BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Phạm Thu Thuý

BẬC KHOẢNG CÁCH EUCLID CỦA TẬP ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN ỨNG DỤNG

HÀ NỘI - 2023

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Phạm Thu Thuý

BẬC KHOẢNG CÁCH EUCLID CỦA TẬP ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 8 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS.TS. Nguyễn Tất Thắng

HÀ NỘI - 2023

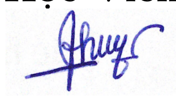
LỜI CAM ĐOAN

Luận văn tốt nghiệp này được viết trên cơ sở công trình nghiên cứu của tôi được thực hiện tại Viện Toán học, Học Viện Khoa Học và Công Nghệ, dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Nguyễn Tất Thắng. Kết quả của luận án không trùng với các nghiên cứu khác.

Ngoài ra, luận văn còn sử dụng một số bài nhận xét, đánh giá của các tác giả khác có trích dẫn.

Hà Nội, tháng 6, 2023

Học Viên



Phạm Thu Thuý

LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành luận văn và kết thúc khóa học, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô trong Viện Toán học, đơn vị chuyên môn thực hiện luận văn, ban Lãnh đạo, phòng Đào tạo, các phòng chức năng của Học viện Khoa học và Công nghệ - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã tạo cho em điều kiện thuận lợi để em được học tập dưới một môi trường học thuật nghiêm túc và hoàn thiện luận văn này.

Trong năm vừa qua, em thật hạnh phúc khi nhận được học bổng từ Quỹ VinIF của tập đoàn Vingroup. Em xin gửi lời cảm ơn đến Quỹ tài trợ và sẽ luôn cố gắng hết sức mình, học tập thật tốt để không phụ lòng nhà tài trợ đã trao tặng cho em.

Đặc biệt, em xin bày tỏ sự kính trọng và biết ơn đến PGS.TS. Nguyễn Tất Thắng, người đã tận hình hướng dẫn em nghiên cứu khoa học và giúp em hào hứng với đề tài luận văn thạc sĩ của mình. Cảm ơn thầy đã truyền đạt những kinh nghiệm nghiên cứu và kiến thức sâu sắc của mình để hướng dẫn em đến một nghiên cứu thú vị và đầy ý nghĩa.

Cuối cùng con xin gửi lời cảm ơn đến gia đình và bạn bè đã luôn là chỗ dựa tinh thần vững trãi giúp con vượt qua mọi khó khăn trong cuộc sống.

Hà Nội, tháng 6, 2023

Học Viên

Phạm Thu Thuý

Mục lục

MỞ ĐẦU

Trong bối cảnh công nghiệp hoá hiện đại hoá ngày càng phát triển, nhiều mô hình trong ngành khoa học dữ liệu hoặc kỹ thuật cơ khí được biểu diễn dưới dạng một tập đại số thực dẫn đến nhu cầu giải quyết bài toán tối ưu của hàm khoảng cách (nearest point problem). Bậc khoảng cách Euclid (EDD) là một đại lượng đo độ phức tạp của bài toán này.

Bài toán điểm gần nhất: Trong $\mathbb{R}^n$ cho tập đại số X và một điểm c, hãy tìm điểm c^* của X sao cho hàm f_c (hàm khoảng cách từ c đến X) đạt giá trị nhỏ nhất tại c^*.

Một cách tiếp cận vấn đề trên là tìm và kiểm tra tất cả các điểm tới hạn của f_c. Khi đó EDD cho ta một đại lượng đánh giá độ phức tạp của bài toán tối ưu trên. Tập đại số và ánh xạ đa thức là đối tượng nghiên cứu cơ bản của hình học đại số nói riêng và của Toán học nói chung. Đối với các tập đại số, chủ đề bậc khoảng cách Euclid được nghiên cứu rộng rãi và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực như thị giác máy tính, mô hình hình học và thống kê ([1, 2, 3, 4, 5, 6]).

Trong lĩnh vực thị giác máy tính, bài toán "tam giác đạc" có một vai trò quan trọng. Cụ thể, đó là bài toán xác định một điểm trong không gian khi biết ảnh của nó qua hai camera với vị trí của hai camera và một góc chụp cho trước. Trong Toán học, đây là bài toán tìm đỉnh thứ ba của một tam giác cho trước hai đỉnh và góc tại hai đỉnh đó. Khi thông tin thu được với độ chính xác tuyệt đối thì đây là một vấn đề tầm thường, nhưng trên thực tế, các pixel thu được từ máy ảnh bị nhiễu (xem [2, 3, 4, 5, 7]). Do đó, vấn đề là tìm điểm trong không gian tương thích tối đa với thông tin thu được từ camera. Đây là bài toán tối ưu hàm khoảng cách đã đề cập ở trên (bài toán điểm gần nhất) và bậc khoảng cách Euclid chính là độ phức tạp của bài toán này (đọc thêm[4]).

Với mong muốn có hiểu biết về EDD và đóng góp một phần nhỏ bé trong việc giải quyết các mô hình bài toán điểm gần nhất, chúng tôi lựa chọn đề tài: "Bậc khoảng cách Euclid của tập đại số".

Trong luận văn này, chúng tôi nghiên cứu trường hợp tập đại số được xác định bởi hai đa thức và đưa ra đánh giá cho bậc khoảng cách Euclid. Ban đầu chúng tôi tìm hiểu về EDD của một siêu phẳng $f = 0$ được nhắc đến trong bài báo [8], căn cứ vào đó chúng tôi xây dựng phương trình Lagrange trong trường hợp của mình và chỉ ra rằng EDD bằng số nghiệm của phương trình Lagrange. Nhiệm vụ cuối cùng là đếm số nghiệm của phương trình Lagrange, ở đây chúng tôi căn cứ vào các định lý của Bernstein để chứng minh rằng EDD của đa tạp này xấp xỉ bằng thể tích trộn (MV) của các đa diện Newton.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cơ bản về ánh xạ khả vi, điểm tới hạn của ánh xạ khả vi; lược đồ Newton và thể tích trộn. Ngoài ra chúng tôi nhắc lại định nghĩa của tập đại số và tính chất giao hoành của hai tập đại số.

Chương 2: Bậc khoảng cách Euclid

Chương này được dành để trình bày định nghĩa cơ bản của bậc khoảng cách Euclid. Chỉ ra rằng số điểm tới hạn bằng bậc khoảng cách Euclid. Một số định lý của Bernstein. Tiếp theo xây dựng hệ Lagrange và mối quan hệ giữa số nghiệm của hệ Lagrange và bậc khoảng cách Euclid của siêu mặt đại số. Cuối cùng, xây dựng mối quan hệ giữa bậc khoảng cách Euclid của đường cong đại số trong $\mathbb{R}^3$ và thể tích trộn của đa diện Newton.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Ánh xạ khả vi và điểm tới hạn của ánh xạ khả vi

Phép vi phôi được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.1. Giả sử X, Y là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, và $q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Gọi $f : X \to Y$ là phép vi phôi lớp C^q từ X đến Y nếu nó là song ánh,

$$f \in C^q(X, Y), \quad \text{và} \quad f^{-1} \in C^q(Y, R^n).$$

Ta có thể gọi phép vi phôi lớp C^0 là phép đồng cấu hoặc bản đồ tôpô. Đặt

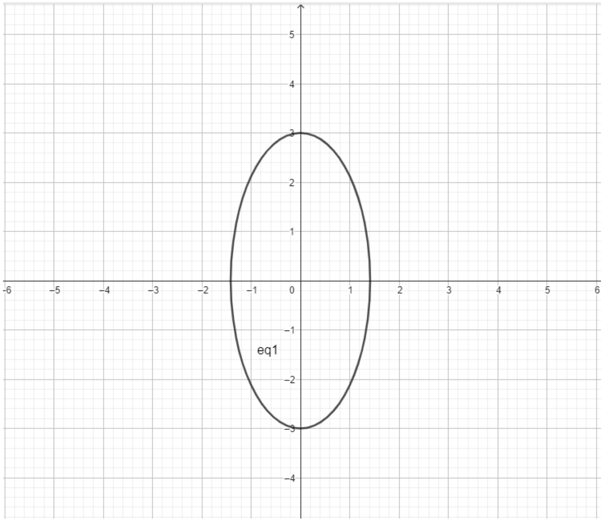
$$\mathrm{Diff}^q(X, Y) := \left\{ f : X \to Y; f \text{ là một phép vi phôi lớp } C^q \right\}.$$

Đa tạp con của $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau:

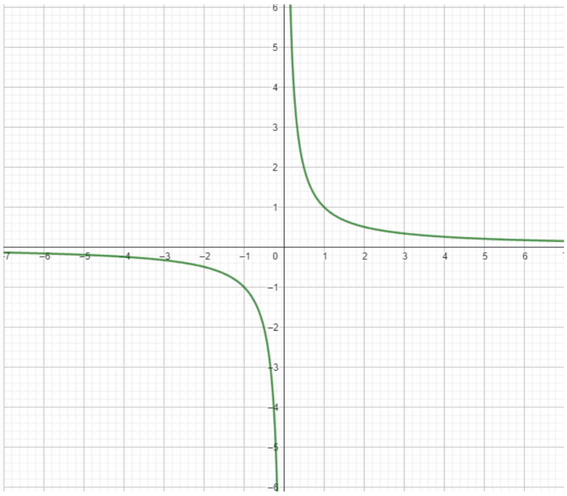
Định nghĩa 1.2. Một tập con M trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là một đa tạp con lớp C^q m - chiều của $\mathbb{R}^n$ nếu, với mọi $x_0 \in M$, có một lân cận mở U của x_0 trong $\mathbb{R}^n$, một tập mở V trong $\mathbb{R}^n$ và một $\varphi \in \mathrm{Diff}^q(U, V)$ sao cho $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Các đa tạp con một và hai chiều của $\mathbb{R}^n$ lần lượt được gọi là các đường cong (được nhúng) trong $\mathbb{R}^n$ và là các mặt (được nhúng) trong $\mathbb{R}^n$. Đa tạp con của $\mathbb{R}^n$ có chiều $n-1$ được gọi là siêu mặt (được nhúng) trong $\mathbb{R}^n$.

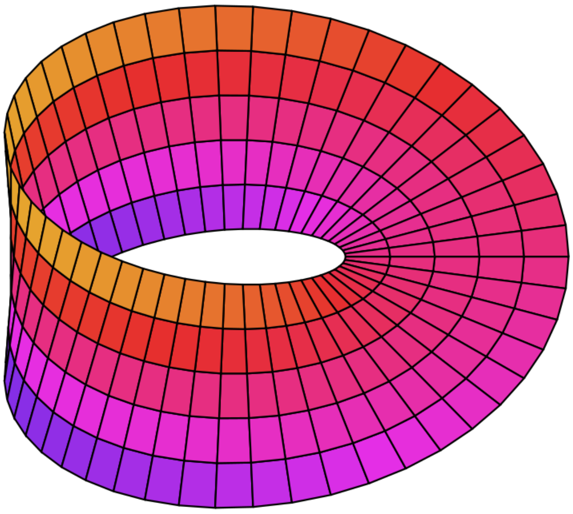
Ví dụ 1.1. Dưới đây là một số ví dụ về đa tạp con của $\mathbb{R}^n$:



Hình 1.1: Đa tạp một chiều $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.



Hình 1.2: Đa tạp một chiều $y = \dfrac{1}{x}$.



Hình 1.3: Đa tạp hai chiều dải Mobius.

Giả sử M là tập con của $\mathbb{R}^n$ và $p \in M$. Gọi

$$i_M : M \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x$$

là phép nhúng của M vào $\mathbb{R}^n$. Gọi φ là bản đồ (địa phương) m-chiều lớp C^q của M quanh p nếu

- $U := \mathrm{dom}(\varphi)$ là lân cận mở của p trong M;

- φ là phép đồng phôi của U lên tập mở $V := \varphi(U)$ của $\mathbb{R}^m$;

- $g := i_M \circ \varphi^{-1}$ là một phép dìm lớp C^q .

Tập V là miền tham số và g là tham số hoá của U trong φ. Ta có thể viết (φ, U) cho φ và (g, V) cho g. Một atlas m-chiều C^q là một họ $\{\varphi_\alpha; \alpha \in \mathrm{A}\}$ của biểu đồ m-chiều lớp C^q của M, nghĩa là $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Khi đó, $\left(x^1, \ldots, x^m\right) := \varphi(p)$ là tọa độ địa phương của $p \in U$ trong biểu đồ φ.

Dưới đây là định nghĩa về không gian tiếp tuyến:

Định nghĩa 1.3. Giả sử M là đa tạp con C^q m-chiều của $\mathbb{R}^n$; $q \in \mathbb{N}^\times \cup \{\infty\}$, $p \in M$ và (φ, U) là bản đồ (chart) của M quanh p; (g, V) là tham số hóa thuộc (φ, U). Khi đó, không gian tiếp xúc T_pM của M tại điểm p là ảnh của $T_{\varphi(p)}V$ dưới $T_{\varphi(p)}g$, và do đó $T_pM = \operatorname{im}\left(T_{\varphi(p)}g\right)$. Các phần tử của T_pM được gọi là vectơ tiếp xúc của M tại p .

Mệnh đề 1.1 (xem Th10.6 [9]). Với mọi $p \in M$, ta có:

$$T_pM = \{(v)_p \in T_p\mathbb{R}^n;$$
$$\exists \varepsilon > 0, \exists \gamma \in C^1\left((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^n\right) \text{ sao cho } \operatorname{im}(\gamma) \subset M, \gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v\}.$$

Nói cách khác, với mọi $(v)_p \in T_pM \subset T_p\mathbb{R}^n$, có một đường C^1 trong $\mathbb{R}^n$ đi qua p chứa trong M và có $(v)_p$ là vectơ tiếp xúc của nó tại p. Mọi vectơ tiếp xúc của một đường như vậy đều thuộc T_pM.

Trong luận văn này các đa tạp khả vi được xem là các đa tạp con của $\mathbb{R}^N$.

Định nghĩa 1.4. Cho M, N là hai đa tạp khả vi có số chiều lần lượt là m, n. Ánh xạ $f : M \to N$ gọi là ánh xạ khả vi lớp C^k nếu f liên tục và với mọi bản đồ khả vi (U_α, α) trên M và (V_β, β) trên N mà $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \neq \varnothing$ thì ánh xạ:

$$\beta \circ f \circ \alpha^{-1} : \alpha\left(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)\right) \to \beta\left(V_\beta \cap f(U_\alpha)\right)$$
$$\alpha(p) \mapsto \beta(f(p))$$

là ánh xạ khả vi lớp C^k. Các ánh xạ $\beta \circ f \circ \alpha^{-1}$ gọi là các biểu thức tọa độ địa phương của f.

Định nghĩa 1.5. Ánh xạ $f : M \to N$ được gọi là vi phôi lớp C^k nếu f là song ánh và f, f^{-1} là các ánh xạ khả vi lớp C^k.

Ánh xạ khả vi là một khái niệm quan trọng trong phân tích toán học và ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực như đại số tuyến tính, tính toán vi phân, định lý hàm ẩn, vật lý và kỹ thuật. Trong phần tiếp theo chúng tôi sẽ xét đến điểm tới hạn của ánh xạ khả vi.

Định nghĩa 1.6. Vi phân của ánh xạ f tại điểm p là ánh xạ

$$
\begin{aligned}
df(p) : \mathrm{T}_p M &\to \mathrm{T}_{f(\mathrm{p})}\mathrm{N} \\
v &\mapsto df(p)(v)
\end{aligned}
$$

được xác định như sau: nếu v là véc-tơ tiếp xúc với đường cong $x(t)$ tại $x\left(t_0\right) = p$ thì $df(p)(v)$ là véc-tơ tiếp xúc với đường cong $f(x(t))$ tại $f(p) = f\left(x\left(t_0\right)\right)$.

Ví dụ 1.2. Cho M là đa tạp $M = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : f_1(x) = f_2(x) = 0\right\}$
Xét đường cong

$$\varphi(t) \subset M, \varphi(0) = x_0.$$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_1(\varphi(\ell)) = 0 \\ f_2(x) = f_2(\varphi(\ell)) = 0 \end{cases}.$$

Suy ra

$$df_i(x) = df_i(\varphi(t)).$$

Với

$$d_{f_1}(x) = d_{f_1}(\varphi(t)) = \frac{\partial f_1}{x_1}\varphi(t) \cdot \varphi_1'(t) + \frac{\partial f_1}{x_2}\varphi(t) \cdot \varphi_2'(t) + \frac{\partial f_1}{x_3}\varphi(t) \cdot \varphi_3'(t).$$

Nếu

$$\begin{cases} d_{f_1}(x) = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

thì

$$\frac{\partial f_1}{x_1}\left(x_0\right) \cdot v_1 + \frac{\partial f_1}{x_2}\left(x_0\right) \cdot v_2 + \frac{\partial f_1}{x_3}\left(x_0\right) \cdot v_3 = 0.$$

Suy ra

$$\langle \nabla f_1(x_0), v\rangle = 0.$$

Ở đây $\langle\ ,\ \rangle$ kí hiệu tích vô hướng trong $\mathbb{R}^3$.

Tương tự

$$d_{f_2}(x) = d_{f_2}(\varphi(t)) = 0$$

ta được

$$\langle \nabla f_2(x_0), v\rangle = 0.$$

Vậy $T_{x_0}M = \left\{v \in \mathbb{R}^3, \langle \nabla f_1(x_0), v\rangle = 0, \langle \nabla f_2(x_0), v\rangle = 0\right\}.$

Điểm tới hạn của một ánh xạ khả vi được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.7. Cho một ánh xạ khả vi $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, các điểm tới hạn của f là các điểm của $\mathbb{R}^m$ trong đó hạng của ma trận Jacobian của f không phải là cực đại. Ảnh của một điểm tới hạn dưới f được gọi là giá trị tới hạn. Một điểm trong phần bù của tập hợp các giá trị tới hạn được gọi là một giá trị chính quy. Theo Định lý Sard, tập hợp các giá trị tới hạn của một ánh xạ khả vi có độ đo bằng không.

Định lý 1.1 (Định lý Sard)**.** *Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là $\mathbb{C}^k$ với k lần khả vi liên tục, $k \geq \max\{n-m+1, 1\}$. Cho $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^m$ là tập điềm tới hạn của f sao cho $x \in \mathbb{R}^n$ tại đó ma trận Jacobi của f có* rank $< n$. *Khi đó ảnh $f(x)$ có độ đo Lebesque bằng 0 trong $\mathbb{R}^m$.*

Các định nghĩa này mở rộng cho các ánh xạ khả vi giữa các đa tạp khả vi như sau. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ khả vi giữa hai đa tạp V và W có số chiều tương ứng m và n. Trong lân cận của một điểm p của V và của $f(p)$, các bản đồ (chart) là các phép vi phôi (diffeomorphisms) $\varphi : V \to \mathbb{R}^m$ và $\tau : W \to \mathbb{R}^n$. Điểm p là tới hạn của f nếu $\varphi(p)$ là tới hạn của $\tau \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Định nghĩa này không phụ thuộc vào việc lựa chọn các bản đồ vì các ánh xạ chuyển là các phép vi phôi, các ma trận Jacobian của chúng là khả nghịch và việc nhân chúng không làm thay đổi hạng của ma trận Jacobian của $\tau \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Các khái niệm về đa tạp khả vi phức, ánh xạ khả vi, điểm tới hạn của các ánh xạ giữa các đa tạp phức được định nghĩa hoàn toàn tương tự.

Ví dụ 1.3. Cho $M = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : f_1(x) = f_2(x) = 0\right\}$ là đa tạp khả vi. Xét ánh xạ sau:

$$\mu : M \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \|x - u\|^2$$

$$d\mu : T_x M \to \mathrm{T}_{\mu(x)}\mathbb{R},$$

trong đó $u \in M$ là một điểm cho trước.

Theo Ví dụ 1.2 ta có: $T_{x_0}M = \{v : \langle \nabla f_i(x), v\rangle = 0, \}$.
Vì $d_{x_0}\mu = 0$ nên $\langle \nabla \mu(x_0), v\rangle = 0$.
Gọi $x(x_1, x_2, x_3)$ là điểm tới hạn nếu $\langle \nabla \mu(x), v\rangle = 0$.
Suy ra

$$\begin{cases} \frac{\nabla f_1(x)}{x_1} + \frac{\nabla f_1(x)}{x_2} + \frac{\nabla f_1(x)}{x_3} = 0, \\ \frac{\nabla f_2(x)}{x_1} + \frac{\nabla f_2(x)}{x_2} + \frac{\nabla f_2(x)}{x_3} = 0, \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} \frac{\nabla f_1(x)}{x_1} + \frac{\nabla f_1(x)}{x_2} + \frac{\nabla f_1(x)}{x_2} = 0, \\ \frac{\nabla f_2(x)}{x_1} + \frac{\nabla f_2(x)}{x_2} + \frac{\nabla f_2(x)}{x_3} = 0, \\ \nabla \mu\,(x) = 0. \end{cases}$$

Do hai hệ phương trình trên có chung tập nghiệm do đó chúng có số chiều bằng nhau. Vậy ta có thể biểu diễn $\nabla\mu\left(x\right)$ như sau:

$$\nabla\mu\left(x\right) = \lambda_1\nabla f_1\left(x\right) + \lambda_2\nabla f_2\left(x\right), \quad \forall\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa,

$$\text{các điểm tới hạn} = \left\{x \in \mathbb{C}^3 : f_1(x) = f_2(x) = 0\right\}.$$

Do đó tồn tại các hệ số $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sao cho

$$u - x = \lambda_1\nabla f_1\left(x\right) + \lambda_2\nabla f_2\left(x\right).$$

Vậy các điểm tới hạn là nghiệm của hệ Lagrange sau:

$$\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) := \{f_1(x) = f_2(x) = 0 \text{ và } u - x = \lambda_1\nabla f_1(x) + \lambda_2\nabla f_2(x)\}.$$

1.2. Lược đồ Newton và thể tích trộn

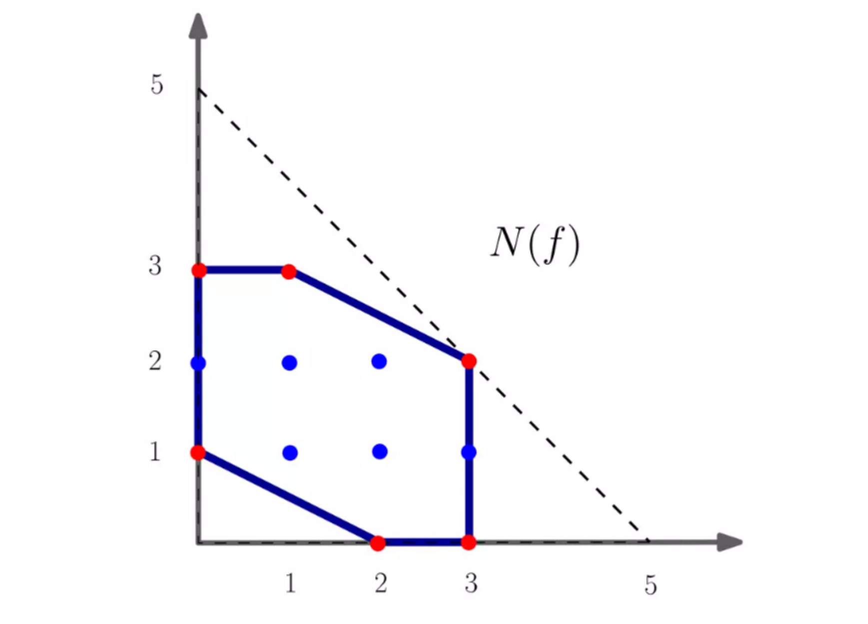
Lược đồ Newton được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.8. Ta xét $f \in \mathbb{C}\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]$ là các đa thức với giá $A \subset \mathbb{N}^{\mathrm{n}}$, sao cho

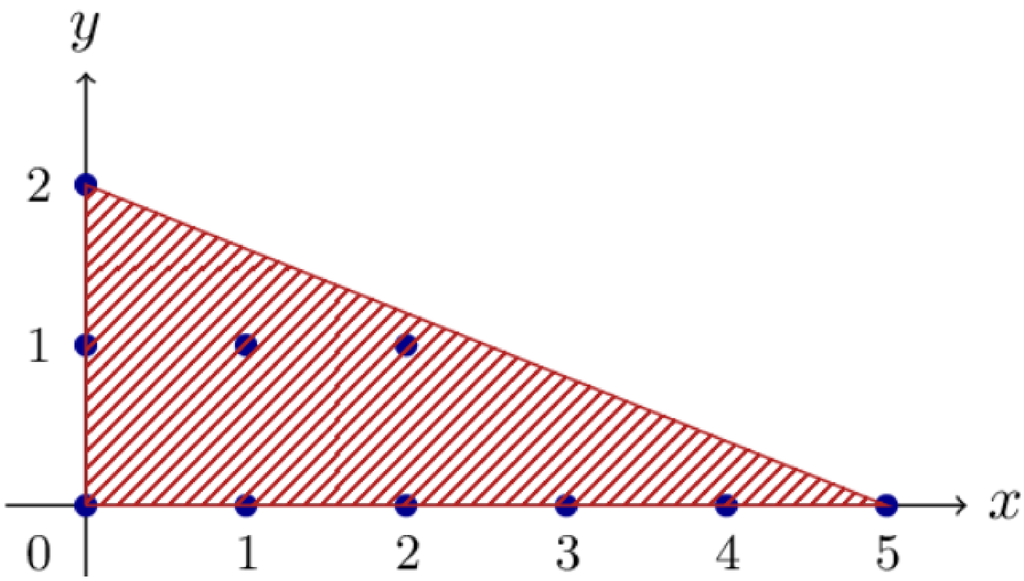
$$f(x) = \sum_{a\in A} c_a x^a, \quad \left(c_a \in \mathbb{C}\right).$$

Khi đó, lược đồ Newton của f được định nghĩa là bao lồi của tập $\{a \in \mathbb{N}^n : c_a \neq 0\}$ trong $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 1.4. Dưới đây là một số ví dụ về lược đồ Newton:



Hình 1.4: Lược đồ Newton $N(f)$ của hàm $f(x_1, x_2) = 8x_2 + x_1x_2 - 24x_2^2 - 16x_1^2 + 220x_1^2x_2 - 34x_1x_2^2 - 84x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 - 8x_1x_2^3 + 8x_1^3x_2^2 + 8x_1^3 + 18x_2^3$.



Hình 1.5: Lược đồ Newton của hàm $f = 1 - xy^3 + y^3x + 2y^2 - 4x^5$.

Trong hình học đa tạp, thể tích trộn (Mixed Volume) là một khái niệm quan trọng liên quan đến thể tích của các đa tạp lồi trong không gian Euclid.

Định nghĩa 1.9. Tổng Minkowski của hai tập hợp véc-tơ A và B trong không gian Euclid được hình thành bằng cách cộng mỗi véc-tơ trong A với mỗi véc-tơ trong B:

$$A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} \,|\, \mathbf{a} \in A,\ \mathbf{b} \in B\}.$$

Định nghĩa 1.10. Cho $K_1, K_2, \ldots, K_r$ là các tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ và xét hàm số $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \mathrm{Vol}_n(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_r K_r), \lambda_i \geq 0$ với Vol_n là viết tắt của thể tích n- chiều với đối số của nó là tổng Minkowski của các hình lồi K_i. Khi đó f là một đa thức thuần nhất bậc n, vì vậy có thể được viết là

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \sum_{j_1, \cdots, j_n = 1}^{r} V(K_{j_1}, \ldots, K_{j_n}) \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_n},$$

trong đó các hàm V là đối xứng. Đối với một hàm có chỉ số cụ thể là $j \in \{1, \ldots, r\}^n$, thì hệ số $V(K_{j_1}, \ldots, K_{j_n})$ được gọi là thể tích trộn của $K_{j_1}, \ldots, K_{j_n}$.

Cho m là một số nguyên dương. Vì thể tích trộn $\mathrm{MV}(K_1, \ldots, K_m)$ là một hàm không âm của các đa diện $K_1, \ldots, K_m$ trong $\mathbb{R}^m$ được đặc trưng bởi ba tính chất sau:

(1) Nếu $K_1 = \cdots = K_m = K$, và $\mathrm{Vol}(K)$ là thể tích Euclid của K, thì

$$\mathrm{MV}(K_1, \ldots, K_m) = m! \,\mathrm{Vol}(K).$$

(2) Nếu σ là hoán vị của $\{1, \ldots, m\}$, thì

$$\mathrm{MV}(K_1, \ldots, K_m) = \mathrm{MV}\left(K_{\sigma(1)}, \ldots, K_{\sigma(m)}\right).$$

(3) Nếu K_1' là một đa diện khác trong $\mathbb{R}^m$, thì

$$\begin{aligned} &\mathrm{MV}(K_1 + K_1', K_2, \ldots, K_m) \\ &= \mathrm{MV}(K_1, K_2, \ldots, K_m) + \mathrm{MV}(K_1', K_2, \ldots, K_m). \end{aligned}$$

Thể tích trộn có thể phân tích thành tích khi đa diện có một phép tam giác phân nhất định (xem [[10]] [Lem.6]). Với số nguyên dương b, ta ký hiệu $[0, b\mathbf{e}_i]$ có độ dài b theo trục thứ i trong $\mathbb{R}^m$. Với mỗi $1 \leq j \leq m$, đặt $\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$ là phép chiếu theo hướng tọa độ j.

Bổ đề 1.2. *Cho $Q_1, \ldots, Q_{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ là các đa đỉnh, b là số nguyên dương và $1 \leq j \leq m$. Khi đó*

$$\mathrm{MV}\left(Q_1, \ldots, Q_{m-1}, [0, b\mathbf{e}_j]\right) = b\,\mathrm{MV}\left(\pi_j\left(Q_1\right), \ldots, \pi_j\left(Q_{m-1}\right)\right).$$

Chứng minh. Xét một hệ $g_1, \ldots, g_m$ của các đa thức tổng quát với các đa diện Newton tương ứng là $Q_1, \ldots, Q_{m-1}, [0, b\mathbf{e}_j]$.
Vì g_m là đa thức một biến bậc b trong x_j, nên $g_m\left(x_j\right) = 0$ có b nghiệm. Với mỗi nghiệm x_j^*, nếu ta thay

$$x_j = x_j^*$$

vào $g_1, \ldots, g_{m-1}$, thì ta thu được các đa thức tổng quát với các đa diện Newton

$$\pi_j\left(Q_1\right), \ldots, \pi_j\left(Q_{m-1}\right).$$

Do đó, ta có $\mathrm{MV}\left(\pi_j\left(Q_1\right), \ldots, \pi_j\left(Q_{m-1}\right)\right)$ nghiệm cho hệ ban đầu cho mỗi b nghiệm của $g_m\left(x_j\right) = 0$. □

1.3. Tập đại số và tính chất giao hoành của hai tập đại số

Tập đại số là một trong những đối tượng được nghiên cứu cơ bản trong Hình học đại số. Tập đại số ban đầu được định nghĩa là tập nghiệm của hệ phương trình đa thức với hệ số số thực hoặc số phức. Cụ thể, một tập đại số là một tập được xác định bởi:

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^n : P_1(x) = ... = P_n(x) = 0\right\},$$

với $P_1, .., P_n$ là các đa thức nào đó.

Ví dụ 1.5. Dưới đây là một số ví dụ về tập đại số:

$$M = \left\{ n \in \mathbb{R} : \frac{9}{2}n^3 - \frac{21}{2}n^3 + 8n - 4 = 0 \right\}.$$

$$X = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : -2x_1^2 - 2x_2^2 + 5 = 0, x_1^2 x_3^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Tiếp theo ta xem xét giao của các đa tạp khả vi với nhau. Ta bắt đầu với định nghĩa về hai không gian véc-tơ có tính hoành (transverse). Định nghĩa này mở rộng một cách tự nhiên cho các giao điểm của đa tạp con bằng cách coi các không gian tiếp xúc của các đa tạp con là không gian véc-tơ.

Định nghĩa 1.11. Cho F và G là các không gian véc-tơ con của không gian véc-tơ E. Khi đó, F và G được gọi là có tính hoành (transverse) 33nếu

$$F + G = E.$$

Ta kí hiệu: $F \pitchfork G$.

Lưu ý: Tính giao hoành phụ thuộc vào số chiều của F, G và E. Nếu

$$\dim F + \dim G < \dim E,$$

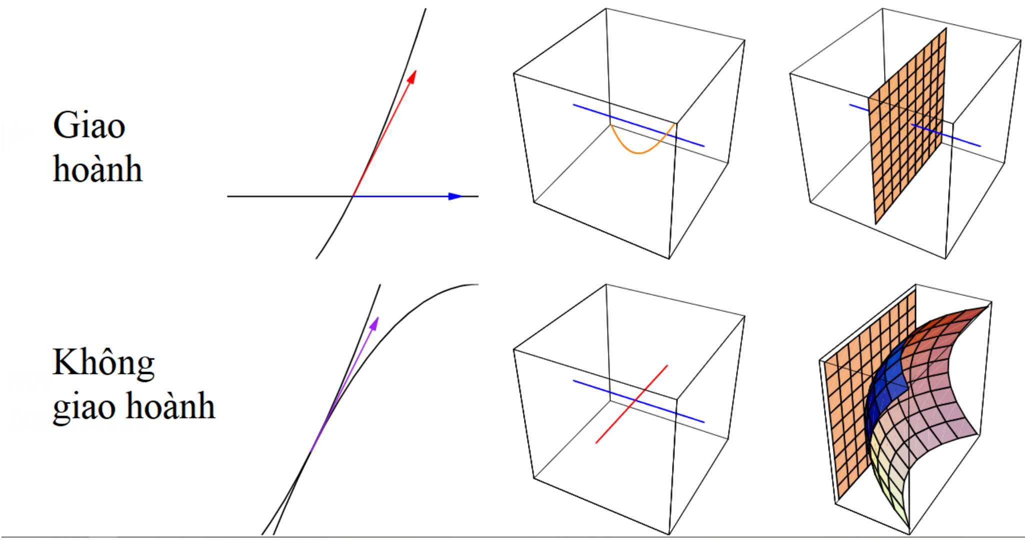
thì F và G không thể giao hoành.

Định nghĩa 1.12. Cho M và N là hai đa tạp trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó M và N gọi là có tính giao hoành (intersect transversally) nếu tại mọi điểm $x \in M \cap N$ thì

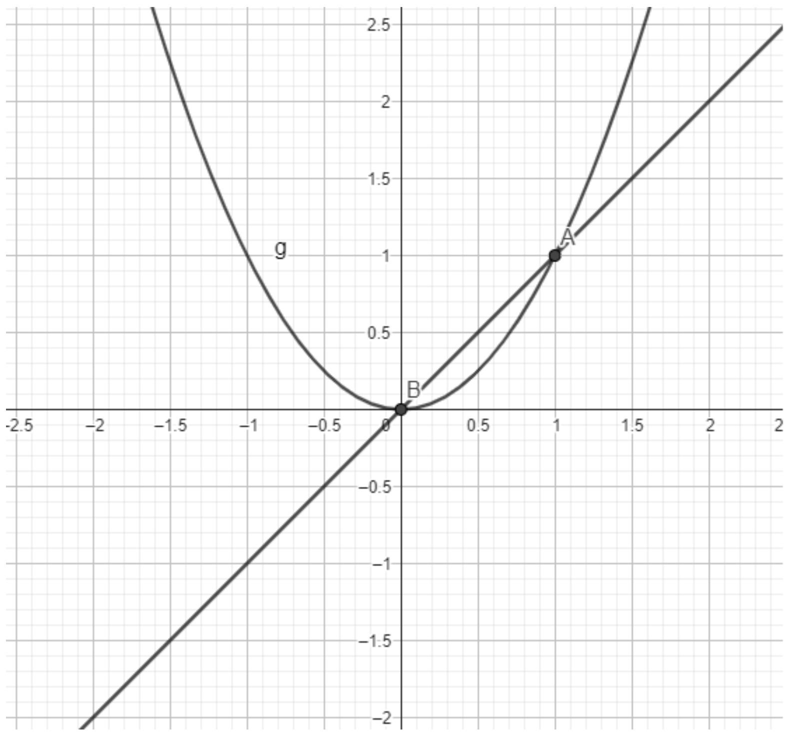
$$T_xM + T_xN = T_x\mathbb{R}^n.$$

Ta kí hiệu: $M \pitchfork N$.

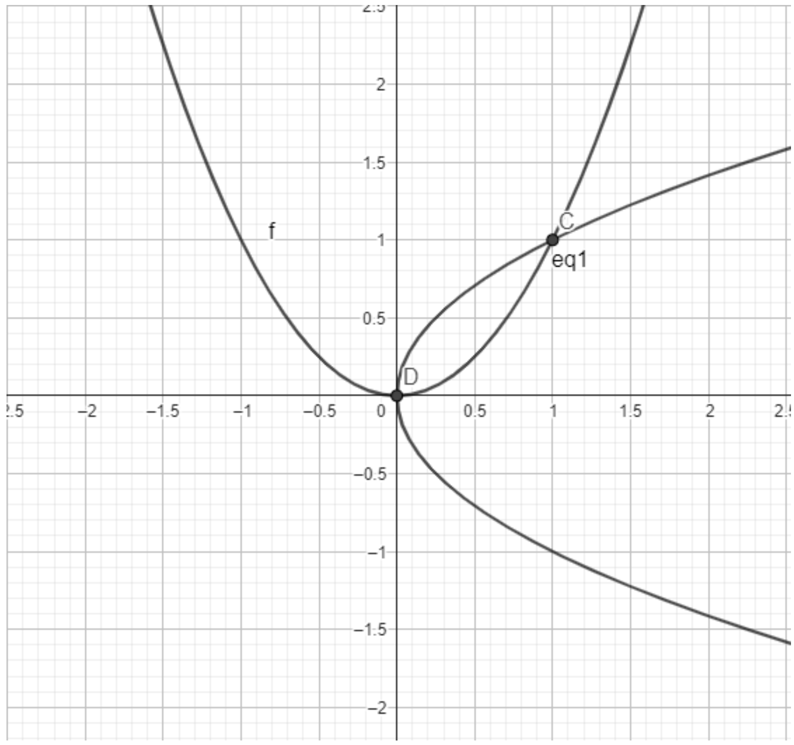
Ví dụ 1.6. Dưới đây là các ví dụ về đa tạp giao hoành và đa tạp không giao hoành.



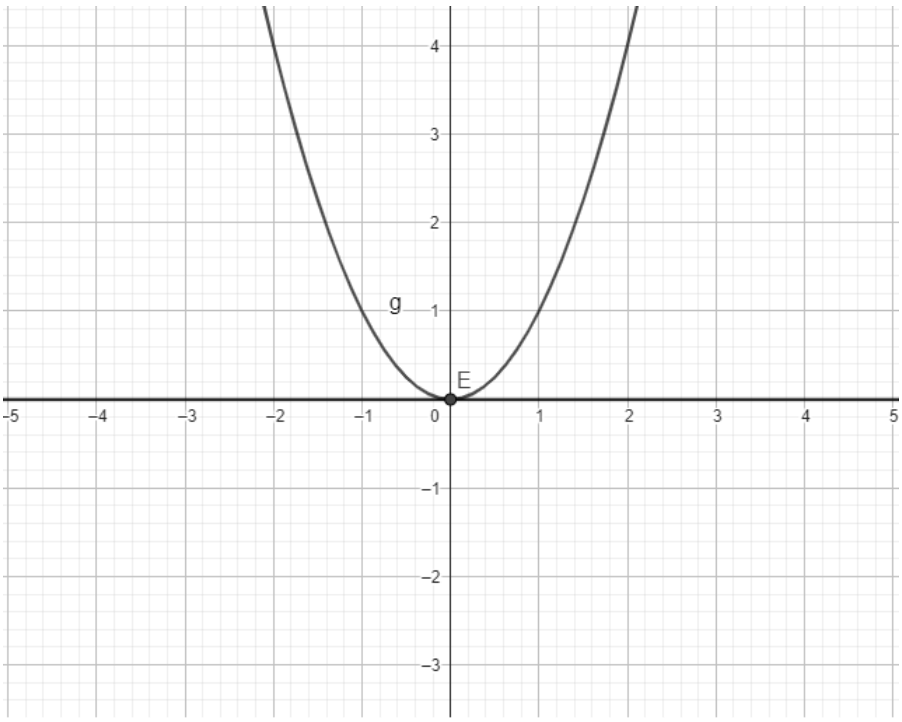
Hình 1.6: Đa tạp giao hoành và không giao hoành.



Hình 1.7: Hai đa tạp $y = x$ và $y = x^2$ giao hoành tại 2 điểm $A(1;1)$ và $B(0;0)$.



Hình 1.8: Hai đa tạp $x = y^2$ và $y = x^2$ giao hoành tại 2 điểm $C(1;1)$ và $D(0;0)$.



Hình 1.9: Tại điểm $E(0;0)$ hai đa tạp $y = 0$ và $y = x^2$ giao không hoành.

Chương 2

BẬC KHOẢNG CÁCH EUCLID

Chương này trình bày kết quả chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi nghiên cứu hàm khoảng cách từ một điểm cho trước đến một tập đại số và bài toán đếm số điểm tới hạn của hàm đó.

2.1. Định nghĩa bậc khoảng cách Euclid

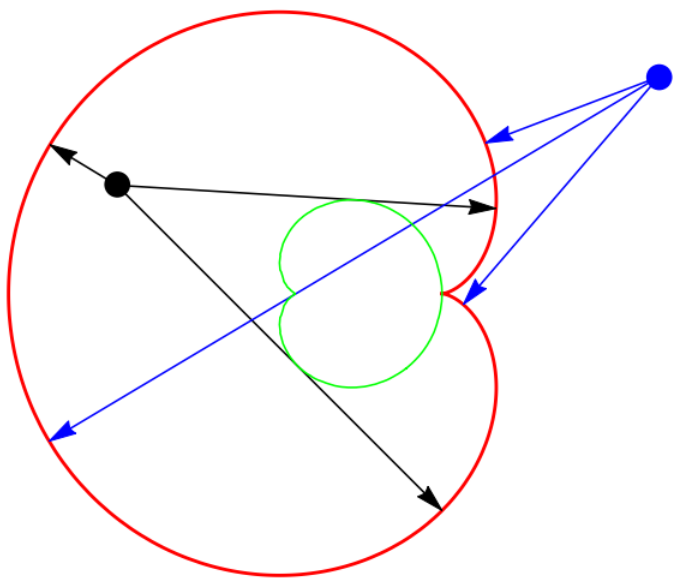
Định nghĩa 2.1. Cho trước một điểm $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$, xét hàm $f_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $f_c(x) = \sum (x_i - c_i)^2, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Cho X là một tập đại số trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, với điểm c tổng quát , hàm khoảng cách $f_c|_X : X \to \mathbb{R}$, của hàm số f_c trên X có hữu hạn điểm tới hạn. Số điểm tới hạn phức không phụ thuộc vào điểm tổng quát c và được gọi là bậc khoảng cách Euclid của tập X, ký hiệu là $\mathrm{EDD}(X)$.

Ví dụ 2.1. Xét

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 + y^2 + x\right)^2 = x^2 + y^2\right\}.$$

Với (u, v) tổng quát trong $\mathbb{R}^2$ dễ thấy hình X chứa ba điểm (x, y) có đường tiếp tuyến vuông góc với $(u - x, v - y)$.

Do đó, $\mathrm{EDD}(X) = 3$.

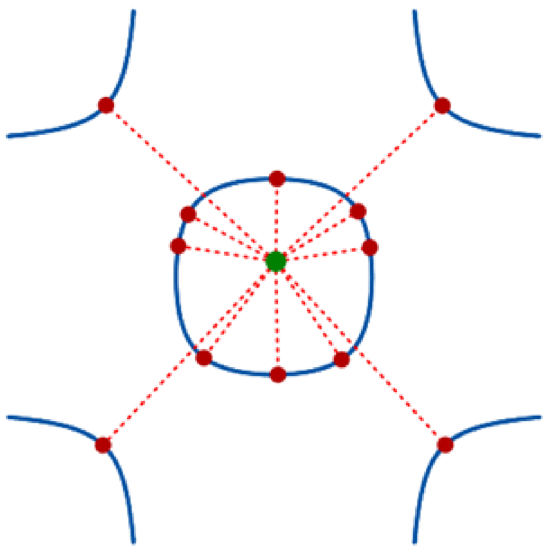


Hình 2.1: EDD(f) = 3.

Ví dụ 2.2. Xét

$$X = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}\left(x_1^2x_2^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 + 5\right) \subset \mathbb{R}^2.$$

và điểm $u(0.025, 0.2)$ có 12 điểm tới hạn của hàm khoảng cách d_X. Do đó bậc khoảng cách Euclid của X bằng 12.



Hình 2.2: EDD(X) = 12.

Mối liên hệ giữa số nghiệm của một hệ đa thức và thể tích trộn được cho bởi định lý Bernstein dưới đây.

Định lý 2.1 (xem [11, 12]). *Cho* $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$ *là* m *đa thức với đa diện Newton* $Q_1, \ldots, Q_m$. *Đặt* $\#\mathcal{V}_{\mathbb{C}^\times}(g_1, \ldots, g_m)$ *là số nghiệm của* $g_1 = \cdots = g_m = 0$ *trong* $(\mathbb{C}^\times)^m$, *được tính bằng các bội đại số của chúng. Định lý Bernstein khẳng định rằng*

$$\#\mathcal{V}_{\mathbb{C}^\times}(g_1, \ldots, g_m) \leq \mathrm{MV}(Q_1, \ldots, Q_m)$$

và dấu bằng xảy ra khi g_i *là tổng quát đối với giá của nó.*

Ta cũng có định lý khác của Bernstein.

Định lý 2.2 (xem [11, 12]). *Cho* $G = (g_1, \ldots, g_m)$ *là một hệ các đa thức Laurent với các biến* $x_1, \ldots, x_c$. *Với mỗi* $1 \leq i \leq m$, *đặt* $\mathcal{A}_i$ *là giá của* g_i *và* $Q_i = \mathrm{conv}(\mathcal{A}_i)$*là đa diện Newton của nó. Thì*

$$\#\mathcal{V}_{\mathbb{C}^\times}(g_1, \ldots, g_m) < \mathrm{MV}(Q_1, \ldots, Q_m)$$

khi và chỉ khi tồn tại $0 \neq w \in \mathbb{Z}^m$ *sao cho hệ mặt* $G_w := ((g_1)_w, \ldots, (g_m)_w)$ *có nghiệm trong* $(\mathbb{C}^\times)^m$. *Mặt khác,* $\#\mathcal{V}_{\mathbb{C}^\times}(g_1, \ldots, g_m)$ *bằng* $\mathrm{MV}(Q_1, \ldots, Q_m)$.

2.2. Bậc khoảng cách Euclid của siêu mặt đại số

Cho $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$ là một đa thức có giá $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^n$, tức là tập hợp các số mũ của các đơn thức của f. Giả sử rằng $0 \in \mathcal{A}$. Chúng ta viết $\partial_i\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^n$ là giá của đạo hàm riêng $\partial_i f$. Với $w \in \mathbb{Z}^n$, hàm tuyến tính $x \mapsto \langle w, x\rangle$ nhận các giá trị nhỏ nhất trên $\mathcal{A}$ và trên $\partial_i\mathcal{A}$.

Ký hiệu $\mathrm{EDD}(f)$ là bậc khoảng cách Euclid của siêu mặt $f = 0$. Khi đó $\mathrm{EDD}(f)$ được đánh giá như sau:

Định lý 2.3 (xem[8]). *Nếu f là một đa thức có giá $\mathcal{A}$ chứa 0, thì*

$$\mathrm{EDD}(f) \leq \mathrm{MV}\left(P, P_1, \ldots, P_n\right),$$

trong đó P là đa diện Newton của f và P_i là đa diện Newton của $\partial_i f - \lambda\left(u_i - x_i\right)$ với $1 \leq i \leq n$. Ngoài ra, tồn tại một tập con mở trù mật U gồm các đa thức có giá $\mathcal{A}$ sao cho khi $f \in U$ bất đẳng thức trên trở thành một đẳng thức với $u \in \mathbb{C}^n$ tổng quát, mỗi nghiệm của $\mathcal{L}_{f,u}$ đều xảy ra mà không có bội.

Định lý 2.4 (xem[8]). *Giả sử f là tổng quát với giá $\mathcal{A}$ sao cho $0 \in \mathcal{A}$ và $u \in \mathbb{R}^n$ là tổng quát. Với bất kỳ véc-tơ khác không $w \in \mathbb{Z}^{n+1}$ thì hệ mặt $\left(\mathcal{L}_{f,u}\right)_w$ không có nghiệm trong $\left(\mathbb{C}^{\times}\right)^{n+1}$.*

Đặt $1 \leq m \leq n$ và $a = (a_1, \ldots, a_m)$ là một véc-tơ các số nguyên dương. Xét hình hộp chữ nhật

$$B(a) := [0, a_1] \times \cdots \times [0, a_m].$$

Đó là tổng Minkowski của các khoảng:

$$B(a) = [0, a_1\mathbf{e}_1] + \cdots + [0, a_k\mathbf{e}_m].$$

Thể tích Euclid của nó là $a_1 \cdots a_m$, là tích của độ dài các cạnh của nó. Hình hộp trên có thể nhúng trong $\mathbb{R}^{m+1}$ dưới dạng $\{0\} \times B(a)$.

Gọi $P_i(a)$ là bao lồi của $B\left(a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_m\right)$ và $\mathbf{e}_0 + [0, \mathbf{e}_i]$. Đặt $Pyr(a)$ là hình chóp có đáy là $B(a)$ và khối chóp $\mathbf{e}_0$, đây là bao lồi của $B(a)$ và $\mathbf{e}_0$. Với mỗi $j = 1, \ldots, m$, chúng ta có phép chiếu $\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$ dọc theo tọa độ thứ j, sao cho $\pi_j(a) = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_m)$. Khi đó

$$\pi_j(B(a)) = B\left(\pi_j(a)\right).$$

Bổ đề sau được suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

Bổ đề 2.5. *Cho* $a = (a_1, \ldots, a_m)$ *và* $1 \leq i, j \leq m$. *Khi đó:*

$$\pi_j\left(P_i(a)\right) = \begin{cases} P_i\left(\pi_j(a)\right) & \textit{nếu } i \neq j, \\ \operatorname{Pyr}\left(\pi_j(a)\right) & \textit{nếu } i = j. \end{cases}$$

Bổ đề 2.6. *Ta có* $\mathrm{MV}\left(\operatorname{Pyr}(a), P_1(a), \ldots, P_m(a)\right) = 1 + E(a)$.

Chứng minh. Ta sẽ sử dụng định lý Bernstein để chỉ ra rằng tồn tại một hệ đa thức tổng quát có giá

$$\operatorname{Pyr}(a), P_1(a), \ldots, P_m(a)$$

có $1 + E(a)$ nghiệm trong $\left(\mathbb{C}^\times\right)^{m+1}$, trong đó

$$a = (a_1, \ldots, a_m)$$

là một véc-tơ các số nguyên dương.

Một đa thức tổng quát với đa diện Newton $\operatorname{Pyr}(a)$ có dạng $c\lambda + f$, trong đó f có đa diện Newton $B(a)$ và $c \neq 0$. Ở đây, λ là một biến có số mũ $\mathbf{e}_0$. Chia cho c, giả sử rằng đa thức là monic theo λ.

Tương tự, vì $P_i(a)$ là bao lồi của

$$B\left(a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_m\right)$$

và

$$\mathbf{e}_0 + \left[0, \mathbf{e}_i\right],$$

nên một đa thức tổng quát có giá $P_i(a)$ có thể được giả sử có dạng

$$\lambda \ell_i\left(x_i\right) + f_i(x),$$

trong đó f_i có đa diện Newton

$$B\left(a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_m\right)$$

và

$$\ell_i\left(x_i\right) := c_i + x_i$$

là một đa thức tuyến tính trong x_i với $c_i \neq 0$.

Do đó, chúng ta có thể giả sử rằng một hệ đa thức tổng quát với giá đã cho có dạng

$$\lambda - f, \lambda \ell_1\left(x_1\right) + f_1, \ldots, \lambda \ell_m\left(x_m\right) + f_m, \tag{2.1}$$

trong đó f là một đa thức tổng quát với đa giác Newton $B(a)$ và với mỗi $1 \leq i \leq m, f_i$ là một đa thức tổng quát với đa diện Newton $B\left(a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_m\right)$. Ta chứng minh rằng $1 + E(a)$ là số các nghiệm chung trong $\left(\mathbb{C}^{\times}\right)^{n+1}$ của các đa thức trong (2.1) Sử dụng đa thức đầu tiên để loại λ khỏi phần còn lại cho thấy việc giải hệ (2.1) tương đương với việc giải hệ

$$F : f_1 + \ell_1\left(x_1\right) f, \ldots, f_m + \ell_m\left(x_m\right) f, \tag{2.2}$$

với các biến $x_1, \ldots, x_m$, vì $z \mapsto (f(z), z)$ là song ánh giữa nghiệm z của (2.2) và nghiệm của (2.1). Ta chỉ ra rằng số các nghiệm chung của (2.2) là $1 + E(a)$, khi $f, f_1, \ldots, f_m$ là tổng quát theo các đa diện Newton của chúng.

Không giống như hệ (2.1), hệ F không được cho giá tổng quát. Tuy nhiên, ta sẽ chỉ ra rằng không có hệ mặt nào có nghiệm. Khi đó, theo Định lý của Bernstein, số nghiệm của nó là thể tích trộn tương ứng.

Vì $B\left(a_1, \ldots, a_i-1, \ldots, a_m\right) \subset B(a)$ nên đa diện Newton của $f_i+\ell_i\left(x_i\right) f$ là $B(a)+\left[0, \mathbf{e}_i\right]$. Do đó, thể tích trộn tính được là

$$\operatorname{MV}\left(B(a)+\left[0, \mathbf{e}_1\right], \ldots, B(a)+\left[0, \mathbf{e}_m\right]\right)=\sum_{\mathcal{I} \subset\{1, \ldots, m\}}|\mathcal{I}|! \prod_{i \in \mathcal{I}} a_i=1+E(a).$$

Để thấy điều này, đầu tiên hãy quan sát đẳng thức thứ hai là định nghĩa của $E(a)$. Đối với đẳng thức đầu tiên, ta xét việc mở rộng thể tích trộn bằng cách sử dụng tính "đa tuyến tính". Điều này sẽ có các tổng được lấy theo chỉ số là các tập hợp con $\mathcal{I}$ của $\{1, \ldots, m\}$, ta chọn $B(a)$ ở các vị trí trong $\mathcal{I}$ và $\left[0, \mathbf{e}_j\right]$ khi $j \notin \mathcal{I}$. Áp dụng Bổ đề 1.2 cho thấy tổng này là $\operatorname{MV}\left(B\left(a_{\mathcal{I}}\right), \ldots, B\left(a_{\mathcal{I}}\right)\right)$, khi chiếu a từ tọa độ $j \notin \mathcal{I}$ sẽ cho $a_{\mathcal{I}}$. Số hạng này là $|\mathcal{I}|! \prod_{i \in \mathcal{I}} a_i$, theo tính chuẩn hóa của thể tích trộn.

Bây giờ ta chỉ ra rằng không có hệ mặt (2.2) nào có nghiệm. Vì mỗi đa diện Newton là một hình hộp chữ nhật $B(a)+\left[0, \mathbf{e}_j\right]$, các mặt thực sự của nó được xác định bởi các véc-tơ khác không $w \in\{-1,0,1\}^m$.
Đặt $w \in\{-1,0,1\}^m$ và giả sử rằng $w \neq 0$. Đầu tiên chúng ta xem xét hình dạng của $B(a)$ được xác định bởi w. Đây là một hình hộp chữ nhật có tọa độ thứ i là

$$0 \text{ nếu } w_i=1,$$

$$\left[0, a_i\right] \text{ nếu } w_i=0,$$

$$\text{và } a_i \text{ nếu } w_i=-1.$$

Theo cách tương tự, ta đặt

$$B(a)_w:=\left\{b^* \in B(a) \mid\left\langle w, b^*\right\rangle=\min_{b \in B(a)}\langle w, b\rangle\right\},$$

và định nghĩa tương tự $\left(B(a)+\left[0, \mathbf{e}_j\right]\right)_w$ cho mỗi $j=1, \ldots, m$. Do đó,

$$B(a)_w=\sum_{i: w_i=1}\{0\}+\sum_{i: w_i=0}\left[0, a_i \mathbf{e}_i\right]+\sum_{i: w_i=-1}\left\{a_i \mathbf{e}_i\right\}, \tag{2.3}$$

và ta có

$$(B(a)+[0,\mathbf{e}_j])_w = \begin{cases} B(a)_w, & \text{nếu } w_j = 1, \\ B(a)_w + [0,\mathbf{e}_j], & \text{nếu } w_j = 0, \\ B(a)_w + \mathbf{e}_j, & \text{nếu } w_j = -1. \end{cases}$$

Vì $\ell_j = c_j + x_j$, ta cũng có

$$\ell_j(x_j)_w = \begin{cases} c_j, & \text{nêu } w_j = 1, \\ \ell_j(x_j), & \text{nếu } w_j = 0, \\ x_j, & \text{nếu } w_j = -1. \end{cases}$$

Đa diện Newton của f_i có tọa độ thứ i là khoảng $[0,(a_i-1)]$ và với $j \neq i$ thì tọa độ thứ j của nó là khoảng $[0,a_j]$. Đa diện Newton của $\ell_i \cdot f$ khác ở chỗ tọa độ i của nó là khoảng $[0,(a_i+1)]$. Ta có

$$(f_i+\ell_i f)_w = \begin{cases} (f_i)_w + c_i \cdot f_w & \text{nếu } w_i = 1, \\ (f_i)_w + \ell_i \cdot f_w & \text{nếu } w_i = 0, \\ x_i \cdot f_w & \text{nếu } w_i = -1, \end{cases}$$

và với f_i tổng quát $(f_i)_w \neq 0$ khi $w_i \neq 1$.

Gọi α là số tọa độ của w bằng 0, β là số tọa độ bằng 1 và đặt $\gamma := n-\alpha-\beta$, là số tọa độ của w bằng -1 . Các mặt của $(B(a)+[0,\mathbf{e}_j])_w$ được xác định bởi w có số chiều α (vì (2.3)), do đó hệ mặt F_w của (2.2) là một hệ phương trình của α biến. Đầu tiên giả sử rằng $\gamma > 0$. Vì trên $(\mathbb{C}^\times)^n$ mỗi biến x_i khác không, hệ mặt F_w tương đương với

$$f_w, \{(f_i)_w \mid w_i \neq -1\}.$$

Vì đây là những giá trị khác không và có giá tổng quát, đồng thời có $\alpha+\beta+1 > \alpha$ trong số chúng, nên ta thấy rằng F_w không có nghiệm.

Nếu $\gamma = 0$ thì $\beta > 0$. Xét họ con $\widehat{F}$ của các hệ dạng (2.2) trong đó $f = 0$, nhưng f_i vẫn là tổng quát. Sau đó, hệ mặt F_w tương đương với hệ $\{(f_i)_w \mid w_i \neq -1\}$ của các đa thức $\alpha + \beta > \alpha$ khác 0 và giá tổng quát, do đó $\widehat{F}_w$ không có nghiệm.

Vì điều kiện F_w không có nghiệm là điều kiện mở trong không gian của tất cả các hệ (2.1), điều này ngụ ý rằng đối với một hệ tổng quát (2.1) với hệ tương ứng F (2.2), không có hệ mặt F_w nào có nghiệm. Điều này hoàn thành chứng minh bổ đề. □

Tiếp theo ta tính EDD(f) khi đa diện Newton của f là hình hộp chữ nhật

$$B(a) := [0, a_1] \times \cdots \times [0, a_n]$$

với $a := (a_1, \ldots, a_n)$ là các số nguyên dương. Với mỗi $1 \leq k \leq n$, gọi

$$e_k(a) := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1} \cdots a_{i_k}.$$

là đa thức đối xứng sơ cấp thứ k của n biến.

Định lý tiếp theo là kết quả chính trong bài báo [8].

Định lý 2.7. *Cho $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Nếu $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ có đa diện Newton $B(a)$, thì*

$$\mathrm{EDD}(f) \leq \sum_{k=1}^{n} k! e_k(a).$$

Có một tập con mở trù mật U của không gian các đa thức với đa diện Newton $B(a)$ sao cho $f \in U$, thì bất đẳng thức này là một đẳng thức.

Có một sự thay đổi về khái niệm khi chuyển từ Định lý 2.3 sang Định lý 2.7. Định lý 2.3 được xây dựng dưới dạng giá của f, trong khi Định lý 2.7 liên quan đến đa diện Newton của nó. Điều này là do đẳng thức trong Định lý 2.7 cần đa giác Newton của đạo hàm riêng $\partial_i f$ phải là $B(a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_n)$ cho mỗi $1 \leq i \leq n$.

Ví dụ 2.3. Khi $n = 2$, một đa thức f với đa giác Newton 2×2 hình vuông $B(2, 2)$ là một phương trình bậc hai và số điểm tới hạn được tìm thấy cho đường cong bậc hai này là $2! \times 2 \times 2 + 1! \times (2 + 2) = 12$.

Ví dụ 2.4. Khi $n = 2$, một đa thức f với đa giác Newton 2×2 hình vuông $B(2, 3)$ là một phương trình bậc hai và số điểm tới hạn được tìm thấy cho đường cong bậc hai này là $2! \times 2 \times 3 + 1! \times (2 + 3) = 17$.

2.3. Bậc khoảng cách Euclid của tập đại số trong $\mathbb{C}^3$

Xuyên suốt chương này, gọi $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ là hai đa thức sao cho $M = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : f_1(x) = f_2(x) = 0\right\}$ là đa tạp trơn. Ta xét:

$$\varphi : M \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \|x - u\|^2,$$

với $\|x - u\|^2$ là chuẩn Euclid.

Vì {các điểm gần nhất} $\subset$ {các điểm tới hạn của φ}, nên số điểm tới hạn được coi là độ phức tạp của bài toán điểm gần nhất. Điều đó suy ra rằng $EDD(M)$ bằng số nghiệm phức của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) = 0, \\ d_x\varphi = 0 \end{cases}$$

với $d_x\varphi : \mathrm{T}_x M \to \mathrm{T}_{\varphi(x)}\mathbb{R}$ là một ánh xạ tiếp xúc (hay vi phân của ánh xạ φ) và x là điểm tới hạn.

Vì tập hợp tất cả các véc-tơ tiếp xúc v tại x sao cho $d_{f(x)}(v) = 0$ là không gian tiếp xúc của đa tạp M tại x nên trước tiên ta cần xác định không gian tiếp xúc tại điểm x :

$$\mathrm{T}_x M = \{v_i = \gamma_i'(t) \mid \mathrm{t} = 0\} \text{ với } \gamma(t) \subset M \text{ và } \gamma(0) = x.$$

Ta có

$$f_1(x) = f_1(\gamma(t)) = 0 \text{ và } f_2(x) = f_2(\gamma(t)) = 0.$$

Suy ra rằng

$$d_{fi}(x) = d_{fi}(\gamma(t)).$$

Ta xét

$$d_{f_1}(x) = d_{f_1}(\gamma(t)) = \frac{\partial f_1}{x_1}(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \frac{\partial f_1}{x_2}(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t) + \frac{\partial f_1}{x_3}(\gamma(t)) \cdot \gamma_3'(t).$$

Nếu

$$\begin{cases} d_{f_1}(x) = 0 \\ t = 0 \end{cases},$$

thì

$$\frac{\partial f_1}{x_1}(x) \cdot v_1 + \frac{\partial f_1}{x_2}(x) \cdot v_2 + \frac{\partial f_1}{x_3}(x) \cdot v_3 = 0.$$

Vậy,

$$\langle \nabla f_1(x), v \rangle = 0.$$

Tương tự, $d_{f_2}(x) = d_{f_2}(\gamma(t)) = 0$. Suy ra, $\langle \nabla f_2(x), v \rangle = 0$.

Vậy,

$$\mathrm{T}_x M = \left\{ v \in \mathbb{C}^3 \mid \langle \nabla f_1(x), v \rangle = \langle \nabla f_2(x), v \rangle = 0 \right\}.$$

Tiếp theo, ta cần tìm điểm tới hạn x.

Giả sửa rằng $x = (x_1, x_2, x_3)$, x là một điểm tới hạn nếu

$$\langle \nabla f_i(x), v \rangle = 0 (i = 1, 2) \Leftrightarrow \langle \nabla \varphi(x), v \rangle = 0.$$

Điều này suy ra rằng, tồn tại $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sao cho

$$\nabla \varphi(x) = \lambda_1 \cdot \nabla f_1(x) + \lambda_2 \cdot \nabla f_2(x).$$

Vậy, các điểm tới hạn x phải thoả mãn

$$u - x = \lambda_1 \cdot \nabla f_1(x) + \lambda_2 \cdot \nabla f_2(x).$$

Hệ Lagrange dưới đây là hệ 5 phương trình đa thức với 5 biến $(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3)$:

$$\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) := \{f_1(x) = f_2(x) = 0 \text{ và } u - x = \lambda_1 \cdot \nabla f_1(x) + \lambda_2 \cdot \nabla f_2(x)\},$$

với λ_1, λ_2 là các biến phụ.

Tiếp theo, xét số nghiệm của $\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) = 0$. Với u đủ tổng quát, con số này được gọi là bậc khoảng cách Euclid của tập đại số

$$M = \left\{x \in \mathbb{C}^3 : f_1(x) = f_2(x) = 0\right\}.$$

Vậy, $\mathrm{EDD}(M) :=$ số nghiệm của $\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) = 0$ trong $\mathbb{C}^5$.
Ở đây, "tổng quát" có nghĩa là với mọi u nằm ngoài tập đại số nào đó, tức là nằm ngoài tập có độ đo bằng không.

Định lý 2.8. *Cho* $\sum := \left\{(a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_N}, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^N \times (\mathbb{C}^\times)^n\right\}$. *Cho* Ω *là tập các điểm tới hạn của hàm* $p : \Sigma \to \mathbb{C}^N$. *Nếu* $f\left(a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_N}\right) \in \Omega$ *thì* $p^{(-1)}(0)$ *không có điểm tới hạn trong* $(\mathbb{C}^\times)^n$.

Chứng minh. Giả sử $p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1,\ldots,N} a_{\alpha_i} x^{\alpha_i}$ là đa thức. Nếu $\{a_{\alpha_i}\}$ là tổng quát thì nghiệm của đa thức $p(x)$ nằm trong $(\mathbb{C}^\times)^n$:

$$\left\{x \in \left(\mathbb{C}^\times\right)^n : \partial_1 p(x) = \ldots = \partial_n p(x) = p(x) = 0\right\}.$$

Xét phương trình

$$\sum_{i=1,\ldots,N} a_{\alpha_i} x^{\alpha_i} = 0,$$

phương trình có nghiệm vì rõ ràng $\sum_{i=1,\ldots,N} a_{\alpha_i} x^{\alpha_i}$ là hàm mũ, $x_i \in (\mathbb{C}^\times)^n$ và $\sum_{i=1,\ldots,N} a_{\alpha_i} x^{\alpha_i}$ có đạo hàm riêng nên $\sum_{i=1,\ldots,N} a_{\alpha_i} x^{\alpha_i}$ là trơn.

Cho π là một phép chiếu:

$$\pi : \sum \to \mathbb{C}^N$$
$$(a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_N}, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_N})$$

thì

$$d_\pi : \mathrm{T}_x\Sigma \to \mathbb{C}$$
$$v = \varphi'(t)\big|_{t=0} \mapsto \pi\left(\varphi'(t)\right) = 0.$$

Ta viết

$$\sum := \left\{(a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_N}, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^N \times \left(\mathbb{C}^\times\right)^n\right\}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\sum(x) = \sum(\varphi(t)), \text{ suy ra } d\sum(x) = d\sum(\varphi(t)) = 0.\\
\Leftrightarrow \quad &\frac{\partial\Sigma}{a_{\alpha_1}}\varphi(t)\cdot\varphi_1'(t) + \ldots + \frac{\partial\Sigma}{a_{\alpha_N}}\varphi(t)\cdot\varphi_N'(t)\\
&\qquad\qquad + \frac{\partial\Sigma}{x_1}\varphi(t)\cdot\varphi_{1'}'(t) + \ldots + \frac{\partial\Sigma}{x_n}\varphi(t)\cdot\varphi_{n'}(t) = 0\\
\Leftrightarrow \quad &\frac{\partial\Sigma}{a_{\alpha_1}}(x)\cdot v_1 + \ldots + \frac{\partial\Sigma}{a_{\alpha_N}}(x)\cdot v_N + \frac{\partial\Sigma}{x_1}(x)\cdot v_{1'} + \ldots + \frac{\partial\Sigma}{x_n}(x)\cdot v_{n'} = 0
\end{aligned}$$

Vậy $\quad \langle\nabla\sum(x), v\rangle = 0.$

Nếu

$$d\pi(v) = 0$$

thì

$$\langle\nabla\pi(x), v\rangle = 0.$$

Để x là điểm tới hạn, thì

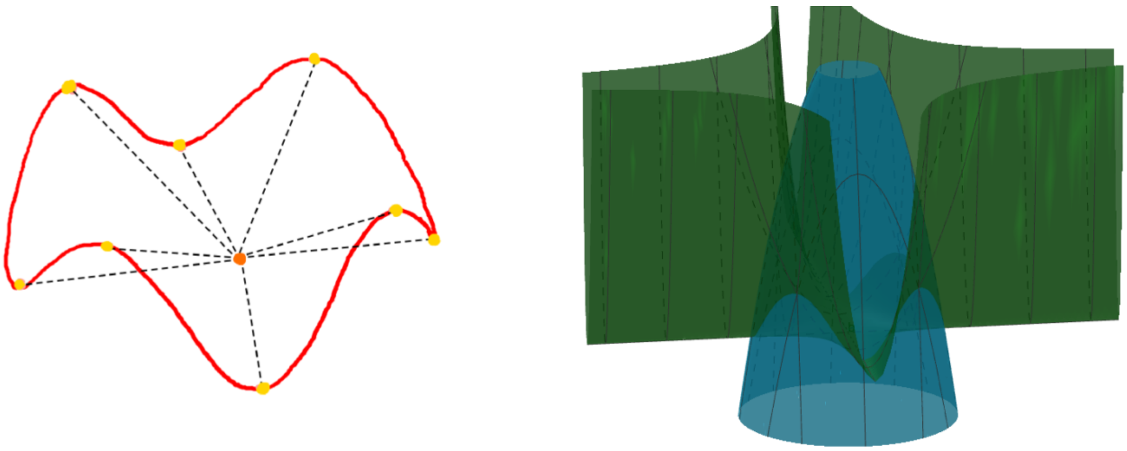
$$\langle\nabla\Sigma(x), v\rangle = 0 \text{ và } \langle\nabla\pi(x), v\rangle = 0.$$

Do đó,

$$\sum = \left\{ (a,x) \in \mathbb{C}^N \times \left(\mathbb{C}^\times\right)^n : \operatorname{rank} \begin{pmatrix} x^{\alpha_1} & \dots & x^{\alpha_N} & \frac{\partial p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial p}{\partial x_n} \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1\dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 1 \right\}$$
$$= \left\{ (a,x) \in \mathbb{C}^N \times \left(\mathbb{C}^\times\right)^n : \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \right\}.$$

Vậy, $(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_N})$ là giá trị tới hạn khi và chỉ khi $p^{(-1)}(0)$ không có điểm tới hạn trong $(\mathbb{C}^\times)^n$. □

Ví dụ 2.5. Cho $X = \left\{(x_1, x_2, x_3) : -2x_1^2 - 2x_2^2 + 5 = 0, x_1^2 x_3^2 = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$ là đường màu đỏ và $u = (0.025, 0.2, 0)$ là điểm màu cam. Tám điểm màu vàng là 8 điểm tới hạn của hàm khoảng cách d_X; chúng là nghiệm x của hệ phương trình $\mathscr{L}_{f_{1,2,\mu}}(\lambda, x) = 0$. Trong ví dụ này, bậc khoảng cách Euclid của X bằng 8 (màu hình xem khi trực tuyến).



Hình 2.3: Đa tạp $X = \left\{(x_1, x_2, x_3) : -2x_1^2 - 2x_2^2 + 5 = 0, x_1^2 x_3^2 = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$.

Trước khi đưa ra định lý về bậc khoảng cách Euclid của đường cong M, chúng tôi trình bày hai bổ đề để giúp hiểu được giá của f_1, f_2 và tương tác của nó với các đạo hàm của f_1, f_2 và sau đó đưa ra một số nhận xét về hệ mặt $(\mathcal{L}_{f_1,f_2,u})_w$.

Cho $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$ là các đa thức có giá $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^n$, là tập hợp các số mũ của các đơn thức f_1, f_2. Giả sử rằng $0 \in \mathcal{A}$. Ta viết $\partial_i \mathcal{A} \subset \mathbb{N}^n$ là giá của đạo hàm riêng $\partial_i f_1$ và $\partial_i f_2$. Với $w \in \mathbb{Z}^n$, hàm tuyến tính $x \mapsto w \cdot x$ nhận các giá trị nhỏ nhất trên $\mathcal{A}$ và trên $\partial_i \mathcal{A}$,

$$h^* = h_w(\mathcal{A}) := \min_{a \in \mathcal{A}} w \cdot a \quad \text{và} \quad h_i^* = h_w(\partial_i \mathcal{A}) := \min_{a \in \partial_i \mathcal{A}} w \cdot a.$$

Vì $0 \in \mathcal{A}$, ta có $h^* \leq 0$. Ngoài ra, nếu $h^* = 0$ và nếu tồn tại $a \in \mathcal{A}$ với $a_i > 0$, thì $w_i \geq 0$. Nhớ lại rằng các tập con của $\mathcal{A}$ và $\partial_i \mathcal{A}$ trong đó hàm tuyến tính $x \mapsto w \cdot x$ cực tiểu là các mặt của chúng tiếp xúc với w,

$$\mathcal{A}_w := \{a \in \mathcal{A} \mid w \cdot a = h^*\} \text{ và } (\partial_i \mathcal{A})_w := \{a \in \partial_i \mathcal{A} \mid w \cdot a = h_i^*\}.$$

Bổ đề 2.9. *Với mỗi $i \leq i \leq n$ và $w \in \mathbb{Z}^n$, ta có $h_i^* \geq h^* - w_i$. Nếu $\partial_i (f_w) = 0$, thì $\partial_i (f_w) = (\partial_i f)_w$ và $h_i^* = h^* - w_i$.*

Chứng minh. Cố định $1 \leq i \leq n$. Cho $a \in \partial_i \mathcal{A}$.
Khi đó,

$$a + \mathbf{e}_i \in \mathcal{A}$$

và do đó

$$h^* \leq w \cdot (a + \mathbf{e}_i) = w \cdot a + w_i.$$

Suy ra ,

$$w \cdot a \geq h^* - w_i.$$

Lấy giá trị nhỏ nhất trên $a \in \partial_i \mathcal{A}$ sẽ được

$$h_i^* \geq h^* - w_i.$$

Giả sử rằng

$$\emptyset \neq \partial_i (\mathcal{A}_w).$$

Đặt

$$a \in \partial_i (\mathcal{A}_w).$$

Khi đó,

$$a + \mathbf{e}_i \in \mathcal{A}_w \text{ và } h^* = w \cdot (a + \mathbf{e}_i) = w \cdot a + w_i.$$

Nhưng lại có

$$h^* - w_i = w \cdot a \geq h_i^*,$$

nghĩa là

$$h_i^* = h^* - w_i.$$

Nó cũng suy ra rằng

$$w \cdot a = h_i^*.$$

Vì $\mathcal{A}_w \subset \mathcal{A}$, nên ta có

$$a \in \partial_i \mathcal{A}.$$

Mà $w \cdot a = h_i^*$, nên $a \in (\partial_i \mathcal{A})_w$.

Điều này chứng tỏ

$$\partial_i (\mathcal{A}_w) \subset (\partial_i \mathcal{A})_w.$$

Tiếp theo , giả sử rằng $\partial_i (\mathcal{A}_w) \neq \emptyset$. Như ta đã chỉ ra, $h_i^* = h^* - w_i$. Đặt $a \in (\partial_i \mathcal{A})_w$. Hơn nữa $w \cdot a = h_i^*$ và với $a \in \partial_i \mathcal{A}$, ta có $a + \mathbf{e}_i \in \mathcal{A}$. Khi đó

$$w \cdot (a + \mathbf{e}_i) = h_i^* + w_i = h^*,$$

sao cho $a + \mathbf{e}_i \in \mathcal{A}_w$. Vậy $a \in \partial_i (\mathcal{A}_w)$. Vì $\partial_i (f_w) \neq 0$ tương đương với $\partial_i (\mathcal{A}_w) \neq \emptyset$, và do đó $\partial_i (f_w)$ và $(\partial_i f)_w$ là các tổng con của $\partial_i f$ tương ứng lần lượt với $\partial_i (\mathcal{A}_w)$ và $(\partial_i \mathcal{A})_w$. $\square$

Bổ đề 2.10. *Cho $w \in \mathbb{Z}^n$, ta có*

$$h^* \cdot f_w = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \partial_i (f_w) .$$

Chứng minh. Đối với một đơn thức x^a với $a \in \mathbb{Z}^n$ và $1 \leq i \leq n$, ta có $x_i \partial_i x^a = a_i x^a$. Như vậy,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \partial_i x^a = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i x^a = (w \cdot a) x^a .$$

Vì với $a \in \mathcal{A}_w$ (giá của f_w), thì $w \cdot a = h^*$. □

Định lý 2.11. *Cho hai đa thức $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$. Nếu $\mathscr{H}, \mathscr{H}$ là giá của các đa thức f_1, f_2 chứa 0 , thì*

$$\mathrm{EDD}(f_1, f_2) \leq MV(P_1, P_2, P_{1'}, P_{2'}, P_{3'}) ,$$

với P_1, P_2 là các đa diện Newton của f_1, f_2 và $P_{i'}$ là đa diện Newton của $u - x_i - \lambda_1 \partial_i f_1 - \lambda_2 \partial_i f_2$ với $i = 1, 2, 3$.

Chứng minh. Giả sử rằng $u \in \mathbb{C}^n \backslash \mathrm{N}(f_1, f_2)$ là tổng quát, với

$$\mathrm{N}(f_1, f_2) := \left\{ x \in \mathbb{C}^3 \mid f_1 = f_2 = 0 \right\} .$$

Theo Định lý Bernstein, hệ phương trình Lagrange $\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) = 0$ có $MV(P_1, P_2, P_{1'}, P_{2'}, P_{3'})$ nghiệm trong $(\mathbb{C}^\times)^5$. Ta cần chứng minh hệ Lagrange không có nghiệm nằm ngoài $(\mathbb{C}^\times)^5$, có nghĩa là tất cả các nghiệm của $\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) = 0$ phải nằm trong $(\mathbb{C}^\times)^5$.

Xét

$$S := \left\{ (u, \lambda, x) \in \mathbb{C}^3_u \times \mathbb{C}^2_\lambda \times \mathbb{C}^3_x \mid \mathscr{L}_{f,u} = 0 \right\}$$

là một đa tạp afin.

Vì

$$f_1 = f_2 = 0$$

là các phương trình trong $\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) = 0$,gọi $X_{\mathrm{C}} = \mathrm{N}(f_1, f_2)$ là đường cong phức.

Cho $x \in X_{\mathrm{C}}$ và kí hiệu h là phép chiếu từ S tới X_{C}. Khi đó thớ $h^{-1}(x)$ trên x là

$$\left\{(u, \lambda) \in \mathbb{C}_u^3 \times \mathbb{C}_\lambda^2 \mid u - x = \lambda_1 \cdot \nabla f_1(x) + \lambda_2 \cdot \nabla f_2(x)\right\}.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng thớ $h^{-1}(x)$ là đồng cấu với $\mathbb{C}_h^2$, chứng tỏ rằng $S \xrightarrow{h} \mathbb{C}_u^3$ là $\mathbb{C}^2$-bundle và $\dim S = 3$.

Xét phép chiếu từ S tới $\mathbb{C}_u^3$ là trội. Theo định lý Sard, thớ tổng quát có chiều là $3 - 3 = 0$ và trơn. Nó có nghĩa là khi $u \in \mathbb{C}_u^3$ là tổng quát, hệ $\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) = 0$ có hữu hạn nghiệm, tức là $\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) = 0$ có hữu hạn điểm tới hạn và số điểm tới hạn không phụ thuộc vào u.

Cho tập $Y \subset X_{\mathrm{C}}$ nằm trong một mặt phẳng toạ độ nào đó tức là không nằm trong $(\mathbb{C}^\times)^3$.

Vì

$$\dim X_{\mathrm{C}} = 3 - 2 = 1$$

nên tập con Y của X_{C} có chiều là $1 - 1 = 0$ và nghịch ảnh của nó là $h^{-1}(Y)$ trong S có số chiều tăng lên 1 là $0 + 1 = 1$.

Gọi W là tập ảnh của $h^{-1}(Y)$ dưới phép chiếu tới $\mathbb{C}_u^3$, bao gồm các điểm $u \in \mathbb{C}_u^3$ sao cho (x, λ) là nghiệm của $\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) = 0$ với $x \notin (\mathbb{C}^\times)^3$. Do W có số chiều lớn nhất bằng số chiều của $h^{-1}(Y)$ và bằng 1, điều này chứng tỏ rằng với u tổng quát thì tất cả nghiệm của $\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) = 0$ đều nằm trong $(\mathbb{C}^\times)^5$ (hiển nhiên λ phải khác 0).

Do $\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) = 0$ có hữu hạn điểm tới hạn nằm trong $(\mathbb{C}^\times)^5$, mặt khác theo Định lý 2.2 khi $m = 5$, thì số nghiệm của $f_1 = f_2 =$

0 trong $(\mathbb{C}^\times)^5$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng $MV(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$. Vậy số điểm tới hạn của hệ Lagrange $\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) = 0$ nhỏ hơn hoặc bằng $MV(P_1, P_2, P_{1'}, P_{2'}, P_{3'})$ hay

$$\mathrm{EDD}(f_1, f_2) \leq MV(P_1, P_2, P_{1'}, P_{2'}, P_{3'}),$$

với P_1, P_2 là các đa diện Newton của f_1, f_2 và $P_{i'}$ là các đa diện Newton của $u - x_i - \lambda_1 \partial_i f_1 - \lambda_2 \partial_i f_2$ khi $i = 1, 2, 3$. □

Định lý 2.12. *Giả sử f_1, f_2 là tổng quát với giá $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$, sao cho $0 \in \mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ và $u \in \mathbb{C}^3$ là tổng quát. Với mọi giá trị $w \in \mathbb{Z}^5$ khác không thì hệ mặt $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w$ không có nghiệm trong $(\mathbb{C}^\times)^5$.*

Chứng minh. Cố định

$$0 \neq w = (v_1, v_2, w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{Z}^5.$$

Toạ độ ban đầu của w là $v \in \mathbb{Z}^2$. Nó có chỉ số 0 và tương ứng với biến $\lambda \in \mathbb{Z}^2$. Hai hàm đầu tiên của hệ mặt $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w$ là $f_1 w$ và $f_2 w$.
Hình dạng của các hàm còn lại phụ thuộc vào w như sau.
Đặt

$$\left(h^j\right)^* := \min\{w \cdot a \mid a \in \mathscr{H}, j = 1, 2\}$$

và

$$\left(h_i^j\right)^* := \min\left\{w \cdot a \mid a \in \partial_i \mathscr{H}; i = 1, 2, 3; j = 1, 2\right\}.$$

Có mười lăm trường hợp cho các hàm còn lại này, đó là

$(u_i - x_i - \lambda_1 \partial_i f_1 - \lambda_2 \partial_i f_2)_w =$

$$\begin{cases} -x_i & \text{nếu } w_i < 0, v_1 + \left(h_i^1\right)^* < w_i, v_2 + \left(h_i^2\right)^* < w_i, & (2.4) \\ u_i & \text{nếu } w_i > 0, v_1 + \left(h_i^1\right)^* > 0, v_2 + \left(h_i^2\right)^* > 0, & (2.5) \\ (-\lambda_1 \partial_i f_1)_w & \text{nếu } v_1 + \left(h_i^1\right)^* < 0 \text{ và } v_2 + \left(h_i^2\right)^* \text{ và } w_i, & (2.6) \\ (-\lambda_2 \partial_i f_2)_w & \text{nếu } v_2 + \left(h_i^2\right)^* < 0 \text{ và } v_1 + \left(h_i^1\right)^* \text{ và } w_i, & (2.7) \\ u_i - x_i & \text{nếu } w_i = 0 < v_1 + \left(h_i^1\right)^* \text{ và } v_2 + \left(h_i^2\right)^*, & (2.8) \\ -x_i - (\lambda_1 \partial_i f_1)_w & \text{nếu } w_i = v_1 + \left(h_i^1\right)^* < 0 \text{ và } v_2 + \left(h_i^2\right)^*, & (2.9) \\ (-\lambda_1 \partial_i f_1 - \lambda_2 \partial_i f_2)_w & \text{nếu } v_1 + \left(h_i^1\right)^* = v_2 + \left(h_i^2\right)^* < 0 \text{ và } w_i, & (2.10) \\ u_i - (\lambda_1 \partial_i f_1)_w & \text{nếu } v_1 + \left(h_i^1\right)^* = 0 < w_i \text{ và } v_2 + \left(h_i^2\right)^*, & (2.11) \\ u_i - (\lambda_2 \partial_i f_2)_w & \text{nếu } v_2 + \left(h_i^2\right)^* = 0 < w_i \text{ và } v_1 + \left(h_i^1\right)^*, & (2.12) \\ -x_i - (\lambda_2 \partial_i f_2)_w & \text{nếu } v_2 + \left(h_i^2\right)^* = w_i < 0 \text{ và } v_1 + \left(h_i^1\right)^*, & (2.13) \\ u_i - x_i - (\lambda_1 \partial_i f_1)_w & \text{nếu } w_i = v_1 + \left(h_i^1\right)^* = 0 < v_2 + \left(h_i^2\right)^*, & (2.14) \\ u_i - x_i - (\lambda_2 \partial_i f_2)_w & \text{nếu } w_i = v_2 + \left(h_i^2\right)^* = 0 < v_1 + \left(h_i^1\right)^*, & (2.15) \\ -x_i - (\lambda_1 \partial_i f_1 + \lambda_2 \partial_i f_2)_w & \text{nếu } w_i = v_2 + \left(h_i^2\right)^* = v_1 + \left(h_i^1\right)^* < 0, & (2.16) \\ u_i - (\lambda_1 \partial_i f_1 + \lambda_2 \partial_i f_2)_w & \text{nếu } v_2 + \left(h_i^2\right)^* = v_1 + \left(h_i^1\right)^* = 0 < w_i, & (2.17) \\ u_i - x_i - (\lambda_1 \partial_i f_1 + \lambda_2 \partial_i f_2)_w & \text{nếu } w_i = v_2 + \left(h_i^2\right)^* = v_1 + \left(h_i^1\right)^* = 0. & (2.18) \end{cases}$$

Lưu ý rằng nếu một trong các đa thức $(u_i - x_i - \lambda_1 \partial_i f_1 - \lambda_2 \partial_i f_2)_w$ là một đơn thức thì $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w$ không có nghiệm nào trong $(\mathbb{C}^\times)^3$. Với tập con $I \subset \{1,2,3\}$ và véc-tơ $u \in \mathbb{C}^3$, đặt $u_I := \{u_i \mid i \in I\}$. Ta kí hiệu w_I cho $w \in \mathbb{Z}^3$ và x_I cho các biến $x \in \mathbb{C}^3$ và kí hiệu $\mathbb{C}^I$ cho không gian con tương ứng của $\mathbb{C}^3$.

Trường hợp 1.

Giả sử rằng $\partial_i f_1 w = 0$ và $\partial_i f_2 w = 0$ với mọi $1 \le i \le 3$. Vì $0 \in \mathscr{H}$ nên $f_1 w, f_2 w$ là hàm bất biến đối với f_1, f_2 tổng quát và hệ mặt $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w$ là vô nghiệm.

Giả sử rằng $I \sqcup J = \{1,2,3\}$ với $I \neq \varnothing$ sao cho $\partial_i f_{1w} \neq 0, \partial_i f_{2w} \neq 0$ với $i \in I$ và $\partial_j f_1 w = \partial_j f_2 w = 0$ với $j \in J$.

Vì $j \in J$ nên $\partial_j f_1 w = \partial_j f_2 w = 0$. Nếu $a \in \mathscr{H}_w$, thì $a_J = 0$. Do đó $f_1 w, f_2 w$ là các đa thức chỉ với các biến x_I, nghĩa là $f_1 w, f_2 w \in \mathbb{C}[x_I]$ hay

$$(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w = \begin{cases} -x_i = 0 \\ u_i = 0 \end{cases},$$

không có nghiệm trong $(\mathbb{C}^\times)^5$.

Trường hợp 2.

Giả sử rằng với $i \in I, w_i \geq 0$ nghĩa là $w_I \geq 0$.Điều này suy ra $w_I = 0$. Để chứng minh điều này, giả sử $a \in \mathscr{H}_w$. Ta thấy, $a_J = 0$. Ta có

$$0 \geq h^* = w \cdot a = w_I \cdot a_I \geqslant 0.$$

Do đó $h^* = w_I \cdot a_I = 0$ nghĩa là $0 \in \mathscr{H}_w$. Giả sử $i \in I$. Vì $\partial_i f_1 w \neq 0$ và $\partial_i f_2 w \neq 0$ nên tồn tại một vài $a \in \mathscr{H}_w$ với $a_i > 0$. Vì $w_I \cdot a_n = 0$ với mọi $a \in \mathscr{H}_w$ nên ta có $w_i = 0$.

Vì $w_i = 0$ nên $(\mathscr{L}_{f,u})_w$ bao gồm các phương trình (2.6), (2.7), (2.8), (2.11), (2.12), (2.14), (2.15), (2.17), (2.18). Ta xét lần lượt ba trường hợp $v_k < 0, v_k > 0, v_k = 0$ với $k = 1,2$.

Trường hợp 2.1.

Giả sử rằng $v_k < 0$ và $(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{C}^\times)^5$ là nghiệm của $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w$. Ta có $u_i - x_i = 0$ với mọi $i \in I$, ta kết luận rằng $x_I = u_I$. Vì $f_1 w, f_2 w \in \mathbb{C}[x_I]$ là tổng quát có giá $\mathscr{H}_w$ và u_1, u_2 cũng tổng quát nên ta không có $f_1(u_I) = f_2(u_I) = 0$. Do đó $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w$ không có nghiệm khi $v_k < 0$.

Trường hợp 2.2.

Giả sử rằng $v_k > 0$. Khi đó hệ con của $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w$ bao gồm f_1w, f_2w và các phương trình có chỉ số trong I là

$$\begin{cases} f_{1w} = -\lambda_1 \partial_i (f_{1w}) = 0 \\ f_{2w} = -\lambda_2 \partial_i (f_{2w}) = 0 \end{cases}, \text{ với } i \in I. \tag{2.19}$$

Vì $f_1w, f_2w \in \mathbb{C}[x_I]$, hệ (2.19) suy ra siêu mặt $\mathcal{V}_{(\mathbb{C}^\times)^I} f_{1,2w} \subset (\mathbb{C}^\times)^I$ là kì dị. Tuy nhiên, vì f_1w, f_2w tổng quát nên $\mathcal{V}_{(\mathbb{C}^\times)^I}(f_{1,2w})$ phải trơn. Do đó $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w$ không có nghiệm khi $v_k > 0$.

Trường hợp 2.3.

Khi $v_k = 0$, hệ con của $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w$ bao gồm f_1w, f_2w và các phương trình có chỉ số I:

$$u_i - x_i - \lambda_1 \partial_i (f_{1w}) - \lambda_2 \partial_i (f_{2w}) = 0 \text{ với } i \in I.$$

Đây là hệ $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w$ trong $\mathbb{C}_\lambda \times \mathbb{C}^I$ cho các điểm tới hạn của khoảng cách Euclid từ $u_I \in \mathbb{C}^I$ đến $\mathcal{V}_{\mathbb{C}^I}(f_{1,2w}) \subset \mathbb{C}^I$. Do đó $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w$ là hệ tam giác (dạng ma trận tam giác); thật vậy:

Vì $\partial_j f_{1w} = \partial_j f_{2w} = 0$ với $j \in J$ nên các phương trình còn lại không phụ thuộc vào u_I và f_1w, f_2w.

Vì $\left(h^1\right)^* = \left(h^2\right)^* = 0$, nếu $a \in \mathscr{H} \backslash \mathscr{H}_w$, thì $w \cdot a > 0$. Nếu $a \in g_w$, thì $a_j = 0$ với $j \in J$ ta đã xác định $h_j^* = \min\{w \cdot a \mid a \in \partial_j \mathscr{H}\}$. Hơn nữa, nếu $a \in \partial_j \mathscr{H}$ thì $a + e_j \in \mathscr{H}$, nên suy ra $a + e_j \in \mathscr{H} \backslash \mathscr{H}_w$. Ta xét

$$\begin{aligned} & w \cdot (a + e_j) > 0 \\ \Rightarrow & w \cdot a + w \cdot e_j > 0 \\ \Rightarrow & w \cdot a > -w_j, \end{aligned}$$

suy ra rằng $h_j^* > -w_j$.
Khi $w_j \geqslant 0$ với mọi $j \in J$, ta thu được $h_j^* > 0$ với mọi $j \in J$. Do đó các phương trình (2.11), (2.12), (2.14), (2.15), (2.17), (2.18) không xảy ra do mâu thuẫn với $v_k + \left(h_j^k\right)^* = 0$ và $v_k = 0$ với $k = 1, 2$.

Trường hợp 3.
Cho $i \in I$ là một chỉ số với $w_i < 0$. Giả sử rằng hệ mặt $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w$ có nghiệm; nên phương trình (2.4) của $(u_1 - x_i - \lambda_1\partial_i f_1 - \lambda_2\partial_1 f_2)_w$ không xảy ra. Như vậy một trong bốn phương trình sau khả năng xảy ra

$$
\begin{aligned}
&(u_1 - x_i - \lambda_1\partial_i f_1 - \lambda_2\partial_i f_2)_w\,,\\
=&\begin{cases}
-x_i - (\lambda_1\partial_i f_1)_w & \text{nếu } w_i = v_1 + \left(h_i^1\right)^* < 0,\\
-x_i - (\lambda_2\partial_i f_2)_w & \text{nếu } w_i = v_2 + \left(h_i^2\right)^* < 0,\\
(-\lambda_1\partial_i f_1 - \lambda_2 f_2)_w & \text{nếu } v_1 + \left(h_i^1\right)^* = v_2 + \left(h_i^2\right)^* < 0 \text{ và } w_i,\\
-x_i - (\lambda_1\partial_1 f_1 + \lambda_2\partial_2 f_2)_w & \text{nếu } w_i = v_1 + \left(h_i^1\right)^* = v_2 + \left(h_i^2\right)^* < 0.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Vì

$$w_i > 0, \left(h_i^1\right)^* \leq w_i + v_1 < v_1$$

và

$$\left(h_i^2\right)^* \leq w_i + v_2 < v_2.$$

Theo Bổ đề 2.9, ta có

$$\left(h^1\right)^* = \left(h_i^1\right)^* + w_i \leq 2w_i + v_1 < v_1$$

và

$$\left(h^2\right)^* = \left(h_i^2\right)^* + w_i \leq 2w_i + v_2 < v_2.$$

Với mỗi $i \in I$, ta có

$$\begin{cases} \left(h_i^1\right)^* = \left(h^1\right)^* - w_i < v_1 - w_i, \\ \left(h_i^2\right)^* = \left(h^2\right)^* - w_i v_2 - w_i. \end{cases}$$

Vậy

$$\left(h_i^2\right)^* = \left(h^2\right)^* - w_i < v_2 - w_i.$$

Nếu $w_i \geq 0$,

thì

$$\left(h_i^1\right)^* < v_1, \left(h_i^2\right)^* < v_2.$$

Do đó, chỉ một trong bốn phương trình có khả năng xảy ra với $i \in I$.

Đó là

$$(\mathscr{L}_{f,u})_w = \begin{cases} -x_i - (\lambda_1 \partial_i f_1)\, w & \text{nếu } \left(h^1\right)^* = 2w_i + v_1 \text{ và } w_i < 0, \\ -x_i - (\lambda_2 \partial_i f_2)\, w & \text{nếu } \left(h^2\right)^* = 2w_i + v_2 \text{ và } w_i < 0, \\ (-\lambda_1 \partial_i f_1 - \lambda_2 \partial_i f_2)_w & \text{nếu } \begin{cases} \left(h^1\right)^* - w_i < \min\{v_1, w_i + v_1\}, \\ \left(h^2\right)^* - w_i < \min\{v_2, w_i + v_2\}, \end{cases} \\ -x_1 - (\lambda_1 \partial_i f_1 + \lambda_2 \partial_i \partial_2)_w & \text{nếu } \left(h^1\right)^* = \left(h^2\right)^* \text{ và } w_i < 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Trường hợp này tiếp tục chia I thành các tập hợp L và M, trong đó

$$L := \left\{ l \in I \mid \left(h^1\right)^* - w \leq \min\{v_1, w + v_1\}, \left(h^2\right)^* - w < \min\{v_2, w_l + v_2\} \right\}$$

và

$$M := \left\{ m \in I \mid \left(h^1\right)^* = 2w_m + v_1, \left(h^2\right)^* = 2w_m + v_2 \text{ và } w_m < 0 \right\}.$$

Với $l \in L$,

ta có

$$\lambda_1 \partial_l f_{1w} + \lambda_2 \partial_l f_{2w} = 0.$$

Suy ra rằng với $m \in M$, ta có

$$\begin{cases} \lambda_1 \partial_m f_1 + \lambda_2 \partial_m f_{2w} = -x_m, \\ \partial_m f_{1w} = \dfrac{-x_m}{\lambda_1}, \\ \partial_m f_{2w} = \dfrac{-x_m}{\lambda_2}. \end{cases}$$

Với $M = \varnothing$, thì $L = I$ và hệ con của $(\mathscr{L}, f_1, f_2, u)_w$ bao gồm f_{1w}, f_{2w} và phương trình (2.16) không có nghiệm như chúng ta đã thấy.

Với $M \neq \varnothing$, gọi $w' := \min\{w_i \mid i \in I\}$ thì $w' < 0$. Hơn nữa, từ hệ (2.20), nếu $m \in M$ thì ta có

$$w_m = \frac{1}{2}\left(h^1\right)^* - v_1 = \frac{1}{2}\left(h^2\right)^* - v_2.$$

Vậy, $w_m = w'$, với mỗi $m \in M$. Giả sử rằng $(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3)$ là nghiệm của $\left(\mathscr{L}_{f_1, f_2, u}\right)_w$.

Theo Bổ đề 2.10, ta thu được:

$$\left(h^1\right)^* \cdot f_{1w}(x) = \sum_{i\in I} w_i x_i \partial_i \left(f_1 w\right)(x) = \frac{-1}{\lambda_1} w' \sum_{m \in M} x_m^2,$$
$$\left(h^2\right)^* \cdot f_{2w}(x) = \sum_{i\in I} w_i x_i \partial_i \left(f_2 w\right) x = \frac{-1}{\lambda_2} w' \sum x_m^2.$$

Vì

$$\left(h^1\right)^* f_{1w}(x) = 0 = \left(h^2\right)^* f_2 w(x)$$

nên ta có

$$-\frac{1}{\lambda_1} w' \sum_{m\in M} x_m^2 = -\frac{1}{\lambda_2} w' \sum_{m\in M} x_m^2 = 0.$$

Vì

$$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0 \text{ và } w' \neq 0$$

nên ta có

$$\sum_{m\in M} x_m^2 = 0.$$

Gọi Q là dạng bậc hai này. Khi đó điểm x_I nằm trên cả $(f_1 w, f_2 w)$ và $\mathcal{V}(Q)$.

Vì

$$\partial_l f_{1w}(x_I) = \partial_l f_{2w}(x_I) = \partial_l Q = 0,$$

với $l \in L$ và

$$\begin{cases} 2\partial_m f_1 w(x_I) = \lambda_1 \partial_m Q \\ 2\partial_m f_2 w(x_I) = \lambda_2 \partial_m Q, \text{ với } m \in M \end{cases}$$

nên ta thấy rằng các siêu mặt giao không hoành tại x_I. Nhưng điều này mâu thuẫn với $f_1 w, f_2 w$ là tổng quát. Do đó, không có nghiệm nào cho hệ mặt $(\mathscr{L}_{f_1,f_2,u})_w = 0$. □

Định lý 2.13. *Cho hai đa thức $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$. Nếu giá $\mathscr{H}$ của các đa thức f_1, f_2 chứa 0 và f_1, f_2 đủ tổng quát và $u \in \mathbb{C}^3$ cũng tổng quát, thì*

$$EDD(f_1, f_2) = MV(P_1, P_2, P_{1'}, P_{2'}, P_{3'}),$$

trong đó P_1, P_2 là các đa diện Newton của f_1, f_2 và P_i' là các đa diện Newton của

$$u_i - x_i - \lambda_1 \partial_i f_1 - \lambda_2 \partial_i f_2,$$

với $i = 1, 2, 3$.

Chứng minh. Vì

$$\mathscr{L}_{f,u}(\lambda, x) = 0$$

có hữu hạn điểm tới hạn và nằm trong $(\mathbb{C}^\times)^5$ nên theo Định lý 2.1 khi $m = 5$, số điểm tới hạn của $\mathscr{L}_{f_1,f_2,u}(\lambda, x) = 0$ nhỏ hơn hoặc bằng $MV(P_1, P_2, P_{1'}, P_{2'}, P_{3'})$. Chúng ta sử dụng Định lý 2.2khi

$$G = \mathscr{L}_{f_1,f_2,u}$$

và

$$m = 5.$$

Điều này chỉ ra rằng đối với hai đa thức tổng quát f_1, f_2 thì tất cả các nghiệm của $\mathscr{L}_{f_1,f_2,u}(\lambda, x) = 0$ nằm trong $(\mathbb{C}^{\times})^5$.

Tuy nhiên theo Định lý 2.12, hệ mặt $\mathscr{L}_{f_1,f_2,u}(\lambda, x) = 0$ không có nghiệm trong $(\mathbb{C}^{\times})^5$. Trong trường hợp này, số điểm tới hạn của hệ $\mathscr{L}_{f_1,f_2,u}(\lambda, x) = 0$ là $MV\left(P_1, P_2, P_{1'}, P_{2'}, P_{3'}\right)$.
Trong khi số nghiệm của hệ $\mathscr{L}_{f_1,f_2,u}(\lambda, x) = 0$ bằng bậc khoảng cách Euclid nên ta thu được

$$EDD\left(f_1, f_2\right) = MV\left(P_1, P_2, P_1', P_2', P_3'\right).$$

$\square$

KẾT LUẬN

Luận văn nghiên cứu bậc khoảng cách Euclid của các tập đại số, cụ thể, đó là số điểm tới hạn phức của hàm khoảng cách từ một điểm cho trước đến tập đại số đang xét. Trong luận văn này đã đưa ra một chặn trên cho bậc khoảng cách Euclid của một đường cong trong không gian $\mathbb{R}^3$ theo đa diện Newton của các hàm đa thức có liên quan. Cụ thể hơn, chúng tôi chỉ ra rằng, bậc khoảng cách Euclid của một đường cong trong không gian $\mathbb{R}^3$ không vượt quá thể tích trộn của các đa diện Newton được xác định từ các hàm xác định đường cong đã cho. Kết quả mới này dựa trên ý tưởng của nghiên cứu trước đó về bậc khoảng cách Euclid của một siêu mặt đại số. Với các bước tiến đạt được trong luận văn này hy vọng rằng chúng tôi có thể đưa ra được kết quả tương tự cho một tập đại số bất kỳ theo đa diện Newton của các hàm thành phần.

Tài liệu tham khảo

[1] C. Aholt, B. Sturmfels and R. Thomas, 2013, *A Hilbert scheme in computer vision*, Canadian J. Mathematics 65, no. 5, 961–98.

[2] J. Draisma, E. Horobeţ, G. Ottaviani, B. Sturmfels, and R. R. Thomas, 2016, *The Euclidean distance degree of an algebraic variety* Found. Comput. Math., 16(1):99–149.

[3] R. Hartley, P. Sturm , 1997, *Triangulation, Computer Vision and Image Understanding* CIUV, 68(2): 146–157.

[4] Laurentiu G. Maxim, I. Rodriguez, and B. Wang, 2020, *Euclidean distance degree of the multiview variety*, SIAM J. Appl. Algebra Geometry, 4, no. 1, 28-48.

[5] H. Stewenius, F. Schaffalitzky, and D. Nister, 2005, *How hard is 3-view triangulation really*, in Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05), Vol. 1, pp. 686—693.

[6] J. Thomassen, P. Johansen, and T. Dokken, 2004, *Closest points, moving surfaces, and algebraic geometry, Mathematical methods for curves and surfaces*, Tromso, 351–362, Mod. Methods Math., Nashboro Press, Brentwood.

[7] L. Maxim, J. I. Rodriguez, and B. Wang, 2019, *Euclidean Distance Degree of ProjectiveVarieties*, Int.Math. Res. Not. IMRN.

[8] Breiding P., Sottile F., Woodcock J., 2022, *Euclidean distance degree and mixed volume* Found. Comput. Math. 22, no. 6, 1743–1765.

[9] Herbert Amann, Joachim Esche, 2008, *Analysis II*. Math. Birkhäuser Verlag.

[10] Steffens R., Theobald T., 2010, *Mixed volume techniques for embeddings of Laman graphs*. Comput. Geom. 43(2), 84–93.

[11] Bernstein D.N., 1975, *The number of roots of a system of equations*, Funkcional. Anal. i Priložen. 9(3), 1-4, MR0435072.

[12] Bernstein D.N., Kušnirenko A.G., Hovanskii A.G., 1976, *Newton polyhedra*, Uspehi Mat. Nauk 31(189), 201-202.