BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Khuất Thị Bình

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẶP CHO BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ
TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 9 46 01 12

Hà Nội – 2024

Công trình được hoàn thành tại: Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Người hướng dẫn khoa học:
1. Người hướng dẫn: GS.TS. Nguyễn Bường – Viện CNTT – Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ cấp Học viện họp tại Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi giờ , ngày tháng năm

Có thể tìm hiểu luận án tại:
1. Thư viện Học viện Khoa học và Công nghệ
2. Thư viện Quốc gia Việt Nam

MỞ ĐẦU

Lý thuyết điểm bất động của ánh xạ không giãn và các mở rộng của nó đóng một vai trò quan trọng không những trong việc nghiên cứu lý thuyết phương trình vi phân thường, phương trình vi phân đạo hàm riêng, bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân ... mà còn trong các bài toán liên quan trực tiếp đến bài toán thực tế như: bài toán chấp nhận lồi, bài toán chấp nhận tách và trùng tách đa tập. các bài toán này nảy sinh từ một số bài toán thực tế như: bài toán khôi phục và xử lý ảnh, bài toán xạ trị ...

Những phương pháp cơ bản tìm điểm bất động của một ánh xạ không giãn là phương pháp lặp Krasnosel'skii–Mann, phương pháp lặp Ishikawa, phương pháp lặp Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm. Các phương pháp lặp Krasnosel'skii–Mann và Ishikawa cho kết quả hội tụ yếu, trong khi phương pháp lặp Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm cho kết quả hội tụ mạnh trong không gian vô hạn chiều. Việc kết hợp giữa các phương pháp cơ bản này để được các phương pháp cải biên tốt hơn cũng đã được đề xuất.

Các phương pháp trên cũng được sử dụng để xấp xỉ nghiệm của bài toán chấp nhận tách, bài toán trùng tách và bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn.

Mục tiêu của luận án là đề xuất một số phương pháp lặp mới xấp xỉ nghiệm bài toán chấp nhận tách, bài toán trùng tách và bài toán bất đẳng thức biên phân nhằm khắc phục được một số hạn chế của các phương pháp trước đó.

Bài toán 1. Bài toán chấp nhận tách đa tập (MSSFP)

Cho H_1 và H_2 là các không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$. Cho $A : H_1 \to H_2$ là ánh xạ tuyến tính bị chặn. Cho C_i và Q_j là các tập con lồi, đóng tương ứng trong H_1 và H_2, với mỗi $i \in J_1$ và $j \in J_2$, ở đây, J_1 và J_2 là tập các chỉ số, có thể là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được. Bài toán MSSFP là bài toán:

$$\text{Tìm } x \in C := \bigcap_{i \in J_1} C_i \text{ sao cho } Ax \in Q := \bigcap_{j \in J_2} Q_j. \tag{MSSFP}$$

Khi các tập chỉ số J_1 và J_2 gồm một phần tử thì bài toán chấp nhận tách đa tập (MSSFP) trở thành bài toán chấp nhận tách (SFP): tìm $x \in C$ sao cho $Ax \in Q$.

Bài toán MSSFP được nghiên cứu lần đầu tiên bởi Censor và Elfving trong trường hợp $J_1 = \{1, \ldots, N\}$, $J_2 = \{1, \ldots, M\}$ là các tập hữu hạn. Khi N và M nguyên dương, để giải bài toán (MSSFP), ông cùng các cộng sự đưa ra một phương pháp lặp dựa trên cơ sở phương pháp chiếu gradient. Phương pháp lặp này có hạn chế cỡ bước lặp bởi hệ số Lipschitz của ánh xạ gradient phụ thuộc vào chuẩn $\|A\|$ của ánh xạ chuyển A. Để tránh việc phải tính toán hệ số Lipschitz, năm 2013, Zhao và Yang đã giới thiệu phương pháp chiếu tự thích nghi, áp dụng việc tìm kiếm theo

tia kiểu Armijo (2009) Tuy nhiên, phương pháp lặp này cần số lần lặp phù hợp. Cũng trong đề xuất này, Zhao và Yang đưa ra cách giải tự thích nghi mới, trong đó tác giả sử dụng một tham số lặp phụ để tính toán trực tiếp bước lặp phụ trong mỗi lần lặp, không cần ước tính hệ số Lipschitz hoặc chọn số lần lặp phụ (có nghĩa là việc chọn tham số lặp trong phương pháp này không phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển). Cách tiếp cận này cũng đã được trình bày (trong nghiên cứu có tên là "Solving the split feasibility problem without prior knowledge of matrix norms của Lopez và cộng sự) cho bài toán SFP. Mặt khác, năm 2006, Xu đã chỉ ra bài toán (MSSFP) tương đương với bài toán tìm điểm bất động chung của họ ánh xạ trung bình và đưa ra phương pháp lặp kế tiếp; phương pháp lặp đồng thời và phương pháp lặp tuần hoàn để xấp xỉ nghiệm bài toán (MSSFP). Các phương pháp lặp này sử dụng một số bước lặp cố định, phụ thuôc vào hệ số Lipschitz. Phương pháp lặp đồng thời và Phương pháp lặp tuần hoàn với cỡ bước lặp tự thích nghi đã được nghiên cứu gần đây trong đề xuất năm 2019 của Wang và cộng sự. Các phương pháp lặp kể trên cho sự hội tụ yếu trong không gian vô hạn chiều.
Để nhận được sự hội tụ mạnh của các phương pháp này,

Xu đã đề xuất phương pháp hiệu chỉnh lặp kiểu Bruck và Bakushinsky Dãy lặp được xây dựng như sau:

$$z^{k+1} = P_C(I - \gamma_k(A^*(I - P_Q)A + \alpha_k I))z^k,\ z^1 \in H_1,\ k \geq 1, \tag{1}$$

ở đây, P_C và P_Q là phép chiếu mêtric chiếu H_1 và H_2 lên C và Q tương ứng, A^* là ánh xạ đối ngẫu A, các tham số dương γ_k và α_k đủ nhỏ, dần tới 0 khi $k \to \infty$ và $0 < \gamma_k \leq \alpha_k/(\|A\|^2 + \alpha_k)$. Tuy nhiên việc chọn tham số γ_k vẫn còn phụ thuộc vào $\|A\|$.

Năm 2017, Tian và Zhang [Ineq. Appl, 2017] đã đưa ra một phương pháp lặp tự thích nghi nhằm loại bỏ $\|A\|$ trong biểu thức của γ_k. Trong nghiên cứu này, γ_k được xây dựng như sau: $\gamma_k = \rho_k f(x^k)/\|A^*(I - P_Q)Ax^k\|^2$ với $\varepsilon < \rho_k < 4 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ tùy ý đủ nhỏ, ở đây $f(x) = \frac{1}{2}\|(I - P_Q)Ax\|^2$, với điều kiện (α): $\alpha_k \in (0, 1)$ với mọi $k \geq 1$, $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$. Tuy nhiên, việc chứng minh kết quả này chưa hoàn thành vì chưa chỉ ra được $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\alpha_k = +\infty$ khi $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = 0$.

Mặt khác, trong trường hợp các tập chỉ số J_1 và J_2 là vô hạn đếm được, theo phương pháp này của Xu thì cần tính toán trên các tổng vô hạn, đây là một việc khá phức tạp. Để khắc phục tồn tại này, trong [Acta App. Math, 2019] Nguyễn Bường và các cộng sự đã mở rộng phương pháp (1) để giải bài toán MSSFP trong trường hợp các tập chỉ số J_1 và J_2 là vô hạn đếm được. Trong đề xuất này, quá trình tính toán chỉ cần tính trên các tổng hữu hạn, điều này làm cho các bước tính toán trong quá trình giải bài toán đơn giản hơn. Tuy nhiên, phương pháp này vẫn chưa loại bỏ được đại lượng chuẩn của toán tử chuyển khỏi biểu thức của tham số lặp γ_k.

Vì vậy, mục tiêu thứ nhất của luận án là đưa ra một phương pháp hiệu chỉnh lặp mới xấp xỉ nghiệm bài toán chấp nhận tách đa tập (MSSFP)***, ở đó, tham số lặp γ_k được chọn không phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển.***

Bài toán 2. Bài toán trùng tách đa tập (MSSEP)

Cho H_1, H_2 và H_3 là các không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$. Cho $A : H_1 \to H_3$ và $B : H_2 \to H_3$ là hai ánh xạ tuyến tính bị chặn. Cho J_1, J_2 là hai tập chỉ số, $\{C_i\}_{i \in J_1}$ và $\{Q_j\}_{j \in J_2}$ là hai họ tập con lồi, đóng trong H_1 và H_2 tương ứng. Bài toán MSSEP, là bài toán:

$$\begin{aligned} &\text{Tìm điểm } z = [x, y],\ x \in C := \cap_{i \in J_1} C_i \text{ và } y \in Q := \cap_{j \in J_2} Q_j \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sao cho } Ax = By. \end{aligned} \tag{2}$$

Rõ ràng, nếu $H_2 = H_3$ và $B = I$, thì bài toán MSSEP trở thành bài toán MSSFP. Đặc biệt, nếu các tập chỉ số J_1 và J_2 chỉ gồm một phần tử thì bài toán MSSEP chính là bài toán trùng tách (SEP): tìm điểm $z = [x, y]$, $x \in C$, $y \in Q$ sao cho $Ax = By$.

Bài toán SEP là một mở rộng của bài toán chấp nhận tách (SFP) và là một bài toán tối ưu với ràng buộc yếu, có nhiều ứng dụng, chẳng hạn ứng dụng trong bài toán chia miền trong vi phân đạo hàm riêng và ứng dụng trong lý thuyết trò chơi Năm 2013, Byrne và Moudafi [Working paper, 2013] là hai tác giả nghiên cứu bài toán này đầu tiên trong không gian hữu hạn chiều. Để giải bài toán này, hai tác giả xét bài toán cực tiểu của phiếm hàm lồi và chứng minh tập nghiệm của bài toán SEP trùng với tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân:

$$\text{Tìm một điểm } z_* \in S \text{ sao cho } \langle T z_*, z - z_* \rangle \geq 0\ \forall z \in S, \tag{3}$$

với $T = G^* G$ (xem chi tiết trong [Working paper, 2013]).

Hơn nữa, trong trường hợp $T = G^* G$, Chen cùng các cộng sự [Fixed Point Theory and Applications, 2014] cũng đưa ra phương pháp hiệu chỉnh lặp:

$$z^{k+1} = P_S(I - \gamma_k (T + \alpha_k I)) z^k. \tag{4}$$

Sự hội tụ mạnh của dãy lặp $\{z^k\}$ tới nghiệm có chuẩn cực tiểu của bài toán (3) được đảm bảo bởi các điều kiện về α_k và γ_k.

Trường hợp J_1, J_2 là hai tập vô hạn đếm được và có số phần tử không bằng nhau cũng đã thu hút nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Trong [Abstr. Appl. Anal, 2013] Chen cải biên phương pháp của Shi và Eslamian với các họ vô hạn tập hợp. Phương pháp còn gặp nhiều khó khăn khi thực hành, vì ở mỗi bước lặp k, ta đều phải tính toán với một tổng vô hạn. Sau đó, một số nghiên cứu nhằm giải quyết vấn đề này và đã đề xuất một số kết quả liên quan đến bài toán (2) cũng như phát hiện một số ứng dụng của nó. Tuy nhiên, tất cả các đề xuất này đều chưa giải quyết được tồn tại trên.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Có thể thay tổng vô hạn ở mỗi bước lặp ở các phương pháp này bằng một tổng hữu hạn không? Mục tiêu thứ 2 của luận án sẽ trả lời câu hỏi này.

Bài toán 3. Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach

Cho E là một không gian Banach, $F : E \to E$ là một ánh xạ phi tuyến, C là một tập con lồi, đóng của E. Bài toán bất đẳng thức biến phân, viết tắt là VIP, với ánh xạ giá F và tập ràng buộc C trong không gian Banach E được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } p_* \in C \text{ sao cho } \langle Fp_*, j(p_* - p)\rangle \leq 0 \quad \forall p \in C, \tag{VIP}$$

ở đây, j là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E.tắc Ở đây chúng tôi xét trường hợp $C = \cap_{i\geq 1} Fix(T_i)$, với $Fix(T_i)$ là tập điểm bất động của ánh xạ không giãn T_i xác định trên E. Khi E là không gian Hilbert H, thì ánh xạ đối ngẫu j là ánh xạ đơn vị và do đó, bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert:

$$\text{Tìm } p_* \in C \text{ sao cho } \langle Fp_*, p_* - p\rangle \leq 0 \quad \forall p \in C. \tag{5}$$

Như ta thấy, phương pháp lặp Ishikawa về hình thức là một mở rộng của phương pháp lặp Krasnosel'skii–Mann. Hai phương pháp này chỉ cho hội tụ yếu. Tuy nhiên, có ví dụ chỉ ra rằng, có những bài toán khi sử dụng phương pháp lặp Ishikawa thì dãy lặp này hội tụ đến nghiệm của bài toán nhưng khi sử dụng phương pháp lặp Krasnosel'ski–Mann thì không hội tụ. Vì vậy, việc kết hợp giữa các phương pháp khác nhau để tạo ra phương pháp hội tụ mạnh đã được đề cập đến và thu hút nhiều nhà nghiên cứu quan tâm.

Việc kết hợp giữa phương pháp đường dốc nhất và phương pháp lặp Ishikawa xấp xỉ nghiệm bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach để thu được dãy lặp hội tụ mạnh là mục tiêu nghiên cứu tiếp theo mà luận án nhằm tới.

Nội dung của Luận án được trình bày trong ba chương.

Chương 1: "Một số kiến thức bổ trợ". Trong chương này trình bày một số khái niệm cơ bản và một số phương pháp xấp xỉ nghiệm bài toán chấp nhận tách, bài toán trùng tách đa tập và bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn.

Chương 2: "Phương pháp hiệu chỉnh lặp xấp xỉ nghiệm bài toán chấp nhận tách và trùng tách đa tập". Trong chương này, tác giả đề xuất một phương pháp hiệu chỉnh kiểu Lavrentiev để giải bài toán chấp nhận tách đa tập trong các không gian Hilbert thực, trong đó, tham số lặp γ_k được chọn không phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển. Phần thứ hai của chương, đề xuất một phương pháp hiệu chỉnh lặp mới xấp xỉ nghiệm bài toán trùng tách đa tập trong các không gian Hilbert thực, mà ở mỗi bước lặp chỉ phải tính các tổng hữu hạn.

Chương 3: "Phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân". Trong chương này, tác giả đề xuất một phương pháp lặp, trên cơ sở kết hợp phương pháp lặp Ishikawa với phương pháp đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân khi tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của họ vô hạn ánh xạ không giãn trong không gian Banach. Kết quả này tốt hơn một số phương pháp đã được đề xuất trước đó, chẳng hạn, phương pháp Krasnosel'skii-Man là trường hợp riêng của phương pháp này hay kết quả này là mở rộng của hai nghiên cứu trước đó của tác giả Nguyễn Bường và các cộng sự (hai đề xuất này trình bày trong chương 3).

Các kết quả của luận án được báo cáo tại: Hội thảo Quốc gia lần thứ XXIII về một số vấn đề chọn lọc của Công nghệ Thông tin và Truyền thông, Quảng Ninh, 5–6/11/2020.

CHƯƠNG 1. MỘT SỐ KIẾN THỨC BỔ TRỢ

Trong chương này, mục 1.1 trình bày một số khái niệm cơ bản trong không gian Hilbert và không gian Banach

Mục 1.2 trình bày một số phương pháp xấp xỉ nghiệm bài toán điểm bất động, chấp nhận tách, trùng tách. Các phương pháp này đều còn những hạn chế gây khó khăn trong quá trình thực hiện. Cụ thể:

(1) Bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn, luận án trình bày các phương pháp cơ bản. Đây là nền tảng để các nhà nghiên cứu phát triển, cải biên ra những phương pháp tốt hơn nhằm khắc phục các nhược điểm như là hội tụ yếu.

(2) Bài toán MSSFP, luận án trình bày phương pháp xấp xỉ nghiệm của Tian và Zhang đề xuất năm 2017. Ở đó đã cải tiến phương pháp của Xu (đề xuất năm 2010) nhằm loại bỏ việc tính chuẩn của toán tử chuyển trong quá trình thực hiện phương pháp. Tuy nhiên việc chứng minh cho kết quả này chưa hoàn thành.

(3) Bài toán MSSEP, luận án trình bày phương pháp của Chen đề xuất năm 2013. Phương pháp này còn tồn tại nhược điểm là cần tính các tổng vô hạn trong quá trình thực hiện phương pháp - đây cũng là một vấn đề gây trở ngại khi thực hiện phương pháp. Cho đến nay cũng chưa có nghiên cứu nào giải quyết được.

Những vấn đề tồn tại trên là một trong những lý do dẫn tác giả đến những nghiên cứu sẽ trình bày ở chương 2 và chương 3.

Mục 1.3 luận án trình bày hai ứng dụng thực tiễn của các bài toán nêu trên trong y học và trong việc xử lý tín hiệu số và khôi phục ảnh.

CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH LẶP XẤP XỈ NGHIỆM BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH VÀ TRÙNG TÁCH ĐA TẬP

Chương này đề xuất hai phương pháp xấp xỉ nghiệm bài toán chấp nhận tách và bài toán trùng tách đa tập trong không gian Hilbert thực vô hạn chiều. Các nghiên cứu này hội tụ mạnh và đã khắc phục được nhược điểm của các phương pháp đã trình bày ở Chương 1. Kết quả của chương được viết dựa trên hai bài báo khoa học **[CT2]** và **[CT3]** trong Danh mục công trình công bố của tác giả luận án.

2.1. Bài toán chấp nhận tách đa tập (MSSFP)

Chúng ta phát biểu lại bài toán.

Cho H_1 và H_2 là các không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle$ và chuẩn $\|\cdot\|$. Cho $A : H_1 \to H_2$ là ánh xạ tuyến tính bị chặn. Cho C_i và Q_j là các tập con lồi, đóng tương ứng trong H_1 và H_2, với mỗi $i \in J_1$ và $j \in J_2$, ở đây, J_1 và J_2 là tập các chỉ số, có thể là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được. Bài toán MSSFP là bài toán:

$$\text{Tìm } x \in C := \bigcap_{i\in J_1} C_i \text{ sao cho } Ax \in Q := \bigcap_{j\in J_2} Q_j. \tag{MSSFP}$$

2.1.1. Phương pháp hiệu chỉnh kiểu Lavrentiev

Để tìm nghiệm của phương trình $Ax = f$ với A là toán tử tuyến tính không âm, Lavrentiev đề xuất phương pháp hiệu chỉnh $Ax + \alpha x = f, \alpha > 0$, có nghiệm duy nhất x_α. Khi $\alpha \to 0$, x_α hội tụ đến một nghiệm của phương trình này.

Luận án đề xuất một phương pháp hiệu chỉnh kiểu Lavrentiev xấp xỉ nghiệm bài toán MSSFP trong các không gian Hilbert thực như sau:

$$F^k u^k + \alpha_k(u^k - x^+) = 0, \tag{2.1}$$

ở đây,

$$F^k = I - U^k + A^*(I - V^k)A, \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} U^k &= \frac{1}{\beta^k}\sum_{i=1}^{k}\beta_i P_{C_i},\ T_{\gamma_k,\alpha_k} = I - \gamma_k(A^*(I-V^k)A + \alpha_k I),\\ V^k &= \frac{1}{\eta^k}\sum_{j=1}^{k}\eta_j P_{Q_j}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$x^+ \in H_1$ là điểm dự đoán, α_k, β_i, γ_k và η_j là các tham số dương và $\beta^k = \beta_1 + \cdots + \beta_k$, $\eta^k = \eta_1 + \cdots + \eta_k$.

Giả sử các tham số γ_k, α_k, β_i và η_j thỏa mãn các giả thiết dưới đây:

(a) $\gamma_k, \alpha_k \in (0,1)$, $\lim_{k\to\infty} \gamma_k/\alpha_k = \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, $\alpha_{k+1} < \alpha_k$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\alpha_k = \infty$.

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\alpha}_k/(\gamma_k\alpha_k^2) = 0$ ở đây $\tilde{\alpha}_k = (\alpha_{k-1}/\alpha_k) - 1$.

(c) $\beta_i > 0$ với mọi $i \geq 1$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i = 1$ và $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k/(\gamma_k\alpha_k^2) = 0$.

(d) $\eta_j > 0$ với mọi $j \geq 1$ sao cho $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \eta_j = 1$ và $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k/(\gamma_k\alpha_k^2) = 0$.

Nhận xét 2.1.1. Ví dụ về các dãy tham số thỏa mãn các điều kiện **(a)**–**(d)** là

$$\gamma_k = 1/(k+1)^a,\ \alpha_k = 1/(k+1)^b,$$

ở đây, $0 < b < a$ với $a + 2b < 1$ và $\eta_i = \beta_i = 1/(i(i+1))$.

Ta có kết quả sau trong trường hợp các tập chỉ số J_1 và J_2 là vô hạn đếm được.

Định lý 2.1.1. *Cho H_1 và H_2 là hai không gian Hilbert thực và A là ánh xạ tuyến tính bị chặn từ H_1 vào H_2, $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ và $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}_+}$ là hai họ vô hạn các tập con lồi, đóng trong H_1 và H_2 tương ứng. Giả sử các điều kiện* **(c)** *và* **(d)** *ở trên đã được giảm nhẹ bằng cách bỏ đi các điều kiện về giới hạn. Khi đó,*

(i) Với mỗi $\alpha_k > 0$, bài toán (2.1) có một nghiệm duy nhất u^k.

(ii) Nếu $\Gamma \neq \emptyset$, thì $\lim\limits_{k\to\infty} u^k = p_* \in \Gamma$ thỏa mãn

$$\|p_* - x^+\| \leq \|p - x^+\|\ \forall p \in \Gamma. \tag{2.4}$$

(iii)

$$\|u^k - u^{k-1}\| \leq d_k = \frac{2M_1}{\alpha_k}\left[\frac{\beta_k}{\beta^k} + \tilde{\alpha}_k + \frac{\eta_k}{\eta^k}\right] + \tilde{\alpha}_k(M_1 + \|x^+\|), \tag{2.5}$$

ở đây, M_1 là hằng số dương nào đó.

Định lý 2.1.2. *Cho H_1, H_2, A, C_i và Q_j như trong Định lý 2.1.1. Giả sử tập nghiệm Γ của bài toán MSSFP khác rỗng. Giả sử các điều kiện* **(a)**, **(b)**, **(c)** *và* **(d)** *được thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{z^k\}$ xác định bởi*

$$z^{k+1} = (I - \gamma_k(F^k + \alpha_k(I - x^+)))z^k,\ k \geq 1, \tag{2.6}$$

hội tụ mạnh tới p_* thỏa mãn (2.4) khi $k \to \infty$, ở đây F^k được định nghĩa bởi (2.2).

Trong trường hợp một trong hai tập J_1 và J_2 là hữu hạn, hoặc cả hai tập chỉ số đều hữu hạn, ta có các kết quả sau đây.

Định lý 2.1.3. *Cho H_1, H_2 và A như trong Định lý 2.1.1. Cho $\{C_i\}_{i=1}^N$ và $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}_+}$ là hai họ tập con lồi, đóng trong H_1 và H_2, tương ứng. Giả sử $\Gamma \neq \emptyset$ và các điều kiện* **(a)**, **(b)**, **(d)** *và*

(c') *$\beta_i > 0$ với $1 \le i \le N$ sao cho* $\sum_{i=1}^{N} \beta_i = 1$

thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{z^k\}$ xác định bởi

$$z^{k+1} = z^k - \gamma_k((I - U)z^k + A^*(I - V^k)Az^k + \alpha_k(z^k - x^+)), k \ge 1, z^1 \in H_1,$$

hội tụ mạnh tới p_* thỏa mãn (2.4) *khi $k \to \infty$, ở đây,*

$$U = \sum_{i=1}^{N} \beta_i P_{C_i},\ V^k = \frac{1}{\eta^k} \sum_{j=1}^{k} \eta_j P_{Q_j}.$$

Định lý 2.1.4. *Cho H_1, H_2 và A như trong Định lý 2.1.1. Cho $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ và $\{Q_j\}_{j=1}^{M}$ là hai họ tập con lồi, đóng trong H_1 và H_2 tương ứng. Giả sử $\Gamma \neq \emptyset$ và các điều kiện:* **(a)**, **(b)**, **(c)** *và*

(d') *$\eta_j > 0$ với $1 \le j \le M$ sao cho* $\sum_{j=1}^{M} \eta_j = 1$

thỏa mãn. Khi đó, khi $k \to \infty$, dãy $\{z^k\}$ xác định bởi

$$z^{k+1} = z^k - \gamma_k((I - U^k)z^k + A^*(I - V)Az^k + \alpha_k(z^k - x^+)), k \ge 1, z^1 \in H_1,$$

$$U^k = \frac{1}{\beta^k} \sum_{i=1}^{k} \beta_i P_{C_i},\ V = \sum_{j=1}^{M} \eta_j P_{Q_j},$$

hội tụ mạnh tới p_* thỏa mãn (2.4).

Tổ hợp các kết quả trong Định lý 2.1.3 và 2.1.4, ta có kết quả cho trường hợp hữu hạn.

Định lý 2.1.5. *Cho H_1, H_2 và A như trong Định lý 2.1.1. Cho $\{C_i\}_{i=1}^{N}$ và $\{Q_j\}_{j=1}^{M}$ là hai họ tập con lồi đóng trong H_1 và H_2 tương ứng. Giả sử $\Gamma \neq \emptyset$ và các điều kiện* **(a)**, **(b)**, **(c')** *và* **(d')** *được thỏa mãn. Khi đó, khi $k \to \infty$, dãy $\{z^k\}$ xác định bởi*

$$z^{k+1} = z^k - \gamma_k((I - U)z^k + A^*(I - V)Az^k + \alpha_k(z^k - x^+)), k \ge 1, z^1 \in H_1,$$

với U và V được xác định như trong Định lý 2.1.3 và 2.1.4 tương ứng, hội tụ mạnh tới p_* thỏa mãn (2.4).

Nhận xét 2.1.2. (a) Chương 1 đã trình bày hai phương pháp hiệu chỉnh lặp giải bài toán MSSFP. Phương pháp hiệu chỉnh lặp của Xu và cộng sự cho bởi dãy lặp:

$$z^{k+1} = P_C(I - \gamma_k(A^*(I - P_Q)A + \alpha_k I))z^k,\ z^1 \in H_1,\ k \ge 1, \tag{2.7}$$

với việc chọn $0 < \gamma_k \le \alpha_k/(\|A\|^2 + \alpha_k)$ trong mỗi bước lặp còn phụ thuộc vào $\|A\|$. Việc tính $\|A\|$ không hề dễ dàng, do vậy, sẽ có những khó khăn trong việc sử dụng phương pháp (2.7).

(b) Nguyễn Bường và các cộng sự đã mở rộng phương pháp (2.7) để giải bài toán MSSFP trong trường hợp các tập chỉ số J_1 và J_2 là hữu hạn:

$$z^{k+1} = U^k T_{\gamma_k,\alpha_k} z^k, \tag{2.8}$$

Sự hội tụ của dãy $\{z^k\}$ này phụ thuộc vào $\|A\|$.
Phương pháp được đề xuất trong luận án đã khắc phục được hạn chế này, ngoài ra, luận án đã mở rộng bài toán trong trường hợp các tập chỉ số J_1 và J_2 là vô hạn đếm được.

2.1.2. Ví dụ số minh họa

Ta xét bài toán MSSFP trong các không gian Hilbert thực hữu hạn chiều $\mathbb{E}^m$ và $\mathbb{E}^n$ với $C = \cap_{i=1}^{\infty} C_i$ và $Q = \cap_{j=1}^{\infty} Q_j$, ở đây,

$$C_i = \Big\{ x \in \mathbb{E}^n \;\Big|\; a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \cdots + a_n^i \le b_i \Big\}, \tag{2.9}$$

với $a_l^i, b_i \in (-\infty; +\infty)$, $1 \le l \le n$ và $i \in \mathbb{N}_+$,

$$Q_j = \Big\{ y \in \mathbb{E}^m \;\Big|\; \sum_{l=1}^{m} (y_l - a_l^j)^2 \le R_j \Big\},\ R_j > 0, \tag{2.10}$$

với $a_l^j \in (-\infty; +\infty)$, $1 \le l \le m$, $j \in \mathbb{N}_+$ và A là ma trận cỡ $m \times n$.

Ví dụ 2.1. Trong ví dụ thứ nhất, luận án xét trường hợp $m = n = 2$, A là ma trận đơn vị, tác giả đã trình bày kỹ trong luận án. $a_1^i = 1/i, a_2^i = -1$, $b_i = 0$, $\forall i \ge 1$, $R_j = 1$ và $a^j = (1/j, 0)$, $\forall j \ge 1$ và $x^+ = (0, 0)$. Khi đó, $x_* = (0; 0)$ là nghiệm duy nhất có chuẩn cực tiểu của (2.9), (2.10). Từ $A = I$, phương pháp (2.6) với ánh xạ được định nghĩa trong (2.2) có dạng

$$z^{k+1} = (1 - \gamma_k(2 + \alpha_k))z^k + \gamma_k(U^k z^k + V^k z^k). \tag{2.11}$$

Sử dụng phương pháp (2.11) với

$$\beta_i = \eta_i = 1/(i(i+1)),\ \alpha_k = 1/(k+1)^{1/8},\ \gamma_k = 1/(k+1)^{1/2}$$

và điểm bắt đầu $x^1 = (-3.0; 3.0)$, ta có được kết quả cho trong Bảng 2.1.

Ví dụ 2.2. Trong ví dụ thứ hai, luận án sử dụng $C_i, \beta_i, \eta_j, R_j, \gamma_k, \alpha_k$ và điểm bắt đầu x^1 giống như trong Ví dụ 2.1. Ở đây, luận án xét trường hợp $Q_j = \{y \in \mathbb{E}^3 : \|y - a^j\| \le 1\}$ với $a^j = (1/(j+1); 1/(j+1); 1/(j+1))$ và A là ma trận cỡ 3×2 với $a_{i1} = 1$, $i = 1, 2, 3$, các phần tử còn lại bằng 0. Khi đó, $x_* = (0; 0)$ là nghiệm duy nhất có chuẩn nhỏ nhất. Kết quả tính toán khi dùng phương pháp (2.6) với các ánh xạ được định nghĩa trong (2.2) được trình bày trong Bảng 2.2.

Bảng 2.1: Kết quả số của Ví dụ 2.1 sử dụng (2.11)

k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}	k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}
10	-0.0072951049	-0.0123790731	60	-0.0000003749	-0.0000006109
20	-0.0003743916	-0.0006192857	70	-0.0000001070	-0.0000001742
30	-0.0000421668	-0.0000692232	80	-0.0000000337	-0.0000000548
40	-0.0000070196	-0.0000114815	90	-0.0000000115	-0.0000000187
50	-0.0000014904	-0.0000014325	100	-0.0000000042	-0.0000000068

Bảng 2.2: Kết quả tính toán Ví dụ 2.2 theo công thức (2.6)

k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}	k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}
10	-0.0067281333	-0.0450293607	60	-0.0000189750	-0.0000189751
20	-0.0025241606	-0.0026043616	70	-0.0000078161	-0.0000078161
30	-0.0005405073	-0.0005415133	80	-0.0000034561	-0.0000034561
40	-0.0001513849	-0.0001514139	90	-0.0000016184	-0.0000016184
50	-0.0000504382	-0.0005043396	100	-0.0000007947	-0.0000007947

Nhận xét 2.1.3. Tương tự, trong trường hợp $m = n = 2$ và A là ma trận đơn vị, phương pháp (2.8) của Buong và các cộng sự với ánh xạ được định nghĩa như (2.3) có dạng

$$x^{k+1} = U^k((1 - \gamma_k(1 + \alpha_k))x^k + \gamma_k V^k x^k). \tag{2.12}$$

Sử dụng phương pháp (2.12) với $\gamma_k = 1/(1.05 + (1/k))$, $\alpha_k = 1/k$, thỏa mãn điều kiện (α) và dữ liệu tương tự như trên, ta có kết quả trong các Bảng 2.3 và 2.4

Bảng 2.3: Kết quả của Ví dụ 2.1 được tính theo công thức (2.12)

k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}
1	0.0243902439	0.3658536585	100	0.0012390505	0.0083945251
10	0.0102553274	0.0694794968	500	0.0002695347	0.0018260888
20	0.0055344982	0.0374960376	1000	0.0001394192	0.0009445606
30	0.0038180428	0.0258671112	2000	0.0000720824	0.0004883558
40	0.0029249862	0.0198166827	3000	0.0000489994	0.0000331969

So sánh các kết quả minh họa trong Bảng 2.1, 2.2 với Bảng 2.3, 2.4, ta thấy cả hai phương pháp của luận án đề xuất đều hiệu quả. Hơn nữa, phương pháp hiệu chỉnh

Bảng 2.4: Kết quả của Ví dụ 2.2 được tính theo công thức (2.8)

k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}
1	0.6019388274	1.5365833659	100	0.0142047415	0.0363009852
10	0.1176994981	0.3004546610	500	0.0030934268	0.0078966734
20	0.0635189516	0.1621465290	1000	0.0016001024	0.0040846244
30	0.0438193443	0.1118588139	2000	0.0008272834	0.0021118284
40	0.0356981140	0.0856945566	3000	0.0005623615	0.0014355553

của luận án hội tụ nhanh hơn các kết quả của Buong và cộng sự trong [Acta Appl. Math, 2019].

Ví dụ 2.3. Xét trường hợp

$$a_{11} = 0.1, a_{12} = 0.2, a_{21} = 0.2,$$
$$a_{22} = 0.4, a_{31} = a_{32} = 0,$$

trong Ví dụ 2.2, có nhiều nghiệm, bao gồm cả điểm không, là nghiệm có chuẩn cực tiểu bởi vì $x^+ = 0$. Các kết quả số tính bởi phương pháp (2.6) với ánh xạ được định nghĩa trong (2.2) với dữ liệu tương tự như trên, ta được kết quả cho trong Bảng 2.5.

Bảng 2.5: Kết quả của Ví dụ 2.3 tính theo công thức (2.6)

k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}	k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}
10	-0.0420263650	-0.0420003267	60	-0.0000380359	-0.0000380359
20	-0.0051177476	-0.0051176931	70	-0.0000156676	-0.0000156667
30	-0.0010841787	-0.0010841781	80	-0.0000069279	-0.0000069279
40	-0.0003034753	-0.0003034753	90	-0.0000032440	-0.0000032440
50	-0.0001011055	-0.0001011055	100	-0.0000015929	-0.0000012929

Nhận xét 2.1.4. Bảng 2.2 và Bảng 2.5 chỉ ra rằng, với ví dụ có nghiệm duy nhất hoặc nhiều nghiệm, phương pháp (2.6) với ánh xạ xác định bởi (2.2) luôn cho kết quả hội tụ tốt. Hơn nữa, nếu bài toán có nghiệm duy nhất, thì phương pháp đề xuất của luận án trong mục này cho kết quả tốt hơn so với kết quả của Ng. Buong và cộng sự trong *Acta Appl.Math* xuất bản năm 2019.

2.2. Bài toán trùng tách đa tập (MSSEP)

Cho H_1 và H_2 là hai không gian Hilbert, C_i, Q_j lần lượt là các tập con lồi, đóng trong H_1 và H_2 tương ứng, $A : H_1 \to H_3$, $B : H_2 \to H_3$ là hai ánh xạ tuyến tính, bị chặn. Xét bài toán MSSEP:

$$\text{Tìm } x \in C := \bigcap_{i \in J_1} C_i \text{ và } y \in Q := \bigcap_{j \in J_2} Q_j \text{ sao cho } Ax = By. \tag{MSSEP}$$

Ký hiệu tập nghiệm của bài toán MSSEP là Ω. Giả thiết rằng $\Omega \neq \emptyset$.

2.2.1. Phương pháp hiệu chỉnh lặp kiểu Bakushinsky–Bruck

Mở rộng phương pháp hiệu chỉnh lặp của Bakushinsky [Comput. Math. and Math. Physics., 2011] và Bruck [J. Math. Anal. Appl., 1974] giải bài toán MSSEP trong các không gian Hilbert vô hạn chiều, luận án đề xuất dãy lặp sau đây: xuất phát từ xấp xỉ đầu $z^1 \in H$ tùy ý, các xấp xỉ tiếp theo được xác định bởi:

$$z^{k+1} = U_k T_{\gamma_k, t_k} z^k, \tag{2.13}$$

ở đây,

$$U_k = \frac{1}{\tilde{\beta}_k} \sum_{i=1}^{k} \beta_i P_{S_i}, \ T_{\gamma_k, t_k} = I - \gamma_k [G^* G + t_k I], \tag{2.14}$$

γ_k, t_k, β_i là các tham số dương và $\tilde{\beta}_k = \beta_1 + \cdots + \beta_k$.

Nhận xét 2.2.1. Trong đề xuất mới này, ta thấy, các bước tính toán chỉ thực hiện trên các tổng hữu hạn, do đó, kết quả này tốt hơn một số phương pháp đã được đề xuất trước đó

Giả sử các tham số γ_k, t_k, β_i thỏa mãn với các điều kiện

(t) $t_k \in (0, 1)$ với mọi k, $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = 0$ và $\sum\limits_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$.

(β) $\beta_i > 0$ với mọi i và $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i = 1$.

(γ) $\gamma_k \in (0, 2/(\|A\|^2 + t_k))$, $\lim\inf\limits_{k \to \infty} \gamma_k > 0$ và $\lim\limits_{k \to \infty} (\gamma_{k+1} - \gamma_k) = 0$.

Bổ đề 2.2.1. *Cho H_1, H_2 và H_3 là các không gian Hilbert thực và cho $A : H_1 \to H_3$, $B : H_2 \to H_3$ là các ánh xạ tuyến tính bị chặn. Khi đó, với hằng số $\gamma \in (0, 2/(\|G\|^2 + 2\alpha))$, ở đây, $G = [A - B] : H = H_1 \times H_2 \to H$, ánh xạ $T_{\gamma,t} := I - \gamma[G^* G + tI]$ là ánh xạ co với hệ số co $1 - \gamma t$, $t \in (0, 1)$. Khi $t = 0$, thì $T_\gamma := I - \gamma G^* G$ là ánh xạ không giãn.*

Bổ đề 2.2.2. *Cho H là không gian Hilbert và G là ánh xạ tuyến tính bị chặn trên H. Khi đó, $\mathrm{Zer}G := \{z \in H \mid Gz = 0\} = \mathrm{Fix}(T_\gamma)$ ở đây T_γ được xác định như trong Bổ đề 2.2.1 với số thực dương γ.*

Bổ đề 2.2.3. *Tập nghiệm Ω của bài toán* MSSEP *trùng với tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân*

$$\text{Tìm } z_* \in S \text{ sao cho } \langle Tz_*, z - z_*\rangle \geq 0 \ \forall z \in S, \tag{VIP}$$

với $T = G^*G$.

Định lý 2.2.1. *Cho H_1, H_2, H_3, A và B như trong Bổ đề 2.2.1. Cho C_i và Q_j, với mỗi $i \in J_1$ và mỗi $j \in J_2$ với $J_1 = J_2 = \mathbb{N}_+$, là các tập con lồi, đóng trong H_1 và H_2 tương ứng. Giả sử các điều kiện (γ), (β) và (t) được thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{z^k\}$ xác định bởi* (2.13) *và* (2.14)*, khi $k \to \infty$, hội tụ mạnh tới một nghiệm của bài toán trùng tách đa tập* MSSEP.

Trường hợp ít nhất một trong hai tập J_1 và J_2 hữu hạn, ta có các kết quả sau.

Định lý 2.2.2. *Cho H_1, H_2, H_3, A, B, C_i và Q_j với $J_1 = \{1, \ldots, N\}$, $J_2 = \{1, \ldots, M\}$ và $N < M$ như trong Định lý 2.2.1. Giả sử các điều kiện (γ) và (t) được thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{z^k\}$ được xác định bởi*

$$z^{k+1} = UT_{\gamma_k, t_k} z^k, k \geq 1,\ z^1 \in H,\ U = \sum_{i=1}^{M} \beta_i P_{S_i},$$

hội tụ tới nghiệm của bài toán trùng tách đa tập MSSEP *khi $k \to \infty$, ở đây, $C_i = C_N$, $i = N+1, \ldots, M$, $\beta_i > 0$ và $\sum_{i=1}^{M} \beta_i = 1$.*

Trường hợp J_1 hữu hạn, $J_2 = \mathbb{N}_+$, bằng cách đặt $C_i = C_N$, $i = N+1, \ldots, \infty$, ta có trường hợp trong Định lý 2.2.1. Trường hợp chỉ J_2 hữu hạn thì tương tự.

Nhận xét 2.2.2. (a) Ta có thể biểu diễn phương pháp (2.13) trong các điều kiện về x và y như sau: với điểm khởi đầu $x^1 \in H_1$ và $y^1 \in H_2$,

$$\begin{cases} v^k = Ax^k - By^k, \\ x^{k+1} = \tilde{U}_k\big((1 - \gamma_k t_k)x^k - \gamma_k A^* v^k\big), \\ y^{k+1} = \tilde{V}_k\big((1 - \gamma_k t_k)y^k + \gamma_k B^* v^k\big), \end{cases} \tag{2.15}$$

ở đây $\tilde{U}_k$ được định nghĩa như trong (2.3) và $\tilde{V}_k = (1/\tilde{\beta}_k) \sum_{i=1}^{k} \beta_i P_{Q_i}$.

(b) Có thể sử dụng phương pháp (2.15) với $H_3 = H_2$ và $B = I$ cho bài toán MSSFP với $J_1 = J_2 = \mathbb{N}_+$, ta nhận được phương pháp hiệu chỉnh lặp mới: với điểm xuất phát $x^1 \in H_1$ và $y^1 \in H_2$,

$$\begin{cases} v^k = Ax^k - y^k, \\ x^{k+1} = \tilde{U}_k\big((1 - \gamma_k t_k)x^k - \gamma_k A^* v^k\big), \\ y^{k+1} = \tilde{V}_k\big((1 - \gamma_k t_k)y^k + \gamma_k v^k\big). \end{cases} \tag{2.16}$$

Với các điều kiện (γ), (β) và (t), dãy $\{x^k\}$ xác định bởi (2.16) hội tụ mạnh tới x_* là nghiệm của bài toán MSSFP khi $k \to \infty$.
Rõ ràng, phương pháp (2.16) khác phương pháp (2.8) với ánh xạ được định nghĩa trong (2.3).

(c) Sử dụng phương pháp hiệu chỉnh lặp (2.16) cho bài toán SFP, ta cũng thấy, phương pháp này khác hoàn toàn với phương pháp của Yao cùng cộng sự đề xuất năm 2012

2.2.2. Ví dụ số minh họa

Ta xét bài toán trùng tách đa tập MSSEP trong các không gian Hilbert thực hữu hạn chiều $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{E}^m$, $\mathbb{E}^p$ với $C = \cap_{i=1}^{\infty} C_i$, $Q = \cap_{j=1}^{\infty} Q_j$, ở đây,

$$C_i = \Big\{x \in \mathbb{E}^n \mid \tilde{a}_1^i x_1 + \tilde{a}_2^i x_2 + \cdots + \tilde{a}_n^i \le b_i\Big\},$$

$\tilde{a}_j^i, b_i \in (-\infty; +\infty)$, với $1 \le j \le n$ và $i \in \mathbb{N}_+$ và

$$Q_j = \Big\{y \in \mathbb{E}^m \mid \sum_{l=1}^{m} (y_l - \overline{a}_l^j)^2 \le r_j\Big\},\ r_j > 0,$$

$\overline{a}_l^j \in (-\infty; +\infty)$ với $1 \le l \le m$ và $j \in \mathbb{N}_+$, A và B là các ma trận cấp $p \times n$ và $p \times m$, tương ứng.

Ví dụ 2.4. Trong ví dụ thứ nhất, ta xét trường hợp $H_1 = \mathbb{E}^2$, $H_2 = \mathbb{E}^3$ và $H_3 = \mathbb{E}^4$ với $\tilde{a}_1^i = 1/i, \tilde{a}_2^i = -1$ và $b_i = 0$ với mọi $i \ge 1$; $r_j = 1$ và $\overline{a}^j = (1/(j+1); 1/(j+1); 1/(j+1))$ với mọi $j \ge 1$ và

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, dễ thấy rằng $z_* = [x_*, y_*]$, với $x_* = (0; 0)$ và $y_* = (0; 0; 0)$, là nghiệm có chuẩn cực tiểu của bài toán trùng tách đa tập MSSEP với các điều kiện như trên. Sử dụng phương pháp (2.15) với $\gamma_k = 0.05 + 0.05/k$, $\beta_i = 1/(i(i+1))$, $\alpha_k = 1/k$ và một điểm xuất phát $z^1 = [x^1, y^1]$ với $x^1 = (-2.0; -2.0)$, $y^1 = (-2.0; -2.0; -2.0)$, ta có các giá trị của $\|z^k - z_*\| = \sqrt{\|x^k - x_*\|^2 + \|y^k - y_*\|^2}$ được thể hiện trong Bảng 2.6.

Kết luận

Trong chương này, tác giả đề xuất hai phương pháp hiệu chỉnh lặp mới lần lượt xấp xỉ nghiệm bài toán MSSFP và MSSEP. Các phương pháp này đã loại bỏ được một số hạn chế của các phương pháp trước, như tham số lặp không phụ thuộc vào $\|A\|$ cũng như các phương pháp đã đề xuất không chứa tổng vô hạn các phần tử. Chúng tôi cũng đã đưa ra một số ví dụ số để minh họa.

Bảng 2.6: Kết quả của Ví dụ 2.4 được tính theo công thức (2.15)

k	$\|z^{k+1} - z_*\|$	k	$\|z^{k+1} - z_*\|$
10	0.0126467309	100	0.0000712257
20	0.0011458555	200	0.0000058032
30	0.0006146665	300	0.0000005387
40	0.0004108535	400	0.0000000527
50	0.0002940086	500	0.0000000053

CHƯƠNG 3. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƯỜNG DỐC NHẤT ISHIKAWA CHO MỘT LỚP BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

Chương này đề xuất một phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trong trường hợp tập chấp nhận được là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn.Kết quả của Chương 3 được công bố trong bài báo **[CT1]** trong Danh mục công trình công bố của tác giả luận án.

3.1. Phương pháp lai ghép đường dốc nhất với phương pháp Ishikawa xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach

Xét bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach E: tìm $p_* \in C$ sao cho

$$\langle Fp_*, j(p_* - p)\rangle \leq 0 \quad \forall p \in C, \tag{3.1}$$

ở đây, $\langle x, x^*\rangle$ được dùng thay cho $x^*(x)$ với $x \in E$, $x^* \in E^*$ và j là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E. Chương này đề xuất cải biên của phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn hoặc tập điểm bất động chung của họ ánh xạ không giãn trong không gian Banach.

3.1.1. Bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn

Mục này, luận án xét bài toán bất đẳng thức biến phân (3.1) khi $C := \mathrm{Fix}(T)$,

$$\text{Tìm } p_* \in \mathrm{Fix}(T) \text{ sao cho } \langle Fp_*, j(p_* - p)\rangle \leq 0 \quad \forall p \in \mathrm{Fix}(T). \tag{3.2}$$

Ta xét bài toán (3.2) trong trường hợp E là không gian Banach trơn đều hoặc phản xạ lồi chặt với chuẩn khả vi Gâteaux đều, ánh xạ giá $F : E \to E$ là η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt. Để tìm nghiệm của lớp bài toán bất đẳng thức biến phân (3.2), luận án kết hợp phương pháp đường dốc nhất với phương pháp Ishikawa. Dãy lặp được xây dựng như sau: với điểm xấp xỉ ban đầu $x^1 \in E$ tùy ý, các xấp xỉ tiếp theo được xác định bởi

$$x^{k+1} = (I - t_k F)T^k x^k, \; k \geq 1, \tag{3.3}$$

ở đây,

$$T^k = (1-\beta_k)I + \beta_k T\big[(1-\alpha_k)I + \alpha_k T\big], \; k \geq 1, \tag{3.4}$$

và các tham số t_k, β_k và α_k thỏa mãn các điều kiện:

(t) $t_k \in (0,1)$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ và $\sum\limits_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$.

(β) $\beta_k \in [a, b] \subset (0, 1)$ với mọi $k \geq 1$.
(α) $\alpha_k \in [0, \overline{a}]$, với $\overline{a} \in (0, 1)$, $\forall k \geq 1$ và $\alpha_k \to 0$ khi $k \to \infty$.
Định lý sau khẳng định sự hội tụ mạnh của dãy lặp (3.3) và được chứng minh đầy đủ trong luận án.

Định lý 3.1.1. *Cho $F : E \to E$ là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt trên không gian Banach hoặc trơn đều hoặc phản xạ lồi chặt E, có chuẩn khả vi Gâteaux, sao cho $\eta + \gamma > 1$ và $T : E \to E$ là ánh xạ không giãn sao cho* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. *Giả sử t_k, β_k và α_k thỏa mãn các điều kiện* (t), (β) *và* (α) *tương ứng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ được xác định bởi (3.3) với T^k được định nghĩa trong (3.4) hội tụ mạnh tới p_* là nghiệm của bài toán* (3.2).

Nhận xét 3.1.1. (a) Định lý 3.1.1 vẫn có giá trị đối với phương pháp: $y^1 \in E$ là một phần tử bất kỳ và

$$y^{k+1} = T^k(I - t_k F)y^k, \ k \geq 1, \tag{3.5}$$

với các điều kiện tương tự về E, F, T, t_k, β_k và α_k như trong Định lý 3.1.1.

(b) Ta lấy $F = I - f$ với $f = a'I$ và một hằng số cố định $a' \in (0, 1)$. Khi đó, F là một ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt trên E với các hằng số dương η và γ sao cho $\eta + \gamma > 1$. Thay F bởi $I - f = (1 - a')I$ trong (3.3), ta nhận được thuật toán sau:

$$x^{k+1} = (1 - t'_k)T^k x^k, \ k \geq 1, \tag{3.6}$$

ở đây $t'_k = t_k(1 - a')$.

Định lý 3.1.2. *Cho T là ánh xạ không giãn trên không gian Banach trơn đều hoặc phản xạ lồi chặt E với chuẩn khả vi Gâteaux đều. Giả sử rằng t_k, β_k và α_k thỏa mãn các điều kiện* (t), (β) *và* (α), *tương ứng, hằng số $a' \in (0, 1)$. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ được cho bởi (3.6), hội tụ mạnh tới một điểm bất động của ánh xạ T.*

Nhận xét 3.1.2. (a) Ta xét trường hợp khi T là ánh xạ không giãn trên một tập con lồi đóng Q của E. Rõ ràng, với điểm khởi đầu $x^1 \in Q$, $x^k \in Q$, $T^k x^k \in Q$ với mọi k. Như vậy, nếu tập Q chứa các điểm gốc của E thì $x^{k+1} \in Q$, bởi vì $x^{k+1} = \tau_k T^k x^k$ với $\tau_k = 1 - t'_k \in (0, 1)$. Điều đó có nghĩa là phương pháp (3.6) được xác định với mỗi $x^1 \in Q$, và vì vậy, Định lý 3.1.2 có giá trị trong trường hợp này.

Khi tập Q không chứa điểm gốc nào của E, ta lấy $f = a'I + (1 - a')u$ với điểm cố định $u \in Q$. Từ đó dễ thấy rằng $F = I - f$ cũng là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt sao cho $\eta + \gamma > 1$. Từ đó, thay cho (3.6), ta có phương pháp Halpern–Ishikawa:

$$\begin{cases} x^1 \in Q, \quad \text{tùy ý}, \\ x^{k+1} = t'_k u + \big(1 - t'_k\big)T^k x^k, \ k \geq 1, \end{cases} \tag{3.7}$$

đó là phương pháp của Qin và cộng sự [J. Math. Anal. Appl., 2008] với phép đặt $t_k := t'_k$. Rõ ràng, t_k thỏa mãn điều kiện (t) khi và chỉ khi t'_k cũng như vậy. Phương pháp (3.7), theo Định lý 3.1.2, hội tụ mạnh trong không gian Banach trơn đều hoặc phản xạ lồi chặt E, điều đó có nghĩa là phương pháp của Qin ở trên cần thêm điều kiện

$$\sum_{k=1}^{\infty}|t_{k+1}-t_k|<\infty, \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{k+1}-\alpha_k|<\infty, \sum_{k=1}^{\infty}|\beta_{k+1}-\beta_k|<\infty. \qquad (3.8)$$

ngoài các điều kiện về t_k, β_k và α_k so với phương pháp đề xuất trong luận án.

(b) Cho $\tilde{a}>1$ và f là ánh xạ $\tilde{a}$-j đồng bức trên E, tức là,

$$\langle fx-fy, j(x-y)\rangle \geq \tilde{a}\|fx-fy\|^2,\ \forall x,y\in E.$$

Dễ thấy rằng f là một ánh xạ co với hệ số $1/\tilde{a}\in(0,1)$, và vì vậy, $F:=I-f$ là một ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh với $\eta = 1-(1/\tilde{a})$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned}\langle Fx-Fy, j(x-y)\rangle &= \|x-y\|^2 - \langle fx-fy, j(x-y)\rangle\\ &\leq \|x-y\|^2 - \tilde{a}\|fx-fy\|^2\\ &\leq \|x-y\|^2-\gamma\|(I-F)x-(I-F)y\|^2,\end{aligned}$$

với mỗi $\gamma\in(0,\tilde{a}]$. Với số $\gamma\in((1/\tilde{a}),\tilde{a}]$ nào đó, ta có F là một ánh xạ γ-giả co chặt với $\eta+\gamma>1$. Tiếp theo, thay thế F bởi $I-f$ trong (3.5), luận án đưa ra một phương pháp xấp xỉ mềm Ishikawa mới:

$$y^{k+1} = T^k(t_k f y^k + (1-t_k)y^k),\ y^1\in E,\ k\geq 1, \qquad (3.9)$$

đây là một cải tiến của Qin ở trên và không cần đến (3.8). Rõ ràng, nếu f là một ánh xạ $\tilde{a}$-j-đồng bức trên Q, một tập con lồi đóng của E, thì phương pháp (3.9) cũng xác định với $y^1\in Q$ nào đó.

Với một ánh xạ α-j-đồng bức f, ta có thể nhận được ánh xạ $\tilde{\alpha}$-j-đồng bức $\tilde{f}$ với $\tilde{\alpha}>1$ bằng cách xét $\tilde{f}:=\beta f$ với hằng số dương $\beta<\alpha$. Thật vậy, $\tilde{\alpha}=\alpha/\beta>1$ và

$$\begin{aligned}\langle \tilde{f}x-\tilde{f}y, j(x-y)\rangle &= \langle \beta fx-\beta fy, j(x-y)\rangle\\ &\geq \beta\alpha\|fx-fy\|^2 = \tilde{\alpha}\|\tilde{f}x-\tilde{f}y\|^2.\end{aligned}$$

3.1.2. Bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của họ ánh xạ không giãn

Mục này xét bài toán (3.1) trong trường hợp $C=\cap_{i\geq 1}\mathrm{Fix}(T_i)\neq\emptyset$, với $\{T_i\}$ là họ vô hạn ánh xạ không giãn trên E, tức là

$$\text{Tìm } p_*\in\cap_{i\geq1}\mathrm{Fix}(T_i) \text{ sao cho } \langle Fp_*, j(p_*-p)\rangle\leq 0\quad \forall p\in\cap_{i\geq1}\mathrm{Fix}(T_i). \qquad (3.10)$$

Ta định nghĩa T^k như sau:

$$T^k = (1-\beta_k)I + \beta_k W^k\big((1-\alpha_k)I + \alpha_k W^k\big), \tag{3.11}$$

ở đây $\{W^k\}$ là một dãy thỏa mãn các điều kiện:

(i) Tồn tại $Wx := \lim\limits_{k\to\infty} W^k x$ với mọi $x \in E$ và nếu $\cap_{i\geq 1}\mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$ thì ta có $\mathrm{Fix}(W) = \cap_{i\geq 1}\mathrm{Fix}(T_i)$.

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup_{x\in B} \|W^k x - Wx\| = 0$ với B là tập con bị chặn.

Nhận xét 3.1.3. Có thể thấy $S^k = \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i T_i/\tilde{\gamma}_k$ với $\tilde{\gamma}_k = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ và $V^k = T_1' \cdots T_k'$ ở đây, $T_i' = \gamma_i I + (1-\gamma_i)T_i$ với $\gamma_i \in (0,\infty)$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \tilde{\gamma} < \infty$ cũng thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) như W^k.

Luận án đưa ra một phương pháp mới là một mở rộng của kết quả trong xấp xỉ nghiệm bài toán (3.10). Chúng tôi kết hợp phương pháp đường dốc nhất với phương pháp lặp Ishikawa. Một trong các trường hợp riêng của phương pháp mới được đề xuất là phương pháp lặp Halpern.

Định lý 3.1.3. *Cho F là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt trong không gian Banach lồi, hoặc trơn đều hoặc phản xạ E, có chuẩn khả vi Gâteaux, sao cho $\eta+\gamma > 1$ và $\{T_i\}$ là họ vô hạn ánh xạ không giãn trên E sao cho $\cap_{i\geq 1}\mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Giả sử t_k, β_k và α_k tương ứng thỏa mãn các điều kiện* (t), (β) *và* (α). *Khi đó, dãy lặp $\{x^k\}$ được xác định bởi (3.3) với T^k cho trong (3.11) hội tụ mạnh tới nghiệm p_* của bài toán* (3.10).

Nhận xét 3.1.4. (a) Các Nhận xét 3.1.1 và 3.1.2 vẫn còn đúng với T^k được định nghĩa bởi (3.11).

(b) Lấy $\alpha_k = 0$ trong (3.3) và (3.11), ta có phương pháp đường dốc nhất Krasnosel'skii–Mann và mở rộng của nó tới họ vô hạn ánh xạ không giãn T_i trên E, cụ thể là phương pháp

$$x^{k+1} = (I - t_k F)((1-\beta_k)I + \beta_k W^k)x^k,\ k \geq 1,$$

và dạng tương đương của nó

$$x^{k+1} = \big((1-\beta_k)I + \beta_k W^k\big)(I - t_k F)x^k,\ k \geq 1, \tag{3.12}$$

(xem Nhận xét 3.1.1). Thay F trong (3.12) bởi $(1-a')I$, ta có phương pháp

$$y^{k+1} = \big((1-\beta_k)I + \beta_k W^k\big)(1 - t_k')y^k,\ k \geq 1.$$

Sự hội tụ mạnh của nó được Shehu [Taiwanese J. Math., 2015] chứng minh cho bài toán này trong không gian Banach lồi đều và trơn đều với các điều kiện

(t), (β), $\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in B} \|W^{k+1}x - W^k x\| = 0$ và điều kiện (i) trong định nghĩa về W^k. Marino và Muglia [Optim. Lett., 2015] thay điều kiện (ii) trong định nghĩa về W^k bởi $\lim_{k\to\infty} \|W^{k+1}x - W^k x\| = 0$ đều với $x \in B$ và kết hợp phương pháp đường dốc nhất với phương pháp Krasnosel'skii–Mann, đề xuất các phương pháp

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \beta_k x^k + (1-\beta_k)(I - t_k D)W^k x^k \text{ và} \\ x^{k+1} &= \beta_k (I - t_k D)x^k + (1-\beta_k)W^k x^k,\ k \ge 1, \end{aligned} \tag{3.13}$$

trong không gian Hilbert thực H, ở đây D là ánh xạ η-đơn điệu mạnh và L-liên tục Lipschitz. Sự hội tụ mạnh của (3.13) được chứng minh dưới các điều kiện (t) với $\lim_{k\to\infty} |t_k - t_{k+1}|/t_{k+1} = 0$, $\beta_k \in (0, \overline{a}]$ với $\lim_{k\to\infty} |\beta_k - \beta_{k+1}|/\beta_{k+1} = 0$ và thêm điều kiện về W^k liên quan đến họ ánh xạ $\{T_i\}$. Ta chú ý rằng các ánh xạ $V^k = T_1' \cdots T_k'$ ở đây $T_i' = \gamma_i I + (1-\gamma_i)T_i$ với $\gamma_i \in (0, \infty)$ sao cho $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \tilde{\gamma} < \infty$ và $S^k = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i T_i/\tilde{\gamma}_k$ với $\tilde{\gamma}_k = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ cũng thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) trong định nghĩa về W^k đã được giới thiệu trong các đề xuất của Buong và cộng sự. Năm 2016, Buong [Numer. Algorithm., 2016] đã giới thiệu các phương pháp

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= (1-\beta_k)x^k + \beta_k S^k (I - t_k F)x^k \text{ và} \\ x^{k+1} &= (1-\beta_k)S^k x^k + \beta_k (I - t_k F)x^k, \end{aligned}$$

đưa ra kết quả hội tụ mạnh trong không gian Banach phản xạ lồi chặt với chuẩn khả vi Gâteaux với các điều kiện (t) và (β).

(c) Năm 2012, Li đã nghiên cứu phương pháp trong [fixed point Theory 2012], ở đây, T^k được định nghĩa trong (3.11) với W^k-ánh xạ của Shimoji và Takahashi Katchang và Kumam đã đưa ra phương pháp:

$$x^{k+1} = t_k \gamma f(x^k) + (I - t_k A)T^k x^k,\ k \ge 1,$$

là một cải biên của phương pháp của Li ở trên và chứng minh nó hội tụ trong không gian Banach với một ánh xạ đối ngẫu j dưới các điều kiện (t), $\lim_{k\to\infty} \beta_k = 0$ và $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, ở đây, A là ánh xạ tuyến tính bị chặn dương trên E và γ là hằng số dương nào đó.

3.2. Ví dụ số minh họa

Mục này đưa ra ví dụ số minh họa phương pháp đường dốc nhất dạng Ishikawa giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của một hoặc một họ ánh xạ không giãn. Với họ các ánh xạ không giãn $T_i = (1 - 1/(i+1))I$, $E = \mathbb{R}^1$, ta có $\cap_{i\geq 1}\mathrm{Fix}(T_i) = \{0\}$ và $\lim\limits_{k\to\infty} T_k x = Ix$ với mỗi $x \in \mathbb{R}^1$. Vì vậy, điều kiện (i) trong định nghĩa về W^k không thỏa mãn vì $\mathrm{Fix}(I) = \mathbb{R}^1$.

Họ $\{T_i = P_{C_i}\}$, ở đây P_{C_i} là phép chiếu mêtric của $H = \mathbb{E}^2$, một không gian Euclide, lên tập $C_i = \{x = (x_1, x_2) \in H \mid a_i \leq x_2 \leq b_i\}$ với $a_i = 1 - 1/(i+1)$ và $b_i = 2 + 1/(i+1)$ với mọi $i \geq 1$, thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) trong định nghĩa về W^k. Trong trường hợp này, ta có $C = \cap_{i=1}^{\infty} C_i = \{x \in \mathbb{E}^2 \mid 1 \leq x_2 \leq 2\}$ và ta có thể lấy $W^k = T_k$ với mọi $k \geq 1$. Lấy $u = (1.0; 0.0)$, ta có nghiệm của (3.10) là $p_* = (1.0; 1.0)$. Trong nội dung tiếp theo, ta sẽ sử dụng phần mềm Matlab để tính toán ví dụ này.

Bây giờ sử dụng phương pháp (3.7) và T^k trong (3.11) với điểm bắt đầu là $x^1 = (2.5; 2.5)$, $t_k = 1/(k+1)$, $\beta_k = 0.2 + 1/(k+1)$ và $\alpha_k = 1/(k+1)$. Kết quả tính toán được đưa ra trong Bảng 3.1.

Bảng 3.1: Kết quả tính theo công thức (3.7) và (3.11) với $W^k = T_k$

k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}
10	1.1363636364	0.6411155490	100	1.0148514851	0.9431215161
20	1.0714285714	0.7700827178	200	1.0074626866	0.9707901594
30	1.0483870968	0.8326554114	300	1.0049833887	0.9803526365
40	1.0365853659	0.8687796127	400	1.0037406484	0.9851987678
50	1.0294117647	0.8921748170	500	1.0029940120	0.9881273689

Trong trường hợp $a_i = 1 + 1/(i+1)$, ta có $C = \{x \in \mathbb{E}^2 \mid 1.5 \leq x_2 \leq 2\}$ và $p_* = (1.0; 1.5)$. Hơn nữa, điều kiện (i) trong định nghĩa về W^k đối với T_k, tức là $W^k = T_k$, không xảy ra. Để tính toán bằng phương pháp (3.7), ta dùng $W^k = S^k$ trong (3.11) ở đây $S^k = \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i T_i / \tilde{\gamma}_k$ với $\tilde{\gamma}_k = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ với $\gamma_i = 1/i(i+1)$. Các kết quả tính toán được đưa ra trong Bảng 3.2.

Trong ví dụ số minh họa cho phương pháp mà luận án đề xuất đã khẳng định sự giảm nhẹ hơn các điều kiện đặt lên phương pháp. Hơn nữa, kết quả của ví dụ cũng khẳng định đề xuất này tổng quát hơn hai phương pháp mà Nguyễn Bường và các cộng sự đề xuất trong [Comput. Mat. and Mat. Phyics, 2012] và [J. Optim. Theory Appl, 2011].

Kết luận

Chương 3 của Luận án đề xuất một số phương pháp tìm nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của một hoặc một họ ánh xạ không giãn, chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp đề xuất. Các kết quả mới đề xuất

Bảng 3.2: Kết quả tính theo công thức (3.7) và (3.11) với $W^k = S^k$.

k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}
10	0.8226906920	0.9967100188	100	0.8216765320	1.3503455533
20	0.8116106625	1.1196844726	200	0.8261485102	1.4207098495
30	0.8123975068	1.1852032060	300	0.8280615950	1.4464230799
40	0.8142620005	1.2298614455	400	0.8291386059	1.4595495405
50	0.8160321266	1.2628985966	500	0.8298349294	1.4675113528

(Gọi là phương pháp mới) có 3 ưu điểm sau:

1. Phương pháp mới này hội tụ mạnh, còn phương pháp Ishikawa hội tụ yếu.

2. Dãy W^k được chọn ở phương pháp mới này là tổng quát của dãy S^k và V^k trong các nghiên cứu trước của Ng.Buong và cộng sự trong các nghiên cứu xuất đề xuất năm 2012 và 2018 Nghĩa là kết quả của hai nghiên cứu này là hai trường hợp riêng của kết quả mới được trình bày trong luận án.

3. Phương pháp Halpern là trường hợp riêng của phương pháp mới này.

Cuối chương 3, luận án cũng đưa ra các ví dụ số minh họa cho tốc độ lội tụ của các phương pháp đề xuất.

KẾT LUẬN VÀ CÁC HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

KẾT LUẬN

Luận án đã đạt được các kết quả sau:

1. Đề xuất phương pháp hiệu chỉnh lặp giải bài toán chấp nhận tách đa tập (MSSFP) trong một số không gian Hilbert thực, chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp đề xuất và tính toán ví dụ minh họa (xem **[CT2]** trong Danh mục các công trình công bố của tác giả). Hiệu quả của phương pháp đề xuất là tham số lặp γ_k được chọn không phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển.
2. Giới thiệu phương pháp hiệu chỉnh lặp giải bài toán trùng tách đa tập (MSFEP) trong một số không gian Hilbert thực, chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp đề xuất và tính toán ví dụ minh họa (xem **[CT3]** trong Danh mục các công trình công bố của tác giả). Phương pháp được đề xuất trong các trường hợp tập chỉ số J_1 và J_2 là các họ vô hạn tập đếm được hoặc là các tập có số phần tử hữu hạn hoặc một trong hai tập có số phần tử hữu hạn, tập còn lại có số phần tử vô hạn. Phương pháp được đề xuất trong luận án tốt hơn phương pháp của Chen và cộng sự trong [35], đó là, ở mỗi bước lặp chỉ phải tính toán trên một tổng hữu hạn thay cho việc tính toán trên một tổng vô hạn như trong nghiên cứu của Chen và các cộng xự. Chú ý rằng, việc tính toán trên các tổng vô hạn là rất phức tạp và tốn kém về chi phí tính toán.
3. Đề xuất một một số phương pháp lặp mới, kết hợp giữa phương pháp đường dốc nhất với phương pháp Ishikawa xấp xỉ nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn hoặc trên tập điểm bất động chung của một họ các ánh xạ không giãn trong không gian Banach. Chứng minh sự hội tụ mạnh của các phương pháp đề xuất, xét các trường hợp đặc biệt của phương pháp và tính toán ví dụ minh họa (xem **[CT1]** trong Danh mục các công trình công bố của tác giả).

HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

Trong thời gian tới:

1. Chúng tôi mở rộng các kết quả trong Chương 2 và Chương 3 cho trường hợp T_i, U_i là các ánh xạ giả co trên không gian Hilbert.

2. Nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh lặp loại Extragradient cho bài toán xét trong Chương 3 với F là ánh xạ η-đơn điệu mạnh và L-liên tục Lipschitz.

3. Nghiên cứu sự kết hợp giữa thành phần quán tính và các phương pháp lặp hiệu chỉnh để làm tăng tốc độ hội tụ của phương pháp này.

DANH MỤC CÁC BÀI BÁO ĐÃ XUẤT BẢN LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Buong Ng., Anh Ng.T.Q., Binh K.T., (2020), Steepest-Descent Ishikawa Iterative Methods for a Class of Variational Inequalities in Banach Spaces, Filomat, (2020), 34 (5), 1557–1569. (SCI-E, Q2).
2. Buong Ng., Hoai P.T.T, Binh K.T, (2020), New Iterative regularization methods for the multiple-sets split feasibility problem, Journal of Computational and Applied Mathematics 388(3), 113291. DOI 10-1016/j cam 2020. (SCI, Q2).
3 . Buong Ng., Anh Ng.T.Q., Binh K.T., 2020, Iterative methods for the multiple-sets split equality problem in Hilbert spaces, Proceedings of the 23th National Conference:Some selected issues of Information and Communications Technology -- Quang Ninh, 5--6/11/2020, 151--157