12. *Nếu $m_n = \tilde{\lambda}_n, \quad \alpha_n = \tilde{\alpha}_n, \quad n \geq 0$, thì $D = \tilde{D}$, tức là $q(t) = \tilde{q}(t)$ trên $(0, \pi)$, $\quad k = \tilde{k}$ và $\quad K = \tilde{K}$. Do đó, dữ liệu phổ $\{m_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ một cách duy nhất xác định thế vị và hệ số của các điều kiện biên.*

Ta đưa ra chứng minh Định lý 2.12. Chứng minh này do Marchenko và sử dụng toán tử biến đổi và đẳng thức Parseval (2.2.2). Phương pháp này cũng áp dụng được cho các toán tử Sturm-Liouville trên nửa đường thẳng và cho chúng ta một phương pháp chứng minh định lý duy nhất về việc khôi phục toán tử từ hàm phổ của nó.

Chứng minh. (*Chứng minh của Marchenko* [4])

Theo (2.3.11),

$$u(t,m) = \cos\tau t + \int_0^t F(t,x)\cos\tau x dx, \quad \tilde{u}(t,m) = \cos\tau t + \int_0^t \tilde{F}(t,x)\cos\tau x dx.$$

Mặt khác,

$$u(t,m) = (E+F)\cos\tau t, \quad \tilde{u}(t,m) = (E+\tilde{F})\cos\tau t,$$

trong đó

$$(E+F)g(t) = g(t) + \int_0^t F(t,x)g(x)dx, \quad (E+\tilde{F})g(t) = g(t) + \int_0^t \tilde{F}(t,x)g(x)dx.$$

Ta có thể xem mối liên hệ $\tilde{u}(t,m) = (E+\tilde{F})\cos\tau t$ như phương trình tích phân Volterra cho $\cos\tau t$. Giải phương trình này ta được

$$\cos\tau t = \tilde{u}(t,m) + \int_0^t \tilde{K}(t,x)\tilde{u}(x,m)dx,$$

trong đó $\tilde{K}(t,x)$ là hàm liên tục, là nhân của toán tử nghịch đảo

$$(E+\tilde{K}) = (E+\tilde{F})^{-1}, \quad \tilde{K}g(t) = \int_0^t \tilde{K}(t,x)g(x)dx.$$

Do đó

$$u(t,m) = \tilde{u}(t,m) + \int_0^t Q(t,x)\tilde{u}(x,m)dx, \tag{2.4.2}$$

trong đó $Q(t,x)$ là một hàm thực liên tục.

Giả sử $g(t) \in L_2(0,\pi)$. Từ (2.4.2) ta suy ra rằng

$$\int_0^\pi g(t)u(t,m)dt = \int_0^\pi f(t)\tilde{u}(t,m)dt,$$

trong đó

$$f(t) = g(t) + \int_t^\pi Q(x,t)g(x)dx.$$

Vì vậy, với tất cả $n \geq 0$,

$$b_n = \tilde{a}_n,$$

$$b_n := \int_0^\pi g(t)u\left(t,m_n\right)dt, \quad \tilde{a}_n := \int_0^\pi f(t)\tilde{u}\left(t,m_n\right)dt.$$

Áp dụng đẳng thức Parseval (2.2.2), ta thu được

$$\int_0^\pi |g(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{|b_n|^2}{\alpha_n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{|\tilde{a}_n|^2}{\alpha_n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{|\tilde{a}_n|^2}{\tilde{\alpha}_n} = \int_0^\pi |f(t)|^2 dt,$$

tức là

$$\|g\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}. \tag{2.4.3}$$

Xét toán tử

$$Ag(t) = g(t) + \int_t^\pi Q(x,t) g(x) dx.$$

Khi đó $Ag = f$. Theo (2.4.3), $\|Ag\|_{L_2} = \|g\|_{L_2}$ với bất kì $g(t) \in L_2(0,\pi)$. Do đó, $A^* = A^{-1}$, nhưng điều này chỉ có thể xảy ra nếu $Q(t,x) \equiv 0$. Vì vậy, $u(t,m) \equiv \tilde{u}(t,m)$, tức là $q(t) = \tilde{q}(t)$ trên $(0,\pi), k = \tilde{k}, K = \tilde{K}$. ■

Định lý 2.13. *Nếu $q(t) = q(\pi - t), K = k, \tilde{q}(t) = \tilde{q}(\pi - t), \tilde{K} = \tilde{k}$ và $m_n = \tilde{m}_n, n \geq 0$, khi đó $q(t) = \tilde{q}(t)$ trên $(0,\pi)$ và $k = \tilde{k}$.*

Chứng minh. Nếu $q(t) = q(\pi - t), K = k$ và $z(t)$ là nghiệm của (2.1.1), thì $z_1(t) := z(\pi - t)$ cũng thỏa mãn (2.1.1). Đặc biệt, ta có $v(t,m) = u(\pi - t, m)$. Sử dụng (2.1.6) ta thu được

$$v(t, m_n) = \beta_n u(t, m_n) = \beta_n v(\pi - t, m_n) = \beta_n^2 u(\pi - t, m_n) = \beta_n^2 v(t, m_n).$$

Suy ra, $\beta_n^2 = 1$. Mặt khác, từ (2.1.6) suy ra rằng $\beta_n u(\pi, m_n) = 1$. Áp dụng Định lý 2.8 ta thu được rằng

$$\beta_n = (-1)^n.$$

Vậy theo (2.1.8) ta có

$$\alpha_n = (-1)^{n+1} \dot{\Delta}(m_n).$$

Theo giả định của Định lý 2.13 ta có $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n, n \geq 0$, và theo Định lý 2.12, $q(t) = \tilde{q}(t)$ trên $(0,\pi)$ và $k = \tilde{k}$. ■

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP GELFAND-LEVITAN

Trong chương này ta mô tả phương pháp Gelfand - Levitan, để giải các bài toán ngược và đưa ra các điều kiện cần và đủ cho tính giải được của chúng. Trọng tâm của phương pháp này là phương trình tích phân tuyến tính đối với nhân của toán tử biến đổi. Kết quả chính của phương pháp Gelfand - Levitan được trình bày trong Định lý 3.2.

3.1. Một số kết quả bổ trợ

Để trình bày phương pháp toán tử biến đổi, trước hết chúng ta chứng minh một số khẳng định

Bổ đề 3.1. *Trong không gian Banach B, xét các phương trình*

$$(E + A_0)\, z_0 = g_0,$$
$$(E + A)\, z = g.$$

trong đó A và A_0 là các toán tử giới nội tuyến tính tác động từ B đến B và E là toán tử đơn vị. Giả sử rằng tồn tại toán tử tuyến tính bị chặn $R_0 = (E + A_0)^{-1}$. Điều này cho thấy phương trình $(E + A_0)\, z_0 = g_0$ giải được duy nhất trong B. Nếu

$$\|A - A_0\| \le (2\,\|R_0\|)^{-1}$$

thì tồn tại toán tử tuyến tính giới nội $R = (E + A)^{-1}$ với

$$R = R_0 \left(E + \sum_{h=1}^{\infty} \left((A_0 - A)\, R_0 \right)^h \right),$$

và $\|R - R_0\| \le 2\,\|R_0\|^2\,\|A - A_0\|$.
Hơn nữa, z và z_0 thỏa mãn:

$$\|z - z_0\| \le C_0 \left(\|A - A_0\| + \|g - g_0\| \right),$$

trong đó C_0 chỉ phụ thuộc $\|R_0\|$ và $\|g_0\|$.

Chứng minh. Ta có $E + A = (E + A_0) + (A - A_0) = (E + (A - A_0) R_0)(E + A_0)$.
Theo các giả định của bổ đề, suy ra rằng $\|(A - A_0) R_0\| \le \dfrac{1}{2}$ và tồn tại toán tử tuyến tính giới nội:

$$\begin{aligned} R = (E + A)^{-1} &= R_0 (E + (A - A_0) R_0)^{-1} \\ &= R_0 \left(E + \sum_{h=1}^{\infty} ((A_0 - A) R_0)^h \right). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\|R\| \le 2\|R_0\|$.
Lại sử dụng các giả thiết về $\|A - A_0\|$ chúng ta suy ra

$$\|R - R_0\| \le \|R_0\| \frac{\|(A - A_0) R_0\|}{1 - \|(A - A_0) R_0\|} \le 2\|R_0\|^2 \|A - A_0\|.$$

Hơn nữa do $z - z_0 = Rg - R_0 g_0 = (R - R_0) g_0 + R(g - g_0)$.
nên $\|z - z_0\| \le 2\|R_0\|^2 \|g_0\| \|A - A_0\| + 2\|R_0\| \|g - g_0\|$. ■

Bổ đề sau đây là một hệ quả hiển nhiên của Bổ đề 3.1 (được áp dụng trong không gian hàm).

Bổ đề 3.2. *Xét phương trình tích phân*

$$z(x, \alpha) + \int_c^d A(x, s, \alpha) z(s, \alpha) \mathrm{d}s = g(x, \alpha); \;\; c \le x \le d. \tag{3.1.1}$$

trong đó $A(x, s, \alpha)$ và $g(x, \alpha)$ là các hàm liên tục. Giả sử với $\alpha = \alpha_0$ cố định, phương trình thuần nhất

$$y(t) + \int_c^d A_0(x, s) y(s) \mathrm{d}s = 0, \quad A_0(x, s) = A(x, s, \alpha_0)$$

chỉ có nghiệm tầm thường. Khi đó trong một lân cận của điểm $\alpha = \alpha_0$, phương trình (3.1.1) có nghiệm duy nhất $z(x, \alpha)$ liên tục theo x và α. Hơn nữa, hàm $z(x, \alpha)$ có cùng tính trơn như $A(x, s, \alpha)$ và $g(x, \alpha)$.

Bổ đề 3.3. *Gọi $u_j(t, m)$, $j \ge 1$ là nghiệm của phương trình*

$$-z'' + q_j(t) z = mz, \quad q_j(t) \in L_2(0, \pi)$$

với các điều kiện biên $u_j(0, m) = 1; u_j'(0, m) = k_j$; và đặt $u(t, m)$ là hàm số được định nghĩa trong phần 2.1. Nếu $\lim_{j \to \infty} \|q_j - q\|_{L_2} = 0$; $\lim_{j \to \infty} k_j = k$ thì

$$\lim_{j \to \infty} \max_{0 \le t \le \pi} \max_{|m| \le r} |u_j(t, m) - u(t, m)| = 0.$$

Chứng minh. Bằng cách lấy đạo hàm ta thấy rằng $u_j(t,m)$ thỏa mãn phương trình tích phân sau:

$$u_j(t,m) = u(t,m) + (k_j - k)\, C(t,m) + \int_0^t f(t,x,m)\,(q_j(x) - q(x))\, u_j(x,m)\, \mathrm{d}x$$

trong đó $f(t,x,m) = S(x,m)C(t,m) - S(t,m)C(x,m)$ là hàm Green cho bài toán Cauchy

$$-z'' + q(t)z - mz = g, \quad z(0) = z'(0) = 0.$$

Cố định $r > 0$. Khi đó với $|m| \le r$ và $t \in [0,\pi]$ ta có

$$|u_j(t,m) - u(t,m)| \le C\left(|k_j - k| + \|q_j - q\|_{L_2} \max_{0\le t\le \pi} \max_{|m|\le r} |u_j(t,m)|\right).$$

Suy ra

$$\max_{0\le t\le \pi} \max_{|m|\le r} |u_j(t,m)| \le C,$$

trong đó C không phụ thuộc vào j. Do vậy

$$\max_{0\le t\le \pi} \max_{m|m|\le r} |u_j(t,m) - u(t,m)| \le C\left(|k_j - k| + \|q_j - q\|_{L_2}\right) \to 0 \text{ khi } j \to \infty$$

■

Bổ đề 3.4. *Cho dãy số $\{\tau_n, \alpha_n\}_{n\ge 0}$ xác định bởi*

$$\tau_n = n + \frac{\kappa}{\pi n} + \frac{\omega_n}{n}, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega_{n1}}{n}, \quad \{\omega_n\}, \{\omega_{n1}\} \in d_2, \alpha_n \ne 0. \tag{3.1.2}$$

Ký hiệu

$$b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos \tau_n t}{\alpha_n} - \frac{\cos nt}{\alpha_n^0}\right), \tag{3.1.3}$$

trong đó

$$\alpha_n^0 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & n > 0. \\ \pi, & n = 0. \end{cases}$$

Khi đó $b(t) \in W_2^1(0, 2\pi)$.

Chứng minh. Đặt $\delta_n = \tau_n - n$. Vì

$$\frac{\cos \tau_n t}{\alpha_n} - \frac{\cos nt}{\alpha_n^0} = \frac{1}{\alpha_n^0}(\cos \tau_n t - \cos nt) + \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_n^0}\right)\cos \tau_n t,$$

$$\cos \tau_n t - \cos nt = \cos(n + \delta_n)\, t - \cos nt = -\sin \delta_n t \sin nt - 2\sin^2 \frac{\delta_n t}{2} \cos nt$$

$$= -\delta_n t \sin nt - (\sin \delta_n t - \delta_n t) \sin nt - 2 \sin^2 \frac{\delta_n t}{2} \cos nt,$$

nên

$$b(t) = A_1(t) + A_2(t),$$

trong đó

$$A_1(t) = -\frac{\kappa t}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = -\frac{\kappa t}{\pi} \cdot \frac{\pi - t}{2}, \quad 0 < t < 2\pi,$$

$$A_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_n^0} \right) \cos \tau_n t + \frac{1}{\pi} (\cos \tau_0 t - 1) - t \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \frac{\sin nt}{n}$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} (\sin \delta_n t - \delta_n t) \sin nt - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\delta_n t}{2} \cos nt. \tag{3.1.4}$$

Vì

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_n^0} = \frac{\gamma_n}{n}, \quad \{\gamma_n\} \in d_2,$$

nên chuỗi trong (3.1.4) hội tụ tuyệt đối và đều trên $[0, 2\pi]$ và $A_2(t) \in W_2^1(0, 2\pi)$.
Vậy $b(t) \in W_2^1(0, 2\pi)$. ■

Bằng cách lập luận tương tự, ta có thể chứng minh các khẳng định tổng quát sau đây.

Bổ đề 3.5. *Cho dãy số $\{\tau_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ có dạng (2.1.23) như đã cho. Khi đó $b(t) \in W_2^{N+1}(0, 2\pi)$.*

Chứng minh. Thật vậy, thay (2.1.23) vào (3.1.3) ta có hai nhóm của chuỗi. Các chuỗi trong nhóm thứ nhất có thể đạo hàm được $N+1$ lần. Các chuỗi của nhóm thứ hai là

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^{2h+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^{2h}}.$$

Lần lượt đạo hàm các chuỗi này tương ứng $2h$ và $2h-1$ lần ta thu được các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}, \quad 0 < t < 2\pi$$

■

Bổ đề 3.6. *Giả sử các số $\{\tau_n, \alpha_n\}_{n>0}$ có dạng (3.1.2). Cố định $C_0 > 0$. Nếu các số $\{\tilde{\tau}_n, \tilde{\alpha}_n\}_{n \geq 0}, \tilde{\alpha}_n \neq 0$ thỏa mãn điều kiện:*

$$\Omega := \left(\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)\xi_n)^2 \right)^{1/2} \leq C_0, \quad \xi_n := |\tilde{\tau}_n - \tau_n| + |\tilde{\alpha}_n - \alpha_n|$$

thì

$$\hat{b}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos \tilde{\tau}_n t}{\tilde{\alpha}_n} - \frac{\cos \tau_n t}{\alpha_n} \right) \in W_2^1(0, 2\pi), \tag{3.1.5}$$

và

$$\max_{0 \le t \le 2\pi} |\hat{b}(t)| \le C \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n, \quad \|\hat{b}(t)\|_{W_2^1} \le C\Omega,$$

trong đó C *phụ thuộc vào* $\{\tau_n, \alpha_n\}_{n \ge 0}$ *và* C_0.

Chứng minh. Rõ ràng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n \le C\kappa$.

Ta viết lại (3.1.5) dưới dạng

$$\begin{aligned}
\hat{b}(t) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\tilde{\alpha}_n} - \frac{1}{\alpha_n} \right) \cos \tau_n t + \frac{1}{\tilde{\alpha}_n} \left(\cos \tilde{\tau}_n t - \cos \tau_n t \right) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n - \tilde{\alpha}_n}{\tilde{\alpha}_n \alpha_n} \cos \tau_n t + \frac{2}{\tilde{\alpha}_n} \sin \frac{(\tau_n - \tilde{\tau}_n) t}{2} \sin \frac{(\tau_n + \tilde{\tau}_n) t}{2} \right).
\end{aligned}$$

Chuỗi này hội tụ tuyệt đối và đều, $\hat{b}(t)$ là hàm số liên tục và

$$|\hat{b}(t)| \le C \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n.$$

Lấy đạo hàm (3.1.5) ta được

$$\begin{aligned}
\hat{b}'(t) &:= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\tau}_n \sin \tilde{\tau}_n t}{\tilde{\alpha}_n} - \frac{\tau_n \sin \tau_n t}{\alpha_n} \right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\tilde{\tau}_n}{\tilde{\alpha}_n} - \frac{\tau_n}{\alpha_n} \right) \sin \tau_n t + \frac{\tilde{\tau}_n}{\tilde{\alpha}_n} \left(\sin \tilde{\tau}_n t - \sin \tau_n t \right) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\alpha}_n \tau_n - \alpha_n \tilde{\tau}_n}{\tilde{\alpha}_n \alpha_n} \sin \tau_n t + \frac{2\tilde{\tau}_n}{\tilde{\alpha}_n} \sin \frac{(\tau_n - \tilde{\tau}_n) t}{2} \cos \frac{(\rho_n + \tilde{\tau}_n) t}{2} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\alpha}_n \tau_n - \alpha_n \tilde{\tau}_n}{\tilde{\alpha}_n \alpha_n} \sin \tau_n t + t \frac{\tilde{\tau}_n}{\tilde{\alpha}_n} (\tau_n - \tilde{\tau}_n) \cos \frac{(\tau_n + \tilde{\tau}_n) t}{2} \right. \\
&\left. + \frac{\tilde{\tau}_n}{\tilde{\alpha}_n} \left(2 \sin \frac{(\tau_n - \tilde{\tau}_n) t}{2} - t (\tau_n - \tilde{\tau}_n) \right) \cos \frac{(\tau_n + \tilde{\tau}_n) t}{2} \right) \\
&= A_1(t) + A_2(t),
\end{aligned}$$

trong đó

$$A_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_n \tau_n - \alpha_n \tilde{\tau}_n}{\tilde{\alpha}_n \alpha_n} \sin \tau_n t + t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\tau}_n}{\tilde{\alpha}_n} (\tau_n - \tilde{\tau}_n) \cos \tau_n t, \tag{3.1.6}$$

$$A_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\tau}_n}{\tilde{\alpha}_n} \left(2 \sin \frac{(\tau_n - \tilde{\tau}_n) t}{2} - t (\tau_n - \tilde{\tau}_n) \right) \cos \frac{(\tau_n + \tilde{\tau}_n) t}{2}$$

$$+\,t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{\tau}_n}{\tilde{\alpha}_n}\left(\tau_n-\tilde{\tau}_n\right)\left(\cos\frac{(\tau_n+\tilde{\tau}_n)\,t}{2}-\cos\tau_n t\right) \tag{3.1.7}$$

Chuỗi trong (3.1.7) hội tụ tuyệt đối và đều, và

$$|A_2(t)|\le C\sum_{n=0}^{\infty}|\tau_n-\tilde{\tau}_n|\,.$$

Chuỗi trong (3.1.6) hội tụ trong $L_2(0,2\pi)$ và

$$\|A_1(t)\|_{L_2(0,2\pi)}\le C\Omega.$$

■

Từ các đánh giá này ta suy ra các khẳng định của Bổ đề.

3.2. Khôi phục các toán tử vi phân từ dữ liệu phổ

Ta xét bài toán giá trị biên $D=D(q(t),k,K)$. Cho $\{m_n,\alpha_n\}_{n>0}$ là dữ liệu phổ của D, $\tau_n=\sqrt{m_n}$. Chúng ta sẽ giải bài toán ngược hoặc khôi phục D từ dữ liệu phổ đã cho $\{m_n,\alpha_n\}_{n\ge 0}$. Như đã trình bày trong 2.1, dữ liệu phổ có các tính chất:

$$\tau_n=n+\frac{\kappa}{\pi n}+\frac{\omega_n}{n},\quad \alpha_n=\frac{\pi}{2}+\frac{\omega_{n1}}{n},\quad \{\omega_n\},\{\omega_{n1}\}\in d_2, \tag{3.2.1}$$

$$\alpha_n>0,\quad m_n\ne m_\lambda(n\ne\lambda). \tag{3.2.2}$$

Hơn thế nữa,

$$\omega_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{n}\right),\quad \omega_{n1}=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\pi-x)q(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

vậy các thành phần chính của ω_n, ω_{n1} phụ thuộc tuyến tính vào thế vị.

Xét hàm số

$$G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cos\tau_n t\cos\tau_n x}{\alpha_n}-\frac{\cos nt\cos nx}{\alpha_n^0}\right), \tag{3.2.3}$$

trong đó

$$\alpha_n^0=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & n>0,\\ \pi, & n=0.\end{cases}$$

Vì $G(t,x)=\frac{(b(t+x)+b(t-x))}{2}$ nên theo Bổ đề 3.4 hàm số $G(t,x)$ liên tục và $\frac{d}{\mathrm{d}t}G(t,t)\in L_2(0,\pi)$.

Định lý 3.1. *[5] Với mỗi t cố định thuộc $(0, \pi]$, nhân $F(t, x)$ xuất hiện tương ứng trong (2.3.11) thỏa mãn phương trình tích phân tuyến tính sau*

$$F(t,x) + G(t,x) + \int_0^t F(t,s)G(s,x)ds = 0, \quad 0 < x < t. \tag{3.2.4}$$

Phương trình này được gọi là phương trình Gelfand - Levitan.

Định lý 3.1 cho phép ta quy bài toán ngược về việc giải phương trình Gelfand - Levitan (3.2.4). Chú ý rằng (3.2.4) là phương trình tích phân loại Fredholm mà trong đó t là tham số.

Chứng minh. Có thể xem (3.2.4) như là phương trình tích phân Volterra theo phương diện $\cos \tau t$. Giải phương trình này ta thu được

$$\cos \tau t = u(t,m) + \int_0^t K(t,x)u(x,m)\,\mathrm{d}x, \tag{3.2.3}$$

trong đó $K(t, x)$ là một hàm liên tục. Sử dụng (3.2.4) và (3.2.3) ta tính được

$$\sum_{n=0}^N \frac{u(t,m_n)\cos \tau_n x}{\alpha_n} = \sum_{n=0}^N \left(\frac{\cos \tau_n t \cos \tau_n x}{\alpha_n} + \frac{\cos \tau_n x}{\alpha_n} \int_0^t F(t,s)\cos \tau_n s ds \right),$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{u(t,m_n)\cos \tau_n x}{\alpha_n} = \sum_{n=0}^N \left(\frac{u(t,m_n)\,u(x,m_n)}{\alpha_n} + \frac{u(t,m_n)}{\alpha_n} \int_0^x K(x,s)u(s,m_n)\,ds \right).$$

Điều này dẫn đến

$$\Phi_N(t,x) = I_{N1}(t,x) + I_{N2}(t,x) + I_{N3}(t,x) + I_{N4}(t,x),$$

trong đó

$$\Phi_N(t,x) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{u(t,m_n)\,u(x,m_n)}{\alpha_n} - \frac{\cos nt \cos nx}{\alpha_n^0} \right),$$

$$I_{N1}(t,x) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{\cos \tau_n t \cos \tau_n x}{\alpha_n} - \frac{\cos nt \cos nx}{\alpha_n^0} \right),$$

$$I_{N2}(t,x) = \sum_{n=0}^N \frac{\cos nx}{\alpha_n^0} \int_0^t F(t,s)\cos ns\,ds,$$

$$I_{N3}(t,x) = \sum_{n=0}^N \int_0^t F(t,s) \left(\frac{\cos \tau_n x \cos \tau_n s}{\alpha_n} - \frac{\cos nx \cos ns}{\alpha_n^0} \right) ds,$$

$$I_{N4}(t,x) = -\sum_{n=0}^{N} \frac{u\left(t,m_n\right)}{\alpha_n} \int_0^x K(x,s) u\left(s,m_n\right) ds.$$

Lấy $g(t) \in AC[0,\pi]$. Theo Định lý 2.7 thì

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\le t\le\pi} \int_0^\pi g(x)\Phi_N(t,x)\,\mathrm{d}x = 0;$$

hơn nữa, đều với $t \in [0,\pi]$, các giới hạn:

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi g(x) I_{N1}(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi g(x) G(t,x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi g(x) I_{N2}(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t g(x) F(t,x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi g(x) I_{N3}(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi g(x) \left(\int_0^t F(t,s) G(s,x) ds \right) \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi g(x) I_{N4}(t,x)\,\mathrm{d}x &= -\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{u\left(t,m_n\right)}{\alpha_n} \int_0^\pi u\left(s,m_n\right) \left(\int_s^\pi K(x,s) g(x)\,\mathrm{d}x \right) ds \\ &= -\int_x^\pi g(x) K(x,t)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Thác triển $F(t,x) = K(t,x) = 0$ với $t < x$. Khi đó, do hàm $g(t)$ là tùy ý ta có

$$F(t,x) + G(t,x) + \int_0^t F(t,s) G(s,x) ds - K(x,t) = 0.$$

Với $x < t$ ta nhận được(3.2.4). ∎

Định lý tiếp theo là kết quả chính của phần 3. Định lý này cho chúng ta thuật toán tìm lời giải cũng như điều kiện cần và đủ để giải bài toán ngược.

Định lý 3.2. *[6] Để dãy số thực $\{m_n, b_n\}_{n\ge 0}$ là dữ liệu phổ cho bài toán giá trị biên $D(q(t),k,K)$ nào đó với $q(t) \in L_2(0,\pi)$, điều kiện cần và đủ là các đẳng thức* (3.2.1)-(3.2.2) *thỏa mãn. Hơn nữa, $q(t) \in W_2^N$ nếu và chỉ nếu (2.1.23) đúng. Bài toán giá trị biên $D(q(t),k,K)$ có thể được xây dựng bằng thuật toán sau*

Thuật toán 3.1.

(i) Từ dãy số $\{m_n, b_n\}_{n\geq 0}$ *đã cho ta xây dựng hàm* $G(t,x)$ *theo* (3.2.3).

(ii) Tìm hàm $F(t,x)$ *bằng cách giải phương trình* (3.2.4).

(iii) Tính $q(t)$, k *và* K *theo công thức*

$$q(t) = 2\frac{d}{\mathrm{d}t}F(t,t), \quad k = F(0,0), \tag{3.2.4}$$

$$K = \kappa - k - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.2.5}$$

Điều kiện cần của Định lý 3.2 đã được chứng minh ở trên. Bây giờ ta chứng minh điều kiện đủ.

Giả sử dãy số thực đã cho $\{m_n, b_n\}_{n\geq 0}$ có dạng (3.2.1)-(3.2.2). Ta xây dựng hàm $G(t,x)$ theo (3.2.3) và xét phương trình (3.2.4).

Bổ đề 3.7. *Với mỗi* t *cố định thuộc* $(0,\pi]$, *phương trình* (3.2.4) *có nghiệm duy nhất* $F(t,x)$ *trong* $L_2(0,t)$.

Chứng minh. Vì (3.2.4) là phương trình Fredholm nên ta chỉ cần chứng minh phương trình thuần nhất

$$f(x) + \int_0^z G(s,x)f(s)ds = 0 \tag{3.2.6}$$

chỉ có nghiệm tầm thường $f(x) = 0$.

Giả sử $f(x)$ là một nghiệm của (3.2.6). Khi đó

$$\int_0^t f^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \int_0^t G(s,x)f(s)f(x)ds\,\mathrm{d}x = 0$$

hay là

$$\int_0^t f^2(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^t f(x)\cos\tau_n x\,\mathrm{d}x\right)^2 - \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\alpha_n^0}\left(\int_0^t f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)^2 = 0.$$

Sử dụng đẳng thức Parseval ta có

$$\int_0^t f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\alpha_n^0}\left(\int_0^t f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

Thác triển $f(x)$, bằng 0 khi $x > t$, ta thu được

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^t f(x)\cos\tau_n x\,\mathrm{d}x\right)^2 = 0.$$

Vì $\alpha_n > 0$ nên

$$\int\limits_0^t f(x)\cos\tau_n x\,\mathrm{d}x = 0, \quad n \geq 0.$$

Dãy hàm $\{\cos\tau_n x\}_{n\geq 0}$ là đầy đủ trong $L_2(0,\pi)$, nên $f(x) = 0$. ■

Ta quay lại chứng minh của Định lý 3.2.

Chứng minh. Gọi $F(t,x)$ là nghiệm của (3.2.4). Bằng phép thế $x \to xt$, $s \to st$ trong (3.2.4) ta nhận được

$$G(t,tx) + F(t,tx) + t\int\limits_0^1 F(t,ts)G(tx,ts)ds = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{3.2.7}$$

Từ (3.2.4), (3.2.7) và Bổ đề 3.2 suy ra $F(t,x)$ là hàm liên tục và có cùng độ trơn như $G(t,x)$. Ngoài ra, $\dfrac{d}{\mathrm{d}t}F(t,t) \in L_2(0,\pi)$.

■

Ta xây dựng hàm $u(t,m)$ theo (3.2.4) và hàm $q(t)$, số k theo (3.2.4).

Bổ đề 3.8. *Các đẳng thức sau là đúng*

$$-u''(t,m) + q(t)u(t,m) = mu(t,m), \tag{3.2.8}$$

$$u(0,m) = 1, \quad u'(0,m) = k. \tag{3.2.9}$$

Chứng minh. 1) Trước tiên ta giả sử $b(t) \in W_2^2(0,2\pi)$, trong đó $b(t)$ được xác định bởi (3.1.3).

Đạo hàm đồng nhất thức

$$P(t,x) := G(t,x) + F(t,x) + \int\limits_0^t F(t,s)G(s,x)ds \equiv 0, \tag{3.2.10}$$

ta tính được

$$P_x(t,x) = G_x(t,x) + F_x(t,x) + \int\limits_0^t F(t,s)G_x(s,x)ds = 0, \tag{3.2.11}$$

$$P_{xx}(t,x) = G_{xx}(t,x) + F_{xx}(t,x) + \int\limits_0^t F(t,s)G_{xx}(s,x)ds = 0, \tag{3.2.12}$$

$$P_{tt}(t,x) = G_{tt}(t,x) + F_{tt}(t,x) + \frac{dF(t,t)}{\mathrm{d}t}G(t,x) + F(t,t)G_t(t,x)$$

$$+\left.\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\right|_{x=t} Gt,x) + \int\limits_0^t F_{tt}(t,s)G(s,x)ds = 0. \tag{3.2.13}$$

Theo (3.2.3) thì $G_{xx}(s,x) = G_{ss}(s,x)$ và $G_x(t,x)_{|\,\mathrm{d}x=0} = 0$. Khi đó, với $x = 0$ thì (3.2.11) cho

$$\left.\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \tag{3.2.14}$$

Hơn nữa, tích phân từng phần (3.2.12) ta được

$$\begin{aligned} P_{xx}(t,x) &= G_{xx}(t,x) + F_{xx}(t,x) + F(t,t)\left.\frac{\partial G(s,x)}{\partial s}\right|_{s=t} \\ &- \left.\frac{\partial F(t,s)}{\partial s}\right|_{s=t} G(t,x) + \int\limits_0^t F_{ss}(t,s)G(s,x)ds = 0. \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Từ (3.2.10), (3.2.13), (3.2.15) và đẳng thức

$$P_{tt}(t,x) - P_{xx}(t,x) - q(t)P(t,x) \equiv 0$$

suy ra

$$\begin{aligned} &(F_{tt}(t,x) - F_{xx}(t,x) - q(t)F(t,x)) \\ &+ \int\limits_0^t (F_{tt}(t,s) - F_{ss}(t,s) - q(t)F(t,s))\, G(s,x)ds \equiv 0. \end{aligned}$$

Theo Bổ đề 3.7, phương trình thuần nhất này chỉ có nghiệm tầm thường, tức là

$$F_{tt}(t,x) - F_{xx}(t,x) - q(t)F(t,x) = 0 \quad 0 < x < t. \tag{3.2.16}$$

Đạo hàm (3.2.4) hai lần ta được

$$u'(t,m) = -\tau \sin\tau t + F(t,t)\cos\tau t + \int\limits_0^t F_t(t,x)\cos\tau x\,\mathrm{d}x, \tag{3.2.17}$$

$$\begin{aligned} u''(t,m) &= -\tau^2\cos\tau t - F(t,t)\tau\sin\tau t \\ &+ \left(\frac{dF(t,t)}{\mathrm{d}t} + \left.\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\right|_{x=t}\right)\cos\tau t + \int\limits_0^t F_{tt}(t,x)\cos\tau x\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Mặt khác, tích phân từng phần hai lần ta được

$$mu(t,m) = \tau^2\cos\tau t + \tau^2 \int\limits_0^t F(t,x)\cos\tau x\,\mathrm{d}x = \tau^2\cos\tau t + F(t,t)\tau\sin\tau t$$

$$+\left.\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right|_{x=t}\cos\tau t-\left.\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}-\int\limits_0^t F_{xx}(t,x)\cos\tau x\,\mathrm{d}x.$$

Kết hợp với (3.2.4) và (3.2.18) cho ra

$$u''(t,m)+mu(t,m)-q(t)u(t,m)=\left(2\frac{dF(t,t)}{\mathrm{d}t}-q(t)\right)\cos\tau t-\left.\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}$$
$$+\int\limits_0^t\left(F_{tt}(t,x)-F_{xx}(t,x)-q(t)F(t,x)\right)\cos\tau x\,\mathrm{d}x.$$

Từ (3.2.4), (3.2.14), (3.2.16) ta nhận được (3.2.8). Các đẳng thức (3.2.9) được suy ra từ (2.3.11) và (3.2.17) với $t=0$.

2) Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát khi (3.2.1)-(3.2.2) đều đúng. Khi đó theo Bổ đề 3.4 thì $b(t)\in W_2^1(0,2\pi)$. Ký hiệu $\tilde{u}(t,m)$ là nghiệm của phương trình (2.1.1) dưới điều kiện $\tilde{u}(0,m)=1$, $\tilde{u}'(0,m)=k$. Mục tiêu của chúng ta là chứng minh $\tilde{u}(t,m)\equiv u(t,m)$. Chọn dãy số $\left\{\tau_{n,(j)},\alpha_{n,(j)}\right\}_{n\ge 0}, j\ge 1$ có dạng

$$\tau_{n,(j)}=n+\frac{\kappa}{\pi n}+\frac{\omega_{n,(j)}}{n^2},\quad \alpha_{n,(j)}=\frac{\pi}{2}+\frac{\kappa_{n,(j)}}{n^2}+\frac{\omega_{n1,(j)}}{n^2},\quad \left\{\omega_{n,(j)}\right\},\left\{\omega_{n1,(j)}\right\}\in d_2$$

sao cho khi $j\to\infty$,

$$\Omega_j:=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|(n+1)\xi_{n,(j)}\right|^2\right)^{1/2}\to 0,\quad \xi_{n,(j)}:=\left|\tau_{n,(j)}-\tau_n\right|+\left|\alpha_{n,(j)}-\alpha_n\right|.$$

Ký hiệu

$$b_j(t):=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cos\tau_{n,(j)}t}{\alpha_{n,(j)}}-\frac{\cos nt}{\alpha_n^0}\right)\quad j\ge 1.$$

Theo Bổ đề 3.5 thì $b_j(t)\in W_2^2(0,2\pi)$. Gọi $F_j(t,x)$ là nghiệm của phương trình Gelfand - Levitan

$$F_j(t,x)+G_j(t,x)+\int\limits_0^t F_j(t,s)G_j(s,x)ds=0,\quad 0<x<t,$$

trong đó $G_j(t,x)=\left(b_j(t+x)+b_j(t-x)\right)/2$. Lấy

$$q_j(t):=2\frac{d}{\mathrm{d}t}F_j(t,t),\quad k_j:=F_j(0,0),$$

$$u_j(t,m)=\cos\tau t+\int\limits_0^t F_j(t,x)\cos\tau x\,\mathrm{d}x. \tag{3.2.19}$$

Vì $b_j(t)\in W_2^2(0,2\pi)$ nên từ phần đầu tiên của chứng minh Bổ đề 3.8 suy ra

$$-u_j''(t,m)+q_j(t)u_j(t,m)=mu_j(t,m),\quad u_j(0,m)=1,\quad u_j'(0,m)=k_j.$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 3.6 thì

$$\lim_{j\to\infty} \|b_j(t) - b(t)\|_{W_2^1} = 0.$$

Từ điều này và Bổ đề 3.1 ta có

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\le x\le t\le\pi} |F_j(t,x) - F(t,x)| = 0, \tag{3.2.20}$$

$$\lim_{j\to\infty} \|q_j - q\|_{L_2} = 0, \quad \lim_{j\to\infty} k_j = k. \tag{3.2.21}$$

Từ (3.2.4), (3.2.19) và (3.2.20) suy ra

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\le t\le\pi} \max_{|m|\le r} |u_j(t,m) - \tilde{u}(t,m)| = 0.$$

Vậy $\tilde{u}(t,m) \equiv u(t,m)$ và Bổ đề 3.8 được chứng minh xong. ■

Bổ đề 3.9. *Đẳng thức sau là đúng*

$$K(t,x) = G(t,x) + \int_0^x F(x,\varphi)G(t,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \quad 0 \le x \le t, \tag{3.2.22}$$

trong đó $K(t,x)$ *được xác định trong* (3.2.3).

Chứng minh. 1) Đầu tiên giả sử rằng $b(t) \in W_2^2(0,2\pi)$. Đạo hàm (3.2.3) hai lần, ta tính được

$$-\tau\sin\tau t = u'(t,m) + K(t,t)u(t,m) + \int_0^t K_x(t,x)u(x,m)\,\mathrm{d}x, \tag{3.2.23}$$

$$\begin{aligned} -\tau^2\cos\tau t &= u''(t,m) + K(t,t)u'(t,m) \\ &+ \left(\frac{dK(t,t)}{\mathrm{d}t} + \left.\frac{\partial K(t,x)}{\partial t}\right|_{x=t}\right)u(t,m) + \int_0^t K_{tt}(t,x)u(x,m)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Mặt khác, từ (3.2.3) và (3.2.8) suy ra

$$-\tau^2\cos\tau t = u''(t,m) - q(t)u(t,m) + \int_0^t K(t,x)\big(u''(x,m) - q(x)u(x,m)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Tích phân từng phần hai lần và sử dụng (3.2.9) ta suy ra

$$-\tau^2\cos\tau t = u''(t,m) + K(t,t)u'(t,m) - \left(\left.\frac{\partial K(t,x)}{\partial x}\right|_{x=t} + q(t)\right)u(t,m)$$

$$+\left(\left.\frac{\partial K(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} - kK(t,0)\right) + \int\limits_0^t \left(K_{xx}(t,x) - q(x)K(t,x)\right) u(x,m)\mathrm{d}x.$$

Kết hợp với (3.2.24) và

$$\frac{dK(t,t)}{\mathrm{d}t} = \left.\left(\frac{\partial K(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial K(t,x)}{\partial x}\right)\right|_{x=t}$$

suy ra

$$a_0(t) + a_1(t)u(t,m) + \int\limits_0^t a(t,x)u(x,m)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{3.2.25}$$

trong đó

$$\left.\begin{aligned} a_0(t) := -\left(\left.\frac{\partial K(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} - kK(t,0)\right), a_1(t) := 2\frac{dK(t,t)}{\mathrm{d}t} + q(t) \\ a(t,x) := K_{tt}(t,x) - K_{xx}(t,x) + q(x)K(t,x). \end{aligned}\right\} \tag{3.2.26}$$

Thay (3.2.4) vào (3.2.25) ta được

$$a_0(t) + a_1(t)\cos\tau t + \int\limits_0^t B(t,x)\cos\tau x\,\mathrm{d}x = 0, \tag{3.2.27}$$

trong đó

$$B(t,x) = a(t,x) + a_1(t)F(t,x) + \int\limits_x^t a(t,s)F(s,x)ds. \tag{3.2.28}$$

Từ (3.2.27) suy ra với $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{t}$

$$a_0(t) + \int\limits_0^t B(t,x)\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{t}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Theo Bổ đề Riemann-Lebesgue, tích phân này tiến tới 0 khi $n \to \infty$; do vậy $a_0(t) = 0$. Hơn nữa, trong (3.2.27) lấy $\tau = \frac{2n\pi}{t}$, ta được

$$a_1(t) + \int\limits_0^t B(t,x)\cos\frac{2n\pi x}{t}\,\mathrm{d}x = 0,$$

do đó, bằng lý luận tương tự như ở trên ta nhận được, $a_1(t) = 0$. Do vậy, (3.2.27) có dạng

$$\int\limits_0^t B(t,x)\cos\tau x\,\mathrm{d}x = 0, \quad \tau \in \mathbb{C},$$

từ đó suy ra $B(t,x)=0$. Do đó, (3.2.28) suy ra

$$a(t,x)+\int\limits_x^t a(t,s)F(s,x)ds=0.$$

Từ đó suy ra rằng $a(t,x)=0$. Trong (3.2.23) lấy $t=0$ ta được

$$H(0,0)=-k. \tag{3.2.29}$$

Vì $a_0(t)=a_1(t)=a(t,x)=0$ nên ta kết luận từ (3.2.26) và (3.2.29) rằng hàm $K(t,x)$ giải bài toán giá trị biên

$$\left.\begin{array}{c} K_{tt}(t,x)-K_{xx}(t,x)+q(x)K(t,x)=0, \quad 0\le x\le t \\ K(t,t)=-k-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^t q(x)\,\mathrm{d}x, \quad \left.\dfrac{\partial K(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}-kK(t,0)=0 \end{array}\right\} \tag{3.2.30}$$

Khẳng định ngược lại cũng đúng: Nếu hàm $K(t,x)$ thỏa mãn (3.2.30) thì ta có (3.2.3). Thật vậy, ký hiệu

$$\gamma(t,m):=u(t,m)+\int\limits_0^t K(t,x)u(x,m)\,\mathrm{d}x.$$

Bằng cách lập luận tương tự như trên ta tính được

$$\gamma''(t,m)+m\gamma(t,m)=\left(2\frac{dK(t,t)}{\mathrm{d}t}+q(t)\right)u(t,m)-\left(\left.\frac{\partial K(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}-kK(t,0)\right)$$
$$+\int\limits_0^t\left(K_{tt}(t,x)-K_{xx}(t,x)+q(x)K(t,x)\right)u(x,m)\,\mathrm{d}x.$$

Từ (3.2.30) ta có $\gamma''(t,m)+m\gamma(t,m)=0$. Rõ ràng $\gamma(0,m)=1, \gamma'(0,m)=0$. Vậy thì $\gamma(t,m)=\cos\tau t$, tức là (3.2.3) đúng.

Ký hiệu

$$\tilde{K}(t,x):=G(t,x)+\int\limits_0^x F(x,\varphi)G(t,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi. \tag{3.2.31}$$

Ta cần chỉ ra rằng hàm $\tilde{K}(t,x)$ thỏa mãn (3.2.30).

(i) Đạo hàm (3.2.31) theo x rồi sau đó cho $x=0$ ta được

$$\left.\frac{\partial\tilde{K}(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}=F(0,0)G(t,0)=kG(t,0).$$

Vì $\tilde{K}(t,0)=G(t,0)$ nên

$$\left.\frac{\partial\tilde{K}(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}-k\tilde{K}(t,0)=0.$$

(ii) Từ (2.3.11) và (3.2.31) ta nhận được

$$\tilde{K}(t,t) = G(t,t) + \int\limits_0^t F(t,\varphi)G(t,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = -F(t,t),$$

tức là, theo (3.2.4)

$$\tilde{K}(t,t) = -k - \frac{1}{2}\int\limits_0^t q(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iii) Lại sử dụng (3.2.31), ta tính được

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{xx}(t,x) = G_{xx}(t,x) &+ \frac{dF(x,x)}{\mathrm{d}x}G(t,x) + F(x,x)G_x(t,x)\\ &+ \left.\frac{\partial F(x,\varphi)}{\partial x}\right|_{\varphi=x} G(t,x) + \int\limits_0^x F_{xx}(x,\varphi)G(t,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{tt}(t,x) &= G_{tt}(t,x) + \int\limits_0^x F(x,\varphi)G_{tt}(t,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\\ &= G_{tt}(t,x) + \int\limits_0^x F(x,\varphi)G_{\varphi\varphi}(t,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\\ &= G_{tt}(t,x) + F(x,x)G_t(t,x) - \left.\frac{\partial F(x,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=x} G(t,x)\\ &+ \int\limits_0^x F_{\varphi\varphi}(x,\varphi)G(t,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{tt}(t,x) - \tilde{K}_{xx}(t,x) + q(x)\tilde{K}(t,x) &= \left(q(x) - 2\frac{dF(x,x)}{\mathrm{d}x}\right)G(t,x)\\ &- \int\limits_0^x \left(F_{xx}(x,\varphi) - F_{\varphi\varphi}(x,\varphi) - q(x)F(x,\varphi)\right).\end{aligned}$$

Từ (3.2.4) và (3.2.16) ta nhận được

$$\tilde{K}_{tt}(t,x) - \tilde{K}_{xx}(t,x) + q(x)\tilde{K}(t,x) = 0.$$

Vì $\tilde{K}(t,x)$ thỏa mãn (3.2.30) nên, như đã chỉ ra ở trên, thì

$$\cos\tau t = u(t,m) + \int\limits_0^t \tilde{K}(t,x)u(x,m)\,\mathrm{d}x.$$

Đối chiếu đẳng thức này với (3.2.3) ta kết luận

$$\int_0^t (\tilde{K}(t,x) - K(t,x))u(x,m)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ với mọi } m,$$

tức là, $\tilde{K}(t,x) = K(t,x)$.

2) Ta xét trường hợp tổng quát khi (3.2.1)-(3.2.2) đều đúng. Khi đó $b(t) \in W_2^1(0,2\pi)$. Lặp lại các chứng minh của Bổ đề 3.8, ta xây dựng dãy số $\left\{\tau_{n,(j)}, \alpha_{n,(j)}\right\}_{n\geq 0}, j \geq 1$ và các hàm $b_j(t) \in W_2^2(0,2\pi), j \geq 1$ sao cho

$$\lim_{j\to\infty} \|b_j(t) - b(t)\|_{W_2^1} = 0.$$

Khi đó

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\leq x\leq t\leq \pi} |G_j(t,x) - G(t,x)| = 0,$$

và (3.2.20) là đúng. Tương tự,

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\leq x\leq t\leq \pi} |K_j(t,x) - K(t,x)| = 0.$$

Ở trên đã chứng minh được rằng

$$K_j(t,x) = G_j(t,x) + \int_0^x F_j(x,\varphi)G_j(t,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Cho $j \to \infty$ ta thu được (3.2.22) và Bổ đề 3.9 được chứng minh xong. ■

Bổ đề 3.10. *Với mỗi hàm $f(t) \in L_2(0,\pi)$ thì*

$$\int_0^\pi f^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^\pi f(x)u\left(x, m_n\right)\mathrm{d}x \right)^2. \tag{3.2.32}$$

Chứng minh. Ký hiệu

$$Q(m) := \int_0^\pi f(x)u(x,m)\,\mathrm{d}x.$$

Theo (2.3.11) thì

$$Q(m) = \int_0^\pi k(x)\cos\tau x\,\mathrm{d}x,$$

trong đó

$$k(x) = f(x) + \int_x^\pi F(s,x)f(s)ds. \tag{3.2.33}$$

Tương tự, để ý (3.2.3) ta có

$$f(x) = k(x) + \int_x^\pi K(s,x)k(s)ds. \tag{3.2.34}$$

Sử dụng (3.2.33) ta tính được

$$\begin{aligned}\int_0^\pi k(x)G(t,x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \left(f(x) + \int_x^\pi F(\varphi,x)f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right) G(t,x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi f(x)\left(G(t,x) + \int_0^x F(x,\varphi)G(t,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^t f(x)\left(G(t,x) + \int_0^x F(x,\varphi)G(t,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}x\\ &+ \int_x^\pi f(x)\left(G(t,x) + \int_0^x F(x,\varphi)G(t,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Từ điều này và tính chất của (3.2.22) và (3.2.4) ta thu được

$$\int_0^\pi k(x)G(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t f(x)K(t,x)\,\mathrm{d}x - \int_t^\pi f(x)F(x,t)\,\mathrm{d}x. \tag{3.2.35}$$

Từ (3.2.3) và đẳng thức Parseval suy ra

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi k^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi\int_0^\pi k(t)k(x)G(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi k^2(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^\pi k(x)\cos\tau_n x\,\mathrm{d}x\right)^2 - \frac{1}{\alpha_n^0}\left(\int_0^\pi k(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)^2\right)\\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{Q^2\left(n^2\right)}{\alpha_n^0} + \sum_{n=0}^\infty\left(\frac{Q^2\left(m_n\right)}{\alpha_n} - \frac{Q^2\left(n^2\right)}{\alpha_n^0}\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{Q^2\left(m_n\right)}{\alpha_n}.\end{aligned}$$

Sử dụng (3.2.35) ta được

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty \frac{Q^2\left(m_n\right)}{\alpha_n} &= \int_0^\pi k^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi k(t)\left(\int_0^t f(x)K(t,x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\ &- \int_0^\pi k(t)\left(\int_t^\pi f(x)F(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \int_0^\pi k^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi f(x)\left(\int_x^\pi K(t,x)k(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$- \int_0^\pi k(t)\left(\int_t^\pi f(x)F(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

Sử dụng (3.2.33) và (3.2.34) ta nhận được

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^2(m_n)}{\alpha_n} = \int_0^\pi k^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi f(x)(f(x)-k(x))\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi k(t)(k(t)-f(t))\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

tức là, (3.2.32) thỏa mãn. ■

Hệ quả 3.1. *Với các hàm tùy ý $g(t), f(t) \in L_2(0,\pi)$ thì*

$$\int_0^\pi g(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_0^\pi g(x)u(x,m_n)\,\mathrm{d}x \int_0^\pi f(x)u(x,m_n)\,\mathrm{d}x. \tag{3.2.36}$$

Thật vậy, (3.2.36) được suy ra từ (3.2.32) bằng cách áp dụng cho hàm $g+f$.

Bổ đề 3.11. *Đẳng thức sau đây là đúng*

$$\int_0^\pi u(x,m_h)\,u(x,m_n)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq h, \\ \alpha_n, & n = h. \end{cases} \tag{3.2.37}$$

Chứng minh. 1) Lấy $g(t) \in W_2^2[0,\pi]$. Xét chuỗi

$$g^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u(t,m_n), \tag{3.2.38}$$

trong đó

$$c_n := \frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi g(t)u(t,m_n)\,\mathrm{d}t. \tag{3.2.39}$$

Sử dụng Bổ đề 3.8 và tính tích phân từng phần ta được

$$c_n = \frac{1}{\alpha_n m_n}\int_0^\pi g(t)\left(-u''(t,m_n) + q(t)u(t,m_n)\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{\alpha_n m_n}\Big(kg(0) - g'(0) + u(\pi,m_n)\,g'(\pi) - u'(\pi,m_n)\,g(\pi)$$

$$+\int_0^\pi u\left(t,m_n\right)\Big(-g''(t)+q(t)g(t)\Big)\,\mathrm{d}t\Bigg).$$

Sử dụng các công thức tiệm cận (3.2.1) và (2.1.15) ta có thể kiểm chứng rằng khi $n \to \infty$ thì

$$c_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad u\left(t,m_n\right) = O(1),$$

đều với $t \in [0,\pi]$. Điều này kéo theo chuỗi (3.2.38) hội tụ tuyệt đối và đều trên $[0,\pi]$. Theo (3.2.36) và (3.2.39) thì

$$\begin{aligned}\int_0^\pi g(t)f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^\pi f(x)u\left(x,m_n\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi f(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n u\left(x,m_n\right)\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)g^*(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Vì $f(t)$ là tùy ý nên $g^*(t) = g(t)$, tức là,

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u\left(t,m_n\right). \tag{3.2.40}$$

2) Cố định $h \geq 0$ và lấy $g(t) = u\left(t,m_h\right)$. Khi đó, từ (3.2.40) ta có

$$u\left(t,m_h\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{nh} u\left(t,m_n\right), \quad c_{nh} = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi u\left(t,m_h\right)u\left(t,m_n\right)\mathrm{d}t.$$

Hơn nữa, do dãy hàm $\{\cos\tau_n t\}_{n\geq 0}$ là tối thiểu trong $L_2(0,\pi)$ nên theo (2.3.11) thì dãy $\{u\left(t,m_n\right)\}_{n\geq 0}$ cũng tối thiểu trong $L_2(0,\pi)$. Vậy thì $c_{nh} = \delta_{nh}$ (δ_{nh} là Kronecker) và ta thu được (3.2.37). ■

Bổ đề 3.12. *Với mọi $n, \lambda \geq 0$ thì*

$$\frac{u'\left(\pi,m_n\right)}{u\left(\pi,m_n\right)} = \frac{u'\left(\pi,m_\lambda\right)}{u\left(\pi,m_\lambda\right)}. \tag{3.2.41}$$

Chứng minh. Từ (2.1.34) ta có

$$\left(m_n - m_\lambda\right)\int_0^\pi u\left(t,m_n\right)u\left(t,m_\lambda\right)\mathrm{d}t = \Big(u\left(t,m_n\right)u'\left(t,m_\lambda\right) - u'\left(t,m_n\right)u\left(t,m_\lambda\right)\Big)\Bigg|_0^\pi.$$

Từ (3.2.37) ta có

$$u\left(\pi,m_n\right)u'\left(\pi,m_\lambda\right) - u'\left(\pi,m_n\right)u\left(\pi,m_\lambda\right) = 0. \tag{3.2.42}$$

Rõ ràng, $u(\pi, m_n) \neq 0$ với mọi $n \geq 0$. Thật vậy, nếu ta giả sử rằng $u(\pi, m_\lambda) = 0$ với λ nào đó thì $u'(\pi, m_\lambda) \neq 0$ và từ (3.2.42), $u(\pi, m_n) = 0$ với mọi n.

Điều này không thể xảy ra do $u(\pi, m_n) = (-1)^n + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Vì $u(\pi, m_n) \neq 0$ với mọi $n \geq 0$ nên (3.2.41) được suy ra từ (3.2.42).

Ký hiệu

$$\tilde{K} = -\frac{u'(\pi, m_n)}{u(\pi, m_n)}.$$

Chú ý rằng (3.2.41) suy ra $\tilde{K}$ độc lập với n. Vậy thì

$$u'(\pi, m_n) + \tilde{K} u(\pi, m_n) = 0, \quad n \geq 0.$$

Từ Bổ đề 3.8 và (3.2.37) điều này chỉ ra rằng dãy số $\{m_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ là dữ liệu phổ của bài toán giá trị biên $D(q(t), k, \tilde{K})$. Rõ ràng, $\tilde{K} = K$ trong đó K được định nghĩa bởi (3.2.5). Do đó, Định lý 3.2 được chứng minh. ∎

Ví dụ 3.3. *Cho* $m_n = n^2$ $(n \geq 0)$, $\alpha_n = \frac{\pi}{2}$ $(n \geq 1)$ *và* $\alpha_0 > 0$ *là một số thực dương tùy ý. Ký hiệu* $b := \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\pi}$. *Sử dụng Thuật toán 3.1 ta được:*

1) Theo công thức (3.2.3), *sau khi biến đổi ta thu được* $G(t, x) = \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\pi} \equiv b$.

2) Từ kết quả phần 1 và phương trình (3.2.4)

$$F(t, x) = -\frac{b}{1 + bt}.$$

3) Theo (3.2.4)-(3.2.5) *thì*

$$q(t) = \frac{2b^2}{(1 + bt)^2}, \quad k = -b, \quad K = \frac{b}{1 + b\pi} = \frac{b\alpha_0}{\pi}.$$

Theo (2.3.11),

$$u(t, m) = \cos \tau t - \frac{b}{1 + bt} \cdot \frac{\sin \tau t}{\tau}.$$

Nhận xét 3.4. *Các kết quả tương tự cũng đúng cho các loại bài toán điều kiện biên tách được, tức là bài toán giá trị biên* D_1, D^0 *và* D_1^0.

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, dựa trên việc tìm hiểu về bài toán Sturm-Liouville, chúng ta đã trình bày được các nội dung chính sau

1. Toán tử Sturm-Liouville trên một đoạn hữu hạn .
2. Tính chất của các hàm riêng, Toán tử biến đổi.
3. Tính duy nhất nghiệm của các bài toán ngược.
4. Phương pháp của Gelfand và Levitan.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Haim Brezis. *Giải tích hàm: lý thuyết và ứng dụng.* Nguyễn Thành Long và Nguyễn Hội Nghĩa dịch, NXB ĐHQG tp. HCM, 2002.

[2] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998.

[3] Freiling, G.; Yurko, V. Inverse Sturm-Liouville problems and their applications. *Nova Science Publishers, Inc., Huntington, NY,* 2001.

[4] Marchenko, V. A. Sturm-Liouville Operators and Applications. Revised edition. *AMS Chelsea Publishing, Providence, RI,* 2011.

[5] Gelfand, I. M.; Levitan, B. M. On the determination of a differential equation from its spectral function. (Russian) *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* **15,** (1951). 309–360.

[6] Levitan, B. M. Inverse Sturm-Liouville problems. *VSP, Zeist,* 1987.