BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Đỗ Minh Thắng

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NHÁM TRÊN MẠNG NEURON

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN ỨNG DỤNG

Hà Nội, Năm 2023

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

ĐỖ MINH THẮNG

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NHÁM TRÊN MẠNG NEURON

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 8 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. Lưu Hoàng Đức

Hà Nội – Năm 2023

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đề tài nghiên cứu trong luận văn này là công trình nghiên cứu của tôi dựa trên những tài liệu, số liệu do chính tôi tự tìm hiểu và nghiên cứu. Chính vì vậy, các kết quả nghiên cứu đảm bảo tính trung thực và khách quan nhất. Đồng thời, kết quả này chưa từng xuất hiện trong bất cứ một nghiên cứu nào. Các số liệu, kết quả nêu trong luận văn là trung thực. Nếu sai, tôi hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật.

Hà Nội, tháng 6 năm 2023

Học viên

Thắng

Đỗ Minh Thắng

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất tới TS. Lưu Hoàng Đức và TS. Phạm Việt Hùng. Các thầy đã định hướng chọn vấn đề nghiên cứu và hướng dẫn, tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn. Ngoài ra tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến quỹ VINIF đã hỗ trợ tôi về mặt tài chính để tôi có thể tập trung vào việc học tập trong suốt hai năm qua.

Tôi xin gửi lời tri ân tới các thầy cô và các anh chị ở Viện Toán học đã hỗ trợ tôi trong quá trình làm việc, học tập tại Viện cũng như việc hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin cảm ơn ban Lãnh đạo, phòng Đào tạo và các phòng chức năng của Học viện Khoa học và Công nghệ đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi để luận văn này được hoàn thành.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn những người thân và bạn bè luôn đồng hành giúp đỡ tôi về mặt tinh thần trong suốt quá trình hoàn thành luận văn này.

Một lần nữa, tôi xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, tháng 8 năm 2023

Học viên

Đỗ Minh Thắng

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Phương trình vi phân trên mạng lưới neuron mô tả một hệ vi phân mà ở đó các trường vector được sinh bởi một hàm mạng lưới neuron. Khi đó dưới các dữ kiện về thời điểm ban đầu, ta cần giải cho ra kết quả tại một thời điểm T nào đó. Sự khác biệt với phương trình vi phân thường là thay vì trường vector là hàm xác định thì các tham số của trường vector trên mạng lưới vẫn chưa xác định và liên lục được học từ dữ liệu. Nói cách khác, nó có tính chất định hướng dữ liệu.

Trong trường hợp dữ liệu đầu vào là các chuỗi thời gian, mục tiêu của các bài toán mô phỏng là thiết lập được các phương trình được định hướng bởi chuỗi dữ liệu đầu vào X. Do đó hệ vi phân này không có dạng của phương trình vi phân thông thường theo vi phân dt, mà là dạng phương trình vi phân theo dX, được giải thông qua sử dụng lý thuyết đường nhám. Đây là một hướng nghiên cứu rất thời sự trong khoảng 10 năm trở lại đây, với nhiều kết quả sơ khởi ứng dụng cho các dữ liệu chuỗi thời gian. Với mong muốn tìm hiểu kỹ hơn về lý thuyết đường nhám và ứng dụng của nó, tôi quyết định chọn đề tài "Phương trình vi phân nhám trên mạng neuron" cho luận văn thạc sĩ của mình.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục tiêu của luận văn là nhằm tìm hiểu tính giải được của hệ phương trình vi phân trên một mạng neuron dựa trên lý thuyết đường nhám, bài toán tồn tại duy nhất nghiệm, và các tính chất ổn định của nghiệm. Đồng thời luận văn cũng tìm hiểu về tính ổn định của hệ rời rạc nhám.

3. Nội dung nghiên cứu

Chương 1 giới thiệu về mạng neuron và phương trình vi phân trên mạng neuron, bao gồm phương trình vi phân thường và phương trình vi phân nhám. Trong chương 2 chúng tôi tìm hiểu các khái niệm cơ bản về đường nhám, lý thuyết về đặc trưng của một đường nhám và một số tính chất của chúng. Chương 3 định nghĩa nghiệm của phương trình vi phân nhám thông qua tích phân nhám, xây dựng bởi Gubinelli. Ngoài ra chúng tôi cũng trình bày một số kết quả mới hệ rời rạc điều khiển bởi đường nhám và ứng dụng trong xấp xỉ nghiệm của phương trình vi phân nhám ở chương này. Cuối cùng ở chương 4, chúng tôi tìm hiểu về xấp xỉ nghiệm và giải phương trình vi phân nhám trên mạng neuron thông qua đặc trưng của đường nhám.

4. Cơ sở khoa học và thực tiễn của đề tài

Việc sử dụng các mạng lưới neuron hồi quy để xấp xỉ các hệ động lực liên tục (ví dụ được sinh bởi các phương trình vi phân) đã được biết đến rộng rãi từ 30 năm trước đây. Mục tiêu ở đây là tìm một phương án xấp xỉ có dạng $y = L_\theta(z)$, ở đó z có động lực học tuân theo một phương trình vi phân có tham số

$$dz = f_\theta(z)dt.$$

với dữ kiện đầu vào $z_0 = H_\theta(z)$. Do hàm f_θ không cho ở dạng hiển, mục tiêu là xác định θ thông qua việc học trên mạng neuron để xác định hàm này, hàm kết quả sau đó được sử dụng để giải phương trình vi phân trên. Tuy vậy, việc mô phỏng bài toán cho thấy z có dạng phụ thuộc vào chuỗi dữ liệu đầu vào dạng X, ở đó X không đủ chính quy (ví dụ không đủ trơn hoặc có tính liên tục Holder thấp), các phương pháp cổ điển trên không thể áp dụng. Thay vào đó, ta cần phải xử lý và giải một bài toán có dạng

$$dz = f_\theta(z)dx.$$

Để giải hệ trên, ta cần đến các công cụ giải tích hiện đại là lý thuyết rough path, được xây dựng và nghiên cứu bởi Terry Lyons và nhóm các chuyên gia hàng đầu như Peter Friz, Martin Hairer, Massimiliano Gubinelli,... và có nhiều ứng dụng rộng rãi trong giải tích ngẫu nhiên.

5. Đóng góp của luận văn

Luận văn nêu lại những khái niệm cơ bản nhất của lý thuyết đường nhám, lý thuyết phương trình vi phân nhám. Luận văn cũng tìm hiểu và nêu lại ứng dụng của vi phân nhám trên mạng neuron trong việc xấp xỉ các hàm liên tục thông qua đặc trưng của đường nhám. Ngoài ra, luận văn cũng có những kết quả mới như tính tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình vi phân nhám, tính ổn định của hệ rời rạc điều khiển bởi đường nhám và ứng dụng trong xấp xỉ phương trình vi phân nhám.

Chương 1
MẠNG NEURON VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRÊN MẠNG NEURON

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại cấu trúc của mạng neuron, được trình bày ở chương 6, [1].

1.1 Mạng neuron

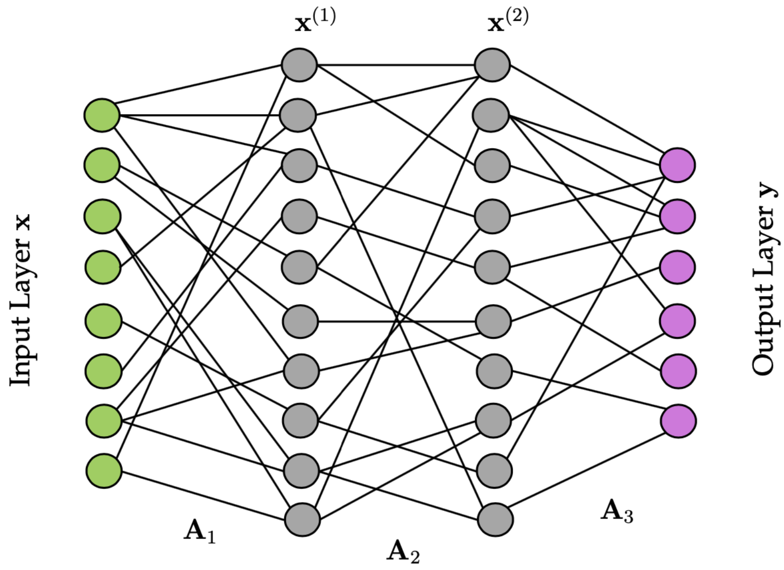
Một cấu trúc của một mạng neuron được trình bày như ở Hình 1.1. Mạng neuron bao gồm đầu vào x, các tầng ẩn $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ và đầu ra y. Một số mạng neuron còn có thêm tầng nhớ, tầng hạch, tầng xoắn,... Mỗi tầng có thể có nhiều nốt và các đường nối cho thấy tầng sau được tính toán bởi nốt nào của tầng trước. Việc quyết định xem mạng neuron cần bao nhiêu tầng, mỗi tầng cần bao nhiêu nốt chúng tôi sẽ không trình bày trong luận văn này mà chỉ đưa ra tổng quan về nó. Cụ thể, số tầng và số nốt không được quá ít vì sẽ không cho ra kết quả khớp với dữ liệu. Mặt khác nó cũng không được quá nhiều vì sẽ dẫn tới hiện tượng overfitting. Các ma trận A_j chứa các hệ số biến mỗi biến từ các tầng trước sang tầng sau.
Đối với ánh xạ tuyến tính giữa các tầng, mạng neuron sẽ được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= A_1 x \\ x^{(2)} &= A_2 x^{(1)} \\ &\dots \\ x^{(M-1)} &= A_{M-1} x^{(M-2)} \\ y &= A_M x^{(M-1)}, \end{aligned}$$

trong đó $x^{(k)}$ là tầng ẩn thứ k. Đối với ánh xạ không tuyến tính giữa các tầng, ở mỗi tầng j chúng ta sẽ dùng thêm ánh xạ tác động f_j. Cụ thể, liên kết giữa các tầng ẩn được biểu diễn bởi

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= f_1(A_1, x) \\ x^{(2)} &= f_2(A_2, x^{(1)}) \\ &\dots \\ x^{(M-1)} &= f_{M-1}(A_{M-1}, x^{(M-2)}) \\ y &= f_M(A_M, x^{(M)}) \end{aligned}$$

Trong mạng neuron, f sẽ được chọn trước. Các ma trận $A_1, \dots, A_M$ là tham số của mạng và sẽ được học từ dữ liệu. Mội số cách chọn hàm f phổ biến:



Hình 1.1: Một ví dụ về cấu trúc của mạng neuron. Nguồn: [1].

$$f(x) = x, \quad \text{(trường hợp tuyến tính)},$$

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad \text{(logistic)},$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 1, x > 0 \end{cases} \qquad \text{(bước nhị phân)}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ x, x > 0 \end{cases} \qquad \text{(ReLU)}$$

Một số mạng neuron network mà chúng tôi quan tâm trong luận văn này:

Mạng neuron truyền thẳng (feedforward neural network)

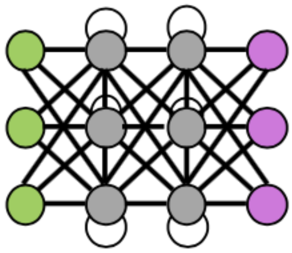
Mạng neuron truyền thẳng là mạng neuron liên kết tầng đầu vào và tầng đầu ra bằng cách thiết lập các liên kết giữa các đơn vị sao cho chúng không tạo ra một chu trình. Hình 1.1 đã cho ta thấy một phiên bản của mạng neuron truyền thẳng khi thông tin được truyền thẳng thẳng từ trái sang phải trong mạng, không sử dụng các nốt cũ.

1.1.1 Mạng neuron hồi quy (reccurent neural network)

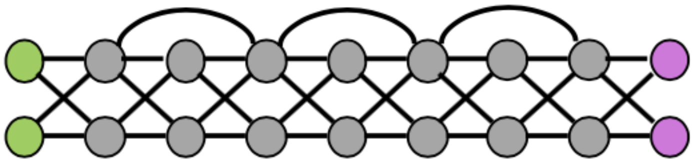
Mạng neuron hồi quy liên kết từ đầu vào tới đầu ra bằng cách tạo nên một đồ thị có hướng. Không giống mạng neuron truyền thẳng, mạng neuron hồi quy sử dụng một bộ nhớ để lưu lại thông tin từ những bước tính toán xử lý trước để cập nhật thông tin cho hiện tại (xem Hình 1.2).

Mạng ResNet (residual neural network)

Mạng Resnet có cấu trúc giống mạng neuron truyền thẳng. Tuy nhiên trong mạng Resnet có những kết nối tắt (Hình 1.3), cho phép xuyên qua hai hay nhiều



Hình 1.2: Mạng neuron hồi quy. Nguồn: [1].



Hình 1.3: Mạng ResNet. Nguồn: [1].

tầng trong mạng. Liên kết tắt này được biểu diễn như sau:

$$h_{t+1} = h_t + f(h_t, \theta_t), t \in [0...T]. \tag{1.1}$$

Chú ý rằng khi số tầng lớn, bộ nhớ của máy cũng phải lớn để lưu trữ thông tin ở các tầng.

1.1.2 Mạng ODE

Ở mạng ResNet, sự cập nhật trạng thái này giống như rời rạc hoá phương trình vi phân bằng phương pháp Euler. Khi chúng ta thêm nhiều tầng và lấy bước đi nhỏ hơn thì (1.1) có thể xấp xỉ như sau:

$$\frac{dh_t}{dt} = f(h_t, t, \theta), t \in [0, T]. \tag{1.2}$$

Cho một đầu vào, ta có thể tính toán đầu ra h_T thông qua việc giải phương trình vi phân. Mạng ODE là mạng cập nhật các tầng thông qua việc giải phương trình vi phân như vậy.

1.2 Phương trình vi phân trên mạng neuron

Phương trình vi phân trên mạng neuron được dùng để xấp xỉ ánh xạ liên tục $x \mapsto y$ bằng việc học hàm f_θ và ánh xạ tuyến tính ℓ_θ^1, ℓ_θ^2 sao cho

$$y \approx \ell_\theta^1(z_T), \quad \text{trong đó} \quad z_t = z_0 + \int_0^t f_\theta(z_s)\mathrm{d}s \quad \text{và} \quad z_0 = \ell_\theta^2(x). \tag{1.3}$$

1.2.1 Hàm học máy $f_\theta, l_\theta^{(1)}, l_\theta^{(2)}$

Trong mục này chúng tôi sẽ chỉ ra một cách để ước lượng tham số cho phương trình vi phân trên mạng neuron. Xét một bài toán tối ưu hàm mất mát L qua nghiệm của phương trình trên. Để tối ưu L, ta cần biết gradient của L qua θ. Bước đầu là phải tính toán được đạo hàm của L qua các trạng thái ẩn dấu z_t. Theo [1], chúng ta sẽ tính toán các đạo hàm này thông qua việc giải phương trình vi phân ngược như sau:

$$\begin{aligned}
a_z(T) &= \frac{dL}{dz(T)}, \\
a_\theta(T) &= 0, \\
a_t(T) &= \frac{dL}{dT}, \\
a_z(t) &= a_z(T) - \int_T^t a_z(s) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(s, z(s), \theta) ds, \\
a_\theta(t) &= a_\theta(T) - \int_T^t a_z(s) \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}(s, z(s), \theta) ds, \\
a_t(t) &= a_t(T) - \int_T^t a_z(s) \cdot \frac{\partial f}{\partial s}(s, z(s), \theta) ds, \\
\frac{dL}{dz(\tau)} &= a_z(\tau), \\
\frac{dL}{d\theta} &= a_\theta(\tau), \\
\frac{dL}{d\tau} &= a_t(\tau).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Sau đó giải phương trình vi phân trên với nghiệm (a_z, a_θ, a_t). Như vậy, việc dùng mạng ODE thay cho mạng ResNet đem lại hiệu quả về bộ nhớ khi không phải lưu trữ các đại lượng trung gian.
Một số lợi ích khác của việc sử dụng mạng ODE.

- Lợi ích về mặt tính toán: Các phương pháp xấp xỉ có lịch sử phát triển hơn 100 năm và dần hoàn thiện về mặt lý thuyết.

- Giải quyết về mô hình chuỗi thời gian liên tục: thay vì ở mạng ResNet chỉ có thể tính toán ở từng thời điểm, mạng ODE cho phép tính toán ở cả khoảng thời gian liên tục, thích hợp để xử lý các dữ liệu đến ở bất kỳ thời điểm nào.

Chúng tôi sẽ trình bày cách tiếp cận ở [2] cho việc giải số phương trình vi phân trên mạng neuron. Ta xét phương trình vi phân trên mạng neuron tổng quát

$$z(t) = z(\tau) + \int_\tau^t f(s, z(s), \theta) ds,$$

với $z(\tau) = l_1(x, \phi)$. Trong đó ϕ, θ là các tham số được học, l_1 là hàm tuyến tính.

1.2.2 Lược đồ tương thích chấp nhận-từ chối,[3]

Xét trường hợp giải phương trình vi phân

$$y(t) = y(\tau) + \int_\tau^t f(s, y(s))ds,$$

với $y(\tau) \in \mathbb{R}^d$.

Giả sử cho t cố định ta có xấp xỉ $\widehat{y}(t) \approx y(t)$, và bây giờ ta muốn tìm độ dài của bước đi tiếp theo $\Delta > 0$ để tính $\widehat{y}(t+\Delta) \approx y(t+\Delta)$. Chọn một độ dài bước đi, và ta tính được một lựa chọn $\widehat{y}_{\text{candidate}}(t+\Delta)$. Ta có thể xấp xỉ bằng nhiều lược đồ. Ở đây ta có thể chọn lược đồ Runge-Kutta. Khi đó ta có thêm một ước lượng $y_{\text{err}} \in \mathbb{R}^d$ cho sai số của lược đồ. Cụ thể, ước lượng sai số này có thể là sai số giữa lược đồ Runge-Kutta bậc 2 và bậc 4.

Lựa chọn dung sai tuyệt đối $ATOL$ (chẳng hạn 10^{-9}), dung sai tương đối $RTOL$ (ví dụ 10^{-6}), và (nửa) chuẩn $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ (ví dụ chuẩn Euclid), và ước lượng kích cỡ của nghiệm bởi

$$SCALE = ATOL + RTOL \cdot \max(\widehat{y}(t), \widehat{y}_{\text{candidate}}(t+\Delta)) \in \mathbb{R}^d, \tag{1.5}$$

với max được lấy bằng giá trị lớn nhất của từng toạ độ. Cuối cùng ta lấy tỉ lệ sai số tính bởi

$$r = \left\| \frac{y_{\text{err}}}{SCALE} \right\| \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Nếu $r \leq 1$, bước đi này được chấp nhận và ta có nghiệm xấp xỉ $\widehat{y}(t+\Delta) = \widehat{y}_{\text{candidate}}(t+\Delta)$. Ngược lại, nếu $r > 1$ sai số được xem là quá loại bỏ nghiệm xấp xỉ $\widehat{y}_{\text{candidate}}(t+\Delta)$. Chúng ta sẽ chọn bước đi Δ nhỏ hơn.

Chú ý rằng việc lựa chọn chuẩn, nửa chuẩn $\|\cdot\|$ ảnh hưởng lớn đến lược đồ chấp nhận/từ chối của chúng ta. Ở trong (1.4), nhận thấy rằng việc giải z và a_z quan trọng hơn nhiều so với giải a_θ. Vì vậy ta thiết lập nửa chuẩn mới, cho trọng số của a_θ bằng 0 và dùng lược đồ tương thích như đã trình bày ở trên. Cụ thể, sử dụng nửa chuẩn

$$\|[a_t, z, a_z, a_\theta]\| = \max\{\|z\|_{\text{RMS}}, \|a_z\|_{\text{RMS}}\}.$$

với $\|\cdot\|_{\text{RMS}}$ là chuẩn Euclid.

1.3 Phương trình vi phân nhám trên mạng neuron

Điểm yếu của phương trình vi phân trên mạng neuron là nếu θ được học, khi đó nghiệm của phương trình là được xác định, có thể sẽ không khớp với các quan sát mà chúng ta thu được sau này.

Một cách tiếp cận là thay dt bởi dX_t, trong đó X_t được quyết định từ chuỗi dữ liệu quan sát được. Cụ thể, giả sử ta có n quan sát $(t_0, x_0), \ldots, (t_n, x_n)$, với $t_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}^v$ and $t_0 < \ldots < t_n$. Gọi $X : [t_0, t_n] \to \mathbb{R}^{v+1}$ là đường nội suy tự nhiên bậc ba ở các mốc $t_0, \ldots, t_n$. Trong đó đường cong nội suy bậc ba là đường cong bậc ba đi qua tất cả các điểm dữ liệu. Ta xem xét phương trình vi phân nhám trên mạng neuron

$$\begin{cases} z_t = z_\tau + \int_{t_0}^{t} f_\theta(z_s) dX_s, \quad t \in (t_0, t_n] \\ z_{t_0} = \zeta_\theta(x_0, t_0), \end{cases} \tag{1.7}$$

với $f_\theta : \mathbb{R}^w \to R^{w(v+1)}$ là mạng neuron phụ thuộc tham số θ. Trong đó w là tham số chỉ cỡ của tầng ẩn trong mạng.
Trong chương 4, ta sẽ tìm hiểu xem nghiệm của phương trình có dạng (1.7) xấp xỉ các ánh xạ liên tục tốt như thế nào.

Phương trình vi phân nhám trên mạng neuron được đưa về giải phương trình vi phân trên mạng neuron nếu giả thiết thêm X là khả vi. Cụ thể đặt

$$g_{\theta,X}(z, s) = f_\theta(z) \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}(s), \tag{1.8}$$

Khi đó (1.7) trở thành

$$z_t = z_{t_0} + \int_{t_0}^{t} f_\theta(z_s) \mathrm{d}X_s = z_{t_0} + \int_{t_0}^{t} f_\theta(z_s) \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}(s) \mathrm{d}s = z_{t_0} + \int_{t_0}^{t} g_{\theta,X}(z_s, s) \mathrm{d}s. \tag{1.9}$$

Đây là một phương trình vi phân trên mạng neuron. Bài toán đưa về ước lượng nghiệm của phương trình vi phân trên mạng neuron.

Ta thấy việc xấp xỉ X bởi đường cong bậc ba là không tốt do các dữ liệu quan sát có dạng nhịp tim, nhiệt độ,... biến động rất mạnh theo thời gian. Vì vậy, ta phải có cách tiếp cận khác khi x không đủ trơn. Điều này thúc đẩy việc nghiên cứu lý thuyết đường nhám. Để làm rõ về mặt toán học, trong chương 2 chúng tôi sẽ nêu định nghĩa chính xác của đường nhám, các tính chất của đặc trưng đường nhám. Trong chương 3 chúng tôi sẽ định nghĩa phương trình vi phân nhám, tính tồn tại duy nhất của nghiệm và lược đồ ước lượng nghiệm của phương trình vi phân nhám. Cuối cùng chương 4 dùng để trình bày sự hiệu quả của phương trình vi phân nhám trong xấp xỉ các hàm liên tục.

Chương 2
LÝ THUYẾT ĐƯỜNG NHÁM, CÁC TÍNH CHẤT CỦA ĐẶC TRƯNG CỦA ĐƯỜNG NHÁM

Trong chương này, chúng tôi sẽ tìm hiểu và trình bày lại những khái niệm cơ bản nhất của lý thuyết đường nhám, được trình bày ở [4].

2.1 Nhóm luỹ linh tự do

2.1.1 Động lực

Cho x là một hàm liên tục với biến phân bị chặn nhận giá trị trên $\mathbb{R}^d$. x_t^i là giá trị của x tại thời điểm t tại toạ độ thứ i. Ta xét tích phân thứ k của hàm là

$$\mathbf{g}^{k;i_1,\cdots,i_k} := \int_s^t \int_s^{u_k} \cdots \int_s^{u_2} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_k}^{i_k}.$$

Tập hợp các tích phân,

$$\mathbf{g} = \left(\mathbf{g}^{k;i_1,\cdots,i_k} : 1 \leq k \leq N; i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, d\}\right)$$

được gọi là đặc trưng thứ N của quỹ đạo$x|_{[s,t]}$ và được ký hiệu là $S_N(x)_{s,t}$. Ta xét lược đồ xấp xỉ Euler-Maruyama cho phương trình vi phân

$$dy = V(y)dx = \sum_{i=1}^{d} V_i(y)dx^i$$

với $V \in C\left(\mathbb{R}^e, L\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e\right)\right)$. Giả sử $\pi_{(V)}\left(0, y_0; x\right)$ là nghiệm của phương trình xuất phát từ y_0. Gọi I là hàm đồng nhất trên $\mathbb{R}^e$ và nhắc lại trường vector $W = \left(W^1, \ldots, W^e\right)^T : \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^e$ với toán tử đạo hàm bậc nhất

$$\sum_{k=1}^{e} W^k(y) \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Khi đó khai triển Taylor cho thấy một xấp xỉ tới cấp N, với $0 < t - s << 1$ như sau:

$$\begin{aligned} y_t \approx & y_s + \sum_{i=1}^{d} V_i\left(y_s\right) x_{s,t}^i \\ & + \ldots \\ & + \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_N \\ \in\{1,\ldots,d\}}} V_{i_1} \cdots V_{i_N} I\left(y_s\right) \int_s^t \int_s^{u_N} \cdots \int_s^{u_2} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_N}^{i_N}. \end{aligned}$$

2.1.2 Đặc trưng của đường nhám

Ký hiệu $C^{1-var}([s,t],\mathbb{R}^d)$ là không gian các hàm đi từ $[s,t]$ vào $\mathbb{R}^d$ với biến phân bị chặn. Ta có khái niệm sau:

Định nghĩa 2.1.1 ([4]). *Đặc trưng bậc N của đường cong $x \in C^{1-var}([s,t],\mathbb{R}^d)$ được cho bởi*

$$S_N(x)_{s,t} \equiv \left(1, \int_{s<u<t} dx_u, \dots, \int_{s<u_1<\dots<u_k<t} dx_{u_1} \otimes \dots \otimes dx_{u_k}\right)$$
$$\in \oplus_{k=0}^{N} \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k},$$

trong đó $\otimes$ là ký hiệu của tích ten-xơ.
Quỹ đạo $u \mapsto S_N(x)_{s,u}$ được gọi là một sự nâng bậc N của x.

Cho hai vector

$$a = \sum_{i_1,\dots,i_k} a^{i_1,\dots,i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k}$$

$$b = \sum_{i_1,\dots,i_l} b^{i_1,\dots,i_l} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_l} \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes l}$$

Ta có tích ten-xơ $a \otimes b$ định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} a \otimes b = \sum a^{i_1,\dots,i_k} b^{j_1,\dots,j_l} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots e_{j_l} \\ \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k} \otimes \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes l} \cong \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes (k+l)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Giờ ta định nghĩa không gian

$$T^N\left(\mathbb{R}^d\right) := \oplus_{k=0}^{N} \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k},$$

Ký hiệu $\pi_k : T^N\left(\mathbb{R}^d\right) \to \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k}$ là phép chiếu tới ten-xơ bậc k và phép chiếu lên k phần tử đầu:

$$\pi_{0,k} : T^N\left(\mathbb{R}^d\right) \to T^k\left(\mathbb{R}^d\right), \text{ với } k \le N,$$

Cho $g, h \in T^N\left(\mathbb{R}^d\right)$, ta có thể mở rộng (2.1) đến $T^N\left(\mathbb{R}^d\right)$ bằng cách đặt

$$g \otimes h = \sum_{\substack{i+j \le N \\ i,j \ge 0}} g^i \otimes h^j \Leftrightarrow \forall k \in \{0,\dots,N\} : \pi_k(g \otimes h) = \sum_{i=0}^{k} g^{k-i} \otimes h^i. \tag{2.2}$$

Với các phép toán đã được trình bày ở trên, ta có mệnh đề sau

Mệnh đề 2.1.1 ([4]). *Không gian $(T^N(\mathbb{R}^d), +, ., \otimes)$ là một $\mathbb{R}$- đại số kết hợp với phần tử trung hoà*

$$1 := (1, 0, \dots, 0) \in T^N(\mathbb{R}^d).$$

Chúng ta gọi $T^N(\mathbb{R}^d)$ là đại số cắt cụt bậc N.

2.1.3 Các tính chất của đặc trưng của đường nhám

Trong mục này chúng tôi sẽ trình bày một số tính chất cơ bản của đặc trưng. Bổ đề sau cho thấy các đặc trưng thoả mãn phương trình vi phân điều khiển bởi quỹ đạo

Mệnh đề 2.1.2 ([4]). *Cho $x : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ là một quỹ đạo liên tục với biến phân bị chặn. Khi đó với $s \in [0,T)$ cố định, $S_N(x)_{s,\cdot}$ thoả mãn phương trình vi phân điều khiển bởi x sau:*

$$\begin{cases} dS_N(x)_{s,t} = S_N(x)_{s,t} \otimes dx_t, \\ S_N(x)_{s,s} = 1. \end{cases}$$

Chứng minh. Chúng tôi nhắc lại chứng minh ở [4]. Ta xét đặc trưng của x bậc thứ $k, k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{s<r_1<\ldots<r_k<t} dx_{r_1} \otimes \ldots \otimes dx_{r_k} &= \int_{r_k=s}^{t} \left(\int_{s<r_1<\ldots<r_{k-1}<r_k} dx_{r_1} \otimes \ldots \otimes dx_{r_{k-1}} \right) \otimes dx_{r_k} \\ &= \int_{r=s}^{t} \pi_{k-1} \left(S_N(x)_{s,r} \right) \otimes dx_r. \end{aligned}$$

Như vậy, ta có

$$S_N(x)_{s,t} = 1 + \int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r.$$

Hiển nhiên $S_N(x)_{s,s} = 1$. Ta kết thúc chứng minh. □

Bây giờ chúng tôi xem xét đặc trưng của hai quỹ đạo nối nhau. Cho hai quỹ đạo $\gamma \in C^{1\text{-var}}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right), \eta \in C^{1\text{-var}}\left([T,2T], \mathbb{R}^d\right)$, ta lấy quỹ đạo nối của chúng như sau:

$$\gamma \sqcup \eta \equiv \begin{cases} \gamma(\cdot) \text{ on } [0,T] \\ \eta(\cdot) - \eta(0) + \gamma(T) \text{ on } [T,2T] \end{cases}$$

Khi đó kiểm tra được $\gamma \sqcup \eta \in C^{1\text{-var}}\left([0,2T], \mathbb{R}^d\right)$ do từng quỹ đạo đã có biến phân bị chặn.

Định lý sau của Chen cho ta biết đặc trưng của hai quỹ đạo nối nhau sẽ được biểu diễn như thế nào:

Định lý 2.1.1 ([4]). *Cho $\gamma \in C^{1-var}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right), \eta \in C^{1-var}\left([T,2T], \mathbb{R}^d\right)$. Khi đó*

$$S_N(\gamma \sqcup \eta)_{0,2T} = S_N(\gamma)_{0,T} \otimes S_N(\eta)_{T,2T}.$$

Nói một cách tương đương, $x \in C^{1-var}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ và $0 \leq s < t < u \leq T$ ta có

$$S_N(x)_{s,u} = S_N(x)_{s,t} \otimes S_N(x)_{t,u}.$$

Chứng minh. Chúng tôi nhắc lại chứng minh ở [4]. Ta sẽ chứng minh quy nạp theo N. Với $N = 0$, định lý trở thành $1 = 1 \otimes 1$. Giả sử định lý đúng tới N cho mọi $s < t < u \in [0, T]$. Trước hết, do định nghĩa của S_N, ta có

$$S_{N+1}(x)_{s,u} = 1 + \int_s^u S_{N+1}(x)_{s,r} \otimes dx_r = 1 + \int_s^u S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r,$$

Tương tự

$$S_N(x)_{s,t} \otimes \int_t^u S_N(x)_{t,r} \otimes dx_r = S_{N+1}(x)_{s,t} \otimes \int_t^u S_N(x)_{t,r} \otimes dx_r.$$

Sử dụng tính quy nạp để chia $S_N(x)_{s,r}$ với $s < t < r < u$, ta thu được

$$\begin{aligned} S_{N+1}(x)_{s,u} &= 1 + \int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r + \int_t^u S_N(x)_{s,t} \otimes S_N(x)_{t,r} \otimes dx_r \\ &= S_{N+1}(x)_{s,t} + S_{N+1}(x)_{s,t} \otimes \left(\int_t^u S_N(x)_{t,r} \otimes dx_r \right) \\ &= S_{N+1}(x)_{s,t} \otimes (1 + (S_{N+1}(x)_{t,u} - 1)) \\ &= S_{N+1}(x)_{s,t} \otimes S_{N+1}(x)_{t,u}. \end{aligned}$$

□

2.2 Đại số Lie $\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ và nhóm Lie $1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$

Ở mục trước, ta đã biết $\left(T^N(\mathbb{R}^d), +, ., \otimes\right)$ là một đại số kết hợp. Nhắc lại phép chiếu lên phần tử thứ k là π_k, ta đặt

$$\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d) \equiv \left\{ g \in T^N(\mathbb{R}^d) : \pi_0(g) = 0 \right\},$$

kéo theo

$$1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d) = \left\{ g \in T^N(\mathbb{R}^d) : \pi_0(g) = 1 \right\}.$$

Chú ý rằng 1 ở đây chỉ phần tử trung hoà của $T^N(\mathbb{R}^d)$.

2.2.1 Nhóm $1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$

Đầu tiên ta chứng minh phần tử $1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ là khả nghịch trong $T^N(\mathbb{R}^d)$ đối với phép nhân là tích ten-xơ $\otimes$.

Bổ đề 2.2.1 ([4]). *$g = 1 + a \in 1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ có khả nghịch với phép nhân tích ten-xơ $\otimes$. Ta có công thức tường minh cho phần tử nghịch đảo của nó*

$$g^{-1} = (1 + a)^{-1} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a^{\otimes k},$$

tức là $g \otimes g^{-1} = g^{-1} \otimes g = 1$.

Chứng minh. Chúng tôi nhắc lại chứng minh ở [4]. Để cho gọn ta sẽ viết a^k thay vì $a^{\otimes k}$. Do $T^N(\mathbb{R}^d)$ là đại số kết hợp nên

$$\begin{aligned}(1+a)\sum_{k=0}^{N}(-1)^k a^k &= \sum_{k=1}^{N+1}(-1)^{k+1}a^k + \sum_{k=0}^{N}(-1)^k a^k \\ &= a^{N+1} + 1.\end{aligned}$$

Vì các phần tử thuộc$\left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes n}$ với $n > N$ đều coi như phần tử 0 nên $a^{N+1} = 0$. Vậy $g \otimes g^{-1} = 1$. Hoàn toàn tương tự, $g^{-1} \otimes g = 1$. □

Chú ý rằng nếu g và h thuôc lớp $1 + \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)$, do $\pi_0(g \otimes h) = 1$ nên $g \otimes h \in 1 + \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)$. Chúng ta có một mệnh đề rất quan trọng sau

Mệnh đề 2.2.1 ([4])**.** *Không gian $1 + \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)$ là một nhóm Lie với phép nhân tích ten-xơ $\otimes$.*

Chứng minh. [4]. Ta có $1 + \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)$ là một không gian affine tuyến tính con của $T^N(\mathbb{R}^d)$ nên nó là một đa tạp trơn, đồng phôi với $\mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right) \cong \mathbb{R}^{d+d^2+\ldots+d^N}$. Hơn nữa từ bổ đề 2.2.1, toán tử $\otimes^{-1}$ là một đa thức nên nó trơn. Ta kết thúc chứng minh. □

2.2.2 Đại số Lie trên $\mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)$ và ánh xạ mũ

Ở các mục trước, ta đã biết $\left(\mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right), +..\right)$ là một đại số. Với $g, h \in \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)$, ta xét tích

$$(g, h) \mapsto [g, h] := g \otimes h - h \otimes g \in \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Tích này là một ánh xạ song tuyến tính và phản đối xứng, tức

$$[g, h] = -[h, g], \forall g, h \in \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)$$

thoả mãn tính xác định Jacobi, tức là

$$[g, [h, k]] + [h, [k, g]] + [k, [g, h]] = 0 \text{ với mọi } g, h, k \in \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right).$$

Tổng hợp các nhận xét trên, ta đến với mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.2.2 ([4])**.** $\left(\mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right), +, ., [\cdot, \cdot]\right)$ *là một đại số Lie.*

Bây giờ ta sẽ định nghĩa ánh xạ mũ là ánh xạ logarit trong đại số này:

Định nghĩa 2.2.1 ([4])**.** *Ánh xạ mũ được định nghĩa bởi*

$$\begin{aligned}\exp: \quad & \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right) \to 1 + \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right) \\ a \mapsto \quad & 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{a^{\otimes k}}{k!}.\end{aligned}$$

và ánh xạ logarit được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned}\log : 1+\mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right) &\to \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)\\ (1+a) &\mapsto \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{a^{\otimes k}}{k}.\end{aligned}$$

Ví dụ sau đây cho thấy mối liên hệ giữa đặc trưng của một quỹ đạo với ánh xạ mũ

Ví dụ 2.2.1. *Cho trước $a \in \mathbb{R}^d \cong \pi_1\left(\mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$. Đặc trưng bậc N của quỹ đạo $x(\cdot) : t \in [0,1] \mapsto t.a$ được tính như sau*

$$\begin{aligned}S_N(x)_{0,1} &= 1+\sum_{k=1}^{N}\int_{0<r_1<\ldots<r_k<1} dx_{r_1}\otimes\ldots\otimes dx_{r_k}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{N} a^{\otimes k}\int_{0<r_1<\ldots<r_k<1} dr_1\ldots dr_k\\ &= 1+\sum_{k=1}^{N}\frac{a^{\otimes k}}{k!} = \exp(a).\end{aligned}$$

Định nghĩa 2.2.2 ([4]). *Gọi $\mathfrak{g}^N\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)$ là đại số con nhỏ nhất của $\mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)$ mà chứa $\pi_1\left(\mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \cong \mathbb{R}^d$. Cụ thể hơn,*

$$\mathfrak{g}^N\left(\mathbb{R}^d\right) = \mathbb{R}^d \oplus \left[\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d\right] \oplus \cdots \oplus \underbrace{\left[\mathbb{R}^d,\left[\ldots,\left[\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d\right]\right]\right]}_{(N-1)}.$$

Ta gọi nó là đại số Lie luỹ linh bâc tự do N.

Ta sẽ xem xét một số không gian sau

1: Tập các đặc trưng bậc N của các quỹ đạo liên tục và biến phân bị chặn

$$G^N\left(\mathbb{R}^d\right) := \left\{S_N(x)_{0,1} : x \in C^{1\text{-var}}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)\right\};$$

2) Ảnh của đại số con $\mathfrak{g}^N\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)$ ở định nghĩa 2.2.2, dưới ánh xạ mũ

$$\exp\left(\mathfrak{g}^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \subset 1+\mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right);$$

3) Nhóm con $\left\langle\exp\left(\mathbb{R}^d\right)\right\rangle$ của $1+\mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right)$ sinh bởi các phần tử thuộc $\exp\left(\mathbb{R}^d\right)$, nghĩa là

$$\left\langle\exp\left(\mathbb{R}^d\right)\right\rangle := \left\{\bigotimes_{i=1}^{m}\exp\left(v_i\right) : m \geq 1, v_1,\ldots,v_m \in \mathbb{R}^d\right\}.$$

Chúng tôi phát biểu không chứng minh Định lý của Chow sau. Định lý cho ta thấy, một phần tử thuộc $\exp\left(\mathfrak{g}^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ chính là một đặc trưng bậc N của một quỹ đạo.

Định lý 2.2.1. *(Chow) Cho* $g \in \exp\left(\mathfrak{g}^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$. *Khi đó tồn tại* $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^d$ *thoả mãn*

$$g = e^{v_1} \otimes \cdots \otimes e^{v_m}.$$

Nói một cách tương đương, tồn tại quỹ đạo $x : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ *tuyến tính từng khúc với đặc trưng bậc* N *là* g.

Định lý sau cho ta biết cả ba không gian ta vừa định nghĩa thực chất là một, chúng tôi cũng phát biểu không chứng minh.

Định lý 2.2.2 ([4])**.** *Ta có*

$$G^N\left(\mathbb{R}^d\right) = \exp\left(\mathfrak{g}^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right) = \left\langle \exp\left(\mathbb{R}^d\right)\right\rangle$$

và $G^N\left(\mathbb{R}^d\right)$ *là một nhóm con Lie của* $\left(1 + \mathfrak{t}^N\left(\mathbb{R}^d\right), \otimes\right)$, *gọi là nhóm luỹ linh tự do bậc* N *trên* $\mathbb{R}^d$.

2.2.3 Cấu trúc giải tích của không gian $G^N(\mathbb{R}^d)$

Định lý 2.2.3. *[[4]] Với mỗi* $g \in G^N\left(\mathbb{R}^d\right)$, *ta định nghĩa chuẩn "Carnot-Caratheodory" như sau*

$$\|g\| := \inf\left\{\int_0^1 |d\gamma| : \gamma \in C^{1-var}\left([0,1], \mathbb{R}^d\right) \text{ và } S_N(\gamma)_{0,1} = g\right\}$$

Trong đó $C^{1-var}\left([0,1], \mathbb{R}^d\right)$ *là không gian các quỹ đạo từ* $[0,1]$ *vào* $\mathbb{R}^d$ *liên tục và có biến phân bị chặn. Định nghĩa này là tốt và inf này đạt được tại một quỹ đạo* γ^* *nào đó. Cụ thể hơn,*

$$\|g\| = \int_0^1 |d\gamma^*| \text{ và } S_N\left(\gamma^*\right)_{0,1} = g. \tag{2.3}$$

Chứng minh. [4]. Từ định lý của Chow, infimum được lấy trên một tập không rỗng và không âm, do đó $\|g\| < \infty$. Hơn nữa, tồn tại dãy (γ^n) với đặc trưng g và ta có thể giả sử

$$\sup_n c_n := \sup_n |\gamma^n|_{1-Hol;[0,1]} := \sup_n \sup_{s,t\in[0,1]} \frac{\gamma^n(t) - \gamma(s)}{|t-s|^1} < \infty.$$

Áp dụng định lý Azela-Ascoli, γ^n hội tụ đều đến một quỹ đạo γ^* liên tục và

$$|\gamma^*|_{1-\mathrm{Hol};[0,1]} \leq \liminf_n |\gamma^n|_{1-\mathrm{Hol}}$$

nghĩa là chuẩn Holder của γ^* là hữu hạn. Nói cách khác, γ^* là liên tục tuyệt đối, vì thế

$$\int_0^1 |d\gamma^*| = \int_0^1 |\dot{\gamma}^*_t|\, dt.$$

Chú ý rằng $S_N(\gamma)$ là một nghiệm của phương trình vi phân như ở mệnh đề 2.1.2, vì vậy do tính hội tụ của γ^n, ta cũng có

$$g \equiv S_N\left(\gamma^n\right)_{0,1} \to S_N\left(\gamma^*\right)_{0,1}.$$

Vậy $S_N\left(\gamma^*\right)_{0,1} = g$. Mặt khác, $\|g\| \leq \int_0^1 |\dot{\gamma}_t^*|\, dt$ từ định nghĩa của infimum $\|g\|$. Hơn nữa,

$$\int_0^1 |\dot{\gamma}_t^*|\, dt = |\gamma^*|_{1-\mathrm{Hol};[0,1]} \leq \liminf c_n = \|g\|.$$

Vậy $\|g\| = \int_0^1 |d\gamma^*|$. Chứng minh được hoàn tất. □

Để kết thúc mục này, chúng tôi chỉ rằng không gian $G^N(\mathbb{R}^d)$ là một không gian metric.

Mệnh đề 2.2.3 ([4]). *Cho $g, h \in G^N\left(\mathbb{R}^d\right)$. Chuẩn Carnot-Caratheodory $\|\cdot\|$ có những tính chất sau.*

1) *$\|g\| = 0$ nếu và chỉ nếu $g = 1$.*

2) *(tính thuần nhất) $\|\delta_\lambda g\| = |\lambda|\|g\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Trong đó $\delta_\lambda : T^N(\mathbb{R}^d) \to T^N(\mathbb{R}^d)$ sao cho $\pi_k(\delta_\lambda(g)) = \lambda^k \pi_k(g)$. Gọi $\delta_\lambda g$ là ánh xạ giãn nở hệ số λ của g.*

3) *(tính đối xứng) $\|g\| = \left\|g^{-1}\right\|$.*

4) *(cộng tính dưới) $\|g \otimes h\| \leq \|g\| + \|h\|$;*

Như vậy, chuẩn Carnot-Carathedory cảm sinh nên một metric trên $G^N\left(\mathbb{R}^d\right)$, gọi là Carnot-Carathedory metric.

Chứng minh. [4]. Với mỗi $g \in G$ ký hiệu $\gamma_g^* = \gamma^*$ là quỹ đạo bất kỳ để đẳng thức ở định lý 2.2.3 được thoả mãn. Nếu $\|g\| = 0$, do (2.3) nên γ_g^* có đạo hàm bằng 0 hầu khắp nơi, vì vậy $g = S_N\left(\gamma_g^*\right)_{0,1} = 1$. Ngược lại nếu $g = 1$, hiển nhiên $\|g\| = 0$.
Bây giờ ta chứng minh tính thuần nhất. Trường hợp $\lambda = 0$ là hiển nhiên nên ta chỉ xét $\lambda \neq 0$. Quỹ đạo $\lambda\gamma_g^*$ thoả mãn $S_N\left(\lambda\gamma_g^*\right)_{0,1} = \delta_\lambda S_N(\gamma_g^*) = \delta_\lambda g$. Do đó $\|\delta_\lambda g\| \leq |\lambda\gamma_g^*| = |\lambda|\left|\left(\gamma_g^*\right)\right| = |\lambda|\|g\|$. Chiều ngược lại có từ việc thay λ bởi $1/\lambda$ và g thay bởi $\delta_\lambda g$.
Ta xét tính đối xứng. Ký hiệu với mỗi $x \in C^{1-var}([0,T]) \to \mathbb{R}^d$, $\overleftarrow{x}_t := x_{T-t}$ là quỹ đạo ngược của x. Kiểm tra được $S_N\left(\gamma_g^*\right)_{0,1} \otimes S_N\left(\overleftarrow{\gamma_g^*}\right)_{0,1} = 1$ nên $S_N\left(\overleftarrow{\gamma_g^*}\right)_{0,1} = g^{-1}$. Ta thu được

$$\left\|g^{-1}\right\| \leq \left|\left(\overleftarrow{\gamma_g^*}\right)\right| = \left|\left(\gamma_g^*\right)\right| = \|g\|.$$

Thay g bởi g^{-1}, ta có chiều ngược lại. Tiếp theo là chứng minh cộng tính dưới. Xét γ_g^*, γ_h^*, dùng định lý Chen, 2.1.1 ta có $g \otimes h = S_N\left(\gamma_{g,h}^*\right)_{0,1}$, với $\gamma_{g,h}^*$ là quỹ đạo nối của γ_g^* và γ_h^* với độ dài là $\|g\| + \|h\|$. Vì vậy, $\|g \otimes h\| \leq |\gamma_{g,h}^*|$.

$\square$

2.3 Đường nhám

2.3.1 Một số ký hiệu

Xét một quỹ đạo liên tục lấy giá trị trên một không gian metric, $\mathbf{x} : [0,T] \to E$, ta định nghĩa chuẩn biến phân bậc p trên $[0,T]$ ký hiệu là $|x|_{p\text{-var; } [0,T]}$. Ta xét $E = G^N\left(\mathbb{R}^d\right)$, trong đó $G^N\left(\mathbb{R}^d\right)$ là nhóm luỹ linh bậc tự do N đã được trình bày ở mục trước. Ở mục trước, với khoảng cách d cảm sinh bởi chuẩn Carnot Caratheodory, ta có thể định nghĩa các ký hiệu

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{p-\text{var};[0,T]} &= \sup_{(t_i)\subset[0,T]} \left(\sum_i d\left(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}\right)^p\right)^{1/p} \\ &= \sup_{(t_i)\subset[0,T]} \left(\sum_i \left\|\mathbf{x}_{t_i,t_{i+1}}\right\|^p\right)^{1/p}, \end{aligned}$$

và ký hiệu không gian

$$C^{p-\text{var}}\left([0,T], G^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right) = \left\{\mathrm{x} \in C\left([0,T], G^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right) : \|\mathbf{x}\|_{p-\text{var};[0,T]} < \infty\right\}.$$

Khi $E = \mathbb{R}^d$, ta sử dụng chuẩn (nửa chuẩn) biến phân bậc p thông thường, và

$$(x,y) \mapsto |x_0 - y_0| + |x-y|_{p-\text{var};0,T]}.$$

Với chuẩn Holder ta cũng dùng những ký hiệu tương tự. Cụ thể hơn, chuẩn $1/p$-Holder cho bởi

$$\|\mathbf{x}\|_{1/p-\text{Hol};[0,T]} = \sup_{0\leq s<t\leq T} \frac{d\left(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t\right)}{|t-s|^{1/p}} = \sup_{0\leq s<t\leq T} \frac{\|\mathbf{x}_{s,t}\|}{|t-s|^{1/p}},$$

và

$$C^{1/p-\text{Hol}}\left([0,T], G^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right) = \left\{\mathbf{x} \in C\left([0,T], G^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right) : \|\mathbf{x}\|_{1/p-Hol;[0,T]} < \infty\right\}.$$

2.3.2 Một số khoảng cách

Định nghĩa 2.3.1 ([4]). *Với $p \geq 1$, cho trước $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C\left([0,T], G^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ ta định nghĩa các khoảng cách sau*

$$d_{p-var;[0,T]}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \left(\sup_D \sum_{t_i\in D} d\left(\mathbf{x}_{t_i,t_{i+1}}, \mathbf{y}_{t_i,t_{i+1}}\right)^p\right)^{1/p}$$

và

$$d_{1/p-\mathrm{Hol};[0,T]}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sup_{0\le s<t\le T} \frac{d\left(\mathbf{x}_{s,t},\mathbf{y}_{s,t}\right)}{|t-s|^{1/p}},$$

Ngoài ra ta hiểu rằng

$$d_{0-var;[0,T]}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := d_{0-\mathrm{Hol};[0,T]}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sup_{0\le s<t\le T} d\left(\mathbf{x}_{s,t},\mathbf{y}_{s,t}\right)$$

$$d_{\infty;[0,T]}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sup_{D} \sum_{t_i\in D} d\left(\mathbf{x}_{t_i,t_{i+1}},\mathbf{y}_{t_i,t_{i+1}}\right)$$

Dễ thấy rằng cả hai khoảng cách ta định nghĩa đều không âm, đối xứng và thoả mãn bất đẳng thức tam giác. Vì vậy chúng tạo ra một không gian metric ứng với $C^{p-\mathrm{var}}\left([0,T],G^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ và $C^{p-\mathrm{Hol}}\left([0,T],G^N\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$. Hơn nữa, các không gian này đều là không gian metric đầy (xem [4], định lý 8.13).
Cuối cùng ta đến với định nghĩa về đường nhám.

Định nghĩa 2.3.2 ([4]). *Ta có các định nghĩa đường nhám như sau:*

i) Một đường nhám bậc p ($p \ge 1$) là một quỹ đạo có biến phân bậc p bị chặn và nhận giá trị trong nhóm luỹ linh bậc tự do $[p]$ trên $\mathbb{R}^d$. Nói cách khác, nó là một phần tử thuộc $C^{p-var}\left([0,T],G^{[p]}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$.

ii) Một đường nhám bậc 1/p-Holder là một quỹ đạo liên tục Holder cấp $1/p$ và nhận giá trị thuộc nhóm luỹ linh bậc tự do cấp $[p]$ trên $\mathbb{R}^d$, nghĩa là nó là phần tử thuộc $C^{1/p-\mathrm{Hol}}\left([0,T],G^{[p]}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$.

Ví dụ 2.3.1. *Khi $x = B^H$ là một chuyển động Brown phân thứ $\frac{1}{4} < H < \frac{1}{3}$. Ta có thể định nghĩa $\int y\delta B^H$ theo nghĩa Skorohod như ở [30, chương 5]. Sử dụng công thức Wick-Ito [30] ta có định nghĩa cho hai đại lượng sau*

$$\mathbb{X}^{(1)}_{s,t} := \int_s^t B^H_{s,u}\delta B^H_u = \frac{1}{2}\left(B^H_{s,t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(t^{2H}-s^{2H}\right),$$
$$\mathbb{X}^{(2)}_{s,t} := \int_s^t \mathbb{X}^1_{s,u}\delta B^H_u = \frac{1}{6}\left(B^H_{s,t}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(t^{2H}-s^{2H}\right)B^H_{s,t}.$$

Khi đó với xác suất 1, $\mathbf{x} = (x,\mathbb{X}^{(1)},\mathbb{X}^{(2)})$ là một đường nhám cấp p Holder với $\frac{1}{3} > p > H$.

Chương 3
LÝ THUYẾT PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NHÁM

3.1 Giới thiệu

Ký hiệu $C^v(I, \mathbb{R}^n)$ là không gian các ánh xạ liên tục Holder hệ số v đi từ khoảng $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}^n$, trang bị các chuẩn

$$\|y\|_{v,I} := \|y_{\min I}\| + \sup_{s<t\in I} \frac{\|y_t - y_s\|}{(t-s)^v} < +\infty,$$

$$\|y\|_{\infty,I} = \sup_{s\in I} \|y_s\| < +\infty.$$

Trong mục này chúng tôi sẽ trình bày về sự tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình dạng

$$dy_t = f(y_t)dt + g(y_t)dx_t, y(a) = y_0. \tag{3.1}$$

với f, g và x thoả mãn các điều kiện sau

$(\mathbf{H_1})$: $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là hàm liên tục Lipschitz toàn cục với hệ số Lipschitz L_f. Nghĩa là

$$\|f(x) - f(y)\| \le L_f \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

$(\mathbf{H_2})$: $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là hàm bậc nhất, nghĩa là

$$g(x) = Cx + g_0, C \in \mathbb{R}^{d\times d}, g_0 \in \mathbb{R}^d.$$

$(\mathbf{H_3})$: $x \in C^\alpha([a, b], \mathbb{R}^m)$ có thể nâng lên thành một đường nhám $\mathbf{x} = (x, \mathbb{X}^{(1)}, \mathbb{X}^{(2)})$ bậc $p = \frac{1}{\alpha} \in (3, 4)$-Holder. Trang bị nửa chuẩn

$$|||\mathbf{x}|||_{\alpha,[s,t]} := \sup_{s<t\in I} \frac{\|x_t - x_s\|}{(t-s)^\alpha} + \sup_{s<t\in I} \frac{\|\mathbb{X}^{(1)}_{s,t}\|}{(t-s)^{2\alpha}} + \sup_{s<t\in I} \frac{\|\mathbb{X}^{(2)}_{s,t}\|}{(t-s)^{3\alpha}} < +\infty.$$

3.2 Tích phân nhám

Trong chương này ta sẽ định nghĩa phương trình vi phân nhám dạng

$$dy_t = f(y_t)dt + g(y_t)dx_t.$$

Đầu tiên ta sẽ làm rõ tích phân dạng $g(y_t)dx_t$ với x có thể nâng lên thành một đường nhám cấp p. Có nhiều cách tiếp cận cho việc định nghĩa nghiệm của phương trình vi phân nhám (xem [4], chương 10). Trong bài luận văn này, chúng tôi chọn cách tiếp cận của Gubinelli. Trong đó yêu cầu phải định nghĩa tích phân nhám.

Chúng tôi phát biểu không chứng minh bổ đề sau, đóng vai trò then chốt trong việc xây dựng các tích phân nhám, gọi là bổ đề sewing. Trong đó, chúng tôi điều chỉnh một số ký hiệu của bổ đề 4.2,[5].

Bổ đề 3.2.1. *Ký hiệu* $\Delta_I^2 := \{(x,y) \in I^2 : x \leq y\} \subset \mathbb{R}^2$.
Giả sử μ *là một hàm liên tục từ* Δ_I^2 *vào không gian Banach* $\mathbb{B}$ *thoả mãn tồn tại các hằng số* K *và* $\varepsilon > 0$ *sao cho*

$$\|\delta\mu(a,c,b)\| := \|\mu(a,c)+\mu(c,b)-\mu(a,b)\| \leq K|b-a|^{1+\varepsilon}, \quad \forall a \leq c \leq b, (a,b,c) \in I^3.$$

Khi đó tồn tại duy nhất một hàm $u : \Delta_I^2 \to \mathbb{B}$ *thoả mãn*

$$\|(u-\mu)(a,b)\| \leq C|b-a|^{1+\varepsilon}, \quad \forall (a,b) \in \Delta_T^2,$$

trong đó hằng số $C \leq K\theta(\varepsilon)$ *với* $\theta(\varepsilon) = (1-2^{-\varepsilon})^{-1}$.

3.2.1 Trường hợp $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$: tích phân Young

Cho $y \in \mathcal{C}^\alpha([a,b],\mathbb{R})$ và $x \in \mathcal{C}^\nu([a,b],\mathbb{R})$ thoả mãn $\alpha + \nu > 1$, tích phân Young $\int_I y_t dx_t$ có thể định nghĩa như là

$$\int_{[a,b]} y_s dx_s := \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi[a,b]} y_u x_{u,v},$$

trong đó $\Pi[a,b]$ là một phân hoạch trên $[a,b]$ và $|\Pi| := \max_{[u,v]\in\Pi[a,b]} |v-u|$. Tích phân này thoả mãn tính chất sau

$$\left\| \int_s^t y_u dx_u - y_s x_{s,t} \right\| \leq K(\alpha,\nu)|t-s|^{\alpha+\nu} \|y\|_{\alpha,[s,t]} \|x\|_{\nu,[s,t]},$$

với $[s,t] \subset I = [a,b]$ và $K(\alpha,\nu) := \left(1-2^{1-\alpha-\nu}\right)^{-1}$.

3.2.2 Trường hợp $\alpha \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$:

Trong bài luận văn này, chúng tôi chỉ quan tâm đến phương trình vi phân nhám trong trường hợp $\nu \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$. Vì tính chính quy của nghiệm là thấp, chúng ta cần nhiều hơn thông tin từ các đặc trưng. Cụ thể trong trường hợp này, chúng ta cần đến đặc trưng bậc hai $(x, \mathbb{X}^{(1)}, \mathbb{X}^{(2)})$. Với thông tin từ đặc trưng đến cấp hai, chúng ta có thể xây dựng tích phân cho trường hợp $y, x \in C^\alpha(I)$ với $\alpha \in \left(\frac{1}{4}, \nu\right)$.

Cụ thể, chúng tôi nhắc lại cách xây dựng của Gubinelli cho tích phân $\int ydx$, được trình lại ở [6]. Ta xét trường hợp x có thể nâng lên $(x, \mathbb{X}^{(1)}, \mathbb{X}^{(2)})$ là một đường nhám cấp p. Một quỹ đạo $y \in C^\alpha(I,\mathbb{R})$ được gọi là điều khiển bởi $\left(x, \mathbb{X}^1\right)$ nếu tồn tại $\left(y', y'', R^y, R^{y'}\right)$ với $y' \in C^\alpha(I,\mathbb{R}), y'' \in C^{2\alpha}(I,\mathbb{R}), R^y \in C^{3\alpha}\left(\Delta^2(I),\mathbb{R}\right)$, $R^{y'} \in C^{2\alpha}\left(\Delta^2(I),\mathbb{R}\right)$ sao cho

$$y'_{s,t} = y''_s x_{s,t} + R^{y'}_{s,t}, \quad y_{s,t} = y'_s x_{s,t} + y''_s \mathbb{X}^1_{s,t} + R^y_{s,t}, \quad \forall \min I \leq s \leq t \leq \max I.$$

y', y'' lần lượt được gọi là đạo hàm Gubinelli bậc nhất và bậc hai của y. Các đạo hàm này là duy nhất nếu $x \in C^\alpha \backslash C^{2\alpha}$.

Không gian $\mathcal{D}^{\alpha}_{(x,\mathbb{X}^1)}(I)$ các quỹ đạo y điều khiển bởi $\left(x,\mathbb{X}^1\right)$ trở thành không gian Banach với chuẩn

$$\begin{aligned}\|y\|_{x,2\alpha,I} &:= \|y_{\min I}\| + \|y'_{\min I}\| + \|y''_{\min I}\| + \|y\|_{x,\alpha,I}, \qquad \text{trong đó}\\ \|y\|_{x,\alpha,I} &:= \|y''\|_{\alpha,I} + \left\|R^{y'}\right\|_{2\alpha,I} + \|R^y\|_{3\alpha,I}\,.\end{aligned}$$

Bây giờ cố định đường nhám $\mathbf{x}$ và với mỗi $y \in \mathcal{D}^{\alpha}_{(x,\mathbb{X}^1)}(I)$, ta định nghĩa $F \in C^{\alpha}\left(\Delta^2(I),\mathbb{R}\right)$ bởi

$$F_{s,t} := y_s x_{s,t} + y'_s\mathbb{X}^1_{s,t} + y''_s\mathbb{X}^2_{s,t}.$$

Khi đó sử dụng tương quan Chen, ta có

$$F_{s,t}-F_{s,u}-F_{u,t} = -R^y_{s,u}x_{u,t} - R^{y'}_{s,u}\mathbb{X}^1_{u,t} - y''_{s,u}\mathbb{X}^2_{u,t}, \quad \forall \min I \le s \le u \le t \le \max I.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\|F_{s,t}-F_{s,u}-F_{u,t}\| &\le \left\|R^y_{s,u}x_{u,t}\right\| + \left\|R^{y'}_{s,u}\mathbb{X}^1_{u,t}\right\| + \left\|y''_{s,u}\mathbb{X}^2_{u,t}\right\|\\ &\le |t-s|^{4\alpha}\left(\|R^y\|_{3\alpha}\|x\|_{\alpha} + \left\|R^{y'}\right\|_{2\alpha}\left\|\mathbb{X}^1\right\|_{2\alpha} + \|y''\|_{\alpha}\left\|\mathbb{X}^2\right\|_{3\alpha}\right).\end{aligned}$$

Sử dụng Bổ đề sewing 3.2.1, tích phân nhám $\int_s^t y_u dx_u$ có thể định nghĩa như sau

$$\int_s^t y_u dx_u := \lim_{|\Pi|\to 0}\sum_{[u,v]\in\Pi}\left[y_u x_{u,v} + y'_u\mathbb{X}^1_{u,v} + y''_u\mathbb{X}^2_{u,v}\right].$$

Hơn nữa, cũng từ Bổ đề 3.2.1, tồn tại hằng số $C_\alpha = C_{\alpha,|I|} > 1$ phụ thuộc α và $|I| := \max I - \min I$, sao cho

$$\begin{aligned}&\left\|\int_s^t y_u dx_u - y_s x_{s,t} + y'_s\mathbb{X}^1_{s,t} + y''_s\mathbb{X}^2_{s,t}\right\|\\ \le & C_\alpha(|I|)|t-s|^{4\alpha}\left(\|R^y\|_{3\alpha}\|x\|_{\alpha} + \left\|R^{y'}\right\|_{2\alpha}\left\|\mathbb{X}^1\right\|_{2\alpha} + \|y''\|\,\|_{\alpha}\|\,\mathbb{X}^2\|_{2\alpha}\right).\end{aligned}$$

3.3 Sự tồn tại duy nhất nghiệm

Ta đã có định nghĩa cho tích phân nhám. Trong mục này chúng tôi sẽ trình bày kết quả mới về sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân nhám.

$$y_t = \int_a^t f(y_t)dt + \int_a^t g(y_t)dx_t, y(a) = y_a, a \le t \le b.$$

Cho trước $\frac{1}{p} \in (\frac{1}{4},\alpha)$, với y là một ánh xạ từ I^2 vào $\mathbb{R}^n$ ta ký hiệu các nửa chuẩn sau:

$$\begin{aligned}|||y|||_{p-\mathrm{var},I} &:= \left(\sup_{\Pi(I)}\sum_{i=1}^n\left\|y_{t_i,t_{i+1}}\right\|^p\right)^{1/p},\\ |||\mathbf{x}|||_{p-\mathrm{var},I} &:= \left(|||x|||^p_{p-\mathrm{var},I} + \left|\left|\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\right|\right|^{p/2}_{p/2-\mathrm{var},I} + \left|\left|\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\right|\right|^{p/3}_{p/3-\mathrm{var},I}\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

trong đó sup được lấy trên tất cả các phân hoạch của I. Xây dựng chuỗi thời gian dừng $\theta_k(\gamma)$ như sau:

$$\theta_0 = a, \tau_{k+1} = \inf\{t > \theta_k : |||\mathbf{x}|||_{p-var,[\theta_k,t]} < \gamma\} \wedge b$$

Đặt $N_{[a,b]} = N_{\gamma,a,b}(x) := \sup\{k \in \mathbb{N}, \theta_k(\gamma) \leq b\}$. Khi đó

$$N \leq 1 + \gamma^{-1/p} |||\mathbf{x}|||_{p-var,[a,b]}.$$

Ở [7], các tác giả đã chứng minh được nếu $f(x) = Ax, g(x) = Cx$, với A, C là các ma trận cấp $d \times d$, hệ (3.1) có nghiệm duy nhất. Trong bài luận văn này, chúng tôi điều chỉnh một số lập luận để mở rộng các kết quả đó.

Định lý 3.3.1. *Giả sử $m = 1$. Dưới các điều kiện $(H_1), (H_2), (H_3)$, hệ 3.1 có nghiệm duy nhất trên khoảng thời gian $[T_1, T_2]$. Hơn nữa,*

$$\|y\|_{\infty,[a,b]} \leq \left[\|y_a\| + M_0 N_{[a,b]}(\mathbf{x})\right] e^{4C_f(b-a)+LN_{[a,b]}(\mathbf{x})}.$$

$$\begin{aligned} |||y, R^y|||_{p-\text{var},[a,b]} :=& |||y|||_{p-\text{var},[a,b]} + |||R^y|||_{p/3-\text{var},[a,b]} \\ \leq& \left[\|y_a\| + M_0 N_{[a,b]}(\mathbf{x})\right] \times \\ & \times e^{4L_f(b-a)+LN_{[a,b]}(\mathbf{x})} N_{[a,b]}^{\frac{p-1}{p}}(\mathbf{x}) - \|y_a\|, \end{aligned}$$

với M, L là các hằng số chỉ phụ thuộc $p, g_0, f(0), C, L_f$.

Chứng minh. Chọn v đủ gần α sao cho $\frac{1}{3} < v < \alpha$. Chúng tôi mô phỏng lại các bước chứng minh trong [6]. Xây dựng chuỗi thời gian dừng $\tau_k(\gamma)$ như sau:

$$\tau_0 = a, \tau_{k+1} = \inf\{t > \tau_k : |||\mathbf{x}|||_{v,[\tau_k,t]} < \gamma\} \wedge b$$

Đặt $N = N_{\gamma,T_1,T_2}(x) := \sup\{k \in \mathbb{N}, \tau_k(\gamma) \leq T_2\}$. Khi đó

$$N \leq 1 + \gamma^{-v} |||\mathbf{x}|||_{v,[T_1,T_2]}.$$

Đặt $|||y, R^y|||_{v,[s,t]} := |||y|||_{v,[s,t]} + |||R^y|||_{2v,[s,t]}$
và $\|y\|_{v,x} = |||y|||_{v,[a,b]} + \|y_a\| + \|y'_a\| + \|y''_a\|$.
Ta viết lại hệ (3.1) thành

$$y_t = G(y)_t := y_a + \int_a^t f(y_u)du + \int_a^t [Cy_u + g_0]x_u.$$

Trước hết ta chứng minh hệ có nghiệm duy nhất trên khoảng thời gian $[a, T]$ với $T - a \leq 1$. Ký hiệu $\mathcal{D}_x^{2v}(y_a, Cy_a + g_0, C^2 y_a)$ là tập các quỹ đạo (y, y', y'') điều khiển bởi x với giá trị ban đầu $y_a, y'_a = Cy_a + g_0, y''_a = C^2 y_a$.
Ta chứng minh ánh xạ sau được định nghĩa tốt:

$$\mathcal{M} : \mathcal{D}_x^{2v}(y_a, Cy_a + g_0, C^2 y_a) \to \mathcal{D}_x^{2v}(y_a, Cy_a + g_0, C^2 y_a)$$

$$\mathcal{M}(y,y',y'')_t := (G(y)_t, Cy_t + g_0, Cy'_t)\,.$$

Thật vậy, nếu y được điều khiển bởi x. Ta có đánh giá của tích phân nhám

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_s^t y_u dx_u - y_s x_{s,t} - y'_s \mathbb{X}^{(1)}_{s,t} - y''_s \mathbb{X}^{(2)}_{s,t} \right\| \\
&\leq C_v |t-s|^{4v} \Big(\left|\!\left|\!\left| R^y \right|\!\right|\!\right|_{3v,[s,t]} \left|\!\left|\!\left| x \right|\!\right|\!\right|_{v,[s,t]} + \left|\!\left|\!\left| R^{y'} \right|\!\right|\!\right|_{2v,[s,t]} \left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\!\right|\!\right|_{2v,[s,t]} \\
&+ \left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(2)} \right|\!\right|\!\right|_{3v,[s,t]} \left|\!\left|\!\left| y'' \right|\!\right|\!\right|_{v,[s,t]} \Big),
\end{aligned}$$

với C_v là hằng số phụ thuộc $t-s, C$ và v. Đặc biệt C_v có thể coi như hằng số chỉ phụ thuộc C, v nếu ta xét $t-s<1$.

Do tính tuyến tính của tích phân nhám, $G(y)_t$ cũng được điều khiển bởi x với $G(y)'_t = Cy_t + g_0, G(y)''_t = Cy'_t$.

Bây giờ ta sẽ ước lượng $\mathcal{M}(y)_{x,v} = \left|\!\left|\!\left| Cy' \right|\!\right|\!\right|_v + \left|\!\left|\!\left| R^{Cy+g_0} \right|\!\right|\!\right|_{2v} + \left|\!\left|\!\left| R^{G(y)} \right|\!\right|\!\right|_{3v}$ Ta có $R^{G(y)}_{s,t} = \int_s^t f(y_u)du + \int_s^t (Cy_u + g_0)dx_u - (Cy_s+g_0)x_{s,t} - Cy'_s\mathbb{X}^{(1)}_{s,t}$. Do đó

$$\begin{aligned}
\|R^{G(y)}_{s,t}\| \leq & C_p|t-s|^{4v} \Big(\left|\!\left|\!\left| R^y \right|\!\right|\!\right|_{3v,[s,t]} \left|\!\left|\!\left| x \right|\!\right|\!\right|_{v,[s,t]} + \left|\!\left|\!\left| R^{y'} \right|\!\right|\!\right|_{2v,[s,t]} \left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\!\right|\!\right|_{2v,[s,t]} \\
&+ \left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(2)} \right|\!\right|\!\right|_{3v,[s,t]} \left|\!\left|\!\left| y'' \right|\!\right|\!\right|_{v,[s,t]} \Big) + L_f(t-s)\|y\|_{\infty,[s,t]} + L_f(t-s)|f(0)| \\
&+ \|y''\|_{\infty,[s,t]} \|\mathbb{X}^{(2)}_{s,t}.
\end{aligned}$$

Chú ý $\|y\|_{\infty,[s,t]} \leq \|y_a\| + \|y'_a\|(T-a)\left|\!\left|\!\left| x \right|\!\right|\!\right|_{v,[s,t]} + \|y'_a\|(t-s)^{2v}\left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\!\right|\!\right|_{[2v,[s,t]} + (T-a)^{3v}\left|\!\left|\!\left| R^y \right|\!\right|\!\right|_{3v,[s,t]}, \forall s,t \in [a,T]$. Ta suy ra

$$\begin{aligned}
\left|\!\left|\!\left| R^{G(y)} \right|\!\right|\!\right|_{3v,[a,T]} \leq & C_v(T-a)^v \Big[\left|\!\left|\!\left| R^y \right|\!\right|\!\right|_{3v,[a,T]} \left|\!\left|\!\left| x \right|\!\right|\!\right|_{v,[a,T]} + \left|\!\left|\!\left| R^{y'} \right|\!\right|\!\right|_{2v,[a,T]} \left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\!\right|\!\right|_{2v,[s,t]} \\
&+ \left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(2)} \right|\!\right|\!\right|_{3v,[a,T]} \left|\!\left|\!\left| y'' \right|\!\right|\!\right|_{v,[s,t]} \Big] + L_f(T-a)^{1-3v} \Big[\|y_a\| \\
&+ \|y'_a\|(T-a)\left|\!\left|\!\left| x \right|\!\right|\!\right|_{v,[s,t]} + \|y'_a\|(T-a)^{2v}\left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\!\right|\!\right|_{[2v,[a,T]} \\
&+ (T-a)^{3v}.\left|\!\left|\!\left| R^y \right|\!\right|\!\right|_{3v,[a,T]} \Big] + \|y''_a\| \left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(2)} \right|\!\right|\!\right|_{[3v,[a,T]} \\
&+ (T-a)^v \left|\!\left|\!\left| y'' \right|\!\right|\!\right|_{v,[a,T]} \left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(2)} \right|\!\right|\!\right|_{3v,[a,T]} + L_f|f(0)|(T-a)^{1-3v}. \\
\leq & K_1 \left[(T-a)^{1-3v} + \left|\!\left|\!\left| x \right|\!\right|\!\right|_{v,[a,T]} + \left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\!\right|\!\right|_{[3v,[a,T]} + \left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(2)} \right|\!\right|\!\right|_{[3v,[a,T]} \right] \\
&\times \left[\|y_a\| + \|y'_a\| + \|y''_a\| + \left|\!\left|\!\left| y \right|\!\right|\!\right|_{x,v} \right] + L_f(T-a)^{1-3v}|f(0)|,
\end{aligned}$$

trong đó $\left|\!\left|\!\left| y \right|\!\right|\!\right|_{x,v} := \left|\!\left|\!\left| y'' \right|\!\right|\!\right|_{v,[a,T]} + \left|\!\left|\!\left| R^{y'} \right|\!\right|\!\right|_{2v,[a,T]} + \left|\!\left|\!\left| R^y \right|\!\right|\!\right|_{3v,[a,T]}$ và K_1 là hằng số phụ thuộc v, L_f, f_0, C, g_0.

Mặt khác, $R^{Cy+g_0}_{s,t} \leq \|Cy''_{s,t}\|\|\mathbb{X}^{(1)}_{s,t}\| + \|CR^y_{s,t}\|$ nên

$$\left|\!\left|\!\left| R^{Cy+g_0} \right|\!\right|\!\right|_{2v} \leq \|C\| \left[\left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\!\right|\!\right|_{2v} + (T-a)^{1-3v} \right] \left[\|y''_a\| + \left|\!\left|\!\left| y \right|\!\right|\!\right|_{x,v} \right].$$

Cuối cùng,

$$\begin{aligned}\|\!|Cy'|\!\|_v \leq \|C\|\|\!|y'|\!\|_v \leq& \|C\|\left[\|y''\|_\infty \|\!|x|\!\|_v + (T-a)^v \left\|\!\left| R^{y'} \right|\!\right\|_{2v}\right] \\ \leq& \|C\|(\|\!|x|\!\|_v + (T-a)^{1-3v})(\|y''_a\| + \|\!|y|\!\|_{x,v}).\end{aligned}$$

Tổng hợp ba đánh giá trên, ta có

$$\begin{aligned}\|\!|\mathcal{M}(y)|\!\|_{x,v} \leq& K\left(|T-a|^{1-3v} + \|x\|_{v,[a,T]} + \left\|\mathbb{X}^1\right\|_{2v,[a,T]} + \left\|\mathbb{X}^2\right\|_{3v,[a,T]}\right)\|y\|_{x,\alpha,[a,T]} \\ &+ L_f(T-a)^{1-3v}|f(0)|,\end{aligned}$$

trong đó $K \geq 1$ là hằng số phụ thuộc v, L_f, f_0, C, g_0.
Chọn $\mu < 1$ và một thời gian $T = T(a)$ thoả mãn

$$(1 \vee L_f|f_0|)\,(T-a)^{1-3\alpha} + \|x\|_{\alpha,[a,T]} + \left\|\mathbb{X}^1\right\|_{2\alpha,[a,T]} + \left\|\mathbb{X}^2\right\|_{3\alpha,[a,T]} = \frac{\mu}{K} < 1.$$

Vì vậy, nếu ta giới hạn lại trong tập compact

$$\begin{aligned}\mathcal{B} := \Big\{ (y,y',y'') \in \mathcal{D}_x^\alpha\left(y_a, Cy_a + g_0, C^2 y_a\right) : \|\!|y|\!\|_{x,\alpha} \leq& \frac{\mu}{1-\mu}\left(1 + \|C\| + \|C\|^2\right)\|y_a\| \\ &+ \frac{\mu}{1-\mu} L_f|f(0)| \Big\},\end{aligned}$$

khi đó

$$\begin{aligned}\|\!|\mathcal{M}(y)|\!\|_{x,\alpha} &\leq \mu\|y\|_{x,\alpha} + L_f|f(0)|\mu \\ &\leq \left(\frac{\mu^2}{1-\mu} + \mu\right)\left(1 + \|C\| + \|C\|^2\right)\|y_a\| + \left(\frac{\mu^2}{1-\mu} + \mu\right) L_f|f(0)| \\ &\leq \frac{\mu}{1-\mu}\left(1 + \|C\| + \|C\|^2\right)\|y_a\| + \frac{\mu}{1-\mu} L_f|f(0)|.\end{aligned}$$

Như vậy ánh xạ $\mathcal{M} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ định nghĩa tốt. Hơn nữa, với mỗi quỹ đạo y và $\bar{y} \in \mathcal{B}$, lặp lại các lập luận ở trên với chú ý rằng đại lượng chứa f_0 sẽ biến mất, ta thu được

$$\|\mathcal{M}(y) - \mathcal{M}(\bar{y})\|_{x,v} \leq \mu\|y - \bar{y}\|_{x,v}.$$

Có nghĩa $\mathcal{M}$ là ánh xạ co trên $\mathcal{B}$. Điều này chứng minh hệ có nghiệm trên $[a,T]$.
Cuối cùng, xây dựng chuỗi thời gian dừng

$$\tau_0 = \min I, \quad \tau_{i+1} := \inf\left\{t > \tau_i : (1 \vee L_f|f_0|)\,(t-\tau_i)^{1-3\alpha} + \|\mathbf{x}\|_{v,[\tau_i,t]} = \frac{\mu}{K}\right\} \wedge \max I,$$

và đặt $N_{I,v}(\mathbf{x}) := \sup\{i \in \mathbb{N} : \tau_i \leq \max I\}$, từ đánh giá

$$\frac{\mu}{K} < |\tau_{i+1} - \tau_i|^{\alpha - v}\left(1 + L_f|f_0| + \|\mathbf{x}\|_{\alpha,I}\right)$$

ta suy ra

$$N_{I,\alpha}(\mathbf{x}) < \left[\frac{K}{\mu}\left(1 + L_f|f_0| + \|\mathbf{x}\|_{\nu,I}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha - v}} + 1.$$

Vậy chúng ta có thể mở rộng khoảng $[a, T]$ ra toàn khoảng I và chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ.
Cuối cùng, ta ước lượng các chuẩn của hệ. Chú ý rằng :

$$\begin{aligned} y'_s &= Cy_s + g_0, [Cy + g_0]'_s = C^2 y_s + Cg_0, \\ y''_s &= C^2 y_s, R^{y'}_{s,t} = CR^y_{s,t} + C^2 y_s \mathbb{X}^{(1)}_{s,t}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} \|y_{s,t}\| \leq & \left\| \int_s^t f(y_u) du \right\| + \left\| \int_s^t (Cy_u + g_0) dx_u - (Cy_s + g_0) x_{s,t} - C^2 y_s \mathbb{X}^{(1)}_{s,t} \right\| \\ & + \|(Cy_s + g_0) x_{s,t}\| + \|C^2 y_s \mathbb{X}^{(1)}_{s,t}\| \\ \leq & \int_s^t [L_f \|y\|_{p-var,[s,u]} + L_f \|y_s\| + \|f(0)\|] du \\ & + C_p |t-s|^{4/p} \Big(\|R^y\|_{p/3-var,[s,t]} \|x\|_{p-var,[s,t]} \\ & + \left\| R^{y'} \right\|_{p/2-var,[s,t]} \left\| \mathbb{X}^{(1)} \right\|_{p/2-var,[s,t]} + \left\| \mathbb{X}^{(2)} \right\|_{p/3-var,[s,t]} \|y''\|_{p-var,[s,t]} \Big) \\ & + \big(|C| \|y_s\| + \|g_0\|\big) \big[\|x_{s,t}\| + C \|\mathbb{X}^{(2)}_{s,t}\|\big] \\ \leq & \int_s^t [L_f \|y\|_{p-var,[s,u]} + L_f \|y_s\| + \|f(0)\|] du \\ & + C_p |t-s|^{4/p} \Big(\|x\|_{p-var,[s,t]} + |C^2| \left\| \mathbb{X}^{(1)} \right\|_{p/2-var,[s,t]} + |C^3| \left\| \mathbb{X}^{(2)} \right\|_{p/3-var,[s,t]} \Big) \\ & \times \|y, R^y\|_{p-var,[s,t]} + 2\big(\|y_s\| + \frac{g_0}{|C|}\big) \left[|C| |x_{s,t}| + |C|^2 |\mathbb{X}^{(1)}_{s,t}| \right]. \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} \|R^y_{s,t}\| = & \|y_{s,t} - (Cy_s + g_0) x_{s,t} - C^2 y_s \mathbb{X}^{(1)}_{s,t}\| \\ = & \left\| \int_s^t f(y_u) du + \int_s^t (Cy_u + g_0) dx_u - (Cy_s + g_0) x_{s,t} - C^2 y_s \mathbb{X}^{(1)}_{s,t} \right\| \\ \leq & \int_s^t [L_f \|y\|_{p-var,[s,u]} + L_f \|y_s\| + \|f(0)\|] du \\ & + C_p |t-s|^{4/p} \Big(\|x\|_{p-var,[s,t]} + |C^2| \left\| \mathbb{X}^{(1)} \right\|_{p/2-var,[s,t]} + |C^3| \left\| \mathbb{X}^{(2)} \right\|_{p/3-var,[s,t]} \Big) \\ & \times \|y, R^y\|_{p-var,[s,t]}. \end{aligned}$$

Kết hợp hai đánh giá trên, ta có

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left|y, R^y\right|\right\|_{p-\mathrm{var},[s,t]} \\
\leq& 2\int_s^t \left(L_f \left\|\left|y\right|\right\|_{p-\mathrm{var},[s,u]} + L_f \left\|y_s\right\| + \left\|f(0)\right\|\right) du \\
&+ 3\left(\|C\| \left\|\left|x\right|\right\|_{p-\mathrm{var},[s,t]} \vee \|C\|^2 \left\|\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\right\|_{p/2-\mathrm{var},[s,t]} \vee \|C\|^3 \left\|\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\right\|_{p/3-\mathrm{var},[s,t]}\right) \\
&\times \left(\|y_s\| + \frac{\|g(0)\|}{\|C\|}\right) + 2C_p\Big\{\|C\| \left\|\left|x\right|\right\|_{p-\mathrm{var},[s,t]} \vee \|C\|^2 \left\|\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\right\|_{p/2-\mathrm{var},[s,t]} \\
&\vee \|C\|^3 \left\|\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\right\|_{p/3-\mathrm{var},[s,t]}\Big\} \left\|\left|y, R^y\right|\right\|_{p-\mathrm{var},[s,t]}.
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
\left\|\left|y, R^y\right|\right\|_{p-\mathrm{var},[s,t]} \leq& \int_s^t 4L_f \left\|\left|y, R^y\right|\right\|_{p-\mathrm{var},[s,u]} du \\
&+ 4\left(\|f(0)\| + L_f\|y_s\|\right)(t-s) + \frac{3}{2C_p}\left(\|y_s\| + \frac{\|g(0)\|}{\|C\|}\right),
\end{aligned}
$$

khi $[s,t]$ đủ nhỏ sao cho $2C_p\|C\| \|\mathbf{x}\|_{p-\mathrm{var},[s,t]} \leq \frac{1}{2}$. Áp dụng bổ đề Gronwall, ta có

$$
\begin{aligned}
\left\|\left|y, R^y\right|\right\|_{p-\mathrm{var},[s,t]} \leq& 4\left(\|f(0)\| + L_f\|y_s\|\right)(t-s) + \frac{3}{2C_p}\frac{\|g(0)\|}{\|C\|} + \frac{3}{2C_p}\|y_s\| \\
&+ \int_s^t 4l_f e^{4L_f(t-u)}\Big[4\left(\|f(0)\| + L_f\|y_s\|\right)(u-s) \\
&+ \frac{3}{2C_p}\frac{\|g(0)\|}{\|C\|} + \frac{3}{2C_p}\|y_s\|\Big] du \\
\leq& \left(M_0 + e^L\|y_s\|\right)e^{4L_f(t-s)} - \|y_s\|,
\end{aligned}
$$

với M_0 và L là các hằng số chỉ phụ thuộc $C, f(0), g_0, p$. Xây dựng chuỗi thời gian dừng θ_k với $\gamma = \frac{1}{4C_p\|C\|}$, ta thu được kết quả của định lý. □

3.4 Hệ rời rạc điều khiển bởi đường nhám

Trong mục này, chúng tôi mở rộng các kết quả từ [8] cho bậc của đường nhám lớn hơn. Cụ thể, chúng tôi xét trường hợp $3 < p < 4$ thay vì $2 < p < 3$ ở [8] và chứng minh sự hội tụ của lược đồ Euler cho phương trình vi phân nhám.

3.4.1 Một số ký hiệu

Chúng ta bắt đầu với việc giới thiệu một số ký hiệu của hàm rời rạc.

Cho $[a,b]$ là khoảng đóng của $\mathbb{R}$, và

$$
\Pi = \{t_i : 0 \leq i \leq n, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}
$$

là một phân hoạch của $[a,b]$. $|\Pi| := \max_{0\le i\le n-1}(t_{i+1}-t_i) > 0$ là bán kính của phân hoạch. Với $\mathcal{B}$ là không gian định chuẩn, một hàm rời rạc lấy giá trị trên $\mathcal{B}$ định nghĩa trên Π là ánh xạ

$$y : \Pi \to \mathcal{B}, \quad \Pi \ni t_i \mapsto y_{t_i} \in \mathcal{B}.$$

Trong chương này ta định nghĩa một chuẩn đối với hàm rời rạc:

$$\|y\|_{\infty,\Pi} := \sup_{t_i\in\Pi} |y_{t_i}|,$$

và

$$|||y|||_{p,\Pi} := \sup_{t_i^*\in\Pi, 0\le i\le r, t_0^*<t_1^*\ldots<t_r^*} \left(\sum_{i=0}^{r-1} \left| y_{t_i^*} - y_{t_{i+1}^*} \right|^p \right)^{1/p},$$

$$\|y\|_{p,\Pi} = |y_a| + |||y|||_{p,\Pi}.$$

Ta có thể thấy $\|\cdot\|_{\infty,\Pi}$ và $|||\cdot|||_{p,\Pi}$ là các chuẩn trên không gian các hàm rời rạc xác định trên Π, còn $|||y.|||_{p,\Pi}$ là nửa chuẩn. Chú ý rằng nửa chuẩn này mạnh hơn so với nửa chuẩn ta đã định nghĩa ở chương 3. Ta lấy $c \in \Pi$ và y là hàm rời rạc định nghĩa trên Π. Đặt $\Pi[a,c] := \{t \in \Pi : a \le t \le c\}, \Pi[c,b] := \{t \in \Pi : c \le t \le b\}$. Ta xét hạn chế của y trên $[a,c]$ và $[c,b]$ và ta có

$$|||y|||^p_{p,\Pi[a,c]} + |||y|||^p_{p,\Pi[c,b]} \le |||y|||^p_{p,\Pi} \le 2^{p-1}\left[|||y|||^p_{p,\Pi[a,c]} + |||y|||^p_{p,\Pi[c,b]} \right].$$

Ta nhắc lại định nghĩa của một điều khiển

Định nghĩa 3.4.1 ([8]). *Một hàm không âm ω xác định trên $\Delta\Pi := \{(s,t) \in \Pi^2 \mid s \le t\}$ được gọi là một điều khiển của Π nếu nó triệt tiêu trên đường chéo, nghĩa là $\omega_{s,s} = 0, \forall s \in \Pi$, và hơn nữa nó cộng tính dưới, tức là với mọi $s \le u \le t$ trong Π, ta có*

$$\omega_{s,u} + \omega_{u,t} \le \omega_{s,t}.$$

3.4.2 Thiết lập của hệ rời rạc điều khiển bởi đường nhám

Cho trước $[T_1,T_2]$ và $3 \le p < 4$, đặt $\Pi = \{t_i : 0 \le i \le n, T_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T_2\}$ là một phân hoạch hữu hạn của $[T_1,T_2]$ và đặt $x : \Pi \to \mathbb{R}$, $\mathbb{X}^{(1)}(\cdot,\cdot) : \Pi^2 \to \mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$ và $\mathbb{X}^{(2)}(\cdot,\cdot) : \Pi^2 \to \mathbb{R}\otimes\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$ là các hàm rời rạc lần lượt định nghĩa trên Π, Π^2,Π^2 và thoả mãn tương quan Chen, tức

$$\mathbb{X}^{(1)}_{s,t} - \mathbb{X}^{(1)}_{s,u} - \mathbb{X}^{(1)}_{u,t} = x_{s,u} \otimes x_{u,t}, \quad s \le u \le t \in \Pi,$$

$$\mathbb{X}^{(2)}_{s,t} - \mathbb{X}^{(2)}_{s,u} - \mathbb{X}^{(2)}_{u,t} = x_{s,u} \otimes \mathbb{X}^{(1)}_{u,t} + \mathbb{X}^{(1)}_{s,u} \otimes x_{u,t}, \quad s \le u \le t \in \Pi.$$

Đinh nghĩa nửa chuẩn

$$|||\mathbf{x}|||_{p,\Pi[a,b]} = \left(|||x|||^p_{p,\Pi[a,b]} + \left|\left|\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\right|\right|^{p/2}_{p/2,\Pi[a,b]} + \left|\left|\left| \mathbb{X}^{(2)} \right|\right|\right|^{p/3}_{p/3,\Pi[a,b]} \right)^{1/p}, a,b \in \Pi.$$

Trong chương này chúng tôi luôn giả sử $\|\|\mathbf{x}\|\|_{p,\Pi[T_1,T_2]} < +\infty$. Cũng trong chương này chúng tôi xem xét hệ rời rạc trên Π điều khiển bởi x như sau

$$\begin{aligned} y_{t_0} &\in \mathbb{R}^d, \quad \text{và với} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ y_{t_{k+1}} &= y_{t_k} + f\left(y_{t_k}\right)\left(t_{k+1} - t_k\right) + g\left(y_{t_k}\right) x_{t_k,t_{k+1}} + Dg\left(y_{t_k}\right) g\left(y_{t_k}\right) \mathbb{X}^{(1)}_{t_k,t_{k+1}} \\ &\quad + A(y_{t_k})\mathbb{X}^{(2)}_{t_k,t_{k+1}} + \varepsilon^*_{t_k,t_{k+1}}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

trong đó

$$A(y_s) := D^2g(y_s)g(y_s)g(y_s) + Dg(y_s)Dg(y_s)g(y_s).$$

Trong chương này, chúng tôi sẽ áp đặt các giả thiết như sau

Giả thiết 3.4.1. *Các điều kiện sau thoả mãn*

$(\mathbf{H_f})$ $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *là hàm liên tục và tăng trưởng tuyến tính, nghĩa là tồn tại* $L_f > 0$ *sao cho*

$$\|f(y)\| \le L_f\|y\| + \|f(0)\|, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d,$$

$\left(\mathbf{H}^{(1)}_{\mathbf{g}}\right)$ $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *bị chặn, khả vi liên tục bị chặn tới cấp 4. Cụ thể hơn, tồn tại* $L_g > 0$ *thoả mãn*

$$\max\left\{\|g\|_\infty, \|Dg\|_\infty, \|D^2g\|_\infty, \|D^3g\|_\infty\right\} \le L_g.$$

$\left(\mathbf{H}^{(2)}_{\mathbf{g}}\right)$ g *là hàm tuyến tính, tức tồn tại* $K \in \mathbb{R}^{d\times d}, H \in \mathbb{R}^d$ *sao cho*

$$g(x) = Kx + H, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

$(\mathbf{H}_\epsilon)$ $\varepsilon^* : \Pi^2 \to \mathbb{R}^d$ *là nhiễu và thoả mãn*

$$\left\|\varepsilon^*_{t_k,t_{k+1}}\right\| \le H^*\omega^*_{t_k,t_{k+1}},$$

trong đó H^* *là một hằng số không âm và* ω^* *là một điều khiển trên* $\Delta\Pi := \{s, t \in \mathbb{R}^2 : s \le t\}$.

Chúng tôi ký hiệu các biểu thức sau

$$R^{y,1}_{s,t} = y_t - y_s - g\left(y_s\right) x_{s,t}, (s,t) \in \Delta\Pi.$$

$$R^{y,2}_{s,t} = y_t - y_s - g\left(y_s\right) x_{s,t}, (s,t) - Dg(y_s)g(y_s)\mathbb{X}^{(1)}_{s,t}, (s,t) \in \Delta\Pi.$$

$$R^{g(y),1}_{s,t} = g(y_t) - g(y_s) - Dg(y_s)g\left(y_s\right) x_{s,t}.$$

$$R^{g(y),2}_{s,t} = g(y_t) - g(y_s) - Dg(y_s)g\left(y_s\right) x_{s,t} - A(y_s)\mathbb{X}^{(1)}_{s,t}.$$

và ký hiệu

$$\left\|\left|y, R^{y,1}, R^{y,2}\right|\right\|_{p,\Pi[a,b]} := \|\|y\|\|_{p,\Pi[a,b]} + \left\|\left|R^{y,1}\right|\right\|_{p/2,\Pi[a,b]} + \left\|\left|R^{y,2}\right|\right\|_{p/3,\Pi[a,b]}.$$

Trước hết, chúng tôi nhắc lại bổ đề sewing rời rạc, được chứng minh ở [2].

Bổ đề 3.4.1. *Cho* $\Pi = \{t_i, 0 \le i \le n, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ *là một phân hoạch của* $[a,b]$ *và* F *là một hàm xác định trên* $\Delta\Pi := \{(s,t) \in \Pi^2, s \le t\}$ *sao cho* $F_{s,s} = 0, \forall s \in \Pi$. *Đặt*

$$\delta F_{s,u,t} := F_{s,u} + F_{u,t} - F_{s,t}, s,u,t \in \Pi$$

$$I_{k,l} := \sum_{k \le j \le l-1} F_{t_j,t_{j+1}} - F_{t_k,t_l}, t_k < t_l \in \Pi.$$

Giả sử rằng tồn tại một điều khiển ω *trên* Π *và một số* $\lambda > 1$ *sao cho với mọi* $s < u < t \in \Pi$, *ta có*

$$\|\delta F_{s,u,t}\| \le w_{s,t}^{\lambda}.$$

Khi đó tồn tại $\theta > 0$ *phụ thuộc chỉ vào* λ *sao cho*

$$\|I_{k,l}\| \le \theta w_{s,t}^{\lambda}, \forall t_k < t_l \in \Pi.$$

3.4.3 Tính ổn định của hệ rời rạc

Mệnh đề 3.4.1. *Dưới các giả thiết* $(H_f), (H_g^{(1)}), (H_\epsilon)$. *Hơn nữa giả sử* X *một quỹ đạo của chuyển động Brown phân thứ* $B^{1/p}$. *Khi đó với mọi* $s,t \in \Pi$ *ta có đánh giá sau*

$$\begin{aligned}
&\left\|\left|y, R^{y,1}, R^{y,2}\right\|\right|_{p,\Pi[s,t]} \\
\le & C\left\|\left|y, R^{y,1}, R^{y,2}\right\|\right|_{p,\Pi[s,t]}\left[|||x|||_{p,\Pi[s,t]} \vee \left(\left|\left|\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\right|\right|_{p/2,\Pi[s,t]}|||x|||_{p,\Pi[s,t]} + |||x|||^3_{p,\Pi[s,t]}\right.\right. \\
& \left.\left. + \left|\left|\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\right|\right|_{p/3,\Pi[s,t]}\right) \vee \left|\left|\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\right|\right|_{p/2,\Pi[s,t]}\right] \\
& + C\left[\left|\left|\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\right|\right|_{p/2,\Pi[s,t]}.|||x|||^2_{p,\Pi[s,t]} + \left|\left|\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\right|\right|_{p/3,\Pi[s,t]} + \left|\left|\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\right|\right|_{p/2,\Pi[s,t]}\right] \\
& + C.(t^{2/p} - s^{2/p})|||x|||_{p,\Pi[s,t]} + 3\left[L_f\|y\|_{\infty,\Pi[s,t]} + f_0\right](t-s) + 3H^* w^*_{s,t},
\end{aligned}$$

với C *là một hằng số chỉ phụ thuộc* L_g, p.

Chứng minh. Đặt

$$F_{s,t} := g(y_s)x_{s,t} + Dg(y_s)g(y_s)\mathbb{X}^{(1)}_{s,t} + A(y_s)\mathbb{X}^{(2)}_{s,t}$$

$$\epsilon_{s,t} = f(y_s)(t-s) + \epsilon^*_{s,t}$$

Hệ rời rạc được viết lại $y_{t_{k+1}} = y_{t_k} + F_{t_k,t_{k+1}} + \epsilon_{t_k,t_{k+1}}$. Khi đó với mọi $s \le u \le t$ ta có

$$\begin{aligned}
\delta F_{s,u,t} :=& F_{s,u} + F_{u,t} - F_{s,t} \\
=& R^{g(y),2}_{s,t} x_{u,t} + \left[Dg(y_u)g(y_u) - Dg(y_s)g(y_s) - A(y_s)x_{s,u}\right]\mathbb{X}^{(1)}_{s,t} \\
& + \left[A(y_u) - A(y_s)\right]\mathbb{X}^{(2)}_{s,t}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
R^{g(y),2}_{s,u} =& g(y_u) - g(y_s) - Dg(y_s)g(y_s)x_{s,u} - A(y_s)\mathbb{X}^{(1)}_{s,t} \\
=& \left[\int_0^1 Dg(y_s + \lambda(y_u - y_s))(y_u - y_s)d\lambda\right] - Dg(y_s)g(y_s)x_{s,u} - A(y_s)\mathbb{X}^{(1)}_{s,u} \\
=& \int_0^1 Dg(y_s + \lambda(y_u - y_s)).R^{y,2}_{s,u}d\lambda \\
&+ \int_0^1 \left[Dg(y_s + \lambda(y_u - y_s))Dg(y_s)g(y_s)\mathbb{X}^{(1)}_{s,u} - Dg(y_s)Dg(y_s)g(y_s)\mathbb{X}^{(1)}_{s,u}\right] d\lambda \\
&+ \int_0^1 \left[Dg(y_s + \lambda(y_u - y_s))g(y_s)x_{s,u} - Dg(y_s)g(y_s)x_{s,u} - D^2g(y_s)g(y_s)g(y_s)\mathbb{X}^{(1)}_{s,u}\right] d\lambda \\
:=& T^{(1)}_{s,u} + T^{(2)}_{s,u} + T^{(2)}_{s,u}.
\end{aligned}
$$

Ta sẽ ước lượng cả ba biểu thức trên. Trước hết,

$$T^{(1)}_{s,u} \leq L_g \| R^{y,2}_{s,u} \|.$$

Sau đó,

$$T^{(2)}_{s,u} \leq \frac{1}{2} L_g^3 \| (y_u - y_s)\mathbb{X}^{(1)}_{s,u} \|.$$

$$
\begin{aligned}
T^{(3)}_{s,u} =& \int_0^1 \int_0^\lambda D^2g(y_s + \mu(y_u - y_s))\lambda(y_u - y_s)g(y_s)x_{s,u}d\mu d\lambda - D^2g(y_s)g(y_s)g(y_s)\mathbb{X}^{(1)}_{s,u} \\
=& \int_0^1 \int_0^\lambda D^2g(y_s + \mu(y_u - y_s))\lambda R^{y,2}_{s,u}d\mu d\lambda \\
&+ \int_0^1 \int_0^\lambda \left[D^2g(y_s + \mu(y_u - y_s)) - D^2g(y_s)\right] g(y_s)x_{s,u}g(y_s)x_{s,u}d\mu d\lambda \\
&+ \int_0^1 \int_0^\lambda D^2g(y_s + \mu(y_u - y_s))Dg(y_s)g(y_s)\mathbb{X}^{(1)}_{s,u}g(y_s)x_{s,u}d\mu d\lambda \\
&+ D^2g(y_s)g(y_s)g(y_s)\left[\frac{1}{2}x_{s,u}x_{s,u} - \mathbb{X}^{(1)}_{s,u}\right].
\end{aligned}
$$

Từ đây, chú ý X là chuyển động một quỹ đạo của quá trình Brown phân thứ, ta có

$$
\begin{aligned}
T^{(3)}_{s,u} \leq& \frac{1}{2} L_g \| R^{y,2}_{s,u} \| + \frac{1}{2} L_g^3 \| (y_u - y_s)x_{s,u}x_{s,u} \| \\
&+ \frac{1}{2} L_g^4 . \| x_{s,u}x_{s,u} \| \\
&+ \frac{1}{2} L_g^3 . |u^{2/p} - s^{2/p}|.
\end{aligned}
$$

Trong mệnh đề này, ta ký hiệu các hằng số $C_1, C_2, \ldots$ là các hằng số chỉ phụ thuộc L_g và p. Kết hợp các đánh giá trên, ta có

$$\left\vert\!\left\vert\!\left\vert R^{g(y),2} \right\vert\!\right\vert\!\right\vert_{p/3,\Pi[s,t]} \leq C_1 \vert\!\vert\!\vert R^{y,2} \vert\!\vert\!\vert_{p/3,\Pi[s,t]} + C_1 \vert\!\vert\!\vert y \vert\!\vert\!\vert_{p,\Pi[s,t]} . \left[\left\vert\!\left\vert\!\left\vert \mathbb{X}^{(1)} \right\vert\!\right\vert\!\right\vert_{p/2,\Pi[s,t]} + \vert\!\vert\!\vert x \vert\!\vert\!\vert^2_{p,\Pi[s,t]} \right]$$

$$+ C_1 \left|\left|\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\right|\right|_{p/2,\Pi[a,b]} . |||x|||_{p,\Pi[s,t]} + C_1 (t^{2/p} - s^{2/p}).$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} Dg(y_u)g(y_u) - Dg(y_s)g(y_s) - A(y_s)x_{s,u} = &\int_0^1 B(y_s + \lambda(y_u - y_s)) R^{y,1}_{s,u} d\lambda \\ &+ \int_0^1 \left[B(y_s + \lambda(y_u - y_s)) - B(y_s)\right] g(y_s) x_{s,u} d\lambda, \end{aligned}$$

với $B(y_s) := Dg(y_s)Dg(y_s) + D^2 g(y_s)g(y_s)$ kéo theo $B(y_s)g(y_s) = A(y_s)$.
Kết hợp các đánh giá trên, ta có với các điểm s, t thuộc phân hoạch Π:

$$\begin{aligned} \|\delta F_{s,u,t}\| \leq & C_2 \left|\left|\left| R^{g(y),2} \right|\right|\right|_{p/3,\Pi[s,t]} . |||x|||_{p,\Pi[s,t]} + C_2 . |||y|||_{p,\Pi[s,t]} . |||x|||_{p,\Pi[s,t]} . \left|\left|\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\right|\right|_{p/2,\Pi[s,t]} \\ &+ C_2 |||R^{y,1}|||_{p/2,\Pi[s,t]} . \left|\left|\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\right|\right|_{p/2,\Pi[s,t]} + C_2 . |||y|||_{p,\Pi[s,t]} . \left|\left|\left| \mathbb{X}^{(2)} \right|\right|\right|_{p/3,\Pi[s,t]} \\ \leq & C_3 . |||R^{y,2}|||_{p/3,\Pi[s,t]} . |||x|||_{p,\Pi[s,t]} \\ &+ C_3 . |||y|||_{p,\Pi[s,t]} . \left[\left|\left|\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\right|\right|_{p/2,\Pi[s,t]} |||x|||_{p,\Pi[s,t]} + |||x|||^3_{p,\Pi[s,t]} + \left|\left|\left| \mathbb{X}^{(2)} \right|\right|\right|_{p/3,\Pi[s,t]} \right] \\ &+ C_3 . |||R^{y,1}|||_{p/2,\Pi[s,t]} . \left|\left|\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\right|\right|_{p/2,\Pi[s,t]} \\ &+ C_3 . \left|\left|\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\right|\right|_{p/2,\Pi[a,b]} . |||x|||^2_{p,\Pi[s,t]} + C_3 . (t^{2/p} - s^{2/p}) |||x|||_{p,\Pi[s,t]} \\ \leq & C_4 w^{4/p}_{s,t} \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} w_{s,t} := & |||y|||^{p/4}_{p,\Pi[s,t]} . \left[\left|\left|\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\right|\right|^{p/4}_{p/2,\Pi[s,t]} |||x|||^{p/4}_{p,\Pi[s,t]} + |||x|||^3_{p,\Pi[s,t]} + \left|\left|\left| \mathbb{X}^{(2)} \right|\right|\right|^{p/4}_{p/3,\Pi[s,t]} \right] \\ & |||R^{y,1}|||^{p/4}_{p/2,\Pi[s,t]} . \left|\left|\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\right|\right|^{p/4}_{p/2,\Pi[s,t]} \\ & \left|\left|\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\right|\right|^{p/4}_{p/2,\Pi[a,b]} . |||x|||^{p/2}_{p,\Pi[s,t]} + C_3 . (t^{2/p} - s^{2/p})^{p/4} |||x|||^{p/4}_{p,\Pi[s,t]} . \end{aligned}$$

là một điều khiển. Mặt khác,

$$\|\epsilon_{t_j,t_{j+1}}\| \leq \left[L_f \|y\|_{\infty,\Pi} + f_0\right] (t_{j+1} - t_j) + H^* w^*_{t_j,t_{j+1}} := w^{(0)}_{t_j,t_{j+1}} .$$

Theo bổ đề sewing rời rạc 3.4.1, ta thu được với mọi $s, t \in \Pi$

$$\|y_t - y_s - F_{s,t}\| \leq C_5 . w^{4/p}_{s,t} + w^{(0)}_{s,t} .$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned} |||y|||_{p,\Pi[s,t]} \leq & C_5 . w^{4/p}_{s,t} + w^{(0)}_{s,t} + |||F|||_{p,\Pi[s,t]} \\ \leq & C_6 . |||R^{y,2}|||_{p/3,\Pi[s,t]} . |||x|||_{p,\Pi[s,t]} \end{aligned}$$

$$+ C_6.\|\!|y|\!\|_{p,\Pi[s,t]}.\left[\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]}\|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]} + \|\!|x|\!\|^3_{p,\Pi[s,t]} + \left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\!\right|\!\right|_{p/3,\Pi[s,t]}\right]$$
$$+ C_6.\|\!|R^{y,1}|\!\|_{p/2,\Pi[s,t]}.\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]} + C_6.\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[a,b]}.\|\!|x|\!\|^2_{p,\Pi[s,t]}$$
$$+ C_6.(t^{2/p} - s^{2/p})\|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]} + \left[L_f\|y\|_{\infty,\Pi[s,t]} + f_0\right](t-s) + H^* w^*_{s,t}.$$

Mặt khác,ta đánh giá với $R^{y,2}_{s,t}$:

$$\|R^{y,2}_{s,t}\| = \|y_t - y_s - F_{s,t}\| + \|A(y_s)\mathbb{X}^{(2)}_{s,t}\|$$

kéo theo

$$\begin{aligned}\left|\!\left|\!\left|R^{y,2}_{s,t}\right|\!\right|\!\right|_{p/3,\Pi[s,t]} \leq & C_7.\|\!|R^{y,2}|\!\|_{p/3,\Pi[s,t]}.\|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]} + C_7.\|\!|y|\!\|_{p,\Pi[s,t]}.\left[\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]}\|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]}\right.\\ &\left. + \|\!|x|\!\|^3_{p,\Pi[s,t]} + \left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\!\right|\!\right|_{p/3,\Pi[s,t]}\right]\\ &+ C_7.\|\!|R^{y,1}|\!\|_{p/2,\Pi[s,t]}.\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]} + C_7.\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[a,b]}.\|\!|x|\!\|^2_{p,\Pi[s,t]}\\ &+ C_7.(t^{2/p} - s^{2/p})\|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]} + \left[L_f\|y\|_{\infty,\Pi[s,t]} + f_0\right](t-s) + H^* w^*_{s,t}\\ &+ C_7\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\!\right|\!\right|_{p/3,\Pi[s,t]}.\end{aligned}$$

Cuối cùng,

$$\|R^{y,1}_{s,t}\| = \|R^{y,2}_{s,t}\| + \|Dg(y_s)g(y_s)\mathbb{X}^{(1)}_{s,t}\|$$

với chú ý $\left|\!\left|\!\left|R^{y,2}_{s,t}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]} \leq \left|\!\left|\!\left|R^{y,2}_{s,t}\right|\!\right|\!\right|_{p/3,\Pi[s,t]}$, ta có

$$\begin{aligned}\left|\!\left|\!\left|R^{y,1}_{s,t}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]} \leq & C_8.\|\!|R^{y,2}|\!\|_{p/3,\Pi[s,t]}.\|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]} + C_8.\|\!|y|\!\|_{p,\Pi[s,t]}.\left[\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]}\|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]}\right.\\ &\left. + \|\!|x|\!\|^3_{p,\Pi[s,t]} + \left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\!\right|\!\right|_{p/3,\Pi[s,t]}\right]\\ &+ C_8.\|\!|R^{y,1}|\!\|_{p/2,\Pi[s,t]}.\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]} + C_7.\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]}.\|\!|x|\!\|^2_{p,\Pi[s,t]}\\ &+ C_8.(t^{2/p} - s^{2/p})\|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]} + [L_f\|y\|_{\infty,\Pi} + f_0](t-s) + H^* w^*_{s,t}\\ &+ C_8\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\!\right|\!\right|_{p/3,\Pi[s,t]} + C_8\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]}.\end{aligned}$$

Kết hợp các đánh giá trên, ta có

$$\begin{aligned}&\|\!|y, R^{y,1}, R^{y,2}|\!\|_{p,\Pi[a,b]}\\ \leq & C\|\!|y, R^{y,1}, R^{y,2}|\!\|_{p,\Pi[a,b]}\left[\|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]} \vee \left(\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]}\|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]} + \|\!|x|\!\|^3_{p,\Pi[s,t]}\right.\right.\\ &\left.\left. + \left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\!\right|\!\right|_{p/3,\Pi[s,t]}\right) \vee \left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]}\right]\\ &+ C\left[\left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]}.\|\!|x|\!\|^2_{p,\Pi[s,t]} + \left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\!\right|\!\right|_{p/3,\Pi[s,t]} + \left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]}\right]\end{aligned}$$

$$+ C.(t^{2/p} - s^{2/p})|||x|||_{p,\Pi[s,t]} + 3\left[L_f\|y\|_{\infty,\Pi} + f_0\right](t-s) + 3H^* w^*_{s,t}.$$

Chúng tôi kết thúc chứng minh tại đây. □

Đối với trường hợp g là hàm bậc nhất, chúng tôi cũng có một kết quả tương tự. Chúng tôi điều chỉnh lại các lập luận trong [7].

Mệnh đề 3.4.2. *Dưới các giả thiết* $(H_f), (H_g^{(2)}), (H_\epsilon)$ *và* $s, t \in \Pi$, *ta có đánh giá sau*

$$\begin{aligned}|||y, R^{y,1}, R^{y,2}|||_{p,\Pi[s,t]} \leq & C|||y, R^{y,1}, R^{y,2}|||_{p,\Pi[s,t]}\left[|||x|||_{p,\Pi[s,t]} \vee \left|\left|\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\right|\right|_{p/2,\Pi[s,t]}\right.\\ & \left.\vee \left|\left|\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\right|\right|_{p/3,\Pi[s,t]}\right] + 3\left[L_f\|y\|_{\infty,\Pi[s,t]} + f_0\right](t-s) + 3H^* w^*_{s,t}\\ & + C.\left[\|y\|_{\infty,\Pi[s,t]} + |H|\right]\left[|||x|||_{p,\Pi[s,t]} + \left|\left|\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\right|\right|_{p/2,\Pi[s,t]}\right.\\ & \left.+ \left|\left|\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\right|\right|_{p/3,\Pi[s,t]}\right],\end{aligned}$$

với C *là một hằng số chỉ phụ thuộc* K, p.

Chứng minh. Chúng ta ký hiệu $C_1, \ldots$ là các hằng số chỉ phụ thuộc T, p. Đặt $F_{s,t} := [Ky_s + H]\, x_{s,t} + K^2 y_s \mathbb{X}^{(1)}_{s,t} + K^3 y_s \mathbb{X}^{(2)}_{s,t}$
Khi đó

$$\|\delta F_{s,u,t}\| = \|R^{Ky+H,2}_{s,u} x_{u,t}\| + K^2\|(y_u - y_s - Ky_s x_{s,u})\mathbb{X}^{(1)}_{s,t}\| + K^3\|(y_u - y_s)\mathbb{X}^{(2)}_{s,t}\|$$

Ta có

$$R^{Ky+H,2} = Ky_u - Ky_s - K^2 y_s x_{s,u} - K^3 y_s \mathbb{X}^{(1)}_{s,t} = KR^{y,2}_{s,u}$$

Như vậy,

$$\begin{aligned}\|\delta F_{s,u,t}\| \leq & |K||||R^{y,2}|||_{p/3,\Pi[s,t]}|||x|||_{p,\Pi[s,t]} + K^2\left|\left|\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\right|\right|_{p/2,\Pi[s,t]}|||R^{y,1}|||_{p/2,\Pi[s,t]}\\ & + |K^3||||y|||_{p,\Pi[s,t]}\left|\left|\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\right|\right|_{p/3,\Pi[s,t]}.\end{aligned}$$

Chú ý rằng vế phải đánh giá trên là một điều khiển. Lặp lại phần còn lại của chứng minh ở bổ đề 3.4.1, tuy nhiên sử dụng đánh giá

$$|F_{s,t}| \leq \left[\|y\|_{\infty,\Pi[s,t]} + |H|\right]\left[|K||||x|||_{p,\Pi[s,t]} + K^2\left|\left|\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\right|\right|_{p/2,\Pi[s,t]} + |K|^3\left|\left|\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\right|\right|_{p/3,\Pi[s,t]}\right].$$

□

Chuỗi thời gian dừng rời rạc

Cho trước $\Pi = \{t_i, 0 \le i \le n, a = t_0 < t_1, \dots, < t_n = b\}$ và $\beta, \delta > 0$. Chúng ta định nghĩa một chuỗi thời gian dừng $G_{\Pi,\beta,\delta,w} = \{\tau_0^*, \tau_1^*, \dots\}$ dựa trên một điều khiển w như sau:

1) $\tau_0^* = t_0 = a$

2) Giả sử $\tau_i^* \in G_{\Pi,\beta,\delta,w} = t_k \in \Pi$ đã được định nghĩa. Nếu $\tau_i^* = t_n = b$, ta dừng chuỗi lại. Nếu không, ta định nghĩa τ_{i+1}^* như sau

   i) Nếu $w^{\beta}_{t_k,t_{k+1}} > \delta$, đặt $\tau_{i+1} = t_{k+1}$

   ii) Ngược lại, $\tau_{i+1}^* := \max\{t_l \in \Pi, k < l < n, w^{\beta}_{t_k,t_l} \le \delta\}$

Đặt $\hat{N} = \hat{N}_{\Pi[a,b],\beta,\delta,w} = \#G_{\Pi,\beta,\delta,w}$. Khi đó ta luôn có

$$w_{\tau_i^*,\tau_{i+2}^*} > \delta^{1/\beta}, 0 < i < \hat{N} - 3$$

Điều này kéo theo

$$\hat{N} \le 2 + \frac{2}{\delta^{1/\beta}} w_{a,b}$$

Ta xây dựng một số chuỗi thời gian dừng sau. Ý tưởng của việc xây dựng chuỗi thời gian này ở [8].

1) Trường hợp $H_g^{(1)}$, tức g bị chặn. Nhắc lại hằng số C ở bổ đề 3.4.1. Cố định $\beta_1 = \frac{1}{p}$, đặt một điều khiển như sau

$$\overline{w}_{s,t} = \|\!|\mathbf{x}|\!\|^p_{p,[s,t]} = \|\!|x|\!\|^p_{p,\Pi[s,t]} + \left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|^{p/2}_{p/2,\Pi[s,t]} + \left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\!\right|\!\right|^{p/3}_{p/3,\Pi[s,t]}$$

Chọn $\delta_1 > 0$ chỉ phụ thuộc C đủ nhỏ sao cho với $\|\!|\mathbf{x}|\!\|_{p,[s,t]} \le \delta_1$ kéo theo

$$\begin{cases} \|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]} + \|\!|\mathbb{X}^{(1)}|\!\|_{p/2,\Pi[s,t]} + \|\!|\mathbb{X}^{(2)}|\!\|_{p/3,\Pi[s,t]} \le \frac{1}{2C} \\ \|\!|\mathbb{X}^{(1)}|\!\|_{p/2,\Pi[s,t]} . \|\!|x|\!\|^2_{p,\Pi[s,t]} + \|\!|\mathbb{X}^{(2)}|\!\|_{p/3,\Pi[s,t]} + \|\!|\mathbb{X}^{(1)}|\!\|_{p/2,\Pi[s,t]} \le \frac{1}{2C} \\ \|\!|\mathbb{X}^{(1)}|\!\|_{p/2,\Pi[s,t]} \|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]} + \|\!|x|\!\|^3_{p,\Pi[s,t]} + \|\!|\mathbb{X}^{(2)}|\!\|_{p/3,\Pi[s,t]} \le \frac{1}{2C} \end{cases}$$

2) Trường hợp $H_g^{(2)}$, g là tuyến tính. Nhắc lại hằng số C ở bổ đề 3.4.2. Chọn $\delta_1 > 0$ chỉ phụ thuộc C đủ nhỏ sao cho với $\|\!|\mathbf{x}|\!\|_{p,[s,t]} \le \delta_1$ kéo theo

$$\|\!|x|\!\|_{p,\Pi[s,t]} + \left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\!\right|\!\right|_{p/2,\Pi[s,t]} + \left|\!\left|\!\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\!\right|\!\right|_{p/3,\Pi[s,t]} \le \frac{1}{4C}.$$

Cuối cùng ta xây dựng chuỗi thời gian dừng kết hợp cho cả hai trường hợp. Cụ thể, đặt $\delta_2 := \min(1, \frac{1}{12L_f})$. Ta chọn 2 chuỗi thời gian dừng rời rạc:

1. $\omega_1(s,t) = \|\!|\mathbf{x}|\!\|^p_{p,\Pi[\mathrm{s,t}]}, \beta_1 = 1/p, \delta_1$, và chuỗi thời gian dừng thứ nhất $G_{\Pi,\beta_1,\delta_1,\omega_1} = \{t_i^*\} \subset \Pi$.

2. $\omega_2(s,t) = |t-s|, \beta_2 = 1, \delta_2$, và chuỗi thời gian dừng $G_{\Pi,\beta_2,\delta_2,\omega_2} = \{t_i^{**}\} \subset \Pi$. Ký hiệu $\hat{G} := \{\hat{\tau}_i : \hat{\tau}_0 < \hat{\tau}_1 < \ldots < \hat{\tau}_{\hat{N}-1}\}$ là thứ tự các phân hoạch của chuỗi kết hợp $\{t_i^*\} \cup \{t_i^{**}\}$. Khi đó số điểm $\hat{N} := \#\hat{G}$ thoả mãn

$$\hat{N} \leq 4 + \frac{2}{\delta_2}(b-a) + \frac{2}{\delta_1^p}\|\|\mathbf{x}\|\|^p_{p,\Pi[\mathrm{a,b}]}.$$

Ta xét riêng hai trường hợp sau

Trường hợp $H_g^{(1)}$

Mệnh đề 3.4.3. *Dưới các điều kiện của bổ đề 3.4.1. Giả sử thêm a, b là hai phân hoạch liên tiếp của Π. Khi đó*

$$\|y\|_{p,\Pi[a,b]} \leq \Big[|y_a| + C\Big(b - a + \|\|x\|\|_{p,\Pi[s,t]} + \Big\|\Big\|\mathbb{X}^{(1)}\Big\|\Big\|_{p/2,\Pi[s,t]} + \Big\|\Big\|\mathbb{X}^{(2)}\Big\|\Big\|_{p/3,\Pi[s,t]}\Big) + 6H^* w^*_{a,b}\Big] \times e^{C_f(b-a)},$$

với $C > 0$ là hằng số phụ thuộc p, L_g, L_f, f_0 và $C_f > 0$ là hằng số chỉ phụ thuộc L_f, f_0.

Chứng minh. Do a, b là hai phân hoạch liên tiếp của Π nên

$$\begin{aligned} y_b - y_a =& f(y_a)(b-a) + g(y_a)x_{a,b} + Dg(y_a)g(y_a)\mathbb{X}^{(1)}_{a,b} \\ &+ A(y_a)\mathbb{X}^{(2)}_{a,b} + \varepsilon^*_{a,b}, \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức $1 + x \leq e^x, \forall x \in \mathbb{R}$, ta thu được đánh giá tương ứng. □

Mệnh đề 3.4.4. *Dưới các điều kiện của mệnh đề 3.4.1. Giả sử thêm $\|\|\mathbf{x}\|\|_{p,\Pi[a,b]} \leq \delta_1$ và $|b-a| \leq \delta_2$. Khi đó*

$$\|y\|_{p,\Pi[a,b]} \leq [\|y_a\| + C_f(1 + b - a) + 6H^* w^*_{a,b}]\, e^{C_f(b-a)},$$

trong đó $C_f > 0$ là hằng số chỉ phụ thuộc L_f và f_0.

Chứng minh. Với $s, t \in \Pi[a,b]$, sử dụng mệnh đề 3.4.1 ta có

$$\begin{aligned} \|\|y\|\|_{p,\Pi[s,t]} \leq& \Big[6L_f\|y_s\| + 6L_f\|\|y\|\|_{p,\Pi[s,t]} + 6f_0\Big](t-s) \\ &+ 2 + 6H^* w^*_{s,t}, \end{aligned}$$

với chú ý là $\|y\|_{\infty,\Pi[s,t]} \leq y_s + \|\|y\|\|_{p,\Pi[s,t]}$ và $t^{2/p} - s^{2/p} \leq 1$. Từ đây

$$\|\|y\|\|_{p,\Pi[s,t]} \leq \frac{6L_f(t-s)\|y_s\|}{1 - 6L_f(t-s)} + \frac{6f_0(t-s) + 2 + 6H^* w^*_{s,t}}{1 - 6L_f(t-s)}.$$

Chú ý rằng $\|y_t\| \leq \|y_s\| + \|\|y\|\|_{p,\Pi[s,t]}$, ta có

$$\|\|y\|\|_{p,\Pi[s,t]} \leq \frac{\|y_s\|}{1 - 6L_f(t-s)} + \frac{6f_0(t-s) + 2 + 6H^* w^*_{s,t}}{1 - 6L_f(t-s)}.$$

Xây dựng chuỗi thời gian dừng rời rạc cho $w_{s,t} = |t-s|, \beta = 1, \delta = \delta_2$. Gọi m là chỉ số lớn nhất của t_i^*. Do ta đang xét phân hoạch đều nên ta luôn có $m \le 1 + 12L_f(b-a)$.
Với chú ý $\frac{1}{1-x} \le e^{2x}, \forall 0 \le x \le \frac{1}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}
\|y^*_{\tau_{i+1}}\| \le & \|y\|_{p,\Pi[\tau_i^*,\tau_{i+1}^*]} \\
\le & \frac{\|y_{\tau_i^*}\|}{1-6L_f(\tau_{i+1}^*-\tau_i^*)} + \frac{6f_0(\tau_{i+1}^*-\tau_i^*)+2+6H^*w^*_{\tau_i^*,\tau_{i+1}^*}}{1-6L_f(\tau_{i+1}^*-\tau_i^*)} \\
\le & \left[\|y_{\tau_i^*}\| + \frac{|f_0|}{L_f} + 2 + 6H^*w^*_{\tau_i^*,\tau_{i+1}^*}\right] e^{12L_f(\tau_{i+1}^*-\tau_i^*)}, \quad \forall i \le 1 + 12L_f(b-a).
\end{aligned}$$

Dùng quy nạp, ta có

$$\left|y_{t_i^*}\right| \le \left[\left|y_{t_0^*}\right| + (2+16L_f(b-a))\left(\frac{|f_0|}{L_f}+2\right) + 6H^*\omega^*_{t_0^*,t_i^*}\right] e^{12L_f(t_i^*-t_0^*)}.$$

Điều này kéo theo

$$\|y\|_{\infty,\Pi[a,b]} = \sup_i \|y\|_{\infty,\Pi\left[t_i^*,t_{i+1}^*\right]} \le \left[|y_a| + c_f(1+(b-a)) + 6H^*\omega^*_{a,b}\right] e^{12L_f(b-a)},$$

trong đó c_f chỉ phụ thuộc L_f, f_0. Cuối cùng, dùng ước lượng của m ta có

$$\begin{aligned}
\|y\|_{p,\Pi[a,b]} &\le (1+12L_f(b-a))^{\frac{p-1}{p}} \left[|y_a| + c_f(1+(b-a)) + 6H^*\omega^*_{a,b}\right] e^{12L_f(b-a)} \\
&\le \left[|y_a| + C_f(1+(b-a)) + 6H^*\omega^*_{a,b}\right] e^{24L_f(b-a)}.
\end{aligned}$$

với C_f chỉ phụ thuộc L_f và f_0. Chứng minh được kết thúc ở đây. □

Định lý 3.4.1. *Dưới các điều kiện của mệnh đề 3.4.1 và $|\Pi| \le \delta_2$, ta có các ước lượng sau:*

$$\begin{aligned}
\|y\|_{\infty,\Pi[T_1,T_2]} \le & \Big[|y_{T_1}| + \hat{N}C\left(1 + \|x\|_{p,\Pi[T_1,T_2]} + \|\mathbb{X}^{(1)}\|_{p/2,\Pi[T_1,T_2]} + \|\mathbb{X}^{(2)}\|_{p/3,\Pi[T_1,T_2]}\right) \\
& + 6H^*\omega^*_{T_1,T_2}\Big] e^{C_f(T_2-T_1)}
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\|y\|_{p,\Pi[T_1,T_2]} \le & \Big[|y_{T_1}| + \hat{N}C\left(1 + \|x\|_{p,\Pi[T_1,T_2]} + \|\mathbb{X}^{(1)}\|_{p/2,\Pi[T_1,T_2]} + \|\mathbb{X}^{(2)}\|_{p/3,\Pi[T_1,T_2]}\right) \\
& + 6H^*\omega^*_{T_1,T_2}\Big] e^{C_f(T_2-T_1)} \hat{N}^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

trong đó C là hằng số phụ thuộc L_f, L_g, f_0, g_0, C_f là hằng số phụ thuộc L_f, f_0 và $\hat{N}$ thoả mãn đánh giá sau

$$\hat{N} \le 4 + \frac{2}{\delta_2}(T_2-T_1) + \frac{2\|\mathbf{x}\|^p_{p,\Pi[T_1,T_2]}}{\delta_1^p}.$$

Chứng minh. Ta chọn chuỗi thời gian dừng rời rạc kết hợp $\left[\tau_i^*, \tau_{i+1}^*\right]$ trên $[T_1, T_2]$ như đã trình bày ở trên. Sử dụng các kết quả của các mệnh đề 3.4.3, 3.4.4 ta luôn có

$$\begin{aligned}\|y\|_{p,\Pi[\tau_i^*,\tau_{i+1}^*]} \leq &\Big[|y_{\tau_i^*}| + C_{f,g}\left(1 + (\tau_{i+1}^* - \tau_i^*) + \|x\|_{p,\Pi} + \|\mathbb{X}^{(1)}\|_{p/2,\Pi} + \|\mathbb{X}^{(2)}\|_{p/3,\Pi}\right) \\ &+ 6H^*\omega^*_{\tau_i^*,\tau_{i+1}^*}\Big] e^{C_f(\tau_{i+1}-\tau_i)},\end{aligned}$$

với $C_{f,g}$ là hằng số phụ thuộc p, L_g, L_f, f_0 và C_f phụ thuộc L_f, f_0. Sử dụng quy nạp, ta có

$$\|y\|_{\infty,\Pi} \leq \left[|y_{T_1}| + \hat{N}C\left(1 + \|x\|_{p,\Pi} + \|\mathbb{X}^{(1)}\|_{p/2,\Pi} + \|\mathbb{X}^{(2)}\|_{p/3,\Pi}\right) + 6H^*\omega^*_{T_1,T_2}\right] e^{C_f(T_2-T_1)},$$

và

$$\begin{aligned}\|y\|_{p,\Pi} &\leq \hat{N}^{\frac{p-1}{p}} \sum_{i=0}^{\hat{N}-1} \|y\|_{p,\Pi[\tau_i^*,\tau_{i+1}^*]} \\ &\leq \Big[|y_{T_1}| + \hat{N}C\left(1 + \|x\|_{p,\Pi} + \|\|\mathbb{X}^{(1)}\|_{p/2,\Pi}\| + \|\mathbb{X}^{(2)}\|_{p/3,\Pi}\right) + 2H^*\omega^*_{T_1,T_2}\Big] \\ &\quad \times e^{C_f(T_2-T_1)}\hat{N}^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Ước lượng của $\hat{N}$ đã được trình bày ở mục xây dựng chuỗi thời gian dừng rời rạc. Chúng tôi kết thúc chứng minh tại đây. □

Chúng ta cũng có những kết quả tương tự cho trường hợp g là hàm bậc nhất.

Trường hợp $H_g^{(2)}$

Mệnh đề 3.4.5. *Dưới các điều kiện của mệnh đề 3.4.2. Hơn nữa, giả sử a, b là hai phân hoạch liên tiếp của Π và $|\Pi| \leq \delta_2$. Khi đó*

$$\|y\|_{p,\Pi[a,b]} \leq \left[|y_a| + D(|f_0| \vee |H|) + 6H^*w^*_{a,b}\right] e^{D(1+\|\mathbf{x}\|^p_{p,\Pi[a,b]})},$$

với $D > 0$ là hằng số phụ thuộc K, L_f, p và $C_f > 0$ là hằng số chỉ phụ thuộc L_f, f_0.

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức $e^x \geq x + 1$ và bất đẳng thức Young, ta có các đánh giá sau

$$\begin{aligned}|y_b - y_a| \leq &(L_f|y_a| + |f_0|)(b-a) + |y_a|\left(|Kx_{a,b}| + |K^2\mathbb{X}^{(1)}_{a,b}| + |K^3\mathbb{X}^{(2)}_{a,b}|\right) \\ &+ |Hx_{a,b}| + \epsilon^*_{a,b} \\ \leq &\left[|y_a| + D(|f_0| \vee |H|) + 6H^*w^*_{a,b}\right] e^{D(1+\|\mathbf{x}\|^p_{p,\Pi[a,b]})},\end{aligned}$$

trong đó D chỉ phụ thuộc p, L_f, K. Ta thu được kết luận. □

Mệnh đề 3.4.6. *Dưới các điều kiện của mệnh đề 3.4.2. Giả sử thêm $\|\mathbf{x}\|_{p,\Pi[a,b]} \leq \delta_1$ và $|b-a| \leq \delta_2$. Khi đó,*

$$\|y\|_{p,\Pi[a,b]} \leq \left[\|y_a\| + D(|f_0| \vee |H|) + 12H^*w^*_{a,b}\right] e^{1+C_f(b-a)},$$

trong đó $C_f, D > 0$ là các hằng số chỉ phụ thuộc K và H.

Chứng minh. Sử dụng kết quả của mệnh đề 3.4.2, ta thu được

$$\begin{aligned}
|||y|||_{p,\Pi[a,b]} \leq &[4L_f\|y\|_{\infty,\Pi[a,b]} + 4f_0](b-a) + 4H^* w^*_{a,b} + \frac{1}{3}\left[\|y\|_{\infty,\Pi[s,t]} + |H|\right] \\
\leq &[4L_f\|y\|_{\infty,\Pi[a,b]} + 4f_0](b-a) + 4H^* w^*_{a,b} + \frac{1}{3}\left[\|y_a\| + |||y|||_{p,\Pi[s,t]} + |H|\right] \\
\leq &[4L_f\|y_a\| + 4f_0](b-a) + 4H^* w^*_{a,b} + \frac{1}{3}\left[\|y_a\| + |||y|||_{p,\Pi[s,t]} + |H|\right] \\
&+ \frac{1}{3}|||y|||_{p,\Pi[s,t]}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
|||y|||_{p,\Pi[a,b]} \leq &[12L_f\|y_a\| + 12f_0](b-a) + 12H^* w^*_{a,b} + \|y_a\| + |H| \\
\leq &\left[\|y_a\| + 12(|f_0| \vee |H|) + 12H^* w^*_{a,b}\right] e^{2+12L_f(b-a)} - \|y_a\|.
\end{aligned}$$

và từ đó ta có kết quả của mệnh đề. □

Lặp lại chứng minh của định lý 3.4.1 nhưng dùng các mệnh đề 3.4.5 và 3.4.6, ta thu được định lý sau

Định lý 3.4.2. *Dưới các điều kiện của mệnh đề 3.4.1 và $|\Pi| \leq \delta_2$, ta có các ước lượng sau:*

$$\|y\|_{\infty,\Pi[T_1,T_2]} \leq \Big[\,|y_{T_1}| + \hat{N}D(|f_0| \vee |H|) + 12H^*\omega^*_{T_1,T_2}\Big] e^{D(1+T_2-T_1+|||\mathbf{x}|||^p_{p,\Pi[T_1,T_2]})}$$

và

$$\|y\|_{p,\Pi[T_1,T_2]} \leq \Big[\,|y_{T_1}| + \hat{N}D(|f_0| \vee |H|) + 12H^*\omega^*_{T_1,T_2}\Big] e^{D(1+T_2-T_1+|||\mathbf{x}|||^p_{p,\Pi[T_1,T_2]})} \hat{N}^{\frac{p-1}{p}},$$

trong đó D là hằng số phụ thuộc L_f, L_g, f_0, g_0 và $\hat{N}$ thoả mãn đánh giá sau

$$\hat{N} \leq 4 + \frac{2}{\delta_2}(T_2 - T_1) + \frac{2|||\mathbf{x}|||^p_{p,\Pi[T_1,T_2]}}{\delta_1^p}.$$

3.5 Ứng dụng

Trong mục này chúng tôi xem xét phương trình vi phân nhám có hệ số trượt

$$dz_t = f(z_t)dt + g(z_t)dx_t, y(T_1) = y_{T_1} \in \mathbb{R}^d. \tag{3.4}$$

với các điều kiện sau

$\mathbf{H_f}$: f là hàm số liên tục Lipschitz toàn cục với hệ số Lipschitz L_f.

$\mathbf{H_g}$: g là hàm bậc nhất, tức $g(x) = Cx + g_0, C \in \mathbb{R}^{d\times d}, g_0 \in \mathbb{R}^d$.

$\mathbf{H_x}$: $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có thể nâng lên $(x, \mathbb{X}^{(1)}, \mathbb{X}^{(2)})$ là một đường nhám, cấp p, với nửa chuẩn

$$\sup_{\Pi,a,b\in\Pi}\left(|||x|||^p_{p,\Pi[a,b]} + \left|\left|\left|\mathbb{X}^{(1)}\right|\right|\right|^{p/2}_{p/2,\Pi[a,b]} + \left|\left|\left|\mathbb{X}^{(2)}\right|\right|\right|^{p/3}_{p/3,\Pi[a,b]}\right)^{1/p} < +\infty, 3 < p \leq 4$$

Sự tồn tại nghiệm của hệ này đã được trình bày ở chương 2. Xét phân hoạch $\Pi = \{t_k, T_1 = t_0 < t_1, \ldots < t_n = T_2\}$. Một lược đồ xấp xỉ với nghiệm $y_{t_k} = y(t_k, y_0, x)$ cho (3.4) được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} y_{t_0} &= y_{T_1} \quad \text{và với} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ y_{t_{k+1}} =& y_{t_k} + f\left(y_{t_k}\right)\left(t_{k+1} - t_k\right) + g\left(y_{t_k}\right) x_{t_k,t_{k+1}} + Dg\left(y_{t_k}\right) g\left(y_{t_k}\right) \mathbb{X}^{(1)}_{t_k,t_{k+1}} \\ &+ A(y_{t_k})\mathbb{X}^{(2)}_{t_k,t_{k+1}}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

trong đó

$$A(y_s) := D^2 g(y_s) g(y_s) g(y_s) + Dg(y_s) Dg(y_s) g(y_s).$$

Ta đến với định lý chính của mục này, về sự hội tụ của lược đồ Euler

Định lý 3.5.1. *Giả sử các điều kiện* $(\mathbf{H_f}), (\mathbf{H_g}), (\mathbf{H_x})$ *thoả mãn thì ta có*

$$\lim_{|\Pi[T_1,T_2]| \to 0} \sup_{0 \le k \le n} \left|z\left(t_k\right) - y_{t_k}\right| = 0.$$

Chứng minh. Đặt $h_{t_k} = z_{t_k} - y_{t_k}$. Khi đó $h_{T_1} = 0$ và

$$\begin{aligned} h_{t_{k+1}} =& h_{t_k} + \Big[g\left(y_{t_k}\right) x_{t_k,t_{k+1}} + \partial g\left(z_{t_k}\right) g\left(z_{t_k}\right) \mathbb{X}_{t_k,t_{k+1}} - g\left(y_{t_k}\right) x_{t_k,t_{k+1}} \\ &- \partial g\left(y_{t_k}\right) g\left(y_{t_k}\right) \mathbb{X}^{(1)}_{t_k,t_{k+1}} + A(z_{t_k})\mathbb{X}^{(1)}_{t_k,t_{k+1}} - A(y_{t_k})\mathbb{X}^{(1)}_{t_k,t_{k+1}}\Big] \\ &+ \Big[\left(f\left(z_{t_k}\right) - f\left(y_{t_k}\right)\right)\left(t_{k+1} - t_k\right) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(f\left(z_u\right) - f\left(z_{t_k}\right)\right) du \\ &+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} g\left(z_u\right) dx_u - g\left(z_{t_k}\right) x_{t_k,t_{k+1}} - \partial g\left(z_{t_k}\right) g\left(z_{t_k}\right) \mathbb{X}^{(1)}_{t_k,t_{k+1}} - A(z_{t_k})\mathbb{X}^{(2)}_{t_k,t_{k+1}}\Big] \\ =& h_{t_k} + F^h_{t_k,t_{k+1}} + \varepsilon_{t_k,t_{k+1}}, \end{aligned}$$

với $F^h = F^y - F^z$ với F^y định nghĩa như để mệnh đề 3.4.2 và

$$\begin{aligned} F^z_{s,t} &:= \left[Cz_s + g_0\right] x_{s,t} + C^2 z_s \mathbb{X}^{(1)}_{s,t} + C^3 z_s \mathbb{X}^{(2)}_{s,t}, \\ \varepsilon_{t_k,t_{k+1}} =& \left[f\left(z_{t_k}\right) - f\left(y_{t_k}\right)\right]\left(t_{k+1} - t_k\right) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[f(z(u)) - f\left(z_{t_k}\right)\right] du \\ &+ \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(z(u)) dx(u) - g\left(z_{t_k}\right) x_{t_k,t_{k+1}} - \partial g\left(z_{t_k}\right) g\left(z_{t_k}\right) \mathbb{X}_{t_k,t_{k+1}}\right] \end{aligned}$$

Đầu tiên có ước lượng cho ϵ

$$\begin{aligned} \left\|\varepsilon_{t_k,t_{k+1}}\right\| =& \Big\| \left[f\left(z_{t_k}\right) - f\left(y_{t_k}\right)\right]\left(t_{k+1} - t_k\right) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[f(z(u)) - f\left(z_{t_k}\right)\right] du \\ &+ \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(z(u)) dx(u) - g\left(z_{t_k}\right) x_{t_k,t_{k+1}} - \partial g\left(z_{t_k}\right) g\left(z_{t_k}\right) \mathbb{X}_{t_k,t_{k+1}}\right] \Big\| \\ \le& L_f \|h\|_{\infty,\Pi[t_k,t_{k+1}]} + L_f |\!|\!| z |\!|\!|_{p,[t_k,t_{k+1}]} \left(t_{k+1} - t_k\right) \\ &+ C_p . \left[t_{k+1} - t_k\right]^{4/p} \Big[|\!|\!| R^z |\!|\!|_{p/3,[t_k,t_{k+1}]} |\!|\!| x |\!|\!|_{p,[t_k,t_{k+1}]} \\ &+ \left|\!\left|\!\left| R^{z'} \right|\!\right|\!\right|_{p/2,[t_k,t_{k+1}]} \left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(1)} \right|\!\right|\!\right|_{p/2,[t_k,t_{k+1}]} + |\!|\!| z'' |\!|\!|_{p,[t_k,t_{k+1}]} \left|\!\left|\!\left| \mathbb{X}^{(2)} \right|\!\right|\!\right|_{p/3,[t_k,t_{k+1}]} \Big] \\ :=& L_f \|h\|_{\infty,\Pi[t_k,t_{k+1}]} + H^* \omega^{(0)}\left(t_k, t_{k+1}\right), \end{aligned}$$

với $H^* \to 0$ khi $|\Pi| \to 0$ và $\omega^{(0)}$ là một điều khiển. Sử dụng các lập luận của định lý 3.4.2, với chú ý $f_0 = H = 0$ và $y_{T_1} = 0$ ta có

$$\|h\|_{\infty,\Pi[T_1,T_2]} \leq 12H^*\omega^{(0)}_{T_1,T_2}e^{D(1+T_2-T_1+\|\mathbf{x}\|^p_{p,\Pi[T_1,T_2]})} \to 0 \quad \text{khi} \quad |\Pi| \to 0.$$

Ta kết thúc chứng minh. $\square$

Chương 4
XẤP XỈ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NHÁM TRÊN MẠNG NEURON

4.1 Xấp xỉ toàn cục của phương trình vi phân nhám

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày tính xấp xỉ tốt các hàm liên tục thông qua các phương trình vi phân nhám. Chúng tôi sẽ trình bày lại các kết quả ở [9]. Đầu tiên ta đến với định nghĩa không gian các hàm bị chặn với biến phân bị chặn.

Định nghĩa 4.1.1 ([9])**.** *Cho $\tau, T \in \mathbb{R}$ với $\tau < T$ và $v \in \mathbb{N}$. Đặt $\mathcal{V}^1([\tau, T]; \mathbb{R}^v)$ là không gian các hàm liên tục bị chặn với biến phân bị chặn. Gán một chuẩn cho không gian này*

$$\widehat{X} \to \|\widehat{X}\|_{\mathcal{V}} = \left\|\widehat{X}\right\|_{\infty} + \left|\widehat{X}\right|_{1-\text{var}}.$$

Định nghĩa 4.1.2 ([9])**.** *Với mỗi $\widehat{X} \in \mathcal{V}^1([\tau, T]; \mathbb{R}^v)$ đặt*

$$X_t = (\widehat{X}_t, t) \in \mathcal{V}^1([\tau, T]; \mathbb{R}^{v+1}).$$

Chúng ta quy ước từ đây về sau ký hiệu 'loại bỏ dấu mũ' để gán thêm một toạ độ thời gian theo định nghĩa ở trên.

Chú ý rằng đặc trưng của quỹ đạo là nghiệm của một phương trình vi phân nhám. Vì vậy ta sẽ viết lại nó như định nghĩa dưới đây

Định nghĩa 4.1.3 ([9])**.** *Với $N, v \in \mathbb{N}$, ký hiệu $\kappa(N, v) = \sum_{i=0}^{N} (v+1)^i$.*

Định nghĩa 4.1.4 ([9])**.** *Với mỗi $k \in \mathbb{N}$ và $y \in \mathbb{R}^k$, gọi $M(y) \in \mathbb{R}^{k(v+1)\times(v+1)}$ là ma trận*

$$M(y) = \begin{bmatrix} y^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & y^k & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y^k \end{bmatrix}$$

Cố định $N \in \mathbb{N}$ và $X \in \mathcal{V}^1([\tau, T]; \mathbb{R}^{v+1})$. Đặt $y^{0,X,N} \colon [\tau, T] \to \mathbb{R}$ là hằng số với $y_t^{0,X,N} = 1$.

Với mọi $i \in \{1, \ldots, N\}$, đặt $y^{i,X,N} \colon [\tau, T] \to \mathbb{R}^{(v+1)^i}$ là giá trị của biểu thức

$$y_t^{i,X,N} = y_\tau^{i,X,N} + \int_\tau^t M(y_s^{i-1,X,N}) \mathrm{d}X_s \quad \text{for } t \in (\tau, T],$$

với $y_\tau^{i,X,N} = 0 \in \mathbb{R}^{(v+1)^i}$.

Chúng ta có thể viết lại:

$$y^{X,N} = (y^{0,X,N}, \ldots, y^{N,X,N}) \colon [\tau, T] \to \mathbb{R}^{\kappa(N,v)},$$
$$\widetilde{M}(y^{X,N}) = (0, M \circ y^{0,X,N}, \ldots, M \circ y^{N-1,X,N}) \colon [\tau, T] \to \mathbb{R}^{\kappa(N,v) \times v}.$$

Khi đó, theo định lý 2.1.2, đặc trưng của quỹ đạo tại bậc N có thể viết lại như $y^{X,N}$ is nghiệm duy nhất của phương trình vi phân nhám

$$y_t^{X,N} = y_\tau^{X,N} + \int_\tau^t \widetilde{M}(y^{X,N})_s \mathrm{d}X_s \quad \text{for } t \in (\tau, T],$$

với $y_\tau^{X,N} = (1, 0, \ldots, 0)$.

Nói cách khác, đặc trưng của quỹ đạo tại bậc N có thể hiểu như là một ánh xạ

$$\mathrm{S}^N \colon \mathcal{V}^1([\tau, T]; \mathbb{R}^{v+1}) \to \mathbb{R}^{\kappa(N,v)},$$
$$\mathrm{S}^N \colon X \mapsto y_T^{X,N}.$$

Định nghĩa 4.1.5 ([9]). *Định nghĩa không gian các quỹ đạo có biến phân bị chặn xuất phát tại 0:*

$$\mathcal{V}_0^1([\tau, T]; \mathbb{R}^v) = \left\{ X \in \mathcal{V}^1([\tau, T]; \mathbb{R}^v) \;\middle|\; X_0 = 0 \right\}.$$

Chúng tôi nhắc lại định lý 2.1,[10] về xấp xỉ toàn cục của các đặc trưng.

Định lý 4.1.1 (Xấp xỉ toàn cục của đặc trưng, [9]). *Cho $0 \le \tau < T$ và $I = [\tau, T]$ là khoảng thời gian đóng. Gọi E là không gian Banach $v+1$-chiều (có thể vô hạn chiều) với chuẩn $\|\cdot\|_E$. Thông thường $E := \mathbb{R}^{v+1}$. Đặt $\mathcal{C}(I, E)$ là không gian Banach các quỹ đạo liên tục Lipschitz $x : I \to E$, trang bị chuẩn*

$$\|x\|_{Lip} = \|x_\tau\| + \sup_{s,t \in I} \frac{\|x_t - x_s\|}{|t - s|}.$$

Cho $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}(I, E) \subset \mathcal{V}^1([\tau, T]; \mathbb{R}^{v+1})$ là tập compact các quỹ đạo và hàm liên tục $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Khi đó với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại một cấp cắt cụt $n \ge 0$ thoả mãn với mọi quỹ đạo $x \in \mathcal{X}$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{J \in \{1, \ldots, d\}^k} \alpha_J S(x)^J \right| < \epsilon,$$

trong đó $\alpha_J \in \mathbb{R}$.

Sau khi có xấp xỉ bởi đặc trưng, với chú rằng đặc trưng thực chất là nghiệm của phương trình vi phân nhám (Mệnh đề 2.1.2), ta có định lý sau:

Định lý 4.1.2 (Xấp xỉ toàn cục bởi phương trình vi phân nhám, [9])**.** *Cho trước $\tau, T \in \mathbb{R}$ với $\tau < T$ và đặt $v, u \in \mathbb{N}$. Với mỗi $w \in \mathbb{N}$ đặt*

$$\begin{aligned} F^w &= \left\{ f \colon \mathbb{R}^w \to \mathbb{R}^{w\times(v+1)} \,\middle|\, f \text{ liên tục} \right\}, \\ L^{w,u} &= \left\{ \ell \colon \mathbb{R}^w \to \mathbb{R}^u \,\middle|\, \ell \quad \text{tuyến tính} \right\}, \\ \xi^w &= \left\{ \zeta \colon \mathbb{R}^{v+1} \to \mathbb{R}^w \,\middle|\, \zeta \text{ liên tục} \right\}. \end{aligned}$$

Với mỗi $w \in \mathbb{N}$, $f \in F^w$, $\zeta \in \xi^w$ và $\widehat{X} \in \mathcal{V}^1([\tau, T]; \mathbb{R}^v)$, gọi $z^{f,\zeta,X} \colon [\tau, T] \to \mathbb{R}^w$ là nghiệm duy nhất của phương trình vi phân nhám

$$z_t^{f,\zeta,X} = z_\tau^{f,\zeta,X} + \int_\tau^t f(z_s^{f,\zeta,X}) \mathrm{d}X_s \qquad t \in (\tau, T],$$

với $z_\tau^{f,\zeta,X} = \zeta(X_\tau)$.

Cho tập $K \subseteq \mathcal{V}^1([\tau, T]; \mathbb{R}^v)$ compact.

Khi đó

$$\bigcup_{w\in\mathbb{N}} \left\{ \widehat{X} \mapsto \ell(z_T^{f,\zeta,X}) \,\middle|\, f \in F^w, \ell \in L^{w,u}, \zeta \in \xi^w \right\}$$

là trù mật trong $C(K; \mathbb{R}^u)$.

Chứng minh. [9]. Ta thêm một đoạn thẳng vào mỗi quỹ đạo của K. Cụ thể, với mỗi $\widehat{X} \in K$, định nghĩa $\widehat{X}^* : [\tau - 1, T] \to \mathbb{R}^v$ như sau:

$$\widehat{X}_t^* = \begin{cases} (t - \tau + 1)\widehat{X}_\tau & t \in [\tau - 1, \tau), \\ \widehat{X}_t & t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

Tương tự định nghĩa cho X^*, nghĩa là chỉ thêm đoạn thẳng vào quỹ đạo, không thêm vào thời gian. Bây giờ đặt $K^* = \left\{ \widehat{X}^* \mid \widehat{X} \in K \right\}$. Khi đó $K^* \subseteq \mathcal{V}_0^1\left([\tau - 1, T]; \mathbb{R}^v\right)$ cũng là tập compact. Khi đó sử dụng định lý 4.1.2, tập

$$\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \widehat{X}^* \mapsto \ell\left(\mathrm{S}^N\left(X^*\right)\right) \mid \ell \in J^{N,u} \right\}$$

là trù mật trong $C\left(K^*; \mathbb{R}^u\right)$. Cho $\alpha \in C\left(K; \mathbb{R}^u\right)$ và $\varepsilon > 0$ và ánh xạ $\widehat{X} \mapsto \widehat{X}^*$ là một đồng phôi. Khi đó tồn tại $\beta \in C\left(K^*; \mathbb{R}^u\right)$ sao cho $\beta\left(\widehat{X}^*\right) = \alpha(\widehat{X})$ với mọi $\widehat{X} \in K$. Suy ra, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ và $\ell \in J^{N,u}$ sao cho γ định nghĩa bởi $\gamma : \widehat{X}^* \mapsto \ell\left(\mathrm{S}^N\left(X^*\right)\right)$ là nằm trong hình cầu tâm β bán kính ε. Từ định nghĩa 4.1.3, tồn tại $f \in F^{\kappa(N,v)}$ thoả mãn $\mathrm{S}^N\left(X^*\right) = y_T^{X^*}$ với mọi $X^* \in K^*$, trong đó y^{X^*} là nghiệm duy nhất của phương trình vi phân nhám

$$y_t^{X^*} = y_{\tau-1}^{X^*} + \int_{\tau-1}^t f(y_s^{X^*}) \mathrm{d}X_s^*, \quad t \in (\tau - 1, T],$$

với điều kiện ban đầu $y_{\tau-1}^{X^*} = (1, 0, \ldots, 0)$. Đặt $\zeta \in \xi$ sao cho $\zeta(X_\tau) = y_\tau^{X^*}$. Định nghĩa này là tốt vì $y_t^{X^*}$ chỉ phụ thuộc X_τ với $t \in [\tau-1, \tau]$. Vậy với mỗi $X \in K$, gọi $z^X : [\tau, T] \to \mathbb{R}^w$ là nghiệm duy nhất của phương trình vi phân nhám

$$z_t^X = z_\tau^X + \int_\tau^t f\left(z_s^X\right) \mathrm{d}X_s, \quad t \in (\tau, T],$$

với điều kiện ban đầu $z_\tau^X = \zeta(X_\tau)$. Từ tính tồn tại duy nhất, $z_t^X = y_t^{X^*}$, $\forall t \in [\tau, T]$, và $\mathrm{S}^N(X^*) = y_T^{X^*} = z_T^X$. Cuối cùng là chú ý là $\ell \in J^{N,u} = L^{\kappa(N,v),u}$. Đặt δ định nghĩa bởi $\delta : \widehat{X} \mapsto \ell\left(z_T^X\right)$. Khi đó δ thuộc $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left\{\widehat{X} \mapsto \ell\left(\mathrm{S}^N(X)\right) \mid \ell \in J^{N,u}\right\}$ và với mọi $\widehat{X} \in K$,

$$\delta(\widehat{X}) = \ell\left(z_T^X\right) = \ell\left(\mathrm{S}^N(X^*)\right) = \gamma(\widehat{X}^*)$$

thuộc hình cầu tâm $\beta(\widehat{X}^*) = \alpha(\widehat{X})$ bán kính ϵ. Ta kết thúc chứng minh tại đây. $\square$

Trong mục này, chúng ta luôn xấp xỉ quỹ đạo X bằng các đường cong nội suy bậc ba. Vì vậy không gian các quỹ đạo sẽ nhỏ hơn. Ta sẽ tìm hiểu xem phương trình vi phân nhám điều khiển bởi các quỹ đạo nội suy sẽ xấp xỉ ánh xạ liên tục tốt như thế nào. Trước hết cần định nghĩa lại cấu trúc không gian các quỹ đạo.

Định nghĩa 4.1.6 (Topo tổng quát cho chuỗi thời gian). *Đặt $v \in \mathbb{N}$ và $\tau, T \in \mathbb{R}$ thoả mãn $\tau < T$. Gọi F là một không gian topo của các hàm. Đặt $\iota\colon \mathcal{TS}_{[\tau,T]}(\mathbb{R}^v) \to F$ là một ánh xạ. Khi đó ta định nghĩa một topo trên $\mathcal{TS}_{[\tau,T]}(\mathbb{R}^v)$ là topo yếu nhất để ι liên tục.*

Định nghĩa 4.1.7 (Topo đường cong nội suy bậc ba tự nhiên). *Đặt $v \in \mathbb{N}$. and $\tau, T \in \mathbb{R}$ thoả mãn $\tau < T$. Đặt $F = C([\tau, T]; \mathbb{R}^v)$ với chuẩn đều. Với mọi $\mathbf{x} = ((t_0, x_0), \ldots, (t_n, x_n)) \in \mathcal{TS}_{[\tau,T]}(\mathbb{R}^v)$, đặt $\widehat{\iota}\colon \mathcal{TS}_{[\tau,T]}(\mathbb{R}^v) \to F$ là đường cong nội suy bậc ba tự nhiên, $\widehat{\iota}(\mathbf{x})_{t_i} = x_i$ với mốc tại $t_0, \ldots, t_n$. Khi đó ta có một topo trên $\mathcal{TS}_{[\tau,T]}(\mathbb{R}^v)$ với định nghĩa như trên.*

Với không gian topo đã định nghĩa, chúng tôi phát biểu không chứng minh định lý xấp xỉ toàn cục sau (Định lý B14, [9]).

Định lý 4.1.3 (Xấp xỉ toàn cục với phương trình vi phân nhám trên mạng neuron điều khiển bởi đường cong nội suy bậc ba tự nhiên). *Cho $\tau, T \in \mathbb{R}$ với $\tau < T$ và $v, u \in \mathbb{N}$. Với mỗi $w \in \mathbb{N}$ đặt*

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{NN}}^w &= \left\{ f\colon \mathbb{R}^w \to \mathbb{R}^{w\times(v+1)} \;\middle|\; f \text{ là mạng neuron truyền thẳng} \right\}, \\
L^{w,u} &= \left\{ \ell\colon \mathbb{R}^w \to \mathbb{R}^u \;\middle|\; \ell \text{ tuyến tính} \right\}, \\
\xi_{\mathcal{NN}}^w &= \left\{ \zeta\colon \mathbb{R}^{v+1} \to \mathbb{R}^w \;\middle|\; \zeta \text{ là mạng neuron truyền thẳng} \right\}.
\end{aligned}$$

Gọi $\widehat{\iota}$ là đường cong nội suy bậc ba và nhắc lại ký hiệu 'loại bỏ dấu mũ'. Với mỗi $w \in \mathbb{N}$, $f \in F^w$, $\zeta \in \xi^w_{\mathcal{NN}}$ và $\mathbf{x} \in \mathcal{TS}_{[\tau,T]}(\mathbb{R}^v)$, gọi $z^{f,\zeta,\mathbf{x}} \colon [\tau, T] \to \mathbb{R}^w$ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$z_t^{f,\zeta,\mathbf{x}} = z_\tau^{f,\zeta,\mathbf{x}} + \int_\tau^t f(z_s^{f,\zeta,\mathbf{x}})\mathrm{d}\iota(\mathbf{x})_s \quad \textit{for } t \in (\tau, T],$$

với điều kiện ban đầu $z_\tau^{f,\zeta,\mathbf{x}} = \zeta(\iota(\mathbf{x})_\tau)$.

Cho $K \subseteq \mathcal{TS}_{[\tau,T]}(\mathbb{R}^v)$ thoả mãn tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\|x\|_\infty (\min_i (t_{i+1} - t_i))^{-3} < C. \tag{4.1}$$

với mọi $\mathbf{x} = ((t_0, x_0), \ldots, (t_n, x_n)) \in K$. (C độc lập với $\mathbf{x}$.)

Khi đó

$$\bigcup_{w\in\mathbb{N}} \left\{ \mathbf{x} \mapsto \ell(z_T^{f,\zeta,\mathbf{x}}) \;\middle|\; f \in F^w_{\mathcal{NN}}, \ell \in L^{w,u}, \zeta \in \xi^w_{\mathcal{NN}} \right\}$$

là trù mật trong $C(K; \mathbb{R}^u)$ với topo đường cong nội suy bậc ba tự nhiên trên $\mathcal{TS}_{[\tau,T]}(\mathbb{R}^v)$.

4.2 So sánh với mô hình ODE thay thế

Định lý sau ở [9] cho thấy việc thay mô hình CDE thành ODE bằng cách thay hàm $g_{\theta,X}(z, s)$ thành $h_\theta(z, X_s)$ tuy có vẻ tự nhiên nhưng thực ra lại đem đến mất mát về việc xấp xỉ toàn cục. Chúng tôi phát biểu không chứng minh định lý sau:

Định lý 4.2.1 ([9]). *Cho $\tau, T \in \mathbb{R}$ với $\tau < T$, đặt $v, w \in \mathbb{N}$ thoả mãn $v+1 < w$. Định nghĩa*

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ f \colon \mathbb{R}^w \to \mathbb{R}^{w\times(v+1)} \;\middle|\; f \textit{ liên tục} \right\}, \\
H &= \left\{ h \colon \mathbb{R}^{w-v-1} \times \mathbb{R}^{v+1} \to \mathbb{R}^{w-v-1} \;\middle|\; h \textit{ liên tục} \right\}, \\
\xi &= \left\{ \zeta \colon \mathbb{R}^{v+1} \to \mathbb{R}^w \;\middle|\; \zeta \textit{ liên tục} \right\}, \\
\mathbb{X} &= \left\{ \widehat{X} \colon [\tau, T] \to \mathbb{R}^v \;\middle|\; \widehat{X} \textit{ liên tục và có biến phân bị chặn} \right\}.
\end{aligned}$$

Với mỗi $\widehat{X} \in \mathbb{X}$, đặt $X_t = (\widehat{X}_t, t)$. Gọi ánh xạ $\pi \colon \mathbb{R}^w \to \mathbb{R}^{w-v-1}$ là phép chiếu lên $w - v - 1$ toạ độ đầu.

Với mọi $f \in F$, $\zeta \in \xi$, và $\widehat{X} \in \mathbb{X}$, gọi $z^{f,\zeta,X} \colon [\tau, T] \to \mathbb{R}^w$ là nghiệm duy nhất của phương trình vi phân nhám

$$z_t^{f,\zeta,X} = z_\tau^{f,\zeta,X} + \int_\tau^t f(z_s^{f,\zeta,X})\mathrm{d}X_s \quad \textit{for } t \in (\tau, T],$$

thoả mãn điều kiện ban đầu $z_\tau^{f,\zeta,X} = \zeta(X_\tau)$.

Tương tự, với mỗi $h \in H$, $\zeta \in \xi$, và $\widehat{X} \in \mathbb{X}$, gọi $y^{f,X}\colon [\tau, T] \to \mathbb{R}^{w-v-1}$ là nghiệm duy nhất của phương trình bi phân

$$y_t^{h,\zeta,X} = y_\tau^{h,\zeta,X} + \int_\tau^t h(y_s^{h,\zeta,X}, X_s)\mathrm{d}s \quad \textit{for } t \in (\tau, T],$$

với điều kiện ban đầu $y_\tau^{h,\zeta,X} = \pi(\zeta(X_\tau))$.

Đặt $\mathcal{Y} = \left\{ \widehat{X} \mapsto y^{h,\zeta,X} \;\middle|\; h \in H, \zeta \in \xi \right\}$ *và* $\mathcal{Z} = \left\{ \widehat{X} \mapsto \pi \circ z^{f,\zeta,X} \;\middle|\; f \in F, \zeta \in \xi \right\}$.

Khi đó $\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{Z}$.

KẾT LUẬN

Luận văn *"Phương trình vi phân nhám trên mạng neuron"* đã nghiên cứu cách xấp xỉ các hàm số liên tục thông qua phương trình vi phân nhám trên mạng neuron. Cụ thể, luận văn đã trình bày những khái niệm cơ bản về lý thuyết đường nhám, sự tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình vi phân nhám đã được nghiên cứu trong hơn 30 năm gần đây. Luận văn cũng đưa ra ứng dụng xấp xỉ các hàm liên tục của phương trình vi phân nhám trên mạng neuron thông qua đặc trưng. Trong đó cách chọn của X là nội suy chuỗi dữ liệu quan sát được thành hàm đủ trơn và đưa về phương trình vi phân thường trên mạng neuron. Khi chuỗi dữ liệu quan sát được có độ nhám cao, việc xấp xỉ bằng hàm trơn có thể không tốt. Vì vậy chúng ta cần làm trực tiếp trên phương trình vi phân nhám.

Luận văn đã chỉ ra một số kết quả mới cho sự hội tụ của lược đồ xấp xỉ phương trình vi phân nhám. Cụ thể, đối với trường hợp hệ số chính quy của quỹ đạo nằm trong khoảng $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ và g là hàm bậc nhất, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình vi phân nhám và sự hội tụ của lược đồ Euler. Ngoài ra, đối với trường hợp g và đạo hàm tới cấp ba của nó bị chặn, chúng tôi cũng có một số kết quả về tính ổn định của hệ rời rạc.

Với những nội dung đề tài thực hiện được, chúng tôi hy vọng đóng góp một phần nhỏ trong sự hoàn thiện của lý thuyết đường nhám cũng như sự phát triển của các phương pháp học máy.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Steven L. Brunton, J. Nathan Kutz, 2019, *Data-Driven Science and Engineering*, Cambridge University Press, ISBN 9781108380690.

[2] Chen, Rubanova, Bettencourt, Duvenaud, 2018, Neural Ordinary Differential Equations, *arXiv preprint*, arXiv:1806.07366.

[3] Kidger, Chen, Lyons, "Hey, that's not an ODE": Faster ODE Adjoints with 12 Lines of Code, *arXiv preprint*, arXiv:2009.09457.

[4] P. Friz, N. Victoir, 2010, *Multidimensional stochastic processes as rough paths: theory and applications*, Cambridge Unversity Press, Cambridge.

[5] Friz, Peter K., and Martin Hairer, 2020, *A course on rough paths*, Springer International Publishing.

[6] L.H.Duc, Jurgen Jost, 2023, How signatures affect expected return and volatility: a rough model under transaction cost, *SIAM Journal on Financial Mathematics*,14(3), pp. 879-909.

[7] L. H. Duc, P. T. Hong, 2023, Asymptotic dynamics of Young differential equations. *J. Dyn. Diff. Equat*, 35, pp. 1667–1692.

[8] N.D.Cong, L.H.Duc, P.T.Hong, 2023, Numerical Attractors via Discrete Rough Paths, *J. Dyn. Diff. Equat,* https://doi.org/10.1007/s10884-023-10280-4.

[9] Kidger, Morrill, Foster, Lyons, 2020, Neural Controlled Differential Equations for Irregular Time Series, *arXiv preprint*, arXiv:2005.08926.

[10] Maud Lemercier, Cristopher Salvi, Theodoros Damoulas, Edwin V. Bonilla, Terry Lyons, 2020, Distribution Regression for Sequential Data, *arXiv preprint*, arXiv:2006.05805.