BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

ĐẶNG QUANG LONG

SỰ TỒN TẠI, DUY NHẤT NGHIỆM VÀ PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN BIÊN CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHI TUYẾN

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ NGÀNH TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 9 46 01 12

Hà Nội – 2024

Công trình được hoàn thành tại: Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. Nguyễn Đông Anh

Phản biện 1: PGS.TS. Đỗ Đức Thuận

Phản biện 2: GS.TSKH. Đinh Nho Hào

Phản biện 3: PGS.TS. Trần Đình Kế

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án tiến sĩ cấp Học viện tại Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi 14 giờ 00, ngày 02 tháng 02 năm 2024

Có thể tìm hiểu luận án tại:

1. Thư viện Học viện Khoa học và Công nghệ

2. Thư viện Quốc gia Việt Nam

Mở đầu

1. Tính cấp thiết của luận án

Nhiều bài toán trong vật lý, cơ học và nhiều lĩnh vực khác dẫn tới các bài toán biên đối với các phương trình vi phân cấp cao, phương trình vi-tích phân và phương trình vi phân hàm. Việc nghiên cứu các bài toán này về mặt định tính như sự tồn tại nghiệm, tính duy nhất và tính bội, tính dương, tính lồi/lõm và tính tuần hoàn của nghiệm cũng như các phương pháp tìm nghiệm luôn là sự quan tâm của các nhà toán học và các kỹ sư-các nhà ứng dụng. Người ta chỉ tìm được nghiệm chính xác của các bài toán này trong một số rất ít các trường hợp riêng khi phương trình và các điều kiện biên là tuyến tính và có dạng đơn giản. Còn nói chung người ta phải sử dụng các phương pháp gần đúng mà chủ yếu là các phương pháp số để tìm lời giải xấp xỉ đặc biệt là khi phương trình là phi tuyến.

Trong số các phương trình cấp cao thì phương trình cấp bốn đã được nghiên cứu rất nhiều cả về định tính và định lượng do chúng có rất nhiều ứng dụng. Một số luận án tiến sĩ về các bài toán biên phi tuyến cấp bốn đã được bảo vệ thành công trong thời gian gần đây tại Việt Nam như của Ngô Thị Kim Quy (2017), Nguyễn Thanh Hường (2019).

Ngoài phương trình cấp bốn thì phương trình cấp ba cũng được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm trong thời gian gần đây do chúng là mô hình toán học của nhiều bài toán trong công nghệ hóa học, lý thuyết truyền nhiệt, vật lý thiên văn,... Đối với phương trình vi phân cấp ba đầy đủ

$$u'''(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t)), \quad 0 < t < 1 \tag{1}$$

hoặc không đầy đủ với các điều kiện biên khác nhau đã có nhiều kết quả nghiên cứu về định tính như của Li & Li (2017), Yao & Feng (2002), Feng (2008), Hopkin & Kosmatov (2007), Bai (2008), Sun et al. (2014),... Bằng các phương pháp khác nhau như phương pháp nghiệm dưới và nghiệm trên, sử dụng các định lý điểm bất động Schauder, Krasnoselskii,... họ đã thiết lập được sự tồn tại nghiệm, tính dương và tính đơn điệu của nghiệm dưới các điều kiện phức tạp, khó kiểm tra. Và đặc biệt, trong các thí dụ họ không chỉ ra được nghiệm hoặc phương pháp tìm nghiệm khi mà sự tồn tại của nó được khẳng định sau khi kiểm tra các điều kiện phức tạp. Một số tác giả khác như Pandey (2016, 2017), Al-Said & Noor (2007), Danaf (2008), Khan & Sultana (2012), Lv & Gao (2017), He (2020) với giả thiết là các bài toán biên cho phương trình cấp ba phi tuyến có nghiệm duy nhất đã đề xuất các phương pháp giải như phương pháp sai phân trực tiếp các đạo hàm, sử dụng các hàm spline đa thức hoặc không đa thức, phương pháp chuỗi,...

Chúng tôi cho rằng việc nghiên cứu các điều kiện đủ dễ kiểm tra cho sự tồn tại và duy nhất nghiệm của các bài toán biên cho phương trình phi tuyến cấp ba là rất cần thiết. Việc xây dựng các phương pháp số hữu hiệu để tìm nghiệm của các bài toán này cũng cần thiết không kém.

Trong thời gian gần đây người ta cũng bắt đầu quan tâm nghiên cứu các phương trình phi tuyến cấp ba và cấp bốn với các điều kiện biên tích phân. Một số kết quả đã đạt được về sự tồn tại nghiệm của các bài toán với các điều kiện biên tích phân thuộc về Boucherif et al. (2009), Guo et al. (2012), Wang (2015), Benaicha (2016), Li et al. (2013),... Các phương trình vi-tích phân và các phương trình vi phân hàm cũng được quan tâm trong thời gian gần đây. Một số kết quả lý thú về sự tồn tại nghiệm và phương pháp giải các phương trình này đã đạt được bởi Aruchnan et al. (2015), Chen et al. (2015), Lakestania et al. (2010), Tahernezhad (2020), Wang (2020), Bica et al. (2016), Khuri & Sayfy (2018), Hou (2021),... Các điều kiện đủ để đảm bảo các kết quả này thường phức tạp và khó kiểm tra. Do vậy, việc nghiên cứu đề xuất cách tiếp cận thống nhất giải quyết các bài toán biên cho các loại phương trình trên cả về mặt định tính và định lượng dưới các điều kiện dễ kiểm tra là một yêu cầu cấp thiết.

Chính vì các lý do nêu trên chúng tôi chọn đề tài: *"Sự tồn tại, duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải một số bài toán biên cho phương trình vi phân phi tuyến"*.

2. Mục tiêu và phạm vi nghiên cứu của luận án

Mục tiêu của luận án là nghiên cứu sự tồn tại, duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải một số bài toán biên cho phương trình vi phân phi tuyến.

Phạm vi nghiên cứu của luận án là sự tồn tại, duy nhất nghiệm và phương pháp giải một số bài toán biên hai điểm cho phương trình cấp ba phi tuyến, các phương trình cấp ba và phương trình cấp bốn với điều kiện biên tích phân, phương trình vi tích phân cấp bốn và phương trình vi phân hàm cấp ba.

3. Nội dung và phương pháp nghiên cứu

Luận án nghiên cứu các nội dung sau đây:

1. Sự tồn tại, duy nhất nghiệm và phương pháp số giải một số bài toán biên hai điểm cho phương trình cấp ba phi tuyến.
2. Sự tồn tại, duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải phương trình cấp ba và phương trình cấp bốn phi tuyến với điều kiện biên tích phân.
3. Sự tồn tại, duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải phương trình vi tích phân cấp bốn và phương trình vi phân hàm cấp ba.

Luận án tiếp cận tới các nội dung trên từ cả hai góc độ lý thuyết và thực nghiệm, cụ thể là luận án nghiên cứu các khía cạnh lý thuyết của các bài toán như sự tồn tại, duy nhất nghiệm, một số tính chất như tính dương, tính đơn điệu của nghiệm và các phương pháp số tìm nghiệm của các bài toán. Phương pháp luận xuyên suốt luận án là đưa các bài toán về phương trình toán tử trong các không gian phù hợp, sử dụng định lý điểm bất động Banach để thiết lập sự tồn tại và duy nhất nghiệm và sự hội tụ của các phương pháp lặp ở mức liên tục, sau đó xây dựng các tương tự rời rạc của phương pháp lặp ở mức rời rạc. Các kết quả lý thuyết đều được minh họa bởi các thí dụ số.

4. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung của luận án gồm 4 chương:

Chương 1 trình bày các kiến thức bổ trợ bao gồm một số định lý điểm bất động; hàm Green đối với một số bài toán; và một số công thức cầu phương.. Các kiến thức cơ bản trong Chương 1 đóng vai trò rất quan trọng phục vụ cho việc trình bày các kết quả nghiên cứu trong các trong các Chương 2, 3 và 4.

Chương 2 gồm 2 mục. Mục 1 nghiên cứu sự tồn tại, duy nhất nghiệm và phương pháp lặp ở mức liên tục cho một số bài toán biên hai điểm của phương trình cấp ba phi tuyến đầy đủ. Mục 2 xây dựng một số phương pháp số hay tương tự rời rạc của phương pháp lặp ở mức liên tục cho một bài toán biên cấp ba phi tuyến.

Chương 3 giành cho việc nghiên cứu một số bài toán biên cho phương trình cấp ba và phương trình cấp bốn với điều kiện biên tích phân.

Chương 4 phát triển phương pháp luận của các chương trước cho phương trình vi-tích phân và phương trình vi phân hàm. Cụ thể là Mục 1 của chương nghiên cứu sự tồn tại, duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải một bài toán cho phương trình vi-tích phân cấp bốn và Mục 2 nghiên cứu sự tồn tại, duy nhất nghiệm và phương pháp số giải một bài toán biên cho phương trình vi phân hàm cấp ba.

5. Kết quả đạt được của luận án

Luận án đề xuất phương pháp nghiên cứu định tính và phương pháp lặp giải một số bài toán biên đối với phương trình vi phân cấp cao phi tuyến. Các kết quả chính đạt được là:

- Thiết lập được sự tồn tại, duy nhất và tính dương của nghiệm của các bài toán biên phi tuyến cấp ba dưới các điều kiện dễ kiểm tra và xây dựng phương pháp số hữu hiệu tìm chúng.
- Đề xuất phương pháp nghiên cứu định tính và phương pháp lặp giải các bài toán biên phi tuyến cho phương trình cấp ba và cấp bốn với các điều kiện biên tích phân.
- Chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm và xây dựng phương pháp số hữu hiệu giải phương trình vi-tích phân cấp bốn và phương trình vi phân hàm cấp ba.

Luận án được viết trên cơ sở các bài báo [AL1]-[AL6] trong danh mục các công trình đã công bố của luận án.

Chương 1

Kiến thức bổ trợ

Chương này trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết cho các chương tiếp theo được tham khảo từ các tài liệu Zeidler (1986), Melnikov và cộng sự (2012), Burden and Faires (2011). Nội dung của chương này bao gồm:

1. Các định lý điểm bất động Schauder và Banach.
2. Hàm Green.
3. Một số công thức cầu phương.

Chương 2

Sự tồn tại duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải một số bài toán biên cho phương trình cấp ba phi tuyến

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm và phương pháp lặp ở mức liên tục và mức rời rạc giải một số bài toán biên hai điểm cho phương trình cấp ba đầy đủ phi tuyến.

2.1 Sự tồn tại nghiệm và phương pháp lặp ở mức liên tục giải một số bài toán biên cho phương trình vi phân phi tuyến cấp ba

Xét bài toán biên

$$\begin{aligned} &u'''(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t)), \quad 0 < t < 1 \\ &B_1[u] = B_2[u] = B_3[u] = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

trong đó $B_1[u], B_2[u], B_3[u]$ là các toán tử điều kiện biên

$$\begin{aligned} B_1[u] &= \alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) + \gamma_1 u''(0), \\ B_2[u] &= \alpha_2 u(0) + \beta_2 u'(0) + \gamma_2 u''(0), \\ B_3[u] &= \alpha_3 u(1) + \beta_3 u'(1) + \gamma_3 u''(1), \end{aligned} \tag{2.2}$$

thỏa mãn điều kiện

$$Rank \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = 3.$$

Ký hiệu $G(t,s)$ là hàm Green của bài toán trên (hay của toán tử $u'''(t) = 0$), $G_1(t,s), G_2(t,s)$ là các đạo hàm cấp một và cấp hai theo t của $G(t,s)$, $G_0(t,s) = G(t,s)$ và

$$M_i = \max_{0 \le t \le 1} \int_0^1 |G_i(t,s)| ds,\ i = 0, 1, 2. \tag{2.3}$$

Đối với mỗi số $M > 0$ định nghĩa miền

$$\mathcal{D}_M = \{(t,x,y,z)|\ 0 \le t \le 1,\ |x| \le M_0 M,\ |y| \le M_1 M,\ |z| \le M_2 M\}.$$

Định lý 2.1.2 (Sự tồn tại nghiệm). *Giả sử tồn tại số $M > 0$ sao cho hàm $f(t,x,y,z)$ liên tục và giới nội bởi M trong miền $\mathcal{D}_M$, tức là,*

$$|f(t,x,y,z)| \le M \tag{2.4}$$

với mọi $(t,x,y,z) \in \mathcal{D}_M$.

Khi đó bài toán (2.1) có nghiệm $u(t)$ thỏa mãn

$$|u(t)| \le M_0 M,\ |u'(t)| \le M_1 M,\ |u''(t)| \le M_2 M \text{ với mọi } 0 \le t \le 1. \tag{2.5}$$

Định lý được chứng minh nhờ việc đưa bài toán về phương trình toán tử $A\varphi = \varphi$, trong đó toán tử A được xác định như sau

$$(A\varphi)(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t)), \tag{2.6}$$

với $u(t)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} &u'''(t) = \varphi(t), \quad 0 < t < 1 \\ &B_1[u] = B_2[u] = B_3[u] = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Giả sử rằng $G(x,t)$ và $G_1(x,t)$ không đổi dấu trong hình vuông $Q = [0,1]^2$. Đối với hàm $H(x,t)$ xác định và không đổi dấu trong Q ta ký hiệu

$$\sigma(H) = sign(H(t,s)) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } H(t,s) \ge 0, \\ -1, & \text{nếu } H(t,s) < 0. \end{cases}$$

Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm dương của bài toán (2.1) ta đưa vào ký hiệu

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_M^+ = \{(t,x,y,z)|\ &0 \le t \le 1,\ 0 \le x \le M_0 M, \\ &0 \le \sigma(G)\sigma(G_1) y \le M_1 M,\ |z| \le M_2 M\}, \end{aligned}$$

$$S_M = \{\varphi \in C[0,1]|\ 0 \le \sigma(G)\varphi \le M\}.$$

Định lý 2.1.3 (Sự tồn tại nghiệm dương). *Giả sử tồn tại số $M > 0$ sao cho hàm $f(t,x,y,z)$ liên tục và*

$$0 \le \sigma(G) f(t,x,y,z) \le M \tag{2.8}$$

đối với mọi $(t,x,y,z) \in \mathcal{D}_M^+$. Khi đó bài toán (2.1) có nghiệm đơn điệu không âm $u(t)$ thỏa mãn

$$0 \le u(t) \le M_0 M,\ 0 \le \sigma(G)\sigma(G_1) u'(t) \le M_1 M,\ |u''(t)| \le M_2 M. \tag{2.9}$$

Định lý 2.1.4 (Sự tồn tại và duy nhất nghiệm). *Giả sử rằng tồn tại các số $M, L_0, L_1,\ L_2 \ge 0$ sao cho*

$$|f(t,x,y,z)| \le M,$$

$$|f(t,x_2,y_2,z_2) - f(t,x_1,y_1,z_1)| \ \le\ L_0|x_2 - x_1| + L_1|y_2 - y_1| + L_2|z_2 - z_1| \tag{2.10}$$

đối với mọi $(t,x,y,z),(t,x_i,y_i,z_i)\in \mathcal{D}_M$ $(i=1,2)$ *và*

$$q := L_0M_0 + L_1M_1 + L_2M_2 < 1. \tag{2.11}$$

Khi đó bài toán (2.1) *có nghiệm duy nhất* $u(t)$ *sao cho* $|u(t)| \le M_0M$, $|u'(t)| \le M_1M$, $|u''(t)| \le M_2M$ *với mọi* $0\le t\le 1$.

Để giải bài toán (2.1) chúng tôi đề xuất phương pháp lặp sau đây:

1. Cho xấp xỉ ban đầu $\varphi_0 \in B[0,M]$, chẳng hạn
$$\varphi_0(t) = 0. \tag{2.12}$$

2. Biết φ_k $(k=0,1,...)$ tính
$$\begin{aligned} u_k(t) &= \int_0^1 G(t,s)\varphi_k(s)\,ds, \quad y_k(t) = \int_0^1 G_1(t,s)\varphi_k(s)\,ds,\\ z_k(t) &= \int_0^1 G_2(t,s)\varphi_k(s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.13}$$

3. Cập nhật xấp xỉ mới
$$\varphi_{k+1}(t) = f(t,u_k(t),y_k(t),z_k(t)). \tag{2.14}$$

Đặt
$$p_k = \frac{q^k}{1-q}\|\varphi_1-\varphi_0\|. \tag{2.15}$$

Định lý 2.1.6 (Hội tụ)**.** *Dưới các giả thiết của Định lý 2.1.4 phương pháp lặp trên hội tụ và có đánh giá*

$$\|u_k-u\| \le M_0p_k, \quad \|u_k'-u'\| \le M_1p_k, \quad \|u_k''-u''\| \le M_2p_k, \tag{2.16}$$

trong đó u *là nghiệm đúng của bài toán* (2.1), *và* M_0,M_1,M_2 *được cho bởi* (2.3).

Để minh họa các kết quả lý thuyết chúng tôi xét bài toán (2.1) với nhiều trường hợp riêng của các điều kiện biên. Các bài toán với các điều kiện biên này đã được xét bởi Yao & Feng (2002), Feng & Liu (2005), Hopkins & Kosmatov (2007), Li & Li (2017), Bai (2008). Áp dụng lý thuyết của chúng tôi vào các thí dụ trong các bài báo của các tác giả nêu trên thường cho kết quả tốt hơn về định tính như thiết lập được tồn tại và duy nhất nghiệm trong khi các tác giả khác chỉ kết luận được về sự tồn tại của nghiệm và các đánh giá về nghiệm của chúng tôi tốt hơn.

2.2 Phương pháp số giải một số bài toán biên cho phương trình cấp ba phi tuyến

Trong mục này chúng tôi xây dựng phương pháp lặp rời rạc có độ chính xác cấp hai và phương pháp lặp rời rạc có độ chính xác cấp ba cho bài toán

$$\begin{aligned} &u^{(3)}(t) = f(t,u(t),u'(t),u''(t)), \quad 0<t<1,\\ &u(0)=0, u'(0)=0, u'(1)=0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Đây là một trường hợp riêng của bài toán tổng quát (2.1). Phương pháp lặp ở mức liên tục giải bài toán này đã được mô tả ở cuối mục trên. Để xây dựng các phương pháp lặp rời rạc tương ứng tức là thể hiện số của phương pháp lặp mức liên tục chúng tôi phủ khoảng $[0,1]$ bởi lưới điểm $\bar{\omega}_h = \{t_i = ih,\ h = 1/N, i = 0, 1, ..., N\}$ và ký hiệu bởi $\Phi_k(t), U_k(t), Y_k(t), Z_k(t)$ các hàm lưới xác định trên lưới $\bar{\omega}_h$ và xấp xỉ các hàm $\varphi_k(t), u_k(t), y_k(t), z_k(t)$ trên lưới, tương ứng.

Đầu tiên xét phương pháp lặp rời rạc thứ nhất được gọi là **Phương pháp 1**:

1. Cho trước
$$\Phi_0(t_i) = f(t_i, 0, 0, 0),\ i = 0, ..., N. \tag{2.18}$$

2. Biết $\Phi_k(t_i),\ k = 0, 1, ...;\ i = 0, ..., N$, tính gần đúng các tích phân (2.13) bởi công thức hình thang
$$\begin{aligned} U_k(t_i) &= \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G_0(t_i, t_j)\Phi_k(t_j), \quad Y_k(t_i) = \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G_1(t_i, t_j)\Phi_k(t_j), \\ Z_k(t_i) &= \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G_2^*(t_i, t_j)\Phi_k(t_j),\ i = 0, ..., N, \end{aligned} \tag{2.19}$$
với
$$\rho_j = \begin{cases} 1/2,\ j = 0, N \\ 1,\ j = 1, 2, ..., N-1 \end{cases},\quad G_2^*(t,s) = \begin{cases} s, & 0 \le s < t \le 1, \\ s - 1/2, & s = t, \\ s - 1, & 0 \le t < s \le 1. \end{cases} \tag{2.20}$$

3. Cập nhật
$$\Phi_{k+1}(t_i) = f(t_i, U_k(t_i), Y_k(t_i), Z_k(t_i)). \tag{2.21}$$

Định lý 2.2.6 (Sai số)**.** *Đối với nghiệm xấp xỉ của bài toán* (2.17) *nhận được bởi phương pháp lặp rời rạc* (2.18)-(2.21) *trên lưới* $\bar{\omega}_h$ *ta có các đánh giá sau*
$$\begin{aligned} &\|U_k - u\| \le M_0 p_k + O(h^2),\ \|Y_k - u'\| \le M_1 p_k + O(h^2), \\ &\|Z_k - u''\| \le M_2 p_k + O(h^2), \end{aligned}$$
trong đó $M_0 = \frac{1}{12}, M_1 = \frac{1}{8}, M_2 = \frac{1}{2}$ *và* p_k *được xác định bởi* (2.15).

Tiếp theo, xét phương pháp lặp rời rạc thứ hai, gọi là **Phương pháp 2**. Các bước của phương pháp này cũng giống như của **Phương pháp 1** với sự khác biệt cơ bản trong bước 2 và số nút lưới là số chẵn $N = 2n$. Cụ thể là
2': Biết $\Phi_k(t_i),\ k = 0, 1, ...;\ i = 0, ..., N$, tính gần đúng các tích phân theo công thức Simpson hiệu chỉnh
$$U_k(t_i) = F(G_0(t_i, .)\Phi_k(.)),\ Y_k(t_i) = F(G_1(t_i, .)\Phi_k(.)),\ Z_k(t_i) = F(G_2^*(t_i, .)\Phi_k(.)),$$

trong đó

$$F(G_l(t_i,.)\Phi_k(.)) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G_l(t_i,t_j)\Phi_k(t_j) + \dfrac{h}{6}\Big(G_l(t_i,t_{i-1})\Phi_k(t_{i-1}) \\ \quad -2G_l(t_i,t_i)\Phi_k(t_i) + G_l(t_i,t_{i+1})\Phi_k(t_{i+1})\Big) \ \text{nếu } i \text{ lẻ },\\ \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G_l(t_i,t_j)\Phi_k(t_j) \ \ \text{nếu } i \text{ chẵn },\ l=0,1;\ i=0,1,...,N, \end{cases}$$

$$\rho_j = \begin{cases} 1/3, \ j=0,N \\ 4/3, \ j=1,3,...,N-1 \\ 2/3, \ j=2,4,...,N-2, \end{cases}$$

$F(G_2^*(t_i,.)\Phi_k(.))$ được tính như $F(G_l(t_i,.)\Phi_k(.))$ ở trên, trong đó G_l được thay bởi G_2^* xác định bởi công thức (2.20).

Định lý 2.2.9 (Sai số). *Giả thiết rằng hàm vế phải $f(t,x,y,z)$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp 4 trong miền $\mathcal{D}_M$. Khi đó đối với nghiệm xấp xỉ của bài toán* (2.17) *nhận được bởi* **Phương pháp 2** *trên lưới đều với bước lưới h ta có các đánh giá*

$$\|U_k - u\| \le M_0 p_k + O(h^3),\ \|Y_k - u'\| \le M_1 p_k + O(h^3),$$
$$\|Z_k - u''\| \le M_2 p_k + O(h^3),$$

Để minh chứng cho hiệu quả của các phương pháp lặp rời rạc ở trên chúng tôi đã tiến hành nhiều thực nghiệm tính toán trên các thí dụ mà nghiệm chính xác được biết trước hoặc không biết trước. Sau đây là một thí dụ tiêu biểu.

Thí dụ 2.2.1. (Pandey 2016) Xét bài toán

$$\begin{aligned} &u'''(x) = x^4 u(x) - u^2(x) + g(x),\ 0 < x < 1,\\ &u(0) = 0,\ u'(0) = -1,\ u'(1) = \sin(1), \end{aligned} \tag{2.22}$$

trong đó $g(x) = -3\sin(x) - \cos(x)(x-1) - x^4(x-1)\sin(x) + (x-1)^2\sin^2(x)$. Nghiệm chính xác của bài toán là $u^*(x) = (x-1)\sin(x)$. Quá trình lặp được thực hiện cho đến khi $\|\Phi_{k+1} - \Phi_k\| \le TOL$, TOL là độ chính xác cho trước. Kết quả về hội tụ của các phương pháp lặp được cho trong Bảng 2.1 dưới đây. Trong bảng

Bảng 2.1: Sự hội tụ trong Thí dụ 1 đối với $TOL = 10^{-10}$

N	K	$Error_{trap}$	$Order$	$Error_{Simp}$	$Order$
8	7	9.9235e-04		9.7222e-04	
16	7	2.4732e-04	2.0045	1.3187e-04	2.8822
32	7	6.1782e-05	2.0011	1.6896e-05	2.9643
64	7	1.5443e-05	2.0003	2.1301e-06	2.9877
128	7	3.8605e-06	2.0001	2.6774e-07	2.9923
256	7	9.6511e-07	2.0000	3.3544e-08	2.9965
512	7	2.4128e-07	2.0000	4.1977e-09	2.9984

này $N+1$ là số nút lưới, K là số bước lặp, $Error_{trap}$, $Error_{Simp}$ là các sai số

$\|U_K - u^*\|$ của **Phương pháp 1** và **Phương pháp 2**, $Order$ là cấp hội tụ thực tế được tính theo công thức

$$Order = \log_2 \frac{\|U_K^{N/2} - u^*\|}{\|U_K^N - u^*\|},$$

các chỉ số trên $N/2$ và N của U_K có nghĩa rằng U_K được tính trên lưới với các số nút tương ứng.

Chú ý rằng Pandey sử dụng phương pháp lặp để giải hệ phương trình đại số phi tuyến sau khi rời rạc hóa bài toán biên bằng phương pháp sai phân. Quá trình lặp được thực hiện cho đến khi $\|U_{k+1} - U_k\| \leq 10^{-10}$. Số lần lặp không được báo cáo. Độ chính xác của nghiệm gần đúng cho một số N được cho trong Bảng 2.2.

Bảng 2.2: Kết quả của Pandey trong Thí dụ 1

N	8	16	32	64
Error	0.11921225e-01	0.33391170e-02	0.87742222e-03	0.23732412e-03

Ta thấy rằng các Phương pháp 1 và 2 chính xác hơn phương pháp của Pandey.

Chương 3

Sự tồn tại duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải phương trình vi phân phi tuyến với điều kiện biên tích phân

3.1 Sự tồn tại duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải phương trình cấp ba với điều kiện biên tích phân

Xét bài toán biên

$$u'''(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t)), \quad 0 < t < 1, \tag{3.1}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = \int_0^1 g(s)u(s)ds, \tag{3.2}$$

trong đó $f : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+, g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$.

Cũng như đối với các bài toán trong chương trước, chúng tôi đưa bài toán (3.1)-(3.2) về phương trình toán tử và nghiên cứu bài toán thông qua phương trình toán tử này. Để làm việc này xét không gian $\mathcal{B}$ các cặp $w = (\varphi, \alpha)^T$, trong đó $\varphi \in C[0,1], \alpha \in \mathbb{R}$, tức là đặt $\mathcal{B} = C[0,1] \times \mathbb{R}$, và trang bị chuẩn

$$\|w\|_{\mathcal{B}} = \max(\|\varphi\|, k|\alpha|), \tag{3.3}$$

trong đó $\|\varphi\| = \max_{0 \le t \le 1} |\varphi(t)|$, k là một số, $k \ge 1$.
Định nghĩa toán tử $A : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ bởi công thức

$$Aw = \begin{pmatrix} f(t, u(t), u'(t), u''(t) \\ \int_0^1 g(s)u(s)ds \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

trong đó $u(t)$ là nghiệm của bài toán

$$u'''(t) = \varphi(t), \quad 0 < t < 1, \tag{3.5}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \, u(1) = \alpha. \tag{3.6}$$

Có thể chứng minh rằng việc tìm nghiệm của bài toán biên (3.1)-(3.2) tương đương với việc tìm điểm bất động của toán tử A.

Ký hiệu $G_0(t,s)$ là hàm Green của bài toán (3.5)-(3.6) và $G_1(t,s), G_2(t,s)$ là các đạo hàm cấp 1 và cấp 2 theo t của $G_0(t,s)$, và

$$M_i = \max_{0\le t\le 1}\int_0^1 |G_i(t,s)|ds, \quad i=0,1,2.$$

Ta có $M_0 = \frac{2}{81}, M_1 = \frac{1}{18}, M_2 = \frac{2}{3}$. Với $M>0$ ký hiệu

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_M = \{(t,x,y,z) \mid 0\le t\le 1,\ |x| \le (M_0 + \frac{1}{k})M, \\ |y| \le (M_1+\frac{2}{k})M,\ |z|\le (M_2+\frac{2}{k})M\}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Tiếp theo, ký hiệu

$$C_0 = \int_0^1 g(s)ds,\ C_2 = \int_0^1 s^2 g(s)ds. \tag{3.8}$$

Định lý 3.1.1 (Sự tồn tại nghiệm)**.** *Giả sử rằng hàm $f(t,x,y,z)$ liên tục và giới nội bởi M trong $\mathcal{D}_M$, tức là,*

$$|f(t,x,y,z)| \le M \quad \textit{trong } \mathcal{D}_M \tag{3.9}$$

và

$$q_1 := kC_0M_0 + C_2 \le 1. \tag{3.10}$$

Khi đó bài toán (3.1)-(3.2) *có nghiệm.*

Định lý 3.1.3 (Sự tồn tại duy nhất nghiệm)**.** *Giả sử tồn tại các số $M > 0, L_0, L_1, L_2 \ge 0$ sao cho*

(H1) $|f(t,x,y,z)| \le M,\ \forall (t,x,y,z) \in \mathcal{D}_M$.

(H2) $|f(t,x_2,y_2,z_2) - f(t,x_1,y_1,z_1)| \le L_0|x_2-x_1| + L_1|y_2-y_1| + L_2|z_2-z_1|,\ \forall (t,x_i,y_i,z_i)\in\mathcal{D}_M,\ i=1,2.$

(H3) $q := \max\{q_1,q_2\} < 1$, *với* $q_1 = kC_0M_0 + C_2$ *được xác định bởi* (3.10) *và*

$$q_2 = L_0(M_0+\frac{1}{k}) + L_1(M_1+\frac{2}{k}) + L_2(M_2+\frac{2}{k}). \tag{3.11}$$

Khi đó bài toán (3.1)-(3.2) *có nghiệm duy nhất* $u\in C^3[0,1]$.

Mục này cũng thiết lập điều kiện tồn tại, duy nhất của nghiệm dương.
Phương pháp lặp:

1. Cho trước $w_0 = (\varphi_0, \alpha_0)^T \in B[0,M]$, chẳng hạn,

$$\varphi_0(t) = f(t,0,0,0),\ \alpha_0 = 0.$$

2. Biết $\varphi_n(t)$ and $\alpha_n(t)$ $(n = 0, 1, ...)$, tính

$$u_n(t) = \int_0^1 G(t,s)\varphi_n(s)ds + \alpha_n t^2, \quad y_n(t) = \int_0^1 G_1(t,s)\varphi_n(s)ds + 2\alpha_n t,$$
$$z_n(t) = \int_0^1 G_2(t,s)\varphi_n(s)ds + 2\alpha_n.$$

3. Cập nhật

$$\varphi_{n+1}(t) = f(t, u_n(t), y_n(t), z_n(t)), \quad \alpha_{n+1} = \int_0^1 g(s)u_n(s)ds.$$

Định lý 3.1.5. *Dưới các giả thiết của Định lý 3.1.3 phương pháp lặp trên hội tụ, và có đánh giá nghiệm xấp xỉ $u_n(t)$ và các đạo hàm của nó*

$$\|u_n - u\| \leq \left(M_0 + \frac{1}{k}\right) p_n d, \ \|u_n^{(i)} - u^{(i)}\| \leq \left(M_i + \frac{2}{k}\right) p_n d, \ i = 1, 2,$$

trong đó $p_n = \frac{q^n}{1-q}, \ d = \|w_1 - w_0\|_{\mathcal{B}}, \ w_1 = (\varphi_1, \alpha_1)^T.$

Nhiều thí dụ khi biết trước nghiệm chính xác và khi không có thông tin về nghiệm của bài toán được đưa ra để minh họa cho khả năng áp dụng của lý thuyết và hiệu quả của phương pháp lặp. Ở đây chúng tôi chỉ đưa ra một thí dụ khi không có thông tin gì về nghiệm.

Thí dụ 3.1.4. Xét bài toán

$$u'''(t) = -(u^2 e^u + \frac{1}{5}\sin(u') + \frac{1}{8}\cos(u'') + 1), \quad 0 < t < 1,$$
$$u(0) = u'(0) = 0, \ u(1) = \int_0^1 s^4 u(s)ds.$$

Với $M = 1.7, k = 4$ kiểm tra được các điều kiện bảo đảm bài toán có nghiệm dương duy nhất. Nghiệm này tìm được bằng phương pháp lặp, trong đó các tích phân tính bằng công thức hình thang và sau 6 lần lặp đạt được độ lệch giữa hai xấp xỉ liên tiếp nhỏ hơn 10^{-4}.

3.2 Sự tồn tại duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải phương trình cấp bốn với điều kiện biên tích phân

Xét bài toán biên

$$u''''(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)), \quad 0 < t < 1, \tag{3.12}$$

$$u'(0) = u''(0) = u'(1) = 0, \ u(0) = \int_0^1 g(s)u(s)ds, \tag{3.13}$$

trong đó $f : [0,1] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^+,\ g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ là các hàm liên tục.

Tương tự như trong mục trước, chúng tôi xét không gian $\mathcal{B} = C[0,1] \times \mathbb{R}$ của các cặp $w = (\varphi, \mu)^T$, $\varphi \in C[0,1], \mu \in \mathbb{R}$, và trang bị chuẩn

$$\|w\|_{\mathcal{B}} = \max(\|\varphi\|, r|\mu|),\ r \geq 1 \tag{3.14}$$

và định nghĩa toán tử A bởi công thức

$$Aw = \begin{pmatrix} f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \\ \int_0^1 g(s)u(s)ds \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

trong đó $u(t)$ là nghiệm của bài toán

$$u''''(t) = \varphi(t), \quad 0 < t < 1, \tag{3.16}$$

$$u'(0) = u''(0) = u'(1) = 0,\ u(0) = \mu. \tag{3.17}$$

Ký hiệu $G_0(t,s)$ là hàm Green của bài toán này và $G_i(t,s), i = 1,2,3$ là các đạo hàm cấp i theo t của $G_0(t,s)$, và

$$M_i = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |G_i(t,s)|ds, \quad i = 0,1,2,3.$$

Ta có $M_0 = 0.0139, M_1 = 0.0247, M_2 \leq 0.1883, M_3 = 1.3333$.
Ta cũng định nghĩa

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_M = \{(t,u,y,v,z) \mid 0 \leq t \leq 1,\ |u| \leq (M_0 + \tfrac{1}{r})M, \\ |y| \leq M_1 M,\ |v| \leq M_2 M,\ |z| \leq M_3 M\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

và ký hiệu

$$C_0 = \int_0^1 g(s)ds > 0. \tag{3.19}$$

Định lý 3.2.3 (Sự tồn tại duy nhất nghiệm). *Giả sử rằng tồn tại các số $M > 0, L_0, L_1, L_2, L_3 \geq 0$ sao cho*

1. $|f(t,u,y,v,z)| \leq M,\ \forall (t,u,y,v,z) \in \mathcal{D}_M$.
2. $|f(t,u_2,y_2,v_2,z_2) - f(t,u_1,y_1,v_1,z_1)| \leq L_0|u_2 - u_1| + L_1|y_2 - y_1| + L_2|v_2 - v_1| + L_3|z_2 - z_1|,\ \forall (t,u_i,y_i,v_i,z_i) \in \mathcal{D}_M,\ i = 1,2.$
3. $q := \max\{q_1, q_2\} < 1$, *với* $q_1 = rC_0M_0 + C_0$ *và*

$$q_2 = L_0(M_0 + \tfrac{1}{r}) + L_1M_1 + L_2M_2 + L_3M_3.$$

Khi đó bài toán có nghiệm duy nhất $u \in C^4[0,1]$.

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm dương cũng được thiết lập.
Phương pháp lặp ở mức liên tục:

1. Cho trước

$$\varphi_0(t) = f(t,0,0,0,0),\ \mu_0 = 0. \tag{3.20}$$

2. Biết $\varphi_k(t)$ and μ_k $(k = 0, 1, ...)$ tính

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \int_0^1 G_0(t,s)\varphi_k(s)ds + \mu_k, \quad & y_k(t) &= \int_0^1 G_1(t,s)\varphi_k(s)ds, \\ v_k(t) &= \int_0^1 G_2(t,s)\varphi_k(s)ds, & z_k(t) &= \int_0^1 G_3(t,s)\varphi_k(s)ds. \end{aligned} \tag{3.21}$$

3. Cập nhật

$$\varphi_{k+1}(t) = f(t, u_k(t), y_k(t), v_k(t), z_k(t)), \quad \mu_{k+1} = \int_0^1 g(s)u_k(s)ds. \tag{3.22}$$

Định lý 3.2.5 (Hội tụ)**.** *Phương pháp lặp (3.20)-(3.22) hội tụ và đối với nghiệm xấp xỉ $u_k(t)$ có các đánh giá*

$$\begin{aligned} &\|u_k - u\| \le \left(M_0 + \frac{1}{r}\right) p_k d, \ \|u_k' - u'\| \le M_1 p_k d, \\ &\|u_k'' - u''\| \le M_2 p_k d, \ \|u_k''' - u'''\| \le M_3 p_k d. \end{aligned}$$

trong đó u là nghiệm chính xác của bài toán (3.12)-(3.13), $p_k = \frac{q^k}{1-q}, d = \|w_1 - w_0\|_{\mathcal{B}}$ và r là số trong (3.14).

Phương pháp lặp ở mức rời rạc:
Ký hiệu $\Phi_k(t), U_k(t), Y_k(t), V_k(t), Z_k(t)$ là các hàm lưới xác định trên lưới đều $\bar{\omega}_h = \{t_i = ih,\ h = 1/N, i = 0, 1, ..., N\}$ xấp xỉ các hàm $\varphi_k(t), u_k(t), y_k(t), v_k(t), z_k(t)$ và ký hiệu $\hat{\mu_k}$ là xấp xỉ của μ_k. Xét phương pháp lặp sau:

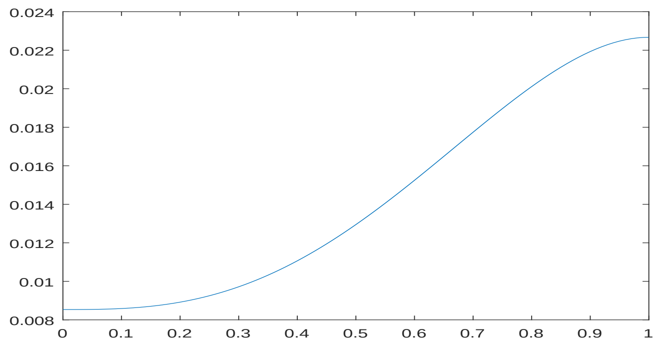
1. Cho trước
$$\Phi_0(t_i) = f(t_i, 0, 0, 0, 0),\ i = 0, ..., N; \quad \hat{\mu}_0 = 0.$$

2. Biết $\Phi_k(t_i),\ i = 0, ..., N$ and $\hat{\mu}_k$ $(k = 0, 1, ...)$ tính xấp xỉ các tích phân (3.21) theo công thức hình thang

$$\begin{aligned} U_k(t_i) &= \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G_0(t_i, t_j)\Phi_k(t_j) + \hat{\mu}_k, \quad & Y_k(t_i) &= \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G_1(t_i, t_j)\Phi_k(t_j), \\ V_k(t_i) &= \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G_2(t_i, t_j)\Phi_k(t_j), & Z_k(t_i) &= \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G_3^*(t_i, t_j)\Phi_k(t_j),\ i = 0, ..., N, \end{aligned}$$

trong đó $\rho_0 = \rho_N = 1/2; \rho_j = 1, j = 1, ..., N-1$ và

$$G_3^*(t,s) = \begin{cases} -(1-s)^2 + 1, & 0 \le s < t \le 1, \\ -(1-s)^2 + 1/2, & s = t, \\ -(1-s)^2, & 0 \le t < s \le 1. \end{cases}$$



Hình 3.1: Đồ thị nghiệm xấp xỉ trong Thí dụ 3.2.1

3. Cập nhật

$$\Phi_{k+1}(t_i) = f(t_i, U_k(t_i), Y_k(t_i), V_k(t_i), Z_k(t_i)), \quad \hat{\mu}_{k+1} = \sum_{j=0}^{N} h\rho_j g(t_j) U_k(t_j).$$

Định lý 3.2.9 (Sai số)**.** *Giả thiết rằng các điều kiện của Định lý 3.2.3 được thỏa mãn. Ngoài ra, giả thiết thêm rằng $f(t,u,y,v,z)$ có các đạo hàm liên tục đến cấp hai và $g(s) \in C^2[0,1]$. Khi đó, đối với nghiệm xấp xỉ của bài toán* (3.12), (3.13) *nhận được bằng phương pháp lặp rời rạc trên lưới đều với bước lưới h ta có các đánh giá*

$$\begin{aligned} &\|U_k - u\| \le \left(M_0 + \frac{1}{r}\right) p_k d + O(h^2),\ \|Y_k - u'\| \le M_1 p_k d + O(h^2), \\ &\|V_k - u''\| \le M_2 p_k d + O(h^2),\ \|Z_k - u'''\| \le M_3 p_k d + O(h^2). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Nhiều thí dụ khi biết trước nghiệm chính xác và khi không có thông tin về nghiệm của bài toán được đưa ra để minh họa cho khả năng áp dụng của lý thuyết và hiệu quả của phương pháp lặp. Ở đây chúng tôi chỉ đưa ra một thí dụ.

Thí dụ 3.2.3. (Benaicha & Haddouchi, 2016) Xét bài toán

$$\begin{aligned} &u''''(t) = -\sqrt{(1+u)} - \sin u, \quad 0 < t < 1, \\ &u'(0) = u''(0) = u'(1) = 0,\ u(0) = \int_0^1 su(s)ds. \end{aligned}$$

Áp dụng lý thuyết ở bên trên chúng tôi kết luận được rằng bài toán có nghiệm dương duy nhất, trong khi Benaicha & Haddouchi chỉ kết luận được rằng bài toán có nghiệm dương. Bằng phương pháp lặp rời rạc mô tả ở trên chúng tôi tìm được nghiệm gần đúng dương có đồ thị như trong Hình 3.1.

Chương 4

Sự tồn tại duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải phương trình vi-tích phân và phương trình vi phân hàm phi tuyến

4.1 Sự tồn tại duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải phương trình vi-tích phân phi tuyến

Trong mục này chúng tôi xét bài toán

$$\begin{aligned} u^{(4)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \int_0^1 k(x,t)u(t)dt), \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0,\ u''(0) = 0,\ u''(1) = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

trong đó hàm $f(x, u, v, z)$ và $k(x, t)$ là các hàm liên tục.
Sử dụng phương pháp luận như ở các chương trước chúng đưa vào trong không gian $C[0, 1]$ toán tử A bởi công thức

$$(A\varphi)(x) = f(x, u(x), u'(x), \int_0^1 k(x,t)u(t)dt), \tag{4.2}$$

trong đó $u(x)$ là nghiệm của bài toán biên

$$\begin{aligned} u'''' = \varphi(x),\ 0 < x < 1, \\ u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Cũng như trong các chương trước, việc nghiên cứu bài toán biên đưa về điểm bất động của toán tử A. Ký hiệu $G_0(t, s)$ là hàm Green của bài toán (4.3) và $G_1(t, s)$ là đạo hàm cấp một theo t của $G_0(t, s)$. Đặt

$$M_i = \max_{0 \le x \le 1} \int_0^1 |G_i(x,s)|ds, i = 0, 1, \quad M_2 = \max_{0 \le x \le 1} \int_0^1 |k(x,s)|ds \tag{4.4}$$

và định nghĩa

$$\mathcal{D}_M = \{(x, u, v, z) \mid 0 \le x \le 1,\ |u| \le M_0 M,\ |v| \le M_1 M,\ |z| \le M_0 M_2 M\}.$$

Định lý 4.1.1 (Sự tồn tại duy nhất nghiệm)**.** *Giả sử rằng hàm $k(x,t)$ liên tục trong hình vuông $[0,1]\times[0,1]$ và tồn tại các số $M>0$, $L_0, L_1, L_2 \geq 0$ sao cho:*

(i) *Hàm $f(x,u,v,z)$ liên tục trong miền $\mathcal{D}_M$ và $|f(x,u,v,z)| \leq M$, $\forall (x,u,v,z) \in \mathcal{D}_M$.*

(ii) $|f(x_2,u_2,v_2,z_2) - f(x_1,u_1,v_1,z_1)| \leq L_0|u_2-u_1| + L_1|v_2-v_1| + L_2|z_2-z_1|$, $\forall (x_i,u_i,v_i,z_i) \in \mathcal{D}_M,\ i=1,2.$

(iii) $q = L_0M_0 + L_1M_1 + L_2M_0M_2 < 1.$

Khi đó bài toán (4.1) có nghiệm duy nhất $u \in C^4[0,1]$ thỏa mãn $|u(x)| \leq M_0M$, $|u'(x)| \leq M_1M$ với mọi $0 \leq x \leq 1$.

Để nghiên cứu nghiệm dương của bài toán ta định nghĩa miền

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_M^+ = \{(x,u,v,z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq u \leq M_0M,\\ |v| \leq M_1M,\ |z| \leq M_0M_2M\}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

và ký hiệu

$$S_M = \{\varphi \in C[0,1], 0 \leq \varphi(x) \leq M\}.$$

Định lý 4.1.2 (Nghiệm dương)**.** *Giả sử hàm $k(x,t)$ liên tục trong miền $[0,1]\times[0,1]$ và tồn tại các số $M>0$, $L_0, L_1, L_2 \geq 0$ sao cho:*

(i) *Hàm $f(x,u,v,z)$ liên tục trong miền $\mathcal{D}_M^+$ và $0 \leq f(x,u,v,z) \leq M$, $\forall (x,u,v,z) \in \mathcal{D}_M^+$ and $f(x,0,0,0) \not\equiv 0$.*

(ii) $|f(x_2,u_2,v_2,z_2) - f(x_1,u_1,v_1,z_1)| \leq L_0|u_2-u_1| + L_1|v_2-v_1| + L_2|z_2-z_1|$, $\forall (x_i,u_i,v_i,z_i) \in \mathcal{D}_M^+,\ i=1,2.$

(iii) $q = L_0M_0 + L_1M_1 + L_2M_0M_2 < 1.$

Khi đó bài toán (4.1) có nghiệm dương duy nhất $u \in C^4[0,1]$ thỏa mãn $0 \leq u(x) \leq M_0M$, $|u'(x)| \leq M_1M$ với mọi $0 \leq x \leq 1$.

Phương pháp lặp

1. Cho trước
$$\varphi_0(x) = f(x,0,0,0). \tag{4.6}$$

2. Biết $\varphi_m(x)$ $(m=0,1,...)$ tính
$$\begin{aligned}&u_m(x) = \int_0^1 G_0(x,t)\varphi_m(t)dt, \quad v_m(x) = \int_0^1 G_1(x,t)\varphi_m(t)dt,\\ &z_m(x) = \int_0^1 k(x,t)u_m(t)dt.\end{aligned} \tag{4.7}$$

3. Cập nhật
$$\varphi_{m+1}(x) = f(x, u_m(x), v_m(x), z_m(x)). \tag{4.8}$$

Định lý 4.1.3. *Dưới các giả thiết của Định lý 4.1.1 phương pháp lặp* (4.6)-(4.8) *hội tụ và có các đánh giá*

$$\|u_m - u\| \leq M_0 p_m d, \ \|u'_m - u'\| \leq M_1 p_m d,$$

trong đó u là nghiệm chính xác của bài toán (4.1), $p_m = \frac{q^m}{1-q}, \ d = \|\varphi_1 - \varphi_0\|$..

Phương pháp lặp rời rạc

Ký hiệu $\Phi_m(x), U_m(x), V_m(x), Z_m(x)$ là các hàm lưới xác định trên lưới $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \ h = 1/N, i = 0, 1, ..., N\}$ các hàm $\varphi_m(x), u_m(x), v_m(x), z_m(x)$. Xét phương pháp lặp

1. Cho trước
$$\Phi_0(x_i) = f(x_i, 0, 0, 0), \ i = 0, ..., N. \tag{4.9}$$
2. Biết $\Phi_m(x_i), \ m = 0, 1, ...; \ i = 0, ..., N$, tính xấp xỉ các tích phân (4.7) theo công thức hình thang
$$U_m(x_i) = \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G_0(x_i, x_j)\Phi_m(x_j), \quad V_m(x_i) = \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G_1(x_i, x_j)\Phi_m(x_j),$$
$$Z_m(x_i) = \sum_{j=0}^{N} h\rho_j k(x_i, x_j) U_m(x_j), \ i = 0, ..., N, \tag{4.10}$$
trong đó ρ_j là các trọng số của công thức hình thang.
3. Cập nhật
$$\Phi_{m+1}(x_i) = f(x_i, U_m(x_i), V_m(x_i), Z_m(x_i)). \tag{4.11}$$

Định lý 4.1.7. *Giả sử các điều kiện của Định lý 4.1.1 và hàm $f(t, u, v, z)$ và $k(x, t)$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai. Khi đó nghiệm xấp xỉ của bài toán* (4.1) *nhận được bằng phương pháp lặp rời rạc trên lưới đều với bước lưới h có các đánh giá*

$$\|U_m - u\| \leq M_0 p_m d + O(h^2), \ \|V_m - u'\| \leq M_2 p_m d + O(h^2). \tag{4.12}$$

Cuối mục chúng tôi đưa ra một số thí dụ minh họa khả năng ứng dụng lý thuyết tồn tại nghiệm và hiệu quả của phương pháp số. Sau đây là một thí dụ minh họa.
Thí dụ 4.1.2. Xét bài toán (Wang, 2020)

$$\begin{aligned} u^{(4)}(x) &= \sin(\pi x)[(2 - u^2(x)) \int_0^1 tu(t)dt + 1], x \in (0, 1) \\ u(0) &= 0, \ u(1) = 0, \ u''(0) = 0, \ u''(1) = 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Áp dụng lý thuyết ở trên chúng tôi chứng tỏ được rằng bài toán có nghiệm duy nhất thỏa mãn $|u(x)| \leq 0.0143, \ |u'(x)| \leq 0.0458$ và trên lưới với $h = 0.01$ và tiêu chuẩn dừng lặp $\|\Phi_m - \Phi_{m-1}\| \leq 10^{-10}$ nghiệm tìm được sau 7 lần lặp.

Cần phải nói rằng bằng phương pháp đơn điệu Wang chỉ xây dựng được các dãy lặp hội tụ tới các nghiệm cực trị chứ không chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm.

4.2 Sự tồn tại duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải phương trình vi phân hàm phi tuyến

Trong mục này chúng tôi xét bài toán

$$\begin{aligned} u''' &= f(t, u(t), u(\varphi(t))), \quad t \in [0, a] \\ B_1[u] &= b_1, B_2[u] = b_2, B_3[u] = b_3, \end{aligned} \tag{4.14}$$

trong đó $\varphi(t)$ là hàm liên tục ánh xạ $[0, a]$ vào chính nó, $B_1[u], B_2[u], B_3[u]$ là các toán tử điều kiện biên (2.2).
Trong không gian $C[a, b]$ xác định toán tử A bởi công thức

$$(A\psi)(t) = f(t, u(t), u(\varphi(t))), \tag{4.15}$$

trong đó $u(t)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} u'''(t) &= \psi(t), \quad 0 < t < a \\ B_1[u] &= b_1, B_2[u] = b_2, B_3[u] = b_3. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Ký hiệu $G(t, s)$ là hàm Green của bài toán (4.16) với điều kiện biên thuần nhất,

$$M_0 = \max_{0 \le t \le a} \int_0^a |G(t, s)| ds. \tag{4.17}$$

và $g(t)$ là đa thức bậc hai thỏa mãn các điều kiện biên

$$B_1[g] = b_1, B_2[g] = b_2, B_3[g] = b_3, \tag{4.18}$$

$$\mathcal{D}_M = \Big\{ (t, u, v) \mid 0 \le t \le a; |u| \le \|g\| + M_0 M; |v| \le \|g\| + M_0 M \Big\}. \tag{4.19}$$

Định lý 4.2.2. *Giả thiết rằng:*

(i) Hàm $\varphi(t)$ là liên tục từ $[0, a]$ vào $[0, a]$.

(ii) Hàm $f(t, u, v)$ liên tục và giới nội bởi M trong miền $\mathcal{D}_M$, tức là

$$|f(t, u, v)| \le M \quad \forall (t, u, v) \in \mathcal{D}_M. \tag{4.20}$$

(iii) Hàm $f(t, u, v)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo các biến u, v với các hệ số $L_1, L_2 \ge 0$ trong $\mathcal{D}_M$, tức là,

$$\begin{aligned} |f(t, u_2, v_2) - f(t, u_1, v_1)| &\le L_1 |u_2 - u_1| + L_2 |v_2 - v_1| \\ &\forall (t, u_i, v_i) \in \mathcal{D}_M \ (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{4.21}$$

(iv)

$$q := (L_1 + L_2) M_0 < 1. \tag{4.22}$$

Khi đó bài toán (4.14) có nghiệm duy nhất $u(t) \in C^3[0, a]$, thỏa mãn

$$|u(t)| \le \|g\| + M_0 M \quad \forall t \in [0, a]. \tag{4.23}$$

Phương pháp lặp

1. Cho trước $\psi_0 \in B[0, M]$, chẳng hạn,

$$\psi_0(t) = f(t, 0, 0). \tag{4.24}$$

2. Biết $\psi_k(t)$ $(k = 0, 1, ...)$ tính

$$\begin{aligned} u_k(t) &= g(t) + \int_0^a G(t,s)\psi_k(s)ds, \\ v_k(t) &= g(\varphi(t)) + \int_0^a G(\varphi(t),s)\psi_k(s)ds. \end{aligned} \tag{4.25}$$

3. Cập nhật

$$\psi_{k+1}(t) = f(t, u_k(t), v_k(t)). \tag{4.26}$$

Định lý 4.2.3 (Hội tụ)**.** *Dưới các giả thiết của Định lý 4.2.2 phương pháp lặp trên hội tụ và có đánh giá*

$$\|u_k - u\| \le M_0 p_k d,$$

trong đó u là nghiệm chính xác của bài toán (4.14) *và* M_0 *cho bởi* (4.17), $p_k = q^k/1-q,\ d = \|\psi_1 - \psi_0\|$.

Ký hiệu $\Phi_k(t), U_k(t), V_k(t)$ là các hàm lưới trên $\bar{\omega}_h$ và xấp xỉ các hàm $\psi_k(t), u_k(t), v_k(t)$ trên lưới.

Phương pháp lặp rời rạc:

1. Cho trước

$$\Psi_0(t_i) = f(t_i, 0, 0),\ i = 0, ..., N. \tag{4.27}$$

2. Biết $\Psi_k(t_i),\ k = 0, 1, ...;\ i = 0, ..., N$, tính

$$\begin{aligned} U_k(t_i) &= g(t_i) + \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G(t_i, t_j)\Psi_k(t_j), \\ V_k(t_i) &= g(\xi_i) + \sum_{j=0}^{N} h\rho_j G(\xi_i, t_j)\Psi_k(t_j), i = 0, ..., N, \end{aligned} \tag{4.28}$$

   trong đó ρ_j là các trọng số của công thức hình thang và $\xi_i = \varphi(t_i)$.

3. Cập nhật

$$\Psi_{k+1}(t_i) = f(t_i, U_k(t_i), V_k(t_i)). \tag{4.29}$$

Định lý 4.2.7. *Dưới các giả thiết của Định lý 4.2.2 đối với nghiệm của bài toán* (4.14) *nhận được bởi phương pháp lặp* (4.27)-(4.29) *ta có đánh giá*

$$\|U_k - u\|_{\bar{\omega}_h} \le M_0 p_k d + O(h^2).$$

Nhận xét. Đối với phương pháp lặp rời rạc (4.24) -(4.26) có hội tụ $O(h^2)$. Một cách tự nhiên có thể nghĩ đến việc sử dụng công thức cầu phương Gauss để tính các tích phân (4.25)với độ chính xác cao hơn nhưng điều đó không thực hiện được vì các nút của công thức cầu phương Gauss không trùng với các nút lưới, tại đó nghiệm được tìm.

Chúng tôi đã đưa ra nhiều thí dụ minh họa cho khả năng áp dụng lý thuyết về tồn tại nghiệm và hiệu quả của phương pháp giải số. Dưới đây là một thí dụ.
Thí dụ 4.2.1. Xét bài toán

$$\begin{aligned} u'''(t) &= e^t - \frac{1}{4}u(t) + \frac{1}{4}u^2(\frac{t}{2}), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) &= 1,\ u'(0) = 1,\ u'(1) = e \end{aligned} \tag{4.30}$$

với nghiệm chính xác $u(t) = e^t$.
Đã kiểm tra rằng các điều kiện của Định lý 4.2.3 được thỏa mãn, do đó bài toán có nghiệm duy nhất. Kết quả tính toán theo phương pháp lặp được cho trong Bảng 4.1. Ở đây N là số nút lưới, K là số lần lặp khi $\|\Psi_k - \Psi_{k-1}\|_{\bar{\omega_h}} \leq 10^{-10}, Error =$

Bảng 4.1: Sự hội tụ trong Thí dụ 4.2.1

N	h^2	K	$Error$
50	4.0000e-04	3	6.1899e-05
100	1.0000e-04	3	1.5475e-05
150	4.4444e-05	3	6.877 -06
200	2.5000e-05	3	3.8688e-06
300	1.1111e-05	3	1.7195e-06
400	6.2500e-06	3	9.6721e-07
500	4.0000e-06	3	6.1901e-07

$\|U_K - u\|_{\bar{\omega_h}}$.

KẾT LUẬN CHUNG

Luận án nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm và phương pháp lặp giải một số bài toán biên cho phương trình vi phân phi tuyến cấp cao bao gồm cả phương trình vi-tích phân và phương trình vi phân hàm. Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Thiết lập được sự tồn tại, duy nhất, tính dương, và phương pháp lặp giải một số bài toán biên cho phương trình vi phân phi tuyến cấp ba. Đề xuất một số phương pháp lặp rời rạc với độ chính xác cấp hai và cấp ba giải phương trình cấp ba phi tuyến.

2. Chứng minh được sự tồn tại, duy nhất và tính dương của nghiệm, xây dựng phương pháp lặp giải một số phương trình cấp ba và cấp bốn với điều kiện biên tích phân.

3. Thiết lập được sự tồn tại, duy nhất nghiệm và đề xuất phương pháp số giải phương trình vi-tích phân và phương trình vi phân hàm phi tuyến cho phương trình cấp ba và cấp bốn.

Các kết quả lý thuyết đều được minh họa bởi nhiều thí dụ chứng tỏ khả năng áp dụng của chúng và hiệu quả của các phương pháp giải số được đề xuất.

HƯỚNG PHÁT TRIỂN

1. Phát triển các nghiên cứu trên cho trường hợp các phương trình với vế phải có kỳ dị và cho miền không giới nội.

2. Xây dựng các phương pháp sô với độ chính xác cao hơn.

3. Nghiên cứu các bài toán với điều kiện biên phi tuyến.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ CỦA LUẬN ÁN

[AL1] Q. A Dang, Q. L. Dang, A unified approach to fully third order nonlinear boundary value problems, J. Nonlinear Funct. Anal. 2020 (2020), Article ID 9, http://jnfa.mathres.org/archives/2136 (Scopus, Q3).

[AL2] Q. A Dang, Q. L. Dang, Simple numerical methods of second- and third-order convergence for solving a fully third-order nonlinear boundary value problem, Numerical Algorithms 87 (2021) 1479-1499 (SCIE, Q1).

[AL3] Q. A Dang, Q. L. Dang, Existence results and iterative method for fully third order nonlinear integral boundary value problems, Applications of Mathematics 66 (2021) 657-672 (SCIE, Q3).

[AL4] Q. A Dang, Q. L. Dang, A unified approach to study the existence and numerical solution of functional differential equation, Applied Numerical Mathematics 170 (2021) 208–218 (SCI, Q1).

[AL5] Q. A Dang, Q. L. Dang, Existence results and iterative method for a fully fourth-order nonlinear integral boundary value problem, Numerical Algorithms 85 (2020) 887-907 (SCIE, Q1).

[AL6] Q. L. Dang, Q. A Dang, Existence results and numerical method for solving a fourth-order nonlinear integro-differential equation, Numerical Algorithms 90 (2022) 563-576 (SCIE, Q1).