

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ



Cao Văn Đoàn

**ỔN ĐỊNH TÍNH ĐÀN HỒI PHI TUYẾN CỦA MỘT SỐ
TẤM VÀ VỎ COMPOSITE GIA CƯỜNG GRAPHENE
CHỊU TẢI CƠ TRONG MÔI TRƯỜNG NHIỆT**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ CƠ KỸ THUẬT

Hà nội - 2024

**BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO**

**VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM**

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ



Cao Văn Đoàn

**ỔN ĐỊNH TÍNH ĐÀN HỒI PHI TUYẾN CỦA MỘT SỐ
TẤM VÀ VỎ COMPOSITE GIA CƯỜNG GRAPHENE
CHỊU TẢI CƠ TRONG MÔI TRƯỜNG NHIỆT**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ CƠ KỸ THUẬT

Mã số: 952 01 01

**Xác nhận của Học viện
Khoa học và Công nghệ**

Người hướng dẫn 1

Người hướng dẫn 2

PGS.TS. Vũ Hoài Nam PGS.TS. Đào Như Mai

Hà nội - 2024

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận án tiến sĩ: "*Ổn định tĩnh đàn hồi phi tuyến của một số tấm và vỏ composite gia cường graphene chịu tải cơ trong môi trường nhiệt*" là công trình nghiên cứu của chính tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của tập thể hướng dẫn. Luận án này sử dụng thông tin trích dẫn từ các nguồn tham khảo khác nhau và thông tin trích dẫn được tác giả luận án ghi rõ nguồn gốc. Các kết quả nghiên cứu trong luận án của tôi được công bố chung với các tác giả khác, và đã được sự nhất trí của tất cả đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các số liệu, kết quả số được trình bày trong luận án này là hoàn toàn trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ một công trình nào khác ngoài các công trình công bố của tôi. Luận án này đã được tôi hoàn thành trong thời gian tôi làm nghiên cứu sinh tại Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện cơ học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Hà Nội, ngày tháng năm 2024

Tác giả luận án

Cao Văn Đoàn

LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận án xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến PGS.TS Vũ Hoài Nam và PGS.TS Đào Như Mai đã tận tình hướng dẫn, hỗ trợ, động viên và tạo mọi điều kiện tốt để tác giả hoàn thành luận án.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu, tác giả đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ, hỗ trợ của tập thể lãnh đạo, cán bộ, các nhà khoa học trong Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Cơ học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc về những sự giúp đỡ đó.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thành viên trong hội đồng khoa học các cấp, đã dành thời gian quý báu để đọc, phản biện và góp ý đánh giá luận án. Những nhận xét và đánh giá đó đã giúp tác giả hoàn thiện và nâng cao chất lượng của luận án này.

Tác giả luận án xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới PGS.TS. Nguyễn Thị Phương đã quan tâm, động viên, giúp đỡ và có những đóng góp thực sự quý báu trong quá trình tác giả thực hiện luận án.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Đảng ủy, Ban Giám Hiệu của Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải và các đồng nghiệp trong Bộ môn Địa Kỹ Thuật Xây Dựng và Metro, Khoa Công trình đã tạo điều kiện thuận lợi nhất, luôn động viên và luôn quan tâm trong quá trình tác giả nghiên cứu và hoàn thiện luận án.

Cuối cùng, tác giả luận án xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới gia đình, đồng nghiệp, bạn bè và những người thân đã luôn ủng hộ và chia sẻ những khó khăn của tác giả trong suốt thời gian thực hiện luận án.

Hà Nội, ngày tháng năm 2024

Tác giả luận án

Cao Văn Đoàn

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN	i
LỜI CẢM ƠN	ii
MỤC LỤC.....	iii
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CÁC CHỮ VIẾT TẮT.....	vi
DANH MỤC CÁC BẢNG.....	viii
DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ.....	xii
MỞ ĐẦU.....	1
CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN.....	5
1.1. Carbon nanotube và Graphene	5
1.1.1. Carbon nanotube	5
1.1.2. Vật liệu graphene	5
1.2. Các loại composite có cơ tính biến thiên	7
1.2.1. Composite có cơ tính biến thiên FGM.....	7
1.2.2. Composite gia cường ống nano các-bon có cơ tính biến thiên (FG-CNTRC)..	7
1.2.3. Composite gia cường graphene có cơ tính biến thiên.....	8
1.3. Ổn định và sau mất ổn định	11
1.4. Tổng quan các nghiên cứu về vật liệu có cơ tính biến thiên.....	13
1.4.1. Một số nghiên cứu trong nước về kết cấu FGM và kết cấu FG-CNTRC	13
1.4.2. Các nghiên cứu về kết cấu FG-GRMMC.....	15
1.4.3. Các nghiên cứu về kết cấu FG-GPLRC	16
1.4.4. Các nghiên cứu về kết cấu FG-GRC.....	17
1.5. Những kết quả nghiên cứu đã đạt được về kết cấu FG-GRC	20
1.6. Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu.....	21
CHƯƠNG 2. ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ VÀ VỎ TRỐNG FG-GRC CÓ GÂN GIA CƯỜNG, CÓ LỖI AUXETIC	22
2.1. Mô hình vỏ trống.....	23
2.1.1. Vỏ trống FG- GRC có gân gia cường.	23
2.1.2. Vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic.....	24
2.2. Các đặc trưng của vật liệu FG-GRC và lõi Auxetic	26
2.3. Các phương trình cơ bản	28
2.3.1. Bài toán vỏ trống và vỏ trụ chịu tải xoắn.....	32
2.3.2. Bài toán vỏ trống và vỏ trụ FG-GRC chịu tải dọc trục.....	36
2.4. So sánh kết quả.....	39
2.4.1. So sánh kết quả bài toán vỏ trống và vỏ trụ chịu tải xoắn	39
2.4.2. So sánh kết quả bài toán vỏ trống và vỏ trụ chịu tải nén dọc trục	40
2.5. Khảo sát số và thảo luận.....	41
2.5.1. Vỏ trống FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu tải trọng xoắn	41

2.5.2. Vỏ trống sandwich FG-GRC lõi Auxetic có nền đàn hồi bao quanh chịu tải trọng xoắn.....	47
2.5.3. Vỏ trụ tròn FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu tải trọng xoắn.....	53
2.5.4. Vỏ trống sandwich FG-GRC lõi Auxetic có nền đàn hồi bao quanh chịu tải dọc trục.....	59
2.5.5. Vỏ trụ FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu nén dọc trục.....	65
2.6. Kết luận.....	70
CHƯƠNG 3. ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI PHI TUYẾN CỦA TẤM CHỮ NHẬT VÀ PANEL TRỤ FG-GRC CÓ GÂN GIA CƯỜNG THEO HSĐT.....	72
3.1. Mô hình Panel trụ áp điện FG-GRC có gân gia cường.....	73
3.2. Các phương trình cơ bản.....	74
3.2.1. Phương trình biến dạng và nội lực.....	74
3.2.2. Hệ phương trình cân bằng và phương trình tương thích biến dạng.....	80
3.2.3. Các điều kiện biên và phương trình chủ đạo.....	81
3.3. Các bài toán cụ thể.....	84
3.3.1. Ổn định phi tuyến của tấm chữ nhật và panel trụ FG-GRC có gân gia cường chịu tải áp lực ngoài.....	84
3.3.2. Ổn định phi tuyến của tấm chữ nhật và panel trụ FG-GRC có gân gia cường chịu nén một phương và áp lực ngoài.....	85
3.3.3. Ổn định phi tuyến của tấm chữ nhật và panel trụ FG-GRC có gân gia cường chỉ chịu nén một phương.....	85
3.4. So sánh kết quả nghiên cứu.....	86
3.5. Kết quả khảo sát và thảo luận.....	87
3.5.1. Kết quả bài toán tấm chữ nhật FG-GRC và tấm áp điện FG-GRC có gân gia cường chịu nén một phương và áp lực ngoài trong môi trường nhiệt.....	87
3.5.2. Kết quả bài toán panel trụ FG-GRC và panel trụ áp điện FG-GRC có gân gia cường chịu nén dọc trục.....	96
3.6. Kết luận chương 3.....	106
CHƯƠNG 4. ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI PHI TUYẾN CỦA PANEL PARABOL VÀ PANEL HÌNH SIN FG – GRC THEO HSĐT.....	107
4.1. Mô hình panel Parabol, panel hình Sin và panel trụ trên nền đàn hồi phi tuyến.....	108
4.2. Các phương trình cơ bản.....	109
4.3. Các bài toán.....	111
4.3.1. Panel chịu nén dọc trục.....	111
4.3.2. Panel chịu áp lực ngoài.....	111
4.4. So sánh kết quả nghiên cứu.....	112
4.5. Các kết quả khảo sát và thảo luận.....	114
4.5.1. Khảo sát panel FG-GRC chịu nén dọc trục.....	114

4.5.2. Khảo sát panel FG-GRC chịu áp lực ngoài.....	121
4.6. Kết luận chương 4	125
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....	127
DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN.....	129
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	131
PHỤ LỤC.....	146

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CÁC CHỮ VIẾT TẮT

Ký hiệu	Tiếng Anh và Tiếng Việt
CLT	Classical theory - Lý thuyết vỏ cổ điển
CNT	Carbon Nanotube - Ống nano các-bon
CNTRC	Carbon Nanotube-Reinforced Composite - Vật liệu composite gia cường ống nano các-bon
EM	Energy method - phương pháp năng lượng
FGM	Functionally graded material - vật liệu cơ tính biến thiên
FG-GRC	Functionally graded graphene reinforced composite - vật liệu composite gia cường graphene có cơ tính biến thiên
FG-GPLRC	Functionally graded graphene platelets reinforced composite - vật liệu composite gia cường graphene paltelets có cơ tính biến thiên
FG-GRMMC	Functionally graded graphene reinforced metal matrix composite - vật liệu composite nền kim loại gia cường graphene có cơ tính biến biên
FG-CNTRC	Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite - Vật liệu composite gia cường ống nano các-bon có cơ tính biến thiên
FSDT	First-order shear deformation theory - lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất
FEM	Finite element method - phương pháp phần tử hữu hạn
FFFF	Điều kiện biên 1: Các cạnh của vỏ tựa đơn tự do dịch chuyển (freely movable)
FIFI	Điều kiện biên 2: Các cạnh của vỏ tựa đơn, trong đó cạnh $x=0, x=a$ tựa tự do (freely movable), cạnh $y=0, y=b$ tựa cố định (immovable),
GRC	Graphene reinforced composite - composite gia cường graphene
GPL	Graphene platelet - mảnh graphene
GPLRC	Graphene platelets reinforced composite - vật liệu composite gia cường graphene paltelets

Ký hiệu	Tiếng Anh và Tiếng Việt
HSDT	Higher-order shear deformation theory - lý thuyết biến dạng trượt bậc cao
III	Điều kiện biên 3: Các cạnh của vỏ tựa đơn cố định không thể dịch chuyển (immovable)
K_1, K_2	Nondimensional stiffness parameters of elastic foundation - Độ cứng nền Winkler và độ cứng lớp trượt của nền Pasternak
K_3	Stiffness parameters nonlinear foundation - Độ cứng nền phi tuyến
PMMA	Poly methyl methacrylate
PZT-5A	Lead zirconate titanate - Vật liệu áp điện
UD	Uniform Distribution - Phân bố đều

DANH MỤC CÁC BẢNG

<i>Bảng 1.1.</i> Tỷ phần thể tích graphene $V_{GPL(k)}$ trong các kết cấu FG-GPLRC theo các nghiên cứu của Kiani và Mirzaei [28], Sahmani và Aghdam [29], Thai và Phung [30], Habibi và các cộng sự [31].....	8
<i>Bảng 1.2.</i> Tỷ phần thể tích graphene trong các lớp vỏ FG-GRC [32–35]	10
<i>Bảng 1.3.</i> Tỷ phần thể tích graphene trong các lớp vỏ FG-GRMMC[43].....	11
<i>Bảng 2.1.</i> Các mô đun đàn hồi, mô đun trượt, và các tham số hiệu dụng cho vật liệu nano graphene [32].....	27
<i>Bảng 2.2.</i> So sánh mô men xoắn tới hạn $M_{cr} = 2\pi h a^2 \tau_{cr}$ (kN.m) của vỏ trụ FG-GRC không gân gia cường với các kết quả nghiên cứu của Shen và Xiang [113] ($a/h = 30$, $h = 2mm$, $L^2/ah = 400$, $T = 300K$)	39
<i>Bảng 2.3.</i> So sánh tải xoắn tới hạn τ_{cr} (MPa) của vỏ trụ FGM không gân với các nghiên cứu khác ($L/a = 2$, $h = 1mm$, $T = 300K$, $m = 1$)	39
<i>Bảng 2.4.</i> So sánh tải tới hạn $\bar{p}_{cr} = 2\pi a h p_{cr}$ (kN) của vỏ trụ tròn FG-GRC không gân chịu nén ($a/h = 20$, $h = 2mm$, $T = 300K$)	40
<i>Bảng 2.5.</i> Ảnh hưởng của hệ thống gân, quy luật phân bố graphene và hướng bố trí GRC đến tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trống FG-GRC ($\Delta T = 0K$, $a/h = 100$, $R = 5m$, $m = 1$).....	42
<i>Bảng 2.6.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trống FG-GRC ($a/h = 100$, $R = 5m$, $m = 1$)	43
<i>Bảng 2.7.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trống FG-GRC gia cường gân trực giao ($\Delta T = 200K$, $R = 5m$, $m = 1$)	45
<i>Bảng 2.8.</i> Ảnh hưởng của bán kính dọc đến tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trống FG-GRC ($(0/90)_{5T}$, $\Delta T = 0K$, $a/h = 100$, $m = 1$).....	45
<i>Bảng 2.9.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trống FG-GRC gia cường gân trực giao ($(0/90)_{5T}$, $\Delta T = 0K$, $R = 5m$, $a/h = 100$, $m = 1$)	46
<i>Bảng 2.10.</i> Tải xoắn tới hạn của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic và lõi đặc (MPa, $L = 1.5a$, $a/h = 80$, $h = 4mm$)	47
<i>Bảng 2.11.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống sandwich lõi Auxetic (MPa, $L = 1.5a$, $h = 4mm$).....	49
<i>Bảng 2.12.</i> Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic (MPa, $L = 1.5a$, $a/h = 80$, $h = 4mm$, $(0/90/0/90/0)_S$)	50
<i>Bảng 2.13.</i> Ảnh hưởng của độ dày lớp lõi Auxetic đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống FG-GRC (MPa, $a = 0.32m$, $L = 1.5a$).....	51
<i>Bảng 2.14.</i> Ảnh hưởng của các đặc trưng hình học của lớp lõi Auxetic đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống FG-GRC (MPa, $L = 1.5a$, $a/h = 80$, $h = 4mm$)	52
<i>Bảng 2.15.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic (MPa, $L = 1.5a$, $a/h = 80$, $h = 4mm$).....	52

<i>Bảng 2.16.</i> Tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trụ tròn FG-GRC trong trường hợp có và không có gân gia cường với sự thay đổi nhiệt độ môi trường ($L=1.5a$, $a/h=80$)	54
<i>Bảng 2.17.</i> Tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trụ tròn FG-GRC tương ứng với các tỷ số a/h ($L=1.5a$, $m=1$)	57
<i>Bảng 2.18.</i> Tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trụ tròn FG-GRC tương ứng với các độ cứng nền đàn hồi tuyến tính ($L=1.5a$, $m=1$)	58
<i>Bảng 2.19.</i> Tải nén và kéo tới hạn của vỏ trống lõi Auxetic tương ứng với các bán kính dọc R (MPa, $L=1.5a$, $a/h=80$, $h=4$ mm, $(0/90/0/90/0)_S$)	59
<i>Bảng 2.20.</i> Tải nén và kéo tới hạn của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic hoặc lõi đặc (MPa, $L=1.5a$, $a/h=80$, $h=4$ mm)	60
<i>Bảng 2.21.</i> Ảnh hưởng của các thông số hình học lớp lõi Auxetic đến tải nén và kéo tới hạn của vỏ trống sandwich FG-GRC (MPa, $L=1.5a$, $a/h=80$, $R=4a$, $h=4$ mm, $(0/90)_{5T}$)	62
<i>Bảng 2.22.</i> Ảnh hưởng của bề dày lớp lõi Auxetic đến tải nén và kéo tới hạn của vỏ trống sandwich FG-GRC (MPa, $a=0.32$ m, $R=4a$, $L=1.5a$, $(0)_{10}$)	63
<i>Bảng 2.23.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải nén và kéo tới hạn của vỏ trống lõi Auxetic (MPa, $L=1.5a$, $R=4a$, $h=4$ mm, $(0)_{10}$)	63
<i>Bảng 2.24.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải tới hạn của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic (MPa, $L=1.5a$, $a/h=80$, $R=4a$, $h=4$ mm, $(0/90)_{5T}$)	64
<i>Bảng 2.25.</i> Tải nén tới hạn p_{cr} (GPa) của vỏ trụ FG-GRC trong trường hợp có và không có gân gia cường với sự thay đổi nhiệt độ môi trường ($L=1.5a$, $a=80h$, $h=2$ mm, $m=1$)	66
<i>Bảng 2.26.</i> Tải nén tới hạn p_{cr} (GPa) của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục tương ứng với tỷ số a/h ($T=400$ K)	68
<i>Bảng 2.27.</i> Tải nén tới hạn p_{cr} (GPa) của vỏ trụ FG-GRC với các giá trị độ cứng nền đàn hồi ($T=400$ K, $a/h=80$, $h=2$ mm, $m=1$)	68
<i>Bảng 2.28.</i> Tải nén tới hạn p_{cr} (GPa) của vỏ trụ FG-X and FG-A với các loại gân khác nhau ($a/h=80$, $h=2$ mm, $m=1$)	69
<i>Bảng 3.1.</i> So sánh tải tới hạn $P_{cr} = \sigma_x (a/h)^2 E_0$ cho tấm hoàn hảo $(0/90/0/90/0)_S$ FG-GRC chịu tải trọng nén một phương trong môi trường nhiệt ($E_0 = 2.5$ GPa, $a/b=1$, $(m;n)=(1;1)$, $h=2$ mm)	86
<i>Bảng 3.2.</i> So sánh tải tới hạn $P_{cr} = \sigma_x (a/h)^2 E_0$ (kN) cho panel FG-GRMMC chịu tải trọng nén dọc trục (FFFF, $a=20h$, $h=3$ mm, $b/a=0.8$, $a/R=0.8$, $\Delta T=0$ K, $(m;n)=(1;1)$)	87
<i>Bảng 3.3.</i> Ảnh hưởng của các kiểu gia cường graphene, hướng bố trí GRC và hệ thống gân gia cường đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của tấm FG-GRC (FFFF, $a/b=1$, $a/h=20$, $\Delta T=0$ K, $\xi=0$, $q=0$, $(m;n)=(1;1)$)	88

<i>Bảng 3.4.</i> Ảnh hưởng của các kiểu gia cường graphene, hướng bố trí GRC và hệ thống gân gia cường đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của tấm áp điện FG-GRC ($a/b=1, a=20h, (m;n)=(1;1), \Delta T=0, q=0, FFFF$)	89
<i>Bảng 3.5.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của tấm chịu nén một phương (FFFF, $a/b=1, a/h=20, (m;n)=(1;1), q=0, \xi=0$)	92
<i>Bảng 3.6.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của tấm chịu nén một phương (FFFF, $a/b=1, (m;n)=(1;1), q=0, \xi=0$).....	93
<i>Bảng 3.7.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của tấm FG-GRC(y) ((0/90) _{5T} , FFFF, $a/b=1, a/h=20, (m;n)=(1;1), q=0, \xi=0, \Delta T=0$ K, $K_3=0$ N/m ⁵).....	95
<i>Bảng 3.8.</i> Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường, các kiểu bố trí graphene và hướng GRC đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của panel trụ FG-GRC (FFFF, $a/b=1, a=20h, R=0.1$ m, $\Delta T=0$ K)	97
<i>Bảng 3.9.</i> Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường, các kiểu bố trí graphene và hướng GRC đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của panel trụ áp điện FG-GRC (FFFF, $a=20h, R=0.1$ m, $\Delta T=0$).....	98
<i>Bảng 3.10.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1, a=20h, (m;n)=(1;1), R=0.1$ m).....	101
<i>Bảng 3.11.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1, a=20h, R=0.1$ m, $\Delta T=0, (m;n)=(1;1)$)	101
<i>Bảng 3.12.</i> Ảnh hưởng của bán kính R đến tải tới hạn của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1, a=20h, (m;n)=(1;1), \Delta T=0$ K).....	102
<i>Bảng 3.13.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của panel FG-GRC(x) chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1, (m;n)=(1;1) \Delta T=0$ K).....	104
<i>Bảng 3.14.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1, (m;n)=(1;1), \Delta T=0$ K)	104
<i>Bảng 4.1.</i> So sánh tải tới hạn $P_{cr} = \sigma_x (a/h)^2 E_0$ cho tấm (0/90/0/90/0) _S FG-GRC chịu tải trọng nén theo phương x trong môi trường nhiệt ($(m;n)=(1;1), a/b=1, h=2$ mm)	113
<i>Bảng 4.2.</i> So sánh tải tới hạn P_{cr} (kN) cho panel trụ FG-GRMMC chịu tải trọng nén dọc trục (FFFF, $a=20h, h=3$ mm, $b/a=0.8, a/R=0.8, \Delta T=0$ K, $(m;n)=(1;1)$)	113
<i>Bảng 4.3.</i> Ảnh hưởng của kiểu phân bố graphene và nhiệt độ đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của ba loại panel FG-GRC chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1, h=2$ mm, $a=20h, H=1.5h, R=0.068167$ m, $(m;n)=(1;1)$).....	115

<i>Bảng 4.4.</i> Ảnh hưởng của độ nâng H đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của các loại panel chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1, h=2mm, a=20h, \Delta T=0$ K, $(m;n)=(1;1)$) ...	118
<i>Bảng 4.5.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của các loại panel (FFFF, $a/b=1, h=2mm, \Delta T=0$ K, $(m;n)=(1;1)$).....	119
<i>Bảng 4.6.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của ba loại panel chịu nén dọc trục (FFFF, $(0/90)_{5T}, a/b=1, h=2mm, a/h=20, H=1.5h, R=0.068167m, \xi=0, \Delta T=0$ K, $K_3=0$ N/m ⁵ , $(m;n)=(1;1)$).....	120

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ

<i>Hình 1.1.</i> a) Dải Graphene 2D, b) Fullerebe 0D c) Ống các-bon 1D, d) Graphite 3D [5]	5
<i>Hình 1.2.</i> Cạnh Armchair và cạnh Zigzag của graphene trong nền Polymer	9
<i>Hình 1.3.</i> Sự phân bố tỷ phần thể tích graphene trong các lớp vỏ FG-GRC	10
<i>Hình 1.4.</i> Các dạng đường cong tải - độ võng lớn nhất của các tấm vỏ khi chịu tải	12
<i>Hình 2.1.</i> Vỏ trống lõi và vỏ trống lõm gia cường hệ thống gân	23
<i>Hình 2.2.</i> Quy luật phân bố graphene trong vỏ và gân	24
<i>Hình 2.3.</i> Cấu trúc 2D Auxetic của Masters và Evans [140]	25
<i>Hình 2.4.</i> Mô hình vỏ trống lõi Auxetic	26
<i>Hình 2.7.</i> Mô hình vỏ trống FG-GRC chịu tải dọc trục	36
<i>Hình 2.8.</i> So sánh tải mô men xoắn tới hạn M_{cr} cận trên và cận dưới của vỏ trụ tròn đẳng hướng với các nghiên cứu [151, 152]	40
<i>Hình 2.9.</i> So sánh đường cong tải - độ co cạnh biên với nghiên cứu của Huang và Han [153] trong trường hợp vỏ trụ FGM chịu nén dọc trục	40
<i>Hình 2.10.</i> Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường đến đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC	41
<i>Hình 2.11.</i> Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC	41
<i>Hình 2.12.</i> Đường cong $\tau - W_{max}/h$ của năm loại vỏ trống FG-GRC	43
<i>Hình 2.13.</i> Đường cong $\tau - \varphi$ của năm loại vỏ trống FG-GRC	43
<i>Hình 2.14.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC	44
<i>Hình 2.15.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC	44
<i>Hình 2.16.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC	44
<i>Hình 2.17.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC	44
<i>Hình 2.18.</i> Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC	45
<i>Hình 2.19.</i> Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC	45
<i>Hình 2.20.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC	46
<i>Hình 2.21.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC	46
<i>Hình 2.22.</i> Ảnh hưởng của các lớp lõi đến các đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trống lõi và vỏ trống lõm FG-GRC	48
<i>Hình 2.23.</i> Ảnh hưởng của các lớp lõi đến các đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống lõi và vỏ trống lõm FG-GRC	48

<i>Hình 2.24.</i> Ảnh hưởng của sự phân bố graphene đến các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống lồi (a) và vỏ trống lõm (b) FG-GRC.....	48
<i>Hình 2.25.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống lồi và vỏ trống lõm FG-GRC	49
<i>Hình 2.26.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến các đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống lồi và vỏ trống lõm FG-GRC	49
<i>Hình 2.27.</i> Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống lồi và vỏ trống lõm FG-GRC.....	50
<i>Hình 2.28.</i> Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến các đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống lồi và vỏ trống lõm FG-GRC	50
<i>Hình 2.29.</i> Ảnh hưởng của chiều dày lớp lõi Auxetic đến các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống lồi (a) và vỏ trống lõm (b) FG-GRC	51
<i>Hình 2.30.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic.....	52
<i>Hình 2.31.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến các đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic.....	52
<i>Hình 2.33.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trụ tròn FG-GRC.....	56
<i>Hình 2.34.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trụ tròn FG-GRC	56
<i>Hình 2.35.</i> Ảnh hưởng của các kiểu phân bố graphene đến đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trụ tròn FG-GRC.....	56
<i>Hình 2.36.</i> Tải tới hạn cận trên và cận dưới của vỏ trụ tròn FG-GRC.....	56
<i>Hình 2.37.</i> Ảnh hưởng của các tỷ số a/h đến đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trụ tròn FG-GRC	57
<i>Hình 2.38.</i> Ảnh hưởng của các tỷ số a/h đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trụ tròn FG-GRC.....	57
<i>Hình 2.39.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trụ tròn FG-GRC	58
<i>Hình 2.40.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trụ tròn FG-GRC	58
<i>Hình 2.41.</i> Đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trụ tròn FG-X và FG-A khi được gia cường bởi các hệ thống gân khác nhau	59
<i>Hình 2.42.</i> Ảnh hưởng của các lớp lõi đến các đường cong $p_c - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC chịu nén dọc trục	61
<i>Hình 2.43.</i> Ảnh hưởng của các lớp lõi đến các đường cong $p_t - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC chịu kéo dọc trục	61
<i>Hình 2.44.</i> Ảnh hưởng của sự phân bố graphene đến các đường cong $p_c - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu nén dọc trục	61
<i>Hình 2.45.</i> Ảnh hưởng của sự phân bố graphene đến các đường cong $p_t - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu kéo dọc trục	61

<i>Hình 2.46.</i> Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến các đường cong $p_c - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu nén dọc trục	62
<i>Hình 2.47.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến các đường cong $p_c - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu nén.....	64
<i>Hình 2.48.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến các đường cong $p_t - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu kéo.....	64
<i>Hình 2.49.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến các đường cong $p_c - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu nén dọc trục	64
<i>Hình 2.50.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến các đường cong $p_t - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu kéo dọc trục	64
<i>Hình 2.52.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $p - W_{\max}/h$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục	67
<i>Hình 2.53.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $p - \bar{\Delta}_x$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục	67
<i>Hình 2.54.</i> Đường cong $p - W_{\max}/h$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục tương ứng với các kiểu phân bố graphene	67
<i>Hình 2.55.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $p - W_{\max}/h$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục	67
<i>Hình 2.56.</i> Đường cong $p - W_{\max}/h$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục tương ứng với các giá trị độ cứng nền đàn hồi	69
<i>Hình 2.57.</i> Đường cong $p - W_{\max}/h$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục tương ứng với sự phân bố graphene trong gân gia cường	69
<i>Hình 3.1.</i> Hình dạng và hệ tọa độ của Panel áp điện FG-GRC có gân gia cường	73
<i>Hình 3.2.</i> Mô hình panel FG-GRC chịu áp lực ngoài và nén dọc trục trên nền đàn hồi phi tuyến.....	74
<i>Hình 3.3.</i> So sánh đường cong $qa^4/E_m h^4 - W/h$ của tấm FG-GRC với nghiên cứu của Shen và cộng sự [34]	87
<i>Hình 3.4.</i> Mô hình tấm FG-GRC có gân gia cường FG-GRC	88
<i>Hình 3.5.</i> Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm chịu nén một phương.....	89
<i>Hình 3.6.</i> Ảnh hưởng của hệ thống gân đến đường cong $q - W/h$ của tấm FG-GRC và tấm áp điện FG-GRC.....	90
<i>Hình 3.7.</i> Ảnh hưởng của các kiểu phân bố graphene đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm chịu nén một phương và áp lực ngoài	90
<i>Hình 3.8.</i> Ảnh hưởng của các kiểu phân bố graphene đến đường cong $q - W/h$ của tấm chịu nén một phương và áp lực ngoài	91
<i>Hình 3.9.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm chịu nén một phương.....	91
<i>Hình 3.10.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $q - W/h$ của tấm FG-GRC có gân gia cường chịu nén một phương và áp lực ngoài	92

<i>Hình 3.11.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm FG-GRC có gân gia cường chịu nén một phương và áp lực ngoài	92
<i>Hình 3.12.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm FG-GRC(y) chịu nén một phương	94
<i>Hình 3.13.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $q - W/h$ của tấm FG-GRC(y) chịu tải áp lực ngoài	94
<i>Hình 3.14.</i> Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo đến đường cong $q - W/h$ của tấm áp điện FG-GRC(y) chịu áp lực ngoài và nén một phương.....	94
<i>Hình 3.15.</i> Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm áp điện FG-GRC(y) chịu tải nén một phương	94
<i>Hình 3.16.</i> Ảnh hưởng của hệ số nền K_3 đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm FG-GRC(y) chịu nén một phương	95
<i>Hình 3.17.</i> Ảnh hưởng của hệ số nền K_3 đến đường cong $q - W/h$ của tấm FG-GRC(y) chịu nén và áp lực ngoài	95
<i>Hình 3.18.</i> Ảnh hưởng của điều kiện biên đến đường cong $P_x - W/h$ của hai loại panel chịu nén dọc trục	96
<i>Hình 3.19.</i> Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC chịu nén dọc trục	99
<i>Hình 3.20.</i> Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ áp điện FG-GRC chịu nén dọc trục.....	99
<i>Hình 3.21.</i> Ảnh hưởng của các kiểu gia cường graphene đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục	100
<i>Hình 3.22.</i> Ảnh hưởng của các kiểu gia cường graphene đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục	100
<i>Hình 3.23.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục	102
<i>Hình 3.24.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục.....	102
<i>Hình 3.25.</i> Ảnh hưởng của bán kính cong đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục.....	103
<i>Hình 3.26.</i> Ảnh hưởng của bán kính cong đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục.....	103
<i>Hình 3.27.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục	104
<i>Hình 3.28.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục.....	105
<i>Hình 3.29.</i> Ảnh hưởng của hệ số nền phi tuyến K_3 đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục.....	105
<i>Hình 4.1.</i> Mô hình panel trụ, panel Parabol và panel hình Sin FG-GRC	108

<i>Hình 4.2.</i> Hệ tọa độ của panel FG-GRC trên nền đàn hồi phi tuyến chịu nén dọc trục	108
<i>Hình 4.3.</i> So sánh đường cong $qa^4/E_m h^4 - W/h$ của tấm FG-GRC chịu áp lực ngoài với nghiên cứu của Shen và cộng sự [34]	114
<i>Hình 4.4.</i> Ảnh hưởng của điều kiện biên đến đường cong $P_x - W/h$ của các panel chịu nén dọc trục	116
<i>Hình 4.5.</i> So sánh đường cong $P_x - W/h$ của ba kiểu panel chịu nén dọc trục.....	116
<i>Hình 4.6.</i> Đường cong $P_x - W/h$ của ba loại panel chịu nén dọc trục tương ứng với các quy luật gia cường graphene.....	117
<i>Hình 4.7.</i> Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $P_x - W/h$ của panel Parabol và panel Sin chịu nén dọc trục	117
<i>Hình 4.8.</i> Ảnh hưởng của độ nâng H đến đường cong $P_x - W/h$ của các panel chịu nén dọc trục	118
<i>Hình 4.9.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $P_x - W/h$ của các panel chịu nén dọc trục	119
<i>Hình 4.10.</i> Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo đến đường cong $P_x - W/h$ của các panel chịu nén dọc trục	120
<i>Hình 4.11.</i> Ảnh hưởng của độ cứng nền phi tuyến K_3 đến đường cong $P_x - W/h$ của panel Parabol và panel hình Sin chịu nén dọc trục	121
<i>Hình 4.12.</i> Ảnh hưởng của điều kiện biên đến đường cong $q - W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài	122
<i>Hình 4.13.</i> So sánh đường cong $q - W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài.....	123
<i>Hình 4.14.</i> Ảnh hưởng của các kiểu phân bố graphene đến đường cong $q - W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài	123
<i>Hình 4.15.</i> Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $q - W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài.....	124
<i>Hình 4.16.</i> Ảnh hưởng của độ nâng H đến đường cong $q - W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài	124
<i>Hình 4.17.</i> Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo đến đường cong $q - W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài	125

MỞ ĐẦU

Trong tính toán các kết cấu chịu tải, bài toán ổn định thu hút được nhiều nhà khoa học trong nước và quốc tế nghiên cứu. Ổn định nói chung và ổn định phi tuyến nói riêng là một tiêu chuẩn quan trọng để đánh giá khả năng chịu tải và mức độ an toàn của kết cấu. Các kết cấu tấm, vỏ hiện nay thường được ưu tiên xem xét chế tạo từ các loại composite tiên tiến vì chúng có nhiều ưu điểm vượt trội so với các vật liệu truyền thống.

Graphene được tìm ra năm 2004, đây là loại vật liệu có những tính chất cơ học và vật lý đặc biệt như tính dẫn điện, dẫn nhiệt rất tốt, độ cứng và độ bền cực kỳ cao. Do đó giống như các ống nano các-bon (carbon nanotubes), graphene trở thành loại vật liệu mới đầy tiềm năng để chế tạo các loại composite tiên tiến. Trong nền polymer hoặc kim loại, graphene đóng vai trò là pha cốt (pha gia cường), và sự phân bố của nó trong các pha nền này có thể đồng phương hoặc ngẫu nhiên. Với tỷ phần thể tích graphene trong vật liệu được gia cường tương đối thấp, phương pháp bố trí vật liệu cơ tính biến thiên (Functionally graded) được sử dụng để thay đổi sự phân bố không gian của graphene trong kết cấu composite, từ đó kết cấu gia cường graphene đạt được các tính chất cơ nhiệt tốt hơn so với các loại vật liệu cốt truyền thống.

Khi gia cường graphene sheet (dải graphene) vào từng lớp nền polymer theo tỷ phần thể tích nhất định ta thu được composite có tên gọi quốc tế là Functionally graded graphene reinforced composites (viết tắt là FG-GRC). Các tính chất hiệu dụng của vật liệu composite gia cường graphene được xác định theo mô hình vi cơ (micromechanical) và được giả thiết độc lập hoặc phụ thuộc vào nhiệt độ. Sự ra đời của các loại composite tiên tiến như FG-GRC đã thúc đẩy tính cấp thiết cần phải nghiên cứu bài toán ổn định của các kết cấu chế tạo từ vật liệu này. Tuy nhiên, hiện nay các nghiên cứu về kết cấu tấm vỏ làm từ composite gia cường graphene vẫn còn rất hạn chế và các nghiên cứu hầu như chỉ tập trung phân tích ổn định và dao động của các kết cấu composite gia cường graphene không có gân gia cường hoặc không có các biện pháp tăng cứng khác. Ngoài ra, các nghiên cứu cũng chủ yếu tập trung vào các kết cấu tấm vỏ với hình dạng và độ cong đơn giản như tấm chữ nhật, panel trụ, vỏ trụ tròn, vỏ thoải hai độ cong,...

Các vấn đề ổn định đàn hồi phi tuyến của các panel FG-GRC có độ cong phức tạp và ổn định đàn hồi phi tuyến của tấm, vỏ FG-GRC có gân gia cường hoặc có lõi Auxetic là những bài toán quan trọng nhưng vẫn còn rất ít các công bố. Vì vậy luận án này tập trung nghiên cứu ***“Ổn định tĩnh đàn hồi phi tuyến của một số tấm và vỏ composite gia cường graphene chịu tải cơ trong môi trường nhiệt”*** có xét đến gân gia cường, lõi auxetic và độ cong phức tạp các panel được chế tạo từ FG-GRC.

Mục tiêu của luận án

1. Thiết lập các phương trình chủ đạo và phân tích ổn định tĩnh phi tuyến của một số loại tấm vỏ FG-GRC có gân gia cường hoặc lõi auxetic và các panel có độ cong phức tạp chịu tải xoắn, nén dọc trục, áp lực ngoài trong môi trường nhiệt dựa trên các lý thuyết vỏ Donnell, lý thuyết tấm và vỏ biến dạng trượt bậc cao.

2. Phát triển kỹ thuật san đều tác dụng gân làm bằng vật liệu dị hướng, áp dụng cho gân làm bằng FG-GRC trong khuôn khổ lý thuyết vỏ Donnell và HSDT, có xét đến các thành phần ứng suất nhiệt trong gân.

3. Tìm hàm ứng suất theo nghĩa trung bình bao gồm các thành phần tuyến tính và phi tuyến của hàm ứng suất trong phân tích ổn định phi tuyến của hai loại panel Parabol và panel hình Sin chịu áp lực ngoài, chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt.

4. Xác định các tải tới hạn và các liên hệ phi tuyến giữa tải và độ võng khi tải vượt giá trị tới hạn để xác định khả năng chịu tải sau mất ổn định của kết cấu tấm, vỏ FG-GRC khi chịu các tải trọng tĩnh.

5. Thực hiện các khảo sát số để đánh giá các ảnh hưởng của vật liệu, các đặc trưng hình học, các kiểu phân bố và tỷ phần Graphene, nền đàn hồi, sự không hoàn hảo hình dáng vỏ, điều kiện biên và nhiệt độ môi trường đến sự ổn định tĩnh của các tấm, vỏ FG-GRC.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là các kết cấu composite gia cường graphene như vỏ trống và vỏ trụ FG-GRC, tấm và panel trụ FG-GRC, panel parabol và panel hình sin FG-GRC có hoặc không có gân gia cường chịu tải trọng cơ trong môi trường nhiệt. Đây là các kết cấu có tiềm năng ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau, như làm thùng chứa nhiên liệu hoặc thân vỏ của máy bay, chế tạo các tấm vỏ của ô tô,...

Trong quá trình nghiên cứu, các yếu tố ảnh hưởng đến tấm vỏ FG-GRC như độ cứng nền đàn hồi Pasternak, nền đàn hồi phi tuyến, lớp áp điện và lõi Auxetic được luận án xem xét trong các bài toán cụ thể.

Phạm vi nghiên cứu của luận án là bài toán ổn định tĩnh phi tuyến của tấm, vỏ composite FG-GRC và được giới hạn trên cơ sở các giả thiết sau:

1. Các vật liệu composite làm việc ở trạng thái biến dạng đàn hồi, mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng là tuyến tính.

2. Các lớp vật liệu của vỏ FG-GRC và gân FG-GRC hoặc các lớp trong kết cấu sandwich liên kết một cách hoàn hảo với nhau, không có sự bong tách giữa các lớp.

3. Mô đun đàn hồi, mô đun trượt và hệ số giãn nở nhiệt của FG-GRC được giả thiết phụ thuộc vào nhiệt độ.

4. Gân gia cường FG-GRC được giả thiết là bố trí mau, kích thước gân nhỏ và bằng nhau, mặt cắt ngang không đổi và có thể bỏ qua thành phần biến dạng xoắn của gân.

5. Mặt trung hòa được coi là trùng với mặt giữa kết cấu khi vật liệu composite phân bố không đối xứng trục

6. Độ cong của panel Parabol, panel hình Sin FG-GRC và độ cong theo phương dọc của vỏ trống FG-GRC được giả thiết là thoải.

7. Nền đàn hồi tiếp xúc hoàn hảo với kết cấu tấm vỏ FG-GRC.

8. Hệ số Poisson của vật liệu nền và graphene được giả thiết là hằng số.

Phương pháp nghiên cứu

Luận án sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết và dựa trên các cách tiếp cận giải tích và bán giải tích, chi tiết là sử dụng phương pháp Galerkin để thu được các phương trình đại số, từ đó xác định được tải tới hạn và biểu diễn quan hệ giữa tải trọng và độ võng. Với tấm vỏ có gân gia cường, luận án phát triển kỹ thuật san tác dụng gân của Lekhnitskii cho gân gia cường làm bằng vật liệu FG-GRC để thuận nhất hóa các kết cấu tấm, vỏ có gân gia cường về kết cấu tấm vỏ không gân thuận nhất dị hướng tương đương. Với kết cấu có lõi Auxetic, một kỹ thuật thuận nhất hóa cũng được áp dụng để xác định các hằng số đàn hồi trục hướng của các kết cấu này.

Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của luận án

Luận án nghiên cứu các bài toán cơ bản về ổn định tĩnh của các kết cấu tấm vỏ gia cường graphene có hoặc không có gân dựa trên tiếp cận giải tích và bán giải tích, nên kết quả của luận án có thể được ứng dụng một cách thuận tiện hơn cho công tác tính toán thiết kế kết cấu.

Trong luận án, lần đầu tiên ứng suất trung bình theo hướng chu vi vỏ được xét đến trong nghiên cứu tính toán vỏ trống chịu tải trọng xoắn có nền đàn hồi bao quanh.

Các loại panel trụ, panel dạng parabol và panel dạng hình Sin chịu tải trọng cơ trong môi trường nhiệt được nghiên cứu tính toán, so sánh để chọn được dạng panel có khả năng chịu tải tốt nhất. Một kỹ thuật để xác định hàm ứng suất một cách xấp xỉ cho các kết cấu panel parabol và panel hình sin đã được đề xuất.

Độ không hoàn hảo của kết cấu, các điều kiện biên, sự ảnh hưởng của nhiệt độ môi trường và nhất là ảnh hưởng của gân đến khả năng chịu tải của tấm vỏ gia cường graphene đã được luận án nghiên cứu khảo sát chi tiết. Kết quả nghiên cứu của luận

án không những có giá trị tham khảo đối với các nhà nghiên cứu về ổn định tĩnh của tấm vỏ mà còn có ý nghĩa trong công tác thiết kế, chế tạo và nâng cao khả năng chịu tải của kết cấu.

Bố cục của luận án

Luận án bao gồm phần mở đầu và 4 chương nội dung, phần kết luận nghiên cứu, danh mục các bài báo khoa học liên quan đến nội dung của luận án, các tài liệu tham khảo và phụ lục. Trong đó:

Phần mở đầu trình bày tính cấp thiết của vấn đề nghiên cứu, mục tiêu, đối tượng và phạm vi nghiên cứu, phương pháp nghiên cứu, ý nghĩa khoa học và thực tiễn của luận án.

Chương 1 trình bày tổng quan về các vấn đề nghiên cứu.

Chương 2 trình bày nghiên cứu ổn định đàn hồi phi tuyến của vỏ trụ, vỏ trống FG-GRC có gân gia cường, hoặc có lõi Auxetic.

Chương 3 trình bày nghiên cứu ổn định đàn hồi phi tuyến của tấm và panel trụ FG-GRC có gân gia cường theo lý thuyết biến dạng trượt bậc cao.

Chương 4 trình bày nghiên cứu ổn định đàn hồi phi tuyến của panel parabol và panel hình sin FG-GRC theo lý thuyết biến dạng trượt bậc cao.

Kết luận và kiến nghị trình bày các đóng góp chính của luận án, một số nhận xét và kiến nghị các hướng phát triển tiếp theo của luận án.

Danh mục các bài báo là các bài báo liên quan đến nội dung luận án đã được tác giả công bố trên tạp chí uy tín.

Tài liệu tham khảo là danh sách các bài báo, luận án của các tác giả khác được luận án sử dụng để tham khảo trong quá trình nghiên cứu

Phụ lục là các công thức, hệ số trong luận án.

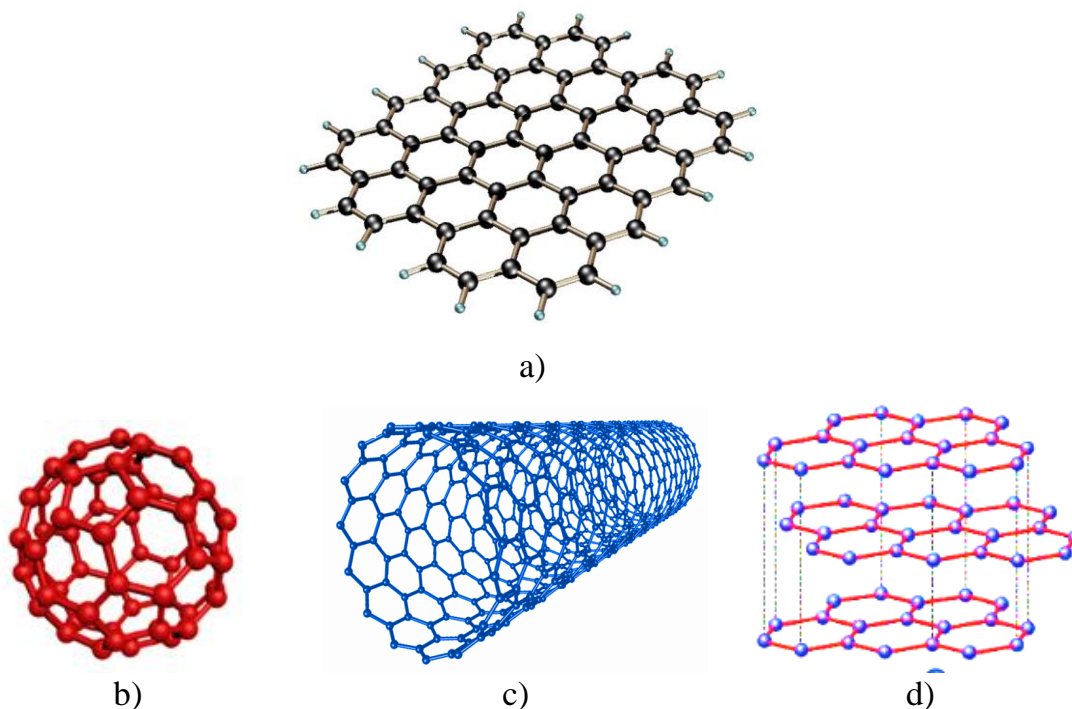
CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN

1.1. Carbon nanotube và Graphene

1.1.1. Carbon nanotube

Ống nano các-bon (carbon nanotube, viết tắt là CNT) được Iijima tìm ra và giới thiệu trong các nghiên cứu [1, 2]. Đây là vật liệu các-bon dạng ống có đường kính nm (nanô-mét), tuy có kích thước rất nhỏ nhưng lại có mô đun đàn hồi rất cao (khoảng hơn 1TPa) và khối lượng riêng rất thấp (khoảng 1300kg/m^3) [3]. Ngoài ra, độ bền của CNT khoảng 63 GPa (Giga-pascal) cao hơn thép từ 10 đến 100 lần, độ ổn định nhiệt lên đến hơn 2800°C trong chân không và khả năng dẫn điện cao hơn đồng khoảng 1000 lần [3, 4]. Chính nhờ có các đặc tính ưu việt như vậy nên ống nano các-bon đơn vách (single walled carbon nanotube, viết tắt là SWCNT) và ống nano các-bon đa vách (multi-walled carbon nanotube, viết tắt là MWCNT) đã thu hút được nhiều nhà khoa học trên thế giới tham gia nghiên cứu và sử dụng vật liệu này để chế tạo các vật liệu composite thế hệ mới.

1.1.2. Vật liệu graphene



Hình 1.1. a) Dải Graphene 2D, b) Fullerebe 0D
c) Ống các-bon 1D, d) Graphite 3D [5]

Năm 2004 với việc tách thành công những “dải” graphene (Graphene sheet) đầu tiên từ bột graphite đã đánh dấu mốc quan trọng trong sự phát triển của khoa học về vật liệu. Graphene là một dạng thù hình của các-bon hai chiều với các nguyên tử carbon sắp xếp trong một mạng lục giác (Hình 1.1a), đây là thành phần cấu trúc cơ bản của tất cả các dạng thù hình các-bon graphit khác với các kích thước khác nhau.

Một dải graphene 2D có thể được cuộn lại để tạo thành fullerene không chiều (0D, Hình 1.1b), hoặc cuộn lại thành ống nano các-bon (1D, Hình 1.1c) và có thể xếp chồng lên nhau tạo ra graphite (dạng thù hình carbon 3D, Hình 1.1d) [5].

Graphene là loại vật liệu mới có những tính chất cơ học và vật lý vượt trội so với vật liệu kim loại truyền thống như tính dẫn điện tuyệt vời, mô đun đàn hồi đặc biệt cao (khoảng 1TPa), độ bền cao khoảng 130 GPa (gấp 100 đến 200 lần thép) và dẫn nhiệt rất tốt [6–12].

Các nghiên cứu [13–15] cho thấy vật liệu graphene có diện tích bề mặt lớn và tương tác tốt hơn với các pha nền của composite, đồng thời graphene có thể gia cường vào trong pha nền của composite theo hai hướng trực giao. Chính vì vậy, graphene đã và đang thu hút được sự quan tâm chú ý của nhiều nhà khoa học, nhiều nhóm nghiên cứu trên thế giới thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau nhằm tận dụng triệt để các ưu việt của dạng vật liệu này.

Các nghiên cứu [16, 17] đã cho thấy graphene có thể được bố trí theo các hướng trong nền polyme để tăng cường khả năng dẫn điện và cải thiện các tính chất cơ học của vật liệu như tăng 98,7% mô đun đàn hồi và tăng khoảng 240% độ cứng chống đâm xuyên.

Các vật liệu thành phần cấu tạo nên composite được xem xét là phụ thuộc vào nhiệt độ. Ở môi trường nhiệt độ cao, mô đun đàn hồi thường bị giảm, trong khi hệ số giãn nở nhiệt và hệ số truyền nhiệt thường tăng lên. Khi đó, sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các tính chất vật liệu thành phần cần phải được xét đến.

Các nghiên cứu [18–21] đã kết luận rằng các đặc tính vật liệu của dải graphene có tính dị hướng và phụ thuộc nhiệt độ. Các mô đun đàn hồi trực hướng E_{11g}, E_{22g} , mô đun trượt G_{12g} , hệ số giãn nở nhiệt $\alpha_{11g}, \alpha_{22g}$ của graphene có xét đến ảnh hưởng của nhiệt được xác định theo Lin và cộng sự [22] như sau

$$\begin{aligned} E_{11g} &= \left(2.16637 - 0.00193T + 2.93701 \times 10^{-6}T^2 - 1.51775 \times 10^{-9}T^3 \right) \times 10^{12} \text{ Pa}, \\ E_{22g} &= \left(2.16868 - 0.00193T + 2.85954 \times 10^{-6}T^2 - 1.45145 \times 10^{-9}T^3 \right) \times 10^{12} \text{ Pa}, \\ G_{12g} &= \left(0.53514 + 8.24436 \times 10^{-4}T - 1.2932 \times 10^{-6}T^2 + 5.78507 \times 10^{-10}T^3 \right) \times 10^{12} \text{ Pa}, \\ \alpha_{11g} &= \left(-3.83788 + 0.01416T - 1.63355 \times 10^{-5}T^2 + 6.33589 \times 10^{-9}T^3 \right) \times 10^{-6} / \text{K}, \\ \alpha_{22g} &= \left(-3.73997 + 0.01296T - 1.35033 \times 10^{-5}T^2 + 4.60392 \times 10^{-9}T^3 \right) \times 10^{-6} / \text{K}, \\ \nu_{12g} &= 0.177, \end{aligned} \quad (1.1)$$

trong đó ν_{12g} là hệ số Poisson của graphene, $T = T_0 + \Delta T$ (K), với nhiệt độ phòng $T_0 = 300\text{K}$ và ΔT là giá trị biến thiên nhiệt độ của môi trường.

1.2. Các loại composite có cơ tính biến thiên

1.2.1. Composite có cơ tính biến thiên FGM

Composite có cơ tính biến thiên với tên gọi quốc tế là “functionally graded material” được viết tắt là FGM, bao gồm hai hoặc nhiều thành phần, là một loại composite được trộn theo cách sao cho tỷ phần các vật liệu cấu thành biến đổi trơn và liên tục theo một số hướng nhất định [23]. Cách chế tạo này làm cho kết cấu FGM tránh được hiện tượng tập trung ứng suất và bong tách các lớp vật liệu dưới tác dụng của tải trọng cơ nhiệt, từ đó kết cấu FGM có khả năng chịu nhiệt tốt và có độ cứng, độ bền cao. Nhờ các ưu điểm này mà kết cấu FGM thường được sử dụng trong các kết cấu chịu tải khắc nghiệt như tên lửa, máy bay, lò phản ứng hạt nhân...

1.2.2. Composite gia cường ống nano các-bon có cơ tính biến thiên (FG-CNTRC)

Composite gia cường CNT được Shen [24] đề xuất với tên gọi quốc tế là “functionally graded carbon nanotube-reinforced composite” và thường được viết tắt là FG-CNTRC.

Dựa trên ý tưởng về FGM, CNT được gia cường đồng phương vào nền polymer với tỷ phần thể tích V_{CNT} không đổi (uniform distribution, viết tắt là UD) hoặc biến thiên theo chiều dày h của kết cấu (kiểu FG-A, FG-V, FG-O và FG-X) với một hàm phân bố nhất định như sau

$$V_{CNT} = \begin{cases} V_{CNT}^* & (UD) \\ V_{CNT}^* \left(\frac{4|z|}{h} \right) & (FG-X) \\ 2V_{CNT}^* \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) & (FG-O), \\ V_{CNT}^* \left(1 + \frac{2z}{h} \right) & (FG-A) \\ V_{CNT}^* \left(1 - \frac{2z}{h} \right) & (FG-V) \end{cases} \quad (1.2)$$

trong đó V_{CNT}^* là tỷ phần thể tích trung bình của CNT trong cả kết cấu, xác định như sau

$$V_{CNT}^* = \frac{w_{CNT}}{w_{CNT} + (\rho_{CNT} / \rho_m)(1 - w_{CNT})}, \quad (1.3)$$

với ρ_{CNT} và ρ_m lần lượt là khối lượng riêng của CNT và pha nền; w_{CNT} là tỷ phần khối lượng của CNT.

1.2.3. Composite gia cường graphene có cơ tính biến thiên

Trong các năm gần đây, các loại composite gia cường graphene (Graphene reinforced composite, viết tắt là GRC) là loại vật liệu composite tiên tiến được rất nhiều nhà khoa học trên thế giới quan tâm và nghiên cứu. Hiện nay GRC đã được nghiên cứu chế tạo thành các bộ phận sử dụng trong các lĩnh vực như các thiết bị cảm biến [25], thiết bị điện tử [26] và chế tạo pin lưu giữ năng lượng [27].

1.2.3.1. Composite gia cường graphene platelet có cơ tính biến thiên (FG-GPLRC)

Khi phân bố các “mảnh” graphene (Graphene platelet, viết tắt là GPL) một cách hỗn độn trong nền polymer, ta có thể nhận được một lớp vật liệu đẳng hướng, và với tỷ phần của graphene qua các lớp vật liệu được biến đổi từng phần tạo thành vật liệu bất đẳng hướng có tên gọi quốc tế là “Functionally graded graphene platelets reinforced composite”, viết tắt là FG-GPLRC.

Bảng 1.1. Tỷ phần thể tích graphene $V_{GPL(k)}$ trong các kết cấu FG-GPLRC theo các nghiên cứu của Kiani và Mirzaei [28], Sahmani và Aghdam [29], Thai và Phung [30], Habibi và các cộng sự [31].

Kiểu phân bố	Tỷ phần thể tích $V_{GPL(k)}$ tại lớp thứ k trong các kết cấu FG-GPLRC		
	Công trình [28]	Công trình [30]	Công trình [31]
UD	V_{GPL}^*	V_{GPL}^*	V_{GPL}^*
FG-X	$2V_{GPL}^* \frac{ 2k - N_L - 1 }{N_L}$	$\frac{4V_{GPL}^* \left(\frac{1}{2} + \left k - \frac{N_L + 1}{2} \right \right)}{(2 + N_L)}$	$2V_{GPL}^* \frac{2 z_j }{h}$
FG-A	$V_{GPL}^* \left(\frac{2k - 1}{N_L} \right)$, [29]	$\frac{2k}{(1 + N_L)} V_{GPL}^*$	$V_{GPL}^* \left(1 - \frac{2z_j}{h} \right)$
FG-O	$2V_{GPL}^* \left(1 - \frac{ 2k - N_L - 1 }{N_L} \right)$	$\frac{4V_{GPL}^* \left(\frac{N_L + 1}{2} - \left k - \frac{N_L + 1}{2} \right \right)}{(2 + N_L)}$	$2V_{GPL}^* \cos \left(1 - 2 \frac{ z_j }{h} \right)$
FG-V	-	-	$V_{GPL}^* \left(1 + \frac{2z_j}{h} \right)$

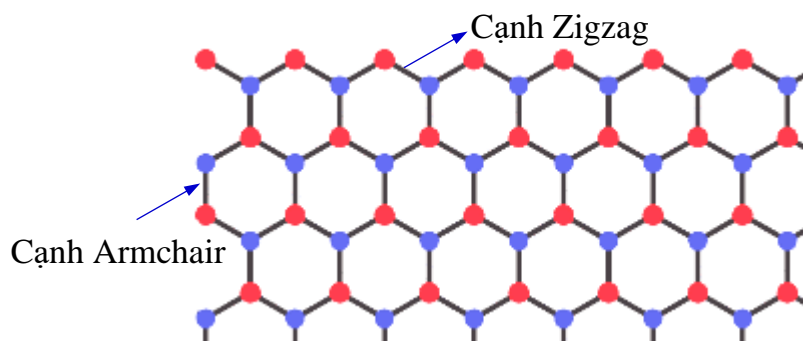
trong đó $V_{GPL}^* = \frac{W_{GPL}^{(k)}}{W_{GPL}^{(k)} + \frac{\rho_{GPL}}{\rho_m} (1 - W_{GPL}^{(k)})}$, với $W_{GPL}^{(k)}$ là tỷ phần khối lượng graphene

trong lớp thứ k , ρ_m và ρ_{GPL} khối lượng riêng của nền polymer và GPL, N_L là tổng số lớp, và lớp thứ $k = 1, 2, \dots, N_L$. $z_j = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2N_L} - \frac{k}{N_L} \right) h$, và h là tổng chiều dày của kết cấu FG-GPLRC.

Tính chất cơ tính biến thiên (Functionally graded) ở đây được hiểu theo nghĩa gần đúng, tức là tỷ phần graphene phân bố trong kết cấu composite được biến đổi từng phần qua từng lớp vật liệu theo quy luật nhất định, như phân bố theo các kiểu FG-X, FG-A, FG-V, FG-O. Trong đó tỷ phần graphene trong mỗi lớp vật liệu là không đổi. Khi graphene phân bố đều vào nền polymer đẳng hướng ta có dạng UD. Tỷ phần thể tích graphene $V_{GPL(k)}$ tại lớp thứ k trong các kết cấu FG-GPLRC ứng với các kiểu phân bố UD, FG-X, FG-A, FG-V và FG-O được rất nhiều nhà khoa học [28–31] nghiên cứu và đề xuất như trong Bảng 1.1.

1.2.3.2. Composite gia cường graphene sheet có cơ tính biến thiên (FG-GRC và FG-GRMMC)

Composite với tên gọi quốc tế là “Functionally graded graphene-reinforced composite” (viết tắt là FG-GRC) được tạo ra bằng cách bố trí các “dải” graphene (graphene sheet) theo phương Zigzag hoặc Armchair trong nền polymer (Hình 1.2). Từ đó ta nhận được một lớp vật liệu trục hướng với tỷ phần dải graphene biến đổi qua các lớp khác nhau tạo thành một loại vật liệu phức tạp vừa có đặc điểm của FGM, vừa có đặc điểm của vật liệu composite lớp cổ điển. Kết hợp với các hiệu ứng vi cơ của graphene, kết cấu tấm vỏ FG-GRC thường có ứng xử cơ học thú vị và các phương trình cơ học của các dạng kết cấu từ vật liệu này cũng trở nên phức tạp hơn, có thể gặp nhiều khó khăn hơn trong quá trình tính toán và phân tích.



Hình 1.2. Cạnh Armchair và cạnh Zigzag của graphene trong nền Polymer

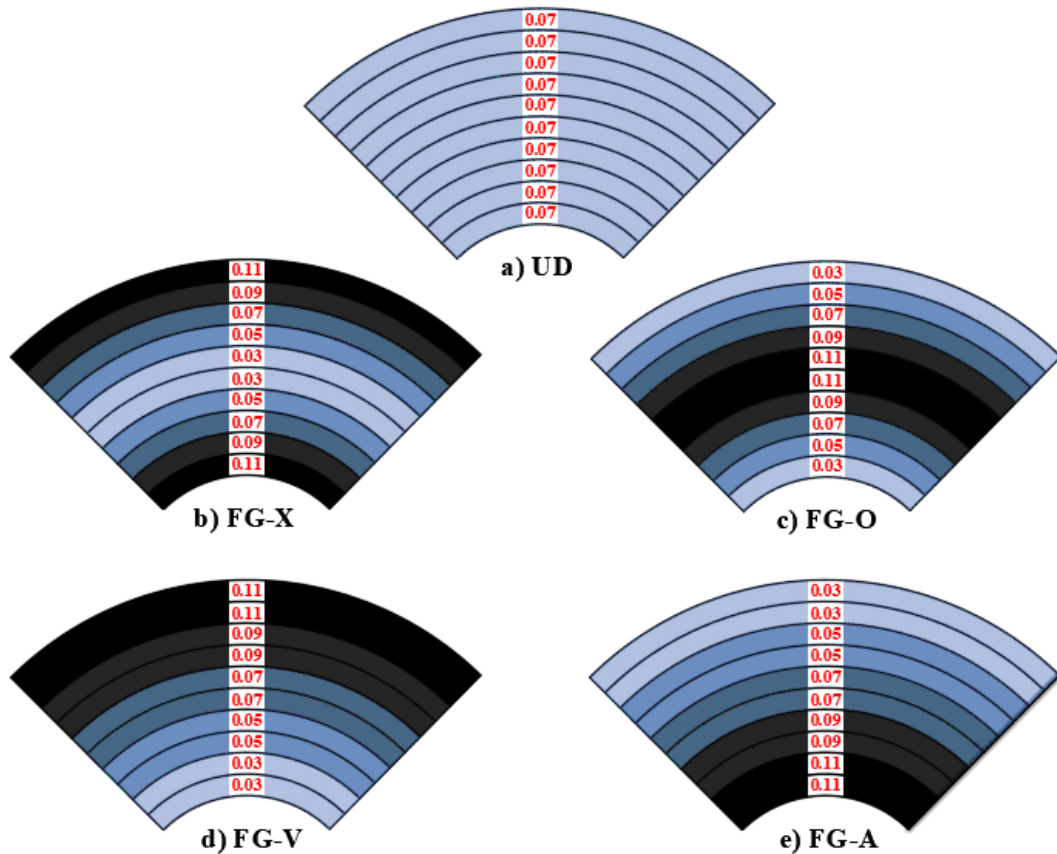
Hướng Zigzag của graphene có thể được bố trí theo hướng dọc (0-layer) và hướng ngang (90-layer) trong tấm vỏ composite. Độ dày của tấm vỏ FG-GRC được tạo ra từ nhiều lớp, và ba cách sắp xếp graphene được nghiên cứu là $(0)_{10T}$, $(0/90)_{5T}$, và $(0/90/0/90/0)_S$ (trong đó chữ “T” viết tắt của từ “Time” và chữ “S” viết tắt của từ “Symmetric”). Tương tự như FG-GPLRC, trong các lớp của tấm vỏ FG-GRC, thể tích graphene được bố trí biến đổi từng phần qua từng lớp theo quy luật nhất định, và cũng có các kiểu bố trí FG-X, FG-V, FG-A, FG-O với tỷ phần thể tích của graphene

trong các lớp được chọn cụ thể từ 3% đến 11% hoặc bố trí đều kiểu UD với tỷ phần thể tích của graphene là 7% như trong Bảng 1.2 và Hình 1.3.

Bảng 1.2. Tỷ phần thể tích graphene trong các lớp vỏ FG-GRC [32–35]

Loại vỏ	Tỷ phần thể tích Graphene trong 10 lớp của vỏ FG-GRC
UD GRC	0.07 cho tất cả 10 lớp GRC
FG-X GRC	[0.11/0.09/0.07/0.05/0.03/0.03/0.05/0.07/0.09/0.11]
FG-V GRC	$[(0.11)_2/(0.09)_2/(0.07)_2/(0.05)_2/(0.03)_2]$
FG-A GRC	$[(0.03)_2/(0.05)_2/(0.07)_2/(0.09)_2/(0.11)_2]$
FG-O GRC	[0.03/0.05/0.07/0.09/0.11/0.11/0.09/0.07/0.05/0.03]

Composite nền kim loại (Metal matrix composites, viết tắt là MMCs) gia cường graphene có cơ tính biến thiên với tên quốc tế là “Functionally graded graphene reinforced metal matrix composite” (viết tắt là FG-GRMMC) là các loại composite sử dụng kim loại để làm pha nền như nền nhôm, titan, đồng hoặc hợp kim. So sánh với kim loại thì MMCs có các ưu điểm vượt trội như cường độ và độ cứng cao, khả năng chống mỏi tốt hơn, hệ số giãn nở nhiệt thấp, khả năng chống mài mòn tốt hơn, và từ biến thấp [36, 37]. Các nghiên cứu về ứng xử cơ học của tấm nhiều lớp MMCs hiện nay chủ yếu là nghiên cứu về mất ổn định cơ nhiệt của tấm và panel chế tạo từ loại composite này [38–42].



Hình 1.3. Sự phân bố tỷ phần thể tích graphene trong các lớp vỏ FG-GRC

Bảng 1.3. Tỷ phần thể tích graphene trong các lớp vỏ FG-GRMMC[43]

Loại vỏ	Tỷ phần thể tích Graphene trong 10 lớp nền polymer của vỏ FG-GRMMC
UD GRMMC	0.09 cho tất cả 10 lớp GRC
FG-X GRMMC	[0.13/0.11/0.09/0.07/0.05/0.05/0.07/0.09/0.11/0.13]
FG-V GRMMC	$[(0.13)_2/(0.11)_2/(0.09)_2/(0.07)_2/(0.05)_2]$
FG-A GRMMC	$[(0.05)_2/(0.07)_2/(0.09)_2/(0.11)_2/(0.13)_2]$
FG-O GRMMC	[0.05/0.07/0.09/0.11/0.13/0.13/0.11/0.09/0.07/0.05]

Tương tự như FG-GRC, tám vỏ FG-GRMMC có thể tích graphene được bố trí biến đổi từng phần qua từng lớp theo quy luật nhất định trong nền kim loại, và cũng có các kiểu bố trí UD, FG-X, FG-V, FG-A, FG-O. Tuy nhiên tỷ phần thể tích của graphene trong các lớp thường được chọn cụ thể từ 5% đến 13% hoặc bố trí đều kiểu UD với tỷ phần thể tích của graphene là 9% như trong Bảng 1.3

Khác với hai loại FG-GRPLC và FG-GRC có nền là polymer, FG-GRMMC có nền là kim loại. Các đặc trưng như mô đun đàn hồi, mô đun trượt của composite nền kim loại đồng (Cu) có gia cường graphene được giới thiệu trong nghiên cứu của Fan và các cộng sự [43].

1.3. Ổn định và sau mất ổn định

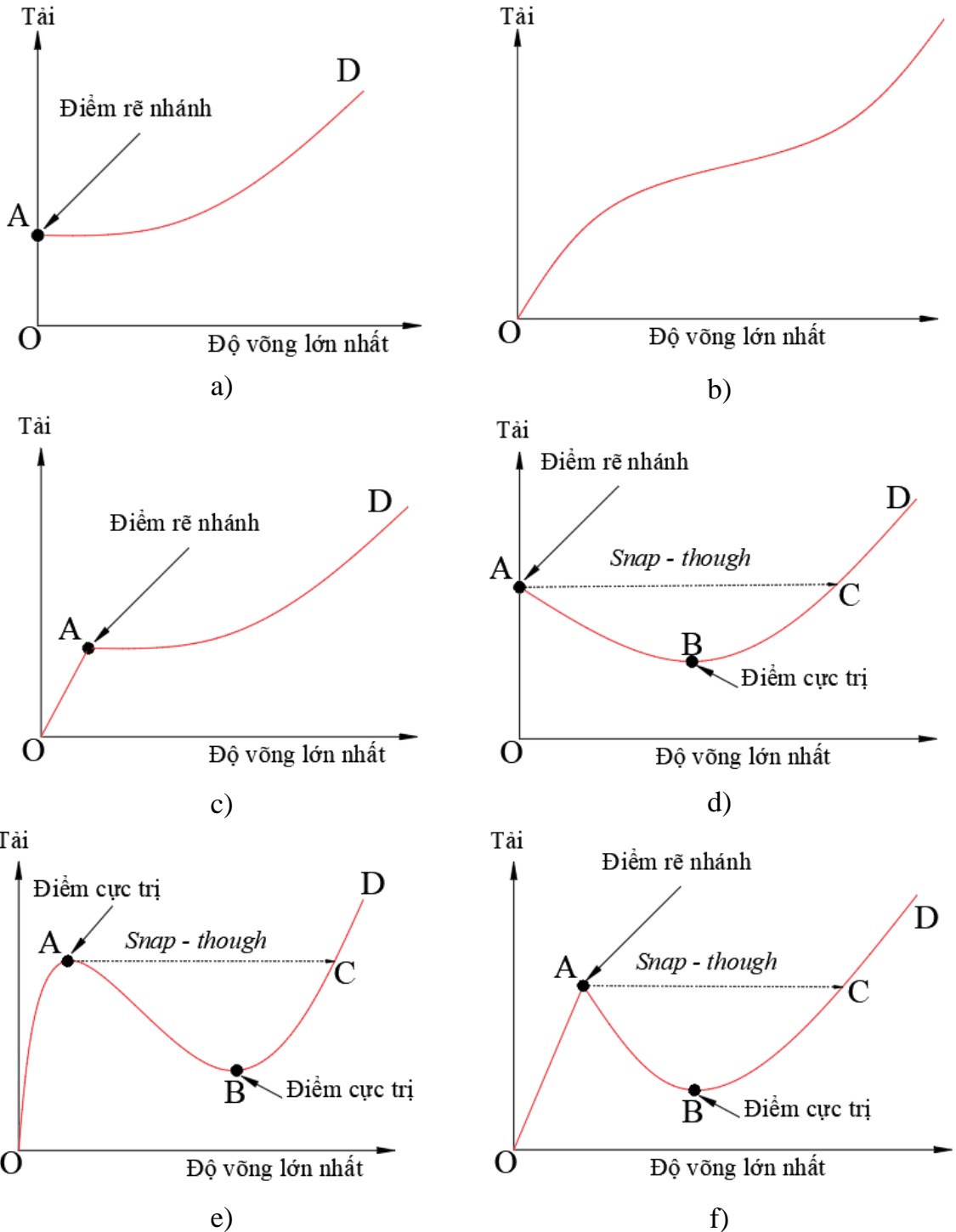
Ổn định và mất ổn định là những vấn đề quan trọng được quan tâm rất nhiều trong phân tích và thiết kế các kết cấu kỹ thuật. Sự ổn định của kết cấu là tiêu chuẩn đầu tiên để đánh giá khả năng chịu tải và làm việc của kết cấu công trình trong giai đoạn thiết kế và khai thác sử dụng. Các khái niệm cơ bản về ổn định và các tiêu chuẩn ổn định tĩnh của kết cấu đã được đề cập chi tiết trong công trình của Brush và Almroth [44] và Đào Huy Bích [45].

Sự mất ổn định của kết cấu là một hiện tượng phức tạp và nó biểu hiện theo một quá trình, thường được gọi là *quá trình mất ổn định*. Quá trình mất ổn định của các kết cấu tám vỏ là khác nhau, đặc biệt là khi chịu các loại tải trọng khác nhau. Vì vậy, rất khó để đưa ra một định nghĩa ngắn gọn về sự mất ổn định. Để phù hợp với phạm vi luận án, một số kiểu mất ổn định tĩnh và quá trình mất ổn định dưới đây sẽ được luận án trình bày và thảo luận chi tiết.

Hình 1.4 mô tả các đường cong tải - độ võng lớn nhất của các kết cấu tám vỏ khi chịu tải và từ đây ta có thể quan sát được một số kiểu mất ổn định thường gặp.

Trước tiên trên Hình 1.4a mô tả hiện tượng mất ổn định theo kiểu rẽ nhánh (bifurcation-type buckling), giai đoạn đầu (đoạn OA) là giai đoạn trước mất ổn định, khi này kết cấu làm việc ở trạng thái màng (tải trọng tăng nhưng độ võng bằng không),

khi tải đạt đến giá trị tới hạn thì bắt đầu xuất hiện độ võng, đường cong sau mất ổn định có dạng như đường AD và điểm A được gọi là điểm rẽ nhánh.



Hình 1.4. Các dạng đường cong tải - độ võng lớn nhất của các tấm vỏ khi chịu tải

Hình 1.4b cho thấy kết cấu bị võng ngay khi chịu tải, tải trọng tăng thì độ võng tăng, đường cong không có điểm rẽ nhánh hay điểm cực trị nào xuất hiện và không xác định được tải tới hạn trong trường hợp này.

Hình 1.4c cho thấy ở giai đoạn đầu (đoạn OA) thì độ võng tăng tuyến tính theo tải trọng, tại điểm rẽ nhánh A tải đạt đến giá trị tới hạn và đường cong sau mất ổn

định tiếp tục phát triển lên như đường AD. Đường AD thường được gọi là đường cong sau mất ổn định (postbuckling curve).

Hình 1.4d có giai đoạn đầu (đoạn OA) là giai đoạn trước mất ổn định giống như Hình 1.4a, tải trọng tăng nhưng độ võng bằng không. Tại A tải đạt đến giá trị tới hạn và xuất hiện rẽ nhánh tại điểm A, đường cong đi xuống đến điểm cực trị B rồi phát triển lên theo dạng đường cong BCD. Tuy nhiên thực tế tại điểm rẽ nhánh A, kết cấu bị mất ổn định từ điểm A sang điểm C, tải trọng không tăng nhưng độ võng của kết cấu bị tăng đột ngột và hiện tượng này gọi là hiện tượng hóp (snap-through).

Hình 1.4e cho thấy khi tải trọng tăng thì độ võng cũng tăng theo đường cong OA, sau khi đến điểm cực trị A đường cong đi xuống đến điểm cực trị B và tiếp tục đi lên theo đường cong dạng BCD. Tương tự như Hình 1.4d, thực tế cho thấy tại điểm cực trị A kết cấu bị mất ổn định từ điểm A sang điểm C và đây cũng là hiện tượng hóp (snap-through), khi này tải trọng không tăng nhưng độ võng tăng đột ngột. Tải xác định được tại điểm A được gọi là tải mất ổn định cận trên (upper buckling load) và tải xác định được tại điểm B được gọi là tải mất ổn định cận dưới (lower buckling load).

Hình 1.4f có giai đoạn đầu (đoạn OA) tương tự Hình 1.4c, độ võng tăng tuyến tính với tải trọng. Tại điểm rẽ nhánh A, kết cấu có thể bị mất ổn định đột ngột từ điểm A sang điểm C và hiện tượng hóp (snap-through) quan sát rõ trong trường hợp này. Hiện tượng này được coi là đặc biệt nguy hiểm cho kết cấu khi độ võng tăng một cách đột ngột, bước nhảy về độ võng (còn gọi là cường độ hóp - *snap-through intensity*) càng lớn thì kết cấu có nguy cơ bị phá hoại càng cao.

Việc đánh giá khả năng chịu tải của kết cấu sau mất ổn định là rất quan trọng trong cơ học và kỹ thuật. Trong luận án này, tiêu chuẩn tĩnh về ổn định sẽ được áp dụng, các kiểu mất ổn định và các dạng đường cong tải - độ võng lớn nhất trong Hình 1.4 sẽ được luận án thảo luận chi tiết trong các bài toán tám, vỏ FG-GRC chịu tải trọng trong môi trường nhiệt.

1.4. Tổng quan các nghiên cứu về vật liệu có cơ tính biến thiên

1.4.1. Một số nghiên cứu trong nước về kết cấu FGM và kết cấu FG-CNTRC

Đã có rất nhiều các nghiên cứu trên thế giới về ổn định tĩnh và động của kết cấu FGM chịu tải trọng cơ nhiệt trong các điều kiện biên khác nhau. Trong phần này, để phù hợp với phạm vi đề tài, luận án sau đây sẽ trình bày một số nghiên cứu điển hình của các tác giả Việt Nam về kết cấu FGM có gân gia cường.

Đầu tiên, nhóm tác giả gồm GS.TSKH. Đào Huy Bích và các cộng sự [46] đã sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (First-order shear deformation theory, viết

tắt là FSDT) và kỹ thuật san đều tác dụng gân của Lekhnitskii để nghiên cứu dao động phi tuyến của vỏ thoải FGM hai độ cong có gân gia cường trên nền đàn hồi. Ổn định tĩnh và động phi tuyến của vỏ tròn và vỏ trụ FGM có hệ thống gân gia cường chịu tải áp lực ngoài, nén dọc trục và tải xoắn trong môi trường nhiệt đã được nghiên cứu trong các công trình [47–49] của tác giả Đào Huy Bích và các cộng sự, Đinh Gia Ninh và các cộng sự [50]. Nhóm tác giả Đào Văn Dũng và Lê Khả Hòa [51–53] đã sử dụng lý thuyết vỏ Donnell (Lý thuyết vỏ cổ điển - CLT) để nghiên cứu ổn định tĩnh phi tuyến của vỏ trụ tròn FGM có gân gia cường chịu tải xoắn và áp lực ngoài trong môi trường nhiệt. Ổn định tĩnh của vỏ nón cụt có gân gia cường lệch tâm dưới tác dụng của tải cơ được nghiên cứu bởi các tác giả Đào Văn Dũng và các cộng sự [54]. Tác giả Nguyễn Thị Phương và các cộng sự [55], Vũ Hoài Nam và các cộng sự [56–58] đã dựa trên lý thuyết vỏ Donnell và nghiệm độ võng ba số hạng để phân tích và khảo sát ổn định phi tuyến của vỏ trụ FGM được gia cường bởi hệ thống gân xiên và gân trục giao chịu tải trọng xoắn và áp lực ngoài trong môi trường nhiệt. Nhóm tác giả Đặng Thùy Đông và Đào Văn Dũng [59–62] đã sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao (Higher-order shear deformation theory, viết tắt là HSDT), FSDT và phương pháp Runge-Kutta để phân tích dao động phi tuyến của vỏ thoải FGM hai độ cong có gân gia cường.

Các nghiên cứu bên trên đều cho thấy hệ thống gân gia cường làm tăng ổn định và khả năng chịu tải cho kết cấu tấm vỏ một cách đáng kể với chỉ một lượng nhỏ vật liệu gân thêm vào. Chính vì vậy nghiên cứu các kết cấu composite tiên tiến có gân gia cường là rất cần thiết, vì đây là cơ sở lý thuyết để chế tạo các kết cấu mới có khối lượng nhẹ, độ bền cao với khả năng chịu tải trọng lớn.

Tương tự như FGM, ổn định tĩnh và động của các kết cấu FG-CNTRC đã có rất nhiều công bố trên thế giới. Để phù hợp với phạm vi và phương pháp tính trong luận án, phần này chủ yếu tập trung phân tích một số nghiên cứu với tiếp cận tương tự luận án trong thời gian gần đây liên quan đến ổn định tĩnh của các kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC.

Nhóm tác giả Lê Thị Như Trang và Hoàng Văn Tùng [63–67] đã sử dụng lý thuyết vỏ Donnell, FSDT và HSDT để phân tích ổn định phi tuyến của tấm, panel trụ tròn và panel hai độ cong FG-CNTRC có cạnh tựa đơn trên nền đàn hồi chịu tải trọng nén dọc trục, áp lực ngoài và tải cơ kết hợp trong môi trường nhiệt. Ổn định phi tuyến của các vỏ kín như vỏ trụ mỏng FG-CNTRC có các cạnh tựa di động chịu nén dọc trục đã được nhóm tác giả Phạm Toàn Thắng và các cộng sự [68] nghiên cứu bằng cách sử dụng lý thuyết vỏ Donnell, phương pháp Galerkin và nghiệm độ võng một số hạng. Các vấn đề về ổn định của vỏ nón cụt FG-CNTRC trong nền đàn hồi chịu tải

trọng cơ nhiệt đã được nhóm tác giả Nguyễn Đình Đức và các cộng sự nghiên cứu [69]. Dựa trên lý thuyết vỏ Donnell và nghiệm độ võng ba số hạng, nhóm tác giả Phạm Thanh Hiếu và Hoàng Văn Tùng [70–72] đã nghiên cứu ổn định phi tuyến của vỏ trống và vỏ trụ FG-CNTRC có cạnh tựa đơn chịu tải trọng cơ nhiệt trong điều kiện biên đàn hồi, đồng thời nhóm tác giả cũng sử dụng FSDT và nghiệm độ võng hai số hạng để nghiên cứu ổn định tuyến tính của vỏ trống, vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải nén dọc trục, chịu áp lực ngoài và tải nhiệt [73, 74]. Các vấn đề ổn định của tấm sandwich FG-CNTRC với các cạnh biên chịu liên kết đàn hồi cũng được phân tích trong các công bố [75, 76] của các tác giả Vũ Thành Long và Hoàng Văn Tùng. Các phương pháp số cũng được nhiều nhóm tác giả dùng để nghiên cứu tấm vỏ FG-CNTRC, điển hình là nhóm tác giả Trần Hữu Quốc và các cộng sự [77] đã phân tích tĩnh các tấm áp điện FG-CNTRC bằng phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bốn ẩn chuyển vị.

Các nghiên cứu đều cho thấy CNT làm cơ tính của composite như mô đun đàn hồi, độ bền kéo tăng lên đáng kể. Từ đó giúp các kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC có khả năng chịu lực lớn và ổn định cao khi chịu các tải trọng cơ nhiệt. Vấn đề về hệ thống gân gia cường cho các kết cấu FG-CNTRC cũng là hướng mở để các nhà khoa học tiếp tục tìm hiểu và nghiên cứu.

1.4.2. Các nghiên cứu về kết cấu FG-GRMMC

Các đánh giá tổng quan và các nghiên cứu của graphene gia cường composite nền kim loại (graphene-reinforced metal matrix composite, viết tắt là GRMMC) cũng được nhiều nhà khoa học phân tích và công bố trong thời gian gần đây [43, 78–80]. Có thể kể đến công trình của Shen và Xiang [81] dựa trên HSDT đã nghiên cứu ổn định nhiệt của dầm FG-GRMMC phân lớp trên nền đàn hồi. Đồng thời nhóm tác giả này cũng đã phân tích ảnh hưởng của hệ số Poisson âm (negative Poisson's ratio) đến ứng xử của vỏ trụ tròn không hoàn hảo FG-GRMMC phân lớp chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt [82]. Chen và các cộng sự [83–85] đã phân tích kết cấu tấm, panel và trụ tròn sandwich có hai mặt là kim loại với lõi là GRMMC chịu tải nén dọc trục và tải nhiệt. Nhóm nghiên cứu của Shen và các cộng sự [86, 87] đã xét đến ảnh hưởng của hệ số Poisson âm (negative Poisson's ratio) lên ứng xử sau mất ổn định của tấm và panel FG-GRMMC trên nền đàn hồi chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt. Các kết quả nghiên cứu cho thấy hệ số Poisson âm ảnh hưởng đáng kể đến ứng xử sau mất ổn định của tấm và panel trụ FG-GRMMC. Fan và các cộng sự [88] cũng đã phân tích dao động phi tuyến của tấm FG-GRMMC phân lớp trên nền đàn hồi chịu tải cơ nhiệt kết hợp.

Các nhóm nghiên cứu của Việt Nam cũng đã và đang quan tâm đến nghiên cứu kết cấu FG-GRMMC. Điển hình là tác giả Vũ Hoài Nam và các cộng sự [89] đã nghiên cứu vỏ trụ tròn gấp nếp chịu áp lực ngoài dựa trên lý thuyết vỏ Donnell và phương pháp Galerkin.

1.4.3. Các nghiên cứu về kết cấu FG-GPLRC

Các kết cấu FG-GPLRC cũng thu hút nhiều nhà khoa học trên thế giới tham gia nghiên cứu trong thời gian gần đây. Zhao và các cộng sự [90] đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) cùng với mô hình Halpin-Tsai cải tiến và quy tắc hỗn hợp để phân tích uốn và dao động của tấm FG-GPLRC. Song và các cộng sự [91] đã sử dụng FSDT để nghiên cứu ổn định tĩnh của tấm composite gia cường bằng GPL. Cũng trong nghiên cứu của Song và cộng sự [92], GPL được phân bố đều theo hướng ngẫu nhiên trong nền polyme của tấm composite chịu tải nén theo hai phương. Trong nghiên cứu này, một mô hình nhiều lớp đẳng hướng theo phương ngang đã được đề xuất và các đặc trưng vật liệu của composite gia cường GPL được giả định là không phụ thuộc vào nhiệt độ, mô đun đàn hồi đẳng hướng tương đương của các lớp composite gia cường GPL xác định theo mô hình Halpin – Tsai cải tiến. Kết quả nghiên cứu cho thấy khi phân bố một lượng rất nhỏ GPL trong nền polyme đã làm tăng đáng kể khả năng chịu tải của tấm. Tuy nhiên các nghiên cứu [93–95] cũng lưu ý rằng mô hình đẳng hướng tương đương này chỉ phù hợp với trường hợp GPL có tỷ lệ chiều dài trên chiều rộng khoảng 5/3, nếu không kết quả có thể không chính xác. Li và các cộng sự [96] kết hợp đồng thời FSDT và HSDT để phân tích và nghiên cứu ứng xử đàn hồi tuyến tính, tần số tự nhiên và ứng xử mất ổn định của các tấm composite có lỗ rỗng được gia cường GPL. Các kết quả nghiên cứu của các tác giả kể trên chỉ ra rằng, GPL làm tăng độ cứng và khả năng ổn định tĩnh và động cho các tấm composite, đặc biệt là kiểu FG-X, tức là GPL được gia cường và phân bố nhiều ở bề mặt trên và dưới của tấm làm tăng độ cứng cho tấm hiệu quả nhất.

Dựa trên phương pháp Mian và Spencer tổng quát, các nghiên cứu của Yang và các cộng sự [97–99] đã tính toán và khảo sát ổn định của các tấm hình tròn, hình vành khuyên, hình chữ nhật, hình elip được gia cường bằng các tấm mỏng GPL chịu tác dụng của tải trọng cơ và nhiệt đều. Trong công bố [97, 99], tỷ phần GPL theo chiều dày tấm được phân bố theo dạng tuyến tính, dạng phân bố đều và dạng parabol. Các khảo sát số chỉ ra rằng phân bố tỷ phần GPLRC theo dạng Parabol có hiệu quả gia cường tốt nhất và độ võng của tấm nhỏ nhất. Wang và cộng sự [100–102] đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu ứng xử sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC chịu tải xoắn và chịu tải nén phân bố đều. Trong các nghiên cứu này, ảnh hưởng của rãnh cắt trên vỏ trụ được xem xét trong quá trình tính toán và xác định tải

mất ổn định. Kết quả nghiên cứu cho thấy GPL làm tăng đáng kể khả năng chịu tải của vỏ trụ và việc tăng số lượng các lớp gia cường GPL có thể làm giảm sự tập trung ứng suất giữa các lớp liền kề và từ đó làm giảm nguy cơ phân tách các lớp trong kết cấu vỏ. Wang và cộng sự [103] đã sử dụng lý thuyết vỏ Donnell, phương pháp Galerkin để phân tích dao động phi tuyến của vỏ trụ kim loại được gia cường GPL. Những ảnh hưởng của kích thước GPL đến các đặc trưng dao động phi tuyến của vỏ trụ cũng được nhấn mạnh. Sử dụng lý thuyết và phương pháp tính tương tự, Dong và các cộng sự [104] đã nghiên cứu dao động tự do tuyến tính và phi tuyến, đồng thời xem xét đáp ứng động của các vỏ trụ mỏng FG-GPLRC chịu tải dọc trục với các điều kiện biên khác nhau. Nhóm tác giả Cao Văn Đoàn và Vũ Hoài Nam [105], Cao Văn Đoàn và Đào Như Mai [106] đã phân tích mất ổn định phi tuyến của vỏ thoải hai độ cong FG-GPLRC có gân xiên gia cường chịu áp lực ngoài.

Nhìn chung, các nghiên cứu kể trên đã phân tích sự mất ổn định phi tuyến và dao động của dầm, tấm, vỏ FG-GPLRC chịu tác dụng của các loại tải trọng bằng các phương pháp khác nhau. Môi trường nhiệt và môi trường đàn hồi được một số tác giả kể đến trong quá trình nghiên cứu tính toán kết cấu FG-GPLRC.

1.4.4. Các nghiên cứu về kết cấu FG-GRC

Tính toán các kết cấu dầm, tấm, vỏ FG-GRC phân lớp phức tạp hơn so với tính toán các kết cấu dầm, tấm, vỏ FG-GPLRC. Tuy nhiên trong những năm gần đây, các công bố nghiên cứu của các nhà khoa học về kết cấu tấm vỏ FG-GRC phân lớp cũng rất sôi động.

Một loạt các công bố của Shen và cộng sự [35, 107–112] đã nghiên cứu và phân tích ổn định của tấm, vỏ trụ tròn, panel FG-GRC phân lớp chịu tải trọng cơ nhiệt thông qua kỹ thuật nhiễu hai bước (two-step perturbation technique). Cụ thể, ứng xử ổn định của tấm FG-GRC phân lớp chịu tải trọng nén dọc trục trong môi trường nhiệt được nghiên cứu trong công trình [35]. Trong nghiên cứu này, graphene được sắp xếp và định hướng trong từng lớp nền polyme, các đặc trưng của vật liệu dị hướng và sự phụ thuộc nhiệt độ của các lớp GRC được ước tính thông qua mô hình Halpin-Tsai cải tiến và kể đến các thông số hiệu dụng của graphene. Các kết quả khảo sát số đã khẳng định rằng tải mất ổn định, cũng như khả năng chịu tải sau mất ổn định của tấm nhiều lớp GRC được tăng lên một cách vượt trội khi có graphene gia cường trong các lớp của tấm. Các đường cong tải - độ võng và giá trị tải tới hạn của vỏ trụ tròn FG-GRC trong môi trường nhiệt chịu nén dọc trục và áp lực ngoài đã được Shen cùng Xiang phân tích và nghiên cứu trong các công trình [107, 109] bằng cách sử dụng HSDT có xét đến tính phi tuyến hình học của von Kármán. Khi vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục, các kết quả nghiên cứu trong công trình [107] đã cho thấy tải tới hạn

của vỏ trụ FG-X lớn hơn tải tới hạn của vỏ UD khoảng từ 4% đến hơn 7% tùy thuộc vào nhiệt độ môi trường và kích thước hình học của vỏ trụ. Hiện tượng hóp (snap-through) có thể quan sát được trong miền độ võng lớn với các mode mất ổn định khác nhau. Kết quả khảo sát số trong công trình [109] đã chứng minh tải áp lực ngoài tới hạn của vỏ trụ FG-X là cao nhất và cao hơn tải tới hạn của vỏ UD khoảng $8\% \div 12\%$ tùy thuộc các kích thước của vỏ. Khi nhiệt độ môi trường tăng lên $500\text{ (}^{\circ}\text{K)}$ thì tải áp lực ngoài tới hạn của vỏ FG-X giảm đi khoảng $13\% \div 15\%$ tùy thuộc vào các giá trị L^2/Rh đã chọn để khảo sát. Trong công trình [108], Shen và các cộng sự đã nghiên cứu mất ổn định phi tuyến của panel trụ FG-GRC phân lớp trên nền đàn hồi chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt. Kết quả khảo sát cho thấy đường cong sau mất ổn định của panel trụ FG-GRC không còn dạng phân nhánh (bifurcation type) khi hai cạnh thẳng của panel trụ là các cạnh tựa cố định. Các phân tích mất ổn định nhiệt và sau mất ổn định nhiệt của tấm, vỏ trụ tròn, panel trụ FG-GRC phân lớp trên nền đàn hồi chịu tải nhiệt thay đổi được Shen và các cộng sự nghiên cứu trong [110–112]. Điểm chung của các nghiên cứu này là đều sử dụng HSDT và xét đến độ không hoàn hảo về hình dạng của kết cấu. Nhìn chung, tải nhiệt và độ cứng của nền đàn hồi ảnh hưởng đáng kể đến ứng xử và tải tới hạn của các kết cấu tấm và panel FG-GRC. Kết quả khảo sát với panel trụ FG-GRC có các cạnh tựa đơn cố định chịu tải nhiệt phân bố đều cho thấy hiện tượng mất ổn định nhiệt không tuân theo kiểu rẽ nhánh. Hiện tượng hóp (snap-through) của vỏ trụ FG-GRC chịu tải nhiệt đều cũng có thể quan sát được tùy thuộc kích thước hình học của vỏ trong quá trình khảo sát.

Shen và Xiang [113] đã phân tích ứng xử mất ổn định và xác định các mô men xoắn tới hạn của vỏ trụ FG-GRC chịu tải trọng xoắn trong môi trường nhiệt bằng kỹ thuật nhiều hai bước. Kết quả số cho thấy graphene làm tăng khả năng chịu tải xoắn trong khi nhiệt độ tăng lại làm giảm đáng kể khả năng chịu tải xoắn của vỏ trụ, đồng thời cũng quan sát thấy tải tới hạn và khả năng chịu tải sau mất ổn định của vỏ FG-X là cao nhất, ngược lại là vỏ trụ FG-O với tải tới hạn và khả năng chịu tải sau mất ổn định nhỏ nhất trong các loại vỏ trụ FG-GRC đã khảo sát.

Shen và cộng sự [114] đã phân tích ứng xử của panel trụ FG-GRC trên nền đàn hồi chịu tải trọng phân bố đều trong môi trường nhiệt. Các kết quả khảo sát cho thấy cách bố trí graphene gia cường, độ cứng của nền đàn hồi, nhiệt độ môi trường và các điều kiện biên ảnh hưởng đáng kể đến ứng xử uốn phi tuyến của panel trụ FG-GRC. Ổn định của panel trụ FG-GRC phân lớp trên nền đàn hồi chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt cũng đã được Shen và Xiang [115] nghiên cứu dựa trên HSDT và có xét đến tính phi tuyến của von Kármán. Các khảo sát số tương ứng với điều kiện biên tựa đơn và điều kiện biên ngàm cho thấy panel FG-X có khả năng chịu tải

lớn nhất và đường cong tải - độ võng không có dạng rẽ nhánh vì panel có độ võng ban đầu trước khi hiện tượng mất ổn định xảy ra. Dựa trên FSDT và phương pháp Ritz, Lei và các cộng sự [116] đã thực hiện nghiên cứu phân tích mất ổn định của tấm FG-GRC phân lớp trong môi trường nhiệt và các điều kiện biên khác nhau. Kết quả khảo sát đã chỉ ra rằng, khả năng chịu tải của tấm sẽ bị giảm khi nhiệt độ tăng hoặc độ mảnh của tấm tăng lên, ngược lại khi tăng số lớp GRC hoặc tăng độ dày thì khả năng chịu tải của tấm được cải thiện đáng kể. Yu và các cộng sự [117] đã nghiên cứu mất ổn định phi tuyến của tấm sandwich FG-GRC phân lớp trên nền đàn hồi chịu tải nén một phương trong môi trường nhiệt.

Ứng xử phi tuyến của tấm sandwich với bề mặt là FG-GRC và lõi là mạng 3D auxetic có tính chất cơ lý biến thiên chịu tải chậm (Low-velocity impact) đã được Li và cộng sự [118] nghiên cứu. Các khảo sát số cho thấy tính ưu việt của lõi 3D auxetic trong việc nâng cao khả năng chịu tải của tấm sandwich, đồng thời cũng cho thấy tấm sandwich FG-X có khả năng chịu tải lớn nhất và khi tỷ phần thể tích graphene tăng lên thì chuyển vị của tấm giảm đi, trong khi nhiệt độ tăng lại làm tăng chuyển vị của tấm. Mirzaei và Kiani [119], Kiani và Mirzaei [120] đã sử dụng FSDT, kết hợp với phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu và khảo sát sự mất ổn định và sau mất ổn định nhiệt của tấm, và dầm phân lớp được gia cường bởi graphene.

Bên cạnh vấn đề về ổn định tĩnh, vấn đề ổn định động và dao động của các kết cấu FG-GRC cũng được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Có thể kể đến các nghiên cứu của Shen và các cộng sự [121–124], các tác giả đã sử dụng HSDT và phương pháp nhiễu hai bước (two-step perturbation technique) để nghiên cứu về dao động phi tuyến của dầm, tấm, panel trụ và vỏ trụ tròn FG-GRC trên nền đàn hồi trong môi trường nhiệt. Ảnh hưởng của nền đàn nhớt (visco-elastic foundations) đến ứng xử của tấm FG-GRC chịu tải trọng động trong môi trường nhiệt cũng được đề cập trong nghiên cứu của Fan và các cộng sự [125]. Phương pháp phần tử hữu hạn và phương trình dao động của Lagrange cũng đã được Singha và các cộng sự [126] sử dụng để nghiên cứu dao động tự do của vỏ trụ FG-GRC chịu tải xoắn trong môi trường nhiệt. FSDT và phương pháp Ritz đã được Yin và Lei [127] sử dụng để phân tích các đặc trưng dao động của tấm FG-GRC bị nứt trong môi trường nhiệt.

Shen và các cộng sự [128] đã đề xuất một kỹ thuật mới để phân tích mất ổn định động của tấm FG-GRC, trong đó các phương trình chuyển động và các phương trình cân bằng phi tuyến được xây dựng từ phương pháp nhiễu hai bước và được giải đồng thời để xác định tần số và tải trọng trong mặt phẳng động duy nhất. Dao động tự do của panel hình thang FG-GRC đã được Mohamadi [129] sử dụng HSDT nghiên cứu và phân tích. Dao động tự do biên độ lớn của tấm FG-GRC và sự mất ổn định

của vỏ nón FG-GRC chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt cũng được Kiani nghiên cứu và phân tích trong các công trình [130, 131].

Các nhóm tác giả Việt Nam cũng đã có một số nghiên cứu về kết cấu tấm và vỏ FG-GRC. Đơn cử, nhóm tác giả Vũ Hoài Nam và các cộng sự cũng đã có nhiều nghiên cứu tới các kết cấu FG-GRC trong thời gian gần đây. Điển hình là nghiên cứu [132] về dao động phi tuyến của các tấm nhiều lớp FG - GRC nằm trên nền đàn hồi. Lê Ngọc Lý và các cộng sự [133] đã nghiên cứu sự mất ổn định cơ nhiệt phi tuyến tính của vỏ trụ composite nhiều lớp bao quanh bởi nền đàn hồi và được gia cường bằng Graphene dưới tải trọng nén trục. Nguyễn Thị Phương và các cộng sự [134, 135] đã nghiên cứu sau mất ổn định cơ nhiệt của vỏ trống composite nhiều lớp, phân tích mất ổn định phi tuyến của tấm composite phân lớp gia cường graphene có nền đàn hồi bao quanh.

Đặc biệt, tác giả luận án đã tham gia vào nghiên cứu của PGS.TS. Nguyễn Thị Phương và các cộng sự [136] để phát triển kỹ thuật gân làm bằng vật liệu dị hướng áp dụng cho gân làm bằng vật liệu FG-GRC trong khuôn khổ lý thuyết vỏ Donell và áp dụng dụng cho bài toán vỏ trụ FG-GRC có gân FG-GRC có nền đàn hồi bao quanh chịu áp lực ngoài.

1.5. Những kết quả nghiên cứu đã đạt được về kết cấu FG-GRC

Từ các nghiên cứu về kết cấu FG-GRC mà luận án đã trình bày bên trên, có thể thấy những kết quả mà các nhà khoa học trong và ngoài nước đã đạt được là:

1. Đã sử dụng các lý thuyết và phương pháp giải khác nhau để nghiên cứu và khảo sát tương đối toàn diện ổn định tĩnh tuyến tính và phi tuyến của các kết cấu tấm vỏ FG-GRC không có gân gia cường chịu tải trọng cơ, nhiệt, và cơ-nhiệt kết hợp trên nền đàn hồi. Chưa có các nghiên cứu về các kết cấu FG-GRC lõi Auxetic.
2. Đã sử dụng các lý thuyết và phương pháp giải khác nhau khảo sát dao động tuyến tính và phi tuyến của một số kết cấu FG-GRC không có gân gia cường. Chưa có các nghiên cứu về dao động phi tuyến của kết cấu FG-GRC có gân gia cường.
3. Về kết cấu, chưa có các nghiên cứu về ổn định đàn hồi tuyến tính và phi tuyến của các kết cấu tấm, panel trụ, vỏ trống FG-GRC có gân gia cường. Chưa có nghiên cứu về các loại panel có độ cong phức tạp như panel parabol, panel hình sin làm bằng vật liệu FG-GRC.
4. Tác giả luận án cùng với nhóm nghiên cứu của Nguyễn Thị Phương và các cộng sự [136] đã phát triển kỹ thuật gân làm bằng vật liệu dị hướng (sau

đây gọi tắt là kỹ thuật gân dị hướng) áp dụng cho gân FG-GRC cho bài toán vỏ trụ FG-GRC có gân FG-GRC chịu áp lực ngoài trong khuôn khổ lý thuyết vỏ Donell.

1.6. Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

Từ tổng quan đã trình bày bên trên, luận án nhận thấy có một số vấn đề cần được tiếp tục được nghiên cứu, đó là

- 1) Dựa trên kết quả bước đầu về kỹ thuật san tác dụng gân dị hướng cho vật liệu FG-GRC của tác giả luận án và nhóm nghiên cứu trong công trình [136], cần tiếp tục áp dụng và phát triển tiếp kỹ thuật này cho các kết cấu tấm, panel và vỏ trống FG-GRC có gân FG-GRC gia cường chịu tải trọng trong môi trường nhiệt theo lý thuyết vỏ Donnell và HSDT.
- 2) Phân tích ổn định đàn hồi phi tuyến của các kết cấu vỏ trống và vỏ trụ FG-GRC có gân gia cường FG-GRC, có lõi Auxetic có nền đàn hồi bao quanh chịu tải trọng trong môi trường nhiệt theo lý thuyết vỏ Donnell. Đặc biệt, bài toán ổn định phi tuyến của vỏ trống FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu tải xoắn có xét đến ứng suất theo chu vi $\sigma_{\theta y}$ cần được quan tâm giải quyết. Một số các yếu tố khác như ảnh hưởng của nền đàn hồi cũng cần được quan tâm nghiên cứu.
- 3) Phân tích ổn định đàn hồi phi tuyến của các kết cấu tấm, panel trụ FG-GRC có gân gia cường FG-GRC trên nền đàn hồi phi tuyến chịu tải nén dọc trục và áp lực ngoài trong môi trường nhiệt theo HSDT.
- 4) Phân tích ổn định đàn hồi phi tuyến của panel Parabol và panel hình Sin FG-GRC trên nền đàn hồi phi tuyến chịu nén dọc trục, chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt theo HSDT.

CHƯƠNG 2. ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ VÀ VỎ TRỐNG FG-GRC CÓ GÂN GIA CƯỜNG, CÓ LỖI AUXETIC

Trong chương này, luận án nghiên cứu ổn định phi tuyến của vỏ trụ và vỏ trống FG-GRC chịu một số tải trọng cơ trong môi trường nhiệt. Các bài toán cụ thể được nghiên cứu và khảo sát bao gồm:

- 1) Vỏ trống FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu tải trọng xoắn trong môi trường nhiệt.
- 2) Vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic có nền đàn hồi bao quanh chịu tải xoắn.
- 3) Vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic có nền đàn hồi bao quanh chịu tải dọc trục.
- 4) Vỏ trụ FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu tải xoắn trong môi trường nhiệt.
- 5) Vỏ trụ FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt.

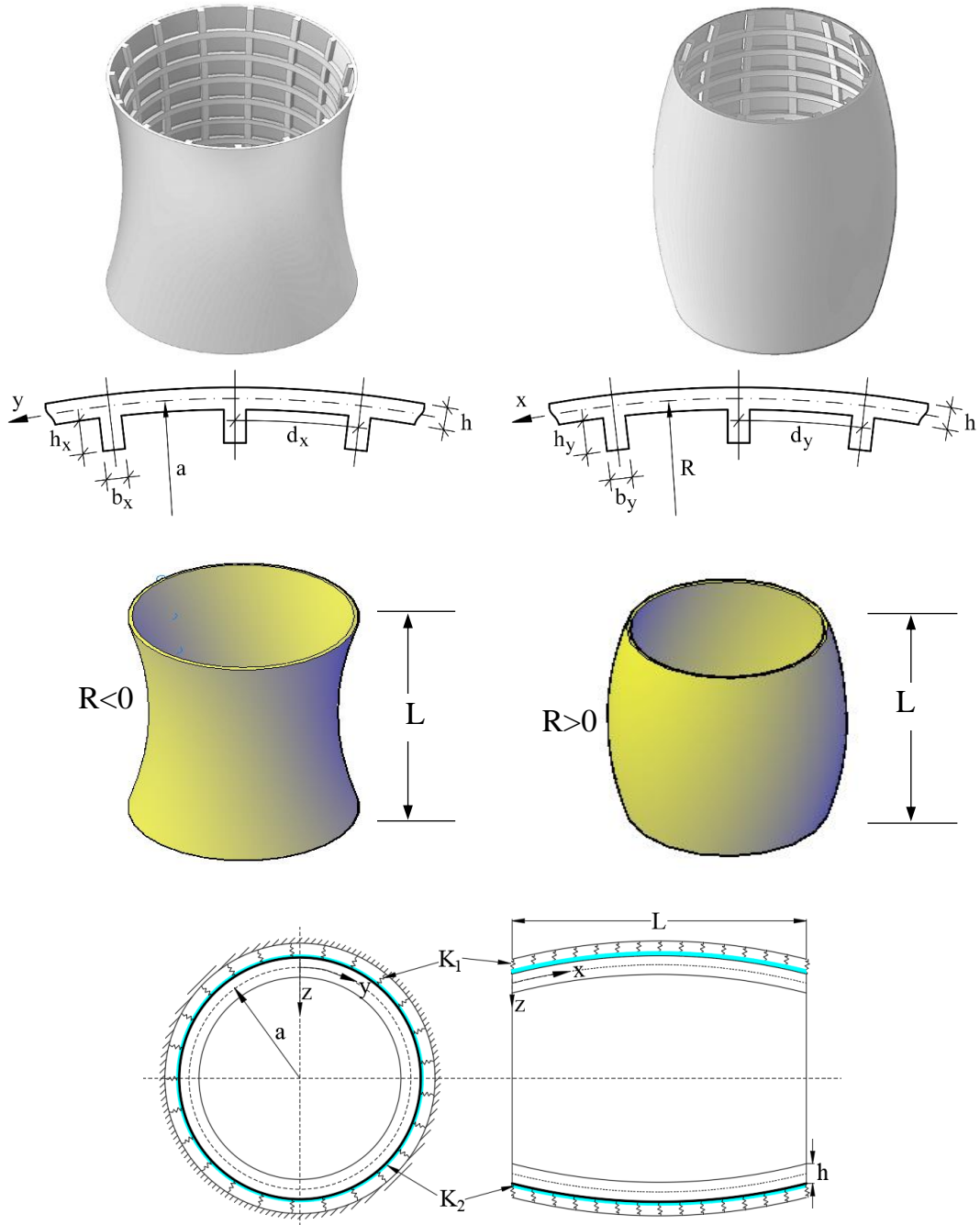
Điểm mới quan trọng của chương này so với các nghiên cứu trước đây là các kết cấu vỏ trống, vỏ trụ FG-GRC phân lớp được gia cường bởi hệ thống gân lệch tâm và vỏ trống FG-GRC phân lớp có lõi Auxetic. Hệ thống gân FG-GRC phân lớp được thiết kế sao cho phân tiếp xúc giữa vỏ và gân có tỷ phần thể tích graphene bằng nhau để kết cấu có cơ tính biến thiên thay đổi một cách từng phần về vật liệu. Trong quá trình tính các bài toán về vỏ trống chịu tải xoắn có nền đàn hồi bao quanh, lần đầu tiên ứng suất trung bình theo chu vi $\sigma_{\theta y}$ được xét đến trong hàm ứng suất để mô tả tốt hơn ứng xử của vỏ, ngoài ra hệ phương trình cân bằng và điều kiện chu vi kín được sử dụng một cách đầy đủ và logic về mặt toán học.

Các bài toán trong chương này được xây dựng theo lý thuyết vỏ Donnell có xét đến tính phi tuyến hình học của von Kármán. Với các bài toán có gân gia cường, phương pháp san đều tác dụng gân cải tiến dành cho gân FG-GRC [136] được luận án sử dụng để thuận nhất kết cấu. Các dạng nghiệm của độ võng được lựa chọn để có thể thỏa mãn một cách xấp xỉ các điều kiện biên, đồng thời sử dụng phương pháp Galerkin để tìm được các liên hệ của tải và độ võng, từ đó xác định được các tải tới hạn nếu có.

Nội dung chương này đã được tác giả công bố trong 6 bài báo đăng trên tạp chí quốc tế uy tín, đó là các công trình 1 đến 6 trong danh mục các công trình khoa học liên quan đến luận án.

2.1. Mô hình vỏ trống

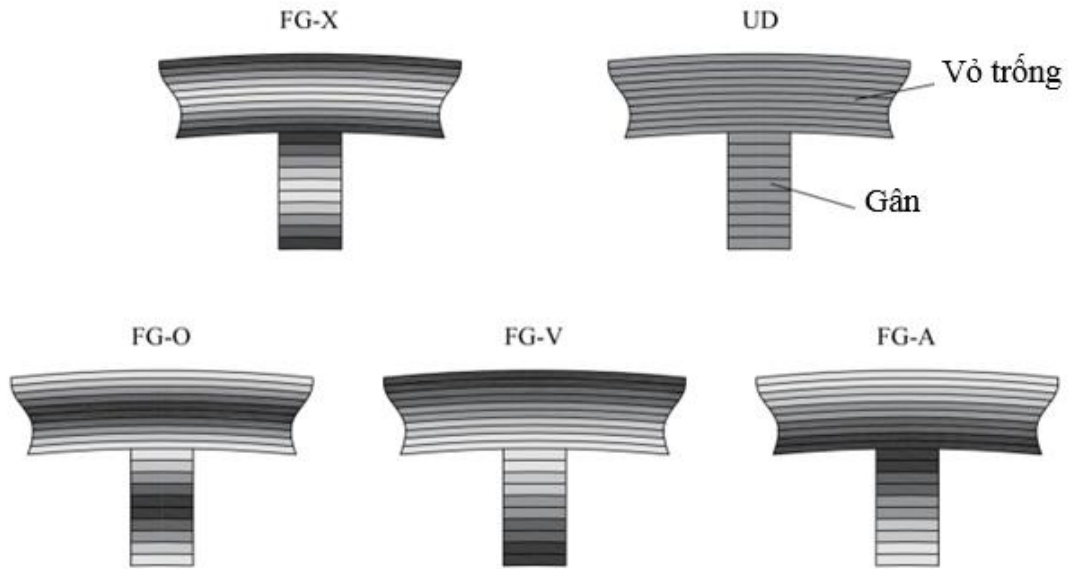
2.1.1. Vỏ trống FG- GRC có gân gia cường.



Hình 2.1. Vỏ trống lõm và vỏ trống lõm gia cường hệ thống gân

Vỏ trống FG-GRC phân lớp trong Hình 2.1 có chiều dài L với bề dày là h , các bán kính cong theo phương x và y lần lượt là R và a . Hai loại vỏ trống lõm và vỏ trống lõm FG-GRC tương ứng với bán kính R nhận giá trị dương ($R > 0$) hoặc giá trị âm ($R < 0$), và khi $R \rightarrow \infty$ (hay $1/R = 0$) ta nhận được vỏ trụ tròn FG-GRC bán kính a . Hệ tọa độ tựa Đề-các (Quasi-Cartesian) xyz được đặt ở mặt giữa của vỏ trống, trong đó trục x và y lần lượt là các trục theo đường sinh và chu vi vỏ trống, còn trục z vuông góc với mặt giữa của vỏ và theo hướng bề dày vỏ vào bên trong.

Vỏ trống được xem xét gia cường hệ thống gân dọc theo phương x và hệ thống gân vòng theo phương y phía bên trong với chiều cao và bề rộng gân gia cường theo hai phương lần lượt là h_x, h_y và b_x, b_y . Vỏ trống và hệ thống gân được chế tạo từ 10 lớp GRC với ba hướng bố trí graphene được xem xét trong luận án là $(0)_{10T}$, $(0/90/0/90/0)_S$, và $(0/90)_{5T}$. Các ký hiệu UD, FG-X, FG-O, FG-A và FG-V là các quy luật phân bố graphene trong nền polymer của vỏ và gân với thể tích graphene trong các lớp được trình bày như trong Bảng 1.2 và Hình 2.2.



Hình 2.2. Quy luật phân bố graphene trong vỏ và gân

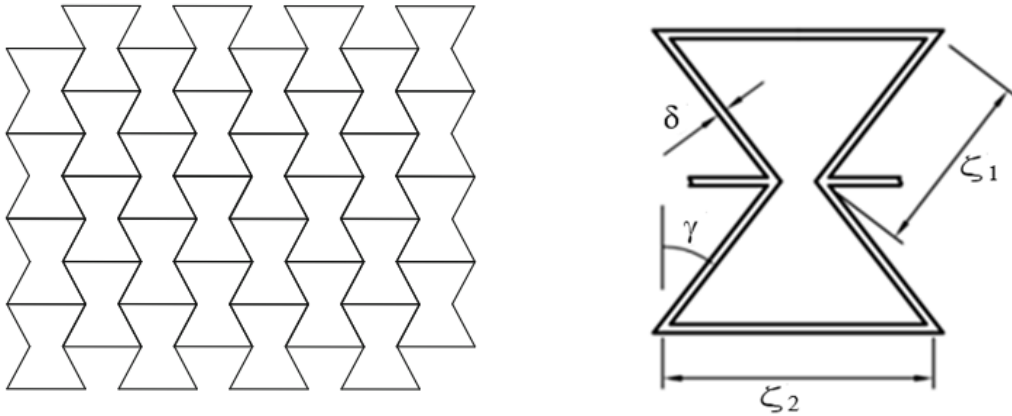
Để đảm bảo tính liên tục của vật liệu giữa vỏ và gân gia cường, luận án đề xuất một thiết kế mới cho vỏ trống FG-GRC gia cường bởi hệ thống gân FG-GRC sao cho hai lớp composite của vỏ và gân ở vị trí tiếp xúc có cùng tỷ phần thể tích graphene và 5 loại vỏ trống được gia cường bởi hệ thống gân FG-GRC được đề xuất bao gồm:

1. Vỏ trống UD GRC gia cường bởi hệ thống gân UD GRC.
2. Vỏ trống FG-X GRC gia cường bởi hệ thống gân FG-X GRC.
3. Vỏ trống FG-V GRC gia cường bởi hệ thống gân FG-A GRC.
4. Vỏ trống FG-A GRC gia cường bởi hệ thống gân FG-V GRC.
5. Vỏ trống FG-O GRC gia cường bởi hệ thống gân FG-O GRC.

2.1.2. Vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic

Vật liệu Auxetic cũng được coi là vật liệu tiên tiến khi có hệ số Poisson âm, điều thú vị là khi chịu kéo vật liệu này nở hông và khi chịu nén nó lại co hông. So với các vật liệu khác, vật liệu Auxetic có khả năng cách âm, hấp thụ năng lượng, chống lõm và đứt gãy. Các vật liệu Auxetic thường có cấu trúc hình lục giác (auxetic hexagon) giống như chiếc “nơ” (bow-tie) như Hình 2.3. Chính vì vậy vật liệu Auxetic

đã được ứng dụng trong chế tạo cảm biến, thiết bị y tế, các thiết bị chống va chạm trong lĩnh vực quân sự, hàng không và dân dụng [137–139].



Hình 2.3. Cấu trúc 2D Auxetic của Masters và Evans [140]

Ta biết rằng, mô đun đàn hồi trượt của một vật liệu thường được xác định theo công thức sau

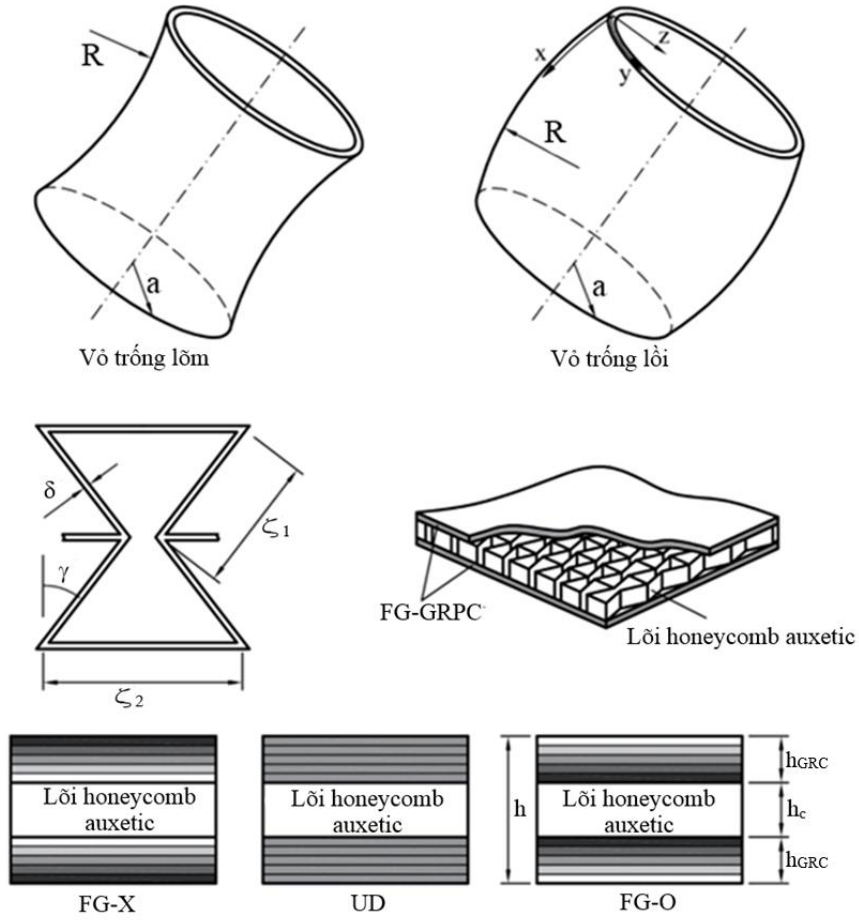
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (2.1)$$

trong đó E là mô đun đàn hồi và ν là hệ số Poisson của vật liệu.

Từ công thức (2.1), khi hệ số Poisson càng giảm thì khả năng kháng cắt của vật liệu sẽ càng tăng. Với vật liệu Auxetic, hệ số Poisson âm và khi $\nu \rightarrow -1$ thì khả năng kháng cắt của vật liệu sẽ dần tiến đến vô cùng [141]. Chính vì vậy khả năng kháng cắt của vật liệu Auxetic cao hơn so với các vật liệu thông thường khác.

Trong phần này, luận án xét mô hình vỏ trống lõi và vỏ trống lõm cấu tạo từ hai lớp mặt là các lớp GRC và lớp lõi là Auxetic như Hình 2.4, trong đó h_{GRC} và h_c lần lượt là bề dày lớp mặt và lớp lõi Auxetic; h , R , và a lần lượt là chiều dày, bán kính của vỏ trống theo phương x và phương y ; thông số của lớp lõi bao gồm δ , ζ_1 , ζ_2 , và γ được biểu diễn như Hình 2.3.

Ba kiểu phân bố graphene trong bề mặt của vỏ trống được xem xét nghiên cứu trong phần này là FG-X, UD và FG-O với tỷ phần thể tích của graphen trong các lớp GRC đã trình bày trong Bảng 1.2.



Hình 2.4. Mô hình vỏ trống lõi Auxetic

2.2. Các đặc trưng của vật liệu FG-GRPC và lõi Auxetic

Mô hình Halpin-Tsai cải tiến [32–35] được áp dụng để xác định mô đun đàn hồi và mô đun trượt hiệu dụng của các loại tấm vỏ gia cường graphene, khi đó

$$E_{11} = \eta_1 E_m \frac{1 + 2(a_g/h_g)\gamma_{11g}V_g}{1 - V_g\gamma_{11g}}, \quad E_{22} = \eta_2 E_m \frac{1 + 2(b_g/h_g)\gamma_{22g}V_g}{1 - V_g\gamma_{22g}}, \quad (2.2)$$

$$G_{12} = \frac{\eta_3 G_m}{1 - V_g\gamma_{12g}},$$

trong đó

$$\gamma_{11g} = \frac{E_{11g} - E_m}{E_{11g} + 2E_m(a_g/h_g)}, \quad \gamma_{22g} = \frac{E_{22g} - E_m}{E_{22g} + 2E_m(b_g/h_g)}, \quad \gamma_{12g} = \frac{G_{12g} - G_m}{G_{12g}}, \quad (2.3)$$

với a_g , b_g , h_g lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều dày graphene. G_m và E_m lần lượt là mô đun trượt và mô đun đàn hồi của nền polymer được xác định như sau [32, 109, 117]

$$E_m = (-0.0034T + 3.520), \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}, \quad (2.4)$$

η_1, η_2, η_3 là các tham số hiệu dụng phụ thuộc vào tỷ phần thể tích graphene được lấy trong Bảng 2.1 và $E_{11g}, E_{22g}, G_{12g}$ là mô đun đàn hồi và mô đun trượt của graphene có xét đến ảnh hưởng của thành phần nhiệt và xác định theo phương trình (1.1).

Bảng 2.1. Các mô đun đàn hồi, mô đun trượt, và các tham số hiệu dụng cho vật liệu nano graphene [32]

V_g	Các đặc trưng của graphene					
	$E_{11}(GPa)$	η_1	$E_{22}(GPa)$	η_2	$G_{12}(GPa)$	η_3
T = 300K						
0.03	12.47	2.929	12.47	2.855	0.962	11.842
0.05	19.41	3.068	19.41	2.962	0.982	15.944
0.07	26.58	3.013	26.58	2.966	1.003	23.575
0.09	34.01	2.647	34.01	2.609	1.025	32.816
0.11	41.71	2.311	41.71	2.260	1.048	33.125
T = 400K						
0.03	10.96	2.977	10.96	2.896	0.831	13.928
0.05	17.09	3.128	17.09	3.023	0.848	15.229
0.07	23.43	3.060	23.43	3.027	0.867	22.588
0.09	30.01	2.701	30.00	2.603	0.886	28.869
0.11	36.82	2.405	36.82	2.337	0.906	29.527
T = 500K						
0.03	9.424	3.388	9.420	3.382	0.700	16.712
0.05	14.72	3.544	14.71	3.414	0.715	16.018
0.07	20.21	3.462	20.20	3.339	0.730	23.428
0.09	25.90	3.058	25.89	2.936	0.746	29.754
0.11	31.82	2.736	31.80	2.665	0.763	30.773

Hệ số giãn nở nhiệt α_{11}, α_{22} và hệ số Poisson ν_{12} của các lớp GRC được xác định như sau

$$\alpha_{11} = \frac{\alpha_{11g}V_gE_{11g} + \alpha_mV_mE_m}{V_gE_{11g} + V_mE_m},$$

$$\alpha_{22} = V_g\alpha_{22g}(1 + \nu_{12g}) + V_m\alpha_m(1 + \nu_m) - \nu_{12}\alpha_{11}, \quad (2.5)$$

$$\nu_{12} = \nu_{12g}V_g + \nu_mV_m,$$

trong đó ν_{12g} và $\alpha_{11g}, \alpha_{22g}$ lần lượt là các hệ số Poisson và hệ số giãn nở nhiệt của graphene được xác định theo phương trình (1.1). V_m là tỷ phần thể tích của nền thỏa mãn điều kiện $V_g + V_m = 1$, ν_m và α_m lần lượt là hệ số Poisson và hệ số giãn nở nhiệt của nền Poly methyl methacrylate (PMMA) [32, 109]

$$\begin{aligned}
v_m &= 0.340, \\
\alpha_m &= 45 \times 10^{-6} (1 + 0.0005 \Delta T) / K, \\
\Delta T &= T - T_0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Với lớp lõi Auxetic, mô đun đàn hồi và mô đun trượt của lớp này có thể xác định theo biểu thức sau [142]

$$\begin{aligned}
E_1^{Auxetic} &= E_m \frac{\chi_2^3 (\chi_1 - \sin \gamma)}{\cos^3 \gamma \left[(\chi_1 \sec^2 \gamma + \tan^2 \gamma) \chi_2^2 + 1 \right]}, \\
E_2^{Auxetic} &= E_m \frac{\chi_2^3}{(\chi_1 - \sin \gamma) (\tan^2 \gamma + \chi_2^2) \cos \gamma}, \\
G_{12}^{Auxetic} &= E_m \frac{\chi_2^3}{(1 + 2\chi_1) \chi_1 \cos \gamma},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

trong đó $\chi_1 = \zeta_2 / \zeta_1$, $\chi_2 = \delta / \zeta_1$, và hệ số Poisson trục hướng của lớp lõi auxetic được xác định như sau

$$\begin{aligned}
v_{12}^{Auxetic} &= - \frac{(1 - \chi_2^2) \sin \gamma (\chi_1 - \sin \gamma)}{\left[(\chi_1 \sec^2 \gamma + \tan^2 \gamma) \chi_2^2 + 1 \right] \cos^2 \gamma}, \\
v_{21}^{Auxetic} &= \frac{\sin \gamma (\chi_2^2 - 1)}{(\chi_1 - \sin \gamma) (\tan^2 \gamma + \chi_2^2)}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3. Các phương trình cơ bản

Theo lý thuyết vỏ Donnell có xét đến các thành phần phi tuyến của von Kármán các thành phần biến dạng của một điểm bất kỳ của vỏ trống cách mặt trung bình một khoảng z được xác định là [44, 143]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{2.9}$$

trong đó $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$ là các biến dạng pháp theo hướng dọc và chu vi vỏ, γ_{xy}^0 là thành phần biến dạng trượt ở mặt giữa của vỏ. $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ là sự thay đổi độ cong và độ xoắn của vỏ tương ứng với các thành phần chuyển vị tại mặt giữa là $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$ theo các phương x, y , và z , và [44]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ v_{,y} - \frac{w}{a} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.10)$$

Phương trình tương thích biến dạng thu được từ phương trình (2.10) là

$$\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = -\frac{1}{a}w_{,xx} - \frac{1}{R}w_{,yy} + (w_{,xy})^2 - w_{,xx}w_{,yy}. \quad (2.11)$$

Các mối quan hệ ứng suất và biến dạng được xác định theo định luật Hooke có xét đến ảnh hưởng nhiệt độ cho các lớp GRC như sau

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11s} & Q_{12s} & 0 \\ Q_{12s} & Q_{22s} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66s} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \Delta T \alpha_{11} \\ \varepsilon_y - \Delta T \alpha_{22} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{(k)}, \quad (2.12)$$

trong đó $Q_{ij(k)}$ là các thành phần độ cứng của các lớp GRC được xác định theo biểu thức sau [109, 144]

$$\begin{aligned} Q_{11s(k)} &= \frac{E_{11(k)}}{1 - \nu_{12(k)}\nu_{21(k)}}, \quad Q_{22s(k)} = \frac{E_{22(k)}}{1 - \nu_{12(k)}\nu_{21(k)}}, \\ Q_{12s(k)} &= \frac{\nu_{21(k)}E_{11(k)}}{1 - \nu_{12(k)}\nu_{21(k)}}, \quad Q_{66s(k)} = G_{12(k)}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

và $\Delta T = T - T_0$ là nhiệt độ tăng đều từ giá trị ban đầu T_0 đến T .

Dựa trên ý tưởng của Lekhnitskii, luận án xem xét các gân gia cường làm việc như các dầm chịu uốn phẳng, vỏ có gân gia cường được thuần nhất về vỏ không gân dị hướng tương đương bằng cách cộng tổng các thành phần độ cứng của gân (sau khi được san theo hướng làm việc của gân) vào các thành phần độ cứng của vỏ tương ứng.

Các lực màng N_x, N_y, N_{xy} , và các mô men M_x, M_y, M_{xy} được tính qua các thành phần ứng suất như sau [143, 145]

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz, \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Thay phương trình (2.9) vào phương trình (2.12) và kết quả thu được được thay tiếp vào phương trình (2.14), biểu thức nội lực của vỏ trống FG-GRC có gân gia cường FG-GRC thu được có dạng sau

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Phi_{1x} \\ \Phi_{1y} \\ 0 \\ \Phi_{2x} \\ \Phi_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.15)$$

trong đó các thành phần ma trận độ cứng A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} của vỏ trống có gân gia cường được xác định theo công thức

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = (A_{ijs}, B_{ijs}, D_{ijs})_{[k]} + (A_{ijx}, B_{ijx}, D_{ijx})_{[k]} + (A_{ijy}, B_{ijy}, D_{ijy})_{[k]}, \quad (2.16)$$

và các thành phần độ cứng của lớp GRC xác định như sau

$$(A_{ijs}, B_{ijs}, D_{ijs})_{[k]} = \sum_{k=1}^{10} \int_{\Pi_k} Q_{ijs(k)}(1, z, z^2) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad (2.17)$$

với Π_k lần lượt là miền lấy tích phân của các lớp GRC, $(A_{ijx}, B_{ijx}, D_{ijx})_{[k]}$ là thành phần độ cứng của gân dọc theo hướng x , với

$$\begin{bmatrix} A_{11x} & B_{11x} \\ B_{11x} & D_{11x} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{10} \left\{ \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{B}_{11} \\ \hat{B}_{11} & \hat{D}_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{A}_{12} & 0 & \hat{B}_{12} & 0 \\ \hat{B}_{12} & 0 & \hat{D}_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{22} & 0 & \hat{B}_{22} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{66} & 0 & \hat{B}_{66} \\ \hat{B}_{22} & 0 & \hat{D}_{22} & 0 \\ 0 & \hat{B}_{66} & 0 & \hat{D}_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{A}_{12} & \hat{B}_{12} \\ 0 & 0 \\ \hat{B}_{12} & \hat{D}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}_{(k)}, \quad (2.18)$$

trong đó

$$(\hat{A}_{ij}, \hat{B}_{ij}, \hat{D}_{ij})_{(k)} = \frac{b_x}{d_x} \int_{\Delta(k)} Q_{ij(k)}(1, z, z^2) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6). \quad (2.19)$$

Các thành phần độ cứng của gân vòng $(A_{ijy}, B_{ijy}, D_{ijy})_{[k]}$ nhận được bằng cách thay các chỉ số dưới “11” thành các chỉ số “22” và các chỉ số dưới “22” thành các chỉ số “11” trong các công thức (2.18), (2.19), và bề rộng với khoảng cách của các gân b_x, d_x được thay thế lần lượt bằng b_y, d_y .

Các thành phần nhiệt của vỏ được xác định theo biểu thức

$$\Phi_{1x} = \Phi_{1x(s)} + \Phi_{1x(x)}, \quad \Phi_{1y} = \Phi_{1y(s)} + \Phi_{1y(y)}, \quad (2.20)$$

trong đó các thành phần nhiệt của lớp GRC và của gân xác định như sau

$$\begin{aligned} \Phi_{1x(s)} &= \sum_{k=1}^{10} \int_{\Pi_k} \Delta T (Q_{11s(k)} \alpha_{11(k)} + Q_{12s(k)} \alpha_{22(k)}) dz, \\ \Phi_{1y(s)} &= \sum_{k=1}^{10} \int_{\Pi_k} \Delta T (Q_{22s(k)} \alpha_{22(k)} + Q_{12s(k)} \alpha_{11(k)}) dz, \\ \Phi_{1x(x)} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{b_x}{d_x} \int_{\Delta(k)} \Delta T (Q_{11s(k)} \alpha_{11(k)} + Q_{12s(k)} \alpha_{22(k)}) dz, \\ \Phi_{1x(y)} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{b_y}{d_y} \int_{\Delta(k)} \Delta T (Q_{22s(k)} \alpha_{22(k)} + Q_{12s(k)} \alpha_{11(k)}) dz. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Với vỏ trống FG-GRC lõi auxetic không gân, không xét đến nhiệt trong quá trình tính toán nên sẽ bỏ qua các thành phần độ cứng của gân trong công thức (2.16) và bỏ qua các thành phần nhiệt trong công thức (2.15) và (2.20). Khi đó các thành phần ma trận độ cứng A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} trong công thức (2.15) sẽ là tổng độ cứng của vỏ gồm hai lớp mặt GRC và lớp lõi Auxetic.

Từ phương trình (2.15), biểu thức của các thành phần biến dạng tại mặt trung bình xác định được như sau

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & 0 & B_{11}^* & B_{12}^* & 0 \\ A_{21}^* & A_{22}^* & 0 & B_{21}^* & B_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^* & 0 & 0 & B_{66}^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x - \Phi_{1x} \\ N_y - \Phi_{1y} \\ N_{xy} \\ w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.22)$$

trong đó các hệ số A_{ij}^* và B_{ij}^* được xác định cụ thể trong phụ lục A1

Kết hợp biểu thức (2.22) và (2.15) ta thu được

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 & S_{11} & S_{12} & 0 \\ X_{21} & X_{22} & 0 & S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{66} & 0 & 0 & S_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x - \Phi_{1x} \\ N_y - \Phi_{1y} \\ N_{xy} \\ w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Phi_{2x} \\ \Phi_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.23)$$

trong đó các hệ số X_{ij} và S_{ij} được xác định cụ thể trong phụ lục A1.

Hệ phương trình cân bằng của vỏ trống có nền Pasternak bao quanh theo lý thuyết vỏ Donnell có dạng [44]

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0, & N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0, \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy} + & \\ + \frac{1}{R} N_x + \frac{1}{a} N_y - K_1 w + K_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

trong đó $K_1 (N/m^3)$ và $K_2 (N/m)$ là các tham số độ cứng của nền đàn hồi Pasternak.

Khi đưa vào hàm ứng suất Airy là $\bar{\varphi}(x, y)$ thỏa mãn ba điều kiện là

$$N_{xy} = -\bar{\varphi}_{,xy}, \quad N_x = \bar{\varphi}_{,yy}, \quad N_y = \bar{\varphi}_{,xx}, \quad (2.25)$$

thì hai phương trình đầu của (2.24) thỏa mãn hoàn toàn.

Thay các phương trình (2.15) và (2.25) vào phương trình thứ ba của (2.24) phương trình cân bằng được viết lại như sau

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} \equiv P_1 \bar{\varphi}_{,xxxx} + P_2 \bar{\varphi}_{,xxyy} + P_3 \bar{\varphi}_{,yyyy} + S_{11} w_{,xxxx} + P_4 w_{,xxyy} + S_{22} w_{,yyyy} + & \\ + \left(\frac{1}{a} + w_{,yy} \right) \varphi_{,xx} + \left(w_{,xx} + \frac{1}{R} \right) \varphi_{,yy} - 2\varphi_{,xy} w_{,xy} + K_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) - K_1 w &= 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

trong đó các hệ số $P_i (i=1 \rightarrow 4)$ được xác định cụ thể trong phụ lục A1

Thay các biểu thức (2.25) và (2.22) vào phương trình tương thích biến dạng (2.11) rút gọn lại ta được

$$\begin{aligned} A_{22}^* \bar{\varphi}_{,xxxx} + (A_{12}^* + A_{21}^* + A_{66}^*) \bar{\varphi}_{,xxyy} + A_{11}^* \bar{\varphi}_{,yyyy} + B_{21}^* w_{,xxxx} + B_{12}^* w_{,yyyy} + & \\ + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) w_{,xxyy} + \left(\frac{1}{a} + w_{,yy} \right) w_{,xx} + \frac{1}{R} w_{,yy} - (w_{,xy})^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Các phương trình (2.26) và (2.27) là các phương trình cơ bản để nghiên cứu và phân tích sự mất ổn định của vỏ trống FG-GRC có nền Pasternak bao quanh chịu tải trọng cơ trong môi trường nhiệt.

2.3.1. Bài toán vỏ trống và vỏ trụ chịu tải xoắn

Đối với bài toán vỏ trống, vỏ trụ FG-GRC chịu tải xoắn có các cạnh tựa đơn tự do, điều kiện biên được biểu diễn dưới dạng sau

$$w = 0, M_x = 0, N_x = 0, N_y = \sigma_{0y} h, N_{xy} = -\tau h \text{ tại } x=0, L. \quad (2.28)$$

Không giống với kết cấu tấm và panel FG-GRC, khi vỏ trống hoặc vỏ trụ FG-GRC chịu tải trọng cơ trong môi trường nhiệt, do điều kiện chu vi kín nên ứng xử cơ học của vỏ trống hoặc vỏ trụ khá phức tạp và thường có độ võng đều đáng kể trước

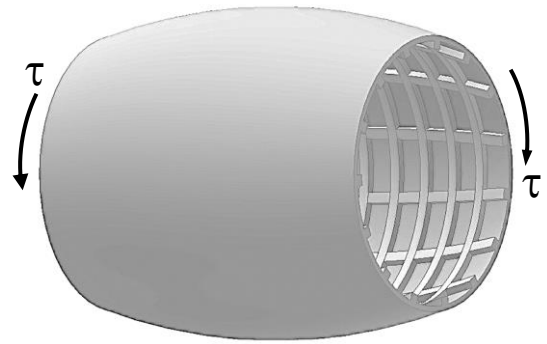
mất ổn định [44]. Vì vậy, nghiệm độ võng của vỏ trống chịu tải xoắn được lựa chọn có ba số hạng và thỏa mãn xấp xỉ điều kiện biên tựa đơn có dạng như sau [146]

$$w = \xi_0 + \xi_1 \sin[\beta(y - \lambda x)] \sin(\alpha x) + \xi_2 \sin^2(\alpha x), \quad (2.29)$$

trong đó ξ_0 là biên độ của độ võng đều trước mất ổn định, ξ_1 là biên độ của độ võng tuyến tính sau mất ổn định, ξ_2 là biên độ của độ võng phi tuyến sau mất ổn định, hệ số λ là tan của góc hợp bởi đường có độ võng bằng không với đường sinh của vỏ trống. Các hệ số $\beta = \frac{n}{a}$; $\alpha = \frac{m\pi}{L}$ với m và n lần lượt là số nửa bước sóng và số sóng theo phương dọc và phương chu vi vỏ.



Hình 2.5. Mô hình vỏ trống lõm FG-GRC có gân gia cường chịu tải xoắn



Hình 2.6. Mô hình vỏ trống lồi FG-GRC có gân gia cường chịu tải xoắn

Thay biểu thức (2.29) vào phương trình (2.27) và giải phương trình nhận được để tìm hàm ứng suất, dẫn tới

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & I_1 \cos(2\alpha x) + I_2 \cos[2\beta(-\lambda x + y)] + I_3 \cos[\beta y + (\alpha - \lambda\beta)x] \\ & + I_4 \cos[\beta y - (\beta\lambda + \alpha)x] + I_5 \cos[\beta y - (3\alpha + \lambda\beta)x] \\ & + I_6 \cos[\beta y + (3\alpha - \lambda\beta)x] + \sigma_{oy} h \frac{x^2}{2} - \tau hxy, \end{aligned} \quad (2.30)$$

trong đó σ_{oy} là ứng suất trung bình theo hướng chu vi vỏ và

$$\begin{aligned} I_1 = O_1 \xi_1^2 + O_2 \xi_2, \quad I_2 = O_3 \xi_1^2, \quad I_3 = \frac{1}{2} \frac{[(a\alpha^2 \beta^2 \xi_2 - O_5)R - \beta^2 a] \xi_1}{O_4 a R}, \\ I_4 = -\frac{1}{2} \frac{[(a\alpha^2 \beta^2 \xi_2 - O_7)R - \beta^2 a] \xi_1}{O_6 R a}, \quad I_5 = \frac{\alpha^2 \beta^2 \xi_1 \xi_2}{O_8}, \quad I_6 = -\frac{\alpha^2 \beta^2 \xi_1 \xi_2}{O_9}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

với $O_i (i=1 \rightarrow 9)$ được trình bày cụ thể trong phụ lục A2.

Thay các phương trình (2.29) và (2.30) vào phương trình (2.26) và áp dụng phương pháp Galerkin cho ba thành phần độ võng như sau

$$\int_0^L \int_0^{2\pi a} \bar{\Theta} dy dx = 0,$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi a} \bar{\Theta} \sin[\beta(y - \lambda x)] \sin(\alpha x) dy dx = 0, \quad (2.32)$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi a} \bar{\Theta} \sin^2(\alpha x) dy dx = 0.$$

Từ biểu thức (2.32) ta thu được ba phương trình đại số như sau

$$-2K_1 L \pi a \xi_0 - K_1 L \pi a \xi_2 + 2L \pi h \sigma_{oy} = 0, \quad (2.33)$$

$$V_1 \xi_1^2 + V_2 \xi_2^2 + V_3 \tau + V_4 \sigma_{oy} + V_5 \xi_2 + V_6 = 0, \quad (2.34)$$

$$-K_1 L \pi a \xi_0 + L \pi h \sigma_{oy} + V_7 \xi_1^2 \xi_2 + V_8 \xi_1^2 + V_9 \xi_2 = 0, \quad (2.35)$$

với $V_i (i=1 \rightarrow 9)$ được trình bày cụ thể trong phụ lục A2.

Vỏ trống phải thỏa mãn điều kiện chu vi kín theo nghĩa trung bình, kết hợp các phương trình (2.22), (2.25) và (2.30) ta được

$$\int_0^L \int_0^{2\pi a} \frac{\partial v}{\partial y} dy dx = \int_0^L \int_0^{2\pi a} \left(\varepsilon_y^0 - 0.5 w_{,y}^2 + \frac{w}{a} \right) dy dx = 0. \quad (2.36)$$

suy ra

$$V_{10} \sigma_{oy} + L \pi \xi_2 - \frac{n^2 L \pi \xi_1^2}{4a} + 2L \pi \xi_0 + V_{11}, \quad (2.37)$$

trong đó $V_j (j=10,11)$ được trình bày cụ thể trong phụ lục A2

Từ phương trình (2.37) có thể xác định được ứng suất σ_{oy} như sau

$$\sigma_{oy} = \frac{1}{V_{10}} \left(-L \pi \xi_2 + \frac{n^2 L \pi \xi_1^2}{4a} - 2L \pi \xi_0 - V_{11} \right). \quad (2.38)$$

Thay biểu thức (2.38) vào phương trình (2.33), ta tìm được biểu thức ξ_2 như sau

$$\xi_2 = \frac{L \pi h n^2 \xi_1^2 - 4K_1 V_{10} a^2 \xi_0 - 8L \pi a h \xi_0 - 4V_{11} a h}{2K_1 V_{10} a^2 + 4L \pi a h}. \quad (2.39)$$

Thay các biểu thức (2.38) và (2.39) vào phương trình (2.35), tìm được biểu thức ξ_0 như sau

$$\xi_0 = -\frac{V_{11} h}{K_1 V_{10} a + 2L \pi h} + \frac{\xi_1^2 V_8}{K_1 L \pi a + 2V_7 \xi_1^2 + 2V_9} + \frac{L \pi h n^2 \xi_1^2}{4a(K_1 V_{10} a + 2L \pi h)}. \quad (2.40)$$

Tiếp tục thay các biểu thức (2.38), (2.39) và (2.40) vào trong phương trình (2.34) ta thu được biểu thức

$$\tau = \frac{1}{8} \frac{T_1 \xi_1^6 + T_2 \xi_1^4 + T_3 \xi_1^2 + T_4}{T_5 (K_1 L \pi a + 2V_7 \xi_1^2 + 2V_9)^2}, \quad (2.41)$$

trong đó $T_i (i=1 \rightarrow 5)$ được trình bày cụ thể trong phụ lục A2.

Từ phương trình (2.41) biểu thức tải xoắn làm mất ổn định của vỏ trống τ có thể tìm được khi $\xi_1 \rightarrow 0$.

$$\tau = \frac{1}{8} \frac{T_4}{T_5 (K_1 L \pi a + 2V_9)^2}. \quad (2.42)$$

Giá trị tải tới hạn τ_{cr} là giá trị tải nhỏ nhất trong biểu thức (2.42) tương ứng với các mode (m, n, λ) .

Từ phương trình (2.29) độ võng lớn nhất xác định theo biểu thức

$$W_{\max} = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 \quad (2.43)$$

Thay các phương trình (2.39), (2.40) vào phương trình (2.43), thu được biểu thức mới xác định độ võng lớn nhất như sau

$$W_{\max} = \frac{T_6 \xi_1^4 + T_7 \xi_1^3 + T_8 \xi_1^2 + T_9 \xi_1 + T_{10}}{8 (K_1 L \pi a + 2V_7 \xi_1^2 + 2V_9) T_{11}}, \quad (2.44)$$

trong đó các hệ số $T_j (j=6 \rightarrow 11)$ được trình bày cụ thể trong phụ lục A2.

Kết hợp các phương trình (2.41) và (2.44) luận án sẽ khảo sát được mối quan hệ giữa tải trọng và độ võng lớn nhất của vỏ trống FG-GRC chịu tải xoắn.

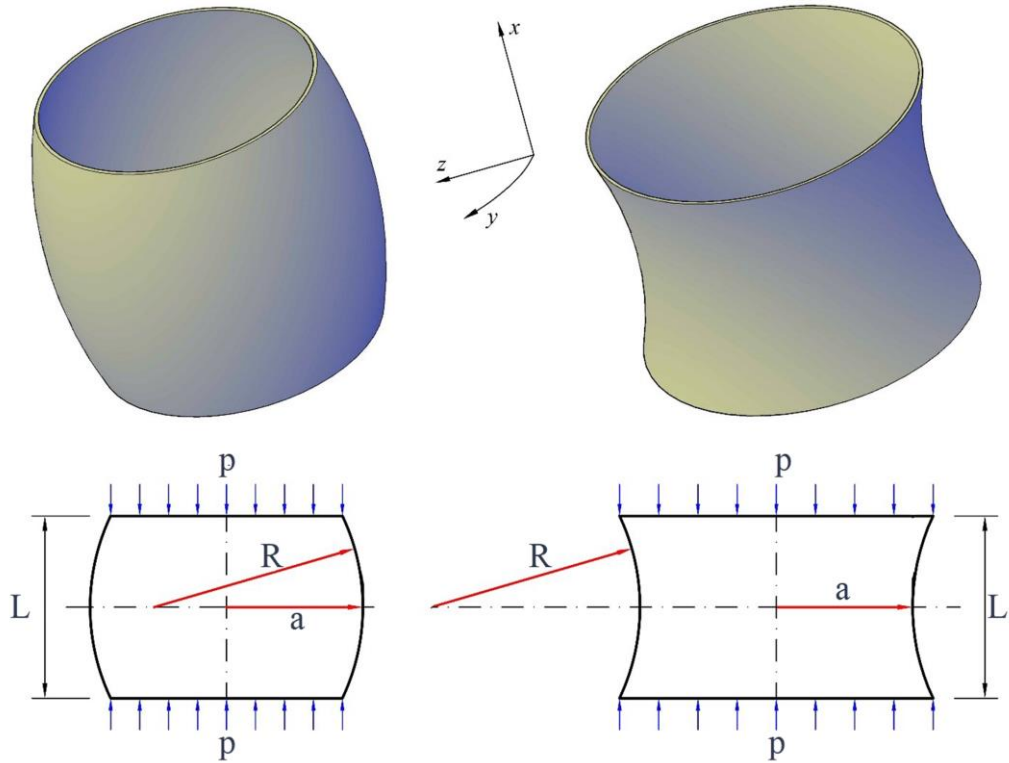
Góc xoắn được xác định theo biểu thức sau

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2La\pi} \int_0^L \int_0^{2\pi a} (u_{,y} + v_{,x}) dy dx \\ &= \frac{1}{2La\pi} \int_0^L \int_0^{2\pi a} (\gamma_{xy}^0 - w_{,x} w_{,y}) dx dy = \frac{1}{4} \frac{\lambda n^2 \xi_1^2}{a^2} + \frac{\tau h}{A_{66}}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Tương tự, kết hợp các phương trình (2.41) và (2.45) sẽ khảo sát được mối quan hệ giữa tải xoắn và góc xoắn của vỏ trống FG-GRC có nền đàn hồi bao quanh chịu tải xoắn trong môi trường nhiệt.

Dựa vào các dạng đường cong tải xoắn - độ võng và tải xoắn - góc xoắn trong quá trình khảo sát, luận án sẽ đánh giá được khả năng chịu tải sau mất ổn định của vỏ trống FG-GRC có gân gia cường chịu tải trọng xoắn.

2.3.2. Bài toán vỏ trống và vỏ trụ FG-GRC chịu tải dọc trục



Hình 2.7. Mô hình vỏ trống FG-GRC chịu tải dọc trục

Đối với bài toán vỏ trống, vỏ trụ FG-GRC chịu tải dọc trục có các cạnh tựa tự do, điều kiện biên được biểu diễn dưới dạng sau

$$M_x = 0, w = 0, N_{xy} = 0, N_y = -\sigma_{0y}h, N_x = -ph, \text{ tại } x = 0; L. \quad (2.46)$$

Tương tự như bài toán vỏ trống hoặc vỏ trụ FG-GRC có nền đàn hồi bao quanh chịu tải xoắn trong môi trường nhiệt, dạng nghiệm độ võng của vỏ trống và vỏ trụ chịu tải dọc trục được lựa chọn có ba số hạng và thỏa mãn điều kiện biên tựa đơn đã trình bày bên trên có dạng sau [146, 147]

$$w(x, y) = \xi_0 + \xi_1 \sin \alpha x \sin \beta y + \xi_2 \sin^2 \alpha x, \quad (2.47)$$

trong đó $\alpha = m\pi/L$, $\beta = n/a$ với m là số nửa sóng theo hướng dọc vỏ và n là số sóng theo hướng chu vi tương ứng. Độ võng lớn nhất từ (2.47) xác định được là

$$W_{\max} = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2. \quad (2.48)$$

Thay dạng nghiệm độ võng (2.47) vào phương trình (2.27) và giải phương trình nhận được, dẫn tới hàm ứng suất có dạng

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & \varphi_1 \cos 2\alpha x + \varphi_2 \cos 2\beta y - \varphi_3 \sin \alpha x \sin \beta y + \varphi_4 \sin 3\alpha x \sin \beta y \\ & - \sigma_{0y}h \frac{x^2}{2} - ph \frac{y^2}{2}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

với p là tải dọc trục tác dụng tại cạnh $x = 0; L$, tải mang giá trị dương khi vỏ chịu nén và âm khi vỏ chịu kéo, và

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= J_{12}\xi_1^2 + J_{11}\xi_2, \quad \varphi_2 = J_{13}\xi_1^2, \\ \varphi_3 &= J_{14}\xi_1\xi_2 + J_{15}\xi_1, \quad \varphi_4 = J_{16}\xi_1\xi_2,\end{aligned}\quad (2.50)$$

trong đó J_{1i} ($i = 1 \rightarrow 6$) được xác định trong phụ lục A3.

Thay hàm ứng suất (2.49) và độ võng (2.47) vào trong phương trình (2.26) sau đó áp dụng phương pháp Galerkin ta thu được các phương trình sau

$$-\pi LK_1 a\xi_2 - 2\pi LK_1 a\xi_0 - 2\pi Lh\sigma_{oy} - 2\frac{\pi Lahp}{R} = 0, \quad (2.51)$$

$$J_{23}\xi_2^2 + J_{25}\xi_1^2 + J_{21}p + J_{22}\sigma_{oy} + J_{24}\xi_2 + J_{26} = 0, \quad (2.52)$$

$$-\pi LK_1 a\xi_0 + J_{32}\xi_1^2\xi_2 - \pi Lh\sigma_{oy} + J_{33}\xi_1^2 + J_{34}p\xi_2 + J_{31}\xi_2 + J_{35}p = 0. \quad (2.53)$$

Vỏ trống phải thỏa mãn điều kiện chu vi kín theo nghĩa trung bình, kết hợp các biểu thức (2.22), (2.25) và (2.30) thay vào biểu thức (2.36) ta có phương trình sau

$$\begin{aligned}\pi L\xi_2 - \frac{n^2\pi L\xi_1^2}{4a} + 2\pi L\xi_0 - 2L\pi aA_{22}^*\Phi_{1y} - 2L\pi aA_{21}^*\Phi_{1x} - \\ - 2L\pi A_{22}^*ha\sigma_{oy} - 2L\pi ahpA_{21}^* = 0,\end{aligned}\quad (2.54)$$

trong đó J_{2i} ($i = 1 \rightarrow 6$), J_{3j} ($j = 1 \rightarrow 5$) xác định trong phụ lục A3.

Từ phương trình (2.51) biểu thức σ_{oy} xác định được như sau

$$\sigma_{oy} = \frac{(-\xi_2/2 - \xi_0)K_1 a}{h} - \frac{ap}{R} \quad (2.55)$$

Thay (2.55) vào phương trình (2.54) biểu thức ξ_0 xác định được là

$$\xi_0 = J_{38}p - \frac{\xi_2}{2} + J_{37}\xi_1^2 + J_{36} \quad (2.56)$$

trong đó J_{4i} ($j = 6 \rightarrow 8$) xác định trong phụ lục A3.

Tiếp tục thay (2.55) và (2.56) vào phương trình (2.53), biểu thức ξ_1^2 xác định được như sau

$$\xi_1^2 = \frac{(-2J_{34}p + J_{40})\xi_2 + J_{39}p}{2J_{32}\xi_2 + 2J_{33}} \quad (2.57)$$

trong đó J_{39}, J_{40} xác định trong phụ lục A3.

Thay (2.55), (2.56) và (2.57) vào phương trình (2.52), giải tìm được mối quan hệ của tải và biên độ võng phi tuyến như sau

$$p = \frac{J_{43}\xi_2^3 + J_{44}\xi_2^2 + J_{45}\xi_2 + J_{46}}{J_{41}\xi_2 + J_{42}}, \quad (2.58)$$

trong đó J_{4i} ($i = 1 \rightarrow 6$) xác định trong phụ lục A3.

Khi $\xi_2 \rightarrow 0$ tải mất ổn định tương ứng với điểm rẽ nhánh của vỏ trống xác định được theo biểu thức sau

$$p^{up} = \frac{J_{46}}{J_{42}}. \quad (2.59)$$

Khảo sát tải mất ổn định với tất cả các mode (m, n) , giá trị tải trọng nhỏ nhất thu được đối với trường hợp tải trọng nén và lớn nhất với tải trọng kéo được gọi là tải tới hạn p_{cr} .

Trường hợp nén dọc trục thì tải trọng nén $p_c = p$ và tải nén mất ổn định tới hạn là $p_c^{cr} = p_{cr}$

Trường hợp kéo dọc trục, thì tải trọng kéo $p_t = -p$ tải kéo mất ổn định tới hạn là $p_t^{cr} = -p_{cr}$

Từ các phương trình (2.51) đến (2.54) và (2.48) ta có phương trình xác định độ võng không thứ nguyên W_{max}/h như sau

$$\frac{W_{max}}{h} = \frac{1}{h} \left[\begin{aligned} & J_{38}p + \frac{\xi_2}{2} + \frac{J_{37}((J_{40} - 2J_{34}p)\xi_2 + J_{39}p)}{2J_{32}\xi_2 + 2J_{33}} + J_{36} \\ & + \sqrt{\frac{(J_{40} - 2J_{34}p)\xi_2 + J_{39}p}{2J_{32}\xi_2 + 2J_{33}}} \end{aligned} \right], \quad (2.60)$$

Kết hợp các phương trình (2.58) và (2.60) luận án khảo sát mối quan hệ của của tải nén (hoặc kéo) với độ võng lớn nhất của vỏ trống. Dựa vào các dạng đường cong tải - độ võng thu được trong quá trình khảo sát, luận án sẽ đánh giá được khả năng chịu tải sau mất ổn định của vỏ trống FG-GRC có gân gia cường chịu nén dọc trục.

Trong trường hợp vỏ trụ, bán kính $R \rightarrow \infty$, biểu thức chuyển vị trung bình ở các cạnh biên $\bar{\Delta}_x$ có thể xác định thông qua biểu thức

$$\bar{\Delta}_x = - \int_0^L \int_0^{2\pi a} \frac{u_{,x}}{2\pi a L} dy dx. \quad (2.61)$$

Từ phương trình (2.61) ta được

$$\bar{\Delta}_x = \frac{p(J_{51}\xi_2 + J_{52})}{8(J_{32}\xi_2 + J_{45})L^2} + \frac{J_{56}\xi_2^3 + J_{53}\xi_2^2 + J_{54}\xi_2 + J_{55}}{8(J_{32}\xi_2 + J_{45})L^2} + A_{12}^* \Phi_{1y} + \Phi_{1x} A_{11}^*, \quad (2.62)$$

trong đó $J_{5i} (i=1 \rightarrow 6)$ được xác định trong phụ lục A3.

Từ phương trình (2.62), khi cho độ võng phi tuyến $\xi_2 \rightarrow 0$, độ co cạnh biên trong giai đoạn trước mất ổn định xác định được như sau

$$\bar{\Delta}_x = \frac{pJ_{52} + J_{55}}{8J_{45}L^2} + A_{12}^* \Phi_{1y} + \Phi_{1x} A_{11}^*. \quad (2.63)$$

2.4. So sánh kết quả

Để khẳng định độ tin cậy của phương pháp nghiên cứu, luận án tiến hành tính toán khảo sát và so sánh với các kết quả đã được công bố trên tạp chí uy tín.

2.4.1. So sánh kết quả bài toán vỏ xoắn và vỏ trụ chịu tải xoắn

Trong Bảng 2.2 luận án so sánh mô men xoắn tới hạn M_{cr} (kN.m) của của vỏ trụ tròn FG-GRC chịu tải xoắn với kết quả nghiên cứu của Shen và Xiang [113]. Tiếp theo trong Bảng 2.3, luận án so sánh tải xoắn tới hạn τ_{cr} (MPa) của vỏ trụ tròn FGM chịu xoắn với các nghiên cứu của Huang và Han [151], Thang và Trung [149], Sofiyev và Kurouglu [148], Najafov và các cộng sự [150]. Có thể thấy tuy cùng sử dụng lý thuyết CLT nhưng cách tiếp cận trong luận án đã thu được tải xoắn tới hạn nhỏ hơn, đồng thời mode mất ổn định cũng không trùng với các nghiên cứu khác.

Bảng 2.2. So sánh mô men xoắn tới hạn $M_{cr} = 2\pi ha^2 \tau_{cr}$ (kN.m) của vỏ trụ FG-GRC không gân gia cường với các kết quả nghiên cứu của Shen và Xiang [113] ($a/h = 30$, $h = 2mm$, $L^2/ah = 400$, $T = 300K$)

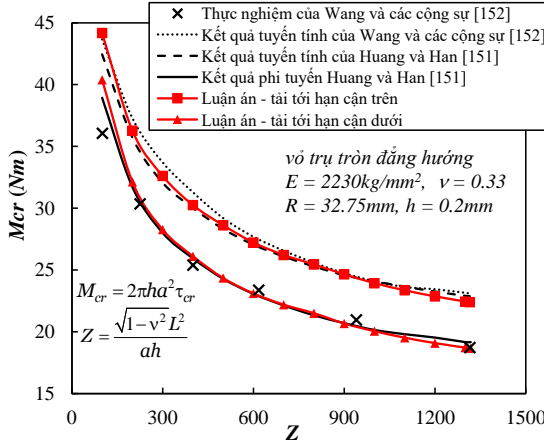
Hướng bố trí graphene	Luận án (CLT)		Shen và Xiang [113] (HSDT)	
	FG-X	UD	FG-X	UD
(0) _{10T}	20.44	19.29	20.58	18.98
(0/50) _{5T}	20.49	19.33	20.62	19.04
(0/90/0/90/0) _S	20.45	19.32	20.48	18.99

Bảng 2.3. So sánh tải xoắn tới hạn τ_{cr} (MPa) của vỏ trụ FGM không gân với các nghiên cứu khác ($L/a = 2$, $h = 1mm$, $T = 300K$, $m = 1$)

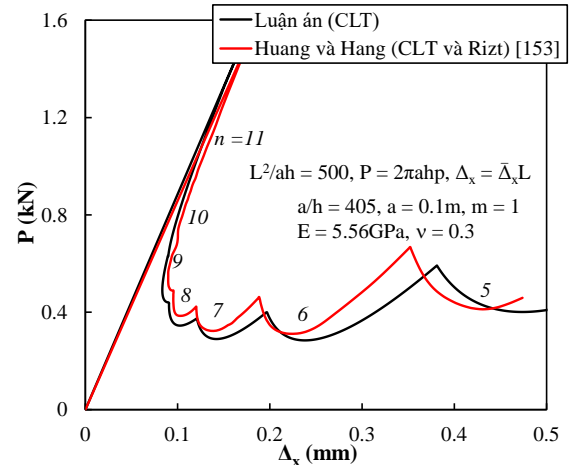
a/h	Sofiyev và Kurouglu [148] (CLT)	Thắng và Trung [149] (CLT)	Najafov và các cộng sự [150] (CLT)	Huang và Han [151] (EM)	Luận án (CLT)
400	34.44	35.01	34.44	33.82	34.241
	(10;0.21)*	(10;0.21)	(10;0.21)	(12;0.31)	(12;0.24)
500	25.93	26.22	25.93	25.58	25.815
	(11;0.20)	(13;0.30)	(11;0.2)	(13;0.30)	(12;0.21)

* Các giá trị trong ngoặc là mode mất ổn định ($n;\lambda$)

Trên Hình 2.8, luận án so sánh tải mô men xoắn tới hạn cận trên và cận dưới của vỏ trụ tròn đẳng hướng với kết quả nghiên cứu của Huang và Han [151], Wang và các cộng sự [152]. Các số liệu so sánh cho thấy kết quả nghiên cứu của luận án rất phù hợp với các kết quả trong nghiên cứu [151, 152].



Hình 2.8. So sánh tải mô men xoắn tới hạn M_{cr} cận trên và cận dưới của vỏ trụ tròn đẳng hướng với các nghiên cứu [151, 152]



Hình 2.9. So sánh đường cong tải - độ co cạnh biên với nghiên cứu của Huang và Han [153] trong trường hợp vỏ trụ FGM chịu nén dọc trục

2.4.2. So sánh kết quả bài toán vỏ trống và vỏ trụ chịu tải nén dọc trục

Trên Hình 2.9 luận án so sánh đường cong tải - độ co cạnh biên của vỏ trụ FGM không gân chịu nén dọc trục với nghiên cứu của Huang và Han [153]. Kết quả so sánh trên hình cho thấy sự phù hợp tốt.

Bảng 2.4. So sánh tải tới hạn $\bar{p}_{cr} = 2\pi ah p_{cr}$ (kN) của vỏ trụ tròn FG-GRC không gân chịu nén ($a/h = 20$, $h = 2mm$, $T = 300 K$)

Hướng GRC	$\frac{L^2}{ah}$	Luận án (CLT)		Shen và Xiang [107] (HSDT)	
		FG-X	UD	FG-X	UD
(0) ₁₀	500	1226.10 (4;4)*	1133.55 (4;4)	1154.36 (4;4)	1087.11 (4;4)
	300	1238.44 (3;4)	1143.80 (3;4)	1167.68 (3;4)	1098.08 (3;4)
	100	1194.79 (2;4)	1107.81 (2;4)	1116.33 (2;4)	1056.72 (2;4)
(0/90/0/90/0) _S	500	1226.49 (4;4)	1134.25 (4;4)	1154.83 (4;4)	1087.81 (4;4)
	300	1238.95 (3;4)	1144.63 (3;4)	1168.23 (3;4)	1098.87 (3;4)
	100	1194.88 (2;4)	1108.20 (2;4)	1116.70 (2;4)	1057.20 (2;4)
(0/90) _{5T}	500	1228.12 (4;4)	1134.94 (4;4)	1156.27 (4;4)	1088.45 (4;4)
	300	1240.73 (3;4)	1145.39 (3;4)	1169.80 (3;4)	1099.57 (3;4)
	100	1196.04 (2;4)	1108.67 (2;4)	1117.73 (2;4)	1057.66 (2;4)

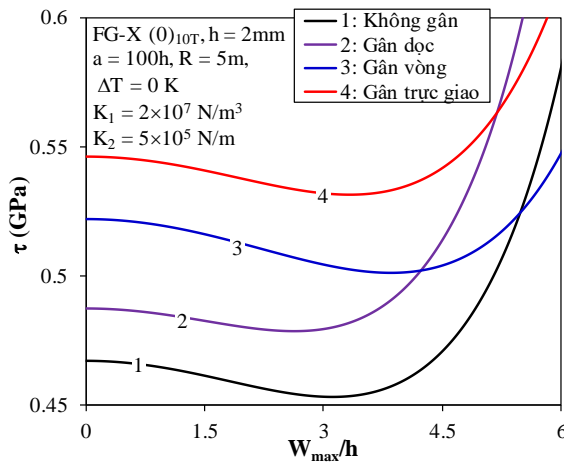
* Các giá trị trong ngoặc tương ứng mode mất ổn định (m;n)

Trong Bảng 2.4 luận án so sánh tải tới hạn của vỏ trụ tròn FG-GRC chịu nén dọc trục với kết quả nghiên cứu của Shen và Xiang [107]. Do luận án sử dụng lý thuyết vỏ Donnell nên tải tới hạn của luận án cao hơn tải tới hạn trong nghiên cứu của Shen và Xiang [107], tuy nhiên các mode mất ổn định thì hoàn toàn phù hợp.

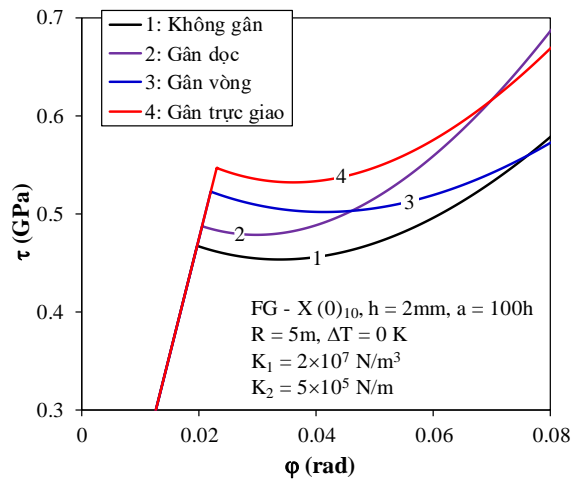
2.5. Khảo sát số và thảo luận

2.5.1. Vỏ trống FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu tải trọng xoắn

Vỏ trống FG-GRC được gia cường bởi hệ thống gân có nền đàn hồi Pasternak bao quanh được chế tạo từ 10 lớp GRC với tổng chiều dày của vỏ $h = 2\text{mm}$. Hệ thống gân dọc và gân vòng cũng được chế tạo từ 10 lớp GRC với bề rộng của gân là $b_x = b_y = h = 2\text{mm}$, cùng với chiều cao gân $h_x = h_y = 3\text{mm}$, số lượng gân dọc là $n_s = 50$, số lượng gân vòng là $n_r = 12$, chiều dài vỏ $L = 2\pi a n_r / n_s$ được lựa chọn để tính toán và khảo sát số. Nền đàn hồi Pasternak có độ cứng $K_1 = 2 \times 10^7 \text{ N/m}^3$, $K_2 = 5 \times 10^7 \text{ N/m}$. Các kiểu gia cường graphene như FG-X, UD, FG-V, FG-A và FG-O với ba kiểu sắp xếp $(0)_{10T}$, $(0/90/0/90/0)_S$ và $(0/90)_{5T}$ khi được khảo sát sẽ ghi chú cụ thể trong các bảng và hình vẽ. Các đặc trưng hình học của các lớp GRC và của các dải graphene được lấy theo các công bố của Shen và Xiang [109, 113].



Hình 2.10. Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường đến đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC



Hình 2.11. Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC

Hình 2.10 và Hình 2.11 lần lượt cho thấy ảnh hưởng của gân gia cường đến các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC chịu tải xoắn. Có thể thấy rằng trong miền độ võng nhỏ đường cong sau mất ổn định của vỏ trống có gân gia cường cường trục giao là cao nhất.

Các khảo sát số trong Bảng 2.5 cho thấy ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống FG-GRC. Rõ ràng là khi có gân, vỏ trống chịu tải tốt hơn và hệ thống gân trực giao giúp vỏ trống có tải tới hạn lớn nhất. Cũng quan sát thấy gân vòng giúp vỏ trống chịu tải xoắn tốt hơn so với gân dọc và các giá trị tải tới hạn tương ứng với ba kiểu bố trí graphene không chênh lệch nhau nhiều. Khi không có gân gia cường, vỏ trống FG-O chịu tải kém nhất, nhưng khi được gia cường gân trực giao thì tải tới hạn của vỏ trống này vượt qua tải tới hạn của vỏ trống FG-A.

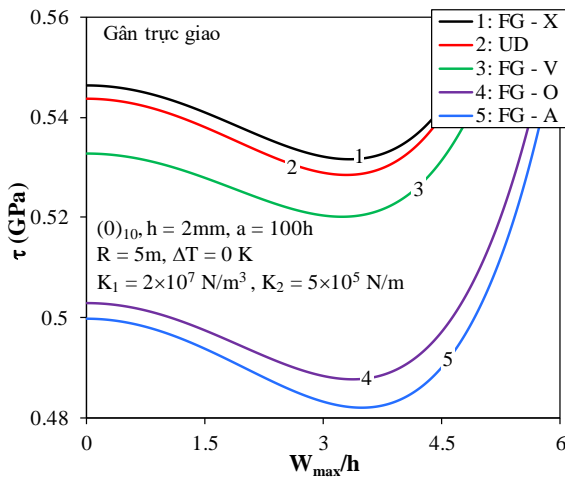
Bảng 2.5. Ảnh hưởng của hệ thống gân, quy luật phân bố graphene và hướng bố trí GRC đến tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trống FG-GRC ($\Delta T = 0 K$, $a/h = 100$, $R = 5m$, $m = 1$)

Loại vỏ		Tải tới hạn		
		(0) ₁₀	(0/90/0/90/0) _S	(0/90) _{5T}
UD	Không gân	0.4539 (10;0.72)	0.4541 (10;0.72)	0.4541 (10;0.72)
	Gân dọc	0.4765 (9;0.65)	0.4766 (9;0.65)	0.4766 (9;0.65)
	Gân vòng	0.5164 (8;0.82)	0.5165 (8;0.82)	0.5165 (8;0.82)
	Gân trực giao	0.5438 (8;0.73)	0.5438 (8;0.73)	0.5439 (8;0.73)
FG - X	Không gân	0.4671 (9;0.71)	0.4672 (9;0.71)	0.4673 (9;0.71)
	Gân dọc	0.4873 (9;0.65)	0.4873 (9;0.65)	0.4874 (9;0.65)
	Gân vòng	0.5222 (8;0.81)	0.5224 (8;0.81)	0.5224 (8;0.81)
	Gân trực giao	0.5464 (8;0.73)	0.5465 (8;0.73)	0.5465 (8;0.73)
FG - A	Không gân	0.4351 (10;0.72)	0.4352 (10;0.72)	0.4353 (10;0.72)
	Gân dọc	0.4513 (10;0.66)	0.4514 (10;0.66)	0.4515 (10;0.66)
	Gân vòng	0.4807 (9;0.81)	0.4809 (9;0.81)	0.4809 (9;0.81)
	Gân trực giao	0.4998 (8;0.73)	0.4998 (8;0.73)	0.4998 (8;0.73)
FG - V	Không gân	0.4219 (10;0.74)	0.422 (10;0.74)	0.4221 (10;0.74)
	Gân dọc	0.4532 (9;0.64)	0.4532 (9;0.65)	0.4533 (9;0.65)
	Gân vòng	0.4966 (8;0.87)	0.4968 (8;0.87)	0.4968 (8;0.87)
	Gân trực giao	0.5328 (8;0.75)	0.5329 (8;0.75)	0.5329 (8;0.75)
FG - O	Không gân	0.4141 (10;0.74)	0.4143 (10;0.74)	0.4143 (10;0.74)
	Gân dọc	0.438 (10;0.65)	0.4381 (10;0.66)	0.4381 (10;0.66)
	Gân vòng	0.4752 (9;0.87)	0.4754 (9;0.87)	0.4754 (9;0.87)
	Gân trực giao	0.5029 (8;0.74)	0.503 (8;0.75)	0.5030 (8;0.75)

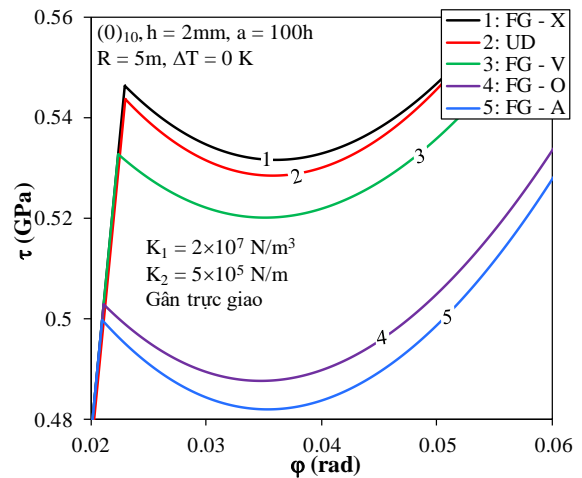
Do hệ thống gân trực giao giúp vỏ trống chịu tải tốt nhất, vì vậy các khảo sát dưới đây chỉ tập trung khảo sát vỏ trống FG-GRC gia cường hệ thống gân này. Để dễ

trình bày thì từ phần này trở đi, vỏ trống FG-GRC được hiểu là vỏ trống đã được gia cường hệ thống gân trực giao và được ghi chú cụ thể trong hình vẽ.

Hình 2.12 và Hình 2.13 lần lượt trình bày các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của năm kiểu vỏ trống FG-GRC tương ứng với năm kiểu phân bố graphene. Có thể quan sát thấy, các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-X là cao nhất trong miền độ võng nhỏ và tiệm cận với đường cong của vỏ UD trong miền độ võng lớn, các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-A là thấp nhất và kém ổn định hơn do có cường độ hợp mạng hơn so với các loại vỏ trống khác.



Hình 2.12. Đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của năm loại vỏ trống FG-GRC



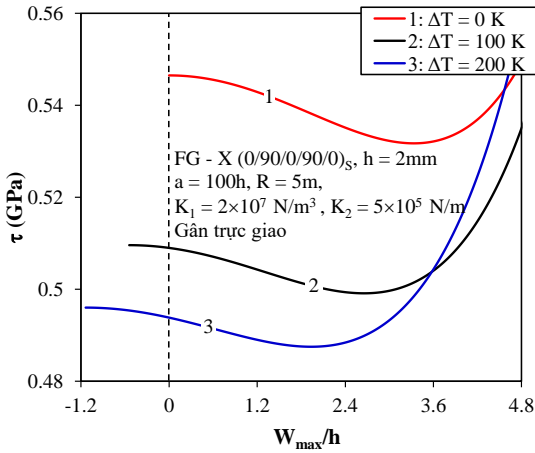
Hình 2.13. Đường cong $\tau - \varphi$ của năm loại vỏ trống FG-GRC

Bảng 2.6. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trống FG-GRC ($a/h = 100, R = 5m, m = 1$)

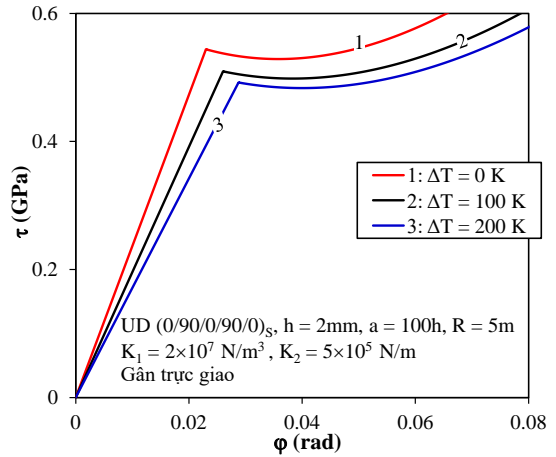
$(0/90/0/90/0)_s$		$\Delta T = 0K$	$\Delta T = 100K$	$\Delta T = 200K$
FG-X	Không gân	0.4672 (9;0.71)	0.4376 (9;0.73)	0.4254 (9;0.74)
	Gân trực giao	0.5465 (8;0.73)	0.5096 (8;0.75)	0.4960 (8;0.75)
UD	Không gân	0.4541 (10;0.72)	0.4285 (10;0.74)	0.4142 (9;0.75)
	Gân trực giao	0.5438 (8;0.73)	0.5094 (8;0.75)	0.4920 (8;0.75)
FG-A	Không gân	0.4352 (10;0.72)	0.4076 (10;0.75)	0.3968 (10;0.76)
	Gân trực giao	0.4998 (8;0.73)	0.4649 (8;0.75)	0.4520 (8;0.76)

Sự gia tăng nhiệt độ cũng làm giảm tải xoắn tới hạn của hai loại vỏ trống như khảo sát đã chỉ ra trong Bảng 2.6. Rõ ràng là khi nhiệt độ tăng lên sẽ làm tăng hệ số giãn nở nhiệt và làm giảm các đặc trưng cơ học của vật liệu, từ đó giảm khả năng chịu tải của vỏ trống. Hình 2.14 và Hình 2.15 lần lượt trình bày ảnh hưởng của nhiệt độ đến các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC. Như có thể quan sát thấy, đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của hai loại vỏ trống khi

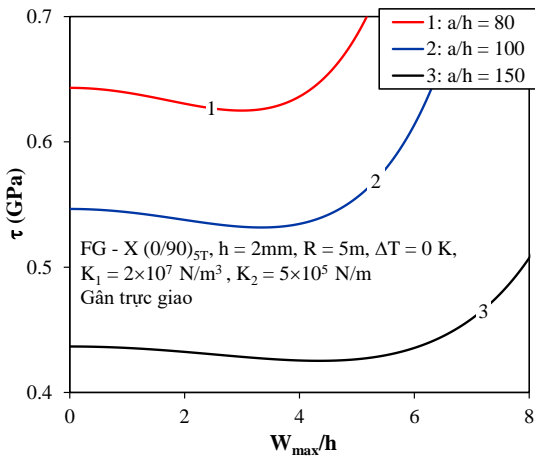
$\Delta T = 100K$ và $\Delta T = 200K$ không bắt đầu ở vị trí $W_{max}/h = 0$, điều này là do sự gia tăng nhiệt độ gây ra độ võng âm trước khi vỏ trống chịu tải trọng xoắn.



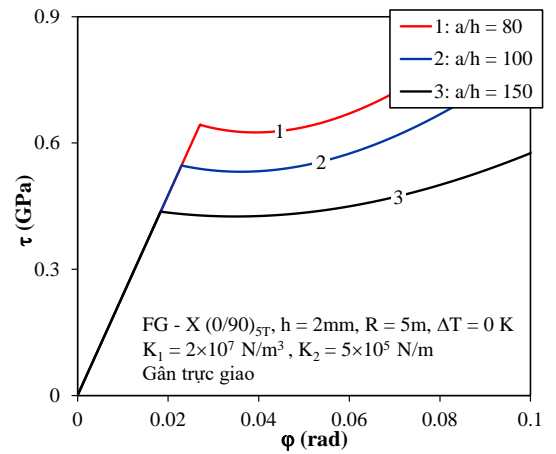
Hình 2.14. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC



Hình 2.15. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $\tau - \phi$ của vỏ trống FG-GRC



Hình 2.16. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC



Hình 2.17. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $\tau - \phi$ của vỏ trống FG-GRC

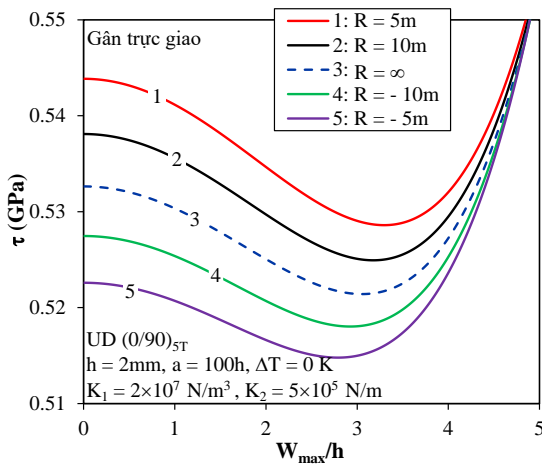
Hình 2.16 và Hình 2.17 lần lượt trình bày ảnh hưởng của tỷ số a/h đến các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{max}/h$ và $\tau - \phi$ của vỏ trống FG-GRC. Có thể thấy tỷ số a/h càng lớn thì độ mảnh của vỏ trống càng tăng lên, và làm các đường cong sau mất ổn định bị hạ thấp đáng kể. Ngoài ra, các khảo sát số trong Bảng 2.7 cũng chỉ ra rằng, khi độ mảnh của vỏ trống tăng lên (a/h càng lớn) thì tải tới hạn của vỏ trống càng giảm.

Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến các đường cong $\tau - W_{max}/h$ và $\tau - \phi$ của vỏ trống FG-GRC lần lượt được trình bày trên Hình 2.18 và Hình 2.19. Trong miền độ võng nhỏ, các đường cong tách biệt nhau hoàn toàn và có xu hướng giao nhau trong miền độ võng lớn. Quan sát thấy điểm rẽ nhánh của vỏ trống lõi cao hơn so với

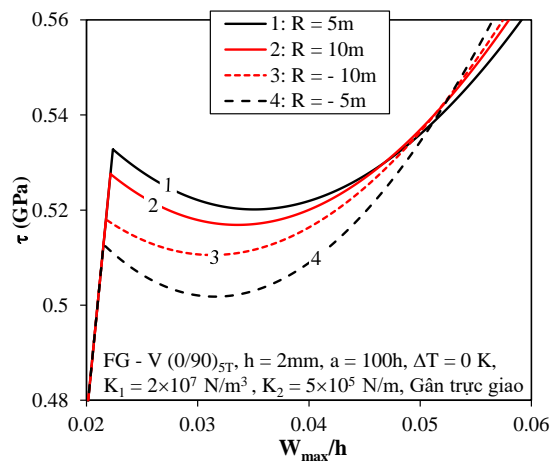
vỏ trống lõm, điều này cho thấy tải tới hạn của vỏ trống lõm là lớn hơn so với vỏ trống lõm. Mặt khác, các khảo sát số trong Bảng 2.8 cũng một lần nữa khẳng định điều này và cho thấy rằng khi bán kính dọc R tăng lên thì làm giảm tải tới hạn của vỏ trống.

Bảng 2.7. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trống FG-GRC gia cường gân trực giao ($\Delta T = 200K$, $R = 5m$, $m = 1$)

Vỏ trống FG-GRC		$a/h = 80$	$a/h = 100$	$a/h = 150$
FG-X	(0) ₁₀	0.5790 (7;0.73)	0.4958 (8;0.75)	0.3990 (10;0.79)
	(0/90/0/90/0) _S	0.5792 (7;0.73)	0.4960 (8;0.75)	0.3992 (10;0.79)
	(0/90) _{5T}	0.5793 (7;0.73)	0.4960 (8;0.75)	0.3992 (10;0.79)
UD	(0) ₁₀	0.5755 (7;0.73)	0.4918 (8;0.75)	0.3953 (10;0.79)
	(0/90/0/90/0) _S	0.5757 (7;0.73)	0.4920 (8;0.75)	0.3955 (10;0.79)
	(0/90) _{5T}	0.5757 (7;0.73)	0.4920 (8;0.75)	0.3955 (10;0.79)
FG-A	(0) ₁₀	0.5180 (7;0.74)	0.4519 (8;0.76)	0.3734 (11;0.80)
	(0/90/0/90/0) _S	0.5180 (7;0.74)	0.4520 (8;0.76)	0.3735 (11;0.80)
	(0/90) _{5T}	0.5181 (7, 0.74)	0.4520 (8, 0.76)	0.3735 (11, 0.8)



Hình 2.18. Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC



Hình 2.19. Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến đường cong $\tau - \phi$ của vỏ trống FG-GRC

Bảng 2.8. Ảnh hưởng của bán kính dọc đến tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trống FG-GRC ($(0/90)_{5T}$, $\Delta T = 0K$, $a/h = 100$, $m = 1$)

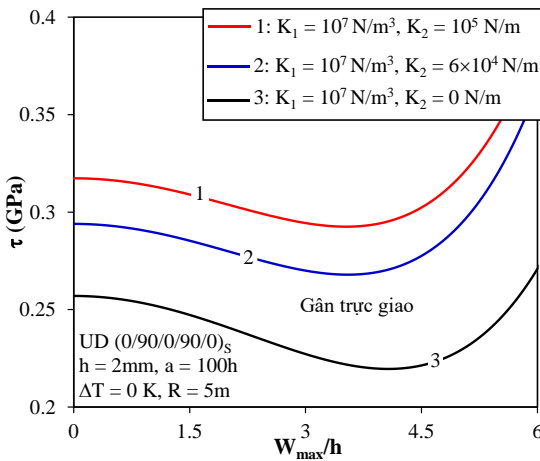
FG-GRC		$R = 5m$	$R = -5m$	$R = 10m$	$R = -10m$
FG-X	Không gân	0.4673	0.4489	0.4624	0.4532
	Gân	(9;0.71)	(9;0.70)	(9;0.71)	(9;0.71)
	Gân trực giao	0.5465	0.5249	0.5410	0.5307
		(8;0.73)	(7;0.71)	(8;0.73)	(8;0.72)
UD	Không gân	0.4541	0.4353	0.4492	0.4397
	Gân	(10;0.72)	(9;0.71)	(9;0.72)	(9;0.71)
	Gân trực giao	0.5439	0.5226	0.538	0.5275
		(8;0.73)	(8;0.73)	1(8;0.73)	(8;0.73)

FG-GRC	$R = 5m$	$R = -5m$	$R = 10m$	$R = -10m$	
FG-O	Không gân	0.4143 (10;0.74)	0.3994 (10;0.73)	0.4103 (10;0.74)	0.4029 (10;0.73)
	Gân	0.5030 (8;0.75)	0.4826 (8;0.74)	0.4975 (8;0.74)	0.4873 (8;0.74)
	trực giao	(8;0.75)	(8;0.74)	(8;0.74)	(8;0.74)

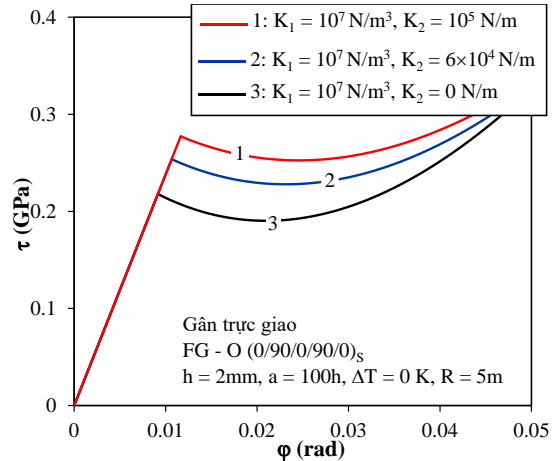
Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải tới hạn và các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC lần lượt được trình bày cụ thể trong Bảng 2.9, trên Hình 2.20 và Hình 2.21. Rõ ràng là độ cứng nền đàn hồi càng lớn sẽ làm tăng tải tới hạn và các đường cong sau mất ổn định của vỏ trống cũng được nâng cao đáng kể.

Bảng 2.9. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trống FG-GRC gia cường gân trực giao $((0/90)_S)_T$, $\Delta T = 0K$, $R = 5m$, $a/h = 100$, $m = 1$

K_1 (N/m ³)	K_2 (N/m)	UD	FG-X	FG-O
0	0	0.2533 (7;0.54)	0.2530 (7;0.54)	0.2151 (8;0.57)
	0	0.2570 (7;0.55)	0.2567 (7;0.55)	0.2178 (8;0.58)
10 ⁷	6×10 ⁴	0.2940 (8;0.62)	0.2942 (7;0.58)	0.2537 (8;0.61)
	5×10 ⁵	0.5417 (8;0.73)	0.5444 (8;0.73)	0.5009 (8;0.74)
5×10 ⁸	0	0.3655 (9;0.73)	0.3702 (9;0.73)	0.3166 (9;0.75)
	6×10 ⁴	0.3979 (9;0.75)	0.4028 (9;0.74)	0.3489 (9;0.76)
	5×10 ⁵	0.6325 (9;0.81)	0.6379 (9;0.80)	0.5820 (9;0.83)



Hình 2.20. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC



Hình 2.21. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC

2.5.2. Vỏ trống sandwich FG-GRC lõi Auxetic có nền đàn hồi bao quanh chịu tải trọng xoắn

Phần này luận án khảo sát vỏ trống sandwich FG-GRC lõi Auxetic chịu tải trọng xoắn có nền đàn hồi bao quanh với độ cứng $K_1 = 10^7$ N/m³, $K_2 = 10^5$ N/m. Hai lớp mặt của vỏ trống là nền Poly methyl methacrylate (viết tắt là PMMA) được gia cường graphene với các đặc trưng được tham khảo trong công bố [113]. Lớp lõi Auxetic có bề dày $h_c = 2$ mm và các thuộc tính hình học lần lượt là $\chi_1 = 2$, $\chi_2 = 0.1$, và $\gamma = 30^\circ$. Độ dày của mỗi lớp mặt vỏ là $h_{GRC} = 1$ mm bao gồm 5 lớp với mỗi lớp GRC dày 0.2mm.

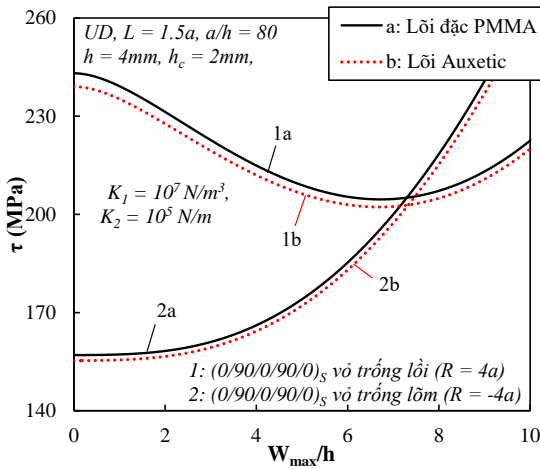
Bảng 2.10. Tải xoắn tới hạn của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic và lõi đặc (MPa, $L = 1.5a$, $a/h = 80$, $h = 4$ mm)

Vỏ trống FG-GRC		UD	FG-X	FG-O
Vỏ trống lõm ($R = 4a$)				
Lõi Auxetic	(0) ₁₀	238.98 (8;0.64)	238.52 (8;0.63)	214.35 (9;0.62)
	(0/90) _{5T}	239.05 (8;0.64)	238.61 (8;0.63)	214.54 (9;0.63)
	(0/90/0/90/0) _S	239.04 (8;0.64)	238.56 (8;0.63)	214.56 (9;0.63)
Lõi đặc PMMA	(0) ₁₀	243.04 (8;0.64)	242.55 (8;0.63)	217.72 (9;0.62)
	(0/90) _{5T}	243.11 (8;0.64)	242.64 (8;0.63)	217.92 (9;0.62)
	(0/90/0/90/0) _S	243.09 (8;0.64)	242.59 (8;0.63)	217.93 (9;0.62)
Vỏ trống lõm ($R = -4a$)				
Lõi Auxetic	(0) ₁₀	155.20 (7;0.63)	156.57 (7;0.63)	138.18 (7;0.63)
	(0/90) _{5T}	155.33 (7;0.63)	156.74 (7;0.63)	138.34 (7;0.63)
	(0/90/0/90/0) _S	155.32 (7;0.63)	156.71 (7;0.63)	138.34 (7;0.63)
Lõi đặc PMMA	(0) ₁₀	156.88 (7;0.63)	158.25 (7;0.62)	139.85 (7;0.63)
	(0/90) _{5T}	157.02 (7;0.63)	158.42 (7;0.63)	140.01 (7;0.63)
	(0/90/0/90/0) _S	157.00 (7;0.63)	158.39 (7;0.63)	140.02 (7;0.63)

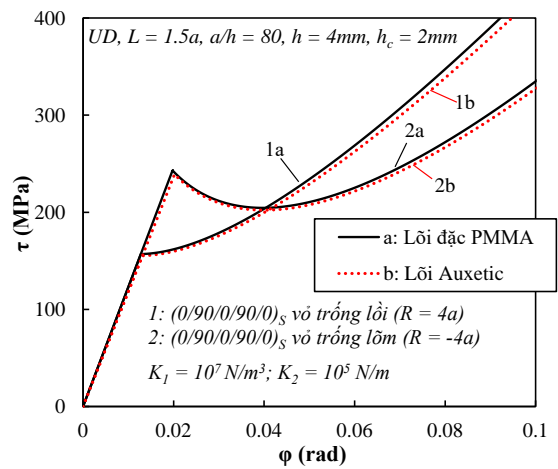
Bảng 2.10 trình bày ảnh hưởng của các kiểu phân bố graphene đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống lõm và vỏ trống lõm trong trường hợp có lõi Auxetic và lõi đặc. Tải xoắn tới hạn không chênh lệch nhau nhiều theo cách sắp xếp của graphene. Với một lượng thể tích vật liệu nhỏ hơn một cách đáng kể, tải xoắn tới hạn của vỏ trống lõi Auxetic giảm không đáng kể (khoảng dưới 2%) so với vỏ trống lõi đặc. Điều này cho thấy lớp lõi Auxetic làm giảm đáng kể khối lượng (giảm khoảng 36.7%) mà không làm giảm đáng kể khả năng chịu tải xoắn của vỏ trống. Điều này là do lớp lõi nằm gần mặt trung hòa của vỏ nên không có chức năng chịu lực chính như các lớp

mặt GRC, bên cạnh đó mô đun đàn hồi của các lớp lõi nhỏ hơn nhiều so với mô đun đàn hồi của hai lớp mặt.

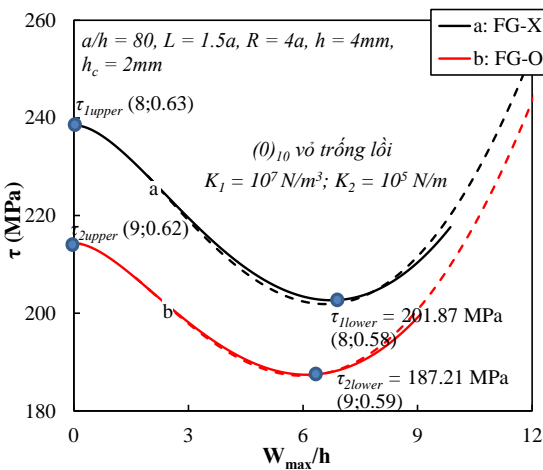
Hình 2.22 và Hình 2.23 so sánh ảnh hưởng của các lớp lõi Auxetic và lớp lõi đặc đến các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống lõi và vỏ trống lõm FG-GRC. Có thể quan sát hiện tượng hợp trên đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống lõi. Mặc dù có sự khác biệt nhỏ về tải xoắn tới hạn nhưng xu hướng của các đường cong sau mất ổn định của vỏ trống lõi auxetic và vỏ trống lõi đặc là giống nhau. Trong trường hợp vỏ trống lõm quan sát thấy tải trọng tăng làm độ võng tăng trong miền khảo sát.



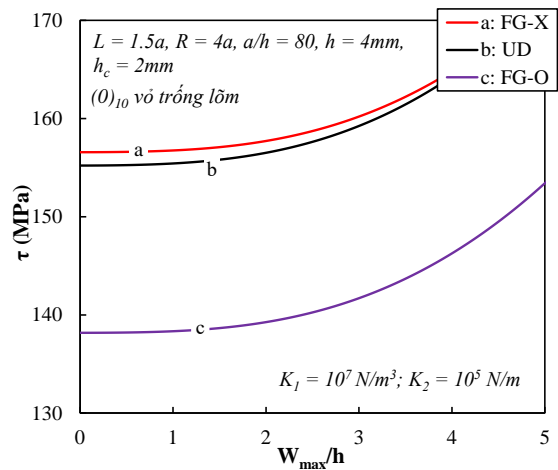
Hình 2.22. Ảnh hưởng của các lớp lõi đến các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống lõi và vỏ trống lõm FG-GRC



Hình 2.23. Ảnh hưởng của các lớp lõi đến các đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống lõi và vỏ trống lõm FG-GRC



a)



b)

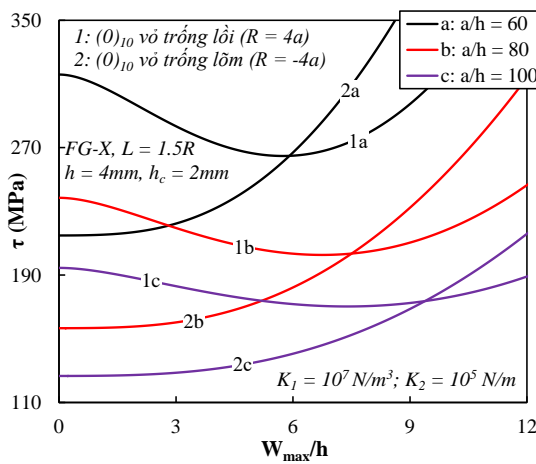
Hình 2.24. Ảnh hưởng của sự phân bố graphene đến các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống lõi (a) và vỏ trống lõm (b) FG-GRC

Hình 2.24 cho thấy sự khác biệt của các mode mất ổn định ở tải tới hạn cận trên và tải tới hạn cận dưới. Trong tất cả các khảo sát, có thể quan sát được hiện tượng hợp với vỏ trống lõi nhưng không quan sát được với vỏ trống lõm.

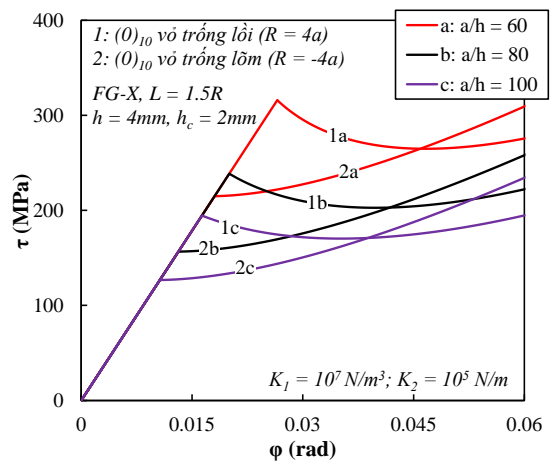
Bảng 2.11, Hình 2.25 và Hình 2.26 lần lượt trình bày ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải xoắn tới hạn và các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống lõi Auxetic. Như có thể thấy tải xoắn tới hạn giảm đáng kể khi tỷ số a/h tăng lên, điều này là do độ mảnh của vỏ tăng làm vỏ trống dễ mất ổn định, đồng thời cũng quan sát thấy vỏ trống lõi có tải rẽ nhánh cao hơn đáng kể so với vỏ trống lõm. Các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống trên Hình 2.25 bị hạ thấp khi tỷ số a/h tăng.

Bảng 2.11. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống sandwich lõi Auxetic (MPa, $L = 1.5a$, $h = 4$ mm)

a/h	UD	FG-X	FG-O
(0) ₁₀ Vỏ trống lõi ($R = 4a$)			
60	316.17 (7;0.64)	315.88 (7;0.63)	283.15 (7;0.64)
80	238.98 (8;0.64)	238.52 (8;0.63)	214.35 (9;0.62)
100	194.81 (9;0.64)	194.47 (9;0.63)	175.55 (10;0.63)
(0) ₁₀ Vỏ trống lõm ($R = -4a$)			
60	213.31 (6;0.65)	214.85 (6;0.64)	189.24 (6;0.65)
80	155.20 (7;0.63)	156.57 (7;0.63)	138.18 (7;0.63)
100	125.52 (8;0.63)	126.65 (7;0.64)	112.09 (8;0.63)



Hình 2.25. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống lõi và vỏ trống lõm FG-GRC



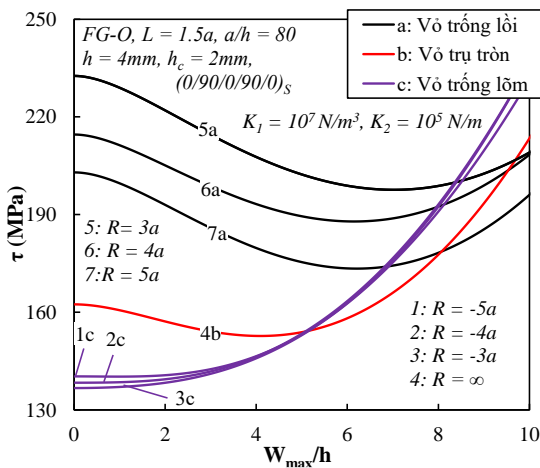
Hình 2.26. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến các đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống lõi và vỏ trống lõm FG-GRC

Bảng 2.12, Hình 2.27 và Hình 2.28 trình bày ảnh hưởng của bán kính dọc đến tải tới hạn và các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic. Quan sát Bảng 2.12 ta thấy, tải xoắn tới hạn của vỏ trống lõm nhỏ hơn tải xoắn tới hạn của vỏ trụ tròn. So với vỏ trụ tròn và vỏ trống lõm, thì vỏ trống lõi có tải xoắn tới hạn lớn nhất. Đối với vỏ trống lõi, tải xoắn tới hạn tăng lên khi giá

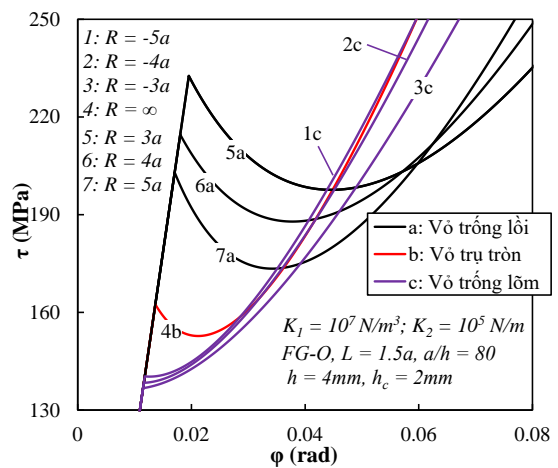
trị bán kính dọc giảm. Trên Hình 2.27 và Hình 2.28 đường cong $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống lõi trong miền độ võng nhỏ cao hơn đáng kể các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống lõm, tuy nhiên các đường cong này của vỏ trống lõm nhanh chóng vượt qua đường cong của vỏ trống lõi trong miền độ võng lớn.

Bảng 2.12. Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic (MPa, $L = 1.5a$, $a/h = 80$, $h = 4$ mm, $(0/90/0/90/0)_S$)

Bán kính dọc	UD	FG-X	FG-O
$R = -3a$	157.27 (7;0.60)	158.59 (7;0.60)	140.32 (7;0.60)
$R = -4a$	155.32 (7;0.63)	156.71 (7;0.63)	138.34 (7;0.63)
$R = -5a$	153.86 (7;0.69)	155.40 (7;0.68)	136.71 (7;0.69)
$R = \infty$	180.06 (7;0.54)	180.69 (7;0.54)	162.43 (8;0.54)
$R = 5a$	260.67 (9;0.67)	260.89 (8;0.68)	232.58 (9;0.67)
$R = 4a$	239.04 (8;0.64)	238.56 (8;0.63)	214.56 (9;0.63)
$R = 3a$	225.90 (8;0.61)	225.84 (8;0.60)	202.95 (8;0.61)



Hình 2.27. Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống lõi và vỏ trống lõm FG-GRC



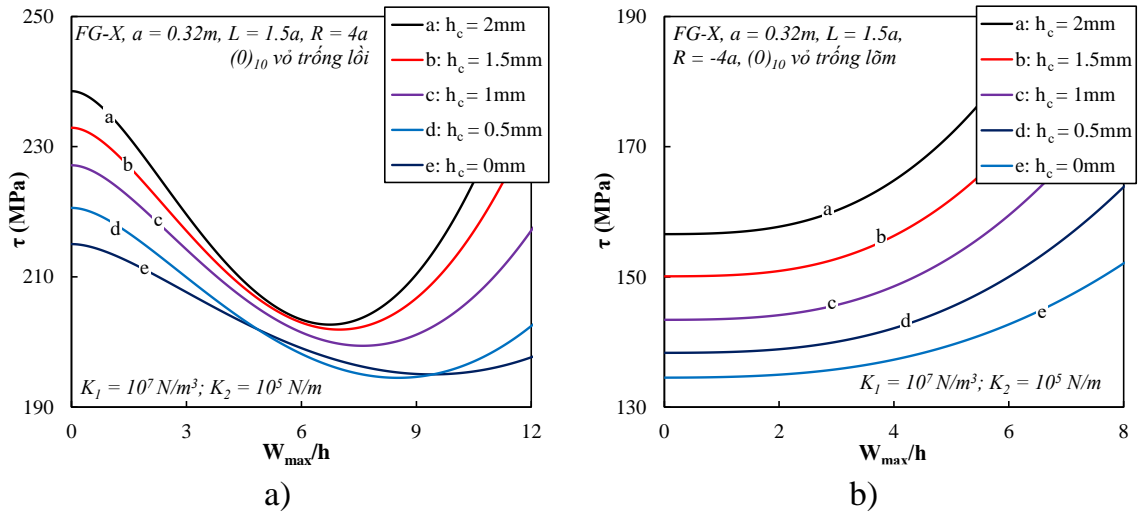
Hình 2.28. Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến các đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống lõi và vỏ trống lõm FG-GRC

Bảng 2.13 và Hình 2.29 trình bày ảnh hưởng của chiều dày lớp lõi Auxetic đến tải xoắn tới hạn và các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC. Có thể thấy, khi độ dày lớp lõi tăng lên, mode mất ổn định theo hướng chu vi giảm mạnh. Điều này là do độ dày lớp lõi tăng lên làm tăng độ lệch tâm của hai lớp mặt GRC và dẫn đến tăng độ cứng và tăng tải xoắn tới hạn của vỏ trống. Trên Hình 2.29, chiều dày lớp lõi tăng làm nâng cao các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{\max}/h$

của vỏ trống FG-GRC. Hiện tượng hợp quan sát rất rõ ràng với vỏ trống lồi và dường như không thấy xuất hiện với vỏ trống lõm.

Bảng 2.13. Ảnh hưởng của độ dày lớp lõi Auxetic đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống FG-GRC (MPa, $a = 0.32m$, $L = 1.5a$)

	UD	FG-X	FG-O
(0) ₁₀ Vỏ trống lồi ($R = 4a$)			
$h_c = 0$ mm	205.49 (13;0.66)	215.03 (13;0.64)	175.08 (14;0.67)
$h_c = 0.5$ mm	214.16 (11;0.65)	220.59 (11;0.63)	185.51 (12;0.65)
$h_c = 1$ mm	222.89 (10;0.64)	227.15 (10;0.63)	196.69 (11;0.63)
$h_c = 1.5$ mm	231.08 (9;0.64)	232.92 (9;0.62)	205.95 (9;0.63)
$h_c = 2$ mm	238.98 (8;0.64)	238.52 (8;0.63)	214.35 (9;0.62)
(0) ₁₀ vỏ trống lõm ($R = -4a$)			
$h_c = 0$ mm	127.80 (10;0.63)	134.54 (10;0.62)	111.30 (11;0.63)
$h_c = 0.5$ mm	132.59 (9;0.63)	138.34 (9;0.62)	115.73 (9;0.63)
$h_c = 1$ mm	139.43 (8;0.63)	143.42 (8;0.62)	122.96 (8;0.63)
$h_c = 1.5$ mm	148.02 (7;0.64)	150.10 (7;0.63)	130.94 (8;0.62)
$h_c = 2$ mm	155.20 (7;0.63)	156.57 (7;0.63)	138.18 (7;0.63)



Hình 2.29. Ảnh hưởng của chiều dày lớp lõi Auxetic đến các đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trống lồi (a) và vỏ trống lõm (b) FG-GRC

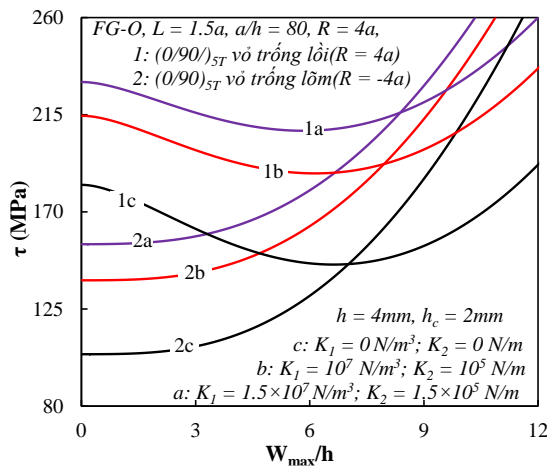
Bảng 2.14 cho thấy ảnh hưởng của các đặc trưng hình học của lớp lõi Auxetic đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống lồi và vỏ trống lõm. Các khảo sát số cho thấy ảnh hưởng của các đặc trưng hình học của lớp lõi Auxetic đến tải tới hạn của vỏ trống là không đáng kể.

Bảng 2.14. Ảnh hưởng của các đặc trưng hình học của lớp lõi Auxetic đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống FG-GRC(MPa, $L = 1.5a$, $a/h = 80$, $h = 4$ mm)

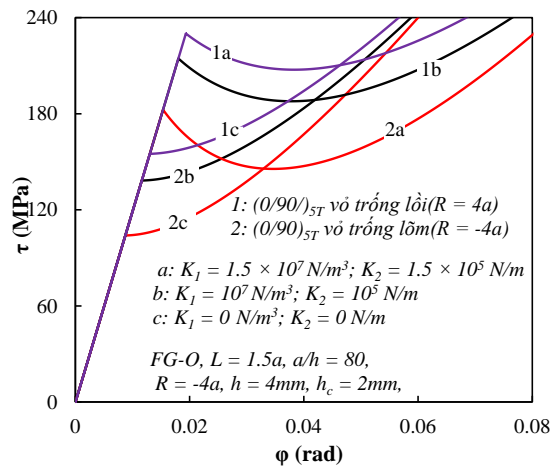
	UD	FG-X	FG-O
(0/90) _{5T} vỏ trống lõi ($R = 4a$)			
$\chi_1 = 1, \chi_2 = 0.1, \gamma = 15^\circ$	239.07 (8;0.64)	238.62 (8;0.63)	214.56 (9;0.63)
$\chi_1 = 2, \chi_2 = 0.1, \gamma = 30^\circ$	239.05 (8;0.64)	238.61 (8;0.63)	214.54 (9;0.63)
$\chi_1 = 3, \chi_2 = 0.1, \gamma = 45^\circ$	239.08 (8;0.64)	238.64 (8;0.63)	214.57 (9;0.63)
(0/90) _{5T} vỏ trống lõm ($R = -4a$)			
$\chi_1 = 1, \chi_2 = 0.1, \gamma = 15^\circ$	155.35 (7;0.63)	156.76 (7;0.63)	138.35 (7;0.63)
$\chi_1 = 2, \chi_2 = 0.1, \gamma = 30^\circ$	155.33 (7;0.63)	156.74 (7;0.63)	138.34 (7;0.63)
$\chi_1 = 3, \chi_2 = 0.1, \gamma = 45^\circ$	155.34 (7;0.63)	156.75 (7;0.63)	138.34 (7;0.63)

Bảng 2.15. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải xoắn tới hạn của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic (MPa, $L = 1.5a$, $a/h = 80$, $h = 4$ mm)

K_1 (N/m ³)	K_2 (N/m)	UD	FG-X	FG-O
(0/90) _{5T} Vỏ trống lõi ($R = 4a$)				
0	0	206.55 (8;0.60)	205.76 (8;0.59)	182.53 (9;0.58)
10^7	10^5	239.05 (8;0.64)	238.61 (8;0.63)	214.54 (9;0.63)
1.5×10^7	1.5×10^5	254.92 (8;0.66)	254.62 (8;0.65)	230.13 (9;0.64)
(0/90) _{5T} Vỏ trống lõm ($R = -4a$)				
0	0	121.22 (7;0.59)	122.32 (7;0.58)	104.04 (7;0.58)
10^7	10^5	155.33 (7;0.63)	156.74 (7;0.63)	138.34 (7;0.63)
1.5×10^7	1.5×10^5	171.96 (7;0.65)	173.49 (7;0.65)	154.98 (7;0.65)



Hình 2.30. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic

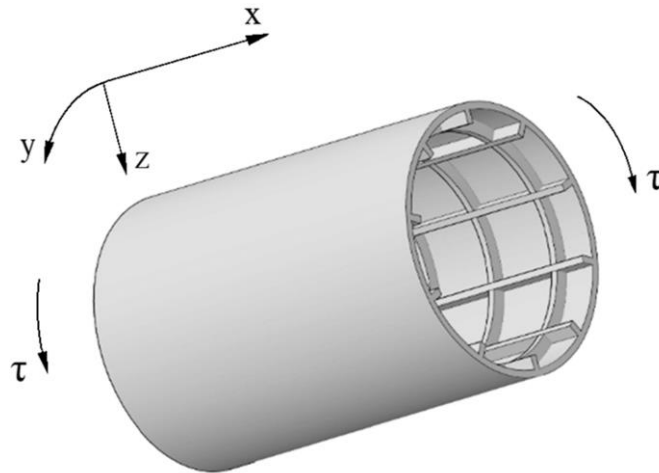


Hình 2.31. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến các đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic

Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải xoắn tới hạn và các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống lõi Auxetic lần lượt được trình bày trong Bảng 2.15, Hình 2.30 và Hình 2.31. Độ cứng nền đàn hồi tăng thì tải xoắn tới hạn của vỏ trống lõi và vỏ trống lõm đều tăng, đồng thời các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trống cũng được nâng cao (xem Hình 2.30 và Hình 2.31). Điều này là do phản lực của nền luôn ngược chiều với độ võng nên làm tăng ổn định của vỏ trong mọi trường hợp. Ngoài ra, mode mất ổn định theo hướng chu vi dường như không thay đổi khi độ cứng của nền tăng lên.

2.5.3. Vỏ trụ tròn FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu tải xoắn

Vỏ trụ tròn FG-GRC được chế tạo từ 10 lớp GRC với tổng chiều dày của vỏ $h = 2\text{mm}$. Hệ thống gân dọc và gân vòng cũng được chế tạo từ 10 lớp GRC và bề rộng của gân là $b_x = b_y = h = 2\text{mm}$, cùng với chiều cao gân $h_x = h_y = 4\text{mm}$, số lượng gân dọc là 50 và số lượng gân vòng là 12 được lựa chọn để tính toán và khảo sát số. Nền đàn hồi bao quanh vỏ trụ có $K_1 = 1.5 \times 10^7 \text{ N/m}^3$, $K_2 = 1.5 \times 10^5 \text{ N/m}$. Các kiểu gia cường graphene như FG-X, UD, FG-V, FG-A và FG-O và ba kiểu sắp xếp $(0)_{10T}$, $(0/90/0/90/0)_S$ và $(0/90)_{5T}$ trong vỏ trụ FG-GRC khi được khảo sát sẽ ghi chú cụ thể trên các hình vẽ. Các đặc trưng hình học của các lớp GRC và của các dải graphene được lấy theo các công bố của Shen và Xiang [109, 113].



Hình 2.32. Mô hình vỏ trụ FG-GRC có gân gia cường chịu tải xoắn

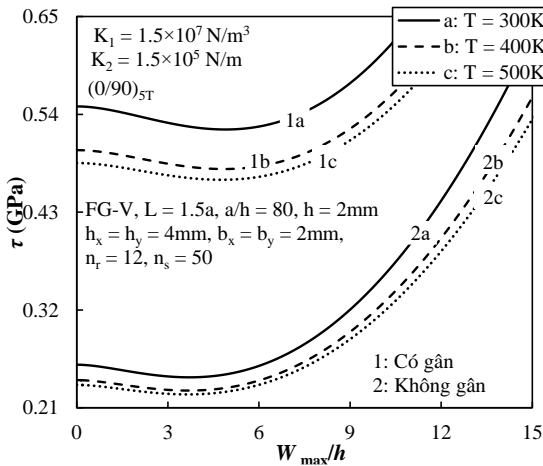
Bảng 2.16 trình bày tải xoắn tới hạn của vỏ trụ tròn FG-GRC ở các nhiệt độ môi trường khác nhau, từ đó ước tính được sự ảnh hưởng của hệ thống gân và nhiệt độ đến tải xoắn tới hạn của vỏ trụ FG-GRC. Các kết quả số trong Bảng 2.16 chỉ ra rằng, khi không có gân gia cường, tải xoắn tới hạn của vỏ trụ FG-X là lớn nhất, ngược lại tải xoắn tới hạn của vỏ trụ FG-O là nhỏ nhất.

Bảng 2.16. Tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trụ tròn FG-GRC trong trường hợp có và không có gân gia cường với sự thay đổi nhiệt độ môi trường ($L=1.5a$, $a/h=80$)

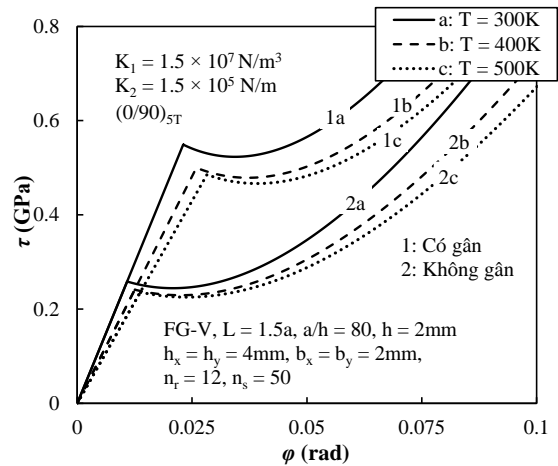
Vỏ	Hướng bố trí graphene	T = 300K			T = 400K			T = 500K		
		Không gân	Có gân	Ảnh hưởng của gân (%)	Không gân	Có gân	Ảnh hưởng của gân (%)	Không gân	Có gân	Ảnh hưởng của gân (%)
UD	(0) _{10T}	0.287 (8;0.57)	0.536 (6;0.64)	86.76	0.262 (8;0.59)	0.484 (6;0.65)	84.73	0.249 (8;0.60)	0.459 (6;0.65)	84.34
	(0/90/0/90/0) _S	0.286 (8;0.57)	0.537 (6;0.64)	87.76	0.262 (8;0.59)	0.485 (6;0.65)	85.11	0.250 (8;0.60)	0.460 (6;0.65)	84.00
	(0/90) _{5T}	0.287 (8;0.57)	0.537 (6;0.64)	87.11	0.263 (8;0.59)	0.484 (6;0.65)	84.03	0.250 (8;0.60)	0.460 (6;0.65)	84.00
FG-X	(0) _{10T}	0.299 (8;0.57)	0.526 (6;0.64)	75.92	0.271 (8;0.59)	0.473 (6;0.65)	74.54	0.263 (8;0.60)	0.456 (6;0.65)	73.38
	(0/90/0/90/0) _S	0.299 (8;0.57)	0.527 (6;0.64)	76.25	0.272 (8;0.59)	0.474 (6;0.65)	74.26	0.262 (8;0.60)	0.457 (6;0.65)	74.43
	(0/90) _{5T}	0.298 (8;0.57)	0.527 (6;0.64)	76.85	0.272 (8;0.59)	0.474 (6;0.65)	74.26	0.262 (8;0.60)	0.457 (6;0.65)	74.43
FG-V	(0) _{10T}	0.257 (9;0.58)	0.548 (6;0.65)	113.23	0.241 (9;0.59)	0.498 (6;0.65)	106.64	0.235 (9;0.60)	0.484 (6;0.66)	105.96
	(0/90/0/90/0) _S	0.258 (9;0.58)	0.548 (6;0.65)	112.40	0.240 (9;0.59)	0.499 (6;0.66)	107.92	0.236 (9;0.60)	0.484 (6;0.66)	105.08
	(0/90) _{5T}	0.258 (9;0.58)	0.549 (6;0.65)	112.79	0.241 (9;0.59)	0.499 (6;0.66)	107.05	0.236 (9;0.60)	0.485 (6;0.66)	105.51

Vỏ	Hướng bố trí graphene	T = 300K			T = 400K			T = 500K		
		Không gân	Có gân	Ảnh hưởng của gân (%)	Không gân	Có gân	Ảnh hưởng của gân (%)	Không gân	Có gân	Ảnh hưởng của gân (%)
FG-A	(0) _{10T}	0.257 (9;0.58)	0.442 (6;0.63)	71.98	0.234 (9;0.61)	0.394 (6;0.64)	68.38	0.226 (8;0.60)	0.378 (6;0.65)	67.26
	(0/90/0/90/0) _S	0.258 (9;0.58)	0.443 (6;0.63)	71.71	0.235 (9;0.61)	0.394 (6;0.64)	67.66	0.225 (8;0.61)	0.378 (6;0.65)	68.00
	(0/90) _{5T}	0.258 (9;0.58)	0.443 (6;0.63)	71.71	0.234 (9;0.61)	0.395 (6;0.64)	68.80	0.226 (8;0.61)	0.379 (6;0.65)	67.70
FG-O	(0) _{10T}	0.242 (9;0.58)	0.478 (6;0.64)	97.52	0.223 (9;0.60)	0.430 (6;0.65)	92.83	0.216 (9;0.61)	0.415 (6;0.65)	92.13
	(0/90/0/90/0) _S	0.242 (9;0.58)	0.479 (6;0.64)	97.93	0.222 (9;0.60)	0.431 (6;0.65)	94.14	0.217 (9;0.61)	0.416 (6;0.66)	91.71
	(0/90) _{5T}	0.243 (9;0.58)	0.479 (6;0.64)	97.12	0.223 (9;0.60)	0.431 (6;0.65)	93.27	0.217 (9;0.61)	0.416 (6;0.65)	91.71

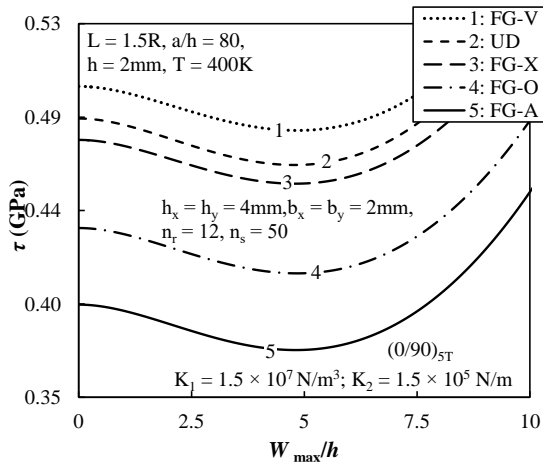
Trong Bảng 2.16, khi vỏ trụ được gia cường hệ thống gân, tải xoắn tới hạn của vỏ trụ FG-V lại lớn nhất, và tải xoắn tới hạn của vỏ trụ FG-X nhỏ hơn tải xoắn tới hạn của vỏ trụ UD, điều này cho thấy sự ảnh hưởng mạnh mẽ của hệ thống gân đến khả năng làm việc và chịu tải của vỏ trụ được gia cường gân. Đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trụ được quan sát trên Hình 2.33 và Hình 2.34, có thể thấy khi nhiệt độ tăng lên các đường cong sau mất ổn định bị hạ thấp đáng kể và tải xoắn tới hạn của vỏ trụ (trong Bảng 2.16) giảm rõ rệt.



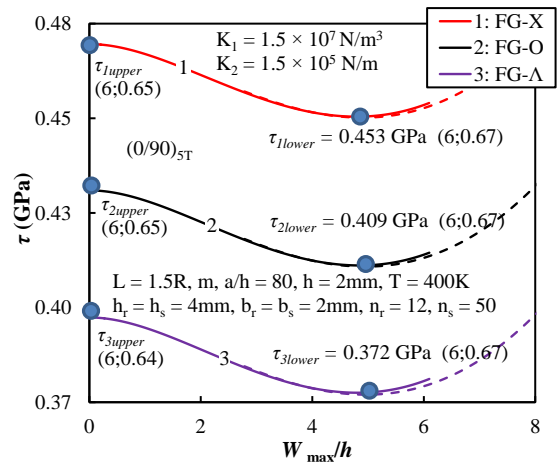
Hình 2.33. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trụ tròn FG-GRC



Hình 2.34. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trụ tròn FG-GRC

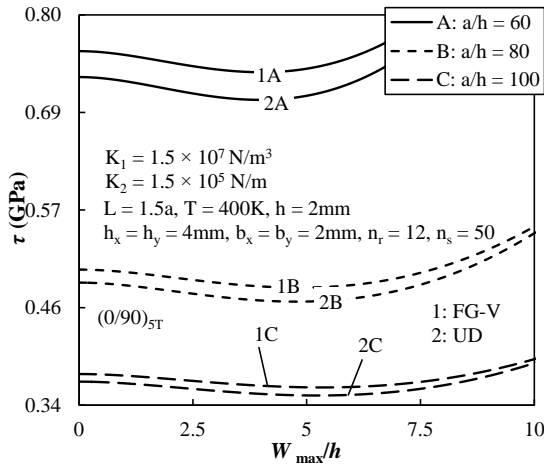


Hình 2.35. Ảnh hưởng của các kiểu phân bố graphene đến đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trụ tròn FG-GRC

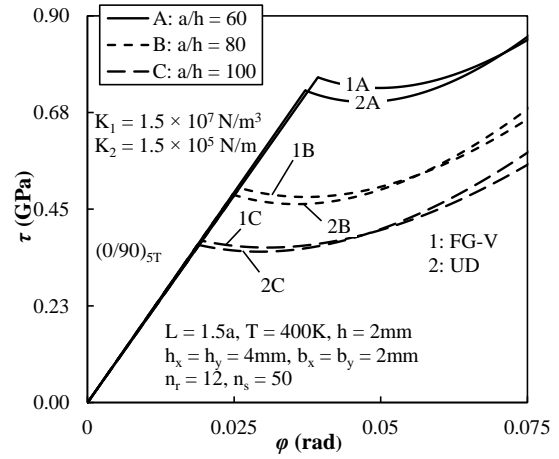


Hình 2.36. Tải tới hạn cận trên và cận dưới của vỏ trụ tròn FG-GRC

Hình 2.35 chỉ ra sự ảnh hưởng của các kiểu phân bố graphene đến đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trụ tròn FG-GRC. Có thể thấy khi được gia cường gân, điểm rẽ nhánh và đường cong $\tau - W_{max}/h$ của vỏ trụ FG-V là cao nhất, trong khi điểm rẽ nhánh và đường cong của vỏ trụ FG-A là thấp nhất. Hình 2.36 cho thấy tải tới hạn cận trên và tải tới hạn cận dưới của vỏ trụ tròn FG-GRC thu được ở các mode mất ổn định khác nhau.



Hình 2.37. Ảnh hưởng của các tỷ số a/h đến đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trụ tròn FG-GRC

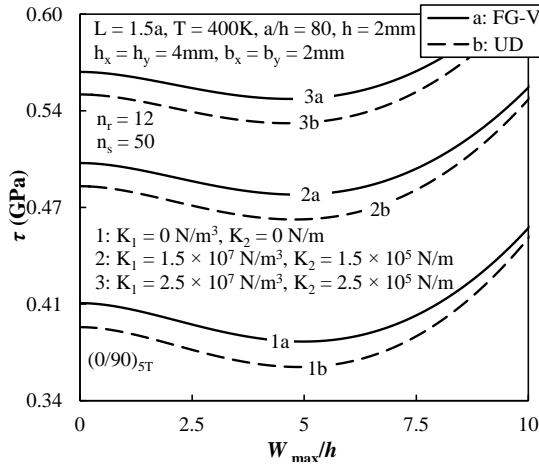


Hình 2.38. Ảnh hưởng của các tỷ số a/h đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trụ tròn FG-GRC

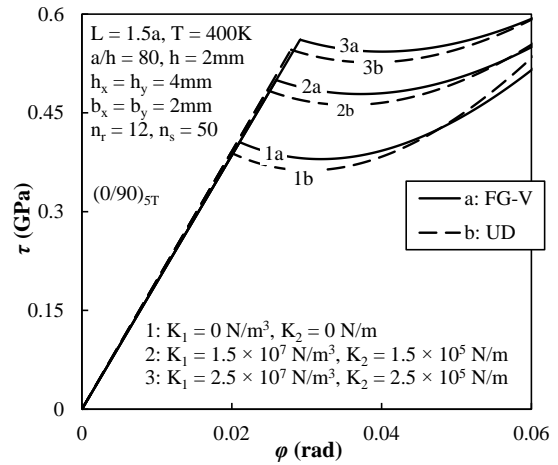
Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trụ tròn FG-GRC lần lượt được trình bày trên Hình 2.37 và Hình 2.38. Khi tỷ số a/h càng lớn thì độ mảnh của vỏ trụ càng tăng, các đường cong $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trụ bị hạ thấp đáng kể và bên cạnh đó làm giảm tải tới hạn của vỏ trụ (như kết quả khảo sát trong Bảng 2.17).

Bảng 2.17. Tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trụ tròn FG-GRC tương ứng với các tỷ số a/h ($L = 1.5a, m = 1$)

Vỏ	$(0/90)_{5T}$	$a/h = 60$	$a/h = 80$	$a/h = 100$
UD	Không gân	0.333 (7;0.58)	0.263 (8;0.59)	0.223 (9;0.60)
	Có gân	0.726 (5;0.64)	0.484 (6;0.65)	0.367 (7;0.66)
	Hiệu quả (%)	118.02	84.03	64.57
FG-X	Không gân	0.346 (7;0.59)	0.272 (8;0.59)	0.231 (9;0.60)
	Có gân	0.707 (5;0.64)	0.474 (6;0.65)	0.361 (7;0.66)
	Hiệu quả (%)	104.34	74.26	56.28
FG-V	Không gân	0.302 (8;0.59)	0.241 (9;0.59)	0.207 (10;0.61)
	Có gân	0.757 (5;0.65)	0.499 (6;0.66)	0.376 (7;0.67)
	Hiệu quả (%)	150.66	107.05	81.64
FG-A	Không gân	0.293 (8;0.60)	0.234 (9;0.61)	0.201 (10;0.62)
	Có gân	0.578 (5;0.64)	0.395 (6;0.64)	0.304 (7;0.65)
	Hiệu quả (%)	97.27	68.80	51.24
FG-O	Không gân	0.277 (8;0.59)	0.223 (9;0.60)	0.193 (10;0.61)
	Có gân	0.643 (5;0.64)	0.431 (6;0.65)	0.329 (7;0.66)
	Hiệu quả (%)	132.13	93.27	70.47



Hình 2.39. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trụ tròn FG-GRC



Hình 2.40. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến đường cong $\tau - \varphi$ của vỏ trụ tròn FG-GRC

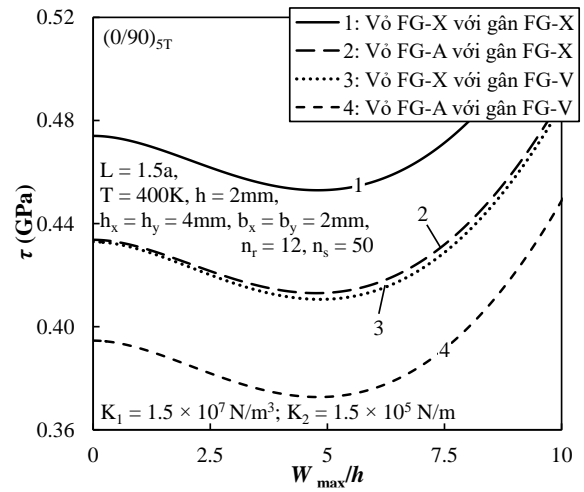
Bảng 2.18. Tải xoắn tới hạn τ_{cr} (GPa) của vỏ trụ tròn FG-GRC tương ứng với các độ cứng nền đàn hồi tuyến tính ($L = 1.5a, m = 1$)

Vỏ	$(0/90)_{5T}$	$K_1 = 0 \text{ N/m}^3$	$K_1 = 1.5 \times 10^7 \text{ N/m}^3$	$K_1 = 2.5 \times 10^7 \text{ N/m}^3$
		$K_2 = 0 \text{ N/m}$	$K_2 = 1.5 \times 10^5 \text{ N/m}$	$K_2 = 2.5 \times 10^5 \text{ N/m}$
UD	Không gân	0.164 (8;0.47)	0.263 (8;0.59)	0.323 (8;0.64)
	Có gân	0.389 (6;0.60)	0.484 (6;0.65)	0.546 (6;0.67)
	Hiệu quả (%)	137.20	84.03	69.04
FG-X	Không gân	0.175 (8;0.48)	0.272 (8;0.59)	0.332 (8;0.64)
	Có gân	0.379 (6;0.60)	0.474 (6;0.65)	0.535 (6;0.67)
	Hiệu quả (%)	116.57	74.26	61.14
FG-V	Không gân	0.142 (8;0.44)	0.241 (9;0.59)	0.300 (9;0.65)
	Có gân	0.405 (6;0.61)	0.499 (6;0.66)	0.561 (6;0.68)
	Hiệu quả (%)	185.21	107.05	87.00
FG-A	Không gân	0.136 (8;0.45)	0.234 (9;0.61)	0.293 (9;0.66)
	Có gân	0.298 (6;0.58)	0.395 (6;0.64)	0.456 (6;0.68)
	Hiệu quả (%)	119.12	68.80	55.63
FG-O	Không gân	0.126 (8;0.42)	0.223 (9;0.60)	0.282 (9;0.65)
	Có gân	0.336 (6;0.60)	0.431 (6;0.65)	0.493 (6;0.68)
	Hiệu quả (%)	166.67	93.27	74.82

Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{\max}/h$ và $\tau - \varphi$ của vỏ trụ FG-GRC lần lượt được trình bày trên Hình 2.39 và Hình 2.40. Có thể thấy nền đàn hồi càng cứng thì điểm rẽ nhánh và các đường cong của vỏ trụ càng được nâng cao đáng kể. Kết quả khảo sát số trong Bảng 2.18 cho thấy tải xoắn tới hạn của vỏ trụ tăng lên khi độ cứng của nền đàn hồi tăng lên. Tuy nhiên

độ cứng nền đàn hồi càng lớn thì hiệu quả gia cường của gân cũng bị giảm đi đáng kể.

Để chứng minh sự phân bố graphene trong hệ thống gân ảnh hưởng đáng kể đến ứng xử mất ổn định phi tuyến của vỏ trụ FG-GRC, luận án khảo sát các đường cong sau mất ổn định $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trụ FG-X và vỏ trụ FG-A lần lượt được gia cường gân FG-X và FG-V chịu tải xoắn trên Hình 2.41. Rõ ràng là ảnh hưởng của hệ thống gân FG-X đối với ứng xử mất ổn định phi tuyến của vỏ trụ lớn hơn nhiều so với hệ thống gân FG-V.



Hình 2.41. Đường cong $\tau - W_{\max}/h$ của vỏ trụ tròn FG-X và FG-A khi được gia cường bởi các hệ thống gân khác nhau

2.5.4. Vỏ trống sandwich FG-GRC lõi Auxetic có nền đàn hồi bao quanh chịu tải dọc trục

Phần này luận án khảo sát vỏ trống sandwich FG-GRC lõi Auxetic có nền đàn hồi bao quanh chịu tải dọc trục. Các lớp nền của GRC là Poly methyl methacrylate (PMMA), các đặc trưng của vật liệu graphene và lớp nền được tham khảo trong công trình [34, 109]. Hai lớp mặt GRC có bề dày $h_{GRC} = 1\text{mm}$, còn lớp lõi Auxetic có bề dày $h_c = 2\text{mm}$ và các thông số hình học lần lượt là $\chi_1 = 2, \chi_2 = 0.1, \gamma = 30^\circ$. Nền đàn hồi bao quanh có $K_1 = 10^7\text{N/m}^3, K_2 = 10^5\text{N/m}$.

Bảng 2.19. Tải nén và kéo tới hạn của vỏ trống lõi Auxetic tương ứng với các bán kính dọc R (MPa, $L = 1.5a, a/h = 80, h = 4\text{mm}, (0/90/0/90/0)_S$)

			UD	FG-X	FG-O
Tải nén dọc trục	Vỏ trống lõm	$R = -2a$	85.98 (1;3)	86.58 (1;3)	82.52 (1;3)
		$R = -4a$	140.44 (1;4)	141.42 (1;4)	131.58 (1;4)
	Vỏ trụ	$R = \infty$	402.45 (5;6)	399.43 (5;6)	360.44 (5;6)
	Vỏ trống lõi	$R = 4a$	429.66 (7;1)	411.46 (7;1)	368.87 (7;1)
$R = 2a$		430.58 (7;1)	412.33 (7;1)	369.68 (7;1)	
Tải kéo dọc trục	Vỏ trống lõi	$R = 6a$	1281.64 (1;9)	1271.49 (1;9)	1098.20 (1;10)
		$R = 4a$	826.81 (1;9)	812.50 (1;9)	716.21 (1;10)
		$R = 2a$	532.90 (1;11)	517.17 (1;11)	462.34 (1;11)

Bảng 2.19 trình bày tải tới hạn của vỏ trụ và trống lõi Auxetic chịu nén và chịu kéo tương ứng với các bán kính dọc khác nhau. Đối với vỏ trống lõi, tải nén và kéo tới hạn đều xác định được, tuy nhiên với vỏ trống lõm chỉ thu được tải nén tới hạn.

Khi bán kính dọc giảm, tải tới hạn nén dọc trục của vỏ trống lõi tăng, ngược lại khả năng chịu kéo giảm khi bán kính dọc giảm. Đối với vỏ trống lõm, tải nén dọc trục tới hạn tăng khi giá trị tuyệt đối bán kính dọc tăng. Đối với vỏ trống lõi, tải nén tới hạn tương ứng với mode mất ổn định theo chu vi bằng 1. Quan sát thấy các mode mất ổn định vỏ hình trụ tương đối lớn theo chiều dài và theo chu vi vỏ. Khả năng chịu tải nén của vỏ trống lõi UD lớn hơn rõ rệt so với vỏ FG-X, kết quả này cũng phù hợp với kết quả nghiên cứu của Shen [107] đối với vỏ sandwich FG-GRC.

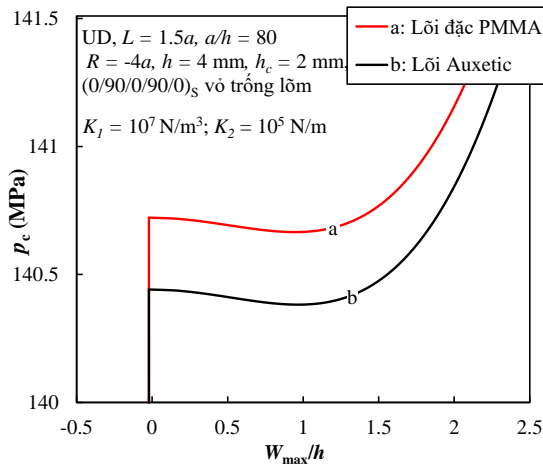
Bảng 2.20. Tải nén và kéo tới hạn của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic hoặc lõi đặc (MPa, $L = 1.5a$, $a/h = 80$, $h = 4$ mm)

Vỏ trống FG-GRC		Tải nén		Tải kéo	
		$R = -4a$	$R = 4a$	$R = 4a$	
Lõi Auxetic	UD	$(0)_{10T}$	140.27 (1;4)	429.87 (7;1)	825.36 (1;9)
		$(0/90)_{5T}$	140.49 (1;4)	429.37 (7;1)	827.39 (1;9)
		$(0/90/0/90/0)_S$	140.44 (1;4)	429.66 (7;1)	826.81 (1;9)
	FG-X	$(0)_{10T}$	141.21 (1;4)	411.62 (7;1)	810.82 (1;9)
		$(0/90)_{5T}$	141.49 (1;4)	410.94 (7;1)	813.45 (1;9)
		$(0/90/0/90/0)_S$	141.42 (1;4)	411.46 (7;1)	812.50 (1;9)
	FG-O	$(0)_{10T}$	131.34 (1;4)	369.25 (7;1)	713.07 (1;10)
		$(0/90)_{5T}$	131.58 (1;4)	368.93 (7;1)	716.26 (1;10)
		$(0/90/0/90/0)_S$	131.58 (1;4)	368.87 (7;1)	716.21 (1;10)
Lõi đặc	UD	$(0)_{10T}$	140.55 (1;4)	436.34 (7;1)	833.52 (1;9)
		$(0/90)_{5T}$	140.77 (1;4)	435.85 (7;1)	835.56 (1;9)
		$(0/90/0/90/0)_S$	140.72 (1;4)	436.13 (7;1)	834.97 (1;9)
	FG-X	$(0)_{10T}$	141.49 (1;4)	418.10 (7;1)	818.88 (1;9)
		$(0/90)_{5T}$	141.77 (1;4)	417.41 (7;1)	821.51 (1;9)
		$(0/90/0/90/0)_S$	141.70 (1;4)	417.94 (7;1)	820.56 (1;9)
	FG-O	$(0)_{10}$	131.62 (1;4)	375.72 (7;1)	719.78 (1;10)
		$(0/90)_{5T}$	131.86 (1;4)	375.40 (7;1)	722.97 (1;10)
		$(0/90/0/90/0)_S$	131.85 (1;4)	375.34 (7;1)	722.92 (1;10)

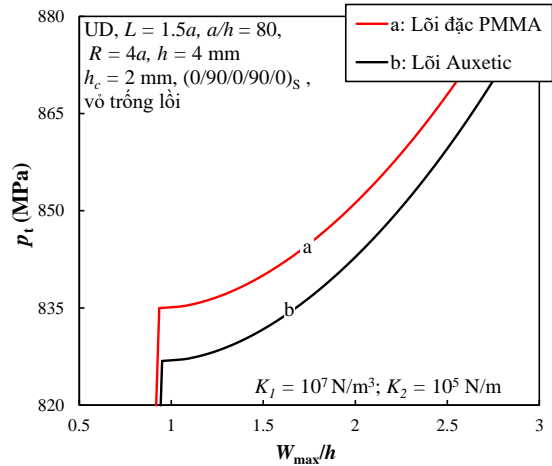
Ảnh hưởng của sự phân bố và hướng sắp xếp graphene đến tải tới hạn nén và kéo của vỏ trống lõi Auxetic và vỏ trống lõi đặc được trình bày trong Bảng 2.20. Có thể thấy trong tất cả các khảo sát số, tải tới hạn nén và kéo của vỏ trống lõi Auxetic đều nhỏ hơn không đáng kể so với tải tới hạn của vỏ lõi đặc. Điều này chứng tỏ rằng lõi Auxetic làm giảm đáng kể khối lượng mà không làm giảm nhiều đến khả năng

chịu lực của vỏ. Đồng thời quan sát thấy ba cách sắp xếp graphene là $(0)_{10}$, $(0/90)_{5T}$, $(0/90/0/90/0)_S$ không ảnh hưởng nhiều đến giá trị tải tới hạn của vỏ trống.

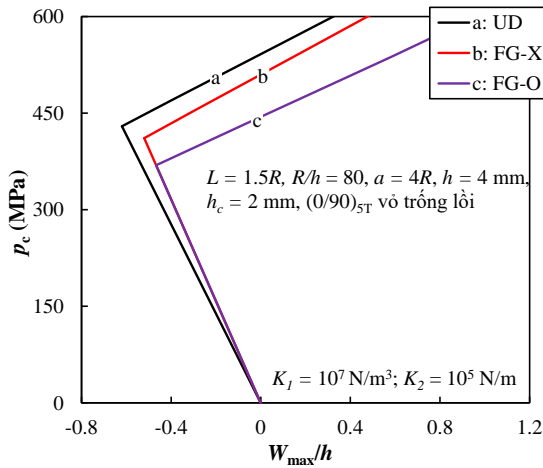
Ảnh hưởng của các lớp lõi đến đường cong sau mất ổn định $p_c - W_{max}/h$ và $p_t - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC được trình bày trên Hình 2.42 và Hình 2.43. Tương ứng với tải tới hạn, các đường cong của vỏ trống lõi Auxetic luôn thấp hơn so với các đường cong của của vỏ trống lõi đặc, tuy nhiên xu hướng các đường cong là khá giống nhau.



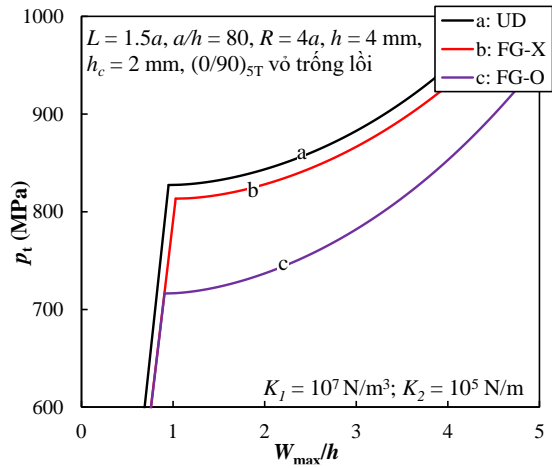
Hình 2.42. Ảnh hưởng của các lớp lõi đến các đường cong $p_c - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC chịu nén dọc trục



Hình 2.43. Ảnh hưởng của các lớp lõi đến các đường cong $p_t - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC chịu kéo dọc trục



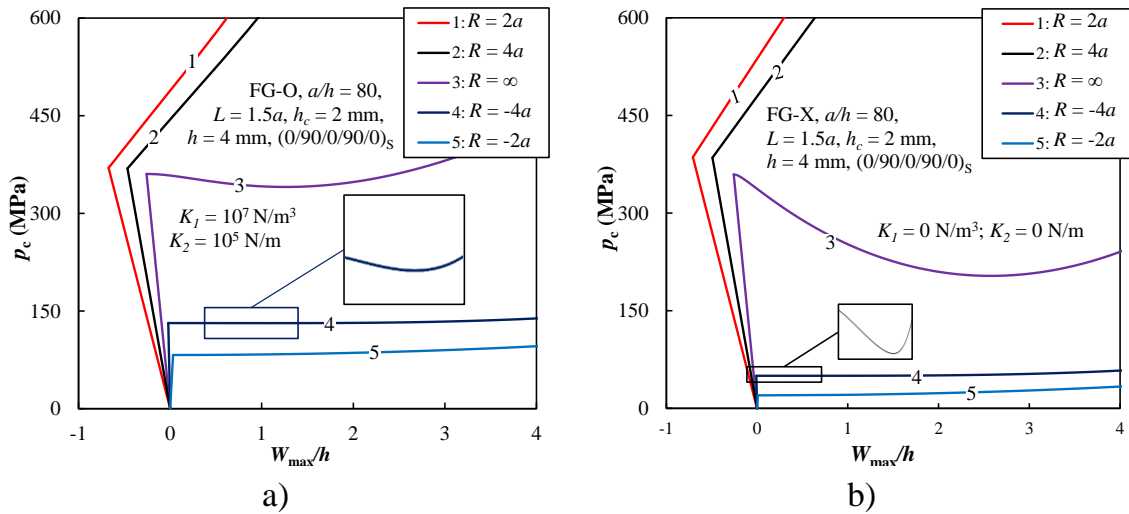
Hình 2.44. Ảnh hưởng của sự phân bố graphene đến các đường cong $p_c - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu nén dọc trục



Hình 2.45. Ảnh hưởng của sự phân bố graphene đến các đường cong $p_t - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu kéo dọc trục

Ảnh hưởng của sự phân bố graphene đến các đường cong sau mất ổn định $p_c - W_{max}/h$ và $p_t - W_{max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic được trình bày trong Hình 2.44 và Hình 2.45. Quan sát thấy các đường cong sau mất ổn định của vỏ trống lõi (xem Hình 2.44) khi chịu nén gần như tuyến tính trong miền độ võng khảo sát.

Hình 2.46 trình bày ảnh hưởng của bán kính dọc R đến các đường cong $p_c - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic. Có thể thấy cường độ hợp của vỏ trụ chịu nén quan sát rõ nhất, trong khi cường độ hợp của vỏ trống lõm tương đối nhỏ và không quan sát thấy với vỏ trống lõm.



Hình 2.46. Ảnh hưởng của bán kính dọc R đến các đường cong $p_c - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu nén dọc trục

Ảnh hưởng của các thông số hình học lớp lõi Auxetic đến tải nén và tải kéo tới hạn của vỏ trống FG-GRC được trình bày trong Bảng 2.21. Do độ cứng của lớp lõi Auxetic rất nhỏ so với độ cứng của hai lớp mặt GRC nên ảnh hưởng do các thông số hình học lớp lõi đến tải trọng nén và kéo tới hạn của vỏ trống là không đáng kể. Đây là cơ sở để thiết kế kết cấu tiên tiến có lõi nhẹ nhằm làm giảm khối lượng kết cấu sandwich.

Bảng 2.21. Ảnh hưởng của các thông số hình học lớp lõi Auxetic đến tải nén và kéo tới hạn của vỏ trống sandwich FG-GRC (MPa, $L = 1.5a$, $a/h = 80$, $R = 4a$, $h = 4$ mm, $(0/90)_{5T}$)

FG-GRC		Tải nén tới hạn	Tải kéo tới hạn
$\chi_1 = 1$	UD	429.80 (7;1)	827.40 (1;9)
$\chi_2 = 0.1$	FG-X	411.37 (7;1)	813.45 (1;9)
$\gamma = 15^\circ$	FG-O	369.36 (7;1)	716.31 (1;10)
$\chi_1 = 2$	UD	429.37 (7;1)	827.39 (1;9)
$\chi_2 = 0.1$	FG-X	410.94 (7;1)	813.45 (1;9)
$\gamma = 30^\circ$	FG-O	368.93 (7;1)	716.26 (1;10)
$\chi_1 = 3$	UD	429.26 (7;1)	827.52 (1;9)
$\chi_2 = 0.1$	FG-X	410.83 (7;1)	813.59 (1;9)
$\gamma = 45^\circ$	FG-O	368.82 (7;1)	716.34 (1;10)

Ảnh hưởng của bề dày lớp lõi Auxetic đến tải nén và tải kéo tới hạn của vỏ trống FG-GRC được trình bày trong Bảng 2.22. Có thể thấy tải nén và kéo tới hạn

của vỏ trống tăng khi chiều dày lớp lõi tăng lên. Điều này là do chiều dày lớp lõi tăng làm hai lớp mặt GRC xa trục trung hòa và làm tăng độ lệch tâm, từ đó làm tăng tải tới hạn.

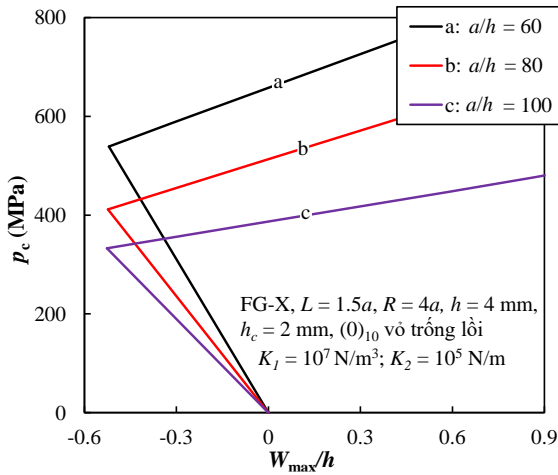
Bảng 2.22. Ảnh hưởng của bề dày lớp lõi Auxetic đến tải nén và kéo tới hạn của vỏ trống sandwich FG-GRC (MPa, $a = 0.32$ m, $R = 4a$, $L = 1.5a$, $(0)_{10}$)

	UD	FG-X	FG-O
Tải nén tới hạn			
$h_c = 0$ mm	354.49 (11;1)	355.73 (10;1)	286.45 (12;1)
$h_c = 1$ mm	399.47 (8;1)	387.86 (8;1)	338.79 (8;1)
$h_c = 2$ mm	429.87 (7;1)	411.62 (7;1)	369.25 (7;1)
Tải kéo tới hạn			
$h_c = 0$ mm	628.73 (1;14)	643.96 (1;13)	529.22 (1;15)
$h_c = 1$ mm	715.82 (1;11)	718.68 (1;11)	611.72 (1;11)
$h_c = 2$ mm	825.36 (1;9)	810.82 (1;9)	713.07 (1;10)

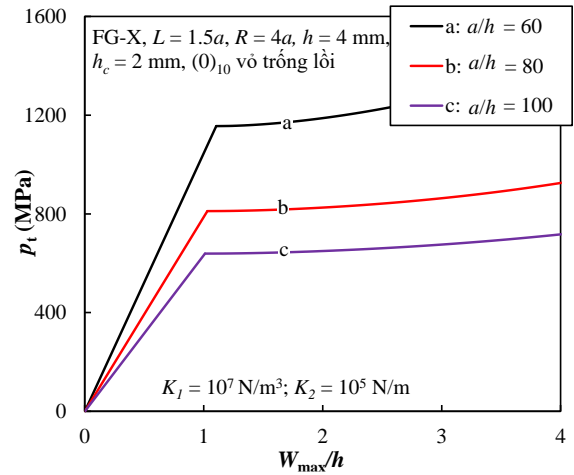
Bảng 2.23. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải nén và kéo tới hạn của vỏ trống lõi Auxetic (MPa, $L = 1.5a$, $R = 4a$, $h = 4$ mm, $(0)_{10}$)

a/h	Vỏ trống	Tải nén tới hạn	Tải kéo tới hạn
60	UD	563.33 (6;1)	1169.82 (1;9)
	FG-X	538.80 (6;1)	1155.38 (1;9)
	FG-O	483.23 (6;1)	994.37 (1;9)
80	UD	429.87 (7;1)	825.36 (1;9)
	FG-X	411.62 (7;1)	810.82 (1;9)
	FG-O	369.25 (7;1)	713.07 (1;10)
100	UD	350.39 (7;2)	650.26 (1;10)
	FG-X	332.71 (7;1)	639.27 (1;10)
	FG-O	301.52 (8;1)	570.66 (1;11)

Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải nén và tải kéo tới hạn và các đường cong sau mất ổn định $p_c - W_{\max}/h$ và $p_t - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic lần lượt được trình bày trong Bảng 2.23, Hình 2.47 và Hình 2.48. Tương ứng các tỷ số a/h khác nhau, các đường cong của vỏ tách biệt hoàn toàn và khi độ mảnh của vỏ tăng (tương ứng tỷ số a/h tăng) sẽ làm hạ thấp các đường cong và làm giảm khả năng chịu tải của vỏ trống. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải nén, tải kéo tới hạn và các đường cong sau mất ổn định $p_c - W_{\max}/h$ và $p_t - W_{\max}/h$ của vỏ trống lõi Auxetic được lần lượt trình bày trong Bảng 2.24, Hình 2.49 và Hình 2.50. Các khảo sát cho thấy độ cứng nền đàn hồi tăng làm tăng khả năng chịu tải và nâng cao các đường cong sau mất ổn định của vỏ trống.



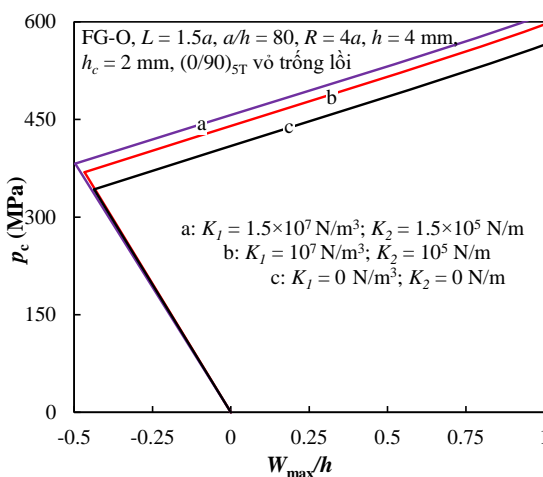
Hình 2.47. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến các đường cong $p_c - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu nén



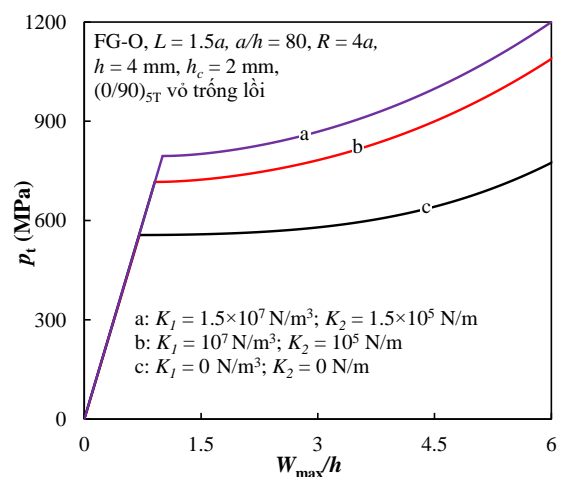
Hình 2.48. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến các đường cong $p_t - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu kéo

Bảng 2.24. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải tới hạn của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic (MPa, $L=1.5a$, $a/h=80$, $R=4a$, $h=4$ mm, $(0/90)_{5T}$)

K_1 (N/m ³)	K_2 (N/m)	Vỏ	Tải nén tới hạn	Tải kéo tới hạn
0	0	UD	403.04 (7;1)	661.17 (1;9)
		FG-X	384.61 (7;1)	645.93 (1;9)
		FG-O	342.60 (7;1)	555.88 (1;9)
10^7	10^5	UD	429.37 (7;1)	827.39 (1;9)
		FG-X	410.94 (7;1)	813.45 (1;9)
		FG-O	368.93 (7;1)	716.26 (1;10)
1.5×10^7	1.5×10^5	UD	442.54 (7;1)	911.13 (1;10)
		FG-X	424.11 (7;1)	899.79 (1;9)
		FG-O	382.10 (7;1)	795.04 (1;10)



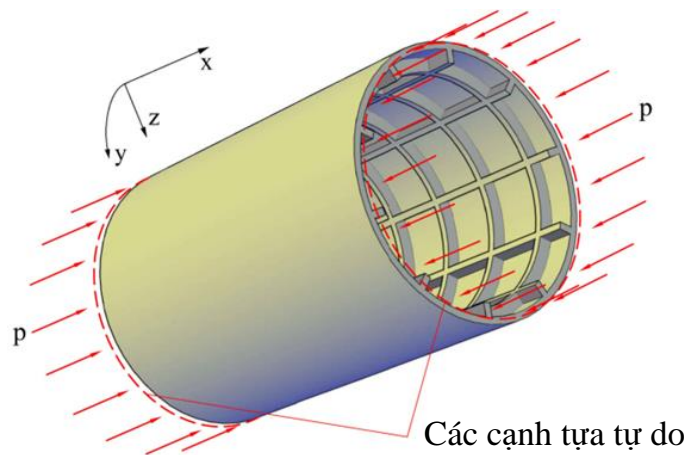
Hình 2.49. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến các đường cong $p_c - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu nén dọc trục



Hình 2.50. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến các đường cong $p_t - W_{\max}/h$ của vỏ trống FG-GRC lõi Auxetic chịu kéo dọc trục

2.5.5. Vỏ trụ FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu nén dọc trục

Trong phần này luận án khảo sát vỏ trụ FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt. Vỏ trụ FG-GRC được chế tạo từ 10 lớp GRC với tổng chiều dày của vỏ $h = 2mm$. Hệ thống gân dọc và gân vòng cũng được chế tạo từ 10 lớp GRC và bề rộng của gân là $b_x = b_y = h = 2mm$, cùng với chiều cao gân $h_x = h_y = 4mm$, số lượng gân dọc là 50 và số lượng gân vòng là 12 được lựa chọn để tính toán và khảo sát số. Nền đàn hồi bao quanh có độ cứng $K_1 = 1.5 \times 10^7 N/m^3$, $K_2 = 1.5 \times 10^5 N/m$. Các đặc trưng hình học của các lớp GRC và của các dải graphene được lấy theo các công bố của Shen và Xiang [109, 113].



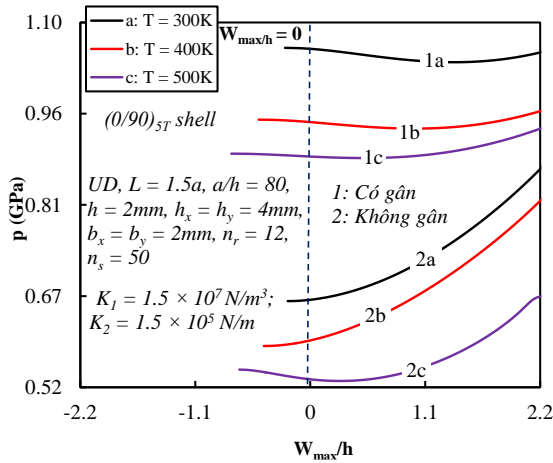
Hình 2.51. Mô hình vỏ trụ FG-GRC có gân gia cường chịu tải dọc trục

Bảng 2.25 cho thấy ảnh hưởng đáng kể của nhiệt độ môi trường đến tải tới hạn của vỏ trụ FG-GRC trong trường hợp không gân và có gân gia cường. Quan sát thấy khi nhiệt độ tăng thì tải tới hạn của vỏ trụ giảm, điều này là do các cơ tính của vật liệu GRC như mô đun đàn hồi phụ thuộc nhiệt độ và bị giảm khi nhiệt độ tăng, từ đó làm giảm khả năng chịu tải của vỏ trụ.

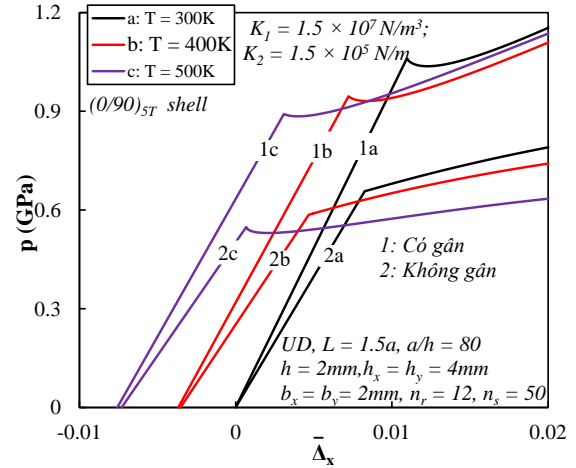
Với vỏ trụ không gân, tải tới hạn của vỏ FG-X lớn nhất trong khi tải tới hạn của vỏ FG-O là nhỏ nhất. Khi có gân gia cường, tải tới hạn của vỏ UD lớn hơn tải tới hạn của vỏ FG-X. Có thể thấy độ cứng của vỏ trụ FG-GRC là tổng hợp độ cứng của vỏ và độ cứng của hệ thống gân và nó phụ thuộc vào sự phân bố graphene trong vỏ và cả trong hệ thống gân.

Bảng 2.25. Tải nén tới hạn p_{cr} (GPa) của vỏ trụ FG-GRC trong trường hợp có và không có gân gia cường với sự thay đổi nhiệt độ môi trường ($L=1.5a$, $a=80h$, $h=2$ mm)

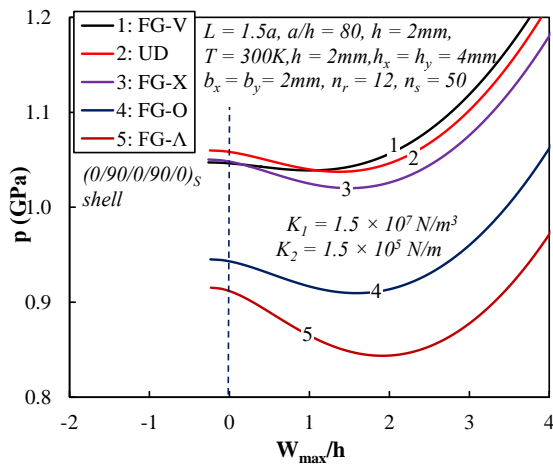
Vỏ	T = 300 K			T = 400 K			T = 500 K			
	Không gân	Có gân	Hiệu quả (%)	Không gân	Có gân	Hiệu quả (%)	Không gân	Có gân	Hiệu quả (%)	
UD	(0) _{10T}	0.657 (6;7)	1.060 (3;6)	61.34	0.586 (6;7)	0.945 (3;6)	61.26	0.548 (5;7)	0.892 (3;6)	62.77
	(0/90/0/90/0) _s	0.657 (6;7)	1.059 (3;6)	61.19	0.586 (6;7)	0.946 (3;6)	61.43	0.547 (5;7)	0.891 (3;6)	62.89
	(0/90) _{5T}	0.656 (6;7)	1.059 (3;6)	61.43	0.585 (6;7)	0.945 (3;6)	61.54	0.548 (5;7)	0.891 (3;6)	62.59
FG-X	(0) _{10T}	0.681 (6;6)	1.050 (3;6)	54.19	0.604 (6;6)	0.931 (3;6)	54.14	0.575 (5;7)	0.890 (3;6)	54.78
	(0/90/0/90/0) _s	0.682 (6;6)	1.051 (3;6)	54.11	0.605 (6;6)	0.930 (3;6)	53.72	0.574 (5;7)	0.891 (3;6)	55.23
	(0/90) _{5T}	0.680 (6;6)	1.050 (3;6)	54.41	0.604 (6;6)	0.930 (3;6)	53.97	0.575 (5;7)	0.890 (3;6)	54.78
FG-V	(0) _{10T}	0.566 (6;7)	1.047 (3;6)	84.98	0.517 (6;7)	0.950 (3;6)	83.75	0.500 (6;7)	0.916 (3;5)	83.20
	(0/90/0/90/0) _s	0.566 (6;7)	1.048 (3;6)	85.16	0.517 (6;7)	0.950 (3;6)	83.75	0.501 (6;7)	0.915 (3;5)	82.63
	(0/90) _{5T}	0.565 (6;7)	1.047 (3;6)	85.31	0.516 (6;7)	0.949 (3;6)	83.91	0.500 (6;7)	0.914 (3;5)	82.80
FG-A	(0) _{10T}	0.585 (8;1)	0.915 (3;6)	56.41	0.524 (6;7)	0.798 (3;6)	52.29	0.498 (6;7)	0.757 (3;6)	52.01
	(0/90/0/90/0) _s	0.585 (8;1)	0.916 (3;6)	56.58	0.524 (6;7)	0.799 (3;6)	52.48	0.499 (6;7)	0.758 (3;6)	51.90
	(0/90) _{5T}	0.584 (8;1)	0.915 (3;6)	56.68	0.523 (6;7)	0.798 (3;6)	52.58	0.498 (6;7)	0.757 (3;6)	52.01
FG-O	(0) _{10T}	0.541 (7;6)	0.945 (3;6)	74.68	0.486 (7;6)	0.842 (3;6)	73.25	0.467 (6;7)	0.807 (3;6)	72.81
	(0/90/0/90/0) _s	0.540 (7;6)	0.946 (3;6)	75.19	0.485 (7;6)	0.841 (3;6)	73.40	0.468 (6;7)	0.806 (3;6)	72.22
	(0/90) _{5T}	0.540 (7;6)	0.945 (3;6)	75.00	0.486 (7;6)	0.841 (3;6)	73.05	0.467 (6;7)	0.806 (3;6)	72.59



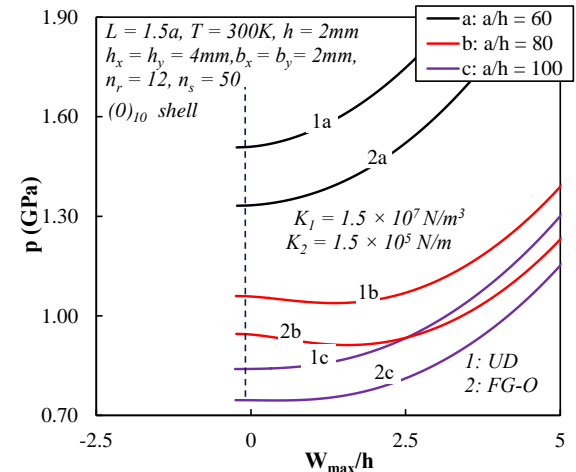
Hình 2.52. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $p - W_{\max}/h$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục



Hình 2.53. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $p - \bar{\Delta}_x$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục



Hình 2.54. Đường cong $p - W_{\max}/h$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục tương ứng với các kiểu phân bố graphene



Hình 2.55. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $p - W_{\max}/h$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục

Ảnh hưởng của nhiệt độ đến các đường cong $p - W_{\max}/h$ và $p - \bar{\Delta}_x$ của vỏ trụ chịu nén dọc trục có thể quan sát trên Hình 2.52 và Hình 2.53. Nhiệt độ tăng làm các đường cong bị hạ thấp, độ võng trước của vỏ trụ xuất hiện do tải trọng và nhiệt độ gây ra như trong Hình 2.52, nhiệt độ càng lớn thì độ võng trước càng tăng. Điều này là do vỏ giãn nở trong môi trường nhiệt độ cao nên xảy ra hiện tượng võng trước khi chịu tải trọng nén dọc trục.

Đường cong $p - W_{\max}/h$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục tương ứng với các kiểu phân bố graphene FG-X, UD, FG-V, FG-A và FG-O có thể quan sát trong Hình 2.54. Có thể thấy các đường cong của vỏ trụ FG-V cao nhất trong miền độ võng lớn tách biệt hoàn toàn với các đường cong của vỏ trụ FG-O và FG-A.

Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong sau mất ổn định $p - W_{\max}/h$ và tải tới hạn của của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục được lần lượt chỉ ra trong Hình 2.55 và Bảng 2.26. Có thể thấy vỏ trụ càng mảnh (a/h càng lớn) thì các đường cong $p - W_{\max}/h$ bị hạ thấp, hiện tượng hóp khó quan sát được và đồng thời tải tới hạn của vỏ giảm khi tỷ số a/h tăng.

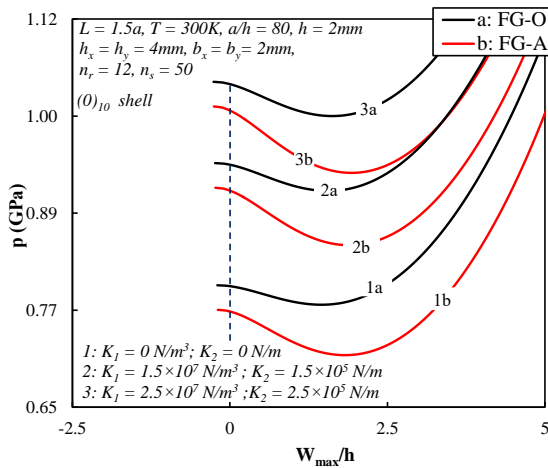
Bảng 2.26. Tải nén tới hạn p_{cr} (GPa) của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục tương ứng với tỷ số a/h ($T = 400$ K)

		$a/h = 100$	$a/h = 80$	$a/h = 60$
UD	Không gân	0.488 (7;7)	0.585 (6;7)	0.744 (5;6)
	Có gân	0.750 (4;7)	0.945 (3;6)	1.336 (3;5)
	Hiệu quả (%)	53.69	61.54	79.57
FG-X	Không gân	0.502 (7;6)	0.604 (6;6)	0.774 (5;5)
	Có gân	0.742 (4;7)	0.930 (3;6)	1.306 (3;5)
	Hiệu quả (%)	47.81	53.97	68.73
FG-V	Không gân	0.432 (8;6)	0.516 (6;7)	0.656 (5;6)
	Có gân	0.746 (3;6)	0.949 (3;6)	1.333 (2;4)
	Hiệu quả (%)	72.69	83.91	103.20
FG-A	Không gân	0.437 (8;6)	0.523 (6;7)	0.666 (5;6)
	Có gân	0.633 (4;7)	0.798 (3;6)	1.090 (3;5)
	Hiệu quả (%)	44.85	52.58	63.66
FG-O	Không gân	0.407 (8;7)	0.486 (7;6)	0.617 (6;6)
	Có gân	0.666 (4;7)	0.841 (3;6)	1.178 (3;5)
	Hiệu quả (%)	63.64	73.05	90.92

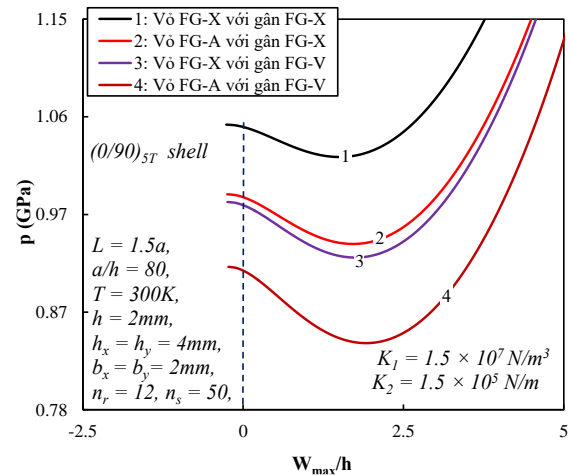
Bảng 2.27. Tải nén tới hạn p_{cr} (GPa) của vỏ trụ FG-GRC với các giá trị độ cứng nền đàn hồi ($T = 400$ K, $a/h = 80$, $h = 2$ mm, $m = 1$)

		$K_1 = 0 \text{ N/m}^3$ $K_2 = 0 \text{ N/m}$	$K_1 = 1.5 \times 10^7 \text{ N/m}^3$ $K_2 = 1.5 \times 10^5 \text{ N/m}$	$K_1 = 2.5 \times 10^7 \text{ N/m}^3$ $K_2 = 2.5 \times 10^5 \text{ N/m}$
(0/90) _{5T}	Không gân	0.465 (4;8)	0.585 (6;7)	0.650 (6;6)
	Có gân	0.797 (3;6)	0.945 (3;6)	1.043 (3;6)
	Hiệu quả (%)	71.40	61.54	60.46
FG-X	Không gân	0.492 (4;8)	0.604 (6;6)	0.666 (6;6)
	Có gân	0.783 (3;6)	0.930 (3;6)	1.028 (3;5)
	Hiệu quả (%)	59.15	53.97	54.35
FG-O	Không gân	0.377 (4;9)	0.486 (7;6)	0.545 (7;6)
	Có gân	0.694 (3;6)	0.841 (3;6)	0.940 (3;6)
	Hiệu quả (%)	84.08	73.05	72.48

Bảng 2.27 và Hình 2.56 cho thấy ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải tới hạn và các đường cong sau mất ổn định $p - W_{max}/h$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục. Có thể thấy khả năng chịu tải của vỏ trụ không gân tăng lên đáng kể khi tăng độ cứng nền đàn hồi. Trong trường hợp không có nền đàn hồi, hiệu quả của gân gia cường là lớn nhất và hiệu quả của gân gia cường dần giảm đi khi độ cứng nền đàn hồi tăng lên.



Hình 2.56. Đường cong $p - W_{max}/h$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục tương ứng với các giá trị độ cứng nền đàn hồi



Hình 2.57. Đường cong $p - W_{max}/h$ của vỏ trụ FG-GRC chịu nén dọc trục tương ứng với sự phân bố graphene trong gân gia cường

Bảng 2.28. Tải nén tới hạn p_{cr} (GPa) của vỏ trụ FG-X and FG-A với các loại gân khác nhau ($a/h = 80$, $h = 2$ mm, $m = 1$)

$(0/90)_{5T}$	Vỏ FG-X và gân FG-X	Vỏ FG-X và gân FG-V	Vỏ FG-A và gân FG-V	Vỏ FG-A và gân FG-X
T = 300K	1.050 (3;6)	0.976 (3;6)	0.915 (3;6)	0.984 (3;6)
T = 400K	0.930 (3;6)	0.862 (3;6)	0.798 (3;6)	0.862 (3;6)
T = 500K	0.890 (3;6)	0.823 (3;6)	0.757 (3;6)	0.821 (3;6)

Bảng 2.28 và Hình 2.57 minh họa sự ảnh hưởng đáng kể của quy luật phân bố của graphene trong gân gia cường đến tải nén tới hạn và ứng xử sau mất ổn định của vỏ trụ. Tiến hành khảo sát hai loại vỏ FG-X và FG-A được gia cường hệ thống gân FG-X và FG-V. Có thể thấy ảnh hưởng của gia cường của gân FG-X đến khả năng chịu tải và các đường cong sau mất ổn định của vỏ trụ lớn hơn đáng kể so với gân FG-V. Điều này cho thấy với các quy luật phân bố khác nhau của graphene trong gân gia cường, độ lệch tâm của các gân gia cường sẽ khác nhau dẫn đến độ cứng và khả năng chịu tải của vỏ FG-GRC cũng khác nhau.

2.6. Kết luận

Trong chương 2, luận án đã sử dụng lý thuyết vỏ Donnell để xây dựng các phương trình cơ bản. Nghiệm độ võng ba số hạng cùng với phương pháp Galerkin được luận án sử dụng để tìm được tải tới hạn và khảo sát ổn định phi tuyến của các kết cấu sau:

1. Vỏ trống FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu tải xoắn trong môi trường nhiệt
2. Vỏ trống sandwich FG-GRC lõi Auxetic có nền đàn hồi bao quanh chịu tải xoắn
3. Vỏ trống sandwich FG-GRC lõi Auxetic có nền đàn hồi bao quanh chịu tải dọc trục
4. Vỏ trụ FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu tải xoắn trong môi trường nhiệt
5. Vỏ trụ FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt

Điểm mới quan trọng trong chương này là luận án đã tiếp tục áp dụng kỹ thuật san tác dụng gân cải tiến cho gân FG-GRC dựa trên ý tưởng san tác dụng gân của Lekhnitskii và lý thuyết dầm cổ điển dị hướng cho các bài toán vỏ trống và vỏ trụ có gân chịu xoắn hoặc nén kéo dọc trục. Đặc biệt là ứng suất trung bình theo hướng chu vi lần đầu tiên được xem xét đến trong hàm ứng suất khi tính toán vỏ trống FG-GRC có gân gia cường và nền đàn hồi bao quanh chịu tải xoắn.

Từ các kết quả số, luận án đưa ra một số nhận xét đáng lưu ý như sau:

1. Hệ thống gân gia cường làm tăng tải tới hạn của vỏ trống và vỏ trụ FG-GRC có gân gia cường. Trong các khảo sát số, quan sát thấy hiệu quả của gân vòng đến tải tới hạn của các vỏ kín lớn hơn nhiều so với gân dọc.
2. Các kết quả số cũng chứng minh được tải xoắn tới hạn và tải nén kéo dọc trục tới hạn của vỏ trống lõi cao hơn so với vỏ trống lõm. Hiện tượng hóp có thể quan sát rất rõ với vỏ trống, vỏ trụ chịu tải xoắn hoặc vỏ trụ chịu nén dọc trục. Tuy nhiên không quan sát được hiện tượng hóp trong trường hợp vỏ trống lõi lõi auxetic chịu tải nén dọc trục.
3. Lớp lõi Auxetic làm giảm đáng kể khối lượng kết cấu nhưng tải tới hạn giảm không đáng kể so với trường hợp lõi đặc. Đây là cơ sở để thiết kế các kết cấu tiên tiến có lõi nhẹ nhằm làm giảm khối lượng của các kết cấu sandwich.

4. Khi nhiệt độ môi trường tăng hoặc độ mảnh của vỏ tăng lên sẽ làm giảm tải tới hạn của vỏ. Ngược lại độ cứng của nền đàn hồi giúp vỏ ổn định hơn và từ đó làm tăng khả năng chịu tải của vỏ. Tuy nhiên, các khảo sát số cũng cho thấy độ cứng của nền đàn hồi làm giảm hiệu quả gia cường của gân.

CHƯƠNG 3. ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI PHI TUYẾN CỦA TẤM CHỮ NHẬT VÀ PANEL TRỤ FG-GRC CÓ GÂN GIA CƯỜNG THEO HSDT

Trong chương này, luận án nghiên cứu ổn định phi tuyến của tấm chữ nhật và panel trụ FG-GRC chịu tải trọng nén và áp lực ngoài trong môi trường nhiệt. Các bài toán cụ thể được nghiên cứu và khảo sát bao gồm:

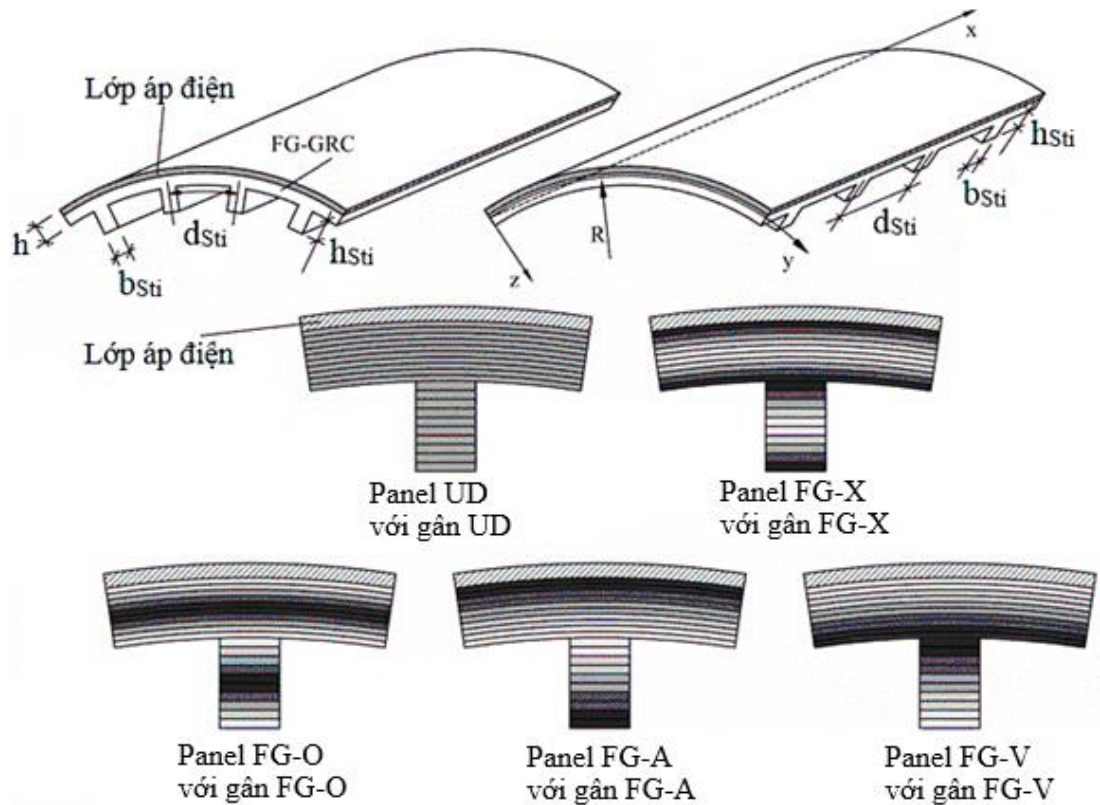
1. Panel trụ áp điện FG-GRC có gân gia cường trên nền đàn hồi tuyến tính chịu áp nén dọc trục trong môi trường nhiệt
2. Panel trụ FG-GRC có gân gia cường trên nền đàn hồi phi tuyến chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt
3. Tấm chữ nhật áp điện FG-GRC có gân gia cường chịu nén một phương và áp lực ngoài
4. Tấm chữ nhật FG-GRC có gân gia cường trên nền đàn hồi phi tuyến chịu nén một phương và áp lực ngoài

Điểm mới quan trọng của luận án so với các nghiên cứu trước đây là kỹ thuật san tác dụng gân cải tiến cho gân FG-GRC được phát triển để phù hợp với HSDT của tấm, bằng cách kết hợp giữa ý tưởng san tác dụng gân của Lekhnitskii và lý thuyết dầm biến dạng trượt bậc cao dị hướng. Các kết cấu tấm và panel trụ FG-GRC được gia cường bởi hệ thống gân FG-GRC theo phương x hoặc phương y . Hệ thống gân FG-GRC được thiết kế sao cho phần tiếp xúc giữa vỏ và gân có tỷ phần thể tích graphene bằng nhau để kết cấu có cơ tính biến thiên thay đổi trơn và liên tục về vật liệu. Mô hình nền đàn hồi phi tuyến ba hệ số [155] được xét đến trong tính toán và nghiên cứu ổn định phi tuyến cho tấm và panel chịu tải nén dọc trục và áp lực ngoài.

Các bài toán trong chương này được xây dựng theo HSDT có xét đến tính phi tuyến hình học của von Kármán. Phương pháp san đều tác dụng gân cải tiến cho gân FG-GRC được luận án sử dụng để thuận nhất kết cấu có gân gia cường. Các nghiệm giải tích được lựa chọn để có thể thỏa mãn các điều kiện biên, đồng thời sử dụng phương pháp Galerkin để tìm được các liên hệ của tải và độ võng, từ đó các tải tới hạn của tấm và panel nếu có sẽ được xác định.

Nội dung chương này đã được tác giả công bố trong 4 bài báo đăng trên tạp chí quốc tế, đó là các công trình số 7 đến 10 trong danh mục các công trình khoa học liên quan đến luận án.

3.1. Mô hình Panel trụ áp điện FG-GRC có gân gia cường



Hình 3.1. Hình dạng và hệ tọa độ của Panel áp điện FG-GRC có gân gia cường

Xét panel trụ áp điện FG-GRC bề dày h có gân gia cường trên nền đàn hồi phi tuyến với hệ tọa độ (x, y, z) có gốc nằm ở mặt giữa ở góc panel, trục x theo hướng chiều dài, trục y theo hướng cạnh cong và trục z vuông góc với mặt giữa hướng vào trong panel như Hình 3.1. Lần lượt gọi R là bán kính cong, a là chiều dài của panel theo phương x , b là chiều dài cạnh cong và h_p là chiều dày lớp áp điện trên bề mặt panel. Các ký hiệu b_{sti} , h_{sti} , d_{sti} lần lượt là bề rộng, chiều cao và khoảng cách các gân gia cường.

Panel FG-GRC được chế tạo từ 10 lớp GRC có tỷ phần thể tích graphene trong các lớp có thể phân bố đều theo kiểu UD hoặc thay đổi trơn và liên tục theo chiều dày panel tương ứng với các kiểu phân bố FG-X, FG-V, FG-A và FG-O. Tỷ phần thể tích của graphene tương ứng với các kiểu phân bố này đã được trình bày trong Bảng 1.2 và Hình 1.3.

Tại vị trí tiếp xúc giữa panel và gân gia cường, tỷ phần thể tích của graphene được lựa chọn bằng nhau để đảm bảo tính liên tục cho kết cấu. Luận án sẽ tiến hành nghiên cứu năm dạng panel áp điện gia cường gân cụ thể như sau

Dạng 1: Panel áp điện UD GRC gia cường hệ thống gân UD GRC

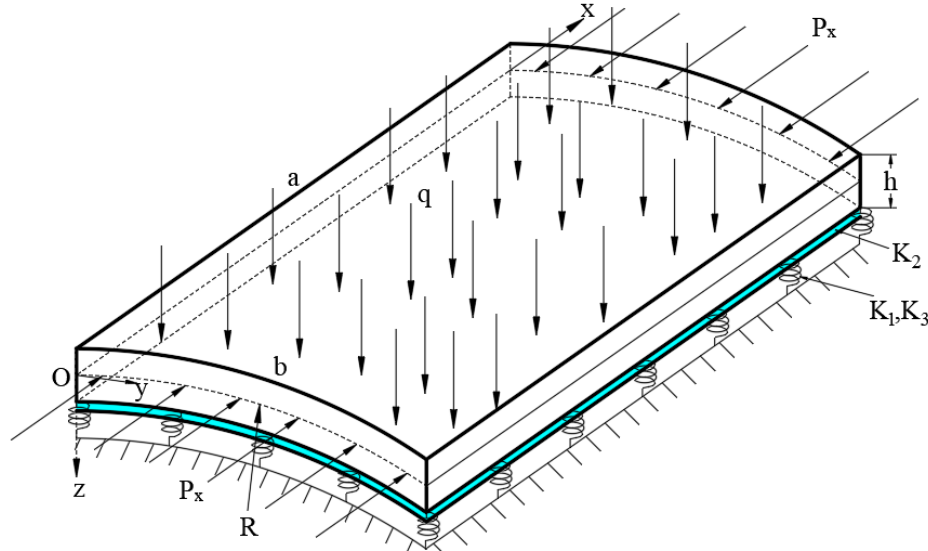
Dạng 2: Panel áp điện FG-X GRC gia cường hệ thống gân FG-X GRC

Dạng 3: Panel áp điện FG-O GRC gia cường hệ thống gân FG-O GRC

Dạng 4: Panel áp điện FG-A GRC gia cường hệ thống gân FG-V GRC

Dạng 5: Panel áp điện FG-V GRC gia cường hệ thống gân FG-A GRC

Trong trường hợp bỏ qua lớp áp điện ($h_p = 0$) panel áp điện FG-GRC trở thành panel trụ FG-GRC. Khi $R \rightarrow \infty$ thì panel áp điện FG-GRC trở thành tấm áp điện FG-GRC, và panel trụ FG-GRC trở thành tấm FG-GRC.



Hình 3.2. Mô hình panel FG-GRC chịu áp lực ngoài và nén dọc trục trên nền đàn hồi phi tuyến

3.2. Các phương trình cơ bản

3.2.1. Phương trình biến dạng và nội lực

Theo HSDT, các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kỳ là $\bar{u}(x,y,z)$, $\bar{v}(x,y,z)$, và $\bar{w}(x,y,z)$ trong kết cấu vỏ lần lượt theo các phương x , y , và z được biểu diễn theo công thức [143, 145]

$$\begin{aligned}\bar{u}(x,y,z) &= u(x,y) + z\phi_x(x,y) - \lambda z^3(\phi_x + w_{,x}), \\ \bar{v}(x,y,z) &= v(x,y) + z\phi_y(x,y) - \lambda z^3(\phi_y + w_{,y}), \\ \bar{w}(x,y,z) &= w(x,y),\end{aligned}\quad (3.1)$$

trong đó $\lambda = 4/3h^2$, các thành phần chuyển vị tại mặt trung bình của panel trụ theo phương x , y và z lần lượt là $u(x,y)$, $v(x,y)$ và $w(x,y)$, các góc xoay pháp tuyến của mặt giữa so với trục y và x lần lượt là ϕ_x, ϕ_y .

Các thành phần biến dạng của một điểm bất kỳ của panel trụ không hoàn hảo cách mặt trung bình một khoảng z được xác định như sau

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{(1)x} \\ \varepsilon_{(1)y} \\ \gamma_{(1)xy} \end{Bmatrix} + Z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{(3)x} \\ \varepsilon_{(3)y} \\ \gamma_{(3)xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{0xz} \\ \gamma_{0yz} \end{Bmatrix} + Z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{(2)xz} \\ \gamma_{(2)yz} \end{Bmatrix}, \quad (3.2)$$

trong đó $\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0y}$ và γ_{0xy} lần lượt là các biến dạng pháp tuyến và biến dạng trượt tại mặt trung bình của panel, γ_{0xz} và γ_{0yz} lần lượt là các thành phần biến dạng trượt ngang tại các mặt trung bình xz và yz , xác định theo công thức sau

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + 0.5w_{,x}^2 + w_{,x}w_{0,x} \\ v_{,y} - w/R + 0.5w_{,y}^2 + w_{,y}w_{0,y} \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} + w_{,x}w_{0,y} + w_{,y}w_{0,x} \end{Bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{0xz} \\ \gamma_{0yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_x + w_{,x} \\ \phi_y + w_{,y} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{(1)x} \\ \varepsilon_{(1)y} \\ \gamma_{(1)xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{(3)x} \\ \varepsilon_{(3)y} \\ \gamma_{(3)xy} \end{Bmatrix} = -\lambda \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} + w_{,xx} \\ \phi_{y,y} + w_{,yy} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} + 2w_{,xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{(2)xz} \\ \gamma_{(2)yz} \end{Bmatrix} = -3\lambda \begin{Bmatrix} \phi_x + w_{,x} \\ \phi_y + w_{,y} \end{Bmatrix},$$

với $w_0 = w_0(x, y)$ là độ không hoàn hảo hình dáng ban đầu của panel và được coi là nhỏ so với bề dày h của kết cấu.

Các mối quan hệ ứng suất và biến dạng được xác định theo định luật Hooke như sau

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11S} & Q_{12S} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12S} & Q_{22S} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_{11}\Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_{22}\Delta T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (3.5)$$

trong đó

$$\begin{aligned} Q_{11S} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12S} = \nu_{21} \frac{E_{11}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}, \\ Q_{22S} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}, \quad Q_{44S} = G_{23}, \quad Q_{55S} = G_{13}, \quad Q_{66S} = G_{12}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

và $\Delta T = T - T_0$ là chênh lệch nhiệt độ so với giá trị nhiệt ban đầu T_0 mà ở đó panel trụ không có biến dạng nhiệt.

Đối với vật liệu áp điện, điện thế được coi là phân bố theo chiều dày lớp áp điện. Nếu điện áp V_0 chỉ tác dụng lên lớp áp điện theo hướng chiều dày thì điện trường được xác định như sau [156]

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_0 / h_p \end{Bmatrix}, \quad (3.7)$$

trong đó V_0 là điện áp đặt vào lớp áp điện.

Tương tự như trong Chương 2, chương này cũng xem xét các gân gia cường làm việc như các dầm chịu uốn phẳng, kết cấu tấm/panel có gân gia cường được thuần nhất về kết cấu tấm/panel không gân dị hướng tương đương. Tuy nhiên lý thuyết sử dụng trong chương này là HSDT nên kỹ thuật san tác dụng gân tiếp tục được luận án cải tiến dựa trên lý thuyết dầm dị hướng biến dạng trượt bậc cao [157]. Khi này độ cứng của tấm/panel có gân gia cường sẽ là tổng các thành phần độ cứng của tấm/panel và của gân (sau khi được san theo hướng làm việc).

Các thành phần nội lực trong panel trụ FG-GRC được tính thông qua các thành phần ứng suất là [143, 145]

$$\begin{aligned} (N_i, M_i, T_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z, z^3) dz, \quad (i = x, y, xy) \\ (Q_x, Q_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz, \quad (S_x, S_y) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) z^2 dz. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Thay các thành phần biến dạng (3.2) vào mối liên hệ ứng suất và biến dạng (3.5), tiếp đó đặt các biểu thức thu được vào (3.8), các biểu thức nội lực của panel trụ gia cường bởi hệ thống gân được xác định theo biểu thức

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & C_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & \hat{E}_{11} & \hat{E}_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & \hat{E}_{12} & \hat{E}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & \hat{E}_{66} \\ C_{11} & C_{12} & 0 & \hat{E}_{11} & \hat{E}_{12} & 0 & L_{11} & L_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & \hat{E}_{12} & \hat{E}_{22} & 0 & L_{12} & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & \hat{E}_{66} & 0 & 0 & L_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \\ \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \\ -\lambda\Gamma_1 \\ -\lambda\Gamma_2 \\ -\lambda\Gamma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{1x} \\ \varphi_{1y} \\ 0 \\ \varphi_{2x} \\ \varphi_{2y} \\ 0 \\ \varphi_{4x} \\ \varphi_{4y} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

với $\Gamma_1 = (\phi_{x,x} + w_{,xx})$, $\Gamma_2 = (\phi_{y,y} + w_{,yy})$, $\Gamma_3 = (\phi_{x,y} + \phi_{y,x} + 2w_{,xy})$, N_i là các thành phần lực giãn, M_i là các thành phần mô men và T_i là các thành phần mô men bậc cao (với $i = x, y, xy$), các thành phần ma trận độ cứng là

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^S + A_{ij}^P + A_{ij}^{St}, \quad B_{ij} = B_{ij}^S + B_{ij}^P + B_{ij}^{St}, \\ D_{ij} &= D_{ij}^S + D_{ij}^P + D_{ij}^{St}, \quad C_{ij} = C_{ij}^S + C_{ij}^P + C_{ij}^{St}, \\ \hat{E}_{ij} &= E_{ij}^S + E_{ij}^P + E_{ij}^{St}, \quad L_{ij} = L_{ij}^S + L_{ij}^P + L_{ij}^{St}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

trong đó độ cứng của panel, lớp áp điện và gân gia cường được xác định là

$$\left(A_{ij}^S, B_{ij}^S, D_{ij}^S, C_{ij}^S, E_{ij}^S, L_{ij}^S \right) = \int_{-h/2+h_p}^{h/2} Q_{ijS}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, \quad (3.11)$$

$$\left(A_{ij}^P, B_{ij}^P, D_{ij}^P, C_{ij}^P, E_{ij}^P, L_{ij}^P \right) = \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} Q_{ij}^P(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{ij}^{St} & B_{ij}^{St} & C_{ij}^{St} \\ B_{ij}^{St} & D_{ij}^{St} & E_{ij}^{St} \\ C_{ij}^{St} & E_{ij}^{St} & L_{ij}^{St} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{B}_{11} & \bar{C}_{11} \\ \bar{B}_{11} & \bar{D}_{11} & \bar{E}_{11} \\ \bar{C}_{11} & \bar{E}_{11} & \bar{L}_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} & 0 & \bar{B}_{12} & 0 & \bar{C}_{12} & 0 \\ \bar{B}_{12} & 0 & \bar{D}_{12} & 0 & \bar{E}_{12} & 0 \\ \bar{C}_{12} & 0 & \bar{E}_{12} & 0 & \bar{L}_{12} & 0 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & 0 & \bar{B}_{22} & 0 & \bar{C}_{22} & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & \bar{B}_{66} & 0 & \bar{C}_{66} \\ \bar{B}_{22} & 0 & \bar{D}_{22} & 0 & \bar{E}_{22} & 0 \\ 0 & \bar{B}_{66} & 0 & \bar{D}_{66} & 0 & \bar{E}_{66} \\ \bar{C}_{22} & 0 & \bar{E}_{22} & 0 & \bar{C}_{66} & 0 \\ 0 & \bar{L}_{22} & 0 & \bar{E}_{66} & 0 & \bar{L}_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} & \bar{B}_{12} & \bar{C}_{12} \\ \bar{B}_{12} & \bar{D}_{12} & \bar{E}_{12} \\ \bar{C}_{12} & \bar{E}_{12} & \bar{L}_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\left(\bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}, \bar{D}_{ij}, \bar{C}_{ij}, \bar{E}_{ij}, \bar{L}_{ij} \right) = \frac{b_{Sti}}{d_{Sti}} \int_{h/2}^{h/2+h_{Sti}} Q_{ij}^{St}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, (i, j = 1, 2, 6), \quad (3.14)$$

các thành phần nhiệt và điện được biểu diễn như sau

$$\begin{aligned} \varphi_{1x} &= \int_{-h/2+h_p}^{h/2} (Q_{11S}\alpha_{11S} + Q_{12S}\alpha_{22S}) \Delta T dz + \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} (Q_{11}^P\alpha_{11}^P + Q_{12}^P\alpha_{22}^P) \Delta T dz \\ &+ \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} e_{31} \frac{V_0}{h_p} dz + \varphi_{1x}^{T-St}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1y} &= \int_{-h/2+h_p}^{h/2} (Q_{12S}\alpha_{11S} + Q_{22S}\alpha_{22S}) \Delta T dz + \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} (Q_{12}^P\alpha_{11}^P + Q_{22}^P\alpha_{22}^P) \Delta T dz \\ &+ \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} e_{32} \frac{V_0}{h_p} dz + \varphi_{1y}^{T-St}, \end{aligned}$$

trong trường hợp chỉ có gân theo phương x thì các thành phần nhiệt của gân được xác định như sau

$$\varphi_{1x}^{T-St} = \frac{b_{Sti}}{d_{Sti}} \int_{h/2}^{h/2+h_{Sti}} (Q_{11}^{St} \alpha_{11}^{St} + Q_{12}^{St} \alpha_{22}^{St}) \Delta T dz, \quad \varphi_{1y}^{T-St} = 0, \quad (3.16)$$

tương tự trong trường hợp chỉ có gân theo phương y thì ta có

$$\varphi_{1y}^{T-St} = \frac{b_{Sti}}{d_{Sti}} \int_{h/2}^{h/2+h_{Sti}} (Q_{11}^{St} \alpha_{11}^{St} + Q_{12}^{St} \alpha_{22}^{St}) \Delta T dz, \quad \varphi_{1x}^{T-St} = 0, \quad (3.17)$$

biểu thức e_{31}, e_{32} được xác định là [156, 158]

$$\begin{aligned} e_{31} &= d_{31} Q_{11}^P + d_{32} Q_{12}^P, \\ e_{32} &= d_{31} Q_{12}^P + d_{32} Q_{22}^P, \end{aligned} \quad (3.18)$$

trong đó

$$\begin{aligned} Q_{11}^P &= Q_{22}^P = \frac{E_{11P}}{1-\nu_P^2}, \quad Q_{12}^P = \frac{\nu_P E_{11P}}{1-\nu_P^2}, \\ E_{11P} &= (1 + E_{111} \Delta T) E_{110}, \\ E_{22P} &= (1 + E_{221} \Delta T) E_{220}, \\ G_{12P} &= (1 + G_{121} \Delta T) G_{120}, \\ G_{13P} &= (1 + G_{131} \Delta T) G_{130}, \\ G_{23P} &= (1 + G_{231} \Delta T) G_{230}, \\ \alpha_{11P} &= (1 + \alpha_{111} \Delta T) \alpha_{110}, \quad \alpha_{22P} = (1 + \alpha_{221} \Delta T) \alpha_{220}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

với $E_{111}, E_{110}, G_{121}, G_{120}, \alpha_{111}, \alpha_{110}, \alpha_{221}, \alpha_{220}$ là các tham số đầu vào của lớp áp điện PZT-5A được lấy như sau [158]

$$\begin{aligned} E_{110} &= E_{220} = 61 \text{ GPa}, \\ G_{120} &= G_{130} = G_{230} = 24.2 \text{ GPa}, \\ \nu_{12}^{Pie} &= 0.3, E_{111} = -0.0005, \\ \alpha_{110} &= \alpha_{220} = 0.9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \\ \alpha_{111} &= \alpha_{221} = 0.0005, \\ d_{31} &= d_{32} = 2.54 \times 10^{-10} \text{ mV}^{-1}, \\ G_{121} &= G_{131} = G_{231} = -0.0002. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Các thành phần lực cắt Q_i và lực cắt bậc cao S_i (với $i = x, y$) là

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{44} w_{,x} + H_{44} \phi_x \\ H_{55} w_{,y} + H_{55} \phi_y \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{66} w_{,x} + H_{66} \phi_x \\ H_{77} w_{,y} + H_{77} \phi_y \end{Bmatrix}, \quad (3.21)$$

trong đó

$$\begin{aligned} H_{44} &= H_{44S} + H_{44}^P + H_{44}^{St}, H_{55} = H_{55S} + H_{55}^P + H_{55}^{St}, \\ H_{66} &= H_{66S} + H_{66}^P + H_{66}^{St}, H_{77} = H_{77S} + H_{77}^P + H_{77}^{St}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

với

$$\begin{aligned} H_{44S} &= \int_{-h/2+h_p}^{h/2} Q_{44S} dz - 3\lambda \int_{-h/2+h_p}^{h/2} Q_{44S} z^2 dz, & H_{44}^P &= \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} Q_{44}^P dz - 3\lambda \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} Q_{44}^P z^2 dz, \\ H_{55S} &= \int_{-h/2+h_p}^{h/2} Q_{55S} dz - 3\lambda \int_{-h/2+h_p}^{h/2} Q_{55S} z^2 dz, & H_{55}^P &= \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} Q_{55}^P dz - 3\lambda \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} Q_{55}^P z^2 dz, \\ H_{66S} &= \int_{-h/2+h_p}^{h/2} Q_{44S} z^2 dz - 3\lambda \int_{-h/2+h_p}^{h/2} Q_{44S} z^4 dz, & H_{66}^P &= \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} Q_{44}^P z^2 dz - 3\lambda \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} Q_{44}^P z^4 dz, \\ H_{77S} &= \int_{-h/2+h_p}^{h/2} Q_{55S} z^2 dz - 3\lambda \int_{-h/2+h_p}^{h/2} Q_{55S} z^4 dz, & H_{77}^P &= \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} Q_{55}^P z^2 dz - 3\lambda \int_{-h/2}^{-h/2+h_p} Q_{55}^P z^4 dz, \\ H_{44}^{St} &= \frac{b_{Sti}}{d_{Sti}} \left(\int_{h/2}^{h/2+h_{Sti}} Q_{44}^{St} dz - 3\lambda \int_{h/2}^{h/2+h_{Sti}} Q_{44}^{St} z^2 dz \right), \\ H_{66}^{St} &= \frac{b_{Sti}}{d_{Sti}} \left(\int_{h/2}^{h/2+h_{Sti}} Q_{44}^{St} z^2 dz - 3\lambda \int_{h/2}^{h/2+h_{Sti}} Q_{44}^{St} z^4 dz \right). \end{aligned}$$

Liên hệ ngược biên dạng và lực giãn nhận được từ (3.9) là

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22}^* & A_{12}^* & 0 & B_{11}^* & B_{12}^* & 0 & C_{11}^* & C_{12}^* & 0 \\ A_{12}^* & A_{11}^* & 0 & B_{21}^* & B_{22}^* & 0 & C_{21}^* & C_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^* & 0 & 0 & -B_{66}^* & 0 & 0 & C_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \\ -\lambda\Gamma_1 \\ -\lambda\Gamma_2 \\ -\lambda\Gamma_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{22}^* \phi_{1x} + A_{12}^* \phi_{1y} \\ A_{12}^* \phi_{1x} + A_{11}^* \phi_{1y} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.23)$$

Thay liên hệ (3.23) vào công thức (3.9) thu được

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{11}^* & -B_{21}^* & 0 & D_{11}^* & D_{12}^* & 0 & E_{11}^* & E_{12}^* & 0 \\ -B_{12}^* & -B_{22}^* & 0 & D_{21}^* & D_{22}^* & 0 & E_{21}^* & E_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & -B_{66}^* & 0 & 0 & D_{66}^* & 0 & 0 & E_{66}^* \\ -C_{11}^* & -C_{21}^* & 0 & E_{11}^* & E_{21}^* & 0 & L_{11}^* & L_{12}^* & 0 \\ -C_{12}^* & -C_{22}^* & 0 & E_{12}^* & E_{22}^* & 0 & L_{21}^* & L_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & -C_{66}^* & 0 & 0 & E_{66}^* & 0 & 0 & L_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \\ -\lambda\Gamma_1 \\ -\lambda\Gamma_2 \\ -\lambda\Gamma_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} H_{55}^*\phi_{1x} + H_{66}^*\phi_{1y} - \phi_{2x} \\ \bar{H}_{55}^*\phi_{1x} + \bar{H}_{66}^*\phi_{1y} - \phi_{2y} \\ 0 \\ H_{88}^*\phi_{1x} + H_{99}^*\phi_{1y} - \phi_{4x} \\ \bar{H}_{88}^*\phi_{1x} + \bar{H}_{99}^*\phi_{1y} - \phi_{4y} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.24)$$

trong đó các hệ số $A_{ij}^*, B_{ij}^*, C_{ij}^*, D_{ij}^*, E_{ij}^*, L_{ij}^*$ ($i, j = 1, 2, 6$) và \bar{H}_{ij}^* ($i = j = 5, 6, 8, 9$) được xác định trong phụ lục B1.

3.2.2. Hệ phương trình cân bằng và phương trình tương thích biến dạng

Dựa theo HSDT, hệ các phương trình cân bằng phi tuyến của một panel trụ không hoàn hảo hình dáng có dạng như sau [143, 145]

$$\begin{aligned}
N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0, \\
N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0, \\
Q_{x,x} + Q_{y,y} - 3\lambda(S_{x,x} + S_{y,y}) + \lambda(T_{x,xx} + 2T_{xy,xy} + T_{y,yy}) + N_x(w_{,xx} + w_{0,xx}) \\
&+ \frac{N_y}{R} + 2N_{xy}(w_{,xy} + w_{0,xy}) + N_y(w_{,yy} + w_{0,yy}) \\
&+ q - K_1 w + K_2(w_{,xx} + w_{,yy}) - K_3 w^3 = 0, \\
M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x + 3\lambda S_x - \lambda(T_{x,x} + T_{xy,y}) &= 0, \\
M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y + 3\lambda S_y - \lambda(T_{xy,x} + T_{y,y}) &= 0,
\end{aligned} \quad (3.25)$$

trong đó q là áp lực ngoài phân bố đều, $K_1(N/m^3)$ là độ cứng nền Winkler, $K_2(N/m)$ là độ cứng lớp trượt theo mô hình nền đàn hồi hai hệ số Pasternak, $K_3(N/m^5)$ là độ cứng nền phi tuyến [155]. Độ cứng nền phi tuyến $K_3(N/m^5)$ có thể nhận giá trị dương hoặc âm tùy thuộc vào loại nền.

Phương trình tương thích biến dạng nhận được từ (3.3) là

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0x,yy} + \varepsilon_{0y,xx} - \gamma_{0xy,xy} = & -\frac{1}{R} w_{,xx} + w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy} - w_{,xx} w_{0,yy} \\ & + 2w_{,xy} w_{0,xy} - w_{0,xx} w_{,yy}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.2.3. Các điều kiện biên và phương trình chủ đạo

Điều kiện biên 1: Các cạnh của panel tựa đơn và tự do dịch chuyển (freely movable), điều kiện biên tương ứng (ký hiệu FFFF) là

$$\begin{aligned} w = 0, M_x = 0, N_{xy} = 0, \phi_y = 0, T_x = 0, N_x = N_{x0} = -hP_x, \text{ tại } x = 0, x = a, \\ w = 0, M_y = 0, N_{xy} = 0, \phi_x = 0, T_y = 0, N_y = N_{y0} = 0, \text{ tại } y = 0, y = b. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Điều kiện biên 2: Các cạnh của panel đều tựa đơn, trong đó hai cạnh $x = 0, x = a$ tựa tự do, hai cạnh $y = 0, y = b$ tựa cố định (immovable). Điều kiện biên tương ứng (ký hiệu FIFI) là

$$\begin{aligned} w = 0, M_x = 0, N_{xy} = 0, \phi_y = 0, T_x = 0, N_x = N_{x0} = -hP_x, \text{ tại } x = 0, x = a, \\ w = 0, v = 0, \phi_x = 0, M_y = 0, T_y = 0, N_y = N_{y0}, \text{ tại } y = 0, y = b. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Điều kiện biên 3: Các cạnh của panel tựa đơn cố định (immovable), điều kiện biên tương ứng (ký hiệu IIII) là

$$\begin{aligned} w = 0, u = 0, \phi_y = 0, M_x = 0, N_x = N_{x0}, \text{ tại } x = 0, x = a, \\ w = 0, v = 0, \phi_x = 0, M_y = 0, N_y = N_{y0}, \text{ tại } y = 0, y = b. \end{aligned} \quad (3.29)$$

trong đó N_{x0}, N_{y0} là các hợp lực nén tác dụng lên các cạnh của panel lần lượt theo phương x, y trong trường hợp các cạnh tựa đơn tự do và là phản lực trên các cạnh này trong trường hợp các cạnh tựa cố định.

Giả sử có hàm ứng suất $f(x, y)$ thỏa mãn các điều kiện

$$N_x = f_{,yy}; N_y = f_{,xx}; N_{xy} = -f_{,xy}, \quad (3.30)$$

thì cả hai phương trình đầu của (3.25) được thỏa mãn đồng nhất. Thay các phương trình (3.9) và (3.30) vào ba phương trình cuối của (3.25), hệ phương trình chủ đạo thu được như sau

$$\begin{aligned} -\lambda C_{21}^* f_{,xxx} + u_1 f_{,xxy} - \lambda C_{12}^* f_{,yyy} - \lambda^2 L_{11}^* w_{,xxx} + u_2 w_{,xxy} + u_3 \phi_{,xxx} \\ + u_4 \phi_{,xxy} + u_5 \phi_{,xxy} + u_6 \phi_{,yyy} - \lambda^2 L_{22}^* w_{,yyy} + (w_{,yy} + w_{0,yy}) f_{,xx} \\ - 2(w_{,xy} + w_{0,xy}) f_{,xy} + (w_{,xx} + w_{0,xx}) f_{,yy} + (u_7 + K_2) w_{,xx} \\ \frac{f_{,xx}}{R} + (u_8 + K_2) w_{,yy} + u_7 \phi_{,xx} + u_8 \phi_{,yy} - K_3 w^3 - K_1 w + q = 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} p_1 f_{,xxx} + p_2 f_{,xxy} + p_3 w_{,xxx} + p_4 w_{,xxy} + p_5 \phi_{,xx} + p_6 \phi_{,xy} + p_7 \phi_{,xy} \\ + p_8 w_{,x} + 3\lambda H_{66} \phi_x - H_{44} \phi_x = 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} &g_1 f_{,xxy} + g_2 f_{,yyy} + g_3 w_{,xxy} + g_4 w_{,yyy} + g_5 \phi_{x,xy} + g_6 \phi_{y,xx} + g_7 \phi_{y,yy} \\ &+ g_8 w_{,y} + 3\lambda H_{77} \phi_y - H_{55} \phi_y = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

trong đó các hệ số $u_i, p_i, g_i (i = 1 \div 8)$ được xác định như trong phụ lục B1.

Thay các phương trình (3.9), (3.30) vào (3.26), phương trình tương thích biến dạng thu được

$$\begin{aligned} \psi \equiv &A_{11}^* f_{,xxxx} + d_1 f_{,xxyy} + A_{22}^* f_{,yyyy} + \frac{w_{,xx}}{R} - (w_{,xy})^2 + w_{,xx} w_{,yy} + w_{,xx} w_{0,yy} \\ &- 2w_{,xy} w_{0,xy} + w_{,yy} w_{0,xx} - C_{21}^* \lambda w_{,xxxx} + d_2 w_{,xxyy} - C_{12}^* \lambda w_{,yyyy} \\ &+ d_3 \phi_{x,xx} + d_4 \phi_{x,xy} + d_5 \phi_{y,xx} + d_6 \phi_{y,yy} = 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

trong đó các hệ số $d_i (i = 1 \div 6)$ được xác định trong phụ lục B1.

Bốn phương trình từ (3.31) đến (3.34) là các phương trình cơ bản để phân tích ổn định tĩnh của panel trụ với các ẩn hàm là f, w, ϕ_x, ϕ_y . Để giải các phương trình này, dạng nghiệm cho hàm độ võng w và hàm không hoàn hảo w_0 cùng với hàm góc xoay và hàm ứng suất được lựa chọn thỏa mãn các điều kiện biên, có dạng như sau [145]

$$\begin{aligned} w &= W \sin \alpha x \sin \beta y, \quad w_0 = \xi h \sin \alpha x \sin \beta y, \\ \phi_x &= \Phi_x \cos \alpha x \sin \beta y, \quad \phi_y = \Phi_y \sin \alpha x \cos \beta y, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$f = f_1 \cos 2\alpha x + f_2 \cos 2\beta y + f_3 \sin \alpha x \sin \beta y + \frac{1}{2} N_{x0} y^2 + \frac{1}{2} N_{y0} x^2, \quad (3.36)$$

trong đó $\alpha = \frac{m\pi}{a}$; $\beta = \frac{n\pi}{b}$ với m và n lần lượt là các số nguyên dương biểu thị nửa số bước sóng theo phương x và y . Các hệ số f_1, f_2 và f_3 được xác định bằng cách thay các dạng nghiệm (3.35) vào phương trình tương thích biến dạng (3.34), giải ra tìm được các hệ số sau

$$f_1 = \frac{\beta^2}{32A_{11}^* \alpha^2} W(W + 2\xi h), f_2 = \frac{\alpha^2}{32A_{22}^* \beta^2} W(W + 2\xi h), f_3 = e_1 \Phi_x + e_2 \Phi_y + e_3 W, \quad (3.37)$$

trong đó

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{-\alpha^3 d_3 - \alpha \beta^2 d_4}{\alpha^4 A_{11}^* + \alpha^2 \beta^2 d_1 + \beta^4 A_{22}^*}, \quad e_2 = \frac{-\alpha^2 \beta d_5 - \beta^3 d_6}{\alpha^4 A_{11}^* + \alpha^2 \beta^2 d_1 + \beta^4 A_{22}^*}, \\ e_3 &= \frac{(\alpha^4 \lambda C_{21}^* + \beta^4 \lambda C_{12}^* - \alpha^2 \beta^2 d_2) R + \alpha^2}{R(\alpha^4 A_{11}^* + \alpha^2 \beta^2 d_1 + \beta^4 A_{22}^*)}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Thay các biểu thức dạng nghiệm (3.35) và hàm ứng suất (3.36) vào hệ phương trình chủ đạo (3.31)-(3.33) và áp dụng phương pháp Galerkin, kết quả thu được ba phương trình đại số phi tuyến có dạng là

$$\begin{aligned} & (a_1 N_{x0} + a_3 N_{y0})(h\xi + W) + a_2 q + a_2 \frac{N_{y0}}{R} + a_5 \Phi_x + a_6 \Phi_y \\ & + a_4 (e_1 \Phi_x + e_2 \Phi_y)(h\xi + W) + a_7 (2h\xi + W)W(h\xi + W) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$+ a_8 (2h\xi + W)W + a_4 e_3 W(h\xi + W) + a_{10} W^3 + a_9 W = 0,$$

$$b_1 \Phi_x + b_2 \Phi_y + b_3 (2h\xi + W)W + b_4 W = 0, \quad (3.40)$$

$$b_5 \Phi_x + b_6 \Phi_y + b_7 (2h\xi + W)W + b_8 W = 0, \quad (3.41)$$

trong đó a_i ($i=1 \rightarrow 10$) và b_i ($i=1 \rightarrow 8$) được trình bày cụ thể trong phụ lục B2

Từ hai phương trình (3.40) và (3.41) ta xác định được biểu thức Φ_x, Φ_y như sau

$$\begin{aligned} \Phi_x &= c_1 (2h\xi + W)W + c_2 W, \\ \Phi_y &= c_3 (2h\xi + W)W + c_4 W, \end{aligned} \quad (3.42)$$

trong đó

$$c_1 = \frac{(b_2 b_7 - b_3 b_6)}{b_1 b_6 - b_2 b_5}, c_2 = \frac{(b_2 b_8 - b_4 b_6)}{b_1 b_6 - b_2 b_5}, c_3 = -\frac{(b_1 b_7 - b_3 b_5)}{b_1 b_6 - b_2 b_5}, c_4 = -\frac{(b_1 b_8 - b_4 b_5)}{b_1 b_6 - b_2 b_5}.$$

Thay Φ_x, Φ_y vào phương trình đầu tiên (3.39) và đặt $\bar{W} = W/h$, ta thu được mối quan hệ giữa tải trọng và độ võng như sau

$$\begin{aligned} & a_{10} \bar{W}^3 h^2 + \frac{a_2}{h} \frac{N_{y0}}{R} + (\xi + \bar{W})(N_{x0} a_1 + N_{y0} a_3) + c_8 \bar{W} + \frac{a_2 q}{h} \\ & + c_5 \bar{W}(\xi + \bar{W})h + c_6 h^2 (2\xi + \bar{W})\bar{W}(\xi + \bar{W}) + c_7 h(2\xi + \bar{W})\bar{W} = 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

trong đó

$$\begin{aligned} c_5 &= a_4 (c_2 e_1 + c_4 e_2 + e_3), c_6 = a_4 (c_1 e_1 + c_3 e_2) + a_7, \\ c_7 &= a_5 c_1 + a_6 c_3 + a_8, c_8 = a_5 c_2 + a_6 c_4 + a_9. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Phương trình (3.43) là phương trình chủ đạo cùng với các điều kiện biên được trình bày cụ thể dưới đây sẽ được dùng để phân tích ổn định tĩnh của tấm, panel trụ FG-GRC được gia cường bởi hệ thống gân FG-GRC trên nền đàn hồi phi tuyến chịu tải trọng cơ nhiệt.

3.3. Các bài toán cụ thể

3.3.1. Ổn định phi tuyến của tấm chữ nhật và panel trụ FG-GRC có gân gia cường chịu tải áp lực ngoài

Nếu cạnh $x=0, x=a$ là tựa tự do và không có lực nén trên cạnh này thì ta có $N_{x0}=0$, nếu cạnh tựa tự do và có lực nén trên cạnh thì $N_x = N_{x0} = -hP_x$. Nếu cạnh $y=0, y=b$ là tựa tự do và không có lực nén trên cạnh thì $N_{y0}=0$.

Nếu cạnh $x=0, x=a$ là tựa đơn cố định thì tức là $u=0$ trên $x=0, x=a$. Điều kiện này được thỏa mãn theo nghĩa trung bình như sau

$$\int_0^a \int_0^b u_{,x} dy dx = 0. \quad (3.45)$$

Nếu cạnh $y=0, y=b$ là tựa đơn cố định thì tức là $v=0$ trên $y=0, y=b$. Điều kiện này được thỏa mãn theo nghĩa trung bình như sau

$$\int_0^a \int_0^b v_{,y} dy dx = 0. \quad (3.46)$$

Từ các biểu thức (3.23) và (3.3) ta xác định được

$$\begin{aligned} u_{,x} &= A_{22}^* N_x + A_{12}^* N_y + B_{11}^* \phi_{x,x} + B_{12}^* \phi_{y,y} - C_{11}^* \lambda (\phi_{x,x} + w_{,xx}) + A_{12}^* \varphi_{1y} \\ &\quad - C_{12}^* \lambda (\phi_{y,y} + w_{,yy}) + A_{22}^* \varphi_{1x} - 0.5w_{,x}^2 - w_{,x} w_{0,x}, \\ v_{,y} &= A_{12}^* N_x + A_{11}^* N_y + B_{21}^* \phi_{x,x} + B_{22}^* \phi_{y,y} - C_{21}^* \lambda (\phi_{x,x} + w_{,xx}) + A_{11}^* \varphi_{1y} \\ &\quad - C_{22}^* \lambda (\phi_{y,y} + w_{,yy}) + A_{12}^* \varphi_{1x} + \frac{w(x,y)}{R} - 0.5w_{,y}^2 - w_{,y} w_{0,y}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Thay biểu thức (3.35) vào (3.47), sau đó giải hệ phương trình tìm được từ biểu thức (3.45) và (3.46), sau khi rút gọn ta thu được

$$\begin{aligned} N_{x0} &= t_1 \Phi_x + t_2 \Phi_y + t_3 W (2h\xi + W) + t_4 W - \varphi_{1x}, \\ N_{y0} &= t_5 \Phi_x + t_6 \Phi_y + t_7 W (2h\xi + W) + t_8 W - \varphi_{1y}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

với các hệ số $t_i (i=1 \rightarrow 8)$ được trình bày cụ thể trong phụ lục B3.

Thay phương trình (3.48) vào (3.43), biểu thức liên hệ giữa tải áp lực ngoài q với $\bar{W} = W/h$ thu được như sau

$$\begin{aligned} q &= q_1 (2\xi + \bar{W}) \bar{W} (\xi + \bar{W}) + q_2 (2\xi + \bar{W}) \bar{W} + q_3 \bar{W} (\xi + \bar{W}) + q_4 \bar{W}^3 \\ &\quad + q_5 \bar{W} + \mu_2 \frac{\varphi_{1y}}{R} + \left(\mu_1 \frac{a_1 \varphi_{1x}}{a_2} + \mu_2 \frac{a_3 \varphi_{1y}}{a_2} \right) (\xi + \bar{W}) h, \end{aligned} \quad (3.49)$$

với $q_i (i = 1 \rightarrow 5)$ được trình bày cụ thể trong phụ lục B3. Các hệ số μ_1 và μ_2 được đưa thêm vào phương trình (3.49) và nhận các giá trị cụ thể bằng 0 hoặc bằng 1 tùy theo điều kiện biên, cụ thể như sau

$\mu_1 = 0$ nếu hai cạnh $x = 0, x = a$ là tựa tự do

$\mu_1 = 1$ nếu hai cạnh $x = 0, x = a$ là tựa đơn cố định

$\mu_2 = 0$ nếu hai cạnh $y = 0, y = b$ là tựa tự do

$\mu_2 = 1$ nếu hai cạnh $y = 0, y = b$ là tựa đơn cố định.

Phương trình (3.49) được sử dụng để khảo sát đường cong sau mắt ổn định (tải áp lực ngoài - độ võng) của panel trụ và tấm FG-GRC có gân gia cường chịu tác dụng của áp lực ngoài trong môi trường nhiệt độ. Đồng thời dựa vào các đường cong sau mắt ổn định này, khả năng chịu tải của panel trụ và tấm FG-GRC có thể quan sát và đánh giá.

3.3.2. Ổn định phi tuyến của tấm chữ nhật và panel trụ FG-GRC có gân gia cường chịu nén một phương và áp lực ngoài

Lực nén một phương P_x đặt trên hai cạnh $x = 0, x = a$ nên $N_{x0} = -hP_x$, kết hợp với phương trình (3.42) và (3.46) ta thu được

$$N_{y0} = z_1 P_x + z_2 (2h\xi + W)W + z_3 W + z_4 \phi_{1x} - \phi_{1y}. \quad (3.50)$$

Thay N_{x0} và N_{y0} vào phương trình (3.43), ta được biểu thức sau

$$\begin{aligned} & a_{10} \bar{W}^3 h^2 + \frac{a_2 q}{h} + (2\xi + \bar{W}) \bar{W} (\xi + \bar{W}) z_5 + z_6 (2\xi + \bar{W}) \bar{W} + z_7 \bar{W} \\ & + \mu_2 z_4 \left(\frac{a_2}{hR} + (\xi + \bar{W}) a_3 \right) \phi_{1x} - \mu_2 \left(\frac{a_2}{hR} + (\xi + \bar{W}) a_3 \right) \phi_{1y} \\ & + z_8 \bar{W} (\xi + \bar{W}) + \left(\frac{a_2 \mu_2 z_1}{hR} + (\xi + \bar{W}) (a_3 \mu_2 z_1 - h a_1) \right) P_x = 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

với $z_i (i = 1 \rightarrow 8)$ được trình bày cụ thể trong phụ lục B3

Phương trình (3.51) được sử dụng để khảo sát đường cong sau mắt ổn định của tấm chữ nhật và panel trụ FG-GRC có gân gia cường chịu nén một phương và áp lực ngoài trong môi trường nhiệt độ.

3.3.3. Ổn định phi tuyến của tấm chữ nhật và panel trụ FG-GRC có gân gia cường chỉ chịu nén một phương

Trong trường hợp panel trụ chỉ chịu nén dọc trục thì tải áp lực ngoài $q = 0$, với bài toán tấm thì $R \rightarrow \infty$

Đối với điều kiện biên FFFF, các cạnh của tấm và panel trụ tựa tự do ($\mu_2 = 0$), khi đó từ phương trình (3.51) ta rút ra được

$$P_x = \frac{1}{(\xi + \bar{W})ha_1} \left(\frac{(2\xi + \bar{W})\bar{W}(\xi + \bar{W})z_5 + z_6(2\xi + \bar{W})\bar{W}}{a_{10}\bar{W}^3h^2 + z_7\bar{W} + z_8\bar{W}(\xi + \bar{W})} \right). \quad (3.52)$$

Trường hợp tấm và panel trụ hoàn hảo ($\xi = 0$), phương trình (3.52) trở thành phương trình xác định được các tải nén làm cho tấm bị mất ổn định khi cho $\bar{W} \rightarrow 0$

$$P_{xupper} = \frac{z_7}{ha_1}. \quad (3.53)$$

Các tải nén tới hạn P_{cr} là giá trị nhỏ nhất trong các giá trị P_{xupper} với cặp giá trị (m, n) tương ứng.

Ở điều kiện biên FIFI, các cạnh của tấm và panel trụ tựa đơn, có cạnh $x=0, x=a$ tựa tự do, cạnh $y=0, y=b$ tựa cố định nên $\mu_2 = 1$. Tấm và panel hoàn hảo ($\xi = 0$), phương trình (3.51) được viết lại như sau

$$P_x = \frac{(a_{10}h^2 + z_5)\bar{W}^3 + (z_6 + z_8)\bar{W}^2 + z_7\bar{W} + \left(\frac{a_2}{hR} + \bar{W}a_3\right)(z_4\phi_{1x} - \phi_{1y})}{-\left(\frac{a_2z_1}{hR} + \bar{W}(a_3z_1 - ha_1)\right)}. \quad (3.54)$$

Phương trình (3.51), (3.52) và (3.54) được sử dụng để khảo sát đường cong sau mất ổn định và đánh giá khả năng chịu tải sau mất ổn định của tấm và panel trụ FG-GRC có gân gia cường chịu nén một phương trong môi trường nhiệt.

3.4. So sánh kết quả nghiên cứu

Trong phần này các so sánh được thực hiện để kiểm tra độ tin cậy về kết quả số và mức độ chính xác về phương pháp tiếp cận của luận án.

Bảng 3.1. So sánh tải tới hạn $P_{cr} = \sigma_x(a/h)^2 E_0$ cho tấm hoàn hảo (0/90/0/90/0)_s FG-GRC chịu tải nén một phương trong môi trường nhiệt ($E_0 = 2.5GPa, a/b = 1, (m;n) = (1;1), h = 2mm$)

$\Delta T(K)$	a/h	UD		FG-X		FG-O	
		Shen và cộng sự [35]	Luận án	Shen và cộng sự [35]	Luận án	Shen và cộng sự	Luận án
0	20	105.073	105.075	120.995	120.997	71.198	71.199
100	20	92.094	92.084	104.218	104.207	63.340	63.333
200	20	85.889	85.894	98.572	98.577	60.973	60.976

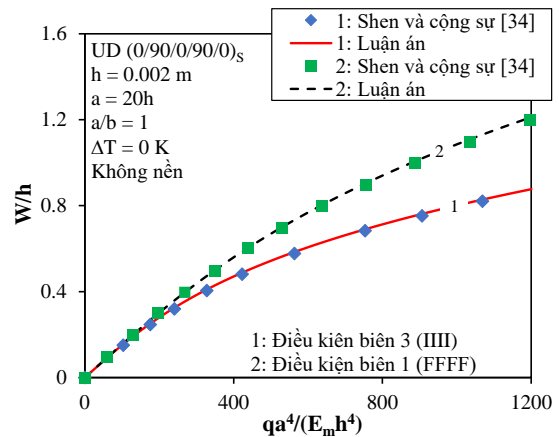
Đầu tiên, tải tới hạn của tấm vuông FG-GRC hoàn hảo không gân và tải tới hạn của panel trụ FG-GRMMC hoàn hảo không gân chịu nén một phương ở điều kiện biên 1 (FFFF) được lần lượt so sánh với kết quả nghiên cứu của Shen và cộng sự [35] trong Bảng 3.1, Shen và Xiang [87] trong Bảng 3.2.

Bảng 3.2. So sánh tải tới hạn $\bar{P}_{cr} = P_{cr}ah$ (kN) cho panel trụ FG-GRMMC chịu tải trọng nén dọc trục (FFFF, $a = 20h$, $h = 3mm$, $b/a = 0.8$, $a/R = 0.8$, $\Delta T = 0K$, $(m;n) = (1;1)$)

Sắp xếp graphene	UD		FG-X		FG-O	
	Shen và Xiang [87]	Luận án	Shen và Xiang [87]	Luận án	Shen và Xiang [87]	Luận án
$(0)_{10T}$	709.81	711.261	775.33	774.863	655.64	654.293
$(0/90/0/90/0)_S$	711.05	712.398	776.60	776.095	655.28	654.976
$(0/90)_{5T}$	711.74	713.719	777.11	776.903	654.51	655.672

Tiếp theo, luận án so sánh đường cong sau mất ổn định $qa^4/E_m h^4 - W/h$ của tấm FG-GRC hoàn hảo chịu áp lực ngoài ở điều kiện biên 1 (FFFF) và ở điều kiện biên 3 (III) với kết quả nghiên cứu của Shen và cộng sự [34].

Các so sánh cho thấy độ tin cậy của kết quả nghiên cứu trong luận án với các nghiên cứu đã công bố.



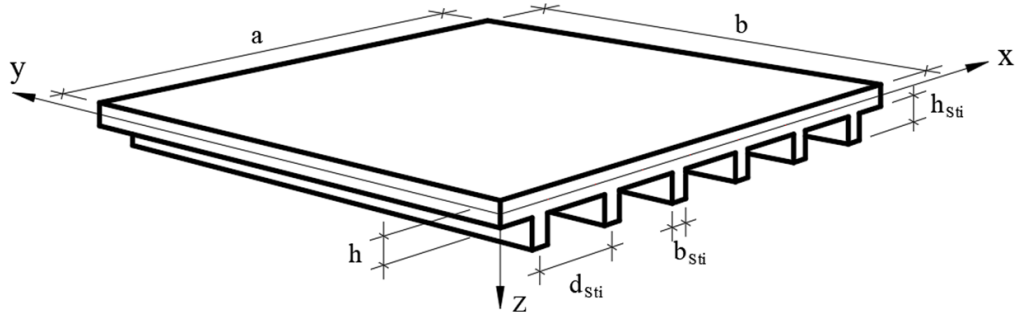
Hình 3.3. So sánh đường cong $qa^4/E_m h^4 - W/h$ của tấm FG-GRC với nghiên cứu của Shen và cộng sự [34]

3.5. Kết quả khảo sát và thảo luận

3.5.1. Kết quả bài toán tấm chữ nhật FG-GRC và tấm áp điện FG-GRC có gân gia cường chịu nén một phương và áp lực ngoài trong môi trường nhiệt

Phần này luận án trình bày kết quả khảo sát tấm FG-GRC và tấm áp điện FG-GRC có gân gia cường FG-GRC chịu nén một phương và áp lực ngoài trong môi trường nhiệt ở các điều kiện biên khác nhau. Số lượng gân được lựa chọn là $n_{Sti} = 10$, chiều cao và bề rộng gân lần lượt là $h_{Sti} = 0.75h$, $b_{Sti} = h/2$ với $h = 2mm$. Nền đàn hồi phi tuyến trong khảo sát tấm FG-GRC có các độ cứng $K_1 = 2 \times 10^7$ N/m³, $K_2 = 10^5$

N/m , $K_3 = 10^{15} N/m^5$. Khi khảo sát tấm áp điện FG-GRC, nền đàn hồi không được xét đến và lớp áp điện có chiều dày $h_p = 0.1mm$ với điện áp $V_0 = 500V$. Các đặc trưng về vật liệu và các thông số hình học của các lớp GRC và của graphene được lấy theo các công bố của Shen và Xiang [109, 113].



Hình 3.4. Mô hình tấm FG-GRC có gân gia cường FG-GRC

Bảng 3.3. Ảnh hưởng của các kiểu gia cường graphene, hướng bố trí GRC và hệ thống gân gia cường đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của tấm FG-GRC (FFFF, $a/b=1$, $a/h=20$, $\Delta T=0K$, $\xi=0$, $q=0$, $(m;n)=(1;1)$)

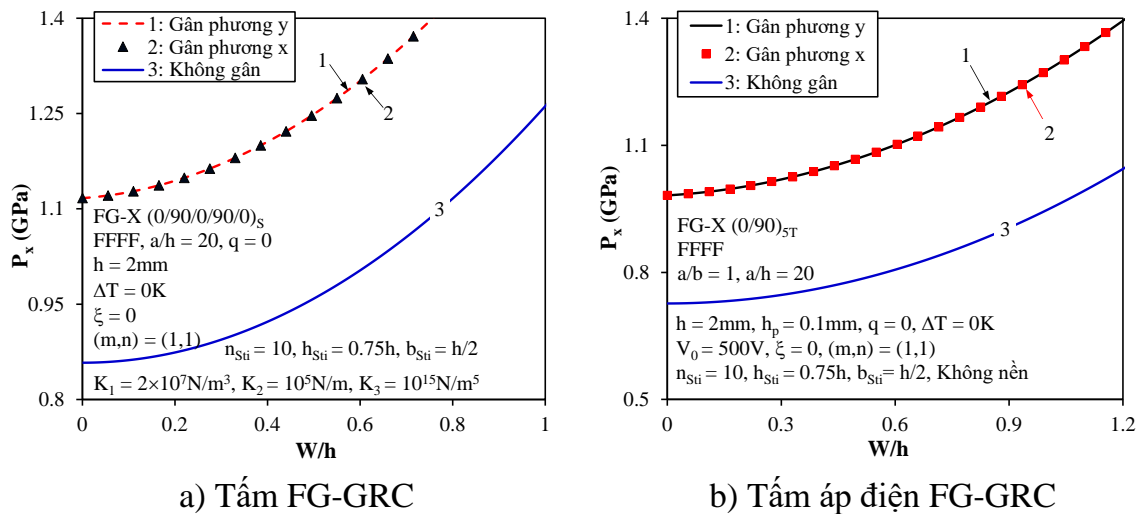
Tấm FG-GRC		$(0)_{10T}$	$(0/90/0/90/0)_S$	$(0/90)_{5T}$
UD	Không gân	758.339	758.340	758.339
	Gân phương x	1029.794	1029.995	1029.713
	Gân phương y	1029.794	1029.995	1029.713
FG-X	Không gân	857.851	857.852	857.848
	Gân phương x	1116.673	1116.951	1116.439
	Gân phương y	1116.673	1116.951	1116.439
FG-O	Không gân	546.615	546.616	546.616
	Gân phương x	782.857	783.098	783.214
	Gân phương y	782.857	783.098	783.214
FG-V	Không gân	627.087	627.077	627.053
	Gân phương x	953.010	952.950	952.397
	Gân phương y	953.010	952.950	952.397
FG-A	Không gân	627.087	627.077	627.085
	Gân phương x	797.062	797.469	797.253
	Gân phương y	797.062	797.469	797.253

Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường, hướng bố trí GRC và các kiểu gia cường graphene đến khả năng chịu tải của tấm FG-GRC và tấm áp điện FG-GRC lần lượt được thể hiện trong Bảng 3.3 và Bảng 3.4. Rõ ràng là hệ thống gân gia cường làm tăng đáng kể khả năng chịu tải của tấm, các khảo sát số cho thấy tải tới hạn của tấm có gân gia cường theo phương x bằng với tải tới hạn của tấm có gân gia cường theo phương y , tấm FG-X có tải tới hạn lớn nhất trong các trường hợp khảo sát.

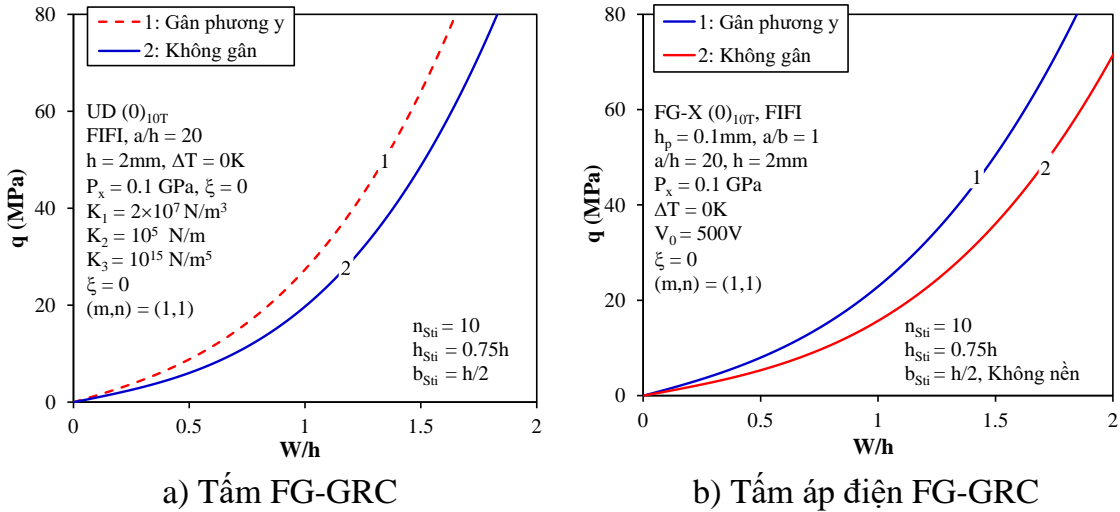
Bảng 3.4. Ảnh hưởng của các kiểu gia cường graphene, hướng bố trí GRC và hệ thống gân gia cường đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của tấm áp điện FG-GRC ($a/b=1$, $a=20h$, $(m;n)=(1;1)$, $\Delta T=0$, $q=0$, FFFF)

Tấm áp điện FG-GRC		$(0)_{10T}$	$(0/90/0/90/0)_S$	$(0/90)_{5T}$
UD	Không gân	640.969	640.968	640.964
	Gân phương x	909.509	909.588	909.304
	Gân phương y	909.509	909.588	909.304
FG-X	Không gân	726.547	726.547	726.541
	Gân phương x	982.295	982.390	981.900
	Gân phương y	982.295	982.390	981.900
FG-O	Không gân	459.689	459.689	459.690
	Gân phương x	694.781	694.854	694.938
	Gân phương y	694.781	694.854	694.938
FG-V	Không gân	504.575	504.560	504.537
	Gân phương x	823.463	823.265	822.738
	Gân phương y	823.463	823.265	822.738
FG-A	Không gân	556.488	556.486	556.492
	Gân phương x	729.427	729.671	729.448
	Gân phương y	729.427	729.671	729.448

Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường đến các đường cong tải - độ võng $P_x - W/h$ và $q - W/h$ của tấm khi chỉ chịu tải nén và khi chịu tải đồng thời nén và áp lực ngoài có thể lần lượt được quan sát trong Hình 3.5 và Hình 3.6. Khi tấm có gân gia cường theo phương y hoặc phương x , các đường cong tải - độ võng được nâng cao hơn so với trường hợp tấm không có gân gia cường.



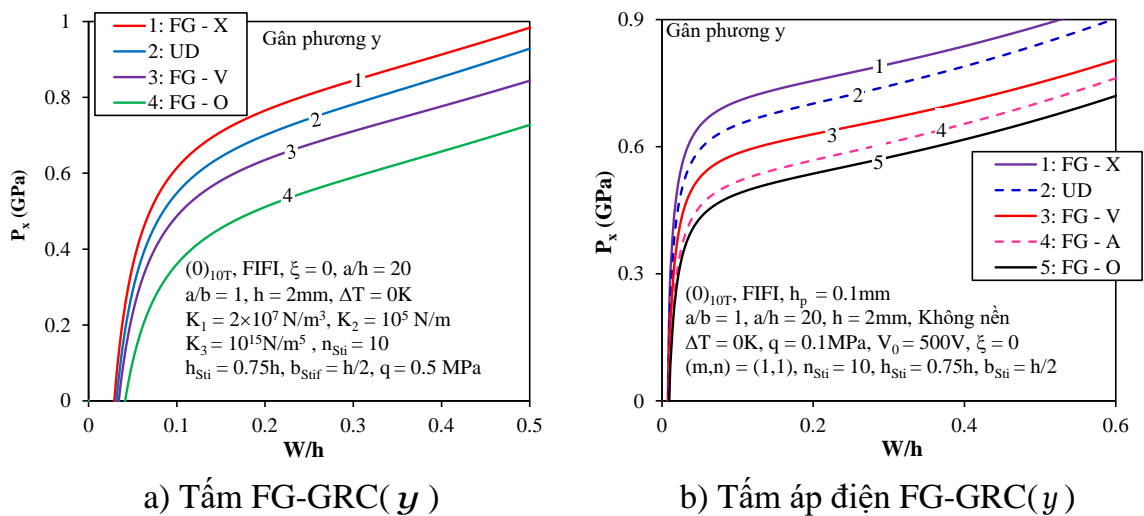
Hình 3.5. Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm chịu nén một phương



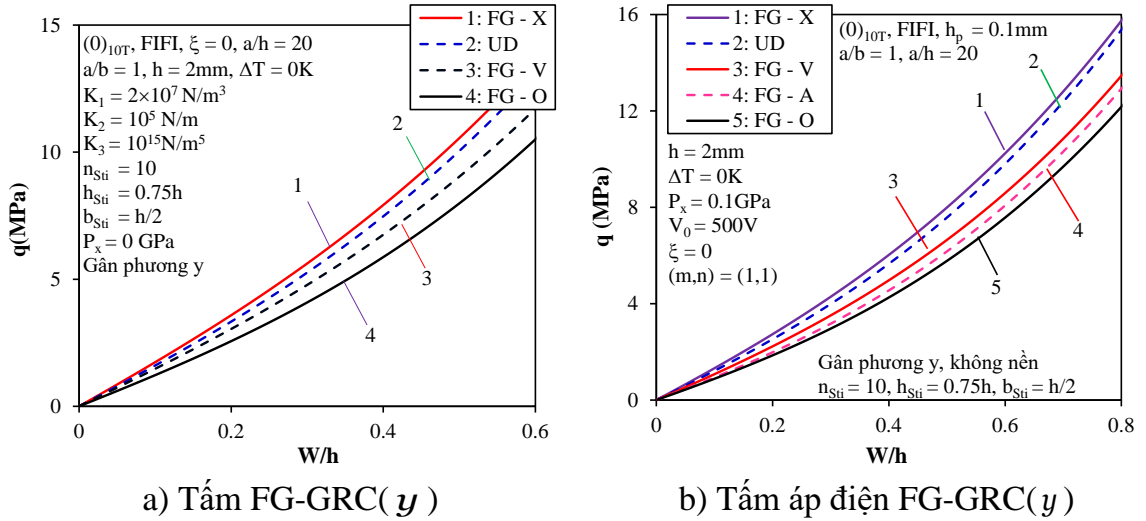
Hình 3.6. Ảnh hưởng của hệ thống gân đến đường cong $q - W/h$ của tấm FG-GRC và tấm áp điện FG-GRC

Để tiện cho việc thảo luận và diễn giải, tấm FG-GRC gia cường gân theo phương y ký hiệu là FG-GRC(y), tương tự cho tấm gia cường gân x ký hiệu là FG-GRC(x). Các hướng sắp xếp graphene và sự phân bố graphene trong quá trình khảo sát sẽ được ghi chú rõ trong bảng và các hình vẽ.

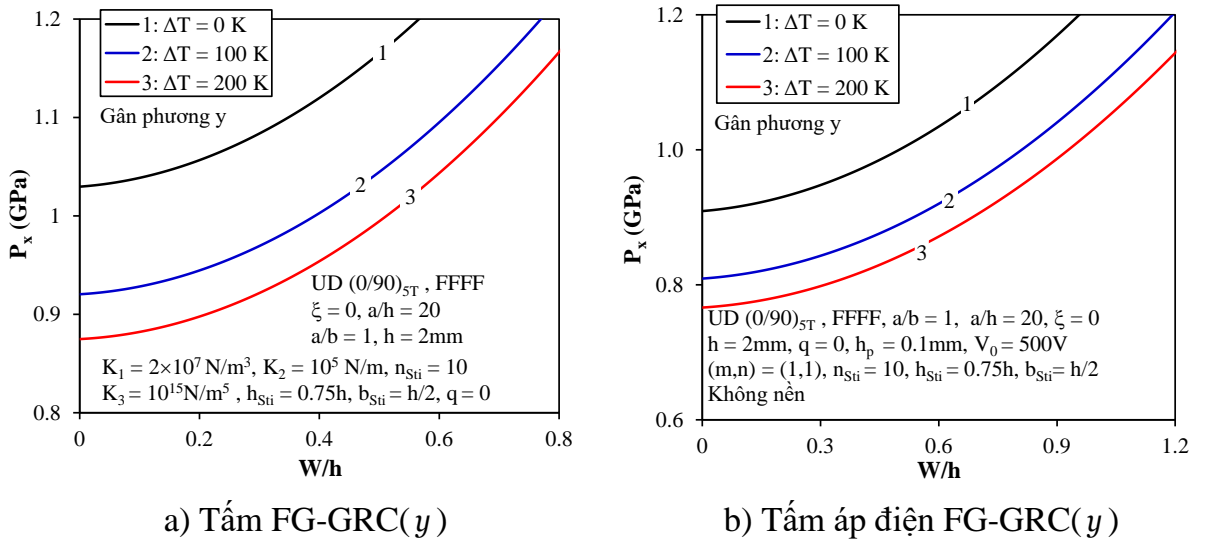
Ảnh hưởng của các kiểu phân bố graphene đến đường cong tải - độ võng $P_x - W/h$ và $q - W/h$ của tấm FG-GRC(y) và tấm áp điện FG-GRC(y) khi chịu tải nén một phương và áp lực ngoài có thể lần lượt quan sát trong Hình 3.7 và Hình 3.8. Có thể thấy xu hướng đi lên của các đường cong tải - độ võng trong trường hợp tấm có hoặc không có lớp áp điện là giống nhau, và không quan sát được hiện tượng rẽ nhánh khi tấm chịu đồng thời tải nén và tải áp lực ngoài. Tương tự như khi quan sát tải tới hạn, các đường cong tải - độ võng của tấm FG-X cao nhất trong khi các đường cong của tấm FG-O là thấp nhất.



Hình 3.7. Ảnh hưởng của các kiểu phân bố graphene đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm chịu nén một phương và áp lực ngoài



Hình 3.8. Ảnh hưởng của các kiểu phân bố graphene đến đường cong $q - W/h$ của tấm chịu nén một phương và áp lực ngoài



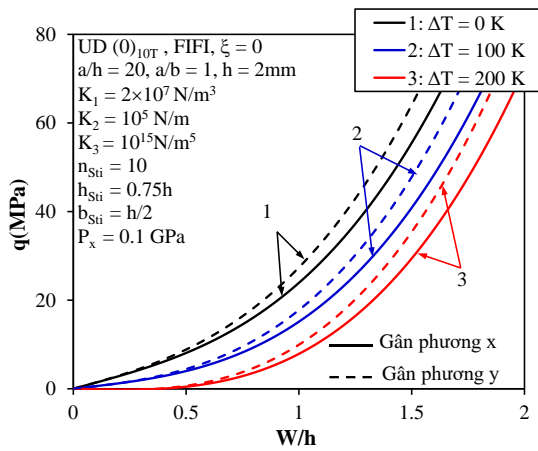
Hình 3.9. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm chịu nén một phương

Ảnh hưởng của sự gia tăng nhiệt độ môi trường đến các khả năng chịu tải và các đường cong $P_x - W/h$ của tấm FG-GRC(y) và tấm áp điện FG-GRC(y) chịu nén ở điều kiện biên FFFF được lần lượt trình bày trong Bảng 3.5 và Hình 3.9. Khi nhiệt độ tăng, quan sát thấy tải tới hạn của tấm bị giảm và các đường cong $P_x - W/h$ bị hạ thấp đáng kể. Xu hướng đi lên của các đường cong $P_x - W/h$ trong trường hợp tấm có hoặc không có nền đàn hồi, có hoặc không có lớp áp điện (xem Hình 3.9) là tương tự nhau, tuy nhiên độ cứng nền đàn hồi đã làm tăng khả năng chịu tải của tấm trong môi trường nhiệt độ cao (xem Bảng 3.5). Ở điều kiện biên FFFF, các cạnh đều tựa đơn và tự do dịch chuyển nên sự giãn nở nhiệt của tấm không gây ra độ võng trước (pre-deflection) và hiện tượng rẽ nhánh có thể quan sát được trên Hình 3.9.

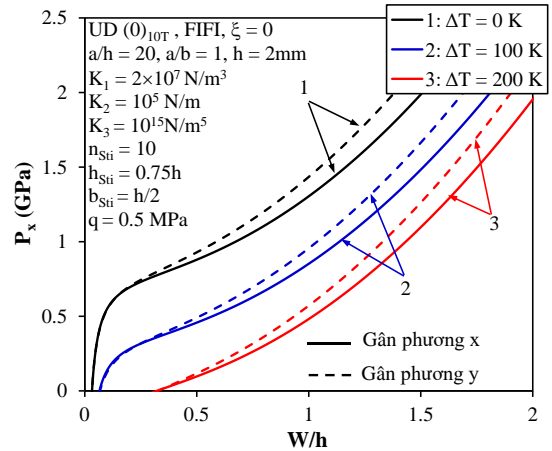
Bảng 3.5. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của tấm chịu nén một phương (FFFF, $a/b=1$, $a/h=20$, $(m;n)=(1;1)$, $q=0$, $\xi=0$)

Tấm FG-GRC(y)		Nền phi tuyến, tấm không áp điện		
		$\Delta T = 0$ K	$\Delta T = 100$ K	$\Delta T = 200$ K
FG-X	$(0)_{10T}$	1116.673	985.453	944.833
	$(0/90/0/90/0)_s$	1116.951	985.919	945.357
	$(0/90)_{5T}$	1116.439	985.862	945.114
UD	$(0)_{10T}$	1029.794	920.334	874.906
	$(0/90/0/90/0)_s$	1029.995	920.465	875.362
	$(0/90)_{5T}$	1029.713	920.291	874.805
FG-O	$(0)_{10T}$	782.857	710.577	691.142
	$(0/90/0/90/0)_s$	783.098	710.926	691.537
	$(0/90)_{5T}$	783.214	711.291	691.935

Tấm áp điện FG-GRC(y)		Không nền, tấm có lớp áp điện		
		$\Delta T = 0$ K	$\Delta T = 100$ K	$\Delta T = 200$ K
FG-X	$(0)_{10T}$	982.295	863.825	825.116
	$(0/90/0/90/0)_s$	982.390	864.004	825.328
	$(0/90)_{5T}$	981.900	863.965	825.111
UD	$(0)_{10T}$	909.509	809.303	766.553
	$(0/90/0/90/0)_s$	909.588	809.352	766.736
	$(0/90)_{5T}$	909.304	809.175	766.166
FG-O	$(0)_{10T}$	694.781	627.016	606.434
	$(0/90/0/90/0)_s$	694.854	627.106	606.548
	$(0/90)_{5T}$	694.938	627.454	606.921



Hình 3.10. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $q-W/h$ của tấm FG-GRC có gân gia cường chịu nén một phương và áp lực ngoài



Hình 3.11. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong P_x-W/h của tấm FG-GRC có gân gia cường chịu nén một phương và áp lực ngoài

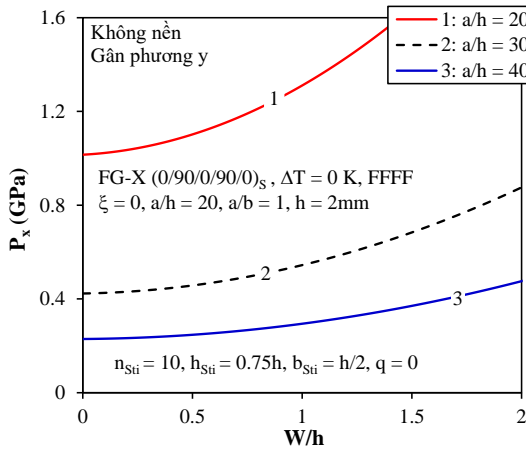
Ảnh hưởng của nhiệt độ đến các đường cong $q-W/h$ và P_x-W/h của tấm FG-GRC(y) và tấm FG-GRC(x) chịu nén và áp lực ngoài đồng thời ở điều kiện biên FIFI được thể hiện trên Hình 3.10 và Hình 3.11. Quan sát thấy các đường cong tải - độ võng bị hạ thấp khi nhiệt độ tăng và có xu hướng song song trong miền độ võng lớn. Đối với tấm ở điều kiện biên FIFI và chịu trước tải áp lực ngoài (Hình 3.11), độ võng trước (pre-deflection) tăng rất nhanh ở nhiệt độ cao, điều này là do khả năng chịu tải của vật liệu trở nên kém hơn khi nhiệt độ tăng và ứng suất nhiệt trên các cạnh cố định của tấm làm tấm chịu tải kém và mất ổn định sớm hơn.

Bảng 3.6. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của tấm chịu nén một phương (FFFF, $a/b=1$, $(m;n)=(1;1)$, $q=0$, $\xi=0$)

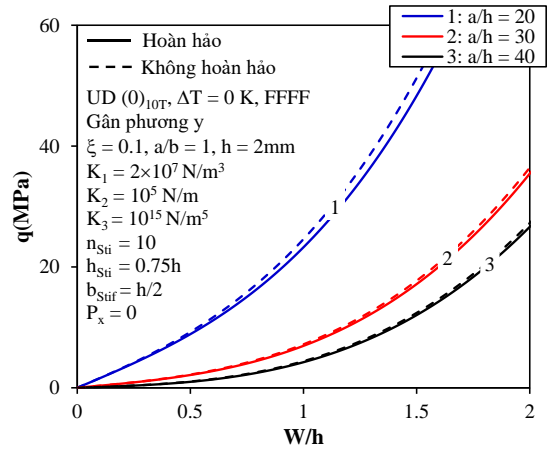
Tấm FG-GRC(y)		Nền phi tuyến, tấm không áp điện		
		$a/h=20$	$a/h=30$	$a/h=40$
FG-X	(0) ₁₀	857.851	449.252	302.831
	(0/90/0/90/0) _s	1114.746	526.744	335.849
	(0/90) _{5T}	1116.673	527.179	335.998
UD	(0) ₁₀	758.339	401.026	274.871
	(0/90/0/90/0) _s	1028.059	483.406	310.221
	(0/90) _{5T}	1029.794	483.883	310.381
FG-O	(0) ₁₀	546.615	303.562	219.364
	(0/90/0/90/0) _s	781.706	376.053	250.602
	(0/90) _{5T}	782.857	376.311	250.689
Tấm áp điện FG-GRC(y)		Không nền, tấm có lớp áp điện		
		$a/h=20$	$a/h=30$	$a/h=40$
FG-X	(0) ₁₀	632.469	288.729	163.968
	(0/90/0/90/0) _s	861.386	358.024	193.551
	(0/90) _{5T}	863.965	358.622	193.761
UD	(0) ₁₀	567.650	257.269	145.721
	(0/90/0/90/0) _s	807.137	330.491	177.144
	(0/90) _{5T}	809.175	330.948	177.299
FG-O	(0) ₁₀	413.810	186.250	105.233
	(0/90/0/90/0) _s	625.069	251.364	133.288
	(0/90) _{5T}	627.454	251.975	133.521

Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến khả năng chịu tải và các đường cong tải - độ võng P_x-W/h và $q-W/h$ của tấm FG-GRC(y) và tấm áp điện FG-GRC(y) được lần lượt trình bày lần lượt trong trong Bảng 3.6, Hình 3.12 và Hình 3.13. Kết quả khảo sát số cho thấy tỷ số a/h ảnh hưởng lớn đến khả năng chịu tải và các đường cong tải - độ võng của tấm. Quan sát thấy khả năng chịu tải của tấm bị giảm và các

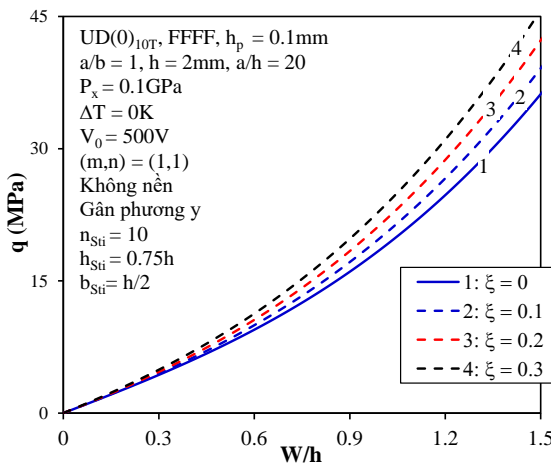
đường cong tải – độ võng bị hạ thấp đáng kể khi tỷ số a/h tăng. Điều này là do độ mảnh tăng sẽ làm cho tấm dễ mất ổn định hơn.



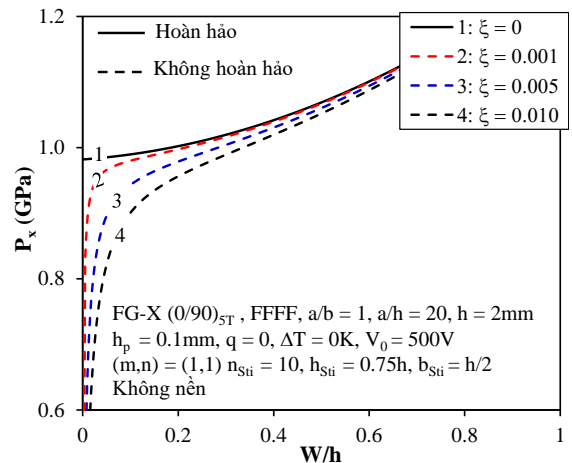
Hình 3.12. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm FG-GRC(y) chịu nén một phương



Hình 3.13. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $q - W/h$ của tấm FG-GRC(y) chịu tải áp lực ngoài



Hình 3.14. Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo đến đường cong $q - W/h$ của tấm áp điện FG-GRC(y) chịu áp lực ngoài và nén một phương

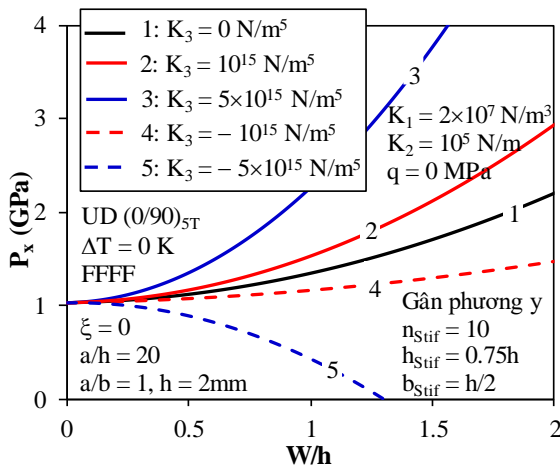


Hình 3.15. Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm áp điện FG-GRC(y) chịu tải nén một phương

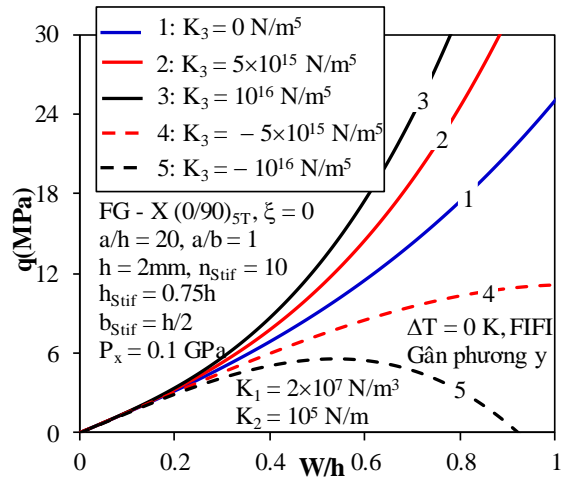
Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo đến các đường cong tải - độ võng $q - W/h$ và $P_x - W/h$ của tấm áp điện FG-GRC(y) có thể lần lượt được quan sát trên Hình 3.14 và Hình 3.15. Độ không hoàn hảo được coi gần giống như là độ võng trước của tấm nên trạng thái màng không tồn tại và không quan sát được điểm rẽ nhánh với tấm không hoàn hảo chịu nén một phương. Trong trường hợp tấm chịu nén và áp lực ngoài (Hình 3.14), không có trạng thái màng cho cả hai trường hợp tấm hoàn hảo và tấm không hoàn hảo. Các đường cong tải - độ võng của tấm không hoàn hảo có xu hướng vượt qua đường cong của tấm hoàn hảo và tách ra trong miền độ võng lớn.

Bảng 3.7. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của tấm FG-GRC(y) ((0/90)_{ST}, FFFF, $a/b=1$, $a/h=20$, $(m;n)=(1;1)$, $q=0$, $\xi=0$, $\Delta T=0$ K, $K_3=0$ N/m⁵)

K_1 (N/m ³)	K_2 (N/m)	FG-X	UD	FG-O
0	0	1014.818	928.092	681.593
2×10^7	0	1016.439	929.713	683.214
	5×10^4	1066.439	979.713	733.214
	2×10^5	1216.439	1129.713	883.214
5×10^7	0	1018.870	932.145	685.646
	5×10^4	1068.870	982.145	735.646
	2×10^5	1218.870	1132.145	885.646



Hình 3.16. Ảnh hưởng của hệ số nền K_3 đến đường cong $P_x - W/h$ của tấm FG-GRC(y) chịu nén một phương



Hình 3.17. Ảnh hưởng của hệ số nền K_3 đến đường cong $q - W/h$ của tấm FG-GRC(y) chịu nén và áp lực ngoài

Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải tới hạn của tấm FG-GRC(y) có thể quan sát trong Bảng 3.7. Rõ ràng là khả năng chịu tải và ổn định của tấm tăng lên khi các độ cứng nền đàn hồi tăng.

Quan sát trên Hình 3.16 và Hình 3.17 thấy rằng hệ số nền phi tuyến K_3 ảnh hưởng mạnh đến xu hướng của các đường cong tải - độ võng $P_x - W/h$ và $q - W/h$ mà không ảnh hưởng tới điểm rẽ nhánh của tấm, hay nói cách khác là không ảnh hưởng đến tải tới hạn của tấm chịu nén một phương, điều này là do điểm phân nhánh chỉ tương ứng với tải tới hạn tuyến tính và chỉ phụ thuộc vào hệ số nền tuyến tính K_1 và K_2 mà không phụ thuộc vào hệ số nền phi tuyến K_3 .

của panel không chênh lệch nhiều theo hướng bố trí graphene nhưng lại có sự khác biệt rõ ràng theo các kiểu gia cường graphene (như kiểu: UD, FG-X, FG-O, FG-A và FG-V).

Bảng 3.8. Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường, các kiểu bố trí graphene và hướng GRC đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của panel trụ FG-GRC (FFFF, $a/b=1$, $a=20h$, $R=0.1\text{ m}$, $\Delta T=0\text{ K}$)

Vỏ panel FG-GRC		$(0)_{10T}$	$(0/90/0/90/0)_S$	$(0/90)_{5T}$
UD	Không gân	1132.730	1132.735	1132.923
	Gân phương x ^(a)	2334.774	2331.225	2331.428
	Gân phương y ^(b)	1305.782	1303.347	1301.835
FG-X	Không gân	1225.054	1225.065	1225.394
	Gân phương x ^(a)	2358.357	2353.463	2354.648
	Gân phương y ^(b)	1389.467	1387.049	1384.129
FG-O	Không gân	913.819	913.829	913.735
	Gân phương x ^(a)	1937.087	1932.230	1931.244
	Gân phương y ^(b)	974.272	969.954	970.228
FG-V	Không gân	973.794	973.976	974.296
	Gân phương x ^(a)	2377.846	2372.953	2373.693
	Gân phương y ^(b)	1173.034	1168.950	1166.382
FG-A	Không gân	1014.785	1014.602	1014.769
	Gân phương x ^(a)	1769.637	1765.366	1765.552
	Gân phương y ^(b)	1039.823	1037.312	1035.730

^(a) Mode mất ổn định $(m;n) = (1;1)$

^(b) Mode mất ổn định $(m;n) = (2;1)$

Kết quả số cũng cho thấy hệ thống gân giúp panel chịu tải tốt hơn đặc biệt là hệ thống gân gia cường theo phương x giúp khả năng chịu tải của panel lớn nhất và mất ổn định của panel xảy ra tại mode (1,1). Gân gia cường theo phương y tuy cũng giúp panel tăng tải tới hạn nhưng hiệu quả không cao như gân gia cường theo phương x và mất ổn định của panel xảy ra tại mode (2,1). Chính vì vậy các khảo sát tiếp theo, luận án chỉ tập trung khảo sát hai loại panel trụ gia cường gân (x) chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt.

Trong trường hợp panel trụ không có gân gia cường, tải tới hạn của panel trụ FG-X là cao nhất, tải tới hạn của panel trụ FG-O là nhỏ nhất. Tuy nhiên trong trường hợp panel trụ được gia cường hệ thống gân x thì tải tới hạn của panel trụ FG-V cao nhất. Điều này cho thấy sự phân bố graphene trong hệ thống gân gia cường ảnh hưởng rất lớn đến khả năng chịu tải của panel trụ.

Bảng 3.9. Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường, các kiểu bố trí graphene và hướng GRC đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của panel trụ áp điện FG-GRC (FFFF, $a=20h$, $R=0.1m$, $\Delta T=0$)

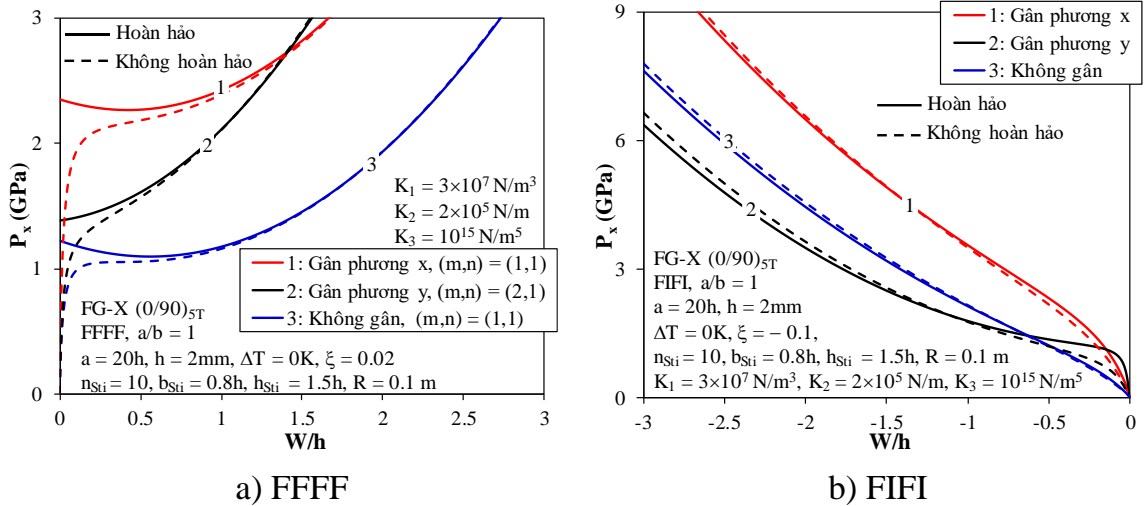
Vỏ panel trụ áp điện FG-GRC		(0) _{10T}	(0/90/0/90/0) _S	(0/90) _{5T}
UD	Không gân	1009.197	1009.261	1009.447
	Gân phương x ^(a)	2196.020	2192.969	2193.190
	Gân phương y ^(b)	1215.738	1213.556	1212.123
FG-X	Không gân	1090.194	1090.313	1090.621
	Gân phương x ^(a)	2212.189	2208.034	2209.138
	Gân phương y ^(b)	1284.542	1282.314	1279.557
FG-O	Không gân	822.528	822.615	822.550
	Gân phương x ^(a)	1837.105	1832.958	1832.109
	Gân phương y ^(b)	929.814	926.008	926.258
FG-V	Không gân	850.254	850.493	850.799
	Gân phương x ^(a)	2227.938	2223.712	2224.412
	Gân phương y ^(b)	1070.976	1067.220	1064.816
FG-A	Không gân	937.480	937.424	937.595
	Gân phương x ^(a)	1696.162	1692.563	1692.782
	Gân phương y ^(b)	1021.542	1019.439	1017.940

(a) Mode mất ổn định $(m;n) = (1;1)$

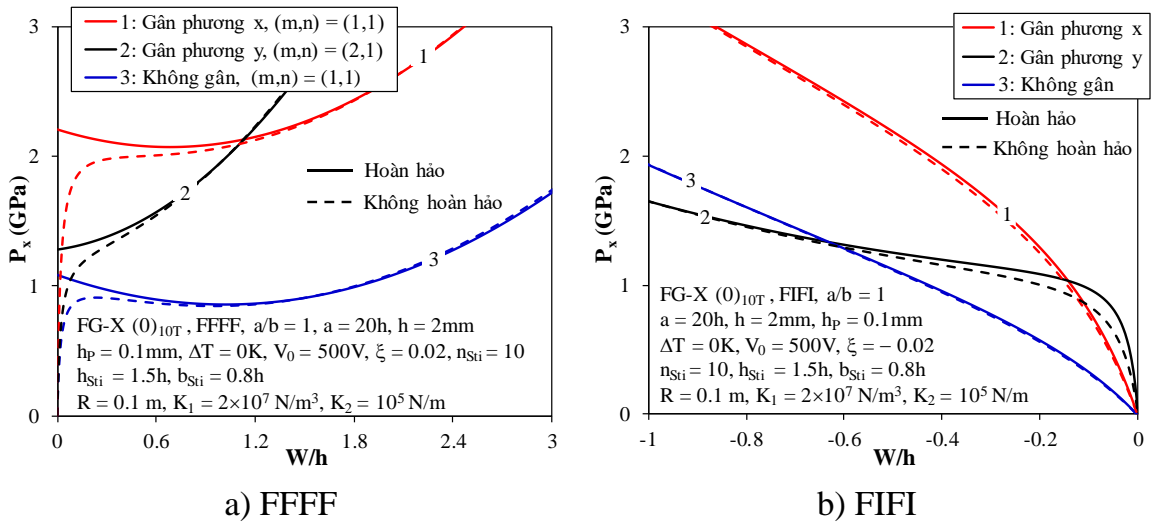
(b) Mode mất ổn định $(m;n) = (2;1)$

Ảnh hưởng của hệ thống gân gia cường đến đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của panel FG-GRC và panel áp điện FG-GRC chịu nén dọc trục ở điều kiện biên FFFF và FIFI có thể lần lượt quan sát trên Hình 3.19 và Hình 3.20.

Có thể thấy ở điều kiện biên FFFF (Hình 3.19a), các đường cong tải - độ võng sau mất ổn định $P_x - W/h$ của panel FG-GRC(x) cao hơn các đường cong tải - độ võng của panel FG-GRC(y) và panel FG-GRC không gân gia cường trong miền độ võng nhỏ. Tuy nhiên trong miền độ võng lớn, các đường cong tải - độ võng $P_x - W/h$ của panel FG-GRC(y) có xu hướng vượt qua và cao hơn đường cong tải - độ võng của panel FG-GRC(x). Hiện tượng hóp có thể quan sát rõ với panel FG-GRC không gân gia cường và panel FG-GRC(x) và dường như không xuất hiện với panel FG-GRC(y).



Hình 3.19. Ảnh hưởng của hệ thống gâi gia cường đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC chịu nén dọc trục



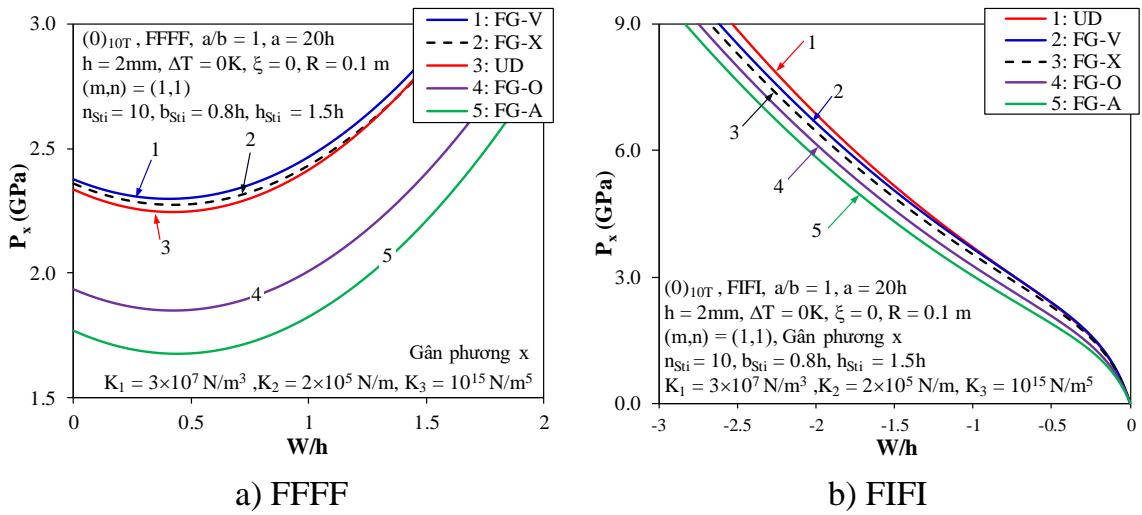
Hình 3.20. Ảnh hưởng của hệ thống gâi gia cường đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ áp điện FG-GRC chịu nén dọc trục

Ở điều kiện biên FIFI (Hình 3.19b), không quan sát thấy hiện tượng hợp và điểm rẽ nhánh của panel trong miền độ võng âm, các đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của panel FG-GRC không gâi gia cường giao cắt với các đường cong $P_x - W/h$ của panel FG-GRC có gâi gia cường trong miền độ võng lớn và đường cong $P_x - W/h$ của panel FG-GRC(x) dần cao nhất trong miền độ võng nhỏ. Các xu hướng vừa phân tích cũng phù hợp với panel áp điện FG-GRC chịu nén dọc trục (Hình 3.20).

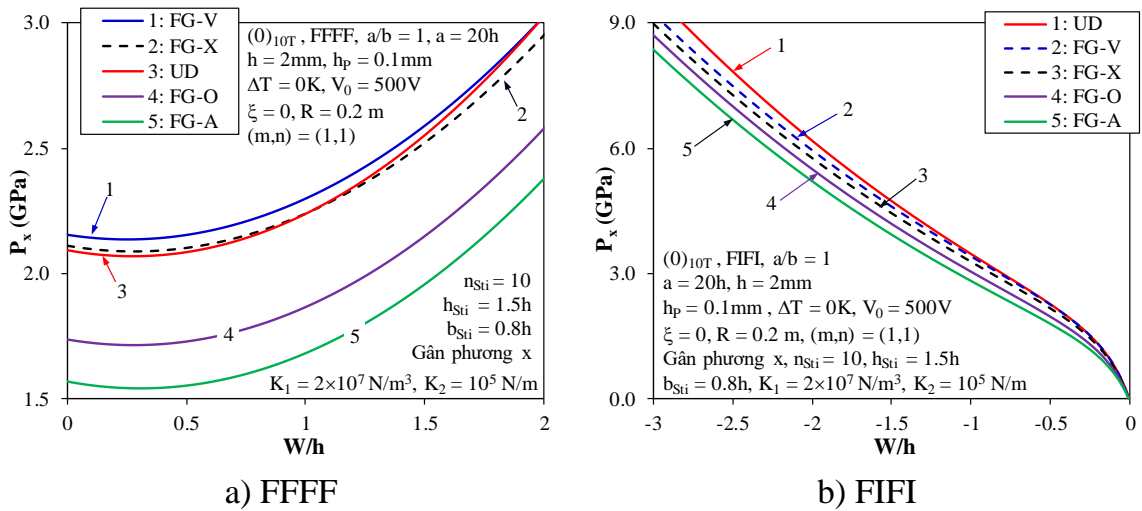
Hình 3.21 và Hình 3.22 lần lượt cho thấy ảnh hưởng của các kiểu gia cường graphene đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) và panel áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục ở điều kiện biên FFFF và FIFI.

Có thể thấy ở điều kiện biên FFFF, đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ và điểm rẽ nhánh của panel trụ FG-V(x) là cao nhất, điều này tương ứng với tải tới hạn của panel FG-V(x) sẽ lớn nhất. Ngược lại, điểm rẽ nhánh của panel trụ khi graphene phân bố theo kiểu FG-A(x) là thấp nhất nên tải tới hạn của panel FG-A(x) sẽ nhỏ nhất.

Ở điều kiện biên FIFI, đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của panel trụ UD, FG-X và FG-V dường như trùng nhau trong miền độ võng lớn (độ võng âm nhỏ), tuy nhiên trong miền độ võng nhỏ (độ võng âm lớn) các đường cong $P_x - W/h$ dần tách ra và đường cong $P_x - W/h$ của panel UD vượt qua và cao hơn các đường cong còn lại.



Hình 3.21. Ảnh hưởng của các kiểu gia cường graphene đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục



Hình 3.22. Ảnh hưởng của các kiểu gia cường graphene đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục

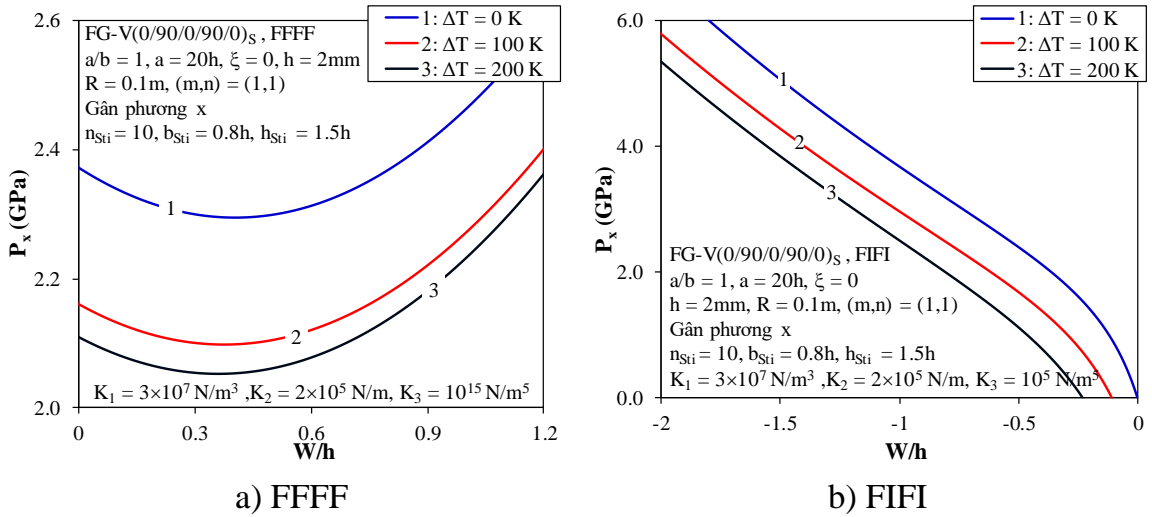
Bảng 3.10. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1$, $a=20h$, $(m;n)=(1;1)$, $R=0.1m$)

Panel trụ FG-GRC(x)		$\Delta T = 0$ K	$\Delta T = 100$ K	$\Delta T = 200$ K
FG-X	$(0)_{10}$	2358.357	2108.205	2038.206
	$(0/90/0/90/0)_S$	2353.463	2101.285	2030.875
	$(0/90)_{5T}$	2354.648	2101.825	2031.875
UD	$(0)_{10}$	2334.774	2092.308	2012.071
	$(0/90/0/90/0)_S$	2331.225	2090.109	2005.084
	$(0/90)_{5T}$	2331.428	2090.241	2005.512
FG-O	$(0)_{10}$	1937.087	1753.929	1707.515
	$(0/90/0/90/0)_S$	1932.230	1747.140	1700.320
	$(0/90)_{5T}$	1931.244	1746.234	1699.124

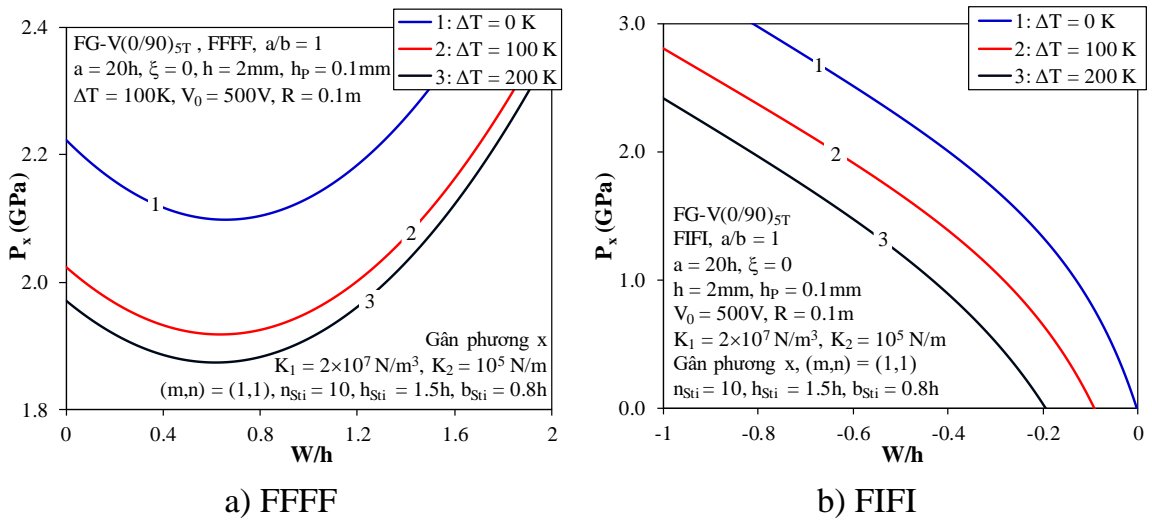
Bảng 3.11. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1$, $a=20h$, $R=0.1m$, $\Delta T=0$, $(m;n)=(1;1)$)

Panel trụ áp điện FG-GRC(x)		$\Delta T = 0$ K	$\Delta T = 100$ K	$\Delta T = 200$ K
FG-X	$(0)_{10T}$	2212.189	1976.228	1905.910
	$(0/90/0/90/0)_S$	2208.034	1970.396	1899.720
	$(0/90)_{5T}$	2209.138	1970.861	1900.609
UD	$(0)_{10T}$	2196.020	1965.980	1886.298
	$(0/90/0/90/0)_S$	2192.969	1964.104	1880.336
	$(0/90)_{5T}$	2193.190	1964.251	1880.806
FG-O	$(0)_{10T}$	1837.105	1660.392	1610.806
	$(0/90/0/90/0)_S$	1832.958	1654.659	1604.715
	$(0/90)_{5T}$	1832.109	1653.826	1603.634

Ảnh hưởng của nhiệt độ đến tải tới hạn của panel FG-GRC(x) và panel áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục ở điều kiện biên FFFF được trình bày trong Bảng 3.10 và Bảng 3.11. Có thể thấy khi nhiệt độ tăng sẽ làm tăng hệ số giãn nở nhiệt và làm giảm tải tới hạn của các panel. Ảnh hưởng của nhiệt độ môi trường đến đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) và panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục ở điều kiện biên FFFF và FIFI được lần lượt trình bày trên Hình 3.23 và Hình 3.24. Khi nhiệt độ tăng, các đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ (trên Hình 3.23 và Hình 3.24) bị hạ thấp đáng kể và hiện tượng hóp quan sát rất rõ ở điều kiện biên FFFF. Ở điều kiện biên FIFI, panel bị võng ngay khi chịu tải và không có điểm rẽ nhánh, và khi nhiệt độ tăng cao sẽ thấy panel bị võng trước khi chịu tải nén dọc trục và từ đó làm giảm khả năng chịu tải của panel.



Hình 3.23. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục

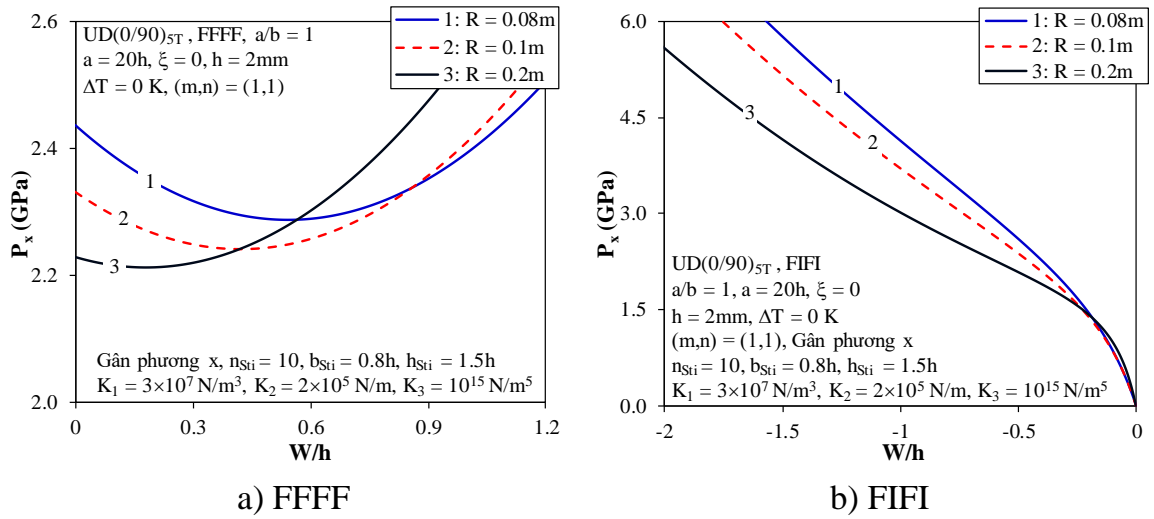


Hình 3.24. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục

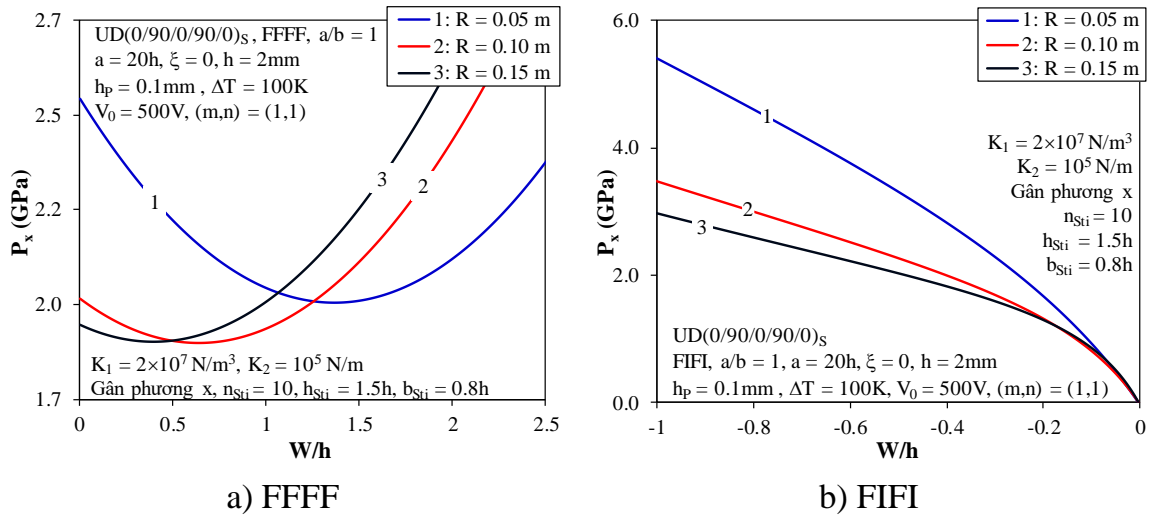
Bảng 3.12. Ảnh hưởng của bán kính R đến tải tới hạn của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1$, $a=20h$, $(m;n)=(1;1)$, $\Delta T=0$ K)

Panel trụ FG-GRC(x)		$R=0.08$ m	$R=0.1$ m	$R=0.2$ m
UD	$(0)_{10T}$	2460.997	2358.357	2256.934
	$(0/90/0/90/0)_s$	2455.658	2353.463	2253.035
	$(0/90)_{5T}$	2456.818	2354.648	2254.283
FG-X	$(0)_{10T}$	2440.004	2334.774	2230.658
	$(0/90/0/90/0)_s$	2436.144	2331.225	2227.798
	$(0/90)_{5T}$	2436.292	2331.428	2228.127
FG-V	$(0)_{10T}$	2466.249	2377.846	2304.897
	$(0/90/0/90/0)_s$	2460.859	2372.953	2301.098
	$(0/90)_{5T}$	2461.543	2373.693	2301.968

Ảnh hưởng của bán kính cong R đến tải tới hạn của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục được thể hiện trong Bảng 3.12. Có thể thấy bán kính cong càng lớn càng làm giảm tải tới hạn của panel và làm panel dễ bị mất ổn định.



Hình 3.25. Ảnh hưởng của bán kính cong đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục



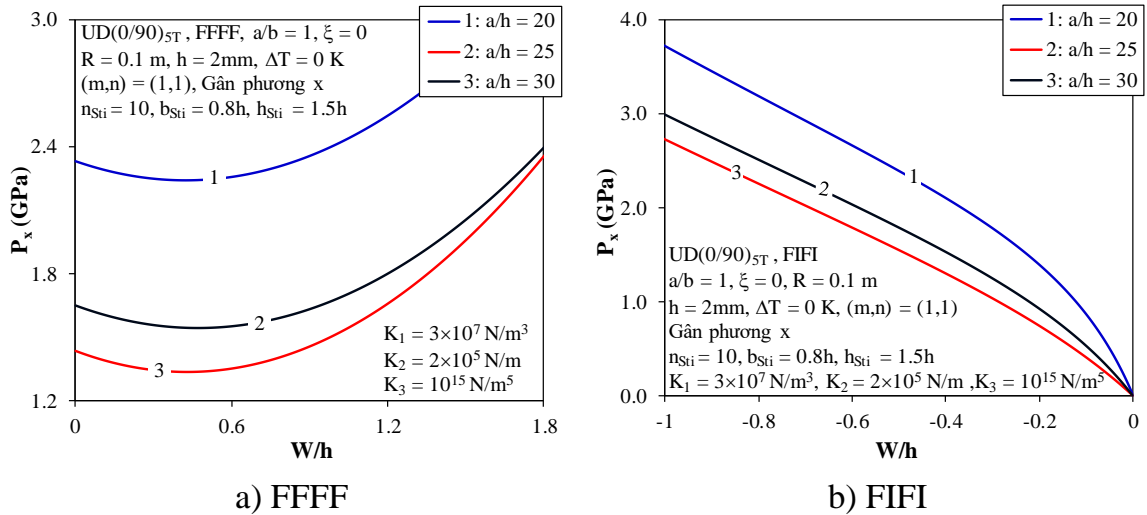
Hình 3.26. Ảnh hưởng của bán kính cong đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục

Ảnh hưởng của bán kính cong R đến đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) và panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục ở điều kiện biên FFFF và FIFI được thể hiện trên Hình 3.25 và Hình 3.26. Tương tự như các số liệu khảo sát trong Bảng 3.12 khi bán kính cong tăng lên điểm rẽ nhánh bị hạ thấp tương ứng với tải tới hạn của panel bị giảm.

Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải tới hạn của panel trụ FG-GRC(x) và panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục lần lượt được trình bày trong Bảng 3.13 và Bảng 3.14.

Bảng 3.13. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của panel FG-GRC(x) chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1$, $(m;n)=(1;1)$ $\Delta T=0$ K)

Panel trụ FG-GRC(x)		$a/h=20$	$a/h=25$	$a/h=30$
UD	$(0)_{10T}$	2358.357	1670.953	1446.843
	$(0/90/0/90/0)_S$	2353.463	1667.877	1444.702
	$(0/90)_{5T}$	2354.648	1668.586	1445.192
FG-X	$(0)_{10T}$	2334.774	1653.375	1437.725
	$(0/90/0/90/0)_S$	2331.225	1651.161	1436.185
	$(0/90)_{5T}$	2331.428	1651.267	1436.255
FG-V	$(0)_{10T}$	2377.846	1639.616	1397.921
	$(0/90/0/90/0)_S$	2372.953	1636.548	1395.781
	$(0/90)_{5T}$	2373.693	1636.982	1396.081

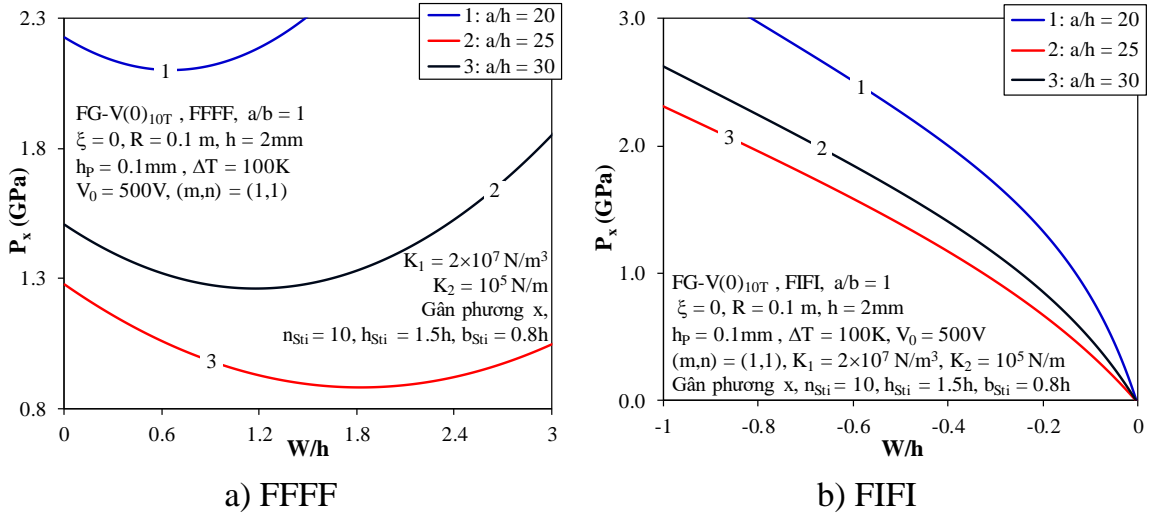


Hình 3.27. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục

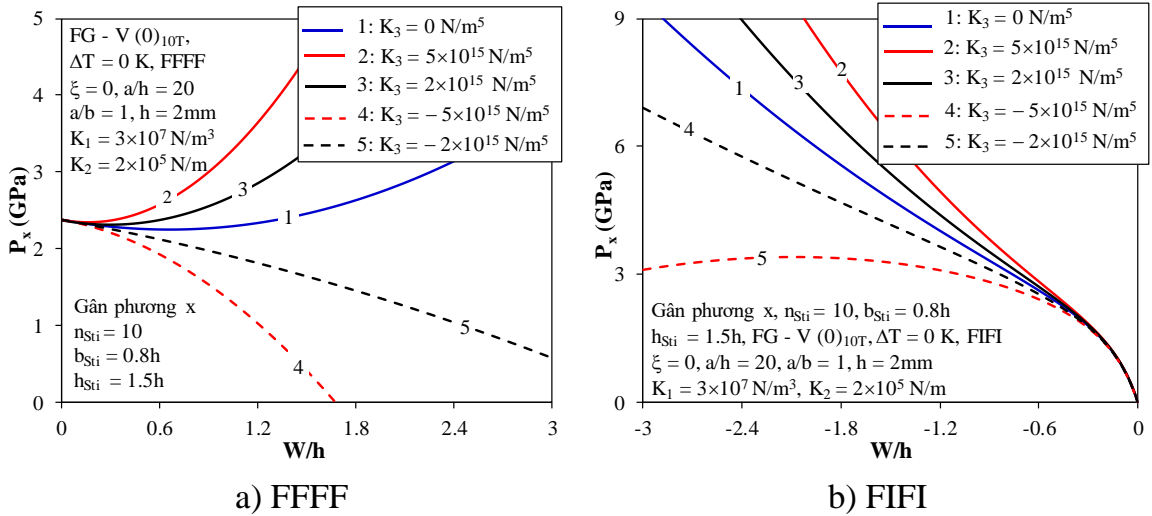
Bảng 3.14. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1$, $(m;n)=(1;1)$, $\Delta T=0$ K)

Panel trụ áp điện FG-GRC(x)		$a/h=20$	$a/h=25$	$a/h=30$
UD	$(0)_{10T}$	2212.189	1539.186	1322.260
	$(0/90/0/90/0)_S$	2208.034	1536.570	1320.445
	$(0/90)_{5T}$	2209.138	1537.229	1320.901
FG-X	$(0)_{10T}$	2196.020	1526.178	1315.745
	$(0/90/0/90/0)_S$	2192.969	1524.265	1314.413
	$(0/90)_{5T}$	2193.190	1524.384	1314.494
FG-V	$(0)_{10T}$	2227.938	1508.575	1275.798
	$(0/90/0/90/0)_S$	2223.712	1505.911	1273.937
	$(0/90)_{5T}$	2224.412	1506.322	1274.222

Kết quả số (trong Bảng 3.13 và Bảng 3.14) chứng minh rằng khi tỷ số a/h càng tăng (tức là độ mảnh của panel càng lớn) thì tải tới hạn của panel càng giảm và các đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ càng bị hạ thấp như quan sát trên Hình 3.27 và Hình 3.28.



Hình 3.28. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ áp điện FG-GRC(x) chịu nén dọc trục



Hình 3.29. Ảnh hưởng của hệ số nền phi tuyến K_3 đến đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục

Ảnh hưởng độ cứng nền phi tuyến K_3 đến đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của panel trụ FG-GRC(x) chịu nén dọc trục ở điều kiện biên FFFF và FIFI được trình bày trong Hình 3.29. Rõ ràng độ cứng nền phi tuyến ảnh hưởng đáng kể và làm thay đổi xu hướng đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ nhưng không ảnh hưởng đến tải rẽ nhánh của panel trụ (xem Hình 3.29a).

3.6. Kết luận chương 3

Trong chương này, luận án đã sử dụng HSĐT cùng với kỹ thuật san gân cải tiến dành cho gân FG-GRC biến dạng trượt bậc cao để thiết lập các phương trình chủ đạo. Phương pháp Galerkin được sử dụng để tìm tải tới hạn và khảo sát ổn định phi tuyến của các kết cấu sau:

1. Panel trụ áp điện FG-GRC có gân gia cường trên nền đàn hồi tuyến tính chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt.
2. Panel trụ FG-GRC có gân gia cường trên nền đàn hồi phi tuyến chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt.
3. Tấm chữ nhật áp điện FG-GRC có gân gia cường chịu nén một phương và áp lực ngoài.
4. Tấm chữ nhật FG-GRC có gân gia cường trên nền đàn hồi phi tuyến chịu nén một phương và áp lực ngoài.

Điểm mới quan trọng trong chương này là kỹ thuật san tác dụng gân cải tiến dành cho gân FG-GRC biến dạng trượt bậc cao được phát triển dựa trên ý tưởng san tác dụng gân của Lekhnitskii và lý thuyết dầm biến dạng trượt bậc cao dị hướng.

Từ các kết quả phân tích bên trên, luận án đưa ra một số nhận xét tổng hợp như sau:

1. Hệ thống gân gia cường giúp tăng độ cứng của tấm chữ nhật và panel trụ FG-GRC, từ đó tải tới hạn của tấm và panel được tăng đáng kể.
2. Hiện tượng phân nhánh quan sát được trong trường hợp tấm và panel FG-GRC hoàn hảo chỉ chịu nén dọc trục mà không chịu đồng thời áp lực ngoài. Điều này là do áp lực ngoài gây ra độ võng trước dẫn đến trạng thái màng không tồn tại khi tải trọng nén dọc trục tác dụng.
3. Độ cứng nền phi tuyến K_3 không làm thay đổi tải rẽ nhánh của tấm và panel trụ FG-GRC, tuy nhiên lại ảnh hưởng lớn đến xu hướng đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$.
4. Nhiệt độ tăng hoặc độ mảnh tăng lên sẽ làm giảm tải tới hạn và ảnh hưởng lớn đến khả năng chịu tải sau mất ổn định của tấm và panel trụ FG-GRC.

CHƯƠNG 4. ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI PHI TUYẾN CỦA PANEL PARABOL VÀ PANEL HÌNH SIN FG – GRC THEO HSDT

Chương này luận án trình bày nghiên cứu hai loại panel là panel Parabol và panel hình Sin (panel có phương trình đường cong là Parabol và panel có phương trình đường cong nửa chu kỳ hình Sin) chịu áp lực ngoài, chịu tải nén dọc trục trong môi trường nhiệt.

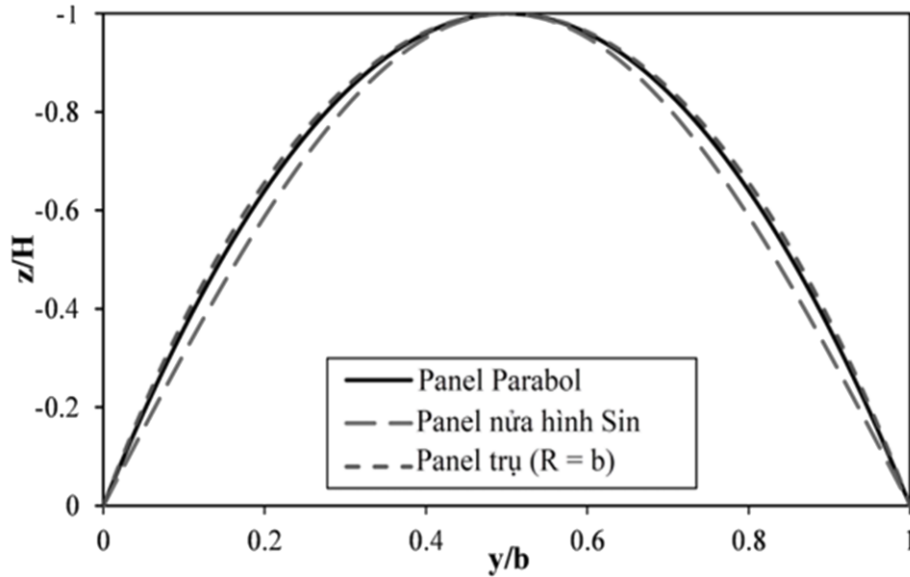
Không giống như panel trụ tròn (bán kính là một hằng số), hai loại panel Parabol và panel hình Sin có bán kính cong là một hàm phức tạp được tính thông qua phương trình Parabol và phương trình nửa chu kỳ hình Sin. Vì vậy không thể dùng phương pháp thông thường để xác định hàm ứng suất như trong Chương 3. Thay vào đó, luận án đề xuất một kỹ thuật để xác định hàm ứng suất theo nghĩa trung bình cho panel Parabol và panel Sin, đây cũng là điểm mới quan trọng của chương này.

Các bài toán được xây dựng theo HSDT có xét tính phi tuyến hình học của von Kármán. Các dạng nghiệm độ võng và góc xoay được lựa chọn để có thể thỏa mãn các điều kiện biên, đồng thời sử dụng phương pháp Galerkin để tìm được các liên hệ của tải và độ võng, từ đó các tải tới hạn của panel nếu có sẽ được xác định. Các kết quả số được so sánh với panel trụ để đánh giá tải tới hạn và khả năng chịu tải sau mất ổn định của các dạng panel có độ cong phức tạp.

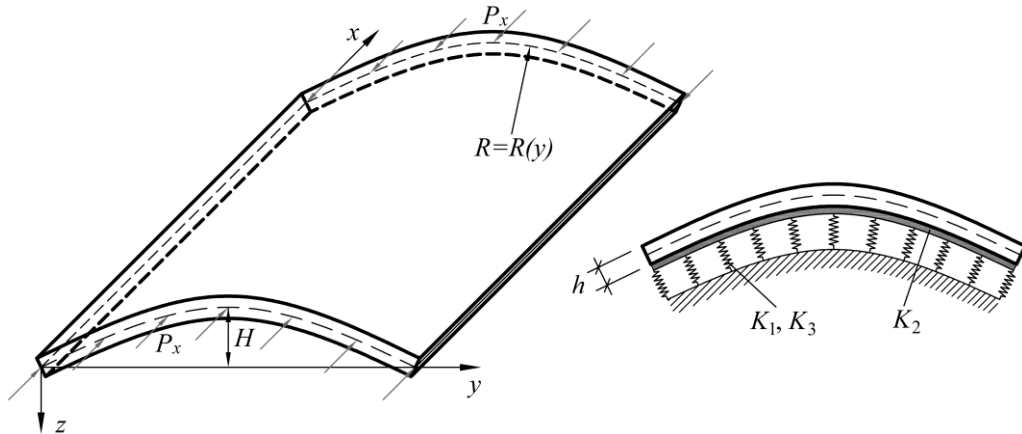
Nội dung chương này đã được tác giả công bố trong 02 bài báo, trong đó 01 bài báo trong nước và 01 bài báo trên tạp chí quốc tế đó là các công trình 11 và 12 trong danh mục các công trình khoa học liên quan đến luận án.

4.1. Mô hình panel Parabol, panel hình Sin và panel trụ trên nền đàn hồi phi tuyến

Xét panel trụ, panel Parabol và panel hình Sin FG-GRC (trên Hình 4.1) có bề dày h trên nền đàn hồi phi tuyến với hệ tọa độ (x, y, z) có gốc nằm ở mặt giữa ở góc panel, trục x theo hướng chiều dài, trục y theo hướng cạnh cong và trục z vuông góc với mặt giữa hướng vào trong panel như Hình 4.2. Lần lượt gọi R là bán kính cong theo phương y , chiều dài các cạnh trong mặt phẳng chiếu là a và b .



Hình 4.1. Mô hình panel trụ, panel Parabol và panel hình Sin FG-GRC



Hình 4.2. Hệ tọa độ của panel FG-GRC trên nền đàn hồi phi tuyến chịu nén dọc trục

Ba loại panel FG-GRC (panel trụ, panel Parabol và panel hình Sin) được chế tạo từ 10 lớp GRC với ba hướng bố trí graphene được xem xét trong luận án là $(0)_{10T}$, $(0/90/0/90/0)_S$, và $(0/90)_{5T}$. Tỷ phần thể tích graphene trong các lớp có thể phân bố đều theo kiểu UD hoặc thay đổi trơn và liên tục theo chiều dày panel tương ứng với các kiểu phân bố FG-X, FG-V, FG-A và FG-O. Tỷ phần thể tích của graphene tương ứng với các kiểu phân bố này đã được trình bày trong Bảng 1.2 và Hình 1.3.

4.2. Các phương trình cơ bản

Phương trình của panel parabol và panel hình sin lần lượt có dạng

$$z_P(y) = \frac{4H}{b^2}y^2 - \frac{4H}{b}y, \quad z_S(y) = -H \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad (4.1)$$

trong đó H là độ nâng của panel

Từ phương trình (4.1) bán kính cong của vỏ panel parabol và panel hình sin xác định được là

$$R_1 = \frac{\left(b^4 + 16H^2(b-2y)^2\right)^{3/2}}{8b^4H}, \quad R_2 = \frac{\left(H^2\pi^2\left(\cos(y\pi/b)\right)^2 + b^2\right)^{3/2}}{bH\pi^2 \sin(y\pi/b)}. \quad (4.2)$$

Tương tự như trong Chương 3, dựa trên HSĐT, các thành phần chuyển vị và biến dạng của một điểm bất kỳ thuộc của panel cách mặt trung bình một khoảng z , mối liên hệ giữa ứng suất và biến dạng, các biểu thức của lực giãn, mômen, lực cắt, hệ phương trình cân bằng và phương trình tương thích biến dạng được xác định như trong các phương trình (3.1) đến (3.34).

Có thể thấy rằng trong trường hợp này, bán kính cong của panel Parabol và panel hình Sin là một hàm phức tạp theo y , dẫn tới việc xác định hàm ứng suất một cách tương tự như trong Chương 3 gặp rất nhiều khó khăn về mặt toán học. Vì vậy luận án đề xuất một cách xác định hàm ứng suất theo nghĩa trung bình. Dạng hàm ứng suất được lựa chọn tương tự (3.36) bao gồm các thành phần tuyến tính và phi tuyến có dạng như sau

$$f = f_{1(c,p,s)} \cos 2\alpha x + f_{2(c,p,s)} \cos 2\beta y + f_{3(c,p,s)} \sin \alpha x \sin \beta y + \frac{1}{2}N_{y0}x^2 + \frac{1}{2}N_{x0}y^2, \quad (4.3)$$

với các ký hiệu phía dưới c, p và s lần lượt tương ứng cho vỏ panel trụ, panel parabol và panel hình Sin.

Để tìm được hàm ứng suất theo nghĩa trung bình cho panel Parabol và panel Sin, ta thay các dạng nghiệm của độ võng và góc xoay ở phương trình (3.35) vào phương trình (3.34) và áp dụng phương pháp Galerkin như sau

$$\int_0^a \int_0^b \psi \cdot \cos 2\alpha x \, dy dx = 0, \quad \int_0^a \int_0^b \psi \cdot \cos 2\beta y \, dy dx = 0, \quad \int_0^a \int_0^b \psi \cdot \sin \alpha x \sin \beta y \, dy dx = 0, \quad (4.4)$$

trong đó ψ là biểu thức xác định như phương trình (3.34).

Giải hệ phương trình (4.4) tìm được các biểu thức sau

$$\begin{aligned}
f_{1(c,p,s)} &= \frac{W(W+2\xi h)\beta^2}{32\alpha^2 A_{11}^*} + e_{1(c,p,s)}W, \\
f_{2(c,p,s)} &= \frac{W(W+2\xi h)\alpha^2}{32\beta^2 A_{22}^*} + e_{2(c,p,s)}W, \\
f_{3(c,p,s)} &= e_{3(c,p,s)}\Phi_x + e_{4(c,p,s)}\Phi_y + e_{5(c,p,s)}W,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

trong đó $e_{i(c,p,s)}$ ($i=1 \rightarrow 5$) được xác định trong phụ lục C1.

Lưu ý rằng, trong trường hợp panel trụ, kỹ thuật xác định hàm ứng suất này dẫn tới kết quả hàm ứng suất chính xác như trong Chương 3.

Thay các biểu thức (4.3) và (4.5) vào trong các phương trình (3.31), (3.32) và (3.33) và áp dụng phương pháp Galerkin ta thu được

$$\begin{aligned}
&x_{1(c,p,s)}(h\xi+W)N_{x0} + x_{2(c,p,s)}(h\xi+W)N_{y0} + x_{3(c,p,s)}\Phi_x + x_{4(c,p,s)}\Phi_y \\
&+ x_{7(c,p,s)}W^3 + x_{5(c,p,s)}\Phi_x(h\xi+W) + x_{6(c,p,s)}\Phi_y(h\xi+W) \\
&+ x_{8(c,p,s)}(h\xi+W)(2h\xi+W)W + x_{9(c,p,s)}(2h\xi+W)W \\
&+ x_{10(c,p,s)}(h\xi+W)W + x_{11(c,p,s)}N_{y0} + x_{12(c,p,s)}W + x_{13(c,p,s)}q = 0, \\
&b_{1(c,p,s)}\Phi_x + b_{2(c,p,s)}\Phi_y + b_{3(c,p,s)}(2h\xi+W)W + b_{4(c,p,s)}W = 0, \\
&b_{5(c,p,s)}\Phi_x + b_{6(c,p,s)}\Phi_y + b_{7(c,p,s)}(2h\xi+W)W + b_{8(c,p,s)}W = 0,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

trong đó $x_{i(c,p,s)}$ ($i=1 \rightarrow 13$) và $b_{j(c,p,s)}$ ($j=1 \rightarrow 8$) xác định trong phụ lục C2.

Các biểu thức Φ_x, Φ_y xác định từ hai phương trình cuối của (4.6) như sau

$$\begin{aligned}
\Phi_x &= c_{1(c,p,s)}W(2h\xi+W) + c_{2(c,p,s)}W, \\
\Phi_y &= c_{3(c,p,s)}W(2h\xi+W) + c_{4(c,p,s)}W,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
c_{1(c,p,s)} &= \frac{b_{2(c,p,s)}b_{7(c,p,s)} - b_{3(c,p,s)}b_{6(c,p,s)}}{b_{1(c,p,s)}b_{6(c,p,s)} - b_{2(c,p,s)}b_{5(c,p,s)}}, \\
c_{2(c,p,s)} &= \frac{b_{2(c,p,s)}b_{8(c,p,s)} - b_{4(c,p,s)}b_{6(c,p,s)}}{b_{1(c,p,s)}b_{6(c,p,s)} - b_{2(c,p,s)}b_{5(c,p,s)}}, \\
c_{3(c,p,s)} &= -\frac{b_{1(c,p,s)}b_{7(c,p,s)} - b_{3(c,p,s)}b_{5(c,p,s)}}{b_{1(c,p,s)}b_{6(c,p,s)} - b_{2(c,p,s)}b_{5(c,p,s)}}, \\
c_{4(c,p,s)} &= -\frac{b_{1(c,p,s)}b_{8(c,p,s)} - b_{4(c,p,s)}b_{5(c,p,s)}}{b_{1(c,p,s)}b_{6(c,p,s)} - b_{2(c,p,s)}b_{5(c,p,s)}}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.3. Các bài toán

4.3.1. Panel chịu nén dọc trục

Trường hợp panel chỉ chịu nén dọc trục thì áp lực ngoài $q = 0$. Lực nén dọc trục P_x đặt trên hai cạnh $x = 0, x = a$ nên $N_{x0} = -hP_x$, Thay $N_{x0} = -hP_x$ vào trong phương trình (3.46), ta tìm được biểu thức N_{y0} như sau

$$N_{y0} = z_{1(c,p,s)}P_x + z_{3(c,p,s)}W + z_{2(c,p,s)}W(2h\xi + W) - \varphi_{1y} + z_{4(c,p,s)}\varphi_{1x}, \quad (4.9)$$

trong đó các hệ số $z_{i(c,p,s)}$ ($i = 1 \rightarrow 4$) xác định trong phụ lục C2

Thay $N_{x0} = -hP_x$ và các phương trình (4.7), (4.9) vào phương trình đầu của (4.6) ta thu được phương trình

$$P_x = \frac{\left(z_{5(c,p,s)}(2\xi + \bar{W})\bar{W} + z_{6(c,p,s)}(2\xi + \bar{W})\bar{W}(\xi + \bar{W}) \right. \\ \left. + \mu_2 \left(z_{4(c,p,s)}\varphi_{1x} - \varphi_{1y} \right) \left((\xi + \bar{W})x_{2(c,p,s)} + \frac{x_{11(c,p,s)}}{h} \right) \right) + \\ \left(x_{7(c,p,s)}\bar{W}^3h^2 + z_{8(c,p,s)}\bar{W} + z_{7(c,p,s)}\bar{W}(\xi + \bar{W}) \right)}{\left(\mu_2 x_{2(c,p,s)}z_{1(c,p,s)} - hx_{1(c,p,s)} \right) (\xi + \bar{W}_n) + \frac{\mu_2 x_{11(c,p,s)}z_{1(c,p,s)}}{h}}, \quad (4.10)$$

trong đó hệ số $\mu_2 = 0$ với điều kiện biên FFFF và $\mu_2 = 1$ với điều kiện biên FIFI, và

$$\begin{aligned} \bar{W} &= W/h, \quad z_{5(c,p,s)} = h(\mu_2 x_{11(c,p,s)}z_{2(c,p,s)} + c_{7(c,p,s)}), \\ z_{6(c,p,s)} &= h^2(\mu_2 x_{2(c,p,s)}z_{2(c,p,s)} + c_{6(c,p,s)}), \\ z_{7(a,b,c)} &= h(\mu_2 x_{2(c,p,s)}z_{3(c,p,s)} + c_{5(c,p,s)}), \\ z_{8(c,p,s)} &= (\mu_2 x_{11(c,p,s)}z_{3(c,p,s)} + c_{8(c,p,s)}). \end{aligned}$$

Tải tới hạn của panel hoàn hảo ($\xi = 0$) với điều kiện biên FFFF có thể nhận được từ phương trình (4.10) khi $\bar{W} \rightarrow 0$, ta có

$$P_{cr}^{cylin} = -\frac{c_{8c}}{hx_{1c}}, \quad P_{cr}^{Para} = -\frac{c_{8p}}{hx_{1p}}, \quad P_{cr}^{Haft-Sin} = -\frac{c_{8s}}{hx_{1s}}. \quad (4.11)$$

Phương trình (4.11) là phương trình xác định tải tới hạn của vỏ panel trụ, panel parabol và panel sin.

4.3.2. Panel chịu áp lực ngoài

Thay phương trình (4.7) vào phương trình đầu tiên (4.6) ta thu được biểu thức liên hệ giữa tải và độ võng như sau

$$\begin{aligned}
& \bar{W}^3 h^2 x_{7(c,p,s)} + \mu_1 N_{x0} (\xi + \bar{W}) x_{1(c,p,s)} + \bar{W} (\xi + \bar{W}) h c_{5(c,p,s)} \\
& + (2\xi + \bar{W}) \bar{W} (\xi + \bar{W}) h^2 c_{6(c,p,s)} + \bar{W} c_{8(c,p,s)} + (2\xi + \bar{W}) \bar{W} c_{7(c,p,s)} \quad (4.12) \\
& + \mu_2 N_{y0} (\xi + \bar{W}) x_{2(c,p,s)} + \frac{\mu_2 N_{y0} x_{11(c,p,s)}}{h} + q \frac{x_{13(c,p,s)}}{h} = 0,
\end{aligned}$$

trong đó các hệ số μ_1 và μ_2 được thêm vào phương trình để xét điều kiện biên cho panel chịu áp lực ngoài. $\mu_1 = 0$ và $\mu_2 = 0$ tương ứng với điều kiện biên 1 (FFFF), $\mu_1 = 0$ và $\mu_2 = 1$ tương ứng với điều kiện biên 2 (FIFI), $\mu_1 = 1$ và $\mu_2 = 1$ tương ứng với điều kiện biên 3 (III), và

$$\begin{aligned}
c_{5(c,p,s)} &= c_{2(c,p,s)} x_{5(c,p,s)} + c_{4(c,p,s)} x_{6(c,p,s)} + x_{10(c,p,s)}, \\
c_{6(c,p,s)} &= c_{1(c,p,s)} x_{5(c,p,s)} + c_{3(c,p,s)} x_{6(c,p,s)} + x_{9(c,p,s)}, \\
c_{7(c,p,s)} &= c_{1(c,p,s)} x_{3(c,p,s)} + c_{3(c,p,s)} x_{4(c,p,s)} + x_{9(c,p,s)}, \\
c_{8(c,p,s)} &= c_{2(c,p,s)} x_{3(c,p,s)} + c_{4(c,p,s)} x_{4(c,p,s)} + x_{12(c,p,s)}.
\end{aligned} \quad (4.13)$$

Từ biểu thức (3.45) và (3.46), tương tự như trong chương 3 ta thu được các biểu thức sau

$$\begin{aligned}
N_{x0} &= t_{1(c,p,s)} \Phi_x + t_{2(c,p,s)} \Phi_y + t_{3(c,p,s)} W (W + 2t\xi) + t_{4(c,p,s)} W, \\
N_{y0} &= t_{5(c,p,s)} \Phi_x + t_{6(c,p,s)} \Phi_y + t_{7(c,p,s)} W (W + 2t\xi) + t_{8(c,p,s)} W,
\end{aligned} \quad (4.14)$$

trong đó các hệ số $t_{i(c,p,s)}$ ($i = 1 \rightarrow 8$) xác định trong phụ lục C2

Thay phương trình (4.14) vào phương trình (4.12) ta thu được biểu thức liên hệ giữa tải áp lực ngoài với độ võng như sau

$$q = \frac{-h \left(\begin{aligned} & \bar{W}^3 h^2 x_{7(c,p,s)} + q_{2(c,p,s)} \bar{W} (\xi + \bar{W}) + q_{1(c,p,s)} (2\xi + \bar{W}) \bar{W} (\xi + \bar{W}) \\ & + \bar{W} c_{8(c,p,s)} + q_{4(c,p,s)} \bar{W} + (2\xi + \bar{W}) \bar{W} c_{7(c,p,s)} + q_{3(c,p,s)} (2\xi + \bar{W}) \bar{W} \end{aligned} \right)}{x_{13(c,p,s)}}, \quad (4.15)$$

trong đó các hệ số $q_{i(c,p,s)}$ ($i = 1 \rightarrow 4$) xác định trong phụ lục C2

Phương trình (4.10) và (4.15) lần lượt là các phương trình khảo sát đường cong sau mất ổn định tải nén dọc trục - độ võng và tải áp lực ngoài - độ võng. Từ các đường cong thu được, luận án có thể đánh giá khả năng chịu tải của các panel sau mất ổn định.

4.4. So sánh kết quả nghiên cứu

Trong phần này các so sánh được thực hiện để kiểm tra độ tin cậy về kết quả số và kiểm tra độ chính xác của kỹ thuật tìm hàm ứng suất trung bình cho panel Parabol và panel hình Sin của luận án.

So sánh thứ nhất, luận án tiến hành so sánh tải tới hạn của tấm vuông FG-GRC hoàn hảo chịu nén theo phương x ở điều kiện biên 1 (FFFF) với kết quả nghiên cứu của Shen và cộng sự [35] trong Bảng 4.1. So sánh thứ 2, luận án tiến hành so sánh tải tới hạn của panel FG-GRMMC hoàn hảo chịu nén dọc trục với kết quả nghiên cứu của Shen và Xiang [87] trong Bảng 4.2.

Bảng 4.1. So sánh tải tới hạn $P_{cr} = \sigma_x (a/h)^2 E_0$ cho tấm $(0/90/0/90/0)_S$ FG-GRC chịu tải trọng nén theo phương x trong môi trường nhiệt $((m;n)=(1;1), a/b=1, h=2\text{ mm})$

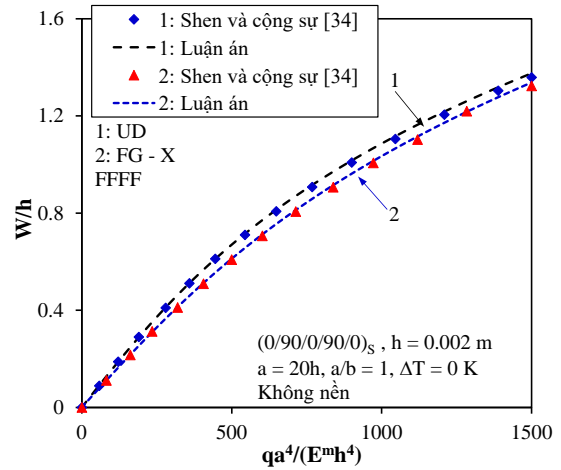
ΔT (K)	a/h	FG-X		UD		FG-O	
		Shen và cộng sự [35] (HSDT)	Luận án (HSDT)	Shen và cộng sự [35] (HSDT)	Luận án (HSDT)	Shen và cộng sự [35] (HSDT)	Luận án (HSDT)
0	10	105.380	105.382	95.540	95.541	67.312	67.313
	20	120.995	120.997	105.073	105.075	71.198	71.199
	50	126.244	126.246	108.098	108.100	72.369	72.370
100	10	90.702	90.693	83.296	83.287	59.454	59.448
	20	104.218	104.207	92.094	92.084	63.340	63.333
	50	108.766	108.754	94.906	94.895	64.522	64.515
200	10	85.418	85.422	77.189	77.193	56.908	56.911
	20	98.572	98.577	85.889	85.894	60.973	60.976
	50	103.024	103.030	88.693	88.698	62.219	62.222

Bảng 4.2. So sánh tải tới hạn P_{cr} (kN) cho panel trụ FG-GRMMC chịu tải trọng nén dọc trục (FFFF, $a=20h, h=3\text{mm}, b/a=0.8, a/R=0.8, \Delta T=0\text{ K}, (m;n)=(1;1)$)

	Lay up	$(0)_{10T}$	$(0/90/0/90/0)_S$	$(0/90)_{5T}$
FG-X	Shen và Xiang (HSDT) [87]	775.33	776.60	777.11
	Luận án (HSDT)	774.863	776.095	776.903
UD	Shen và Xiang (HSDT) [87]	709.81	711.05	711.74
	Luận án (HSDT)	711.261	712.398	713.719
FG-O	Shen và Xiang (HSDT) [87]	655.64	655.28	654.51
	Luận án (HSDT)	654.293	654.976	655.672
FG-A	Shen và Xiang (HSDT) [87]	716.16	716.78	717.14
	Luận án (HSDT)	716.001	716.539	716.878
FG-V	Shen và Xiang (HSDT) [87]	686.93	686.47	685.70
	Luận án (HSDT)	684.973	685.674	686.113

So sánh thứ ba, luận án so sánh đường cong $qa^4/E_m h^4 - W/h$ của tấm FG-GRC hoàn hảo chịu áp lực ngoài ở điều kiện biên 1 (FFFF) được so sánh với kết quả nghiên cứu của Shen và cộng sự [34].

Các so sánh cho thấy sự phù hợp trong cách tiếp cận của luận án với với các nghiên cứu đã công bố.



Hình 4.3. So sánh đường cong $qa^4/E_m h^4 - W/h$ của tấm FG-GRC chịu áp lực ngoài với nghiên cứu của Shen và cộng sự [34]

4.5. Các kết quả khảo sát và thảo luận

4.5.1. Khảo sát panel FG-GRC chịu nén dọc trục

Trong phần này luận án khảo sát panel trụ, panel Parabol và panel hình Sin FG-GRC trên nền đàn hồi phi tuyến chịu tải nén dọc trục trong môi trường nhiệt. Nền đàn hồi phi tuyến trong khảo sát các panel FG-GRC chịu nén dọc trục có độ cứng $K_1 = 2 \times 10^7 \text{ N/m}^3$, $K_2 = 10^5 \text{ N/m}$, $K_3 = 10^{15} \text{ N/m}^5$. Các đặc trưng về vật liệu và các thông số hình học của các lớp GRC và của graphene được lấy theo các công bố của Shen và Xiang [109, 113].

Tải tới hạn của panel Parabol, panel hình Sin và panel trụ tương ứng với năm kiểu phân bố graphene (FG-X, UD, FG-O, FG-V và FG-A) ở các điều kiện nhiệt độ khác nhau được trình bày và so sánh trong Bảng 4.3. Có thể thấy các kiểu bố trí graphene trong panel ảnh hưởng rõ rệt đến giá trị tải tới hạn. Quan sát thấy tải tới hạn của panel hình Sin là lớn nhất và tải tới hạn của panel trụ là nhỏ nhất. Tải tới hạn của các panel gia cường graphene theo kiểu FG-X là lớn nhất và tải tới hạn của các panel gia cường graphene theo kiểu FG-O là nhỏ nhất.

Có thể thấy với kết cấu tấm vỏ FG-GRC không có gân gia cường, tỷ phần thể tích graphene được phân bố nhiều ở lớp mặt trên và mặt dưới của kết cấu sẽ làm tăng tải tới hạn của tấm vỏ FG-GRC. Bảng 4.3 cũng cho thấy nhiệt độ môi trường tăng sẽ làm giảm tải tới hạn của các loại panel FG-GRC, điều này là do các đặc trưng cơ học của vật liệu GRC bị suy giảm do ảnh hưởng bởi nhiệt độ dẫn đến các kết cấu FG-GRC giảm khả năng chịu tải và dễ mất ổn định.

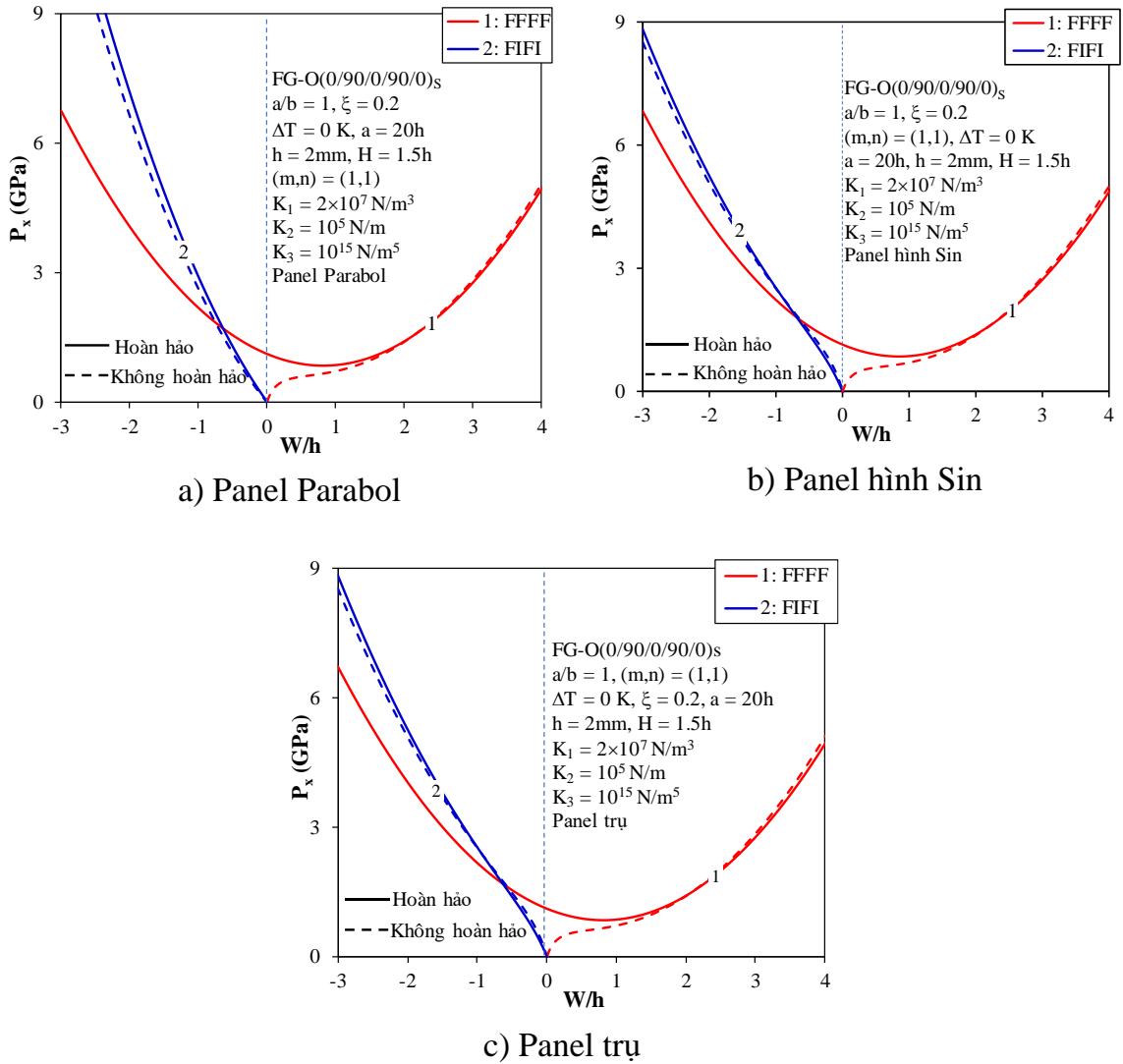
Bảng 4.3. Ảnh hưởng của kiểu phân bố graphene và nhiệt độ đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của ba loại panel FG-GRC chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1$, $h=2mm$, $a=20h$, $H=1.5h$, $R=0.068167m$, $(m;n)=(1;1)$)

$(0)_{10T}$	FG-X	UD	FG-O	FG-V	FG-A
	$\Delta T = 0K$				
Panel Parabol	1433.138	1349.139	1121.902	1152.995	1253.432
Panel hình Sin	1449.595	1365.970	1138.359	1168.504	1270.834
Panel trụ	1431.146	1347.102	1119.911	1151.111	1251.333
$\Delta T = 100K$					
Panel Parabol	1233.376	1177.471	977.919	1039.440	1057.827
Panel hình Sin	1247.069	1191.677	991.612	1052.843	1071.811
Panel trụ	1231.719	1175.751	976.262	1037.815	1056.139
$\Delta T = 200K$					
Panel Parabol	1157.048	1086.228	922.042	996.639	986.412
Panel hình Sin	1169.524	1098.895	934.518	1009.050	998.953
Panel trụ	1155.538	1084.694	920.532	995.134	984.897

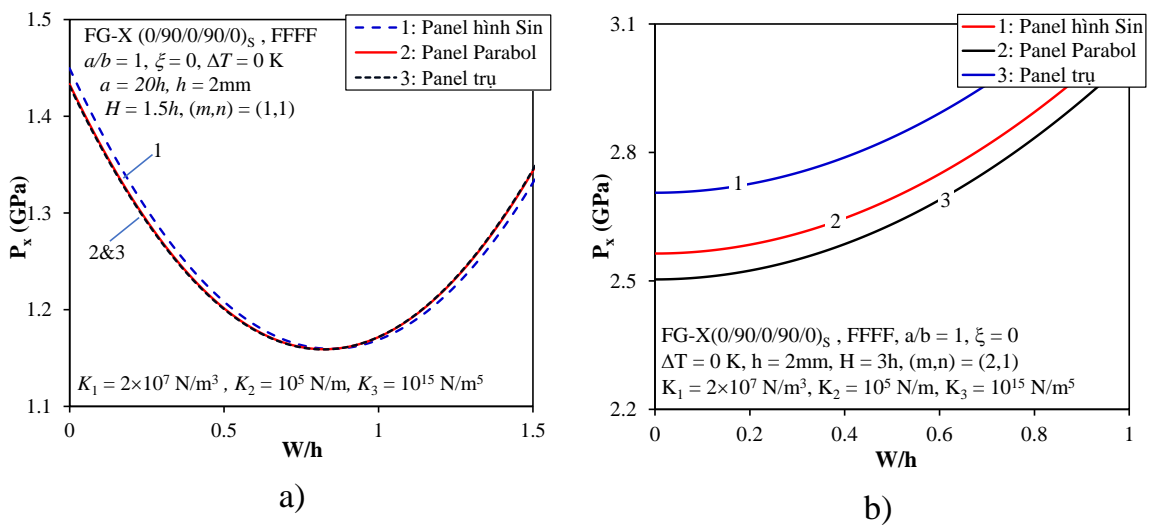
Đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của ba kiểu panel có kiểu phân bố graphene FG-O chịu nén dọc trục tương ứng với các điều kiện biên FFFF và FIFI được so sánh trong Hình 4.4. Có thể thấy xu hướng các đường cong $P_x - W/h$ của ba kiểu panel ở cùng điều kiện biên là giống nhau.

Đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của panel ở điều kiện biên FIFI xuất hiện trong miền độ võng âm do có hai cạnh cố định, trong khi hiện tượng hóp (snap-through) quan sát được trong miền độ võng dương ở điều kiện biên FFFF, và cũng chỉ ở điều kiện biên này mới tồn tại điểm rẽ nhánh. Vì vậy các khảo sát dưới đây luận án chỉ tập trung vào khảo sát ba kiểu panel chịu nén dọc trục ở điều kiện biên FFFF.

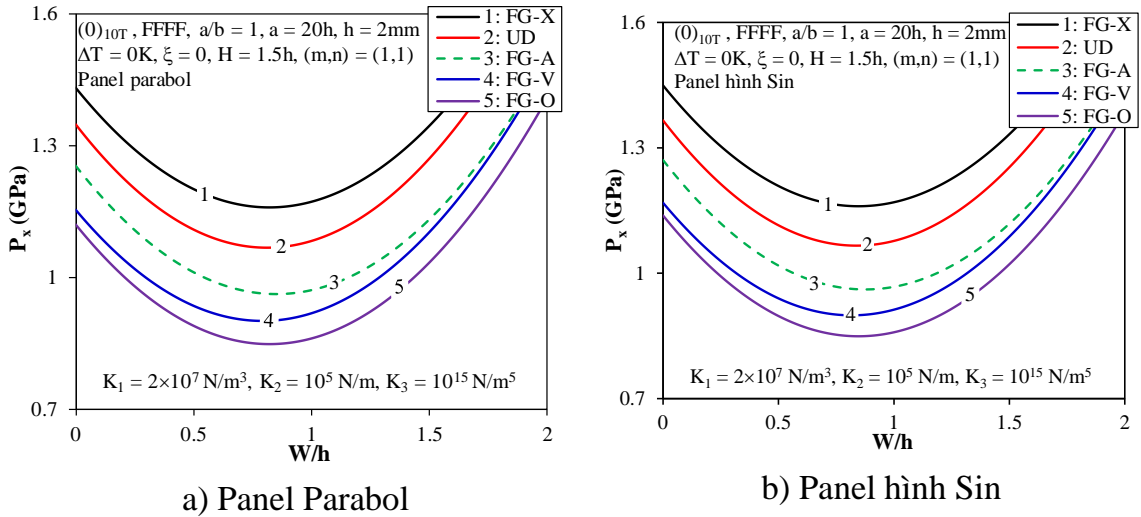
Đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của các loại panel chịu nén dọc trục được so sánh trong Hình 4.5. Có thể thấy xu hướng của các đường cong là như nhau và hiện tượng hóp quan sát rất rõ trong Hình 4.5a. Khi các panel có độ nâng H nhỏ, các đường cong $P_x - W/h$ rất sát nhau và có sự giao cắt trong miền độ võng lớn (Hình 4.5a). Ngược lại khi panel có độ nâng H lớn các đường cong $P_x - W/h$ của các panel tách biệt hoàn toàn, hiện tượng hóp khó quan sát hơn trong Hình 4.5b, tải trọng tăng làm độ võng tăng theo trong miền khảo sát và đường cong $P_x - W/h$ của panel hình Sin cao nhất và gần như song song với các đường cong $P_x - W/h$ của panel trụ và panel Parabol (Hình 4.5b).



Hình 4.4. Ảnh hưởng của điều kiện biên đến đường cong $P_x - W/h$ của các panel chịu nén dọc trục

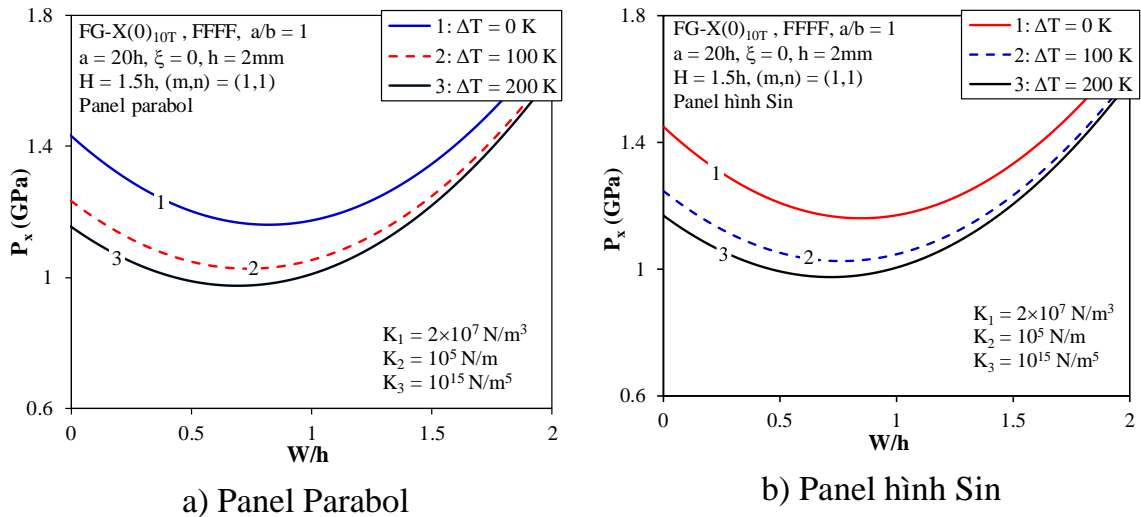


Hình 4.5. So sánh đường cong $P_x - W/h$ của ba kiểu panel chịu nén dọc trục



Hình 4.6. Đường cong $P_x - W/h$ của ba loại panel chịu nén dọc trục tương ứng với các quy luật gia cường graphene

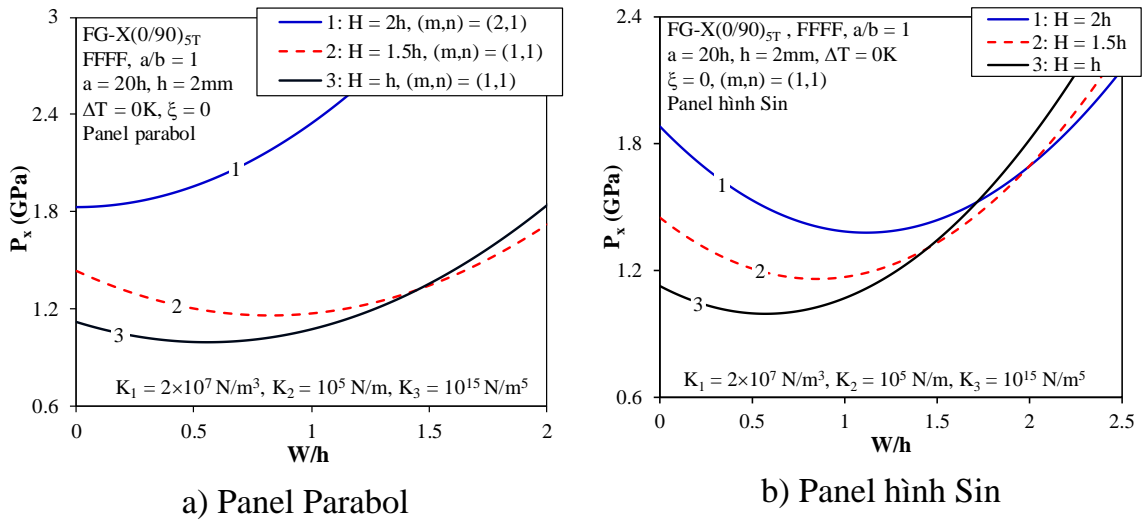
Ảnh hưởng của các quy luật gia cường graphene đến đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của panel Parabol và panel hình Sin được trình bày trong Hình 4.6. Các đường cong $P_x - W/h$ của các panel có xu hướng giống nhau, tách biệt hoàn toàn theo các quy luật gia cường graphene và hiện tượng hợp quan sát rất rõ. Có thể thấy là đường cong $P_x - W/h$ của panel có graphene gia cường theo kiểu FG-X là cao nhất và đường cong $P_x - W/h$ của panel có graphene gia cường theo kiểu FG-O là thấp nhất.



Hình 4.7. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến đường cong $P_x - W/h$ của panel Parabol và panel Sin chịu nén dọc trục

Ảnh hưởng của nhiệt độ đến các đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của panel Parabol và panel Sin được thể hiện trên Hình 4.7. Khi nhiệt độ tăng các đường cong $P_x - W/h$ bị hạ thấp đáng kể, hiện tượng hợp có xu hướng dịch chuyển về miền

độ võng nhỏ, đồng thời tải tới hạn nén dọc trục của các loại panel bị giảm đáng kể (xem trong Bảng 4.3).



Hình 4.8. Ảnh hưởng của độ nâng H đến đường cong $P_x - W/h$ của các panel chịu nén dọc trục

Ảnh hưởng của độ nâng H đến tải tới hạn và các đường cong $P_x - W/h$ của các loại panel được trình bày trong Bảng 4.4 và Hình 4.8. Độ nâng H tăng lên làm tăng tải tới hạn và nâng cao đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của các loại panel. Ở cùng giá trị độ nâng H , tải tới hạn của panel sin là lớn nhất và tải tới hạn của panel trụ là nhỏ nhất, ngoài ra độ nâng H tăng lên cũng làm thay đổi mode mất ổn định của các loại panel.

Bảng 4.4. Ảnh hưởng của độ nâng H đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của các loại panel chịu nén dọc trục (FFFF, $a/b=1$, $h=2mm$, $a=20h$, $\Delta T=0$ K, $(m;n)=(1;1)$)

$(0/90)_{5T}$	FG-X	UD	FG-O	FG-V	FG-A
	$H = h, R = 0.101m$				
Panel Parabol	1119.362	1026.901	808.128	855.603	923.318
Panel hình Sin	1126.244	1033.924	814.980	861.891	930.777
Panel trụ	1119.002	1026.533	807.770	855.273	922.929
Loại panel	$H = 1.5h, R = 0.068167m$				
Panel Parabol	1433.160	1349.151	1121.923	1153.010	1253.466
Panel hình Sin	1449.647	1365.998	1138.366	1168.560	1270.864
Panel trụ	1431.166	1347.112	1119.933	1151.122	1251.367
Loại panel	$H = 2h, R = 0.052m$				
Panel Parabol	1831.801*	1761.828*	1417.607*	1483.711*	1571.995*
Panel hình Sin	1881.406	1809.336	1483.708*	1547.633*	1640.194*
Panel trụ	1819.687*	1749.069*	1405.485*	1472.000*	1559.477*

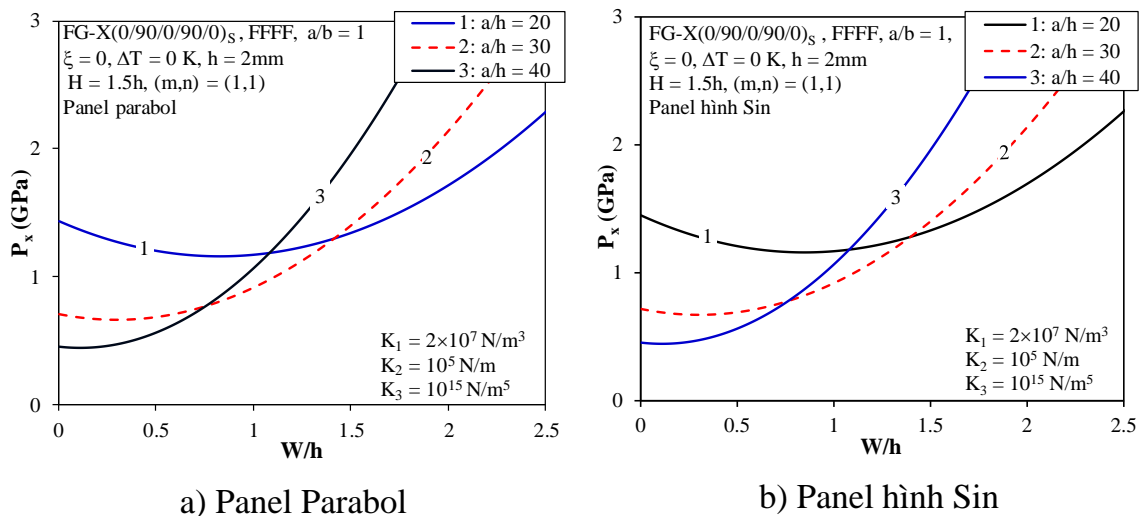
* $(m;n) = (2;1)$

Bảng 4.5. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của các loại panel (FFFF, $a/b=1, h=2\text{mm}, \Delta T=0\text{K}, (m;n)=(1;1)$)

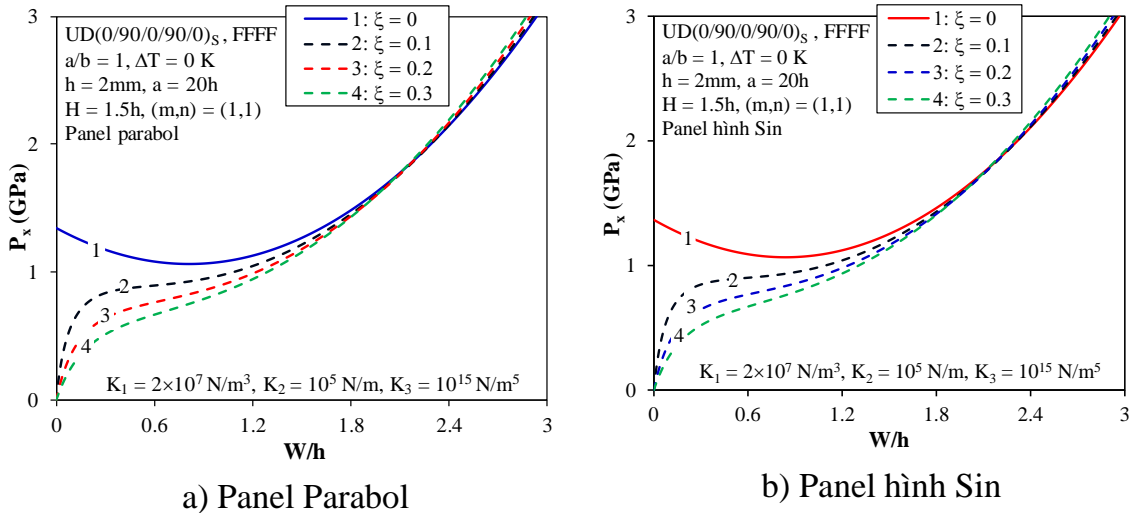
$(0/90/0/90/0)_s$	FG-X	UD	FG-O	FG-V	FG-A
	$a/h=20, H=1.5h, R=0.068167m$				
Panel Parabol	1433.159	1349.149	1121.923	1153.008	1253.464
Panel hình Sin	1449.609	1365.975	1138.373	1168.527	1270.843
Panel trụ	1431.169	1347.113	1119.933	1151.124	1251.367
Loại panel		$a/h=30, H=1.5h, R=0.1515m$			
Panel Parabol	710.765	669.587	552.450*	579.629	622.933*
Panel hình Sin	717.621	676.595	569.322*	586.086	632.741
Panel trụ	710.406	669.220	551.690*	579.290	622.140*
Loại panel		$a/h=40, H=1.5h, R=0.26817m$			
Panel Parabol	451.120	427.158	341.582*	364.696*	382.413*
Panel hình Sin	454.877	430.997	351.098*	373.789*	392.347*
Panel trụ	451.011	427.046	341.341*	364.467*	382.162*

*(m;n) = (2;1)

Bảng 4.5 và Hình 4.9 cho thấy sự ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tải tới hạn và các đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của các loại panel chịu nén dọc trục. Có thể thấy khi tỷ số a/h tăng lên tức là độ mảnh của panel tăng lên thì tải tới hạn của các loại panel bị giảm và các đường cong $P_x - W/h$ thay đổi đáng kể. Hiện tượng giao cắt các đường cong $P_x - W/h$ khi tỷ số a/h thay đổi quan sát được trên Hình 4.9 và hiện tượng hợp của đường cong có xu hướng dịch chuyển về miền độ võng nhỏ.



Hình 4.9. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $P_x - W/h$ của các panel chịu nén dọc trục



Hình 4.10. Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo đến đường cong $P_x - W/h$ của các panel chịu nén dọc trục

Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo đến đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của ba loại panel chịu nén dọc trục được trình bày trên Hình 4.10. Có thể thấy đường cong $P_x - W/h$ của panel không hoàn hảo vượt qua đường cong $P_x - W/h$ của panel hoàn hảo trong miền độ võng lớn và hiện tượng rẽ nhánh không xảy ra với panel không hoàn hảo.

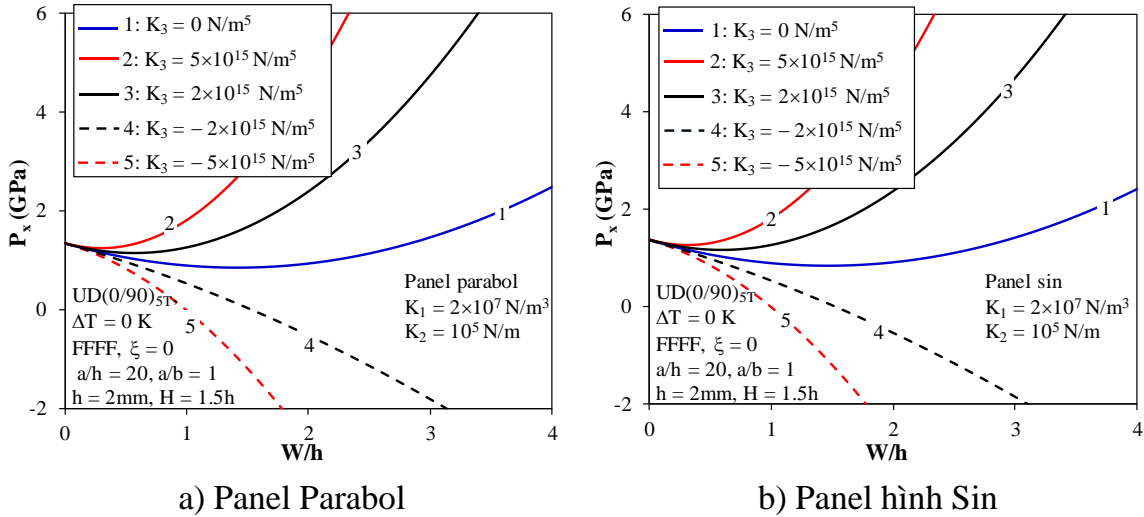
Bảng 4.6. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến tải tới hạn P_{cr} (MPa) của ba loại panel chịu nén dọc trục (FFFF, (0/90)_{5T}, $a/b=1, h=2mm, a/h=20, H=1.5h, R=0.068167m, \xi=0, \Delta T=0 K, K_3=0 N/m^5, (m;n)=(1;1)$)

K_1 (N/m ³)	K_2 (N/m)	FG-X		UD	
		Panel parabol	Panel hình Sin	Panel parabol	Panel hình Sin
0	0	1331.539	1348.026	1247.530	1264.376
	0	1333.971	1350.458	1249.961	1266.808
3×10^7	2×10^5	1533.971	1550.458	1449.961	1466.808
	10^6	2114.591*	2152.233*	2029.689*	2069.340*
5×10^7	0	1335.592	1352.079	1251.583	1268.429
	2×10^5	1535.592	1552.079	1451.583	1468.429
	10^6	2114.997*	2152.638*	2030.094*	2069.745*

* $(m;n) = (2;1)$

Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi K_1 và K_2 đến tải tới hạn của panel Parabol và panel hình Sin được trình bày trong Bảng 4.6. Theo kết quả khảo sát ta thấy độ cứng nền đàn hồi càng cao thì tải tới hạn càng tăng và có thể thay đổi mode mất ổn định của panel.

Ảnh hưởng của hệ số nền phi tuyến K_3 đến đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của panel Parabol và panel hình Sin chịu nén dọc trục được trình bày trên Hình 4.11. Các giá trị K_3 không làm thay đổi điểm rẽ nhánh hay nói cách khác là không làm thay đổi tải tới hạn, tuy nhiên lại làm thay đổi đáng kể xu hướng đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của các loại panel trong miền độ võng lớn.



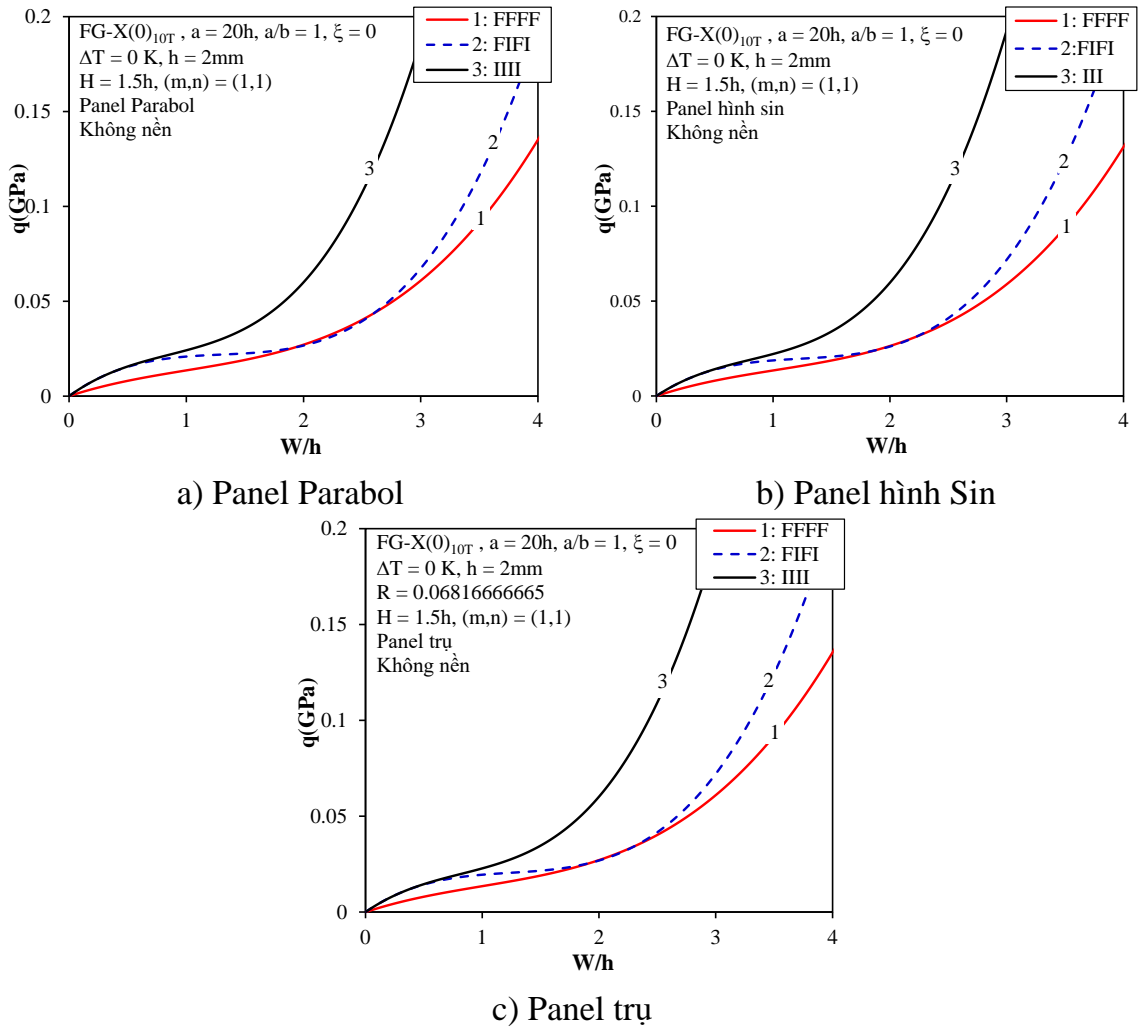
Hình 4.11. Ảnh hưởng của độ cứng nền phi tuyến K_3 đến đường cong $P_x - W/h$ của panel Parabol và panel hình Sin chịu nén dọc trục

4.5.2. Khảo sát panel FG-GRC chịu áp lực ngoài

Trong phần này luận án khảo sát panel trụ, panel Parabol và panel hình sin FG-GRC chịu áp lực ngoài. Độ cứng nền đàn hồi phi tuyến và nhiệt độ được bỏ qua trong quá trình khảo sát.

Các đặc trưng về vật liệu và các thông số hình học của các lớp GRC và của graphene được lấy theo các công bố của Shen và Xiang [109, 113].

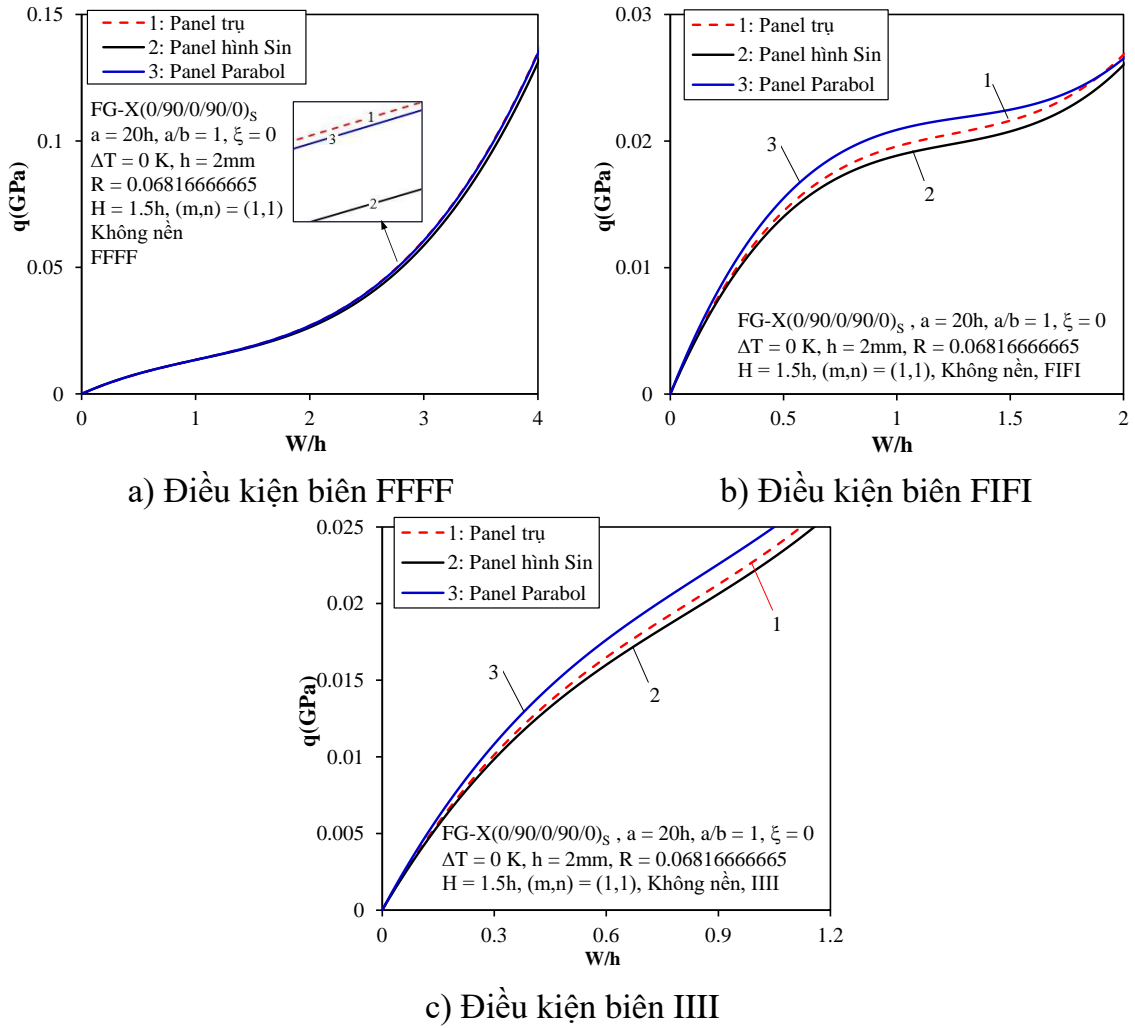
Ảnh hưởng của các điều kiện biên đến đường cong sau mất ổn định $q - W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài được trình bày trên Hình 4.12. Quan sát thấy xu hướng của đường cong $q - W/h$ của ba loại panel là như nhau, đều xuất phát từ gốc tọa độ và mất ổn định theo kiểu rẽ nhánh không xuất hiện khi panel chỉ chịu áp lực ngoài. Khi có các cạnh cố định, đường cong $q - W/h$ được nâng cao hơn so với trường hợp tất cả các cạnh của panel tự do.



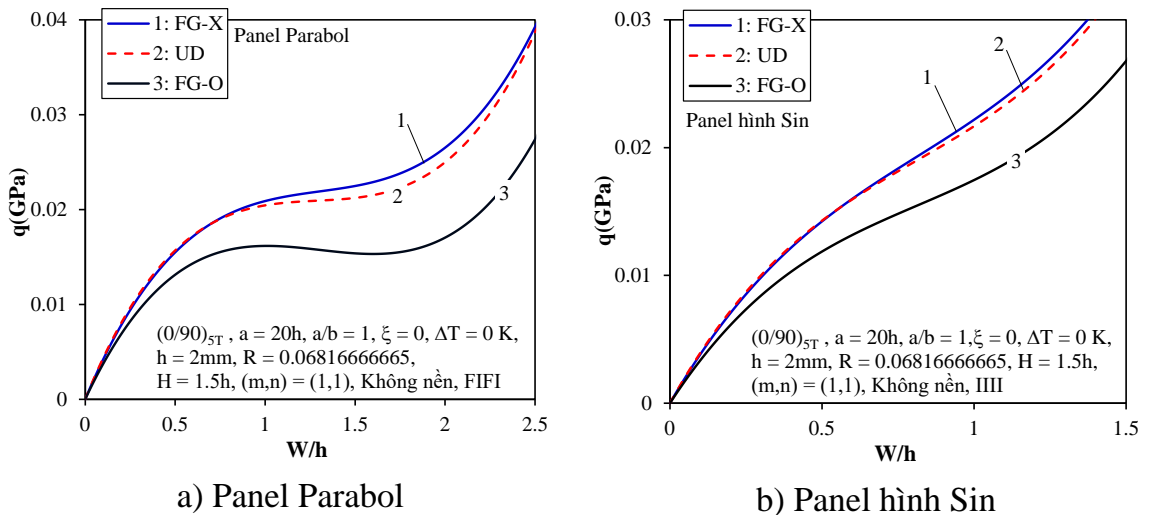
Hình 4.12. Ảnh hưởng của điều kiện biên đến đường cong $q - W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài

Hình 4.13 lần lượt so sánh đường cong sau mất ổn định của ba loại panel ở các điều kiện biên FFFF, FIFI và IIII. Có thể thấy ở điều kiện biên FFFF các đường cong $q - W/h$ của ba loại panel khá ổn định và đường cong $q - W/h$ của panel trụ cao nhất trong miền độ võng lớn. Ở điều kiện biên FIFI và IIII, khả năng chịu tải của panel Parabol là tốt nhất và khả năng chịu tải của panel hình Sin là thấp nhất. Hiện tượng hóp và mất ổn định theo kiểu cực trị không quan sát thấy trong các trường hợp khảo sát.

Ảnh hưởng của các kiểu phân bố graphene đến đường cong sau mất ổn định $q - W/h$ của panel Parabol và panel hình Sin chịu áp lực ngoài được trình bày trong Hình 4.14. Nhìn chung trong ba kiểu phân bố graphene là FG-X, UD và FG-O, khả năng chịu tải của panel tốt nhất (tương ứng với đường cong $q - W/h$ cao nhất và ổn định nhất) khi graphene phân bố theo kiểu FG-X.



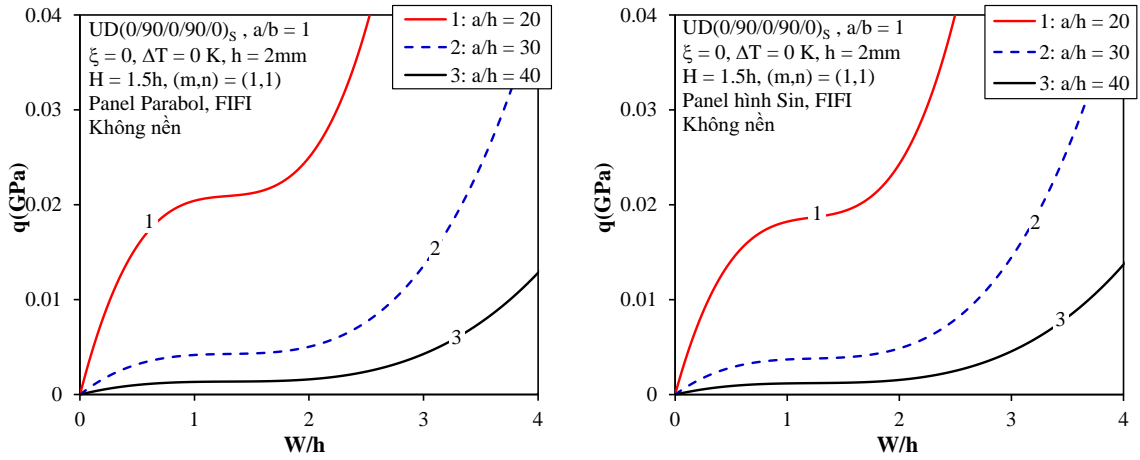
Hình 4.13. So sánh đường cong $q - W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài



Hình 4.14. Ảnh hưởng của các kiểu phân bố graphene đến đường cong $q - W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài

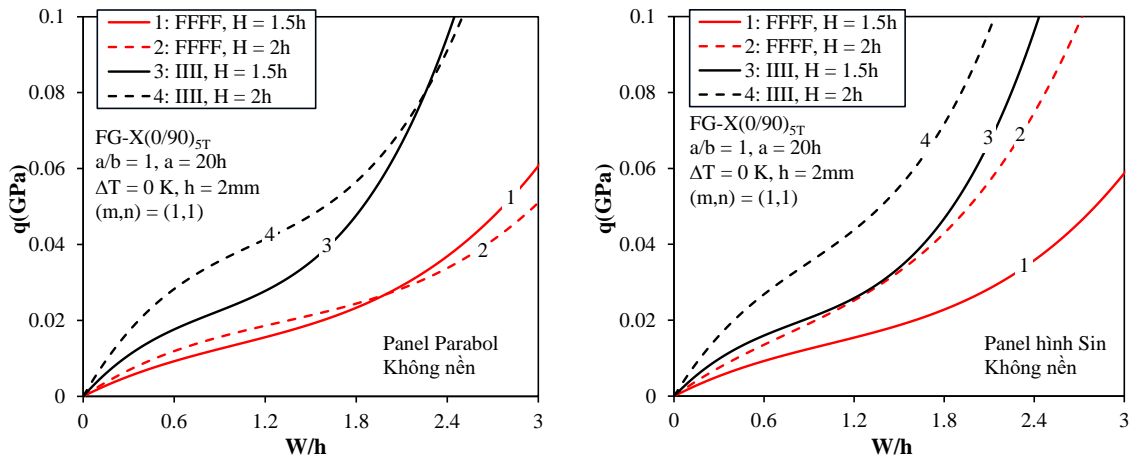
Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong sau mất ổn định $q - W/h$ của panel Parabol và panel hình Sin chịu áp lực ngoài được đánh giá trên Hình 4.15. Có thể thấy rằng khi độ mảnh của panel tăng lên thì khả năng chịu tải của panel bị giảm đáng

kê, các đường cong $q-W/h$ phát triển khá đơn điệu và bị hạ thấp, gần như không thấy có các điểm cực trị trên các đường cong này.



a) Panel Parabol b) Panel hình Sin

Hình 4.15. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đường cong $q-W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài



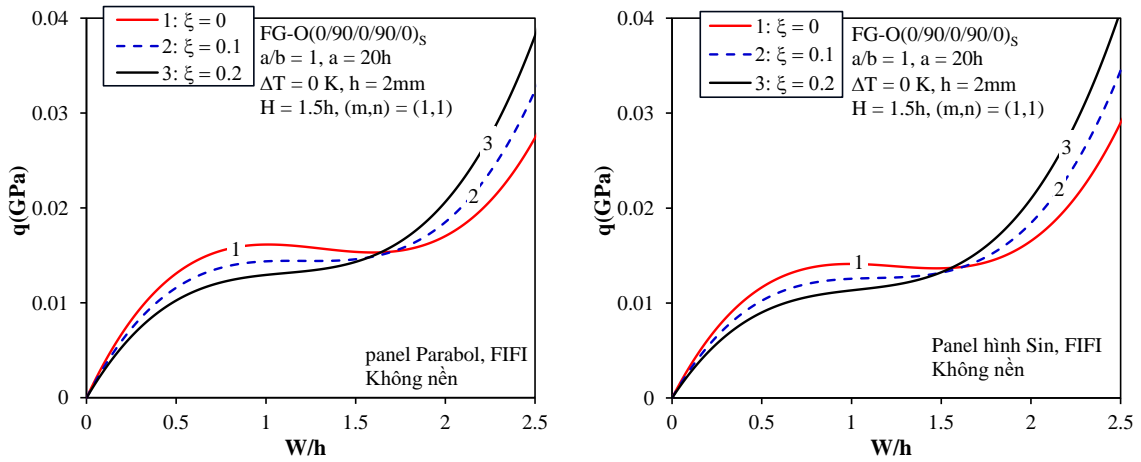
a) Panel Parabol b) Panel hình Sin

Hình 4.16. Ảnh hưởng của độ nâng H đến đường cong $q-W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài

Ảnh hưởng của độ nâng H đến đường cong sau mất ổn định $q-W/h$ của panel Parabol và panel hình Sin chịu áp lực ngoài được đánh giá trên Hình 4.16. Có thể thấy độ nâng H tăng lên sẽ làm tăng khả năng chịu tải và các đường cong $q-W/h$ của panel hình Sin được nâng cao hơn và tách biệt hoàn toàn (Hình 4.16b), không có sự giao cắt trong miền độ võng lớn giống như các đường cong $q-W/h$ của panel Parabol (Hình 4.16a).

Hình 4.17 đánh giá các ảnh hưởng của độ không hoàn hảo hình dáng ban đầu lên các đường cong sau mất ổn định $q-W/h$ của panel Parabol và panel hình Sin chịu áp lực ngoài. Có thể thấy rằng, mặc dù không làm thay đổi dạng mất ổn định nhưng khả năng chịu tải của panel bị giảm khi độ không hoàn hảo của các panel tăng

lên trong miền độ võng nhỏ. Tuy nhiên khi độ võng đủ lớn, khả năng chịu tải của các panel tốt hơn tương ứng với độ không hoàn hảo lớn hơn.



a) Panel Parabol

b) Panel hình Sin

Hình 4.17. Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo đến đường cong $q - W/h$ của các panel chịu áp lực ngoài

4.6. Kết luận chương 4

Trong chương này, luận án đã sử dụng HSDT để xác định tải tới hạn P_{cr} (MPa) và các đường cong tải-độ võng sau mất ổn định của panel Parabol và panel hình Sin chịu áp lực ngoài và chịu tải trọng nén dọc trục trong môi trường nhiệt.

Điểm mới quan trọng trong chương này là một kỹ thuật xác định hàm ứng suất theo nghĩa xấp xỉ bao gồm cả các thành phần tuyến tính và phi tuyến đã được đề xuất dành cho trường hợp các panel có độ cong phức tạp. Từ các kết quả khảo sát số, luận án đưa ra một số nhận xét sau:

1. Trong trường hợp các panel chịu nén dọc trục, điểm rẽ nhánh và hiện tượng hóp của panel quan sát được ở điều kiện biên FFFF và không quan sát được ở điều kiện biên FIFI. Hiện tượng hóp xảy ra trong miền độ võng dương với cả ba loại vỏ panel, xu hướng đường cong $P_x - W/h$ của các vỏ panel là giống nhau trong tất cả các khảo sát.
2. Trong trường hợp các panel chịu áp lực ngoài, hiện tượng hóp và điểm rẽ nhánh không quan sát được trong tất cả các trường hợp khảo sát.
3. Khi cùng độ nâng H , khả năng chịu tải nén của panel hình Sin là cao nhất và khả năng chịu tải nén của panel Parabol là thấp nhất.
4. Độ cứng nền đàn hồi K_1 và K_2 tăng sẽ làm tăng khả năng chịu tải của các panel, trong khi đó độ cứng nền phi tuyến K_3 không ảnh hưởng đến tải rẽ nhánh nhưng làm thay đổi đáng kể xu hướng đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ của các panel chịu nén dọc trục. Trong miền độ võng lớn, các

đường cong sau mất ổn định $P_x - W/h$ có xu hướng đi lên hoặc vống xuống tùy thuộc vào giá trị K_3 là dương hay âm, tức là làm tăng hay làm giảm độ cứng của nền đàn hồi phi tuyến.

5. Các ảnh hưởng đáng kể của các thông số hình học, nhiệt độ môi trường đến tải tới hạn và các đường cong sau mất ổn định của các loại panel cũng được chỉ ra trong các kết quả số, từ đó đưa ra các nhận xét chi tiết và có ý nghĩa.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

KẾT LUẬN

Ổn định phi tuyến của các kết cấu composite gia cường graphene đã có nhiều nhà khoa học nghiên cứu. Tuy nhiên, các nghiên cứu trước đây chỉ tập trung vào phân tích ổn định của các kết cấu tấm, panel trụ, vỏ kín FG-GRC không có gân gia cường.

Từ kết quả nghiên cứu đã công bố trên các bài báo trong nước và quốc tế, luận án đã có những đóng góp mới nổi bật như sau:

1. Luận án đã phân tích ổn định phi tuyến của các loại tấm vỏ FG-GRC có gân gia cường FG-GRC hoặc có lõi Auxetic chịu tải trọng xoắn, nén dọc trục, áp lực ngoài trong môi trường nhiệt. Trong đó hệ thống gân gia cường FG-GRC được thiết kế sao cho tỷ phần thể tích của graphene trong các lớp GRC tại vị trí tiếp xúc giữa vỏ và gân là bằng nhau để đảm bảo cơ tính liên tục của kết cấu FG-GRC.
2. Luận án phát triển kỹ thuật san đều tác dụng gân làm bằng vật liệu dị hướng, áp dụng cho gân làm bằng FG-GRC trong khuôn khổ lý thuyết vỏ Donell và HSDT, có xét đến các thành phần ứng suất nhiệt trong gân.
3. Trong quá trình tính bài toán về vỏ trống FG-GRC chịu tải xoắn có nền đàn hồi bao quanh, lần đầu tiên ứng suất theo chu vi $\sigma_{\theta\theta}$ được xét đến trong hàm ứng suất để nhằm mô tả tốt hơn ứng xử của vỏ, và sử dụng đầy đủ các phương trình tính toán sau Galerkin, từ đó liên hệ giữa tải trọng và độ võng được thể hiện chính xác hơn.
4. Luận án cũng đề xuất phương pháp để tìm được hàm ứng suất theo nghĩa trung bình bao gồm các thành phần tuyến tính và phi tuyến của hàm ứng suất trong phân tích ổn định phi tuyến của hai loại panel Parabol và panel hình Sin chịu áp lực ngoài và chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt.
5. Nền đàn hồi phi tuyến được xem xét trong phân tích các bài toán tấm, panel trụ FG-GRC có gân gia cường chịu tải cơ kết hợp, và trong các bài toán panel Parabol và panel Sin chịu nén dọc trục trong môi trường nhiệt.

Nội dung của luận án được công bố và gửi đăng 12 bài báo quốc tế và trong nước. Trong đó có 11 bài báo đăng trên tạp chí quốc tế uy tín đã xuất bản, 01 bài báo đăng trên tạp chí điện tử trường Đại học Công nghệ Giao thông Vận tải.

KIẾN NGHỊ

Theo quan điểm của tác giả, luận án có thể phát triển tiếp theo một số hướng nghiên cứu dưới đây:

1. Phân tích dao động phi tuyến của các loại vỏ trống, vỏ trụ FG-GRC có gân gia cường có nền đàn hồi phi tuyến bao quanh
2. Phân tích ổn định động lực học của các loại tấm, panel, vỏ thoải hai độ cong FG-GRC có gân gia cường trên nền đàn hồi phi tuyến
3. Phân tích ảnh hưởng của lỗ rỗng trong các pha của vật liệu đến ổn định của tấm, panel và vỏ thoải hai độ cong FG-GRC
4. Phân tích ảnh hưởng của lớp áp điện và hệ số Poisson âm đến ổn định phi tuyến của các loại panel Parabol và panel Sin chịu tải trọng cơ nhiệt trên nền đàn hồi phi tuyến.

**DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ
LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN**

1. **Cao Van Doan**, Vu Tho Hung, Nguyen Thi Phuong, Vu Hoai Nam, “*Torsional buckling and postbuckling behavior of stiffened FG-GRC toroidal shell segments surrounded by elastic foundation*”. International Journal of Computational Materials Science and Engineering. Vol. 12 (03), 2023, pp. 2350001. <https://doi.org/10.1142/S204768412350001X>. (Tập chí quốc tế ESCI, Scopus)
2. Nguyen Thi Phuong, Vu Minh Duc, Dang Thuy Dong, **Cao Van Doan**, Pham Thanh Hieu, Vu Hoai Nam, “*An analytical approach of nonlinear buckling behavior of torsionally loaded auxetic core toroidal shell segments with graphene reinforced polymer coatings*”. Advanced Composite Materials. Vol. 32, 2023, pp. 400–418. <https://doi.org/10.1080/09243046.2022.2110661>. (Tập chí quốc tế SCIE)
3. Nguyen Thi Phuong, Vu Minh Duc, **Cao Van Doan**, Vu Hoai Nam, “*Nonlinear torsional buckling of functionally graded graphene-reinforced composite (FG-GRC) laminated cylindrical shells stiffened by FG-GRC laminated stiffeners in thermal environment*”. Polymer Composites. Vol. 42, 2021, pp. 3051–3063. <https://doi.org/10.1002/pc.26038>. (Tập chí quốc tế SCIE)
4. Vu Hoai Nam, Vu Minh Duc, **Cao Van Doan**, Nguyen Thi Thanh Xuan, Nguyen Thi Phuong, “*Nonlinear postbuckling behavior of auxetic-core toroidal shell segments with Graphene reinforced face sheets under axial loads*”. Archives of Mechanics. Vol 74, 2022, pp. 89–108. <https://doi.org/10.24423/aom.3957>. (Tập chí quốc tế SCIE)
5. Vu Hoai Nam., Nguyen Thi Phuong, Ho Si Lanh, Vu Minh Duc, **Cao Van Doan**, “*Nonlinear buckling analysis of stiffened FG-GRC laminated cylindrical shells subjected to axial compressive load in thermal environment*”. Mechanics Based Design of Structures and Machines. Vol. 51, 2023, pp. 3678–3694. <https://doi.org/10.1080/15397734.2021.1932522>. (Tập chí quốc tế SCIE)
6. **Cao Van Doan**, Vu Hoai Nam, Nguyen Thi Phuong, “*Nonlinear Electro-Thermo-Torsional Buckling Analysis of Stiffened Functionally Graded Graphene-Reinforced Composite Laminated Toroidal Shell Segments*”. Journal

- of Engineering Mechanics. Vol. 149 (02), 2023, pp. 04022106. <https://doi.org/10.1061/JENMDT.EMENG-6607>. (Tập chí quốc tế SCIE)
7. Nguyen Thi Phuong, Dang Thuy Dong, **Cao Van Doan**, Vu Hoai Nam, “*Nonlinear buckling of higher-order shear deformable stiffened FG-GRC laminated plates with nonlinear elastic foundation subjected to combined loads*”. Aerospace Science and Technology. Vol. 127, pp. 107736. <http://doi.org/10.1016/j.ast.2022.107736>. (Tập chí quốc tế SCIE)
 8. Vu Hoai Nam, Dang Thuy Dong, **Cao Van Doan**, Nguyen Thi Phuong, “*Nonlinear Thermo-Electro-Mechanical Buckling of Higher-Order Shear Deformable Stiffened FG-GRC Laminated Plates*”. International Journal of Applied Mechanics. Vol. 14(06), 2022, pp. 2250051. <http://doi.org/10.1142/S175882512250051X>. (Tập chí quốc tế SCIE)
 9. Nguyen Thi Phuong, Dang Thuy Dong, **Cao Van Doan**, Vu Hoai Nam, “*Nonlinear buckling of stiffened FG-GRC cylindrical panels under axial compression with the uniformly distributed temperature variation*”. The European Physical Journal Plus. Vol. 138(3), 2023, <http://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-03841-5>. (Tập chí quốc tế SCIE)
 10. Vu Hoai Nam, Dang Thuy Dong, **Cao Van Doan**, Nguyen Thi Phuong, “*Nonlinear buckling of axially compressed FG-GRC stiffened cylindrical panels with a piezoelectric layer by using Reddy’s higher-order shear deformation theory*”. Polymer Composites. Vol. 43(11), 2022, pp. 7952-7966. <http://doi.org/10.1002/pc.26931>. (Tập chí quốc tế SCIE)
 11. Vu Hoai Nam, **Cao Van Doan**, Nguyen Thi Phuong, “*A new analytical approach to the nonlinear buckling and postbuckling behavior of functionally graded graphene reinforced composite laminated cylindrical, parabolic, and half-sinusoid shallow imperfect panels*”. Polymer Composites. 2023; pp. 1-18. <http://doi:10.1002/pc.27748>. (Tập chí quốc tế SCIE)
 12. Nguyen Thi Phuong, **Cao Van Doan**, Vu Hoai Nam, “*Postbuckling analysis of externally pressured parabola, sinusoidal and cylindrical FG-GRCL panels using HSDT*”. Journal of Science and Transport Technology. 3(2), 2023, pp. 34-42. <https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2023.en.3.2.34-42>.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Iijima S., 1991, Helical microtubules of graphitic carbon, *Nature*, 354, pp. 56–58.
2. Iijima S., Ichihashi T., 1993, Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter, *Nature*, 363, pp. 603–605.
3. Thostenson E.T., Ren Z., Chou T.W., 2001, Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: a review, *Composites Science and Technology*, 61, pp. 1899–1912.
4. Thostenson E.T., Li C., Chou T.W., 2005, Nanocomposites in context, *Composites Science and Technology*, 65, pp. 491–516.
5. Neto A.C., Guinea F., Peres N.M., 2006, Drawing conclusions from graphene, *Physics World*, 19, pp. 33.
6. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., et al., 2004, Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films, *Science*, 306, pp. 666–669.
7. Eftekhari A., Jafarkhani P., 2013, Curly Graphene with Specious Interlayers Displaying Superior Capacity for Hydrogen Storage, *The Journal of Physical Chemistry C*, 117, pp. 25845–25851.
8. Tsoukleri G., Parthenios J., Papagelis K., et al., 2009, Subjecting a Graphene Monolayer to Tension and Compression, *Small*, 5, pp. 2397–2402.
9. Pop E., Varshney V., Roy A.K., 2012, Thermal properties of graphene: Fundamentals and applications, *MRS Bulletin*, 37, pp. 1273–1281.
10. Akinwande D., Brennan C.J., Bunch J.S., et al., 2017, A review on mechanics and mechanical properties of 2D materials—Graphene and beyond, *Extreme Mechanics Letters*, 13, pp. 42–77.
11. Zhang Y.Y., Wang C.M., Cheng Y., et al., 2011, Mechanical properties of bilayer graphene sheets coupled by sp³ bonding, *Carbon*, 49, pp. 4511–4517.
12. Genoese A., Rizzi N.L., Salerno G., 2017, On the derivation of the elastic properties of lattice nanostructures: The case of graphene sheets, *Composites Part B: Engineering*, 115, pp. 316–329.
13. Hu K., Kulkarni D.D., Choi I., et al., 2014, Graphene-polymer nanocomposites for structural and functional applications, *Progress in Polymer Science*, 39, pp. 1934–1972.
14. Potts J.R., Dreyer D.R., Bielawski C.W., et al., 2011, Graphene-based polymer nanocomposites, *Polymer*, 52, pp. 5–25.

15. Stankovich S., Dikin D.A., Dommett G.H.B., et al., 2006, Graphene-based composite materials, *Nature*, 442, pp. 282–286.
16. Liang Q., Yao X., Wang W., et al., 2011, A Three-Dimensional Vertically Aligned Functionalized Multilayer Graphene Architecture: An Approach for Graphene-Based Thermal Interfacial Materials, *ACS Nano*, 5, pp. 2392–2401.
17. Zhao X., Zhang Q., Hao Y., et al., 2010, Alternate Multilayer Films of Poly(vinyl alcohol) and Exfoliated Graphene Oxide Fabricated via a Facial Layer-by-Layer Assembly, *Macromolecules*, 43, pp. 9411–9416.
18. Reddy C.D., Rajendran S., Liew K.M., 2006, Equilibrium configuration and continuum elastic properties of finite sized graphene, *Nanotechnology*, 17, pp. 864–870.
19. Ni Z., Bu H., Zou M., et al., 2010, Anisotropic mechanical properties of graphene sheets from molecular dynamics, *Physica B: Condensed Matter*, 405, pp. 1301–1306.
20. Shen L., Shen H.S., Zhang C.L., 2010, Temperature-dependent elastic properties of single layer graphene sheets, *Materials & Design*, 31, pp. 4445–4449.
21. Giannopoulos G.I., Kallivokas I.G., 2014, Mechanical properties of graphene based nanocomposites incorporating a hybrid interphase, *Finite Elements in Analysis and Design*, 90, pp. 31–40.
22. Lin F., Xiang Y., Shen H.S., 2017, Temperature dependent mechanical properties of graphene reinforced polymer nanocomposites – A molecular dynamics simulation, *Composites Part B: Engineering*, 111, pp. 261–269.
23. Udupa G., Rao S.S., Gangadharan K.V., 2014, Functionally Graded Composite Materials: An Overview, *Procedia Materials Science*, 5, pp. 1291–1299.
24. Shen H.-S., 2009, Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Structures*, 91, pp. 9–19.
25. Jalali S.K., Naei M.H., Pugno N.M., 2015, Graphene-Based Resonant Sensors for Detection of Ultra-Fine Nanoparticles: Molecular Dynamics and Nonlocal Elasticity Investigations, *NANO*, 10, pp. 1550024.
26. Bunch J.S., Zande A.M., Verbridge S.S., et al., 2007, Electromechanical Resonators from Graphene Sheets, *Science*, 315, pp. 490–493.
27. Song Z., Xu T., Gordin M.L., et al., 2012, Polymer–Graphene Nanocomposites as Ultrafast-Charge and -Discharge Cathodes for Rechargeable Lithium Batteries, *Nano Letters*, 12, pp. 2205–2211.

28. Kiani Y., Mirzaei M., 2019, Isogeometric thermal postbuckling of FG-GPLRC laminated plates, *Steel and Composite Structures*, 32, pp. 821–832.
29. Sahmani S., Aghdam M.M., 2017, Nonlinear instability of axially loaded functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced nanoshells based on nonlocal strain gradient elasticity theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 131–132, pp. 95–106.
30. Thai C.H., Van P., 2020, A meshfree approach using naturally stabilized nodal integration for multilayer FG GPLRC complicated plate structures, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 117, pp. 346–358.
31. Habibi M., Safarpour M., Safarpour H., 2020, Vibrational characteristics of a FG-GPLRC viscoelastic thick annular plate using fourth-order Runge-Kutta and GDQ methods, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 0, pp. 1–22.
32. Shen H.S., Lin F., Xiang Y., 2017, Nonlinear bending and thermal postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated beams resting on elastic foundations, *Engineering Structures*, 140, pp. 89–97.
33. Shen H.S., Xiang Y., Lin F., 2017, Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates in thermal environments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 319, pp. 175–193.
34. Shen H.S., Xiang Y., Lin F., 2017, Nonlinear bending of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates resting on elastic foundations in thermal environments, *Composite Structures*, 170, pp. 80–90.
35. Shen H.S., Xiang Y., Lin F., et al., 2017, Buckling and postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates in thermal environments, *Composites Part B: Engineering*, 119, pp. 67–78.
36. Tenney D.R., Lisagor W.B., Dixon S.C., 1989, Materials and structures for hypersonic vehicles. *Journal of Aircraft*, 26, pp. 953–970.
37. Minoru T., Arsenault R.J., 1989, *Metal Matrix Composites: Thermomechanical Behavior*, Pergamon Press, New York.
38. Yeh H.Y., Le R.M., Yeh H.L., 2007, Buckling of Metal-Matrix Composite Plate with a Square Hole, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 26, pp. 525–540.
39. Paley M., Aboudi J., 1991, Inelastic Thermal Buckling of Metal Matrix Laminated Plates, *Journal of Thermal Stresses*, 14, pp. 479–497.

40. Feldman E., 1996, The effect of temperature-dependent material properties on elasto-viscoplastic buckling behaviour of non-uniformly heated MMC plates, *Composite Structures*, 35, pp. 65–74.
41. Gilat R., Aboudi J., 1996, Thermomechanical coupling effects on the dynamic inelastic response and buckling of metal matrix composite infinitely wide plates, *Composite Structures*, 35, pp. 49–63.
42. Ko W.L., Jackson R.H., 1993, Compressive and shear buckling analysis of metal matrix composite sandwich panels under different thermal environments, *Composite Structures*, 25, pp. 227–239.
43. Fan Y., Xiang Y., Shen H.S., 2020, Temperature-Dependent Mechanical Properties of Graphene/Cu Nanocomposites with In-Plane Negative Poisson's Ratios, *Research*, 2020, pp. 5618021
44. Brush D. O. and Almroth B.O., 1975, *Buckling of bars, plates and shells*. McGraw-Hill, New York.
45. Đào Huy Bích, 2000, *Lý thuyết đàn hồi*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
46. Bich D.H., Duc N.D., Quan T.Q., 2014, Nonlinear vibration of imperfect eccentrically stiffened functionally graded double curved shallow shells resting on elastic foundation using the first order shear deformation theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 80, pp. 16–28.
47. Bich D.H., Ninh D.G., Thinh T.I., 2016, Non-linear buckling analysis of FGM toroidal shell segments filled inside by an elastic medium under external pressure loads including temperature effects, *Composites Part B: Engineering*, 87, pp. 75–91.
48. Bich D.H., Dung D.V., Nam V.H., Phuong N.T., 2013, Nonlinear static and dynamic buckling analysis of imperfect eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical thin shells under axial compression, *International Journal of Mechanical Sciences*, 74, pp. 190–200.
49. Bich D.H., Ninh D.G., Kien B.H., et al., 2016, Nonlinear dynamical analyses of eccentrically stiffened functionally graded toroidal shell segments surrounded by elastic foundation in thermal environment, *Composites Part B: Engineering*, 95, pp. 355–373.
50. Ninh D.G., Bich D.H., 2016, Nonlinear buckling of eccentrically stiffened functionally graded toroidal shell segments under torsional load surrounded by

- elastic foundation in thermal environment, *Mechanics Research Communications*, 72, pp. 1–15.
51. Dung D.V., Hoa L.K., 2013, Research on nonlinear torsional buckling and post-buckling of eccentrically stiffened functionally graded thin circular cylindrical shells, *Composites Part B: Engineering*, 51, pp. 300–309.
 52. Dung D.V., Hoa L.K., 2013, Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure, *Thin-Walled Structures*, 63, pp. 117–124.
 53. Lê Khả Hòa, 2015, *Phân tích ổn định tĩnh của vỏ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên*, Luận án tiến sĩ Cơ học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
 54. Dung D.V., Hoa L.K., Nga N.T., et al., 2013, Instability of eccentrically stiffened functionally graded truncated conical shells under mechanical loads, *Composite Structures*, 106, pp. 104–113.
 55. Phuong N.T., Luan D. T., Nam V.H., et al., 2019, Nonlinear approach on torsional buckling and postbuckling of functionally graded cylindrical shells reinforced by orthogonal and spiral stiffeners in thermal environment, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 233, pp. 2091–2106.
 56. Nam V.H., Phuong N.T., Minh K. V., et al., 2018, Nonlinear thermo-mechanical buckling and post-buckling of multilayer FGM cylindrical shell reinforced by spiral stiffeners surrounded by elastic foundation subjected to torsional loads, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 72, pp. 393–406.
 57. Nam V.H., Phuong N.T., Doan C.V., et al., 2019, Nonlinear Thermo-Mechanical Stability Analysis of Eccentrically Spiral Stiffened Sandwich Functionally Graded Cylindrical Shells Subjected to External Pressure, *International Journal of Applied Mechanics*, 11, pp. 1950045.
 58. Vũ Hoài Nam, 2015, *Phân tích phi tuyến động lực của vỏ làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên*, Luận án tiến sĩ Cơ học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
 59. Dong D.T., Dung D.V., 2019, A third-order shear deformation theory for nonlinear vibration analysis of stiffened functionally graded material sandwich doubly curved shallow shells with four material models, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 21, pp. 1316–1356.

60. Dong D.T., Dung D.V., 2017, Nonlinear vibration of functionally graded material sandwich doubly curved shallow shells reinforced by FGM stiffeners, *Part 1: Governing equations*, *Vietnam Journal of Mechanics*, 39, pp. 245–257.
61. Dong D.T., Dung D.V., 2017, Nonlinear vibration of functionally graded material sandwich doubly curved shallow shells reinforced by FGM stiffeners, *Part 2: Numerical results and discussion*, *Vietnam Journal of Mechanics*, 39, pp. 329–338.
62. Đặng Thùy Đông, 2018, *Phân tích ổn định và động lực phi tuyến của vỏ thoải sandwich cơ tính biến thiên chịu tác dụng của tải cơ và nhiệt*, Luận án tiến sĩ Cơ học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
63. Trang L.T. N, Tung H. V., 2018, Tangential Edge Constraint Sensitivity of Nonlinear Stability of CNT-Reinforced Composite Plates under Compressive and Thermomechanical Loadings, *Journal of Engineering Mechanics*, 144, pp. 04018056.
64. Trang L.T. N, Tung H. V., 2021, Thermomechanical postbuckling of higher order shear deformable CNT-reinforced composite plates with elastically restrained unloaded edges, *Polymers and Polymer Composites*, 29, pp. 857–875.
65. Trang L.T. N, Tung H. V., 2018, Thermomechanical nonlinear analysis of axially compressed carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations with tangentially restrained edges, *Journal of Thermal Stresses*, 41, pp. 418–438.
66. Trang L.T. N, Tung H. V., 2020, Nonlinear stability of CNT-reinforced composite cylindrical panels with elastically restrained straight edges under combined thermomechanical loading conditions, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 33, pp. 153–179.
67. Trang L.T. N, Tung H. V., 2019, Thermomechanical nonlinear stability of pressure-loaded functionally graded carbon nanotube-reinforced composite doubly curved panels with tangentially restrained edges, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 233, pp. 5848–5859.
68. Thang P.T., Trung .N.T, Lee J., 2019, Closed-form solution for nonlinear buckling analysis of FG-CNTRC cylindrical shells with initial geometric imperfections, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 73, pp. 483–491.
69. Duc N.D., Cong P.H., Tuan N.D., et al., 2017, Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG-CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations, *Thin-Walled Structures*, 115, pp. 300–310.

70. Hieu P.T., Tung H. V., 2019, Thermomechanical nonlinear buckling of pressure-loaded carbon nanotube reinforced composite toroidal shell segment surrounded by an elastic medium with tangentially restrained edges, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 233, pp. 3193–3207.
71. Hieu P.T., Tung H.V., 2020, Postbuckling Behavior of Carbon-Nanotube-Reinforced Composite Toroidal Shell Segments Subjected to Thermomechanical Loadings, *AIAA Journal*, 58, pp. 3187–3198.
72. Hieu P.T., Tung H.V., 2020, Thermomechanical postbuckling of pressure-loaded CNT-reinforced composite cylindrical shells under tangential edge constraints and various temperature conditions, *Polymer Composites*, 41, pp. 244–257.
73. Hieu P.T., Tung H.V., 2020, Buckling of shear deformable FG-CNTRC cylindrical shells and toroidal shell segments under mechanical loads in thermal environments, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 100, pp. 201900243.
74. Hieu P.T., Tung H.V., 2020, Thermal and thermomechanical buckling of shear deformable FG-CNTRC cylindrical shells and toroidal shell segments with tangentially restrained edges, *Archive of Applied Mechanics*, 90, pp. 1529–1546.
75. Long V.T., Tung H.V., 2020, Thermal postbuckling behavior of CNT-reinforced composite sandwich plate models resting on elastic foundations with tangentially restrained edges and temperature-dependent properties, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 33, pp. 1396–1428.
76. Long V.T., Tung H.V., 2019, Thermomechanical postbuckling behavior of CNT-reinforced composite sandwich plate models resting on elastic foundations with elastically restrained unloaded edges, *Journal of Thermal Stresses*, 42, pp. 658–680.
77. Tran H.Q., Vu V.T., Tran M.T., et al., 2020, A new four-variable refined plate theory for static analysis of smart laminated functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates, *Mechanics of Materials*, 142, pp. 103294.
78. Hu Z., Tong G., Lin D., et al., 2016, Graphene-reinforced metal matrix nanocomposites – a review, *Materials Science and Technology*, 32, pp. 930–953.
79. Naseer A., Ahmad F., Aslam M., et al., 2019, A review of processing techniques for graphene-reinforced metal matrix composites, *Materials and Manufacturing Processes*, 34, pp. 957–985.

80. Gao X., Yue H., Guo E., et al., 2016, Preparation and tensile properties of homogeneously dispersed graphene reinforced aluminum matrix composites, *Materials & Design*, 94, pp. 54–60.
81. Shen H.S., Xiang Y., 2021, Examination of thermal postbuckling of temperature dependent FG-GRMMC laminated beams with negative Poisson's ratio on elastic foundations, *Composite Structures*, 272, pp. 114066.
82. Shen H.-S., Xiang, Y., 2021, Effect of negative Poisson's ratio on the postbuckling behavior of axially compressed FG-GRMMC laminated cylindrical shells surrounded by an elastic medium. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 88, pp. 104231
83. Chen X., Shen H.S., Xiang Y., 2022, Thermo-mechanical postbuckling analysis of sandwich cylindrical shells with functionally graded auxetic GRMMC core surrounded by an elastic medium, *Thin-Walled Structures*, 171, pp. 108755.
84. Chen X., Shen H.S., Huang X.H., 2022, Thermo-mechanical postbuckling analysis of sandwich plates with functionally graded auxetic GRMMC core on elastic foundations, *Composite Structures*, 279, pp. 114796.
85. Chen X., Shen H.S., 2022, Thermo-mechanical postbuckling analysis of sandwich cylindrical panels with functionally graded auxetic GRMMC core supported by elastic foundations, *Ocean Engineering*, 247, pp. 110661.
86. Shen H.S., Xiang Y., Reddy J.N., 2020, Effect of negative Poisson's ratio on the post-buckling behavior of FG-GRMMC laminated plates in thermal environments, *Composite Structures*, 253, pp. 112731.
87. Shen H.S., Xiang Y., 2020, Effect of negative poisson's ratio on the axially compressed postbuckling behavior of FG-GRMMC laminated cylindrical panels on elastic foundations, *Thin-Walled Structures*, 157, pp. 107090.
88. Fan Y., Shen H.S., Xiang Y., 2023, Nonlinear vibration characteristics of pre- and post-buckled FG-GRMMC laminated plates with in-plane auxeticity, *Engineering Structures*, 274, pp. 115068.
89. Vu Hoai Nam, Vu Tho Hung, Nguyen Thi Phuong, et al., Nonlinear buckling of spiral-corrugated FG-GRMMC laminated cylindrical shells under external pressure, *Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn lần thứ XV*.
90. Zhao Z., Feng C., Wang Y., et al., 2017, Bending and vibration analysis of functionally graded trapezoidal nanocomposite plates reinforced with graphene nanoplatelets (GPLs), *Composite Structures*, 180, pp. 799–808.

91. Song M., Yang J., Kitipornchai S., 2018, Bending and buckling analyses of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets, *Composites Part B: Engineering*, 134, pp. 106–113.
92. Song M., Yang J., Kitipornchai S., et al., 2017, Buckling and postbuckling of biaxially compressed functionally graded multilayer graphene nanoplatelet-reinforced polymer composite plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 131–132, pp. 345–355.
93. Sahmani S., Aghdam M.M., 2017, Axial postbuckling analysis of multilayer functionally graded composite nanoplates reinforced with GPLs based on nonlocal strain gradient theory, *The European Physical Journal Plus*, 132, pp. 490.
94. Wang Y., Feng C., Zhao Z., et al., 2018, Torsional buckling of graphene platelets (GPLs) reinforced functionally graded cylindrical shell with cutout, *Composite Structures*, 197, pp. 72–79.
95. Sahmani S., Aghdam M.M., Rabczuk T., 2018, A unified nonlocal strain gradient plate model for nonlinear axial instability of functionally graded porous micro/nano-plates reinforced with graphene platelets, *Materials Research Express*, 5, pp. 045048.
96. Li K., Wu D., Chen X., et al., 2018, Isogeometric Analysis of functionally graded porous plates reinforced by graphene platelets, *Composite Structures*, 204, pp. 114–130.
97. Yang B., Kitipornchai S., Yang Y.F., et al., 2017, 3D thermo-mechanical bending solution of functionally graded graphene reinforced circular and annular plates, *Applied Mathematical Modelling*, 49, pp. 69–86.
98. Yang B., Yang J., Kitipornchai S., 2017, Thermoelastic analysis of functionally graded graphene reinforced rectangular plates based on 3D elasticity, *Meccanica*, 52, pp. 2275–2292.
99. Yang B., Mei J., Chen D., et al., 2018, 3D thermo-mechanical solution of transversely isotropic and functionally graded graphene reinforced elliptical plates, *Composite Structures*, 184, pp. 1040–1048.
100. Wang Y., Feng C., Zhao Z., et al., 2017, Buckling of Graphene Platelet Reinforced Composite Cylindrical Shell with Cutout, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18, pp. 1850040.

101. Wang Y., Feng C., Zhao Z., et al., 2018, Eigenvalue buckling of functionally graded cylindrical shells reinforced with graphene platelets (GPL), *Composite Structures*, 202, pp. 38–46.
102. Wang Y., Feng C., Zhao Z., et al., 2018, Torsional buckling of graphene platelets (GPLs) reinforced functionally graded cylindrical shell with cutout, *Composite Structures*, 197, pp. 72–79.
103. Wang Y.Q., Ye C., Zu J.W., 2019, Nonlinear vibration of metal foam cylindrical shells reinforced with graphene platelets, *Aerospace Science and Technology*, 85, pp. 359–370.
104. Dong Y.H., Zhu B., Wang Y., et al., 2018, Nonlinear free vibration of graded graphene reinforced cylindrical shells: Effects of spinning motion and axial load, *Journal of Sound and Vibration*, 437, pp. 79–96.
105. Cao Van Doan, Vu Hoai Nam, 2022, Large Deflection Bending Analysis of FG-GPLRC Doubly Curved Thin Shallow Shells Stiffened by Oblique Stiffeners, *Springer Nature, Singapore*, pp. 351–360.
106. Cao Van Doan and Dao Nhu Mai, 2021, Nonlinear buckling analysis of oblique stiffened FG-GPLRC doubly curved shallow shells in the thermal environment, *Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn lần thứ XV*, pp. 230–239
107. Shen H.S., Xiang Y., 2018, Postbuckling behavior of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical shells under axial compression in thermal environments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 330, pp. 64–82.
108. Shen H.S., Xiang Y., Fan Y., 2018, Postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical panels under axial compression in thermal environments, *International Journal of Mechanical Sciences*, 135, pp. 398–409.
109. Shen H.S., Xiang Y., 2018, Postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical shells subjected to external pressure in thermal environments, *Thin-Walled Structures*, 124, pp. 151–160.
110. Shen H.S., Xiang Y., Lin F., 2017, Thermal buckling and postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates resting on elastic foundations, *Thin-Walled Structures*, 118, pp. 229–237.

111. Shen H.S., Xiang Y., 2019, Thermal buckling and postbuckling behavior of FG-GRC laminated cylindrical shells with temperature-dependent material properties, *Meccanica*, 54, pp. 283–297.
112. Shen H.S., Xiang Y., Reddy J.N., 2019, Thermal postbuckling behavior of FG-GRC laminated cylindrical panels with temperature-dependent properties, *Composite Structures*, 211, pp. 433–442.
113. Shen H.S., Xiang Y., 2019, Torsional postbuckling behavior of FG-GRC laminated cylindrical shells in thermal environments, *Thin-Walled Structures*, 135, pp. 560–574.
114. Shen H.S., Xiang Y., Fan Y., et al., 2018, Nonlinear bending analysis of FG-GRC laminated cylindrical panels on elastic foundations in thermal environments, *Composites Part B: Engineering*, 141, pp. 148–157.
115. Shen H.S., Xiang Y., 2019, Postbuckling of pressure-loaded FG-GRC laminated cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *The European Physical Journal Plus*, 134, pp. 207.
116. Lei Z., Su Q., Zeng H., et al., 2018, Parametric studies on buckling behavior of functionally graded graphene-reinforced composites laminated plates in thermal environment, *Composite Structures*, 202, pp. 695–709.
117. Yu Y., Shen H.S., Wang H., et al., 2018, Postbuckling of sandwich plates with graphene-reinforced composite face sheets in thermal environments, *Composites Part B: Engineering*, 135, pp. 72–83.
118. Li C., Shen H.S., Yang J., et al., 2021, Low-velocity impact response of sandwich plates with GRC face sheets and FG auxetic 3D lattice cores, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 132, pp. 335–344.
119. Mirzaei M., Kiani Y., 2017, Isogeometric thermal buckling analysis of temperature dependent FG graphene reinforced laminated plates using NURBS formulation, *Composite Structures*, 180, pp. 606–616.
120. Kiani Y., Mirzaei M., 2018, Enhancement of non-linear thermal stability of temperature dependent laminated beams with graphene reinforcements, *Composite Structures*, 186, pp. 114–122.
121. Shen H.S., Lin F., Xiang Y., 2017, Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated beams resting on elastic foundations in thermal environment, *Nonlinear Dynamics*, 90, pp. 899–914.

122. Shen H.S., Xiang Y., Lin F., 2017, Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates in thermal environments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 319, pp. 175–193.
123. Shen H.S., Xiang Y., Fan Y., 2017, Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical shells in thermal environments, *Composite Structures*, 182, pp. 447–456.
124. Shen H.S., Xiang Y., Fan Y., et al., 2018, Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *Composites Part B: Engineering*, 136, pp. 177–186.
125. Fan Y., Xiang Y., Shen H. S., et al., 2018, Nonlinear low-velocity impact response of FG-GRC laminated plates resting on visco-elastic foundations, *Composites Part B: Engineering*, 144, pp. 184–194.
126. Singha T.D., Bandyopadhyay T., Karmakar A., 2022, A numerical solution for thermal free vibration analysis of rotating pre-twisted FG-GRC cylindrical shell panel, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 0, pp. 1–19.
127. Yin B.B., Lei Z., 2022, Vibration characteristics of cracked FG-GRC plates in thermal environments based on phase field theory and meshless method, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 0, pp. 1–23.
128. Shen H.S., Xiang Y., Fan Y., 2019, A novel technique for nonlinear dynamic instability analysis of FG-GRC laminated plates, *Thin-Walled Structures*, 139, pp. 389–397.
129. Mohammadi H., 2023, Isogeometric free vibration analysis of trapezoidally corrugated FG-GRC laminated panels using higher-order shear deformation theory, *Structures*, 48, pp. 642–656.
130. Kiani Y., 2018, Isogeometric large amplitude free vibration of graphene reinforced laminated plates in thermal environment using NURBS formulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 332, pp. 86–101.
131. Kiani Y., 2019, Buckling of functionally graded graphene reinforced conical shells under external pressure in thermal environment, *Composites Part B: Engineering*, 156, pp. 128–137.
132. Nam V.H., Dong D.T., Phuong N.T., et al., 2019, A study of nonlinear vibration of shear deformable FG - GRC laminated plates resting on elastic foundation, *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc. Kỷ niệm 40 năm thành lập Viện Cơ học, Hà Nội*, pp. 265–272.

133. Ly L.N., Phuong N.T., Nam. V.H., et al., 2020, An Analytical Approach of Nonlinear Thermo-mechanical Buckling of Functionally Graded Graphene-reinforced Composite Laminated Cylindrical Shells under Compressive Axial Load Surrounded by Elastic Foundation, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 6, pp. 357–372.
134. Phuong N.T., Nam. V.H., Trung V.H., et al., 2019, Thermomechanical postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated toroidal shell segments surrounded by Pasternak’s elastic foundation, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 0892705719870593.
135. Phuong N.T., Nam V.H., Trung N.T., et al., 2019, Nonlinear buckling analysis of FG - GRC laminated plates resting on elastic foundation based on the HSDT, *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc*, Kỷ niệm 40 năm thành lập Viện Cơ học, Hà Nội, pp. 305–312.
136. Phuong N.T., Trung N.T., Doan C.V., et al., 2020, Nonlinear thermomechanical buckling of FG-GRC laminated cylindrical shells stiffened by FG-GRC stiffeners subjected to external pressure, *Acta Mechanica*, 231, pp. 5125–5144.
137. Prawoto Y., 2012, Seeing auxetic materials from the mechanics point of view: A structural review on the negative Poisson’s ratio, *Computational Materials Science*, 58, pp. 140–153.
138. Saxena K.K., Das R., Calius E.P., 2016, Three Decades of Auxetics Research – Materials with Negative Poisson’s Ratio: A Review, *Advanced Engineering Materials*, 18, pp. 1847–1870.
139. Surjadi J.U., Gao L., Du H., et al., 2019, Mechanical Metamaterials and Their Engineering Applications, *Advanced Engineering Materials*, 21, pp. 1800864.
140. Lim T.C., 2015, Auxetic Materials and Structures, *Engineering Materials*, Springer.
141. Ren X., Das R., Tran P., et al., 2018, Auxetic metamaterials and structures: a review, *Smart Materials and Structures*, 27, pp. 023001.
142. Zhu X., Zhang J., Zhang W., et al., 2019, Vibration frequencies and energies of an auxetic honeycomb sandwich plate, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26, pp. 1951–1957.
143. Reddy J.N., 2003, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second Edition, CRC Press, Boca Raton.

144. Nguyễn Thị Phương, 2014, *Nghiên cứu ổn định tĩnh của tấm và vỏ composite cơ tính biến thiên có gân gia cường lệch tâm*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội.
145. Reddy J.N., Liu C.F., 1985, A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells, *International Journal of Engineering Science*, 23, pp. 319–330.
146. Вольтмир, А.С. (1956). *Гибкие пластинки и оболочки*, Наука, Москва.
147. Volmir A.S., 1972 *Non-linear dynamics of plates and shells*, Science Edition M, , Russian
148. Sofiyev A.H., Kuruoglu N., 2013, Torsional vibration and buckling of the cylindrical shell with functionally graded coatings surrounded by an elastic medium, *Composites Part B: Engineering*, 45, pp. 1133–1142.
149. Thang P.T., Trung N.T., 2016, Effect of stiffeners on nonlinear buckling of cylindrical shells with functionally graded coatings under torsional load, *Composite Structures*, 153, pp. 654–661.
150. Najafov A.M., Sofiyev A.H., Kuruoglu N., 2013, Torsional vibration and stability of functionally graded orthotropic cylindrical shells on elastic foundations, *Meccanica*, 48, pp. 829–840.
151. Huang H., Han Q., 2010, Nonlinear buckling of torsion-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environment, *European Journal of Mechanics- A/Solids*, 29, pp. 42–48.
152. Wang D.Y., Ma H.W., Yang G.T, 1992, Studies on the torsional buckling of elastic cylindrical shells, *Applied Mathematics Mechanics English Edition*, 13, pp. 211–215.
153. Huang H., Han Q., 2009, Nonlinear elastic buckling and postbuckling of axially compressed functionally graded cylindrical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, 51, pp. 500–507.
154. Shen H.-S., Xiang Y., 2018, Postbuckling behavior of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical shells under axial compression in thermal environments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 330, pp. 64–82.
155. Eslami, M.R., 2018, *Buckling and Postbuckling of Beams, Plates, and Shells*, Springer International Publishing AG.

156. Shen H.S, 2007, Postbuckling analysis of axially loaded piezolaminated cylindrical panels with temperature dependent properties, *Composite Structures*, 79, pp. 390–403.
157. Shen H.S., Lin F., Xiang Y., 2017, Nonlinear bending and thermal postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated beams resting on elastic foundations, *Engineering Structures*, 140, pp. 89–97.
158. Shen H.-S., 2005, Postbuckling of FGM plates with piezoelectric actuators under thermo-electro-mechanical loadings, *International Journal of Solids and Structures*, 42, pp. 6101–6121.
159. Shen H.-S., Xiang Y., F Lin., et al., 2017, Buckling and postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates in thermal environments, *Composites Part B: Engineering*, 119, pp. 67–78.

PHỤ LỤC

Phụ lục A1

Các hệ số A_{ij}^* và B_{ij}^* trong biểu thức (2.22) xác định được như sau

$$\begin{aligned} A_{11}^* &= A_{22}\Delta^{-1}, A_{22}^* = A_{11}\Delta^{-1}, A_{12}^* = -A_{12}\Delta^{-1}, A_{21}^* = -A_{21}\Delta^{-1}, \\ B_{11}^* &= (A_{22}B_{11} - A_{12}B_{21})\Delta^{-1}, B_{12}^* = (A_{22}B_{12} - A_{12}B_{22})\Delta^{-1}, \\ B_{21}^* &= -(A_{21}B_{11} - A_{11}B_{21})\Delta^{-1}, B_{22}^* = -(A_{21}B_{12} - A_{11}B_{22})\Delta^{-1}, \\ A_{66}^* &= A_{66}^{-1}, B_{66}^* = B_{66}A_{66}^{-1}, \Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}. \end{aligned}$$

Các hệ số X_{ij} và S_{ij} trong biểu thức (2.23) xác định được như sau

$$\begin{aligned} X_{11} &= (A_{22}B_{11} - A_{21}B_{12})\Delta^{-1}, X_{12} = (A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11})\Delta^{-1}, \\ X_{21} &= (A_{22}B_{21} - A_{21}B_{22})\Delta^{-1}, X_{22} = (A_{11}B_{22} - A_{12}B_{21})\Delta^{-1}, \\ X_{66} &= B_{66}A_{66}^{-1}, S_{11} = B_{11}B_{11}^* + B_{12}B_{21}^* - D_{11} \\ S_{12} &= B_{11}B_{12}^* + B_{12}B_{22}^* - D_{12}, S_{21} = B_{21}B_{11}^* + B_{22}B_{21}^* - D_{21}, \\ S_{22} &= B_{21}B_{12}^* + B_{22}B_{22}^* - D_{22}, S_{66} = B_{66}B_{66}^* - D_{66}. \end{aligned}$$

Các hệ số P_i trong biểu thức (2.26) xác định được như sau

$$\begin{aligned} P_1 &= (B_{12}A_{22}^* + B_{11}A_{12}^*), P_2 = (-2B_{66}A_{66}^* + B_{12}A_{21}^* + B_{11}A_{11}^* + B_{22}A_{22}^* + B_{21}A_{12}^*) \\ P_3 &= (B_{22}A_{21}^* + B_{21}A_{11}^*), P_4 = (S_{12} + S_{21} + 4S_{66}). \end{aligned}$$

Phụ lục A2

Các hệ số O_i ($i = 1 \rightarrow 9$) trong biểu thức (2.31) xác định được như sau

$$\begin{aligned} O_1 &= \frac{1}{32} \frac{\beta^2}{\alpha^2 A_{22}^*}, O_2 = -\frac{1}{32} \frac{(-16a\alpha^2 B_{21}^* + 4)}{\alpha \alpha^2 A_{22}^*}, O_3 = \frac{1}{32} \frac{\alpha^2}{\beta^2 [\lambda^4 A_{22}^* + A_{11}^* + \lambda^2 \beta^*]}, \\ O_4 &= \beta^4 [\lambda^4 A_{22}^* + A_{11}^* + \beta^* \lambda^2] - 2\alpha [2A_{22}^* \lambda^3 + \beta^* \lambda] \beta^3 \\ &+ \alpha^2 (6\lambda^2 A_{22}^* + \beta^*) \beta^2 - (4\lambda\beta - \alpha) A_{22}^* \alpha^3, \beta^* = (A_{12}^* + A_{21}^* + A_{66}^*) \\ O_5 &= 2 \left(\left[[2B_{21}^* \lambda^3 + \alpha^* \lambda] \beta^2 + 2\alpha^2 B_{21}^* \lambda \right] a - \lambda \right) \alpha \beta + \lambda^2 \beta^2 + \alpha^2 \\ &- \left\{ [B_{21}^* \lambda^4 + \alpha^* \lambda^2 + B_{12}^*] \beta^4 + \alpha^2 (6\lambda^2 B_{21}^* + \alpha^*) \beta^2 + B_{21}^* \alpha^4 \right\} a, \alpha^* = (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \\ O_6 &= \beta^4 [\lambda^4 A_{22}^* + \beta^* \lambda^2 + A_{11}^*] + (4\lambda\beta + \alpha) \alpha^3 A_{22}^* \\ &+ \alpha^2 (6\lambda^2 A_{22}^* + \beta^*) \beta^2 + 2\alpha [2A_{22}^* \lambda^3 + \beta^* \lambda] \beta^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_7 &= -2\left(\left[2B_{21}^* \lambda^3 + \alpha^* \lambda\right] \beta^2 + 2\alpha^2 B_{21}^* \lambda\right) \alpha \beta + \lambda^2 \beta^2 + \alpha^2 \\
&\quad - \left\{ \left[B_{21}^* \lambda^4 + \alpha^* \lambda^2 + B_{12}^* \right] \beta^4 + \alpha^2 \left(6\lambda^2 B_{21}^* + \alpha^* \right) \beta^2 + B_{21}^* \alpha^4 \right\} a, \\
O_8 &= \left[2\lambda^4 A_{22}^* + 2\beta^* \lambda^2 + 2A_{11}^* \right] \beta^4 + 216A_{22}^* \lambda \alpha^3 \beta + 162\alpha^4 A_{22}^* \\
&\quad + 108 \left(A_{22}^* \lambda^2 + \frac{\beta^*}{6} \right) \alpha^2 \beta^2 + 24 \left[A_{22}^* \lambda^3 + 0.5\beta^* \lambda \right] \alpha \beta^3, \\
O_9 &= 2 \left[\lambda^4 A_{22}^* + \beta^* \lambda^2 + A_{11}^* \right] \beta^4 - 216A_{22}^* \lambda \alpha^3 \beta + 162\alpha^4 A_{22}^* \\
&\quad + 108\alpha^2 \left(\lambda^2 A_{22}^* + \frac{\beta^*}{6} \right) \beta^2 - 24 \left[A_{22}^* \lambda^3 + 0.5\beta^* \lambda \right] \alpha \beta^3.
\end{aligned}$$

Các hệ số $V_i (i=1 \rightarrow 11)$ trong các biểu thức (2.34), (2.35) và (2.37) xác định được như sau

$$\begin{aligned}
V_1 &= -\frac{(O_1 + O_3)n^2 \pi^3 m^2}{aL}, \quad V_2 = -\frac{n^2 \alpha^2 \beta^2 m^2 \pi^3}{4aL} (2O_9^{-1} + 2O_8^{-1} + O_6^{-1} + O_4^{-1}), \\
V_3 &= \frac{n^2 h \lambda L \pi}{a}, \quad V_4 = -\frac{1}{2} \frac{n^2 h L \pi}{a}, \\
V_5 &= -\frac{\beta^2 (L\lambda n + \pi a m)^4 \pi P_1 \alpha^2}{4a^3 O_6 L^3} - \frac{\beta^2 (L\lambda n - \pi a m)^4 \pi P_1 \alpha^2}{4a^3 O_4 L^3} - \frac{\alpha^2 n^2 \beta^2 (L\lambda n + \pi a m)^2 \pi P_3}{4La^3 O_6} \\
&\quad - \frac{\alpha^2 n^2 \beta^2 (L\lambda n - \pi a m)^2 \pi P_3}{4La^3 O_4} + \frac{\beta^2 \pi (R\lambda^2 + a) n^2 \alpha^2 L}{4a^2 R O_4} - \frac{m \pi^2 \beta^2 (L\lambda n - 1/2\pi a m) \alpha^2}{2a O_4 L} \\
&\quad + \frac{n^2 (-4O_2 O_6 R a + a\beta^2 + O_7 R) \pi^3 m^2}{4La^2 R O_6} + \frac{\beta^2 \pi (R\lambda^2 + a) n^2 \alpha^2 L}{4a^2 R O_6} + \frac{n^2 (a\beta^2 + O_5 R) \pi^3 m^2}{4La^2 R O_4} \\
&\quad - \frac{\alpha^2 (O_4 + O_6) n^4 \beta^2 L \pi P_5}{4a^3 O_4 O_6} + \frac{\beta^2 \pi^2 \alpha^2 m (2L\lambda n + \pi a m)}{4a O_6 L}, \quad V_6 = \frac{\pi (L\lambda n + \pi a m)^4 (a\beta^2 + O_7 R) P_1}{4Ra^4 L^3 O_6} \\
&\quad + \frac{\pi (L\lambda n - \pi a m)^4 (a\beta^2 + O_5 R) P_1}{4Ra^4 L^3 O_4} + \frac{\pi n^2 (L\lambda n + \pi a m)^2 (a\beta^2 + O_7 R) P_2}{4RLa^4 O_6} \\
&\quad + \frac{\pi n^2 (L\lambda n - \pi a m)^2 (a\beta^2 + O_5 R) P_2}{4RLa^4 O_4} + \frac{\pi n^4 L (O_4 a \beta^2 + O_6 a \beta^2 + O_4 O_7 R + O_5 O_6 R) P_3}{4RO_4 a^4 O_6} \\
&\quad + \frac{\pi n^4 L S_{22} - 1/2\pi L a K_1}{2a^3} + \frac{\pi n^2 (L^2 \lambda^2 n^2 + \pi^2 a^2 m^2) P_4}{2La^3} \\
&\quad + \frac{\pi (L^4 \lambda^4 n^4 + 6L^2 \pi^2 a^2 \lambda^2 m^2 n^2 + \pi^4 a^4 m^4) S_{11}}{2a^3 L^3} - \frac{\pi K_2 [n^2 (\lambda^2 + 1) L^2 + \pi^2 a^2 m^2]}{2aL} \\
&\quad - \frac{(a\beta^2 + O_7 R) [(L\lambda n + \pi a m)^2 R + L^2 a n^2] \pi}{4La^3 R^2 O_6} - \frac{[(L\lambda n - \pi a m)^2 R + L^2 a n^2] (a\beta^2 + O_5 R) \pi}{4La^3 R^2 O_4},
\end{aligned}$$

$$V_7 = -\frac{n^2 \alpha^2 \beta^2 m^2 \pi^3}{2aLO_4O_6O_8O_9} \left\{ \left[(O_8 + O_9)O_6 + \frac{1}{2}O_8O_9 \right] O_4 + \frac{1}{2}O_6O_8O_9 \right\},$$

$$V_8 = \frac{\pi^3 m^2 n^2 (O_4 a \beta^2 + O_6 a \beta^2 + O_4 O_7 R + O_5 O_6 R)}{4O_4 O_6 R a^2 L} + \frac{2\pi^3 O_1 m^2 (-4P_1 \pi^2 a m^2 + L^2)}{L^3},$$

$$V_9 = -\frac{3}{4} \frac{\pi}{L^3} \left[\frac{32m^4 (P_1 O_2 - S_{11}/2) a \pi^4}{3} + \frac{4}{3} L^2 m^2 (K_2 a - 2O_2) \pi^2 + K_1 L^4 a \right],$$

$$V_{10} = \frac{2A_{11} A_{66} h a \pi L}{A_{66} A_{11} A_{22} - A_{66} A_{12} A_{21}}, \quad V_{11} = -2 \frac{(A_{11} A_{66} \Phi_{1y} - A_{21} A_{66} \Phi_{1x}) a \pi L}{A_{11} A_{66} A_{22} - A_{12} A_{66} A_{21}}.$$

Các hệ số $T_i (i=1 \rightarrow 5), T_j (i=6 \rightarrow 11)$ trong các biểu thức (2.41) và (2.44) xác định được như sau

$$T_1 = -4V_7^2 (L\pi V_4 n^2 + 4V_1 V_{10} a) K_1 - 32Lh\pi V_7^2 V_1,$$

$$T_2 = -4K_1^2 L^2 \pi^2 V_4 V_7 a n^2 - 16K_1^2 L\pi V_1 V_{10} V_7 a^2 - 32K_1 L^2 \pi^2 V_1 V_7 a h - 8K_1 L\pi V_4 V_7 V_9 n^2$$

$$- 32K_1 V_1 V_{10} V_7 V_9 a - 16K_1 V_{10} V_2 V_8^2 a + 16K_1 V_{10} V_5 V_7 V_8 a - 16K_1 V_{10} V_6 V_7^2 a$$

$$+ 16K_1 V_{11} V_4 V_7^2 a - 64L\pi V_1 V_7 V_9 h - 32L\pi V_2 V_8^2 h + 32L\pi V_5 V_7 V_8 h - 32L\pi V_6 V_7^2 h,$$

$$T_3 = -K_1^3 L^3 \pi^3 V_4 a^2 n^2 - 4K_1^3 L^2 \pi^2 V_1 V_{10} a^3 - 8K_1^2 L^3 \pi^3 V_1 a^2 h - 4K_1^2 L^2 \pi^2 V_4 V_9 a n^2$$

$$- 16K_1^2 L\pi V_1 V_{10} V_9 a^2 + 8K_1^2 L\pi V_{10} V_5 V_8 a^2 - 16K_1^2 L\pi V_{10} V_6 V_7 a^2$$

$$+ 16K_1^2 L\pi V_{11} V_4 V_7 a^2 - 32K_1 L^2 \pi^2 V_1 V_9 a h + 16K_1 L^2 \pi^2 V_5 V_8 a h$$

$$- 32K_1 L^2 \pi^2 V_6 V_7 a h - 4K_1 L\pi V_4 V_9^2 n^2 - 16K_1 V_1 V_{10} V_9^2 a + 16K_1 V_{10} V_5 V_8 V_9 a$$

$$- 32K_1 V_{10} V_6 V_7 V_9 a + 32K_1 V_{11} V_4 V_7 V_9 a - 32L\pi V_1 V_9^2 h + 32L\pi V_5 V_8 V_9 h - 64L\pi V_6 V_7 V_9 h,$$

$$T_4 = -8 \left(-\frac{a}{2} (-V_{10} V_6 + V_{11} V_4) K_1 + Lh\pi V_6 \right) (K_1 L\pi a + 2V_9)^2,$$

$$T_5 = V_3 (Lh\pi + 1/2aK_1 V_{10}), \quad T_6 = 2L\pi V_7 h n^2, \quad T_7 = 8K_1 V_{10} V_7 a^2 + 16L\pi V_7 a h,$$

$$T_8 = -4K_1 V_{10} V_8 a^2 + (K_1 L^2 \pi^2 n^2 - 8L\pi V_8 - 8V_{11} V_7) h a + 2L\pi V_9 h n^2,$$

$$T_9 = 4K_1^2 L\pi V_{10} a^3 + 8K_1 (L^2 \pi^2 h + V_{10} V_9) a^2 + 16L\pi V_9 a h,$$

$$T_{10} = -4K_1 L\pi V_{11} a^2 h - 8V_{11} V_9 a h,$$

$$T_{11} = (L\pi h + 1/2K_1 V_{10} a) a.$$

Phụ lục A3

Các hệ số J_{1i} ($i = 1 \rightarrow 6$) trong biểu thức (2.50) xác định được như sau

$$J_{11} = \frac{16a\alpha^2 B_{21}^* - 4}{32a\alpha^2 A_{12}^*}, J_{12} = \frac{\beta^2}{32\alpha^2 A_{22}^*}, J_{13} = \frac{\alpha^2}{32\beta^2 A_{11}^*},$$

$$J_{14} = \frac{1}{2} \frac{\beta^2 \alpha^2}{\alpha^4 A_{22}^* + \beta^2 (A_{12}^* + A_{21}^* + A_{66}^*) \alpha^2 + \beta^4 A_{11}^*},$$

$$J_{15} = \frac{Ra\alpha^4 B_1 + (-1 + a(B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*)\beta^2)R\alpha^2 + a\beta^2 (R\beta^2 B_{12}^* - 1)}{a(\alpha^4 A_{22}^* + \beta^2 (A_{12}^* + A_{21}^* + A_{66}^*) \alpha^2 + \beta^4 A_{11}^*)R}$$

$$J_{16} = \frac{1}{2} \frac{\beta^2 \alpha^2}{81\alpha^4 A_{22}^* + 9\beta^2 (A_{12}^* + A_{21}^* + A_{66}^*) \alpha^2 + \beta^4 A_{11}^*},$$

Các hệ số J_{2i} ($i = 1 \rightarrow 6$), J_{3j} ($j = 1 \rightarrow 5$) trong các biểu thức (2.51) đến (2.54) xác định được như sau

$$J_{21} = \frac{\pi^3 ahm^2}{2L}, J_{22} = \frac{\pi n^2 hL}{2a}, J_{23} = -\frac{\pi^3 (J_{14} + J_{16}) n^2 m^2}{2aL},$$

$$J_{24} = -\frac{\pi^3 J_{14} n^2 m^2 P_2}{2aL} - \frac{\pi^5 a P_1 J_{14} m^4}{2L^3} - \frac{\pi^3 (-J_{14} a + n^2 (J_{15} + 2J_{11})) m^2}{2aL}$$

$$-\frac{\pi n^4 P_3 J_{14} L}{2a^3} + \frac{\pi L n^2 J_{14}}{2aR}, J_{25} = -\frac{\pi^3 (2J_{12} + 2J_{13}) n^2 m^2}{2aL},$$

$$J_{26} = -\frac{\pi a L K_1}{2} + \frac{\pi^3 J_{15} m^2}{2L} + \frac{\pi J_{15} L n^2}{2aR} - \frac{\pi L n^4 (J_{15} P_3 - S_{22})}{2a^3}$$

$$-\frac{\pi (\pi^2 a^2 m^2 + L^2 n^2) K_2}{2aL} - \frac{\pi^3 n^2 m^2 (J_{15} P_2 - P_4)}{2aL} - \frac{\pi^5 a (J_{15} P_1 - S_{11}) m^4}{2L^3},$$

Các hệ số J_{3j} ($j = 6 \rightarrow 9$) và J_{40} trong các biểu thức (2.56) và (2.57) xác định được như sau

$$J_{36} = \frac{a(\Phi_{1x} A_{21}^* + \Phi_{1y} A_{22}^*)}{K_1 a^2 A_{22}^* + 1}, J_{37} = \frac{n^2}{8a(K_1 a^2 A_{22}^* + 1)}, J_{38} = \frac{ah(RA_{21}^* - aA_{22}^*)}{R(K_1 a^2 A_{22}^* + 1)},$$

$$J_{39} = -2 \frac{L\pi ah + J_{35} R}{R}, J_{40} = -K_1 L\pi a - 2J_{31}.$$

Các hệ số J_{4i} ($i = 1 \rightarrow 6$) trong biểu thức (2.58) có dạng như sau

$$\begin{aligned}
J_{41} &= -16J_{22}J_{32}ah + 16Rh(J_{21}J_{32} - J_{25}J_{34})(K_1a^2A_{22}^* + 1) \\
&\quad - 16J_{22}R(J_{32}a^2A_{21}^*h - 1/8n^2J_{34})K_1, \\
J_{42} &= 16\left(\left(K_1(J_{21}A_{22}^* - J_{22}A_{21}^*)a^2 + J_{21}\right)R - J_{22}a\right)hJ_{33} \\
&\quad - 16\left(K_1a^2A_{22}^* + 1\right)h(L\pi ah + J_{35}R)J_{25} + 2J_{22}K_1n^2(L\pi ah + J_{35}R), \\
J_{43} &= -16J_{23}J_{32}K_1Ra^2hA_{22}^* - 16J_{23}J_{32}Rh, \\
J_{44} &= -16Rh\left(K_1a^2A_{22}^* + 1\right)(J_{23}J_{33} + J_{24}J_{32}), \\
J_{45} &= 16J_{32}J_{22}a^2K_1R\left(\Phi_{1x}A_{21}^* + \Phi_{1y}A_{22}^*\right) + 8\left(LJ_{25}ah\pi - \frac{J_{31}n^2J_{22}}{4}\right)RK_1 \\
&\quad + 8\left(2A_{22}^*ha^2K_1 + 2h\right)R(-J_{24}J_{33} + J_{25}J_{31} - J_{26}J_{32}) + 8La\pi\left(J_{25}A_{22}^*a^2h - \frac{J_{22}n^2}{8}\right)RK_1^2, \\
J_{46} &= 16J_{33}R\left(a^2\left((J_{22}\Phi_{1y} - hJ_{26})A_{22}^* + A_{21}^*J_{22}\Phi_{1x}\right)K_1 - hJ_{26}\right).
\end{aligned}$$

Các hệ số J_{5i} ($i=1 \rightarrow 6$) trong biểu thức (2.62) xác định được như sau

$$\begin{aligned}
J_{51} &= \left(\left(\left(8J_{38}J_{44} + 8J_{40}\right)J_{32} - 8J_{34}\left(J_{38}J_{41} + J_{37}\right)\right)hA_{12}^* + 8hA_{11}^*J_{32}\right)L^2 - m^2J_{34}\pi^2, \\
J_{52} &= \left(\left(\left(8J_{38}J_{44} + 8J_{40}\right)J_{45} + 8J_{46}\left(J_{38}J_{41} + J_{37}\right)\right)hA_{12}^* + 8hA_{11}^*J_{45}\right)L^2 + m^2\pi^2J_{46}, \\
J_{53} &= 8J_{32}\left(J_{38}J_{43} + J_{36}\right)hA_{12}^*L^2 + 2\pi^2J_{45}m^2, \\
J_{54} &= \left(\left(8J_{38}J_{42} + 8J_{39}\right)J_{32} + \left(8J_{38}J_{43} + 8J_{36}\right)J_{45} + 8J_{48}\left(J_{38}J_{41} + J_{37}\right)\right)hA_{12}^*L^2 + \pi^2J_{48}m^2, \\
J_{55} &= \left(\left(8J_{38}J_{42} + 8J_{39}\right)J_{45} + 8J_{47}\left(J_{38}J_{41} + J_{37}\right)\right)hA_{12}^*, \\
J_{56} &= 2\pi^2J_{32}m^2.
\end{aligned}$$

Phụ lục B1

Các hệ số $A_{ij}^*, B_{ij}^*, C_{ij}^*, D_{ij}^*, E_{ij}^*, L_{ij}^*$ ($i, j=1, 2, 6$) và \bar{H}_{ij}^* ($i=j=5, 6, 8, 9$) trong các biểu thức (3.23) và (3.24) (3.9) xác định được như sau

$$\begin{aligned}
A_{22}^* &= \frac{A_{22}}{\Delta}, A_{11}^* = \frac{A_{11}}{\Delta}, A_{12}^* = -\frac{A_{12}}{\Delta}, A_{66}^* = A_{66}^{-1}, B_{11}^* = \frac{A_{12}B_{12} - A_{22}B_{11}}{\Delta}, \\
B_{12}^* &= \frac{A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12}}{\Delta}, B_{21}^* = \frac{A_{12}B_{11} - A_{11}B_{12}}{\Delta}, B_{22}^* = \frac{A_{12}B_{12} - A_{11}B_{22}}{\Delta}, \\
B_{66}^* &= -\frac{B_{66}}{A_{66}}, C_{11}^* = \frac{A_{12}C_{12} - A_{22}C_{11}}{\Delta}, C_{12}^* = \frac{A_{12}C_{22} - A_{22}C_{12}}{\Delta}, C_{21}^* = \frac{A_{12}C_{11} - A_{11}C_{12}}{\Delta}, \\
C_{22}^* &= \frac{A_{12}C_{12} - A_{11}C_{22}}{\Delta}, \Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2, C_{66}^* = -\frac{C_{66}}{A_{66}}, D_{11}^* = B_{11}B_{11}^* + B_{12}B_{21}^* + D_{11}, \\
D_{12}^* &= B_{11}B_{12}^* + B_{12}B_{22}^* + D_{12}, D_{21}^* = B_{12}B_{11}^* + B_{22}B_{21}^* + D_{12},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{22}^* &= B_{12}B_{12}^* + B_{22}B_{22}^* + D_{22}, \quad D_{66}^* = B_{66}B_{66}^* + D_{66}, \\
E_{11}^* &= B_{11}C_{11}^* + B_{12}C_{21}^* + \hat{E}_{11}, \quad E_{12}^* = B_{11}C_{12}^* + B_{12}C_{22}^* + \hat{E}_{12}, \\
E_{66}^* &= B_{66}C_{66}^* + \hat{E}_{66}, \quad H_{55}^* = B_{11}A_{22}^* + B_{12}A_{12}^*, \quad H_{66}^* = B_{11}A_{12}^* + B_{12}A_{11}^*, \\
E_{21}^* &= B_{12}C_{11}^* + B_{22}C_{21}^* + \hat{E}_{12}, \quad E_{22}^* = B_{12}C_{12}^* + B_{22}C_{22}^* + \hat{E}_{22}, \\
\bar{H}_{55}^* &= B_{12}A_{22}^* + B_{22}A_{12}^*, \quad \bar{H}_{66}^* = B_{12}A_{12}^* + B_{22}A_{11}^*, \\
L_{11}^* &= C_{11}C_{11}^* + C_{12}C_{21}^* + L_{11}, \quad L_{12}^* = C_{11}C_{12}^* + C_{12}C_{22}^* + L_{12}, \\
L_{21}^* &= C_{12}C_{11}^* + C_{22}C_{21}^* + L_{12}, \quad L_{22}^* = C_{12}C_{12}^* + C_{22}C_{22}^* + L_{22}, \\
L_{66}^* &= C_{66}C_{66}^* + L_{66}, \quad H_{88}^* = C_{11}A_{22}^* + C_{12}A_{12}^*, \quad H_{99}^* = C_{11}A_{12}^* + C_{12}A_{11}^*, \\
\bar{H}_{88}^* &= C_{12}A_{22}^* + C_{22}A_{12}^*, \quad \bar{H}_{99}^* = C_{12}A_{12}^* + C_{22}A_{11}^*,
\end{aligned}$$

Các hệ số u_i ($i = 1 \div 8$) trong biểu thức (3.31) xác định được như sau

$$\begin{aligned}
u_1 &= \lambda(-C_{11}^* + 2C_{66}^* - C_{22}^*), \quad u_2 = -\lambda^2(L_{12}^* + L_{21}^* + 4L_{66}^*), \quad u_3 = \lambda(-\lambda L_{11}^* + E_{11}^*), \\
u_4 &= \lambda(-\lambda L_{21}^* - 2\lambda L_{66}^* + E_{12}^* + 2E_{66}^*), \quad u_5 = \lambda(-\lambda L_{12}^* - 2\lambda L_{66}^* + E_{21}^* + 2E_{66}^*), \\
u_6 &= \lambda(-\lambda L_{22}^* + E_{22}^*), \quad u_7 = -3H_{66}\lambda + H_{44}, \quad u_8 = H_{55} - 3H_{77}\lambda.
\end{aligned}$$

Các hệ số p_i ($i = 1 \rightarrow 8$) trong biểu thức (3.32) xác định được như sau

$$\begin{aligned}
p_1 &= \lambda C_{21}^* - B_{21}^*, \quad p_2 = B_{66}^* - B_{11}^* - \lambda(C_{66}^* - C_{11}^*), \quad p_3 = \lambda^2 L_{11}^* - \lambda E_{11}^*, \\
p_4 &= ((L_{12}^* + 2L_{66}^*)\lambda - E_{12}^* - 2E_{66}^*)\lambda, \quad p_5 = D_{11}^* - \lambda E_{11}^* - \lambda(-\lambda L_{11}^* + E_{11}^*), \\
p_6 &= D_{66}^* - E_{66}^*\lambda - \lambda(-\lambda L_{66}^* + E_{66}^*), \quad p_8 = 3H_{66}\lambda - H_{44}, \\
p_7 &= (L_{12}^* + L_{66}^*)\lambda^2 - (E_{12}^* + E_{21}^* + 2E_{66}^*)\lambda + D_{12}^* + D_{66}^*.
\end{aligned}$$

Các hệ số g_i ($i = 1 \rightarrow 8$) trong biểu thức (3.33) xác định được như sau

$$\begin{aligned}
g_1 &= B_{66}^* - B_{22}^* - \lambda(C_{66}^* - C_{22}^*), \quad g_2 = \lambda C_{12}^* - B_{12}^*, \quad g_3 = ((L_{21}^* + 2L_{66}^*)\lambda - E_{21}^* - 2E_{66}^*)\lambda, \\
g_4 &= \lambda^2 L_{22}^* - \lambda E_{22}^*, \quad g_5 = (L_{21}^* + L_{66}^*)\lambda^2 + (-E_{12}^* - E_{21}^* - 2E_{66}^*)\lambda + D_{21}^* + D_{66}^*, \\
g_6 &= D_{66}^* - E_{66}^*\lambda - \lambda(-\lambda L_{66}^* + E_{66}^*), \quad g_7 = D_{22}^* - \lambda E_{22}^* - \lambda(E_{22}^* - \lambda L_{22}^*), \\
g_8 &= 3H_{77}\lambda - H_{55}.
\end{aligned}$$

Các hệ số d_i ($i = 1 \div 6$) trong biểu thức (3.34) xác định được như sau

$$\begin{aligned}
d_1 &= 2A_{12}^* + A_{66}^*, \quad d_2 = -\lambda(C_{11}^* + C_{22}^* - 2C_{66}^*), \quad d_3 = B_{21}^* - \lambda C_{21}^*, \\
d_4 &= \lambda C_{66}^* - \lambda C_{11}^* + B_{11}^* - B_{66}^*, \quad d_5 = (C_{66}^* - C_{22}^*)\lambda + B_{22}^* - B_{66}^*, \quad d_6 = B_{12}^* - \lambda C_{12}^*.
\end{aligned}$$

Phụ lục B2

Các hệ số a_i ($i=1 \rightarrow 10$) trong biểu thức (3.39) xác định được như sau

$$a_1 = -\frac{bm^2\pi^2}{4a}, a_2 = \frac{ab\delta}{n\pi^2m}, a_3 = -\frac{an^2\pi^2}{4b}, a_4 = \frac{2n\pi^2m\delta}{3ab},$$

$$\delta = -(-1)^m - (-1)^n + (-1)^{m+n} + 1,$$

$$a_5 = -\frac{e_1b\lambda m^4\pi^4C_{21}^*}{4a^3} - \frac{e_1a\lambda n^4\pi^4C_{12}^*}{4b^3} - \frac{\pi^2be_1m^2}{4aR} + \frac{\pi^3bm^3u_3}{4a^2}$$

$$+ \frac{\pi^3mn^2u_4}{4b} + \frac{\pi^4m^2n^2u_1e_1}{4ab} - \frac{\pi bmu_7}{4},$$

$$a_6 = \frac{\pi^3m^2nu_5}{4a} + \frac{an^3\pi^3u_6}{4b^2} + \frac{e_2m^2n^2\pi^4u_1}{4ab} - \frac{e_2a\lambda n^4\pi^4C_{12}^*}{4b^3} - \frac{e_2b\lambda m^4\pi^4C_{21}^*}{4a^3}$$

$$- \frac{au_8n\pi}{4} - \frac{\pi^2be_2m^2}{4aR},$$

$$a_7 = -\frac{\pi^4(a^4n^4A_{22}^* + b^4m^4A_{11}^*)}{64b^3a^3A_{11}^*A_{22}^*}, a_8 = \frac{nm\pi^2\lambda\delta C_{12}^*}{6abA_{22}^*} + \frac{an\delta}{24bRmA_{11}^*} + \frac{nm\pi^2\lambda\delta C_{21}^*}{6abA_{11}^*},$$

$$a_9 = -\frac{baK_1}{4} - \frac{(a^2n^2 + b^2m^2)\pi^2K_2}{4ab} - \frac{b\lambda^2m^4\pi^4L_{11}^*}{4a^3} - \frac{\lambda^2n^4a\pi^4L_{22}^*}{4b^3} - \frac{b\lambda m^4e_3\pi^4C_{21}^*}{4a^3}$$

$$- \frac{\pi^4m^2n^2(e_3u_1 + u_2)}{4ab} - \frac{\lambda n^4e_3a\pi^4C_{12}^*}{4b^3} - \frac{e_3bm^2\pi^2}{4aR} - \frac{\pi^2an^2u_8}{4b} - \frac{\pi^2bm^2u_7}{4a},$$

$$a_{10} = -\frac{9baK_3}{64}.$$

Các hệ số b_i ($i=1 \rightarrow 8$) trong các biểu thức (3.40) và (3.41) xác định được như sau

$$b_1 = -\frac{\left((-3H_{66}\lambda + H_{44})b^2 + p_6n^2\pi^2\right)a^3 + \pi^3a^2e_1mn^2p_2 + \pi^2ab^2m^2p_5 + \pi^3b^2e_1m^3p_1}{4ba^2},$$

$$b_2 = -\frac{\left(e_2(a^2n^2p_2 + b^2m^2p_1)\pi + ba^2np_7\right)\pi^2m}{4ba^2}, b_3 = \frac{p_1n\delta\pi}{6bA_{11}^*},$$

$$b_4 = -\frac{\pi m\left(\left(n^2(e_3p_2 + p_4)a^2 + b^2m^2(e_3p_1 + p_3)\right)\pi^2 - a^2b^2p_8\right)}{4ba^2},$$

$$b_5 = -\frac{n\left(e_1(a^2g_2n^2 + b^2g_1m^2)\pi + b^2ag_5m\right)\pi^2}{4b^2a},$$

$$b_6 = -\frac{\left((-3H_{77}\lambda + H_{55})a^2 + m^2\pi^2g_6\right)b^3 + \pi^3b^2e_2g_1m^2n + \pi^2a^2bg_7n^2 + \pi^3a^2e_2g_2n^3}{4b^2a},$$

$$b_7 = \frac{mg_2\pi\delta}{6aA_{22}^*}, b_8 = -\frac{n\pi\left(\left(n^2(e_3g_2 + g_4)a^2 + b^2m^2(e_3g_1 + g_3)\right)\pi^2 - b^2g_8a^2\right)}{4b^2a},$$

Phụ lục B3

Các hệ số t_i ($i = 1 \rightarrow 8$) trong biểu thức (3.48) xác định được như sau

$$t_1 = \frac{\delta \left(- \left((\lambda C_{11}^* - B_{11}^*) A_{11}^* - A_{12}^* (\lambda C_{21}^* - B_{21}^*) \right) b^2 m + a n^2 e_1 \pi \Delta^* \right)}{\pi a b^2 m n \Delta^*}, \quad \Delta^* = (A_{11}^* A_{22}^* - A_{12}^{*2}),$$

$$t_2 = \frac{\delta \left(\left((B_{12}^* - \lambda C_{12}^*) A_{11}^* - A_{12}^* (B_{22}^* - \lambda C_{22}^*) \right) b + n \pi e_2 \Delta^* \right)}{\pi b^2 m \Delta^*},$$

$$t_3 = \frac{(b^2 m^2 A_{11}^* - a^2 n^2 A_{12}^*) \pi^2}{8 a^2 b^2 \Delta^*},$$

$$t_4 = \frac{m \delta A_{12}^* \lambda C_{21}^*}{a^2 n \Delta^*} + \frac{n \delta A_{12}^* \lambda C_{22}^*}{b^2 m \Delta^*} - \frac{n \delta A_{11}^* \lambda C_{12}^*}{b^2 m \Delta^*} - \frac{m \delta C_{11}^* A_{11}^* \lambda}{a^2 n \Delta^*} + \frac{\delta n e_3}{b^2 m} + \frac{\delta A_{12}^*}{\pi^2 R m n \Delta^*},$$

$$t_5 = - \frac{\delta \left(\left((B_{11}^* - \lambda C_{11}^*) A_{12}^* - A_{22}^* (B_{21}^* - \lambda C_{21}^*) \right) a - \pi m e_1 \Delta^* \right)}{\pi a^2 n \Delta^*},$$

$$t_6 = \frac{(a^2 n \left((\lambda C_{12}^* - B_{12}^*) A_{12}^* - A_{12}^* (\lambda C_{22}^* - B_{22}^*) \right) + b m^2 e_2 \pi \Delta^*) \delta}{\pi b a^2 m n \Delta^*},$$

$$t_7 = \frac{(a^2 n^2 A_{22}^* - b^2 m^2 A_{12}^*) \pi^2}{8 a^2 b^2 \Delta^*},$$

$$t_8 = \frac{\delta \lambda n A_{22}^* C_{22}^*}{b^2 m \Delta^*} - \frac{\delta \lambda n A_{12}^* C_{12}^*}{b^2 m \Delta^*} - \frac{\delta \lambda A_{12}^* m C_{11}^*}{a^2 n \Delta^*} - \frac{\delta m e_3}{a^2 n} + \frac{\delta \lambda m A_{22}^* C_{21}^*}{a^2 n \Delta^*} + \frac{\delta A_{22}^*}{\pi^2 m n \Delta^* R}$$

Các hệ số q_i ($i = 1 \rightarrow 5$) trong biểu thức (3.49) xác định được như sau

$$q_1 = - \frac{(a_1 (c_1 t_1 + c_3 t_2 + t_3) \mu_1 + a_3 (c_1 t_5 + c_3 t_6 + t_7) \mu_2 + c_6) h^3}{a_2},$$

$$q_2 = - \frac{h^2 c_7}{a_2} - \frac{\mu_2 (c_1 t_5 + c_3 t_6 + t_7) h^2}{R},$$

$$q_3 = - \frac{(a_1 (c_2 t_1 + c_4 t_2 + t_4) \mu_1 + a_3 (c_2 t_5 + c_4 t_6 + t_8) \mu_2 + c_5) h^2}{a_2},$$

$$q_4 = - \frac{h^3 a_{10}}{a_2}, \quad q_5 = - \frac{h c_8}{a_2} - \frac{h \mu_2 (c_2 t_5 + c_4 t_6 + t_8)}{R}.$$

Các hệ số z_i ($i = 1 \rightarrow 8$) trong các biểu thức (3.50) và (3.51) xác định được như sau

$$z_1 = \frac{A_{12}^* h}{A_{11}^*}, \quad z_2 = \frac{n (c_1 e_1 + c_3 e_2) \delta A_{12}^*}{b^2 m A_{11}^*} + \frac{c_1 \delta B_{21}^*}{a \pi n A_{11}^*} + \frac{c_3 \delta B_{22}^*}{b \pi m A_{11}^*} + \frac{m (c_1 e_1 + c_3 e_2) \delta}{a^2 n} \\ - \frac{\lambda c_1 \delta C_{21}^*}{a \pi n A_{11}^*} - \frac{c_3 \lambda \delta C_{22}^*}{b \pi m A_{11}^*} + \frac{n^2 \pi^2}{8 b^2 A_{11}^*},$$

$$z_3 = -\frac{\lambda\delta(\pi b^2 m^2 + ab^2 c_2 m)C_{21}^*}{\pi a^2 b^2 m n A_{11}^*} - \frac{\lambda\delta C_{22}^*(\pi n + bc_4)}{\pi b^2 m A_{11}^*} + \frac{m\delta(c_2 e_1 + c_4 e_2 + e_3)}{a^2 n}$$

$$+ \frac{n\delta(c_2 e_1 + c_4 e_2 + e_3)A_{12}^*}{b^2 m A_{11}^*} + \frac{\delta c_2 B_{21}^*}{a\pi n A_{11}^*} + \frac{\delta(\pi R a^2 b c_4 n B_{22}^* - a^2 b^2)}{a^2 b^2 m R \pi^2 n A_{11}^*},$$

$$z_4 = -\frac{A_{12}^*}{A_{11}^*}, \quad z_5 = h^2(a_3 \mu_2 z_2 + c_6), \quad z_6 = \left(c_7 h + \frac{a_2 h \mu_2 z_2}{R}\right),$$

$$z_7 = \left(\frac{a_2 \mu_2 z_3}{R} + c_8\right), \quad z_8 = h(a_3 \mu_2 z_3 + c_5).$$

Phụ lục C1

Các hệ số $e_{i(c,p,s)}$ ($i=1 \rightarrow 5$) trong biểu thức (4.5) xác định được như sau

$$e_{1c} = 0, e_{2c} = 0, \Theta = a^4 n^4 A_{22}^* + a^2 b^2 d_1 m^2 n^2 + b^4 m^4 A_{11}^*, e_{3c} = -\frac{m a^3 b^2 d_4 n^2}{\pi \Theta} - \frac{m^3 a b^4 d_3}{\pi \Theta},$$

$$e_{4c} = -\frac{n^3 a^4 b d_6}{\pi \Theta} - \frac{n a^2 b^3 d_5 m^2}{\pi \Theta}, \delta = -(-1)^m - (-1)^n + (-1)^{m+n} + 1,$$

$$e_{5c} = \frac{n^4 \lambda C_{12}^* a^4 + b^4 \lambda m^4 C_{21}^* - a^2 b^2 d_2 m^2 n^2}{\Theta} + \frac{a^2 b^4 m^2}{\pi^2 R \Theta},$$

$$e_{1p} = -\frac{3H a^2 b^3 \left(-\pi^3 m^2 n \delta I_3 - \frac{32\delta I_{2p}}{3} + 1/2 m^2 n^2 \pi^4 \left((-1)^m - 1 \right) I_{1p} - \frac{32\delta I_{1p}}{9} \right)}{32\pi^3 A_{11}^* m^3 \left(-\frac{9m^2 n^2 \pi^4}{64} + \delta \right)},$$

$$e_{2p} = \frac{H b^7 m \left(-18\pi^3 m^2 n \delta I_{3p} + 192\delta I_{2p} - 27\pi^4 m^2 n^2 \left((-1)^m - 1 \right) I_{2p} + 64\delta I_{1p} \right)}{3n^4 \left(9\pi^4 m^2 n^2 + 64\delta \right) \pi^3 a^2 A_{22}^*},$$

$$e_{3p} = e_{3c}, e_{4p} = e_{4c},$$

$$e_{5p} = \frac{128H a^2 b^7 m^2 n \delta I_{1p} - 384H a^2 b^7 m^2 n \delta I_{2p} + 144b^7 \pi^3 n^2 a^2 H m^4 I_{3p}}{\pi \left(9m^2 n^2 \pi^4 + 64\delta \right) \Theta}$$

$$+ \frac{9\pi^5 a^4 \lambda n^6 C_{12}^* m^2 + 64\pi \delta \lambda \left(a^4 n^4 C_{12}^* + b^4 m^4 C_{21}^* \right) + 9m^6 n^2 \pi^5 b^4 \lambda C_{21}^*}{\pi \left(9m^2 n^2 \pi^4 + 64\delta \right) \Theta}$$

$$- \frac{9a^2 b^2 d_2 m^4 n^4 \pi^5 + 64a^2 b^2 d_2 m^2 n^2 \delta \pi}{\pi \left(9m^2 n^2 \pi^4 + 64\delta \right) \Theta},$$

$$e_{1s} = \frac{a^2 H \left(-64I_1 \delta + 9\pi^4 m^2 n^2 \left((-1)^m - 1 \right) I_{1s} - 192\delta I_2 - 18\pi^3 m^2 n \delta I_{3s} \right)}{24m^3 \pi \left(9\pi^4 m^2 n^2 + \delta \right) A_{11}^*},$$

$$e_{2s} = \frac{H b^4 m \left(-27\pi^4 n^2 m^2 I_{2s} \left((-1)^m - 1 \right) - 18\pi^3 m^2 n \delta I_3 + 64I_{1s} \delta + 192\delta I_{2s} \right)}{24a^2 n^4 A_{12}^* \left(9\pi^4 m^2 n^2 + 64\delta \right) \pi},$$

$$e_{5s} = - \frac{16b^4 n H \left(\left(I_{1s} - 3I_{2s} \right) \delta - \frac{9I_{3s} \pi^3 m^2 n}{8} \right) a^2 m^2 \pi}{4\Theta \left(\frac{9\pi^4 m^2 n^2}{64} + \delta \right)}$$

$$+ \frac{\left(a^4 \lambda C_{12}^* n^4 + \lambda C_{21}^* b^4 m^4 - m^2 b^2 n^2 a^2 d_2 \right) \left(9\pi^4 m^2 n^2 + 64\delta \right)}{4\Theta \left(\frac{9\pi^4 m^2 n^2}{64} + \delta \right)},$$

$$MS1 = \left(b^4 + 16H_n^2 (b - 2y)^2 \right)^{3/2}, \quad MS2 = \left(H_n^2 \pi^2 \left(\cos(y\pi/b) \right)^2 + b^2 \right)^{3/2},$$

$$TS1 = \sin(n\pi y/b), \quad TS2 = \cos(n\pi y/b), \quad TS3 = \sin(y\pi/b),$$

$$I_{1p} = \int_0^b \frac{TS1}{MS1} dy, \quad I_{2p} = \int_0^b \frac{TS1}{MS1} (2TS2^2 - 1) dy, \quad I_{3p} = \int_0^b \frac{TS1^2}{MS1} dy,$$

$$I_{1s} = \int_0^b \frac{TS1 \cdot TS3}{MS2} dy, \quad I_{2s} = \int_0^b \frac{(2TS2^2 - 1) TS1 \cdot TS3}{MS2} dy, \quad I_{3s} = \int_0^b \frac{TS1^2 \cdot TS3}{MS2} dy,$$

Phụ lục C2

Các hệ số $x_{i(c,p,s)}$ ($i=1 \rightarrow 12$) trong biểu thức (4.6) xác định được như sau

$$x_{1c} = -\frac{bm^2 \pi^2}{4a}, \quad x_{2c} = -\frac{a\pi^2 n^2}{4b}, \quad x_{5c} = -\frac{2m\pi^2 n \delta e_{3c}}{3ab}, \quad x_{6c} = -\frac{2m\pi^2 n \delta e_{4c}}{3ab},$$

$$x_{3c} = -\frac{\pi^4 a e_{3c} \lambda n^4 C_{12}^*}{4b^3} - \frac{\pi^4 b e_{3c} \lambda m^4 C_{21}^*}{4a^3} + \frac{\pi^4 e_{3c} m^2 n^2 u_1}{4ba} + \frac{\pi^3 m n^2 u_4}{4b} + \frac{\pi^3 b m^3 u_3}{4a^2}$$

$$- \frac{\pi^2 b e_{3c} m^2}{4R_y a} - \frac{\pi b m u_7}{4},$$

$$\begin{aligned}
x_{4c} &= -\frac{\pi^4 b e_{4c} \lambda m^4 C_{21}^*}{4a^3} - \frac{e_{4c} a \lambda n^4 \pi^4 C_{12}^*}{4b^3} + \frac{a n^3 \pi^3 u_6}{4b^2} + \frac{n m^2 \pi^3 u_5}{4a} + \frac{e_{4c} m^2 n^2 \pi^4 u_1}{4ab} \\
&\quad - \frac{a u_8 n \pi}{4} - \frac{\pi^2 b e_{4c} m^2}{4aR}, x_{7c} = -\frac{9K_3 b a}{64}, x_{8c} = -\frac{\pi^4 (a^4 n^4 A_{22}^* + b^4 m^4 A_{11}^*)}{64b^3 A_{11}^* a^3 A_{22}^*}, \\
x_{10c} &= -\frac{2m\pi^2 n \delta e_{5c}}{3ab}, x_{9c} = -\frac{m n \lambda \pi^2 (A_{11}^* C_{12}^* + A_{22}^* C_{21}^*) \delta}{6ba A_{11}^* A_{22}^*} - \frac{a n \delta}{24b A_{11}^* m R}, x_{11c} = \frac{ab \delta}{\pi^2 n m R}, \\
x_{12c} &= -\frac{b m^2 \pi^2 u_7}{4a} + \frac{m^2 n^2 \pi^4 u_2}{4ba} + \frac{m^2 n^2 e_{5c} \pi^4 u_1}{4ba} - \frac{a \lambda^2 n^4 \pi^4 L_{22}^*}{4b^3} - \frac{b \lambda^2 m^4 \pi^4 L_{11}^*}{4a^3} - \frac{ab K_1}{4} \\
&\quad - \frac{(n^2 a^2 + b^2 m^2) \pi^2 K_2}{4ba} - \frac{b \lambda m^4 e_{5c} \pi^4 C_{21}^*}{4a^3} - \frac{a \lambda n^4 e_{5c} \pi^4 C_{12}^*}{4b^3} - \frac{a n^2 u_8 \pi^2}{4b} - \frac{b \pi^2 e_{5c} m^2}{4aR}, \\
x_{13c} &= -\frac{ab \delta}{n \pi^2 m}, \\
x_{1p} = x_{1c}, x_{2p} = x_{2c}, x_{3p} &= -\frac{2m\pi^2 n \delta}{3ab}, x_{4p} = \frac{\pi^3 m^2 n u_5}{4a} + \frac{\pi^3 a n^3 u_6}{4b^2} + \frac{\pi^4 e_{4p} m^2 n^2 u_1}{4ba} \\
&\quad - \frac{\pi^4 b e_{4p} \lambda m^4 C_{21}^*}{4a^3} - \frac{\pi^4 a e_{4p} \lambda n^4 C_{12}^*}{4b^3} - \frac{4I_{3p} \pi^2 b^4 m^2 H e_{4p}}{a} - \frac{\pi a n u_8}{4}, x_{5p} = -\frac{2nm\pi^2 \delta e_3}{3ab}, \\
x_{6p} &= -\frac{2nm\pi^2 \delta e_{4p}}{3ab}, x_{7p} = x_{7c}, x_{8p} = x_{8c}, x_{10p} = -\frac{2nm\pi^2 \delta e_{5p}}{3ab} - \frac{n^2 m^2 \pi^4 (e_{1p} + e_{2p})}{2ab}, \\
x_{9p} &= -\frac{I_{1p} ((-1)^m - 1) \pi a n^2 b^2 H}{3m A_{11}^*} + \frac{nm \lambda \delta \pi^2 C_{12}^*}{6ab A_{22}^*} + \frac{nm \lambda C_{21}^* \delta \pi^2}{6ab A_{11}^*}, \\
x_{11p} &= -\frac{8I_{1p} ((-1)^m - 1) ab^4 H}{\pi m}, \\
x_{12p} &= -\frac{\pi^4 \lambda^2 n^4 a L_{22}^*}{4b^3} - \frac{\pi^4 b \lambda^2 m^4 L_{11}^*}{4a^3} - \frac{ab K_1}{4} - \frac{\pi^2 (a^2 n^2 + b^2 m^2) K_2}{4ba} - \frac{a \lambda C_{12}^* n^4 \pi^4 e_5}{4b^3} \\
&\quad - \frac{\pi^2 a n^2 u_8}{4b} - \frac{\pi^4 b \lambda m^4 C_{21}^* e_5}{4a^3} - \frac{16a \lambda C_{12}^* n^3 e_2 \delta \pi^2}{3b^3 m} - \frac{16bm^3 \pi^2 e_1 \lambda \delta C_{21}^*}{3a^3 n} - \frac{\pi^2 b m^2 u_7}{4a} \\
&\quad + \frac{\pi^4 n^2 m^2 u_2}{4ba} + \frac{\pi^4 n^2 e_5 m^2 u_1}{4ba}, x_{13p} = x_{13c}, \\
x_{1s} = x_{1c}, x_{2s} = x_{2c}, x_{3s} &= \frac{m n^2 \pi^3 u_4}{4b} - \frac{b m \pi u_7}{4} + \frac{e_{3s} m^2 n^2 \pi^4 u_1}{4ba} - \frac{e_{3s} b \lambda m^4 \pi^4 C_{21}^*}{4a^3} \\
&\quad - \frac{e_{3s} a \lambda n^4 \pi^4 C_{12}^*}{4b^3} - \frac{I_3 \pi^4 b m^2 e_{3s} H}{2a} + \frac{b m^3 u_3 \pi^3}{4a^2}, x_{4s} = -\frac{\pi a n u_8}{4} + \frac{\pi^3 a n^3 u_6}{4b^2} \\
&\quad + \frac{\pi^4 e_{4s} m^2 n^2 u_1}{4ab} - \frac{e_{4s} b \lambda m^4 \pi^4 C_{21}^*}{4a^3} - \frac{e_{4s} a \lambda n^4 \pi^4 C_{12}^*}{4b^3} - \frac{I_{3s} \pi^4 b m^2 e_{4s} H}{2a} + \frac{\pi^3 m^2 n u_5}{4a},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{5s} &= \frac{nm\pi^2\delta e_{3s}}{ba}, x_{6s} = \frac{2nm\pi^2\delta e_{3s}}{3ba}, x_{7p} = x_{7c}, x_{8p} = x_{8c}, \\
x_{9s} &= \frac{nm\pi^2\lambda\delta C_{12}^*}{6baA_{22}^*} - \frac{I_{1s}\pi^3n^2a((-1)^m - 1)H}{4bmA_{11}^*} + \frac{nm\pi^2\lambda C_{21}^*\delta}{6baA_{11}^*}, \\
x_{10s} &= -\frac{2nm\pi^2\delta e_{5s}}{3ab} - \frac{n^2m^2\pi^4(e_{1s} + e_{2s})}{2ab}, x_{11s} = -\frac{I_{1s}ba((-1)^m - 1)H\pi}{m}, \\
x_{12s} &= -\frac{n^2a\pi^2u_8}{4b} - \frac{b\pi^2m^2u_7}{4a} + \frac{n^2\pi^4e_5m^2u_1}{4ba} - \frac{abK_1}{4} - \frac{n^4a\pi^4\lambda^2L_{22}^*}{4b^3} \\
&\quad - \frac{\pi^4b\lambda^2m^4L_{11}^*}{4a^3} + \frac{n^2\pi^4u_2m^2}{4ba} - \frac{\pi^2(n^2a^2 + b^2m^2)K_2}{4ba}, x_{13s} = x_{13p},
\end{aligned}$$

Các hệ số $b_{j(c,p,s)}$ ($j = 1 \rightarrow 8$) trong biểu thức (4.6) xác định được như sau

$$\begin{aligned}
b_{1(c,p,s)} &= -\frac{\left((H_{44} - 3H_{66}\lambda)b^2 + p_6n^2\pi^2\right)a^3 + \pi^3\left(a^2mn^2p_2 + b^2m^3p_1\right)e_{3(c,p,s)} + \pi^2ab^2m^2p_5}{4ba^2}, \\
b_{2(c,p,s)} &= -\frac{\left(e_{4(c,p,s)}\left(a^2n^2p_2 + b^2m^2p_1\right)\pi + a^2bnp_7\right)\pi^2m}{4a^2b}, b_{3(c,p,s)} = \frac{n\pi p_1\delta}{6bA_{11}^*}, \\
b_{4(c,p,s)} &= \frac{16b\pi m^2p_1\delta e_{1(c,p,s)}}{3a^2n} + \frac{\pi m\left(\left(-\pi^2m^2p_3 + a^2p_8\right)b^2 - \pi^2a^2n^2p_4\right)}{4a^2b} \\
&\quad - \frac{\pi^3\left(a^2n^2p_2 + b^2m^2p_1\right)me_{5(c,p,s)}}{4a^2b}, \\
b_{5(c,p,s)} &= -\frac{\left(e_{3(c,p,s)}\left(a^2g_2n^2 + b^2g_1m^2\right)\pi + b^2ag_5m\right)n\pi^2}{4b^2a}, \\
b_{6(c,p,s)} &= -\frac{b\pi^2g_6m^2}{4a} - \frac{a\pi^2g_7n^2}{4b} - \frac{\left(\pi^3a^2g_2n^3 + \pi^3b^2g_1m^2n\right)e_{4(c,p,s)}}{4b^2a} - \frac{\left(H_{55} - 3H_{77}\lambda\right)ab}{4} \\
b_{7(c,p,s)} &= -\frac{mg_2\pi\delta}{6aA_{22}^*}; b_8 = -\frac{\pi^3\left(g_2n^2a^2 + b^2m^2g_1\right)ne_{5(c,p,s)}}{4b^2a} + \frac{16ag_2n^2\delta\pi e_{2(c,p,s)}}{3b^2m} + \\
&\quad + \frac{\pi\left(\left(-\pi^2g_3m^2 + a^2g_8\right)b^2 - \pi^2a^2g_4n^2\right)n}{4b^2a}.
\end{aligned}$$

Các hệ số $z_{i(c,p,s)}$ ($j = 1 \rightarrow 4$) trong biểu thức (4.9) xác định được như sau

$$z_{1(c,p,s)} = A_{12}^*h/A_{11}^*,$$

$$z_{2(c,p,s)} = \delta B_{21}^* a \pi n A_{11}^* - \frac{c_{3(c,p,s)} \lambda \delta C_{22}^*}{b m \pi A_{11}^*} - \frac{c_{1(c,p,s)} \lambda \delta C_{21}^*}{a \pi n A_{11}^*} + \frac{c_{3(c,p,s)} B_{22}^* \delta}{b m \pi A_{11}^*} + \frac{\pi^2 n^2}{8 b^2 A_{11}^*} \\ + \frac{(A_{12}^* a^2 n^2 \pi + \pi b^2 m^2 A_{11}^*) \delta (c_{1(c,p,s)} e_{3(c,p,s)} + c_{3(c,p,s)} e_{4(c,p,s)})}{a^2 m \pi b^2 n A_{11}^*},$$

$$z_{3c} = \frac{\delta c_{4c} B_{22}^*}{\pi m b A_{11}^*} - \frac{\delta \lambda (\pi n + b c_{4c}) C_{22}^*}{m \pi b^2 A_{11}^*} - \frac{\delta \lambda (\pi m + a c_{2c}) C_{21}^*}{a^2 \pi n A_{11}^*} + \frac{\delta c_{2c} B_{21}^*}{\pi a n A_{11}^*} \\ + \frac{\delta (n^2 A_{12}^* a^2 + b^2 A_{11}^* m^2) (c_{2c} e_{1c} + c_{4c} e_{2c} + e_{3c})}{m b^2 a^2 n A_{11}^*} - \frac{\delta}{\pi^2 m n A_{11}^* R_y},$$

$$z_{3p} = \frac{8 b^3 H_n \left((-1)^m - 1 \right) I_{1p}}{m \pi A_{11}^*} - \frac{c_{4p} \delta B_{22}^*}{m \pi b A_{11}^*} - \frac{c_{2p} B_{21}^* \delta}{a \pi n A_{11}^*} + \frac{\lambda (\pi n + b c_{4p}) \delta C_{22}^*}{m \pi b^2 A_{11}^*} \\ + \frac{\lambda (m \pi + a c_{2p}) \delta C_{21}^*}{a^2 \pi n A_{11}^*} - \frac{(A_{12}^* n^2 a^2 + A_{11}^* b^2 m^2) \delta}{a^2 m b^2 n A_{11}^*} (c_{2p} e_{3p} + c_{4p} e_{4p} + e_{5p}),$$

$$z_{3s} = \frac{\pi H \left((-1)^m - 1 \right) I_{1s}}{m A_{11}^*} - \frac{c_{4s} \delta B_{22}^*}{m \pi b A_{11}^*} - \frac{c_{2s} B_{21}^* \delta}{a \pi n A_{11}^*} + \frac{\lambda (\pi n + b c_{4s}) \delta C_{22}^*}{m \pi b^2 A_{11}^*} \\ + \frac{\lambda (m \pi + a c_{2s}) \delta C_{21}^*}{a^2 \pi n A_{11}^*} - \frac{(A_{12}^* n^2 a^2 + A_{11}^* b^2 m^2) \delta}{a^2 m b^2 n A_{11}^*} (c_{2s} e_{3s} + c_{4s} e_{4s} + e_{5s}),$$

$$z_{4(c,p,s)} = -A_{12}^* / A_{11}^*,$$

Các hệ số $t_{i(c,p,s)}$ ($i = 1 \rightarrow 8$) trong biểu thức (4.14) xác định như sau

$$t_{1c} = \frac{(-b^2 m \left((\lambda C_{11}^* - B_{11}^*) A_{11}^* - A_{12}^* (\lambda C_{21}^* - B_{21}^*) \right) + a e_1 \delta^* n^2 \pi) \delta}{\pi a b^2 m n \delta^*},$$

$$t_{2c} = \frac{\delta \left(\left((-\lambda C_{12}^* + B_{12}^*) A_{11}^* - A_{12}^* (-\lambda C_{22}^* + B_{22}^*) \right) b + n \pi e_2 \delta^* \right)}{\pi b^2 m \delta^*},$$

$$t_{3c} = -\frac{(a^2 n^2 A_{12}^* - b^2 m^2 A_{11}^*) \pi^2}{8 a^2 b^2 \delta^*},$$

$$t_{4c} = \frac{\delta \lambda n A_{12}^* C_{22}^*}{b^2 m \delta^*} + \frac{\delta n e_3}{b^2 m} + \frac{\delta \lambda m A_{12}^* C_{21}^*}{a^2 n \delta^*} - \frac{\delta n \lambda A_{11}^* C_{12}^*}{b^2 m \delta^*} - \frac{\delta \lambda m A_{11}^* C_{11}^*}{a^2 n \delta^*} + \frac{\delta A_{12}^*}{\pi^2 m n \delta^* R_y},$$

$$t_{5c} = -\frac{\left(\left((-\lambda C_{11}^* + B_{11}^*) A_{12}^* - A_{22}^* (-\lambda C_{21}^* + B_{21}^*) \right) a - m \pi e_1 \delta^* \right) \delta}{\pi a^2 n \delta^*},$$

$$t_{6c} = \frac{\delta \left(n \left((\lambda C_{12}^* - B_{12}^*) A_{12}^* - A_{22}^* (\lambda C_{22}^* - B_{22}^*) \right) a^2 + b m^2 e_2 \delta^* \pi \right)}{\pi b a^2 m n \delta^*},$$

$$t_{7c} = \frac{(a^2 n^2 A_{22}^* - b^2 m^2 A_{12}^*) \pi^2}{8a^2 b^2 \delta^*}, \delta^* = (A_{11}^* A_{22}^* - A_{12}^{*2}),$$

$$t_{8c} = \frac{\delta m e_3}{na^2} - \frac{\delta A_{22}^* \lambda m C_{21}^*}{a^2 n \delta^*} - \frac{\delta \lambda n A_{22}^* C_{22}^*}{b^2 m \delta^*} + \frac{\delta \lambda n A_{12}^* C_{12}^*}{b^2 m \delta^*} + \frac{\delta \lambda A_{12}^* m C_{11}^*}{a^2 n \delta^*} - \frac{\delta A_{22}^*}{\pi^2 m n \delta^* R_y},$$

$$t_{1p} = t_{1c}, t_{2p} = t_{2c}, t_{3p} = t_{3c},$$

$$t_{4p} = \frac{n \lambda A_{12}^* \delta C_{22}^*}{b^2 m \delta^*} + \frac{m \lambda A_{12}^* \delta C_{21}^*}{a^2 n \delta^*} - \frac{n A_{11}^* \lambda \delta C_{12}^*}{b^2 m \delta^*} - \frac{m \lambda A_{11}^* \delta C_{11}^*}{a^2 n \delta^*} + \frac{e_{5p} n \delta}{b^2 m}$$

$$\frac{8 I_{1p} b^3 A_{12}^* \left((-1)^m - 1 \right) H}{\pi m \delta^*},$$

$$t_{5p} = t_{5c}, t_{6p} = t_{6c}, t_{7p} = t_{7c}, t_{8p} = \frac{m \delta e_{5p}}{a^2 n} - \frac{n \lambda A_{22}^* \delta C_{22}^*}{b^2 m \delta^*}$$

$$- \frac{m \lambda A_{22}^* \delta C_{21}^*}{a^2 n \delta^*} + \frac{n \lambda A_{12}^* \delta C_{12}^*}{b^2 m \delta^*} + \frac{m \lambda A_{12}^* \delta C_{11}^*}{a^2 n \delta^*} + \frac{8 b^3 H I_{1p} A_{22}^* \left((-1)^m - 1 \right)}{\pi m \delta^*},$$

$$t_{1s} = t_{1p}, t_{2s} = t_{2p}, t_{3s} = t_{3p}, t_{4s} = \frac{n \delta e_5}{b^2 m} + \frac{n \lambda A_{12}^* \delta C_{22}^*}{b^2 m \delta^*} + \frac{m \lambda A_{12}^* \delta C_{21}^*}{a^2 n \delta^*}$$

$$- \frac{n A_{11}^* \lambda \delta C_{12}^*}{b^2 m \delta^*} - \frac{m \lambda A_{11}^* \delta C_{11}^*}{a^2 n \delta^*} - \frac{H I_{1s} \pi A_{12}^* \left((-1)^m - 1 \right)}{m \delta s a o},$$

$$t_{5s} = t_{5p}, t_{6s} = t_{6p}, t_{7s} = t_{7p}, t_{8s} = \frac{m \delta e_{5s}}{a^2 n} - \frac{n \lambda A_{22}^* \delta C_{22}^*}{b^2 m \delta^*} - \frac{m A_{22}^* \lambda \delta C_{21}^*}{a^2 n \delta^*}$$

$$+ \frac{n \lambda A_{12}^* \delta C_{12}^*}{b^2 m \delta^*} + \frac{m \lambda A_{12}^* \delta C_{11}^*}{a^2 n \delta^*} + \frac{I_{1s} A_{22}^* \pi H \left((-1)^m - 1 \right)}{m \delta^*}.$$

Các hệ số $q_{i(c,p,s)}$ ($i = 1 \rightarrow 4$) trong biểu thức (4.15) xác định được là

$$q_{1(c,p,s)} = x_{21(c,p,s)} \left(c_{11(c,p,s)} t_{51(c,p,s)} + c_{31(c,p,s)} t_{61(c,p,s)} + t_{71(c,p,s)} \right) \mu_2$$

$$+ x_{11(c,p,s)} \left(c_{11(c,p,s)} t_{11(c,p,s)} + c_{31(c,p,s)} t_{21(c,p,s)} + t_{31(c,p,s)} \right) \mu_1,$$

$$q_{2(c,p,s)} = x_{2(c,p,s)} \left(c_{2(c,p,s)} t_{5(c,p,s)} + c_{4(c,p,s)} t_{6(c,p,s)} + t_{8(c,p,s)} \right) h \mu_2$$

$$+ x_{1(c,p,s)} \left(c_{2(c,p,s)} t_{1(c,p,s)} + c_{4(c,p,s)} t_{2(c,p,s)} + t_{4(c,p,s)} \right) h \mu_1 + c_{5(c,p,s)} h,$$

$$q_{3(c,p,s)} = \mu_2 x_{11(c,p,s)} \left(c_{1(c,p,s)} t_{5(c,p,s)} + c_{3(c,p,s)} t_{6(c,p,s)} + t_{7(c,p,s)} \right) h,$$

$$q_{4(c,p,s)} = x_{11(c,p,s)} \left(c_{2(c,p,s)} t_{5(c,p,s)} + c_{4(c,p,s)} t_{6(c,p,s)} + t_{8(c,p,s)} \right) \mu_2.$$