

**BỘ GIÁO DỤC  
VÀ ĐÀO TẠO**

**VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC  
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM**

**HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ**

---



**Phạm Văn Hoàn**

**PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN PANEL TRỤ VÀ VỎ  
TRỤ LÀM BẰNG VẬT LIỆU FGP CHỊU TẢI CƠ TRONG  
MÔI TRƯỜNG NHIỆT**

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT CƠ KHÍ VÀ CƠ KỸ THUẬT**

*Hà Nội - 2024*

BỘ GIÁO DỤC  
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC  
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

**HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ**

**Phạm Văn Hoàn**

**PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN PANEL TRỤ VÀ VỎ  
TRỤ LÀM BẰNG VẬT LIỆU FGP CHỊU TẢI CƠ TRONG  
MÔI TRƯỜNG NHIỆT**

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT CƠ KHÍ VÀ CƠ KỸ THUẬT**

**Ngành: Cơ kỹ thuật**

**Mã số: 9520101**

**Xác nhận của Học viện  
Khoa học và Công nghệ**

**Người hướng dẫn 1**  
(Ký, ghi rõ họ tên)

**Người hướng dẫn 2**  
(Ký, ghi rõ họ tên)

**PGS.TS. Lê Khả Hòa**

**PGS.TS. Đào Như Mai**

**Hà Nội - 2024**

**LỜI CAM ĐOAN**

Tôi xin cam đoan luận án: “Phân tích ổn định phi tuyến panel trụ và vỏ trụ làm bằng vật liệu FGP chịu tải cơ trong môi trường nhiệt” là công trình nghiên cứu của chính mình dưới sự hướng dẫn khoa học của tập thể hướng dẫn. Luận án sử dụng thông tin trích dẫn từ nhiều nguồn tham khảo khác nhau và các thông tin trích dẫn được ghi rõ nguồn gốc. Các kết quả nghiên cứu của tôi được công bố chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các số liệu, kết quả được trình bày trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ một công trình nào khác ngoài các công trình công bố của tác giả. Luận án được hoàn thành trong thời gian tôi làm nghiên cứu sinh tại Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

*Hà Nội, ngày tháng năm 2024*

**Tác giả luận án**

**Phạm văn Hoàn**

## LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới hai thầy, cô giáo hướng dẫn là PGS.TS Lê Khả Hòa và PGS.TS Đào Như Mai đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành luận án.

Trong quá trình thực hiện luận án, tác giả đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi của Ban Lãnh đạo, phòng Đào tạo, các phòng chức năng của viện Cơ học, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành về những sự giúp đỡ đó.

Tác giả trân trọng cảm ơn Ban Giám đốc Học viện Hậu cần, Đảng ủy khoa Doanh trại, các đồng nghiệp trong bộ môn Công nghệ và Quản lý xây dựng, khoa Doanh trại đã tạo điều kiện, luôn quan tâm và động viên trong quá trình tác giả học tập và hoàn thiện luận án.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình, bạn bè và những người thân đã luôn động viên và chia sẻ những khó khăn với tác giả trong suốt quá trình thực hiện luận án.



## MỤC LỤC

Nội dung	Trang
LỜI CAM ĐOAN.....	i
LỜI CẢM ƠN .....	ii
MỤC LỤC .....	iii
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CÁC CHỮ VIẾT TẮT.....	vi
DANH MỤC CÁC BẢNG .....	viii
DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ .....	x
MỞ ĐẦU .....	1
Chương 1. TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU .....	5
1.1. Tổng quan về vật liệu FGP .....	5
1.1.1. Vật liệu có cơ tính biến đổi.....	5
1.1.2. Vật liệu FGP .....	8
1.2. Phân loại mất ổn định và tiêu chuẩn ổn định tĩnh.....	12
1.2.1. Phân loại mất ổn định .....	12
1.2.2. Tiêu chuẩn ổn định tĩnh.....	14
1.3. Tình hình nghiên cứu về ổn định phi tuyến của kết cấu panel trụ và vỏ trụ làm bằng vật liệu FGM, vật liệu FGP .....	14
1.3.1. Nghiên cứu về ổn định phi tuyến của các kết cấu panel trụ và vỏ trụ FGM .....	15
1.3.2. Nghiên cứu về ổn định phi tuyến của các kết cấu panel trụ và vỏ trụ FGP .....	18
1.4. Các kết quả đạt được từ các công trình đã công bố trong nước và quốc tế... ..	19
1.5. Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu của luận án.....	20
Chương 2: PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA PANEL TRỤ LÀM BẰNG VẬT LIỆU FGP CHỊU NÉN DỌC TRỰC .....	21
2.1. Đặt vấn đề .....	21
2.2. Phân tích ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xấp đến ổn định phi tuyến của panel trụ FGP .....	22
2.2.1. Mô hình panel trụ FGP .....	22
2.2.2. Các phương trình cơ bản .....	23
2.2.3. Điều kiện biên và phương pháp giải .....	27
2.2.4. Kết quả tính toán số.....	29
2.3. Phân tích ổn định phi tuyến của panel trụ sandwich FGP với các điều kiện biên khác nhau .....	33
2.3.1. Panel trụ sandwich FGP .....	33
2.3.2. Điều kiện biên và phương pháp giải .....	34
2.3.3. Kết quả tính toán số.....	36

2.4. Phân tích ổn định phi tuyến của panel trụ sandwich FGP trên nền đàn hồi .....	44
2.4.1. Giải bài toán panel trụ FGP đặt trên nền đàn hồi.....	44
2.4.2. Kết quả tính toán số.....	47
2.5. Kết luận chương 2 .....	50
Chương 3: PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ FGP CÓ GÂN GIA CƯỜNG CHỊU NÉN DỌC TRỰC HOẶC ÁP LỰC NGOÀI .....	52
3.1. Đặt vấn đề .....	52
3.2. Phân tích ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xoắn đến ổn định phi tuyến của vỏ trụ FGP .....	53
3.2.1. Mô hình vỏ trụ FGP .....	53
3.2.2. Các phương trình cơ bản .....	54
3.2.3. Điều kiện biên và phương pháp giải .....	55
3.2.3. Kết quả tính toán số.....	58
3.3. Phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu nén dọc trục.....	63
3.3.1. Vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu nén dọc trục .....	63
3.3.2. Các phương trình cơ bản .....	65
3.3.3. Điều kiện biên và phương pháp giải .....	67
3.3.4. Kết quả tính toán số.....	71
3.4. Phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu áp lực ngoài.....	80
3.4.1. Vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu áp lực ngoài .....	80
3.4.2. Các phương trình cơ bản .....	80
3.4.3. Điều kiện biên và phương pháp giải .....	80
3.4.4. Kết quả tính toán số.....	82
3.5. Kết luận chương 3 .....	88
Chương 4: PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ FGP CÓ GÂN GIA CƯỜNG CHỊU TẢI XOẮN .....	89
4.1. Đặt vấn đề .....	89
4.2. Phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu tải xoắn.....	89
4.2.1. Vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu tải xoắn .....	89
4.2.2. Các phương trình cơ bản .....	91
4.2.3. Điều kiện biên và phương pháp giải .....	93
4.2.4. Kết quả tính toán số.....	97
4.3. Phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân trục giao gia	

cường chịu tải xoắn .....	108
4.3.1. Vỏ trụ sandwich FGP có gân trực giao gia cường chịu tải xoắn .....	108
4.3.2. Các phương trình cơ bản .....	109
4.3.3. Điều kiện biên và phương pháp giải .....	112
4.3.4. Kết quả tính toán số.....	113
4.5. Kết luận chương 4 .....	118
KẾT LUẬN.....	119
MỘT SỐ HƯỚNG PHÁT TRIỂN TỪ LUẬN ÁN .....	119
DANH MỤC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN .....	120
TÀI LIỆU THAM KHẢO .....	121
PHỤ LỤC.....	I

## DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CÁC CHỮ VIẾT TẮT

### Danh mục các ký hiệu

<b>Ký hiệu</b>	<b>Nội dung ký hiệu</b>
$a, b, L$	Kích thước các cạnh của vỏ
$h$	Chiều dày của vỏ
$R$	Bán kính trung bình của vỏ
$E$	Mô đun đàn hồi Young của vật liệu
$\nu$	Hệ số Poisson của vật liệu
$m, c, sh$	Chỉ số biểu thị tính chất của kim loại, gốm và vỏ
$s, r, p$	Chỉ số biểu thị thông số của gân dọc, gân vòng, gân xiên
$h_s, h_r, h_p$	Chiều cao của gân dọc, gân vòng, gân xiên
$b_s, b_r, b_p$	Chiều rộng của gân dọc, gân vòng, gân xiên
$d_s, d_r, d_p$	Khoảng cách giữa hai gân dọc, gân vòng, gân xiên
$h_{FG}/2, h_{core}$	Độ dày của mỗi lớp phủ FGM, lớp lõi xốp
$e_0$	Hệ số độ rỗng
$w^*$	Độ không hoàn hảo hình học ban đầu của vỏ
$k, k_2, k_3, k_p$	Chỉ số tỉ phần thể tích của vỏ, gân dọc, gân vòng, gân xoắn
$x, y, z$	Hệ trục tọa độ $x, y, z$
$u, v, w$	Chuyển vị theo các phương $x, y, z$
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	Biến dạng theo phương $x, y$ và biến dạng cắt
$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$	Các thành phần biến dạng ở mặt giữa của vỏ
$k_x, k_y, k_{xy}$	Các thành phần độ uốn, xoắn
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$	Các thành phần ứng suất
$N_x, N_y, N_{xy}$	Các thành phần lực dọc
$M_x, M_y, M_{xy}$	Các thành phần mômen
$K_1, K_2$	Các hệ số nền Pasternak
$r_0, p_0$	Tải trọng phân bố tác dụng lên mặt bên của panel theo phương $x, y$
$p$	Tải trọng phân bố tác dụng lên mặt bên của vỏ trụ theo phương $x$
$q$	Tải trọng phân bố tác dụng lên mặt ngoài của vỏ trụ theo phương $z$

$\tau$	Tải trọng xoắn tác dụng lên mặt ngoài của vỏ trụ theo phương $y$
$\theta$	Góc hợp bởi gân xoắn và phương $x$

**Danh mục các chữ viết tắt****Chữ viết tắt    Nội dung viết tắt**

FGM (FG)	Vật liệu có cơ tính biến đổi
FGP	Vật liệu xốp có cơ tính biến đổi
FEM	Phương pháp phần tử hữu hạn
HSDT	Lý thuyết biến dạng trượt bậc cao
SSSS	Liên kết bốn biên tựa đơn
SSCC	Liên kết hai cạnh cong tựa đơn, hai cạnh thẳng ngàm

## DANH MỤC CÁC BẢNG

Bảng 2.1. So sánh tải tới hạn trên $N_{cr}$ panel trụ đẳng hướng.....	29
Bảng 2.2. So sánh tải tới hạn $\frac{N_x}{ER}$ panel trụ đẳng hướng.....	29
Bảng 2.3. Ảnh hưởng của mô hình phân bố xốp và hệ số độ xốp đến tải tới hạn ....	30
Bảng 2.4. Ảnh hưởng của $a/b$ và $a/R$ đối với tải trọng nén dọc trục tới hạn trên.....	32
Bảng 2.5. Ảnh hưởng của $h_{core}/h_{FG}$ và hệ số độ xốp $e_0$ đối với tải trọng nén dọc trục tới hạn .....	38
Bảng 2.6. Ảnh hưởng của $k$ và $b/h$ đối với tải trọng nén dọc trục tới hạn.....	40
Bảng 2.7. Ảnh hưởng của $a/b$ và $a/R$ đối với tải trọng nén dọc trục tới hạn.....	43
Bảng 2.8. So sánh tải tới hạn trên $N_{cr}$ panel trụ đẳng hướng.....	47
Bảng 2.9. Ảnh hưởng của các hệ số nền đối với tải nén dọc trục tới hạn trên.....	48
Bảng 2.10. Ảnh hưởng của $e_0$ và $h_{core}/h_{FG}$ đối với tải nén tới hạn trên .....	49
Bảng 2.11. Ảnh hưởng của $a/b$ và $a/R$ đối với tải nén tới hạn trên .....	50
Bảng 3.1a. So sánh tải trọng tới hạn $P^*$ của vỏ trụ đẳng hướng không có gân gia cường chịu nén dọc trục.....	59
Bảng 3.1b. Tính chất vật liệu của các vật liệu cấu thành vỏ .....	59
Bảng 3.2a. Ảnh hưởng của mode $(m, n)$ đối với tải trọng tới hạn trên của vỏ trụ FGP .....	60
Bảng 3.2b. Ảnh hưởng của mode $(m, n)$ đối với tải trọng tới hạn dưới của vỏ trụ FGP.....	60
Bảng 3.3. Ảnh hưởng của các mô hình phân bố xốp và $\Delta T$ đối với tải tới hạn .....	61
Bảng 3.4. Ảnh hưởng của các mô hình phân bố xốp và $e_0$ đối với tải tới hạn .....	62
Bảng 3.5. Ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xốp và nền đối với tải tới hạn.....	62
Bảng 3.6. So sánh tải trọng tới hạn $P^*$ vỏ trụ đẳng hướng không gân gia cường .....	71
Bảng 3.7. So sánh tải trọng tới hạn của vỏ trụ đồng nhất đẳng hướng có gân gia cường .....	71
Bảng 3.8. Ảnh hưởng của mode $(m, n)$ đối với tải tới hạn dưới của vỏ trụ sandwich FGP có gia cường gân trong .....	72
Bảng 3.9. Ảnh hưởng của $e_0$ , $\Delta T$ và $h_{core}/h_{FG}$ đối với tải tới hạn.....	74
Bảng 3.10. Ảnh hưởng của chỉ số tỉ phần thể tích và nền đối với tải tới hạn .....	77
Bảng 3.11. Ảnh hưởng của tỉ lệ $R/h$ và $L/R$ đối với tải tới hạn .....	78
Bảng 3.12. Ảnh hưởng của gân gia cường đối với tải tới hạn trên.....	79
Bảng 3.13. So sánh tải trọng tới hạn $q$ ( $Psi$ ) của vỏ trụ đẳng hướng.....	82
Bảng 3.14. Ảnh hưởng của $e_0$ và nền đối với tải tới hạn $q_{cr}$ .....	83
Bảng 3.15. Ảnh hưởng của các thông số hình học đối với tải tới hạn .....	85
Bảng 3.16. Ảnh hưởng của gân gia cường và $k$ đối với tải tới hạn .....	87
Bảng 4.1. So sánh tải trọng xoắn tới hạn trên $\tau_{upper}$ (GPa) đối với vỏ trụ FGM có gân xiên gia cường.....	97

Bảng 4.2. Ảnh hưởng của số gân $n_p$ và $\Delta T$ đối với tải tới hạn.....	99
Bảng 4.3. Ảnh hưởng của $e_0$ và $h_{core}/h_{FG}$ đối với tải tới hạn .....	102
Bảng 4.4. Ảnh hưởng của gân gia cường và nền đối với tải tới hạn.....	104
Bảng 4.5. Ảnh hưởng của $\Delta T$ và $k$ đối với tải tới hạn .....	106
Bảng 4.6. Ảnh hưởng của các thông số hình học đối với tải tới hạn .....	107
Bảng 4.7. So sánh tải trọng xoắn tới hạn của vỏ trụ có gân gia cường.....	113
Bảng 4.8. Ảnh hưởng của $e_0$ và $h_{core}/h_{FG}$ đối với tải tới hạn .....	114
Bảng 4.9. Ảnh hưởng của $a/b$ và $a/R$ đối với tải tới hạn.....	116
Bảng 4.10. Ảnh hưởng của $R/h$ và $L/R$ đối với tải trọng tới hạn .....	118

## DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ

Hình 1.1. Mô hình kết cấu P-FGM.....	6
Hình 1.2. Sự biến đổi tỉ lệ ceramic qua chiều dày thành kết cấu của vật liệu P-FGM.....	6
Hình 1.3. Mô hình kết cấu S-FGM.....	7
Hình 1.4. Sự biến đổi tỉ lệ ceramic qua chiều dày thành kết cấu của vật liệu S-FGM.....	7
Hình 1.5. Phân bố xấp đối xứng.....	10
Hình 1.6a. Phân bố xấp không đối xứng loại 1.....	11
Hình 1.6b. Phân bố xấp không đối xứng loại 2.....	11
Hình 1.7. Phân bố xấp đồng đều.....	11
Hình 1.8. Ứng dụng vật liệu FGP (bọt nhôm) trong lĩnh vực tiêu âm, cách nhiệt cho các công trình ở Nhật Bản.....	12
Hình 1.9. Mất ổn định theo kiểu rẽ nhánh.....	13
Hình 1.10. Mất ổn định theo kiểu cực trị.....	13
Hình 2.1a. Mô hình panel trụ FGP chịu nén.....	22
Hình 2.1b. Các mô hình phân bố độ xấp của panel trụ FGP.....	22
Hình 2.2. Ảnh hưởng của quy luật phân bố độ xấp đối với tải trọng $r_0$ .....	31
Hình 2.3. Ảnh hưởng của $e_0$ đối với tải trọng $r_0$ .....	31
Hình 2.4. Ảnh hưởng của $a/b$ đối với tải trọng $r_0$ .....	32
Hình 2.5. Ảnh hưởng của $a/R$ đối với tải trọng $r_0$ .....	32
Hình 2.6. Mô hình panel trụ sandwich FGP chịu nén dọc trục.....	33
Hình 2.7. Ảnh hưởng của $e_0$ đối với $r_0-W/h$ .....	39
Hình 2.8. Ảnh hưởng của $h_{core}/h_{FG}$ đối với $r_0-W/h$ .....	39
Hình 2.9. Ảnh hưởng của $\zeta$ đối với $r_0-W/h$ .....	41
Hình 2.10. Ảnh hưởng của $k$ đối với $r_0-W/h$ .....	41
Hình 2.11. Ảnh hưởng của $b/h$ đối với $r_{upper}-k$ .....	42
Hình 2.12. Ảnh hưởng của $b/h$ đối với $r_{lower}-k$ .....	42
Hình 2.13. Ảnh hưởng của $a/b$ đối với $r_{upper}-k$ .....	42
Hình 2.14. Ảnh hưởng của $a/R$ đối với $r_{upper}-k$ .....	42
Hình 2.15. Ảnh hưởng của $b/h$ đối với $r_0-W/h$ .....	43
Hình 2.16. Ảnh hưởng của $a/R$ đối với $r_0-W/h$ .....	43
Hình 2.17. Ảnh hưởng của $K_1$ và $K_2$ đối với $r_0-W/h$ .....	48
Hình 2.18. Ảnh hưởng của $e_0$ đối với $r_0-W/h$ .....	48
Hình 2.19. Ảnh hưởng của $h_{core}/h_{FG}$ đối với $r_0-W/h$ .....	49
Hình 2.20. Ảnh hưởng của $\xi$ đối với $r_0-W/h$ .....	49
Hình 3.1. Mô hình vỏ trụ xấp FG được bao quanh bởi nền đàn hồi.....	53
Hình 3.2. Các mô hình phân bố độ xấp của vỏ trụ FGP.....	53



Hình 3.3. Ảnh hưởng của mode $(m,n)$ đối với đường cong $p-W_{\max}/h$ .....	61
Hình 3.4. Ảnh hưởng của $\Delta T$ đối với đường cong $p-W_{\max}/h$ .....	61
Hình 3.5. Ảnh hưởng của $e_0$ đối với đường cong $p-W_{\max}/h$ .....	62
Hình 3.6. Ảnh hưởng của nền đỡ với đường cong $p-W_{\max}/h$ .....	62
Hình 3.7. Mô hình vỏ trụ sandwich FGP có gân trực giao gia cường.....	63
Hình 3.8. Ảnh hưởng của mode $(m,n)$ đối với $p-\bar{\Delta}_x$ .....	73
Hình 3.9. Ảnh hưởng của mode $(m,n)$ đối với $p-W_{\max}/h$ .....	73
Hình 3.10. Ảnh hưởng của $\Delta T$ đối với $p_{\text{lower}}-k$ .....	75
Hình 3.11. Ảnh hưởng của $\Delta T$ đối với $p-\bar{\Delta}_x$ .....	75
Hình 3.12. Ảnh hưởng của $e_0$ đối với $p-W_{\max}/h$ .....	76
Hình 3.13. Ảnh hưởng của $e_0$ đối với $p-\bar{\Delta}_x$ .....	76
Hình 3.14. Ảnh hưởng của $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}$ đối với $p-W_{\max}/h$ .....	76
Hình 3.15. Ảnh hưởng của $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}$ đối với $p-\bar{\Delta}_x$ .....	76
Hình 3.16. Ảnh hưởng của $k$ đối với $p-\bar{\Delta}_x$ .....	77
Hình 3.17. Ảnh hưởng của nền đỡ với $p_{\text{lower}}-k$ .....	77
Hình 3.18. Ảnh hưởng của $R/h$ đối với $p_{\text{lower}}-k$ .....	79
Hình 3.19. Ảnh hưởng của $R/h$ đối với $p-W_{\max}/h$ .....	79
Hình 3.20. Ảnh hưởng $e_0$ đối với đường cong $q-W_{\max}/h$ .....	84
Hình 3.21. Ảnh hưởng của nền đỡ với đường cong $q-W_{\max}/h$ .....	84
Hình 3.22. Ảnh hưởng của $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}$ đối với đường cong $q-W_{\max}/h$ .....	86
Hình 3.23. Ảnh hưởng của $R/h$ đối với đường cong $q-W_{\max}/h$ .....	86
Hình 3.24. Ảnh hưởng $L/R$ đối với đường cong $q-W_{\max}/h$ .....	86
Hình 3.25. Ảnh hưởng $L/R$ đối với đường cong $q_{\text{upper}}-R/h$ .....	86
Hình 3.26. Ảnh hưởng của $k$ đối với đường cong $q_{\text{upper}}-R/h$ .....	87
Hình 3.27. Ảnh hưởng $k$ đối với đường cong $q-W_{\max}/h$ .....	87
Hình 4.1. Mô hình vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu tải xoắn.....	90
Hình 4.2a. Ảnh hưởng của $\Delta T$ đối với đường cong $\tau-n_p$ .....	100
Hình 4.2b. Ảnh hưởng của $e_0$ đối với đường cong $\tau-n_p$ .....	100
Hình 4.2c. Ảnh hưởng của $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}$ đối với đường cong $\tau-n_p$ .....	100
Hình 4.3a. Ảnh hưởng của $\Delta T$ đối với đường cong $\tau-W_{\max}/h$ .....	101
Hình 4.3b. Ảnh hưởng của $\Delta T$ đối với đường cong $\tau-\psi$ .....	101
Hình 4.4a. Ảnh hưởng $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}$ đối với đường cong $\tau-W_{\max}/h$ .....	103
Hình 4.4b. Ảnh hưởng $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}$ đối với đường cong $\tau-\psi$ .....	103
Hình 4.5a. Ảnh hưởng của $e_0$ đối với đường cong $\tau-W_{\max}/h$ .....	103
Hình 4.5b. Ảnh hưởng của $e_0$ đối với đường cong $\tau-\psi$ .....	103
Hình 4.6a. Ảnh hưởng của nền đỡ với đường cong $\tau-W_{\max}/h$ .....	104

Hình 4.6b. Ảnh hưởng của nền đối với đường cong $\tau$ - $\psi$ .....	104
Hình 4.7a. Ảnh hưởng của $\Delta T$ đối với đường cong $\tau$ - $W_{\max}/h$ .....	105
Hình 4.7b. Ảnh hưởng của $\Delta T$ đối với đường cong $\tau$ - $\psi$ .....	105
Hình 4.8. Ảnh hưởng của $k$ đối với tải xoắn tới hạn trên.....	105
Hình 4.9. Ảnh hưởng của $k$ đối với tải xoắn tới hạn dưới.....	105
Hình 4.10a. Ảnh hưởng của $R/h$ đối với đường cong $\tau$ - $W_{\max}/h$ .....	108
Hình 4.10b. Ảnh hưởng của $R/h$ đối với đường cong $\tau$ - $\psi$ .....	108
Hình 4.11a. Ảnh hưởng của $L/R$ đối với đường cong $\tau$ - $W_{\max}/h$ .....	108
Hình 4.11b. Ảnh hưởng của $L/R$ đối với đường cong $\tau$ - $\psi$ .....	108
Hình 4.12. Ảnh hưởng của $e_0$ đối với đường cong $\tau$ - $W/h$ .....	115
Hình 4.13. Ảnh hưởng của $e_0$ đối với tải tới hạn trên $\tau_{\text{upper}}$ .....	115
Hình 4.14. Ảnh hưởng của $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}$ đối với đường cong $\tau$ - $W/h$ .....	115
Hình 4.15. Ảnh hưởng của $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}$ đối với tải tới hạn trên $\tau_{\text{upper}}$ .....	115
Hình 4.16. Ảnh hưởng của $R/h$ đối với đường cong $\tau$ - $W/h$ .....	115
Hình 4.17. Ảnh hưởng của $L/R$ đối với đường cong $\tau$ - $W/h$ .....	115
Hình 4.18. Ảnh hưởng của $k$ đối với đường cong $\tau$ - $W/h$ .....	116
Hình 4.19. Ảnh hưởng của gân đối với đường cong $\tau$ - $W/h$ .....	116
Hình 4.20. Ảnh hưởng của gân và $k$ đối với tải tới hạn trên $\tau_{\text{upper}}$ .....	117
Hình 4.21. Ảnh hưởng của $\Delta T$ và $k$ đối với tải tới hạn trên $\tau_{\text{upper}}$ .....	117

## MỞ ĐẦU

### 1. Tính cấp thiết của đề tài

Vật liệu có cơ tính biến đổi (functionally graded material - FGM) thường được tạo nên từ hai loại vật liệu thành phần là gốm (ceramic) và kim loại (metal) với tỉ lệ thể tích của mỗi thành phần được lựa chọn một cách hợp lý, tỉ lệ thể tích các thành phần biến đổi trơn và liên tục theo một phương nhất định trong cấu trúc kết cấu. Đặc tính nổi bật của vật liệu FGM là có độ cứng cao và khả năng chịu nhiệt tốt, dẻo dai, tránh được sự bong tách giữa các lớp khi chịu lực và duy trì được tính toàn vẹn về cấu trúc.

Một trong những phát triển mới nhất gần đây của vật liệu FGM là vật liệu xốp hay vật liệu rỗng (porous materials) có các lỗ rỗng (hay bọt xốp) phân bố liên tục theo quy luật nhất định trong cấu trúc kết cấu. Do vật liệu xốp có cơ tính biến đổi (functionally graded porous material - FGP) có trọng lượng nhẹ và khả năng hấp thụ năng lượng tốt nên thường được ứng dụng để chế tạo các kết cấu làm việc trong môi trường nhiệt độ cao chịu tải phức tạp. Hiện nay, các kết cấu sử dụng vật liệu FGP có tiềm năng ứng dụng ngày càng rộng rãi trong nhiều ngành kỹ thuật hiện đại như hàng không vũ trụ, năng lượng nguyên tử, y học, quốc phòng, điện tử, luyện kim, chế tạo máy, xây dựng,... Vì vậy, nghiên cứu về ứng xử của các kết cấu làm bằng vật liệu FGP nhằm tối ưu hóa các sản phẩm, các chi tiết - cấu kiện làm bằng vật liệu này theo mong muốn của người thiết kế là xu hướng tất yếu của khoa học hiện đại, nó đã và đang nhận được sự quan tâm đặc biệt của cộng đồng các nhà khoa học trong và ngoài nước.

Các kết cấu dạng vỏ đóng vai trò quan trọng và ngày càng được sử dụng rộng rãi trong các ngành công nghiệp hiện đại do tăng khả năng làm việc của kết cấu trong khi tối ưu hóa được vật liệu và giá thành sản xuất. Các nghiên cứu về kết cấu vỏ bằng vật liệu FGM nói chung, vật liệu FGP nói riêng thường thực hiện bằng ba cách tiếp cận: giải tích, bán giải tích và phương pháp số. Hiện nay, đã có nhiều công bố về ổn định của các kết cấu dạng vỏ bằng vật liệu FGM, tuy nhiên các công bố về ổn định của kết cấu dạng vỏ bằng vật liệu FGP còn ít và cần tiếp tục nghiên cứu. Trong luận án này, nghiên cứu sinh tiến hành nghiên cứu bài toán ổn định tĩnh của kết cấu dạng vỏ bằng phương pháp giải tích. Sự hiểu biết về ứng xử cơ học của các kết cấu bằng vật liệu FGP là bài toán không chỉ có ý nghĩa khoa học mà còn có ý nghĩa thực tiễn to lớn góp phần gia tăng ứng dụng của loại vật liệu này trong các lĩnh vực kỹ thuật và đời sống.

Xuất phát từ những yêu cầu cấp thiết đã nêu ở trên, luận án đã chọn đề tài là **“Phân tích ổn định phi tuyến panel trụ và vỏ trụ làm bằng vật liệu FGP chịu tải cơ trong môi trường nhiệt”** làm nội dung nghiên cứu.

## 2. Mục tiêu của luận án

Phân tích ổn định phi tuyến của kết cấu dạng vỏ (gồm panel trụ và vỏ trụ) làm bằng vật liệu FGP có kể đến độ không hoàn hảo hình học ban đầu của vỏ, gân FGM gia cường, nền đàn hồi (mô hình nền Pasternak), chịu nén dọc trục, áp lực ngoài, tải xoắn, tải nhiệt. Để giải quyết mục tiêu, các nghiên cứu sau sẽ được thực hiện:

i) Thiết lập lời giải giải tích cho bài toán phân tích ổn định phi tuyến của kết cấu panel trụ FGP không hoàn hảo chịu nén dọc trục; vỏ trụ FGP có gân gia cường chịu nén dọc trục, áp lực ngoài, tải xoắn, tải nhiệt.

ii) Viết chương trình tính trên nền Matlab cho các lời giải giải tích ở trên.

iii) Khảo sát số ảnh hưởng của các tham số đầu vào như tính chất vật liệu, kích thước hình học, độ không hoàn hảo hình học ban đầu, nền đàn hồi, gân gia cường, điều kiện biên và các loại tải trọng tác dụng đến ổn định phi tuyến tĩnh của kết cấu.

## 3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu của luận án

Đối tượng nghiên cứu:

- Kết cấu panel trụ và vỏ trụ làm bằng vật liệu xốp FG với các mô hình phân bố xốp: phân bố xốp đối xứng, phân bố xốp không đối xứng và phân bố xốp đồng đều.

- Kết cấu panel trụ và vỏ trụ sandwich FGP ba lớp, gồm lớp lõi xốp FG đối xứng ở giữa hai lớp phủ mặt FGM.

- Panel trụ FGP không hoàn hảo, không có gân gia cường.

- Vỏ trụ FGP có gân FGM gia cường (dạng gân dọc, gân vòng, gân trục giao, gân xiên).

- Kết cấu chịu các loại tải trọng tác dụng như nén dọc trục, áp lực ngoài, tải xoắn và tải nhiệt, có kể đến tương tác với nền.

Phạm vi nghiên cứu của luận án là phân tích ổn định tĩnh của vỏ làm bằng vật liệu xốp có cơ tính biến đổi bằng tiếp cận giải tích.

## 4. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp giải tích: Luận án sử dụng hai lý thuyết là lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và lý thuyết vỏ Donnell có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến hình học von-Karman, áp dụng kỹ thuật san đều tác dụng gân Leckhnitsky để thiết lập các phương trình chủ đạo theo hàm ứng suất và độ võng. Sử dụng phương pháp Galerkin xây dựng biểu thức hiển để xác định tải trọng tới hạn và vẽ các đường cong tải - độ võng mô tả đáp ứng sau tới hạn.

Chương trình tính trên nền Matlab đã được xây dựng để khảo sát ảnh hưởng của các thông số đầu vào đến ổn định và sau mất ổn định của panel trụ và vỏ trụ FGP không có gân gia cường và có gân gia cường với các điều kiện biên và các loại tải trọng tác dụng khác nhau.

## 5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của luận án

### *Ý nghĩa khoa học của luận án*

Vật liệu FGP là loại composite thể hệ mới, có trọng lượng nhẹ và khả năng hấp thụ năng lượng tốt là lựa chọn thích hợp cho các kết cấu có trọng lượng nhẹ chịu các loại tải trọng phức tạp. Luận án cung cấp các kết quả phân tích ổn định phi tuyến cho kết cấu panel trụ FGP không hoàn hảo, không gia cường và vỏ trụ FGP có gân FGM gia cường. Các kết quả nghiên cứu của luận án sẽ góp phần làm phong phú thêm sự hiểu biết về ứng xử của các kết cấu dạng vỏ làm bằng vật liệu xốp có cơ tính biến đổi.

### *Ý nghĩa thực tiễn của luận án*

Luận án tập trung giải quyết bài toán về kết cấu panel trụ và vỏ trụ với các điều kiện làm việc thực tế thường gặp trong thiết kế, ứng dụng hiện nay. Vì vậy, các kết quả nghiên cứu của luận án là nguồn tham khảo có giá trị cho các tính toán trong tương lai, và là những khuyến nghị đáng tin cậy cho các kỹ sư thiết kế kết cấu trong lĩnh vực này. Cụ thể là:

- Trong mô hình kết cấu: Luận án đã xét đến kết cấu panel trụ và vỏ trụ làm bằng vật liệu xốp FG với bốn mô hình phân bố xốp khác nhau; mô hình kết cấu kiểu sandwich ba lớp, gồm lớp lõi xốp FG đối xứng ở giữa hai lớp phủ mặt FGM. Đồng thời tính phi tuyến hình học, độ không hoàn hảo, điều kiện biên, tương tác nền, thông số hình học cũng được nghiên cứu đến.

- Trong mô hình tải trọng: Luận án đã xét đến nhiều loại tải trọng mà kết cấu panel trụ và vỏ trụ thường chịu trong các ứng dụng thực tế, cụ thể là: tải trọng nén dọc trục, áp lực ngoài, tải trọng xoắn, môi trường nhiệt độ.

- Trong các kết quả phân tích số: Luận án đã sử dụng chương trình tính trên nền Matlab để phân tích một cách chi tiết các ảnh hưởng khác nhau như các mô hình phân bố độ xốp, hệ số độ xốp, độ không hoàn hảo hình học ban đầu, loại liên kết, chỉ số tỉ phân thể tích, kích thước hình học, nền đàn hồi, gân gia cường, nhiệt độ đến sự ổn định của kết cấu. Từ đó đánh giá các yếu tố có lợi và bất lợi đối với sự ổn định của các kết cấu panel trụ và vỏ trụ. Các kết quả này có giá trị tham khảo đối với các cán bộ nghiên cứu về ổn định của kết cấu dạng vỏ cũng như định hướng về thiết kế, chế tạo và ứng dụng các kết cấu dạng này trong thực tiễn.

## 6. Bố cục của luận án

Luận án gồm: mở đầu, bốn chương nội dung, kết luận, danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến nội dung luận án, tài liệu tham khảo và phụ lục.

**Mở đầu**, trình bày tính cấp thiết của vấn đề nghiên cứu, mục tiêu, đối tượng và phạm vi nghiên cứu, phương pháp nghiên cứu, ý nghĩa khoa học và thực tiễn, bố cục của luận án.

**Chương 1**, trình bày tổng quan về các vấn đề nghiên cứu

**Chương 2**, trình bày nghiên cứu về ổn định phi tuyến của panel trụ FGP không hoàn hảo chịu nén dọc trục trên nền đàn hồi Pasternak.

**Chương 3**, trình bày nghiên cứu về ổn định phi tuyến của vỏ trụ FGP có gân trục giao FGM gia cường chịu nén dọc trục (hoặc áp lực ngoài), có xét đến tương tác vỏ với nền theo mô hình nền Pasternak và độ tăng nhiệt độ đồng đều.

**Chương 4**, trình bày nghiên cứu về ổn định phi tuyến của vỏ trụ FGP có gân xiên (hoặc gân trục giao) FGM gia cường chịu tải xoắn, có xét đến tương tác vỏ với nền theo mô hình nền Pasternak và độ tăng nhiệt độ đồng đều.

**Kết luận**, trình bày những đóng góp chính được nghiên cứu trong luận án và một số nhận xét.

**Danh mục các bài báo**, là danh mục các bài báo liên quan đến nội dung luận án đã được tác giả công bố trên các tạp trí uy tín.

**Tài liệu tham khảo**, là danh sách các tài liệu, luận án, bài báo của tác giả khác được sử dụng để tham khảo trong quá trình nghiên cứu, hoàn thiện luận án.

**Phụ lục**, là những biểu thức được sử dụng trong các chương của luận án.

## Chương 1. TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

### 1.1. Tổng quan về vật liệu FGM

#### 1.1.1. Vật liệu có cơ tính biến đổi

Vật liệu có cơ tính biến đổi (Functionally Graded Material - FGM) là một loại vật liệu composite thể hệ mới được nghiên cứu và phát triển lần đầu tiên bởi các nhà khoa học Nhật Bản vào năm 1984 [1]. Sự ra đời của vật liệu FGM đáp ứng tốt yêu cầu thực tế của các lĩnh vực kỹ thuật hiện đại về khả năng chịu được các điều kiện làm việc khắc khe của kết cấu dưới sự tác dụng của các loại tải trọng cơ và môi trường nhiệt độ. Vật liệu FGM thường được tạo nên từ hai loại vật liệu thành phần là gốm (ceramic) và kim loại (metal), trong đó tỉ lệ thể tích của mỗi thành phần được lựa chọn một cách hợp lý, các thành phần biến đổi trơn và liên tục theo bề dày của kết cấu. Thành phần ceramic có mô đun đàn hồi cao cùng với hệ số truyền nhiệt và dẫn nở nhiệt thấp làm cho vật liệu FGM có độ cứng cao và chịu nhiệt tốt. Trong khi đó, thành phần kim loại giúp vật liệu FGM có tính dẻo dai, khắc phục vấn đề rạn nứt kết cấu do tính giòn của ceramic khi chịu tác dụng của nhiệt độ.

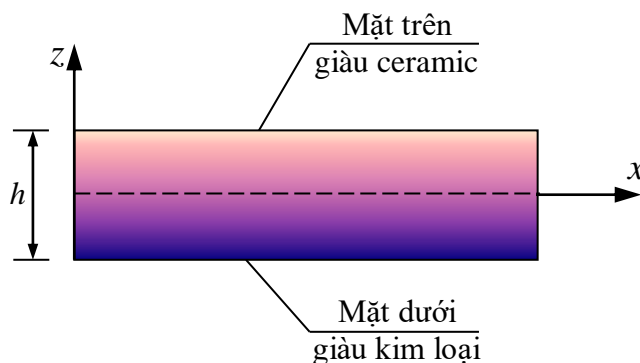
Các tính chất cơ học như mô đun đàn hồi Young, hệ số Poisson, mô đun đàn hồi cắt và khối lượng riêng của vật liệu được biến đổi (graded) trơn và liên tục theo các hướng được ưu tiên trong vật liệu. Đặc tính nổi bật của vật liệu FGM là có độ cứng cao, chịu nhiệt tốt, dẻo dai, tránh được sự bong tách giữa các lớp khi chịu lực và duy trì được tính toàn vẹn về cấu trúc.

Kết cấu FGM sử dụng thường là tổ hợp của một số vật liệu sau [2]

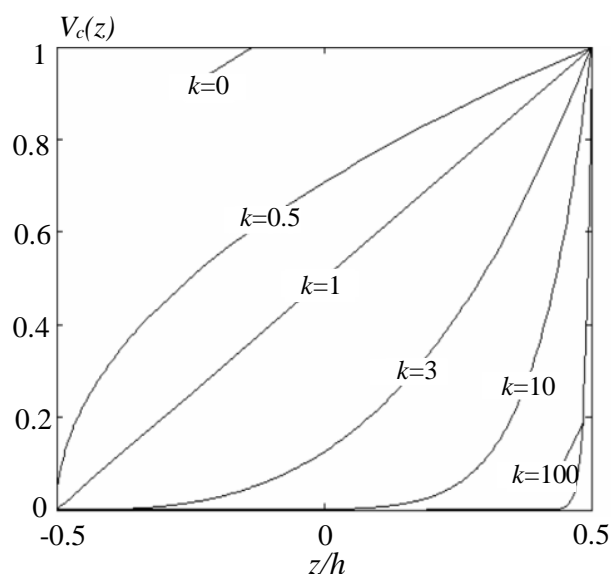
- Silicon nitride/ Stainless steel ( $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS 304}$ );
- Zirconia/ Titanium alloy ( $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ );
- Zirconia/ Stainless steel ( $\text{ZrO}_2/\text{SUS 304}$ );
- Alumina/ Aluminum ( $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Al}$ ).

Vật liệu có cơ tính biến đổi được chia làm ba loại [2-5], gồm: vật liệu FGM biến đổi theo độ dày với quy luật hàm lũy thừa (P-FGM); vật liệu FGM đối xứng phân bố theo quy luật hàm Sigmoid (S-FGM) và vật liệu FGM phân bố theo quy luật hàm siêu việt (E-FGM).

**Vật liệu P-FGM.** Mô hình vật liệu P-FGM được chỉ ra trong Hình 1.1 (kết cấu có một mặt giàu gốm, mặt còn lại giàu kim loại). Sự biến đổi của tỉ lệ thể tích thành phần gốm qua chiều dày kết cấu của vật liệu P-FGM là hàm lũy thừa (Power Function), được thể hiện thông qua Hình 1.2.



Hình 1.1. Mô hình kết cấu P-FGM



Hình 1.2. Sự biến đổi tỉ lệ ceramic qua chiều dày thành kết cấu của vật liệu P-FGM

Trong một đơn vị thể tích kết cấu có tỉ lệ thể tích: gốm là  $V_c$ , kim loại là  $V_m$ , ta có  $V_c + V_m = 1$ . Tỉ lệ thể tích thành phần gốm và kim loại được giả thiết thay đổi theo chiều dày của kết cấu với quy luật là hàm lũy thừa như sau [2-5]

$$V_c(z) = \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^k, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.1)$$

$$V_m(z) = 1 - V_c(z)$$

trong đó

$h$  là độ dày của kết cấu;

$k$  là chỉ số tỉ phần thể tích (volume fraction index),  $k \geq 0$  và có thể lựa chọn theo yêu cầu của thiết kế;

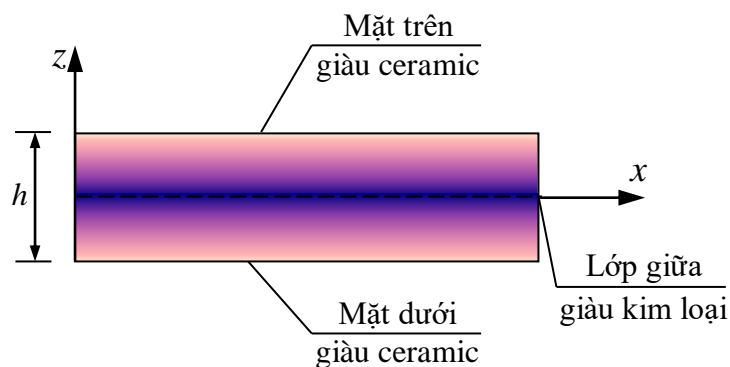
$c$  và  $m$  tương ứng với thành phần là gốm và kim loại.

Biểu thức (1.1) cho thấy:  $k = 0$ , kết cấu được chế tạo từ vật liệu gốm thuần

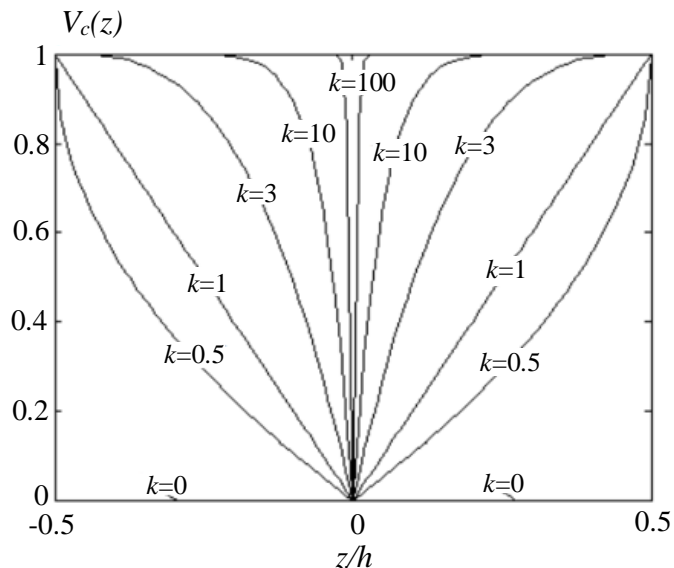


nhất; khi  $k = 1$ , các thành phần gốm và kim loại phân bố tuyến tính theo chiều dày của kết cấu; khi  $k$  tăng, tỉ lệ thể tích thành phần gốm trong kết cấu giảm còn thành phần kim loại tăng lên; khi  $k$  giảm, tỉ lệ thể tích thành phần gốm trong kết cấu tăng còn thành phần kim loại giảm.

**Vật liệu S-FGM.** Theo độ dày, kết cấu S-FGM có mặt ngoài giàu gốm còn ở giữa giàu kim loại (hoặc ngược lại) như Hình 1.3. Sự biến đổi của tỉ lệ thành phần gốm qua chiều dày của kết cấu S-FGM, được thể hiện thông qua Hình 1.4.



Hình 1.3. Mô hình kết cấu S-FGM



Hình 1.4. Sự biến đổi tỉ lệ ceramic qua chiều dày thành kết cấu của vật liệu S-FGM

Tỉ lệ thể tích của thành phần kim loại và gốm trong kết cấu biến đổi theo quy luật hàm Sigmoid (hàm lũy thừa cho 2 miền) là [6-7]

$$V_m(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z+h}{h}\right)^k, & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \\ \left(\frac{-2z+h}{h}\right)^k, & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}, V_c(z) = 1 - V_m(z) \quad (1.2)$$

Biểu thức (1.2) cho thấy:  $k = 0$ , kết cấu được làm từ kim loại thuần nhất;  $k = 1$ , thành phần gốm và kim loại phân bố tuyến tính qua chiều dày kết cấu; khi  $k$  tăng, tỉ lệ gốm trong kết cấu tăng lên; khi  $k$  giảm, tỉ lệ gốm trong kết cấu giảm đi.

**Vật liệu E-FGM.** Kết cấu làm từ vật liệu E-FGM, mô đun Young trong kết cấu thay đổi theo quy luật là hàm siêu việt [8]

$$E(z) = E_t e^{\frac{z+h/2}{h} \ln\left(\frac{E_b}{E_t}\right)}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.3)$$

trong đó

$$E_t \text{ là mô đun Young tại } z = -\frac{h}{2};$$

$$E_b \text{ là mô đun Young tại } z = \frac{h}{2}.$$

Vật liệu FGM được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực khác nhau như: hàng không vũ trụ; y học; hạt nhân; truyền thông; quốc phòng; năng lượng; quang điện tử;.... Về công nghệ chế tạo, có thể kể đến như [1, 9]: công nghệ phun phủ nhiệt; tổng hợp nhiệt độ cao; công nghệ luyện kim bột; lắng đọng; thiêu kết; in 3D...

### 1.1.2. Vật liệu FGP

Một trong những phát triển mới nhất gần đây của vật liệu FGM là vật liệu xốp hay vật liệu rỗng (porous materials) có các lỗ rỗng (hay bọt xốp) trong cấu trúc vật liệu. Các lỗ rỗng trong loại vật liệu này phân bố liên tục với qui luật xác định theo mong muốn của người thiết kế.

Quy luật phân bố lỗ rỗng trong vật liệu xốp có cơ tính biến đổi - FGP là hàm của tọa độ theo chiều dày kết cấu và thường được mô tả theo các quy luật phân bố xốp sau: phân bố xốp đối xứng; phân bố xốp không đối xứng và phân bố xốp đồng đều. Mô đun đàn hồi Young, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng của vật liệu xốp có cơ tính biến đổi phụ thuộc vào hệ số mật độ lỗ rỗng, biến đổi liên tục theo quy luật nhất định trong cấu trúc kết cấu [10-13]

Phân bố xấp đối xứng

$$\begin{cases} E(z) = E_1 \left[ 1 - e_0 \cos\left(\pi \frac{z}{h}\right) \right] \\ G(z) = G_1 \left[ 1 - e_0 \cos\left(\pi \frac{z}{h}\right) \right] \\ \rho(z) = \rho_1 \left[ 1 - e_m \cos\left(\pi \frac{z}{h}\right) \right] \end{cases} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.4)$$

Phân bố xấp không đối xứng loại 1

$$\begin{cases} E(z) = E_1 \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) + \frac{\pi}{4} \right] \\ G(z) = G_1 \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) + \frac{\pi}{4} \right] \\ \rho(z) = \rho_1 \left[ 1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) + \frac{\pi}{4} \right] \end{cases} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.5a)$$

Phân bố xấp không đối xứng loại 2

$$\begin{cases} E(z) = E_1 \left[ 1 - e_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right) + \frac{\pi}{4} \right] \\ G(z) = G_1 \left[ 1 - e_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right) + \frac{\pi}{4} \right] \\ \rho(z) = \rho_1 \left[ 1 - e_m \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right) + \frac{\pi}{4} \right] \end{cases} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.5b)$$

Phân bố xấp đồng đều

$$\begin{cases} E(z) = E_1(1 - e_0 \chi) \\ G(z) = G_1(1 - e_0 \chi) \\ \rho(z) = \rho_1 \sqrt{1 - e_0 \chi} \end{cases} \quad (1.6)$$

trong đó

$$\chi = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left( \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2;$$

$e_0, e_m$  là các hệ số mật độ lỗ rỗng được tính theo công thức (1.7):

$$e_0 = 1 - \frac{E_2}{E_1} = 1 - \frac{G_2}{G_1} \quad (0 < e_0 < 1)$$

$$e_m = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (0 < e_m < 1)$$
(1.7)

với

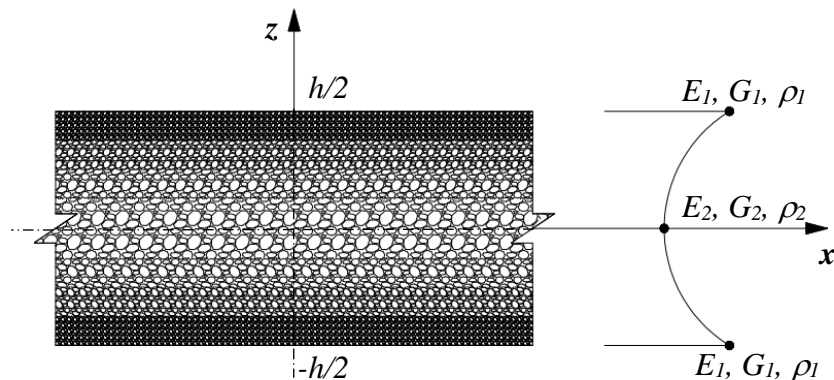
$E_1, G_1, \rho_1$  biểu thị giá trị lớn nhất của mô đun Young, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng;

$E_2, G_2, \rho_2$  biểu thị giá trị nhỏ nhất của mô đun Young, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng.

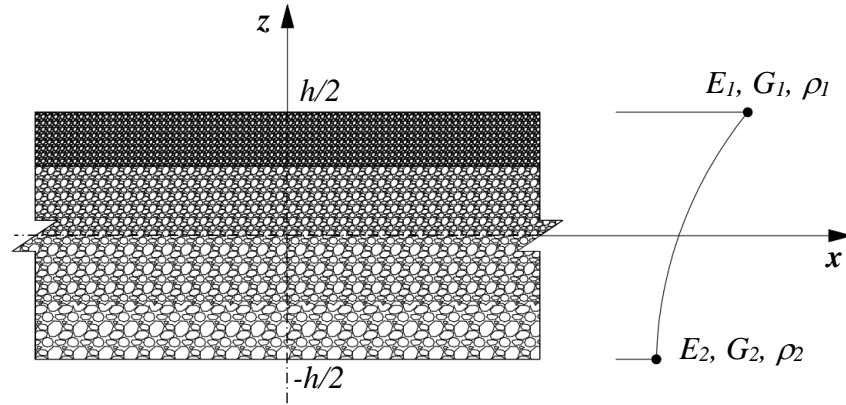
$$G_i = E_i / 2(1 + \nu) \quad \text{với } i = 1; 2.$$

Đối với vật liệu FGP đối xứng (Hình 1.5), giá trị lớn nhất của  $E, G, \rho$  đạt tại vị trí mặt trên và mặt dưới theo độ dày kết cấu, còn giá trị nhỏ nhất đạt tại mặt trung bình của kết cấu (tức vị trí có độ rỗng lớn nhất). Trường hợp vật liệu FGP không đối xứng loại 1 (Hình 1.6a), giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $E, G, \rho$  lần lượt đạt tại mặt trên và mặt dưới theo độ dày kết cấu, cụ thể là vị trí có độ xốp nhỏ nhất và lớn nhất. Trường hợp vật liệu FGP không đối xứng loại 2 (Hình 1.6b), giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $E, G, \rho$  lần lượt đạt tại mặt dưới và mặt trên theo độ dày kết cấu, cụ thể là vị trí kết cấu có độ xốp nhỏ nhất và lớn nhất.

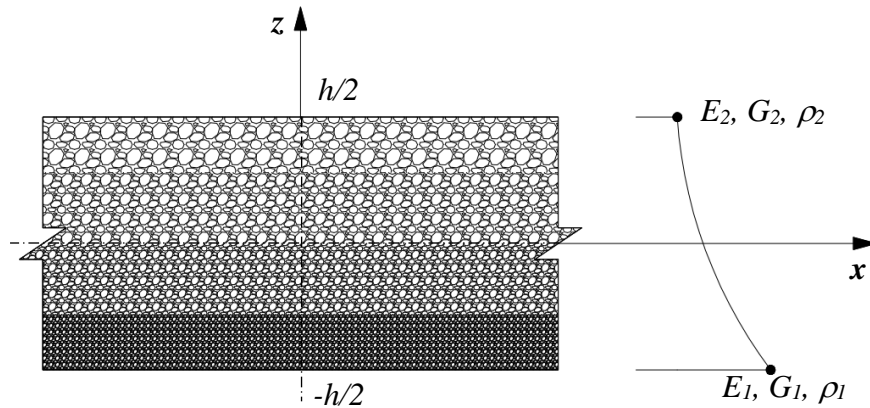
Vật liệu xốp trong tự nhiên có thể tìm thấy trong các cấu trúc xương, gỗ, san hô, ... Vật liệu xốp nhân tạo có bột kim loại rỗng, bột gốm rỗng và bột polymer. Nhờ ưu điểm là trọng lượng nhẹ và khả năng hấp thụ năng lượng tốt, vật liệu xốp có cơ tính biến đổi - FGP đã được ứng dụng rộng rãi trong nhiều ngành kỹ thuật hiện đại. Điển hình như bột kim loại (metal foam) với tỉ lệ độ cứng trên trọng lượng lớn, khả năng chịu tải trọng động, tải trọng va chạm và hấp thụ năng lượng tốt, nên được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như: hàng không vũ trụ; năng lượng nguyên tử; y học; quốc phòng; điện tử; luyện kim; chế tạo máy; xây dựng, ...



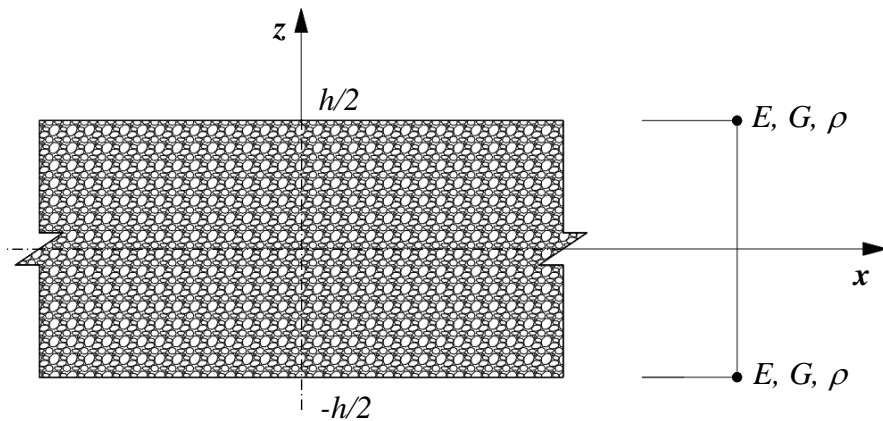
Hình 1.5. Phân bố xốp đối xứng



Hình 1.6a. Phân bố xốp không đối xứng loại 1



Hình 1.6b. Phân bố xốp không đối xứng loại 2



Hình 1.7. Phân bố xốp đồng đều

Về mặt công nghệ chế tạo bột kim loại rỗng (metal foam), có một số phương pháp như: luyện bột kim loại (Powder Metallurgy); nung kết sợi (Fiber Sintering); nung chảy kim loại; phun khí vào kim loại; đúc thẩm thấu; công nghệ in 3D,... Chúng được trình bày trong các công trình [14-17].

Với tính năng nổi bật là nhẹ và khả năng hấp thụ năng lượng tốt, các kết cấu được chế tạo từ vật liệu FGP đã được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật hiện đại như y học, xây dựng dân dụng, quốc phòng,... Ứng dụng vật liệu FGP trong lĩnh vực tiêu âm, cách nhiệt cho các công trình (Hình 1.8) [18].



(a) Tấm FGP tiêu âm cạnh đường      (b) Tấm FGP cách nhiệt cho các tòa nhà

Hình 1.8. Ứng dụng vật liệu FGP (bọt nhôm) trong lĩnh vực tiêu âm, cách nhiệt cho các công trình ở Nhật Bản

## 1.2. Phân loại mất ổn định và tiêu chuẩn ổn định tĩnh

### 1.2.1. Phân loại mất ổn định

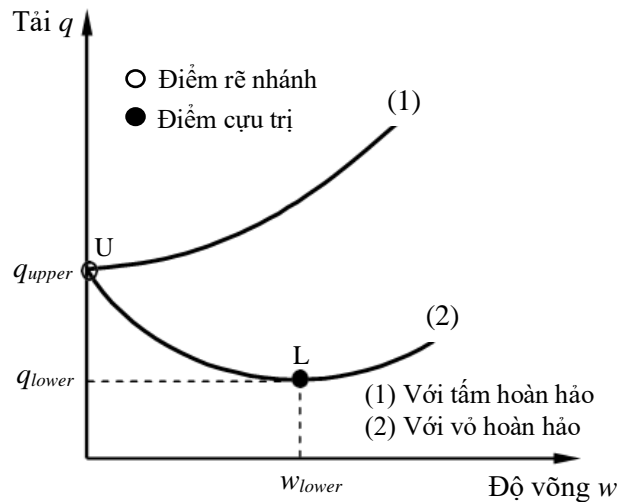
Sự ổn định của kết cấu là một tiêu chuẩn quan trọng trong đảm bảo sự làm việc an toàn của kết cấu. Mục tiêu cơ bản của bài toán ổn định là phân tích các khả năng mà kết cấu có thể mất ổn định và tìm ra các giải pháp về vật liệu, hình dáng kết cấu, các biện pháp gia cường,... để ngăn chặn khả năng gây ra mất ổn định cho kết cấu. Bài toán ổn định tĩnh của kết cấu được giả thiết tải tác dụng lên kết cấu (được bỏ qua tốc độ gia tải) tạo ra trong kết cấu các miền ứng suất. Các ứng suất có thể được tạo ra bởi tải chủ động hoặc tải bị động. Mất ổn định của kết cấu là một hiện tượng phức tạp, diễn tiến qua các giai đoạn khác nhau, nó phụ thuộc vào loại kết cấu và loại tải trọng tác dụng lên kết cấu. Luận án này sử dụng tiêu chuẩn ổn định tĩnh cho kết cấu panel trụ và vỏ trụ FGP chịu tải trọng tĩnh.

Ổn định tĩnh của kết cấu là khả năng duy trì được trạng thái cân bằng ban đầu của kết cấu khi nó chịu tác động ngoài, khi khả năng đó mất đi thì kết cấu mất ổn định. Trạng thái tới hạn là ranh giới giữa trạng thái ổn định và trạng thái mất ổn định [19, 20]. Theo Poincarre và Euler, mất ổn định chia làm hai kiểu, gồm kiểu rẽ nhánh và kiểu cực trị [20, 21].

#### 1.2.1.1. Mất ổn định theo kiểu rẽ nhánh

Mất ổn định theo kiểu rẽ nhánh (Hình 1.8) là trường hợp tải tới hạn đạt được tại điểm rẽ nhánh [3, 22]. Mất ổn định theo kiểu rẽ nhánh thường xảy ra trong một

số dạng kết cấu hoàn hảo về mặt hình dáng chịu tác dụng tải cơ nhiệt.



Hình 1.9. Mất ổn định theo kiểu rẽ nhánh

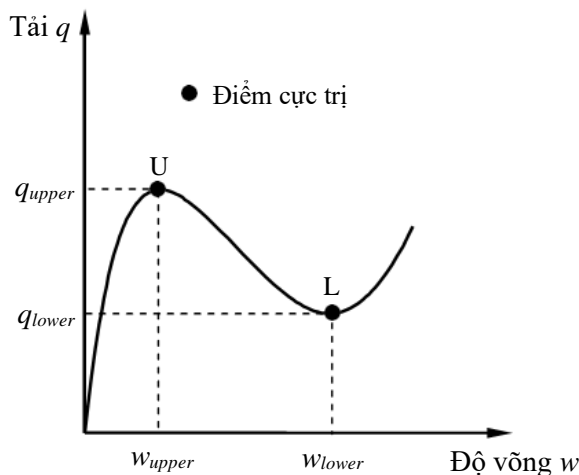
Đặc trưng cơ bản của dạng mất ổn định này là

- Giai đoạn trước tới hạn (pre-buckling) là giai đoạn mà kết cấu cân bằng ổn định ở trạng thái màng (nghĩa là, dù chịu tải trọng nhưng độ võng và mô men uốn trong kết cấu vẫn bằng không). Đường cân bằng ở giai đoạn này là đường cân bằng ổn định và là đường thẳng.

- Trạng thái tới hạn (buckling) xảy ra tại một điểm khi tải đạt tới giá trị tới hạn (còn gọi là tải tới hạn hay tải tại điểm rẽ nhánh), nghĩa là giá trị tải tới hạn làm cho kết cấu mất đi sự cân bằng ổn định.

- Giai đoạn sau tới hạn (post-buckling) là giai đoạn tải tác dụng đã vượt quá giá trị tải tới hạn và độ võng kết cấu khác không. Giai đoạn này kết cấu mất cân bằng ổn định (tức là khi tải thay đổi thì độ võng cũng thay đổi), khi đó đường quan hệ tải - độ võng là đường cong.

### 1.2.1.2. Mất ổn định theo kiểu cực trị



Hình 1.10. Mất ổn định theo kiểu cực trị

Mất ổn định theo kiểu cực trị (Hình 1.9) là trường hợp tải tới hạn đạt được ở điểm cực trị của đường cong tải - độ võng [3, 22]. Đường cong này có hai điểm cực trị là U và L. Độ võng sẽ xuất hiện ngay khi tải tác dụng, với kiểu mất ổn định này tồn tại tải tới hạn trên ( $q_{upper}$ ) và tải tới hạn dưới ( $q_{lower}$ ).

Đặc trưng cơ bản của dạng mất ổn định này là

- Không tồn tại trạng thái màng trong giai đoạn trước tới hạn, và khi chịu tải thì kết cấu bị võng cũng như xuất hiện mô men uốn ngay.

- Trạng thái tới hạn (hiện tượng mất ổn định) xảy ra tại một lân cận điểm khi tải đạt đến giá trị nhất định gọi là tải tới hạn hay tải điểm tới hạn. Về bản chất đây là điểm cực trị của đường cong tải - độ võng.

- Giai đoạn sau tới hạn (sau mất ổn định) là giai đoạn tải tác dụng vượt tải tới hạn, khi đó đường quan hệ tải - độ võng là đường cong.

Nhìn chung, mất ổn định của kết cấu là một hiện tượng phức tạp, diễn tiến theo một quá trình (thường biết đến là quá trình mất ổn định) nó phụ thuộc dạng kết cấu và bản chất của tải.

Khi nghiên cứu về ổn định của kết cấu thường quan tâm giải quyết hai vấn đề chủ yếu là xác định tải trọng tới hạn và phân tích ứng xử sau mất ổn định của kết cấu dựa trên cơ sở xây dựng đường cong tải - độ võng sau tới hạn [20].

### 1.2.2. Tiêu chuẩn ổn định tĩnh

Trạng thái cân bằng ban đầu của kết cấu được gọi là trạng thái cân bằng cơ bản. Với một giá trị nào đó của tải trọng, kết cấu có thể tồn tại trạng thái cân bằng lân cận khi lệch khỏi dạng cân bằng cơ bản. Đây là trạng thái chuyển tiếp từ dạng cân bằng ổn định sang dạng mất ổn định. Tải trọng nhỏ nhất để kết cấu tồn tại trạng thái cân bằng lân cận được gọi là lực tới hạn [19].

### 1.3. Tình hình nghiên cứu về ổn định phi tuyến của kết cấu panel trụ và vỏ trụ làm bằng vật liệu FGM, vật liệu FGP

Các kết cấu dạng vỏ đóng vai trò quan trọng là một trong những kết cấu chịu lực được sử dụng phổ biến trong nhiều ngành kỹ thuật hiện đại do tăng khả năng làm việc của kết cấu, trong khi tối ưu hóa được vật liệu và giá thành sản xuất. Chúng ta có thể thấy các kết cấu này trong các lĩnh vực y học, quốc phòng, xây dựng,.... Các kết cấu dạng vỏ thường chịu lực nén dọc trục, áp lực ngoài, tải xoắn, tải nhiệt, chúng là nguyên nhân gây ra sự mất ổn định của kết cấu. Vì vậy, các nghiên cứu về ổn định của các kết cấu dạng vỏ luôn là chủ đề hấp dẫn, nó thu hút sự



quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học.

Trong luận án, tác giả đi sâu tìm hiểu các công trình nghiên cứu về kết cấu panel trụ và vỏ trụ được chế tạo từ vật liệu FGM và FGP.

### **1.3.1. Nghiên cứu về ổn định phi tuyến của các kết cấu panel trụ và vỏ trụ FGM**

#### ***1.3.1.1. Ổn định phi tuyến của kết cấu panel trụ FGM***

Bằng cách tiếp cận theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và phương pháp nhiễu để xây dựng biểu thức xác định tải trọng tới hạn và vẽ đường cong sau mất ổn định của kết cấu, Shen cùng với Liew [23, 24] đã phân tích ổn định các panel trụ FGM nhiều lớp hoàn hảo và không hoàn hảo chịu tác động kết hợp của các tải trọng cơ, điện và nhiệt độ. Các tác động do tăng nhiệt độ, điện áp đặt vào, chỉ số tỉ phần thể tích, các thông số hình học, độ không hoàn hảo hình học ban đầu, điều kiện biên đã được Shen cùng với Liew nghiên cứu. Cũng với phương pháp trên, Shen cùng đồng nghiệp đã phân tích trạng thái mất ổn định của các panel trụ FGM chịu tải dọc trục trong môi trường nhiệt [25], phân tích trạng thái mất ổn định của các panel trụ FGM được gia cường bằng ống nano carbon đặt trên nền đàn hồi trong môi trường nhiệt chịu nén dọc trục [26], chịu áp lực ngang [27] và chịu tác động kết hợp của áp lực ngang và tải trọng nén dọc trục [28]. Ảnh hưởng của độ tăng nhiệt độ, nền đàn hồi và các thông số hình học của panel đến tải trọng tới hạn và trạng thái sau mất ổn định của panel trụ đã được nghiên cứu. Sử dụng phương pháp Ritz, Liew cùng đồng nghiệp [29] đã nghiên cứu trạng thái mất ổn định của panel trụ FGM được gia cường bằng ống nano carbon chịu tác dụng nén dọc trục. Sử dụng hai lý thuyết vỏ là lý thuyết vỏ Donnell và lý thuyết vỏ biến dạng cắt bậc nhất, Civalek [30] đã nghiên cứu trạng thái mất ổn định tĩnh của các panel trụ và vỏ trụ, vỏ nón FGM chịu tải trọng nén dọc trục. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, Zghal cùng đồng nghiệp [31] đã nghiên cứu ứng xử của các panel trụ FGM được gia cường bằng ống nano carbon, ảnh hưởng của các thông số hình học, điều kiện biên, ống nano cacbon gia cường đến tải trọng tới hạn đã được nghiên cứu. Bằng phương pháp Eshelby-Mori-Tanaka, García-Macías và cộng sự đã phân tích mất ổn định tuyến tính của các panel trụ FGM được gia cường bằng ống nano carbon chịu tải trọng nén dọc trục [32], chịu tải trọng nén dọc trục và chịu cắt [33]. Ảnh hưởng của các thông số hình học, môi trường nhiệt đến tải trọng tới hạn đã được nghiên cứu. Bằng cách tiếp cận theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, phương pháp Galerkin, tác giả Hoàng Văn Tùng cùng đồng nghiệp đã nghiên cứu ổn định phi tuyến của các panel trụ FGM

được gia cường bằng ống nano carbon trong môi trường nhiệt chịu nén đều dọc trục [34], chịu áp lực ngoài đồng đều [35, 36], chịu tải cơ nhiệt kết hợp [37]. Ảnh hưởng của chỉ số phân thể tích, sự tăng nhiệt độ, độ không hoàn hảo ban đầu, tỷ lệ hình học và nền đàn hồi đối với ổn định phi tuyến của panel đã được nghiên cứu. Turvey [38] đã nghiên cứu bài toán ổn định của panel trụ FGM với điều kiện biên là tựa đơn đặt trên nền đàn hồi. Bằng cách tiếp cận theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất kết hợp với phương pháp Rayleigh–Ritz, Jaunky cùng với Knight [39] đã nghiên cứu bài toán ổn định của panel trụ FGM nhiều lớp với các điều kiện biên khác nhau, chịu tải nén dọc trục. Cũng với lý thuyết này, kết hợp với áp dụng phương pháp Newton-Raphson, ổn định tĩnh và động của các panel FGM chịu tác dụng kết hợp của tải trọng nhiệt và khí động học được nghiên cứu bởi Sohn cùng với Kim [40]. Áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn, Kweon cùng với Hong [41] tiến hành phân tích trạng thái mất ổn định của các panel trụ FGM nhiều lớp chịu tác dụng nén dọc trục. Trong [41], Kweon cùng với Hong đã sử dụng công thức Lagrange và phần tử vô suy biến 8 nút. Phân tích trạng thái tới hạn của panel trụ có ba cạnh được tựa đơn và một cạnh tự do chịu nén dọc trục được Wilde cùng đồng nghiệp [42] thực hiện. Sử dụng phương pháp bán giải tích, phương pháp vi phân cầu phương kết hợp với quy trình lặp, Yang cùng đồng nghiệp [43] đã nghiên cứu trạng thái mất ổn định của panel trụ FGM chịu tải trọng dọc trục có và không có tác dụng của nhiệt độ. Áp dụng phương pháp Kantorovich mở rộng và phương pháp bán giải tích, Alijani cùng với Aghdam [44] đã phân tích ứng suất của các panel trụ nhiều lớp với ba trường hợp biên liên kết được xem xét. Bằng cách tiếp cận theo kỹ thuật rời rạc hóa sai phân hữu hạn, Golmakani cùng đồng nghiệp [45] đã phân tích trạng thái mất ổn định của panel trụ FGM có độ dày vừa phải với các trường hợp biên liên kết khác nhau. Bằng cách tiếp cận theo lý thuyết vỏ Donnell, phương pháp Galerkin, Huang cùng với Han [46] đã nghiên cứu trạng thái mất ổn định của panel trụ FGM chịu nén dọc trục có kể đến độ không hoàn hảo của kết cấu và tác dụng của trường nhiệt độ. Cũng với phương pháp trên, tác giả Nguyễn Đình Đức cùng đồng nghiệp [47] đã phân tích bài toán ổn định phi tuyến của panel trụ FGM không hoàn hảo có gân gia cường chịu tải trọng cơ - nhiệt. Bằng cách tiếp cận giải tích, tác giả Nguyễn Đình Đức, Hoàng Văn Tùng [48] đã phân tích trạng thái ổn định phi tuyến của panel trụ FGM không hoàn hảo chịu nén dọc trục, kết quả nghiên cứu đã xây dựng biểu thức hiển để tìm tải tới hạn và vẽ đường cong tải - độ võng mô tả đáp ứng sau tới hạn trong trường hợp hệ số Poisson là không đổi và điều kiện biên tựa khớp. Tác

giả Đào Văn Dũng, Nguyễn Thị Nga [49] đã nghiên cứu ổn định của panel trụ FGM không hoàn hảo với hệ số Poisson thay đổi theo độ dày panel. Bằng cách tiếp cận theo lý thuyết vỏ Donnell, phương pháp Galerkin, tác giả Đào Văn Dũng, Lê Khả Hòa [50] đã phân tích ổn định phi tuyến của panel trụ FGM với hai trường hợp biên liên kết khác nhau, chịu tải nén dọc trục, và hệ số Poisson là thay đổi theo độ dày.

### ***1.3.1.2. Ổn định phi tuyến của kết cấu vỏ trụ FGM***

Bằng phương pháp hàm chuyển vị, Najafizadeh cùng đồng nghiệp [51] đã phân tích trạng thái mất ổn định của vỏ trụ FGM có thiết kế các gân dọc, gân vòng FGM gia cường chịu nén dọc trục. Với cách tiếp cận theo lý thuyết vỏ nhiều lớp và dạng nghiệm Navier, Reddy cùng với Starnes [52] đã nghiên cứu trạng thái mất ổn định của vỏ trụ FGM có thiết kế các gân dọc, gân vòng FGM gia cường. Bằng cách tiếp cận theo phương pháp nhiễu, Shen [53] đã thực hiện phân tích ứng xử sau ổn định của vỏ trụ FGM chịu tải trọng tổng hợp của áp lực bên ngoài và độ tăng nhiệt độ đồng đều. Bằng cách tiếp cận giải tích, tác giả Đào Văn Dũng cùng đồng nghiệp [54] đã thực hiện phân tích trạng thái ổn định và sau mất ổn định của vỏ trụ FGM có gân FGM gia cường, chịu tải trọng tổng hợp của áp lực bên ngoài và độ tăng nhiệt độ đồng đều, có xét đến tương tác nền với vỏ trụ. Bằng cách tiếp cận theo phương pháp Galerkin, tác giả Nguyễn Đình Đức cùng với Trần Quốc Quân [55-61] tiến hành phân tích trạng thái ổn định và sau mất ổn định của vỏ FGM có thiết kế gân gia cường chịu tải cơ và độ tăng nhiệt độ, có xét đến tương tác nền với vỏ trụ. Cũng với cách tiếp cận trên trên, tác giả Đào Văn Dũng cùng với Lê Khả Hòa đã tiến hành phân tích bài toán phi tuyến tĩnh của vỏ trụ FGM có bố trí các gân gia cường FGM chịu áp lực bên ngoài vỏ [62], chịu tải trọng xoắn [63, 64], chịu tải trọng tổng hợp của tải xoắn và độ tăng nhiệt độ đồng đều [65], trong đó các tác giả đã giả thiết tính liên tục của gân và vỏ FGM được đảm bảo; tác giả Đào Văn Dũng cùng với Hoàng Thị Thiêm [66] đã tiến hành phân tích ổn định tĩnh của vỏ trụ FGM có thiết kế các gân gia cường chịu đồng thời tải cơ và độ tăng nhiệt độ đồng đều dạng Fourier. Cũng với cách tiếp cận này, tác giả Vũ Hoài Nam cùng đồng nghiệp [67] đã tiến hành phân tích trạng thái ổn định và sau mất ổn định của vỏ trụ FGM có thiết kế các gân gia cường chịu đồng thời tải trọng xoắn và độ tăng nhiệt độ, nghiên cứu đã phân tích ảnh hưởng của độ tăng nhiệt độ, gân FGM gia cường, các thông số về vật liệu và kích thước vỏ đối với bài toán ổn định của kết cấu.

### 1.3.2. Nghiên cứu về ổn định phi tuyến của các kết cấu panel trụ và vỏ trụ FGP

Tổng quan về phân tích các dạng cấu trúc xấp FG và ứng dụng, đề xuất các hướng nghiên cứu về vật liệu xấp FG được Chen cùng với Gao, Yang và Zhang thực hiện [68]. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, Chen cùng với Kitipornchai và Yang [69] đã nghiên cứu đáp ứng động và hấp thụ năng lượng của kết cấu xấp 2D FG (bọt kim loại), ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xấp và tốc độ gia tải đã được phân tích cụ thể.

Áp dụng nguyên lý Hamilton và phương pháp cân bằng điều hòa cùng với phương pháp lặp, Keleshteri và Jelovica đã thực hiện các phân tích dao động phi tuyến của các panel trụ FGP với ba trường hợp biên liên kết khác nhau [70]. Bằng cách tiếp cận theo lý thuyết đàn hồi xấp tuyến tính của Biot, Akbari cùng với Azadi và Fahham [71] đã phân tích dao động tự do của các panel trụ sandwich dày FGP với các trường hợp biên liên kết khác nhau. Bằng cách sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc bốn và phương pháp Galerkin, tác giả Nguyễn Đình Đức cùng với Vũ Minh Anh [72] thực hiện phân tích ứng xử động của của panel trụ FGP chịu tải trọng cơ và độ tăng nhiệt độ, có xét đến tương tác với nền.

Bằng cách áp dụng phương pháp Runge-Kutta bậc bốn, phương pháp Galerkin, Foroutan cùng Shaterzadeh và Ahmadi [73] thực hiện các phân tích tĩnh và động phi tuyến của vỏ trụ FGP chịu tác động của nhiệt độ thay đổi. Bằng cách tiếp cận theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất cùng với phương pháp Rayleigh - Ritz, Shahgholian-Ghahfarokhi cùng Safarpour và Rahimi [74] thực hiện phân tích về ổn định của vỏ trụ nanocomposit FGP được thiết kế các graphene gia cường.

Bằng phương pháp Galerkin, Duc-Kien Thai cùng các đồng nghiệp [75] đã tiến hành phân tích ổn định phi tuyến của vỏ nón cụt sandwich FGP có thiết kế các gân FGM gia cường, chịu tải nén dọc trục có xét đến tương tác vỏ với nền theo mô hình nền Pasternak, trong đó giả thiết vỏ sandwich có ba lớp, với lớp lõi FGP (bọt kim loại) ở giữa hai lớp phủ mặt FGM. Ảnh hưởng của các tính chất vật liệu, tỉ lệ độ dày lớp lõi/lớp phủ mặt, hệ số độ xấp, kích thước hình học và nền đàn hồi đến ổn định và sau mất ổn định của vỏ được chỉ ra. Bằng cách tiếp cận theo lý thuyết vỏ Donnell, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và phương pháp Galerkin, Zhenhuan cùng các đồng nghiệp [76] đã phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ composite gia cường các graphene xấp FG chịu tải nén dọc trục với hai trường hợp biên liên kết khác nhau. Nghiên cứu đã thiết lập được biểu thức xác định tải trọng tới hạn, và đánh giá ảnh hưởng của đặc tính vật liệu, so sánh các kiểu dạng phân bố độ xấp đến trạng

thái ổn định và sau mất ổn định của kết cấu. Bằng cách tiếp cận giải tích, tác giả Lê Khả Hòa cùng các đồng nghiệp [77] đã tiến hành phân tích bài toán ổn định tuyến tính của vỏ nón cụt FGP chịu tải trọng nén dọc trục có xét đến tương tác vỏ với nền theo mô hình nền Pasternak, ảnh hưởng của các đặc tính vỏ, các loại phân bố độ xoắn, hệ số độ xoắn và nền đàn hồi đã được chỉ ra. Cũng với cách tiếp cận trên, tác giả Vũ Hoài Nam cùng các đồng nghiệp [78] đã nghiên cứu ứng xử sau mất ổn định phi tuyến của vỏ trụ xoắn FG có gân xiên dạng xoắn ốc gia cường dưới tác dụng của tải nén dọc trục.

Bằng cách tiếp cận theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và phương pháp Galerkin, Dong cùng các đồng nghiệp [79] đã tiến hành nghiên cứu ứng xử uốn của vỏ trụ nanocompozit xoắn FG được gia cường bằng graphene FGM với chuyển động quay, chịu tác dụng kết hợp của lực nén dọc trục và áp lực ngoài. Nghiên cứu đã xác định giá trị tải trọng tới hạn cho các trường hợp cụ thể của vỏ trụ nanocompozit xoắn FG và chỉ ra ảnh hưởng của hệ số độ xoắn, kích thước hình học của graphene gia cường, tốc độ quay đến ổn định của vỏ trụ. Sử dụng nguyên lý ổn định thế năng toàn phần, Belica và Magnucki [80] đã nghiên cứu ổn định của vỏ trụ xoắn FG (bọt kim loại) với biên liên kết tựa đơn, chịu tác dụng kết hợp của lực nén dọc trục và áp lực ngoài.

Bằng cách tiếp cận theo lý thuyết vỏ Donnell có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến hình học von-Karman và sử dụng phương pháp Galerkin, nhóm tác giả Vũ Hoài Nam, Nguyễn Thời Trung và Lê Khả Hòa [81] đã phân tích bài toán ổn định phi tuyến của vỏ trụ FGP có thiết kế các gân FGM gia cường chịu tác dụng kết hợp của tải trọng xoắn và độ tăng nhiệt độ đồng đều, có xét đến tương tác vỏ với nền theo mô hình nền Pasternak. Trong nghiên cứu [81] giả thiết rằng, vỏ được thiết kế các gân dọc và gân vòng gia cường cách đều nhau, tính chất vật liệu của vỏ và các gân là thay đổi liên tục theo chiều dày, nghiệm độ võng ba số hạng cùng với hàm ứng suất được sử dụng, nghiên cứu đã xây dựng biểu thức xác định tải trọng tới hạn và phân tích đáp ứng sau tới hạn của vỏ trụ FGP. Ảnh hưởng của hệ số xoắn, thông số vật liệu, môi trường nhiệt độ, kích thước hình học, gân gia cường và mô hình nền Pasternak đã được phân tích cụ thể.

#### **1.4. Các kết quả đạt được từ các công trình đã công bố trong nước và quốc tế**

Từ tổng quan những vấn đề mà luận án đã trình bày bên trên, có thể nhận thấy những kết quả nghiên cứu đã thực hiện là:

1- Đã có nhiều kết quả nghiên cứu công bố về bài toán ổn định phi tuyến của các kết cấu panel trụ và vỏ trụ FGM chịu tải cơ nhiệt.

2- Các nghiên cứu về ổn định của kết cấu panel trụ và vỏ trụ FGP còn ít, nhất là nghiên cứu về ổn định tĩnh của kết cấu panel trụ và vỏ trụ sandwich FGP chịu tải cơ nhiệt trên nền đàn hồi.

### **1.5. Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu của luận án**

Từ tổng quan những vấn đề đã trình bày bên trên, luận án nhận thấy một số vấn đề cần được tiếp tục nghiên cứu là:

1- Nghiên cứu ảnh hưởng các mô hình phân bố độ xốp đến ổn định phi tuyến của panel trụ và vỏ trụ làm bằng vật liệu FGP chịu tác dụng tải nén dọc trục.

2- Nghiên cứu ổn định phi tuyến của panel trụ sandwich FGP ba lớp, gồm lớp lõi FGP ở giữa và hai lớp phủ mặt FGM bên ngoài, có xét đến tương tác vỏ với nền theo mô hình nền Pasternak, với hai trường hợp biên liên kết khác nhau chịu tác dụng tải nén dọc trục.

3- Nghiên cứu ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân FGM gia cường (gân dọc, gân vòng, gân trục giao, gân xiên) chịu tác dụng nén dọc trục, chịu áp lực ngoài, chịu tải xoắn có xét đến tương tác vỏ với nền theo mô hình nền Pasternak và độ tăng nhiệt độ đồng đều. Vỏ trụ sandwich ba lớp, trong đó lớp lõi FGP ở giữa hai lớp phủ mặt FGM.

4- Nghiên cứu các kết cấu đã nêu ở trên khi tính đến tương tác nền đàn hồi.

## **Chương 2: PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA PANEL TRỤ LÀM BẰNG VẬT LIỆU FGP CHỊU NÉN DỌC TRỰC**

### **2.1. Đặt vấn đề**

Panel trụ là kết cấu chịu lực sử dụng phổ biến trong nhiều lĩnh vực khoa học kỹ thuật hiện đại. Ổn định tĩnh và động là đặc tính cơ học quan trọng của kết cấu panel trụ, nó nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu trong và ngoài nước. Nghiên cứu tổng quan cho thấy, nghiên cứu về ổn định tĩnh của kết cấu panel trụ FGP còn ít, nhất là nghiên cứu về ổn định tĩnh kết cấu panel trụ FGP chịu tải trọng cơ có xét đến tương tác panel với nền đàn hồi.

Chương 2 của luận án sử dụng lý thuyết vỏ Donnell, phương pháp Galerkin nghiên cứu lời giải giải tích cho ba bài toán cơ bản sau đây:

Bài toán 1: Phân tích ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xấp đến ổn định phi tuyến của panel trụ FGP.

Bài toán 2: Phân tích ổn định phi tuyến của panel trụ sandwich FGP với các điều kiện biên khác nhau.

Bài toán 3: Phân tích ổn định phi tuyến của panel trụ sandwich FGP đặt trên nền đàn hồi.

Một số giả thiết trong chương 2:

1. Về vật liệu: Panel trụ FGP được giả thiết là mỏng và có xét đến độ không hoàn hảo hình học ban đầu. Panel trụ sandwich FGP ba lớp, gồm hai lớp phủ mặt FGM mỏng và một lớp lõi FGP đối xứng ở giữa dày hơn. Đặc tính vật liệu lớp phủ FGM được giả định biến đổi theo độ dày với quy luật hàm lũy thừa. Lớp lõi xấp FG được đặc trưng bởi hệ số độ xấp ảnh hưởng đến các đặc tính vật lý theo hướng chiều dày của panel. Tính liên tục vật liệu giữa lớp phủ và lớp lõi được đảm bảo không bị tập trung ứng suất và phân tách các lớp.

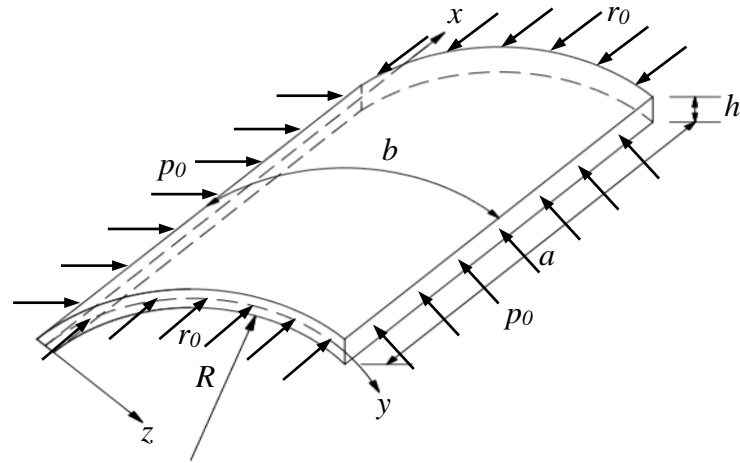
2. Tương tác panel trụ với nền đàn hồi giả thiết theo mô hình Pasternak với hai hệ số nền  $K_1$  và  $K_2$ . Trong đó, hệ số nền Winkler ( $K_1$ ) có thứ nguyên [lực/(chiều dài)<sup>3</sup>]; hệ số nền Pasternak ( $K_2$ ) có thứ nguyên [lực/(chiều dài)].

3. Tải trọng tác dụng lên panel trụ là tải nén đều dọc trục đặt tại vị trí các cạnh của panel.

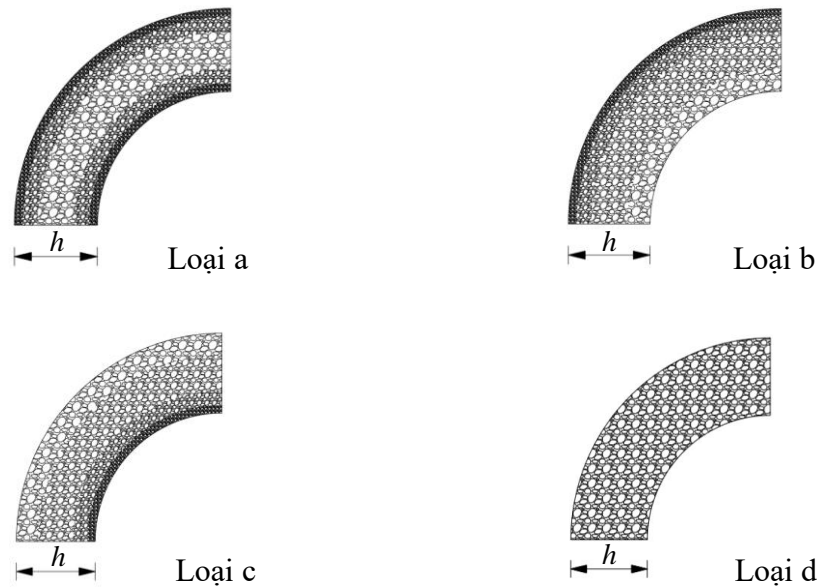
4. Mặt giữa và mặt trung hòa được giả thiết là trùng nhau

## 2.2. Phân tích ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xốp đến ổn định phi tuyến của panel trụ FGP

### 2.2.1. Mô hình panel trụ FGP



Hình 2.1a. Mô hình panel trụ FGP chịu nén



Hình 2.1b. Các mô hình phân bố độ xốp của panel trụ FGP

Xét panel trụ không hoàn hảo làm bằng vật liệu xốp FG có độ dày  $h$ , bán kính mặt giữa là  $R$ , độ dài cạnh thẳng là  $a$ , độ dài cạnh cong là  $b$ , độ không hoàn hảo hình học ban đầu là  $w^*$ . Panel trụ được xác định trong một hệ tọa độ  $xyz$  với mặt phẳng  $(x, y)$  trùng với mặt giữa của panel, tọa độ chiều dày của panel  $z$  ( $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ ) như được chỉ ra trong Hình 2.1a. Panel trụ FGP được xem xét gồm bốn loại mô hình phân bố độ xốp (Hình 2.1b), chịu nén đều dọc trục với cường độ  $r_0$  trên cạnh  $x=0, x=a$ ;  $p_0$  trên cạnh  $y=0, y=b$ .



Mô đun đàn hồi Young của panel trụ FGP thay đổi theo độ dày, được xác định như sau [10-13]

*Loại a: Phân bố xấp đối xứng*

$$E_{sh}(z) = E_m \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right]; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.1a)$$

*Loại b,c: Phân bố xấp không đối xứng*

$$E_{sh}(z) = E_m \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right]; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.1b)$$

$$E_{sh}(z) = E_m \left[ 1 - e_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right]; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.1c)$$

*Loại d: Phân bố xấp đồng đều*

$$E_{sh}(z) = E_m (1 - e_0 \chi) \quad (2.1d)$$

trong đó

$E_{sh}$  là mô đun đàn hồi Young của panel trụ;

$E_m$  là giá trị lớn nhất của mô đun đàn hồi Young;

$\nu$  là hệ số Poisson ( $\nu = 0,3$ );

$e_0$  là hệ số độ rỗng ( $0 < e_0 < 1$ );

hệ số  $\chi$  trong phân bố xấp đồng đều, được xác định

$$\chi = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left( \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2. \quad (2.2)$$

Từ các biểu thức (2.1a)-(2.1d) ta thấy: khi  $e_0=0$ , panel trụ hoàn toàn bằng kim loại không có lỗ rỗng.

### 2.2.2. Các phương trình cơ bản

Theo lý thuyết vỏ Donnell với tính phi tuyến hình học von-Karman, các thành phần biến dạng ở một điểm cách mặt giữa một khoảng  $z$  của panel trụ được xác định là [46, 82]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + zk_x \\ \varepsilon_y^0 + zk_y \\ \gamma_{xy}^0 + 2zk_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

trong đó

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$  là các thành phần biến dạng theo phương  $x, y$ ;

$\gamma_{xy}$  là biến dạng cắt;

$\varepsilon_x^0$  và  $\varepsilon_y^0$  là các thành phần biến dạng pháp tuyến;

$\gamma_{xy}^0$  là biến dạng trượt trong mặt phẳng ở mặt giữa ( $z=0$ ) của panel;

$k_x, k_y, k_{xy}$ , là các thành phần độ cong uốn, xoắn.

$$k_x = -w_{,xx}; \quad k_y = -w_{,yy}; \quad k_{xy} = -w_{,xy}.$$

Các thành phần  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  được xác định qua các thành phần chuyển vị  $u, v, w$  như sau [46, 82]

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{,x}^* \\ v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{,y} w_{,y}^* \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} + w_{,x} w_{,y}^* + w_{,y} w_{,x}^* \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

trong đó

$u, v, w$  là các thành phần chuyển vị theo phương  $x, y, z$ ;

$w^*$  là độ không hoàn hảo hình học ban đầu của panel,  $w^*$  được giả thiết là nhỏ so với độ dày của panel và có thể bỏ qua các đại lượng bậc hai của nó trong biểu thức (2.4).

Theo định luật Hooke, quan hệ ứng suất - biến dạng được xác định là

$$\left( \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2} \left[ \left( \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{array} \right) + \nu(z) \left( \begin{array}{l} \varepsilon_y \\ \varepsilon_x \end{array} \right) \right], \quad \sigma_{xy} = \frac{E(z)}{2[1+\nu(z)]} \gamma_{xy} \quad (2.5)$$

Tích phân các thành phần ứng suất theo chiều dày của panel ta nhận được các thành phần lực dẫn và mômen

$$\left\{ \begin{array}{l} (N_x, N_y, N_{xy}) \\ (M_x, M_y, M_{xy}) \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy} \} \left( \begin{array}{l} 1 \\ z \end{array} \right) dz \quad (2.6)$$

Thay các biểu thức (2.3), (2.4), (2.5) vào (2.6), ta được

$$\left[ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccc} D_{11} & D_{21} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ D_{21} & D_{11} & 0 & D_{22} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & D_{31} & 0 & 0 & D_{32} \\ D_{12} & D_{22} & 0 & D_{13} & D_{23} & 0 \\ D_{22} & D_{12} & 0 & D_{23} & D_{13} & 0 \\ 0 & 0 & D_{32} & 0 & 0 & D_{33} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ 2k_{xy} \end{array} \right] \quad (2.7)$$

trong đó

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} dz = \frac{E_1}{1-\nu^2}; & D_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} z dz = \frac{E_2}{1-\nu^2}; & D_{13} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} z^2 dz = \frac{E_3}{1-\nu^2}; \\
D_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu}{1-\nu^2} dz = \frac{\nu E_1}{1-\nu^2}; & D_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} z dz = \frac{\nu E_2}{1-\nu^2}; & D_{23} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} z^2 dz = \frac{\nu E_3}{1-\nu^2}; \\
D_{31} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} dz = \frac{E_1}{2(1+\nu)}; & D_{32} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} z dz = \frac{E_2}{2(1+\nu)}; & D_{33} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} z^2 dz = \frac{E_3}{2(1+\nu)}.
\end{aligned}$$

với

$$E_1 = \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh}(z) dz; \quad E_2 = \int_{-h/2}^{h/2} z E_{sh}(z) dz; \quad E_3 = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 E_{sh}(z) dz. \quad (2.8)$$

Lần lượt thay thế  $E_{sh}$  từ các biểu thức (2.1a)-(2.1d) vào (2.8), ta thu được

*Loại a: Phân bố xấp đối xứng*

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_m h \left( 1 - \frac{2e_0}{\pi} \right); & E_2 &= 0; \\
E_3 &= \frac{E_m h^3}{12\pi^3} (48e_0 - 6e_0\pi^2 + \pi^3).
\end{aligned} \quad (2.9)$$

*Loại b: Phân bố xấp không đối xứng*

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{E_m h}{\pi} (\pi - 2e_0); & E_2 &= \frac{E_m e_0 h^2}{\pi^2} (4 - \pi); \\
E_3 &= \frac{E_m h^3}{12\pi^3} (192e_0 - 48e_0\pi - 6e_0\pi^2 + \pi^3).
\end{aligned} \quad (2.10)$$

*Loại c: Phân bố xấp không đối xứng*

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{E_m h}{\pi} (\pi - 2e_0); & E_2 &= \frac{E_m e_0 h^2}{\pi^2} (\pi - 4); \\
E_3 &= \frac{E_m h^3}{12\pi^3} (192e_0 - 48e_0\pi - 6e_0\pi^2 + \pi^3).
\end{aligned} \quad (2.11)$$

*Loại d: Phân bố xấp đồng đều*

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_m h (1 - e_0\chi); & E_2 &= 0; \\
E_3 &= \frac{E_m h^3}{12} (1 - e_0\chi).
\end{aligned} \quad (2.12)$$

Dựa trên lý thuyết vỏ Donnell, hệ phương trình cân bằng của panel trụ xấp FG không hoàn hảo là [46]

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0, \quad N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (2.13)$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + \frac{N_y}{R} + N_x(w_{,xx} + w_{,xx}^*) + 2N_{xy}(w_{,xy} + w_{,xy}^*) + N_y(w_{,yy} + w_{,yy}^*) = 0 \quad (2.14)$$

Giả thiết độ không hoàn hảo hình học ban đầu là nhỏ nên ta bỏ qua các số hạng bậc hai. Từ các biểu thức (2.3), (2.4), suy ra

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = & -\frac{1}{R}w_{,xx} + w_{,xy}^2 - w_{,xx} \cdot w_{,yy} + \\ & + 2w_{,xy}w_{,xy}^* - w_{,xx} \cdot w_{,yy}^* - w_{,yy}w_{,xx}^* \end{aligned} \quad (2.15)$$

Chọn hàm ứng suất  $f = f(x, y)$  có dạng

$$N_x = f_{,yy}, \quad N_y = f_{,xx}, \quad N_{xy} = -f_{,xy} \quad (2.16)$$

khi đó biểu thức (2.13) tự thỏa mãn.

Thay biểu thức (2.16) vào (2.7), thu được

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= J_0(D_{11}f_{,yy} - D_{21}f_{,xx} + J_1w_{,xx} + J_2w_{,yy}) \\ \varepsilon_y^0 &= J_0(D_{11}f_{,xx} - D_{21}f_{,yy} + J_1w_{,yy} + J_2w_{,xx}) \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{1}{D_{31}}(2D_{32}w_{,xy} - f_{,xy}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

trong đó,  $J_0 = \frac{1}{D_{11}^2 - D_{21}^2}$ ;  $J_1 = D_{11}D_{12} - D_{21}D_{22}$ ;  $J_2 = D_{11}D_{22} - D_{21}D_{12}$ .

Thay  $M_x, M_y, M_{xy}$  từ biểu thức (2.7) và thay  $N_x, N_y, N_{xy}$  từ biểu thức (2.16) vào (2.14), ta thu được

$$\begin{aligned} A_3 \nabla^4 f + \frac{1}{R} f_{,xx} + A_4 \nabla^4 w + f_{,yy}(w_{,xx} + w_{,xx}^*) - 2f_{,xy}(w_{,xy} + w_{,xy}^*) + \\ + f_{,xx}(w_{,yy} + w_{,yy}^*) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

trong đó

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

$$A_3 = J_0 J_2; \quad A_4 = J_0(D_{12}J_1 + D_{22}J_2) - D_{13}.$$

Thay  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  từ biểu thức (2.17) vào (2.15), thu được

$$\begin{aligned} \nabla^4 f + A_1 \nabla^4 w + \\ - A_2 (w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} - w_{,xx}/R + 2w_{,xy}w_{,xy}^* - w_{,xx}w_{,yy}^* - w_{,yy}w_{,xx}^*) = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

trong đó,  $A_1 = J_2/D_{11}$ ;  $A_2 = 1/(J_0 D_{11})$ .

Biểu thức (2.18) và (2.19) với hai biến là độ võng  $w$  và hàm ứng suất  $f$ , chúng được sử dụng để phân tích ổn định phi tuyến của panel trụ FGP không hoàn

hảo. Ta thấy: trường hợp  $R \rightarrow \infty$ , ta thu được hai biểu thức cơ bản để khảo sát ổn định của tấm FGP không hoàn hảo; trường hợp  $w^*=0$ , ta thu được hai biểu thức cơ bản để khảo sát panel trụ FGP hoàn hảo.

### 2.2.3. Điều kiện biên và phương pháp giải

Xét panel trụ có bốn cạnh tựa đơn, khi đó có điều kiện biên là

$$\begin{aligned} w = 0, M_x = 0, N_{xy} = 0, N_x = -r_0 h \text{ tại } x = 0, x = a \\ w = 0, M_y = 0, N_{xy} = 0, N_y = -p_0 h \text{ tại } y = 0, y = b \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dựa vào điều kiện (2.20), thành phần độ võng ( $w, w^*$ ) và ứng suất ( $f$ ) được chọn dưới dạng [83]

$$\begin{aligned} w &= W \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ w^* &= \xi h \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \\ f &= F \left[ \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - \beta(x) - \lambda(y) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

trong đó,  $F \frac{d^2 \beta(x)}{dx^2} = p_0 h$ ;  $F \frac{d^2 \lambda(y)}{dy^2} = r_0 h$ ;  $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Thay  $w, w^*, f$  từ biểu thức (2.21) vào (2.18-2.19), và sử dụng phương pháp Galerkin, ta được hai phương trình phi tuyến của  $F$  và  $W$  như sau

$$F = -A_1 W + \frac{A_2 W}{R \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{16 R m n \pi^2}{3 a^2 b^2} (W + 2\xi h) \delta_1 \delta_2 \right] \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 (A_3 F + A_4 W) + F \left[ \frac{32}{3} (W + \xi h) \frac{m n \pi^2}{a^2 b^2} \delta_1 \delta_2 - \frac{1}{R} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] + \\ & + (W + \xi h) \left[ r_0 h \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + p_0 h \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] - \frac{16}{m n \pi^2} \delta_1 \delta_2 \frac{p_0 h}{R} = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

trong đó,  $\delta_1 = \frac{1}{2} [1 - (-1)^m]$ ;  $\delta_2 = \frac{1}{2} [1 - (-1)^n]$ .

Thay  $F$  vào biểu thức (2.23), ta có

$$\begin{aligned} & S_1 W + S_2 W^2 + S_3 W \xi h + S_4 W (W + \xi h) (W + 2\xi h) + \\ & + S_5 h (W + \xi h) \left( r_0 \frac{m^2 b^2}{a^2} + p_0 n^2 \right) - \frac{16 b^4}{m n \pi^2} \left( \frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2 \right)^2 \frac{p_0 h}{R} \delta_1 \delta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

trong đó

$$\begin{aligned}
S_1 &= (A_4 - A_3A_1)\pi^4 \left( \frac{m^2b^2}{a^2} + n^2 \right)^4 + \\
&\quad + \frac{(A_1 + A_2A_3)}{R} \left( \frac{m\pi b^2}{a} \right)^2 \left( \frac{m^2b^2}{a^2} + n^2 \right)^2 - \frac{A_2(mb^2/a)^4}{R^2}; \\
S_2 &= \left[ \frac{16m^3nb^6}{Ra^4} A_2 - \frac{16mn\pi^2b^2}{3a^2} \left( \frac{m^2b^2}{a^2} + n^2 \right)^2 (A_2A_3 + 2A_1) \right] \delta_1\delta_2; \\
S_3 &= \left[ \frac{64m^3nb^6}{3Ra^4} A_2 - \frac{32mn\pi^2b^2}{3a^2} \left( \frac{m^2b^2}{a^2} + n^2 \right)^2 (A_2A_3 + A_1) \right] \delta_1\delta_2; \\
S_4 &= -\frac{512m^2n^2b^4}{9a^4} A_2\delta_1^2\delta_2^2; \quad S_5 = \pi^2b^2 \left( \frac{m^2b^2}{a^2} + n^2 \right)^2.
\end{aligned}$$

Biểu thức (2.24) thiết lập quan hệ tải - độ võng, được sử dụng để xác định tải trọng nén dọc trục tới hạn và vẽ đường cong quan hệ tải - độ võng sau tới hạn của panel trụ FGP không hoàn hảo chịu tải trọng  $r_0$  và  $p_0$ .

Trường hợp panel trụ FGP chỉ chịu tải trọng nén đều dọc trục  $r_0$  trên hai cạnh  $x=0$  và  $x=a$  (nghĩa là  $N_{x0} = -r_0h$ ,  $N_{y0} = -p_0h=0$ ), khi đó từ biểu thức (2.24) suy ra

$$r_0 = \frac{a^2}{-S_5m^2hb^2(W + \xi h)} \left[ S_1W + S_2W^2 + S_3W\xi h + S_4W(W + \xi h)(W + 2\xi h) \right] \quad (2.25)$$

Với panel trụ FGP hoàn hảo, thay  $\xi = 0$  vào biểu thức (2.25), ta có

$$r_0 = \frac{a^2}{-S_5m^2hb^2} \left[ S_1 + S_2W + S_4W^2 \right] \quad (2.26)$$

Cho  $w \rightarrow 0$ , tải trọng tới hạn trên được xác định là

$$\begin{aligned}
r_{0\text{upper}} &= \frac{S_1a^2}{-S_5m^2hb^2} \\
&= \frac{a^2}{-m^2h\pi^2b^4} \left[ \begin{aligned} &(A_4 - A_3A_1)\pi^4 \left( \frac{m^2b^2}{a^2} + n^2 \right)^2 \\ &+ \frac{(A_1 + A_2A_3)}{R} \left( \frac{m\pi b^2}{a} \right)^2 - \frac{A_2(mb^2/a)^4}{R^2 \left( \frac{m^2b^2}{a^2} + n^2 \right)^2} \end{aligned} \right] \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Để tìm tải tới hạn dưới, từ biểu thức (2.26) ta coi  $r_0 = r_0(W)$ , giải phương trình  $\frac{dr_0}{dW} = 0$ , ta thu được  $W_{th} = -S_2 / (2S_4)$ . Vì  $\left. \frac{d^2 r_0}{dW^2} \right|_{W=W_{th}} > 0$ , nên ta được tải tới hạn dưới là

$$r_{0lower} = \frac{a^2 (4S_1 S_4 - S_2^2)}{-4S_4 S_5 m^2 h b^2} \quad (2.28)$$

Các đại lượng  $r_{0upper}$  và  $r_{0lower}$  trong các biểu thức (2.27-2.28) phụ thuộc vào  $m$  và  $n$ . Vì vậy, để xác định tải tới hạn  $r_{0upper}$ ,  $r_{0lower}$  cần phải thực hiện cực tiểu hóa các biểu thức này theo  $m$  và  $n$ .

## 2.2.4. Kết quả tính toán số

### 2.2.4.1. Nghiên cứu so sánh

Phần này, hai nghiên cứu so sánh được thực hiện, kết quả mô tả trong Bảng 2.1 và Bảng 2.2.

Bảng 2.1. So sánh tải trọng tới hạn trên  $N_{cr}$  panel trụ đẳng hướng.  $E=10^7$  psi,  $\nu = 0.3$  và  $h=0.24$ in

$a/b$	$a/R$	$b/h$	Jaunky [39]		Shen [25]	Luận án
			FEM	Lý thuyết Donnell	HSDT	Lý thuyết Donnell
3.1831	10	78.5398	41945.4	53080.6	51419.68	53572.20 (8,4)*
3.1831	10	157.0796	12360.0	13834.1	13119.99	13384.37 (1,2)
3.1831	10	314.1593	3358.8	3549.9	3228.12	3345.99 (3,4)

\* Mode tới hạn ( $m, n$ )

Bảng 2.2. So sánh tải tới hạn  $\frac{N_x}{ER}$  panel trụ đẳng hướng

Thông số hình học			Shen [25]	Turvey [38]	Luận án
$a/b$	$a/R$	$b/h$			
0.4	1.0	25	7.1410e-5	7.3675e-5	7.3675e-05 (4,1)*
1.333	1.0	75	5.8737e-5	6.0523e-5	6.0553e-05 (4,2)

\* Mode tới hạn ( $m, n$ )

Nghiên cứu so sánh thứ nhất được thực hiện đối với tải trọng tới hạn  $N_{cr}$ , trong đó  $N_{cr} = r_{0upper} / (bh)$ , với  $r_{0upper}$  được xác định theo biểu thức (2.27) của luận án. Bảng

2.1 chỉ ra sự so sánh giữa kết quả tính toán theo biểu thức (2.27) của luận án với các kết quả được báo cáo trong công trình của Shen [25] và Jaunky [39].

Nghiên cứu so sánh thứ hai được thực hiện đối với tải tới hạn  $\frac{N_x}{ER}$  của panel trụ, trong đó  $N_x = r_{0upper}h$ ,  $r_{0upper}$  được xác định bằng biểu thức (2.27) của luận án. Bảng 2.2 chỉ ra sự so sánh giữa các kết quả tính toán theo biểu thức (2.27) của luận án với các kết quả được báo cáo trong công trình của Shen [25] và Turvey [38].

Bảng 2.1 và Bảng 2.2 cho ta thấy, kết quả tính toán thu được theo công thức (2.27) của luận án là tương đồng với các kết quả được báo cáo trong công trình của Shen [25], Turvey [38] và Jaunky [39]. Điều này khẳng định độ tin cậy của phương pháp nghiên cứu được thực hiện trong luận án.

Nội dung tiếp theo, luận án nghiên cứu ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xốp, hệ số độ xốp, độ không hoàn hảo và các thông số hình học đến khả năng chịu lực của panel trụ làm bằng vật liệu FGP chịu tải nén đều dọc trục. Panel trụ làm bằng thép xốp có:  $h=0.01\text{m}$ ,  $b/h=80$ ,  $a/b = 2$ ,  $a/R=0.5$ .

#### 2.2.4.2. Ảnh hưởng của mô hình phân bố độ xốp và hệ số độ xốp

Sử dụng hai biểu thức (2.27) và (2.28), Bảng 2.3 mô tả ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xốp và hệ số độ xốp đến giá trị tải trọng tới hạn trên và dưới của panel trụ FGP hoàn hảo.

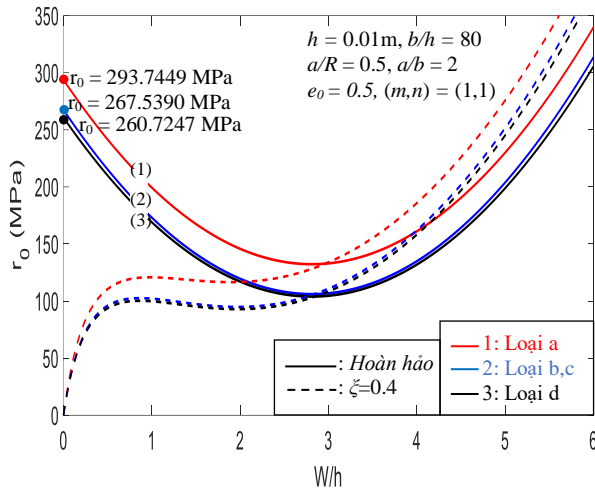
Sử dụng hai biểu thức (2.25) và (2.26), Hình 2.2 và Hình 2.3 mô tả ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xốp và hệ số độ xốp đối với đường cong quan hệ tải trọng - độ võng ( $W/h$ ).

Bảng 2.3. Ảnh hưởng của mô hình phân bố độ xốp và hệ số độ xốp đến tải trọng tới hạn.  $E=2.0779 \times 10^{11}$  Pa,  $h=0.01\text{m}$ ,  $a/b = 2$ ,  $b/h=80$ ,  $a/R=0.5$ ,  $\zeta=0$

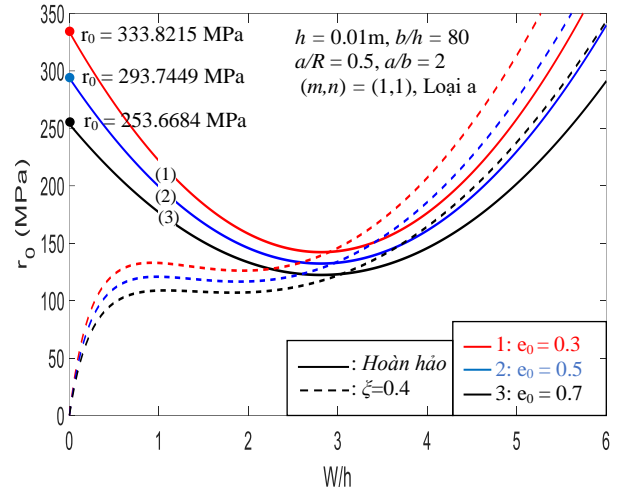
$r_{cr}$ (MPa)	$e_0=0$	$e_0=0.3$	$e_0=0.5$	$e_0=0.7$	$e_0=0.9$
<i>Loại a</i>	393.9363 <sup>U</sup> (1,1)*	333.8215 (1,1)	293.7449 (1,1)	253.6684 (1,1)	212.6000 (3,1)
	102.7173 <sup>L</sup> (3,1)	94.4576 (3,1)	88.9512 (3,1)	83.4447 (3,1)	77.9383 (3,1)
<i>Loại b</i>	393.9363 (1,1)	319.9092 (1,1)	267.5390 (1,1)	210.8125 (1,1)	142.0695 (5,1)
	102.7173 (3,1)	84.0079 (3,1)	69.2676 (3,1)	51.2552 (3,1)	27.0440 (3,1)
<i>Loại c</i>	393.9363 (1,1)	319.9092 (1,1)	267.5390 (1,1)	210.8125 (1,1)	142.0695 (5,1)
	102.7173 (3,1)	84.0079 (3,1)	69.2676 (3,1)	51.2552 (3,1)	27.0440 (3,1)
<i>Loại d</i>	393.9363 (1,1)	316.2687 (1,1)	260.7247 (1,1)	199.7436 (1,1)	125.6195 (1,1)
	102.7173 (3,1)	82.4657 (3,1)	67.9829 (3,1)	52.0823 (3,1)	32.7548 (3,1)

<sup>U</sup> Tải trọng tới hạn trên; <sup>L</sup> Tải trọng tới hạn dưới; \* Mode tới hạn ( $m,n$ )





Hình 2.2. Ảnh hưởng của quy luật phân bố độ xấp đối với tải trọng  $r_0$



Hình 2.3. Ảnh hưởng của  $e_0$  đối với tải trọng  $r_0$

Bảng 2.3 cho thấy, với bốn mô hình phân bố độ xấp được nghiên cứu thì panel trụ FGP mô hình phân bố xấp đối xứng (Loại a) có khả năng chịu lực tốt nhất, panel trụ FGP có mô hình phân bố xấp không đối xứng Loại b và Loại c là có khả năng chịu lực như nhau, và chịu lực kém nhất là panel trụ FGP mô hình phân bố xấp đồng đều (Loại d). Ví dụ, trong trường hợp panel trụ xấp FG với hệ số độ xấp  $e_0=0.5$  thì tải tới hạn trên của mô hình phân bố xấp Loại a có  $r_{0\text{upper}}=293.7449$  MN, lớn hơn mô hình phân bố xấp Loại b và Loại c có  $r_{0\text{upper}}=267.5390$  MN là 26.2059 MN, và lớn hơn mô hình phân bố xấp Loại d có  $r_{0\text{upper}}=260.7247$  MN là 33.0202 MN. Tương tự, quan sát Hình 2.2 cũng cho thấy đường cong quan hệ tải - độ võng của mô hình phân bố xấp Loại a nằm trên cùng, mô hình phân bố xấp Loại b và Loại c ở giữa, mô hình phân bố xấp Loại d nằm ở vị trí thấp nhất.

Bảng 2.3 cũng cho thấy với cùng một mô hình vật liệu, hệ số độ xấp  $e_0$  càng lớn thì tải trọng tới hạn càng nhỏ. Ví dụ, với panel trụ xấp FG có mô hình phân bố xấp đối xứng (Loại a) thì tải tới hạn trên giảm khoảng 46%, từ  $r_{0\text{upper}}=393.9360$  MN với  $e_0=0$  xuống  $r_{0\text{upper}}=212.6000$  MN với  $e_0=0.9$ . Sự thay đổi này cũng được mô phỏng trên Hình 2.3 khi vẽ đường cong quan hệ tải - độ võng với  $e_0=0.3, 0.5$  và  $0.7$ . Điều này chứng tỏ khi độ xấp của panel trụ càng tăng thì khả năng chịu lực của panel càng yếu đi.

#### 2.2.4.3. Ảnh hưởng của các thông số hình học ( $a/b, a/R$ )

Sử dụng biểu thức (2.27), Bảng 2.4 mô tả ảnh hưởng của  $a/b, a/R$  đến tải trọng nén dọc trục tới hạn trên của panel trụ FGP hoàn hảo.

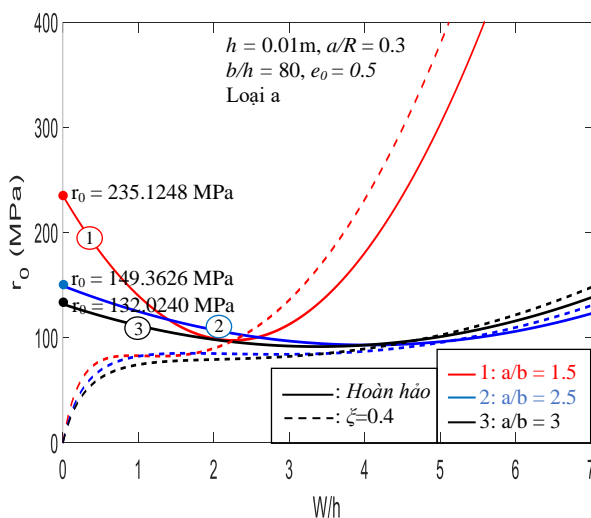
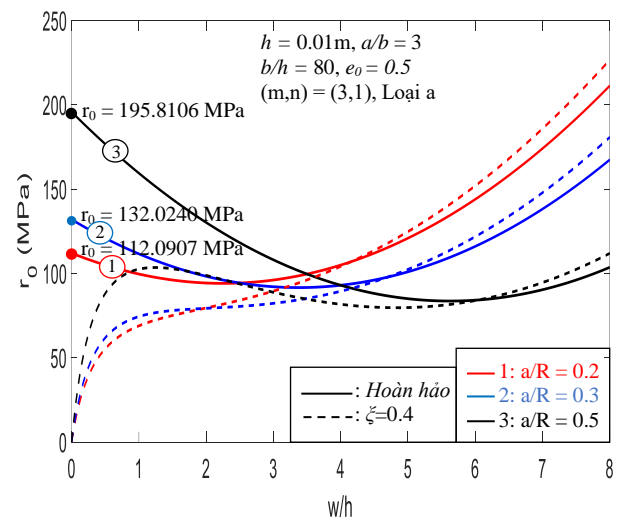
Sử dụng biểu thức (2.25) và (2.26), Hình 2.4 và Hình 2.5 mô tả ảnh hưởng của  $a/b$  và  $a/R$  đối với đường cong quan hệ tải - độ võng ( $W/h$ ).

Bảng 2.4. Ảnh hưởng của  $a/b$  và  $a/R$  đối với tải trọng nén dọc trục tới hạn trên

$r_{cr}$ (MPa)	$h=0.01\text{m}, b/h=80, e_0=0.5, \xi=0$				
	$a/R=0.2$	$a/R=0.3$	$a/R=0.5$	$a/R=0.7$	$a/R=0.9$
$a/b = 0.5$	517.6359 (1,1)*	707.4959 (1,2)	1174.9797 (2,2)	1653.7557 (3,1)	2114.5269 (3,2)
$a/b = 1$	239.6639 (1,1)	356.8937 (2,1)	589.9865 (3,1)	823.4915 (4,1)	1065.9047 (4,2)
$a/b = 1.5$	163.1087 (2,1)	235.1248 (1,1)	394.7387 (4,1)	554.0657 (5,1)	707.4959 (3,2)
$a/b = 2$	132.0240 (2,1)	176.8740 (2,1)	293.7449 (4,1)	411.1938 (5,1)	528.6317 (6,1)
$a/b = 2.5$	121.5920 (3,1)	149.3626 (3,1)	234.9543 (4,1)	330.2564 (5,1)	423.3102 (7,1)
$a/b = 3$	112.0907 (3,1)	132.0240 (3,1)	195.8106 (3,1)	275.2468 (6,1)	352.6808 (7,1)
$a/b = 4$	105.1141 (4,1)	116.3265 (4,1)	152.2065 (4,1)	205.5906 (3,1)	264.3545 (7,1)
$a/b = 5$	101.8849 (5,1)	109.0609 (5,1)	132.0240 (5,1)	166.4688 (5,1)	211.4689 (7,1)

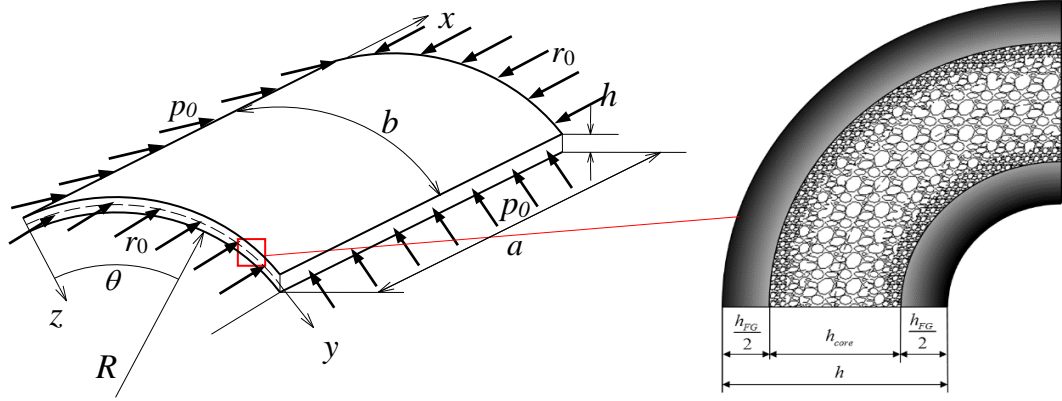
\* Mode tới hạn ( $m,n$ )

Bảng 2.4 cho thấy tải trọng nén dọc trục tới hạn trên của panel trụ giảm khi tỉ số  $a/b$  tăng và tải trọng nén dọc trục tới hạn trên tăng khi tỉ số  $a/R$  tăng. Ví dụ, cùng tỉ số  $a/b=2$  thì tải trọng tới hạn trên tăng khoảng 300%, từ  $r_{0\text{upper}}=132.0240$  MN với  $a/R=0.2$  lên  $r_{0\text{upper}}=528.6317$  MN với  $a/R=0.9$ , điều này phù hợp với thực tế là panel trụ càng dài thì khả năng chịu nén dọc trục càng giảm. Bảng 2.4 cũng chứng tỏ thông số hình học của panel trụ FGP có ảnh hưởng rất đáng kể đối với khả năng chịu nén của panel. Hình 2.4 và Hình 2.5 một lần nữa cho thấy ảnh hưởng của các thông số này đối với đường cong quan hệ tải - độ võng. Quan sát các Hình 2.2 - Hình 2.5 ta thấy, các đường cong mô tả quan hệ tải - độ võng panel không hoàn hảo có điểm xuất phát tại gốc tọa độ, điều này cho thấy panel không hoàn hảo võng ngay khi đặt tải còn panel hoàn hảo thì chỉ xuất hiện độ võng khi tải trọng đạt đến giá trị tới hạn.

Hình 2.4. Ảnh hưởng của  $a/b$  đối với tải trọng  $r_0$ Hình 2.5. Ảnh hưởng của  $a/R$  đối với tải trọng  $r_0$

## 2.3. Phân tích ổn định phi tuyến của panel trụ sandwich FGP với các điều kiện biên khác nhau

### 2.3.1. Panel trụ sandwich FGP



Hình 2.6. Mô hình panel trụ sandwich FGP chịu nén dọc trục

Xét panel trụ sandwich FGP có chiều dày  $h$ , bán kính mặt giữa là  $R$ , độ dài cạnh thẳng là  $a$ , độ dài cạnh cong là  $b$ , chịu nén đều dọc trục với cường độ  $r_0$  trên cạnh  $x=0$ ,  $x=a$ ;  $p_0$  trên cạnh  $y=0$ ,  $y=b$ . Panel trụ được xác định trong một hệ tọa độ  $xyz$  với mặt phẳng  $(x, y)$  trùng với mặt giữa của panel, tọa độ chiều dày của panel  $z$  ( $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ ) như được chỉ ra trong Hình 2.6. Panel trụ sandwich ba lớp, gồm có hai lớp phủ mặt FGM và lớp lõi xốp FG ở giữa có mô hình phân bố độ xốp đối xứng. Độ dày lớp lõi xốp là  $h_{core}$ , độ dày của mỗi lớp phủ mặt FGM là  $\frac{h_{FG}}{2}$ , ( $h = h_{core} + h_{FG}$ ). Giả thiết rằng các lớp được liên kết là hoàn hảo (tức bỏ qua sự bong tách giữa các lớp). Bài toán đặt ra là xây dựng biểu thức xác định giá trị tải trọng nén dọc trục tới hạn và vẽ đường cong quan hệ tải - độ võng đáp ứng sau tới hạn cho hai trường hợp điều kiện biên sau: trường hợp 1, panel trụ sandwich FGP có bốn cạnh tựa đơn; trường hợp 2, panel trụ sandwich FGP có hai cạnh cong tựa đơn, và ngàm tại hai cạnh thẳng.

Mô đun đàn hồi Young và hệ số Poisson của panel trụ sandwich FGP được xác định như sau

$$(E_{sh}, \nu_{sh}) = \begin{cases} (E_c, \nu_c) + (E_{mc}, \nu_{mc}) \left( \frac{2z + h_{FG} + h_{core}}{h_{FG}} \right)^k, & \text{khi } \frac{h_{FG} + h_{core}}{2} \leq z \leq -\frac{h_{core}}{2} \\ (E_m, \nu_m) \left[ 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi z}{h_{core}} \right) \right], & \text{khi } -\frac{h_{core}}{2} \leq z \leq \frac{h_{core}}{2} \\ (E_c, \nu_c) + (E_{mc}, \nu_{mc}) \left( \frac{-2z + h_{FG} + h_{core}}{h_{FG}} \right)^k, & \text{khi } \frac{h_{core}}{2} \leq z \leq \frac{h_{FG} + h_{core}}{2} \end{cases} \quad (2.29)$$

trong đó

$m, c, sh$  lần lượt là chỉ số biểu thị tính chất của kim loại, gốm, vữa;

$$E_{mc} = E_m - E_c; \quad \nu_{mc} = \nu_m - \nu_c;$$

$E_m, E_c, E_{sh}$  lần lượt là mô đun đàn hồi Young của kim loại, gốm, vữa;

$\nu_m, \nu_c, \nu_{sh}$  lần lượt là hệ số Poisson của kim loại, gốm và vữa;

$e_0$  là hệ số mật độ xốp ( $0 \leq e_0 < 1$ );

$k$  là chỉ số tỉ phần thể tích của panel trụ ( $k \geq 0$ ).

Thay thế  $E_{sh}$  từ biểu thức (2.29) vào (2.8), thu được

$$E_1 = \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh} dz = E_c h_{FG} + \frac{E_{mc} h_{FG}}{k+1} + E_m \left[ h_{core} - e_0 \frac{2h_{core}}{\pi} \right]; \quad E_2 = \int_{-h/2}^{h/2} z E_{sh} dz = 0;$$

$$E_3 = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 E_{sh} dz = \frac{E_c}{12} \left[ (h_{FG} + h_{core})^3 - h_{core}^3 \right]$$

$$+ \frac{E_{mc}}{4} \left[ \frac{h_{FG}^3}{k+3} - \frac{2h_{FG}^2 (h_{FG} + h_{core})}{k+2} + \frac{h_{FG} (h_{FG} + h_{core})^2}{k+1} \right] + E_m \left[ \frac{h_{core}^3}{12} - \frac{e_0 h_{core}^3 (\pi^2 - 8)}{2\pi^3} \right].$$

### 2.3.2. Điều kiện biên và phương pháp giải

Dựa trên lý thuyết vỏ Donnell có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến hình học von-Karman, theo mục (2.2.2) hệ phương trình vi phân phi tuyến của panel trụ sandwich FGP không hoàn hảo là (2.18) và (2.19)

#### 2.3.2.1. Các điều kiện biên

Hai trường hợp điều kiện biên được nghiên cứu gồm

**Trường hợp 1:** Panel trụ sandwich FGP có bốn cạnh tựa đơn (SSSS), khi đó các điều kiện biên tương ứng xác định theo biểu thức (2.20).

**Trường hợp 2:** Panel trụ sandwich FGP có hai cạnh cong ( $x=0, x=a$ ) tựa đơn, hai cạnh thẳng ( $y=0, y=b$ ) ngàm (SSCC), ta có

$$M_x = 0, N_x = -r_0 h, N_{xy} = 0, w = 0 \text{ tại } x=0, x=a$$

$$N_y = 0, N_{xy} = 0, w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ tại } y=0, y=b \quad (2.30)$$

#### 2.3.2.2. Giải bài toán panel trụ sandwich FGP có điều kiện biên bốn cạnh tựa đơn

Theo mục (2.2) biểu thức (2.25)-(2.28) được thiết lập. Các biểu thức này được sử dụng để xác định tải trọng nén dọc trục tới hạn và vẽ đường cong quan hệ tải - độ võng đáp ứng sau tới hạn của panel trụ sandwich FGP.

**2.3.2.3. Giải bài toán panel trụ sandwich FGP có điều kiện biên hai cạnh cong tựa đơn, hai cạnh thẳng ngàm**

Xét panel trụ FGP chỉ chịu tải trọng nén đều dọc trục  $r_0$  trên hai cạnh ( $x = 0, x = a$ ). Thành phần độ võng  $w$ ,  $w^*$  và ứng suất  $f$  được chọn như sau [83]

$$\begin{aligned} w &= W \sin \frac{m\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right) \\ f &= F \left[ \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - \lambda(y) \right], \quad F \frac{d^2 \lambda(y)}{dy^2} = r_0 h \\ w^* &= \xi h \sin \frac{m\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right), \quad m, n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

Thay  $w, f, w^*$  từ biểu thức (2.31) vào (2.18)-(2.19), và sử dụng phương pháp Galerkin, ta có

$$F = \frac{1}{\alpha_1} \left\{ \begin{aligned} & -W \frac{4A_1}{3n\pi} \delta_2 \left[ 3 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + \alpha_2 \right] + \\ & + A_2 \left[ \frac{W}{R} \frac{16m^2\pi}{3na^2} \delta_2 - W(W + 2\xi h) \frac{1024mn\pi^2}{45a^2b^2} \delta_1 \delta_2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} & \left[ A_3 \alpha_1 - \frac{1}{R} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \frac{4ab}{3n\pi} \delta_2 F + A_4 W \frac{ab}{4} \left[ 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + \alpha_2 \right] + \\ & + F(W + \xi h) \left( \frac{mn\pi^2}{ab} \right)^2 \frac{512ab}{45mn\pi^2} \delta_1 \delta_2 + r_0 h (W + \xi h) \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{3ab}{4} = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

trong đó

$$\alpha_1 = \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2;$$

$$\alpha_2 = \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{2n\pi}{b} \right)^2 \right]^2.$$

Thay  $F$  vào biểu thức (2.33), ta có

$$r_0 = \frac{-4a}{3bhm^2\pi^2} \left[ C_1 \frac{W}{(W + \xi h)} + C_2 \frac{W(W + 2\xi h)}{(W + \xi h)} + C_3 W + C_4 W(W + 2\xi h) \right] \quad (2.34)$$

trong đó

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[ A_3 - \frac{1}{R\alpha_1} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \left\{ -\frac{16abA_1}{9n^2\pi^2} \delta_2^2 \left[ 3 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + \alpha_2 \right] + \frac{64m^2bA_2}{9n^2aR} \delta_2^2 \right\} + \\ & + \frac{abA_4}{4} \left[ 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + \alpha_2 \right]; \end{aligned}$$

$$C_2 = - \left[ A_3 - \frac{1}{R\alpha_1} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \frac{4096m\pi A_2}{135ab} \delta_1 \delta_2^2;$$

$$C_3 = \left\{ - \frac{2048m\pi A_1}{135ab\alpha_1} \left[ 3 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + \alpha_2 \right] + \frac{8192m^3 \pi^3 A_2}{135a^3 b R \alpha_1} \right\} \delta_1 \delta_2^2;$$

$$C_4 = - \frac{524288m^2 n^2 \pi^4 A_2}{2025a^3 b^3 \alpha_1} (\delta_1 \delta_2)^2.$$

Với panel trụ sandwich FGP hoàn hảo, thay  $\xi = 0$  vào biểu thức (2.34), ta có

$$r_0 = \frac{-4a}{3bhm^2 \pi^2} \left[ C_1 + (C_2 + C_3)W + C_4 W^2 \right] \quad (2.35)$$

Từ biểu thức (2.35), cho  $w \rightarrow 0$ , tải trọng nén dọc trục tới hạn trên được xác định

$$r_{0upper} = \frac{-4a}{3bm^2 \pi^2 h} C_1 = \left[ A_3 - \frac{1}{R\alpha_1} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \left\{ \frac{64a^2 A_1}{27m^2 n^2 \pi^4 h} \delta_2^2 \left[ 3 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + \alpha_2 \right] - \frac{256A_2}{27n^2 \pi^2 Rh} \delta_2^2 \right\} + \frac{a^2 A_4}{3m^2 \pi^2 h} \left[ 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + \alpha_2 \right] \quad (2.36)$$

Từ biểu thức (2.35) khi coi  $r_0 = r_0(W)$ , giải phương trình  $\frac{dr_0}{dW} = 0$  ta thu

được  $W_{th} = \frac{-(C_2 + C_3)}{2C_4}$ . Do  $\left. \frac{d^2 r_0}{dW^2} \right|_{W=W_{th}} > 0$ , tải trọng tới hạn dưới được xác định

$$r_{0lower} = \frac{-4a}{3bm^2 \pi^2} \left[ \frac{C_1}{h} - \frac{(C_2 + C_3)^2}{4C_4 h} \right] \quad (2.37)$$

Ta thấy, các đại lượng  $r_{0upper}$  và  $r_{0lower}$  trong hai biểu thức (2.36-2.37) phụ thuộc vào  $m$  và  $n$ . Vì vậy, để xác định tải trọng nén dọc trục tới hạn trên và dưới của panel trụ phải cực tiểu hóa các biểu thức trên theo  $m$  và  $n$ .

### 2.3.3. Kết quả tính toán số

Biểu thức (2.27) sử dụng để kiểm chứng kết quả tính toán của luận án với các kết quả được báo cáo trước đây, được trình bày trong mục (2.2.4.1) của luận án. Nội dung tiếp theo, luận án tiến hành phân tích ảnh hưởng của hệ số độ xấp  $e_0$ , tỉ lệ chiều dày  $h_{core}/h_{FG}$ , chỉ số tỉ phần thể tích  $k$ , độ không hoàn hảo  $\zeta$ , hai điều kiện biên và các thông số hình học đến khả năng chịu nén dọc trục của panel trụ sandwich FGP. Panel trụ sandwich ba lớp, gồm một lớp lõi xấp FG ở giữa và hai lớp phủ mặt FGM. Lớp phủ mặt FGM là hỗn hợp Zirconia (gốm) và Ti-6Al-4V

(kim loại). Lớp lõi làm bằng Ti-6Al-4V xốp và hệ số Poisson là  $\nu = 0,3$ . Các thông số về chỉ số tỉ phần thể tích, hệ số độ xốp, thông số hình học được lấy như sau:  $k=1$ ,  $e_0=0.5$ ,  $h=0.006\text{m}$ ,  $h_{core}/h_{FG}=5$ ,  $a/b=1.5$ ,  $a/R=0.5$ ,  $b/h=50$ .

### 2.3.3.1. Ảnh hưởng của tỉ lệ chiều dày $h_{core}/h_{FG}$ và hệ số độ xốp $e_0$

Bảng 2.5 ảnh hưởng của tỉ lệ chiều dày  $h_{core}/h_{FG}$  và hệ số độ xốp  $e_0$  đối với tải trọng tới hạn trên và dưới của panel trụ sandwich FGP hoàn hảo (trường hợp điều kiện biên bốn cạnh tựa đơn,  $r_{0upper}$  và  $r_{0lower}$  được xác định từ biểu thức (2.27) và (2.28); trường hợp panel trụ có điều kiện biên hai cạnh cong tựa đơn, hai cạnh thẳng ngàm,  $r_{0upper}$  và  $r_{0lower}$  được xác định từ biểu thức (2.36) và (2.37)).

Sử dụng biểu thức (2.25) và (2.26), Hình 2.7a và Hình 2.8a lần lượt mô tả ảnh hưởng của  $e_0$  và  $h_{core}/h_{FG}$  đối với đường cong quan hệ tải - độ võng của panel trụ sandwich FGP có bốn cạnh tựa đơn. Sử dụng biểu thức (2.34) và (2.35), Hình 2.7b và Hình 2.8b lần lượt mô tả ảnh hưởng của  $e_0$  và  $h_{core}/h_{FG}$  đối với đường cong quan hệ tải - độ võng của panel trụ sandwich FGP có hai cạnh cong tựa đơn, hai cạnh thẳng ngàm.

Bảng 2.5 cho thấy, với cả hai trường hợp điều kiện biên được nghiên cứu ở trên, tải tới hạn trên và dưới của panel trụ sandwich FGP hoàn hảo giảm khi tỉ số  $h_{core}/h_{FG}$  và hệ số độ xốp  $e_0$  tăng đồng thời hoặc riêng biệt. Ví dụ, trường hợp panel trụ bốn cạnh tựa đơn  $e_0=0.5$ : tải tới hạn trên giảm khoảng 84% từ  $r_{0upper}=587.0261$  MPa (với  $h_{core}/h_{FG}=0$ ) xuống  $r_{0upper}=319.7303$  MPa (với  $h_{core}=h$ ,  $h_{FG}=0$ ); tải tới hạn dưới giảm khoảng 74% từ  $r_{0lower}=217.7359$  MPa (với  $h_{core}/h_{FG}=0$ ) đến  $r_{0lower}=125.3372$  MPa (với  $h_{core}=h$ ,  $h_{FG}=0$ ). Hay trường hợp panel trụ bốn cạnh tựa đơn có  $h_{core}/h_{FG}=5$ : tải trọng tới hạn trên giảm khoảng 42% từ  $r_{0upper}=468.9710$  MPa (với  $e_0=0$ ) xuống  $r_{0upper}=331.3454$  MPa (với  $e_0=0.8$ ); tải trọng tới hạn dưới giảm khoảng 11% từ  $r_{0lower}=169.7856$  MPa (với  $e_0=0$ ) xuống  $r_{0lower}=153.1880$  MPa (với  $e_0=0.8$ ). Nhận xét này cũng được quan sát thấy trong Hình 2.7 và Hình 2.8: khi hệ số độ xốp  $e_0$  tăng (Hình 2.7) hay tỉ lệ chiều dày  $h_{core}/h_{FG}$  tăng (Hình 2.8) ta thấy các đường cong mô tả quan hệ tải - độ võng sẽ thấp hơn, nghĩa là tải tới hạn giảm đi. Như vậy, có thể kết luận rằng tỉ số độ dày  $h_{core}/h_{FG}$  và hệ số độ xốp  $e_0$  có ảnh hưởng mạnh đến tải trọng nén dọc trục tới hạn của panel trụ sandwich FGP, cụ thể là khả năng chịu tải trọng nén dọc trục của panel trụ sandwich FGP hoàn hảo với điều kiện biên SSSS hoặc điều kiện biên SSCC giảm khi tỉ số độ dày  $h_{core}/h_{FG}$  và hệ số độ xốp  $e_0$  tăng đồng thời hoặc tăng riêng biệt.

Bảng 2.5. Ảnh hưởng của  $h_{core}/h_{FG}$  và hệ số độ xấp  $e_0$  đối với tải trọng nén dọc trục tới hạn.  $\zeta=0, k=1, h=0.006m, a/b=1.5, a/R=0.5, b/h=50$

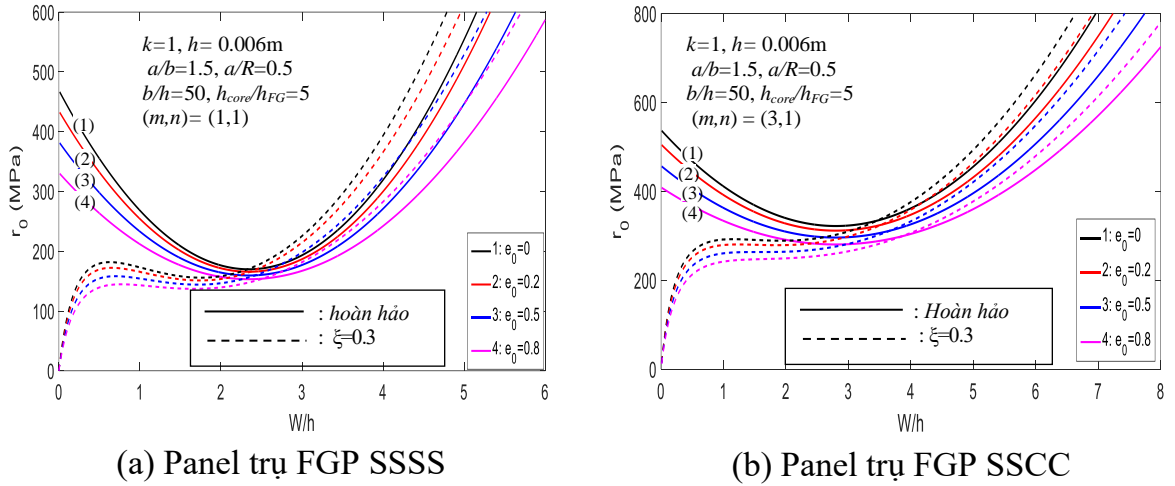
$r_{cr}$ (MPa)	Điều	$e_0=0$	$e_0=0.2$	$e_0=0.5$	$e_0=0.8$
	kiện biên				
$h_{core}/h_{FG} = 0$	SSSS	587.0261 <sup>U</sup> (1,1)*	587.0261 (1,1)	587.0261 (1,1)	587.0261 (1,1)
		217.7359 <sup>L</sup> (1,1)	217.7359 (1,1)	217.7359 (1,1)	217.7359 (1,1)
	SSCC	677.8399 (3,1)	677.8399 (3,1)	677.8399 (3,1)	677.8399 (3,1)
		411.3698 (3,1)	411.3698 (3,1)	411.3698 (3,1)	411.3698 (3,1)
$h_{core}/h_{FG} = 1$	SSSS	526.4833 (1,1)	508.7239 (1,1)	482.0847 (1,1)	455.4456 (1,1)
		200.8350 (1,1)	200.2431 (1,1)	199.6511 (1,1)	199.2565 (1,1)
	SSCC	611.4043 (3,1)	596.9954 (3,1)	575.3820 (3,1)	553.7686 (3,1)
		375.2861 (3,1)	373.9767 (3,1)	372.0125 (3,1)	370.0483 (3,1)
$h_{core}/h_{FG} = 3$	SSSS	485.0488 (1,1)	455.3675 (1,1)	410.8455 (1,1)	366.3236 (1,1)
		178.8537 (1,1)	176.4035 (1,1)	172.7282 (1,1)	169.0529 (1,1)
	SSCC	559.1630 (3,1)	532.3654 (3,1)	492.1689 (3,1)	451.9724 (3,1)
		338.2208 (3,1)	331.0723 (3,1)	320.3497 (3,1)	309.6271 (3,1)
$h_{core}/h_{FG} = 5$	SSSS	468.9710 (1,1)	434.5646 (1,1)	382.9550 (1,1)	331.3454 (1,1)
		169.7865 (1,1)	165.6369 (1,1)	159.4124 (1,1)	153.1880 (1,1)
	SSCC	537.8872 (3,1)	505.6799 (3,1)	457.3689 (3,1)	409.0579 (3,1)
		322.0036 (3,1)	311.6287 (3,1)	296.0665 (3,1)	280.5043 (3,1)
$h_{core}/h_{FG} = 10$	SSSS	452.4019 (3,1)	414.1491 (1,1)	355.5114 (1,1)	296.8736 (1,1)
		160.4298 (1,1)	154.3453 (1,1)	145.2186 (1,1)	136.0919 (1,1)
	SSCC	516.6474 (3,1)	478.8578 (3,1)	422.1734 (3,1)	365.4889 (3,1)
		305.3626 (3,1)	291.3902 (3,1)	270.4317 (3,1)	249.4731 (3,1)
$h_{core} = h$ $h_{FG} = 0$	SSSS	429.2182 (3,1)	387.6109 (1,1)	319.7303 (1,1)	251.8496 (1,1)
		147.7013 (1,1)	138.7557 (1,1)	125.3372 (1,1)	111.9188 (1,1)
	SSCC	488.6028 (3,1)	443.1953 (3,1)	375.0840 (3,1)	306.9728 (3,1)
		282.8365 (3,1)	263.6280 (3,1)	234.8152 (3,1)	206.0024 (3,1)

<sup>U</sup> Tải tới hạn trên;

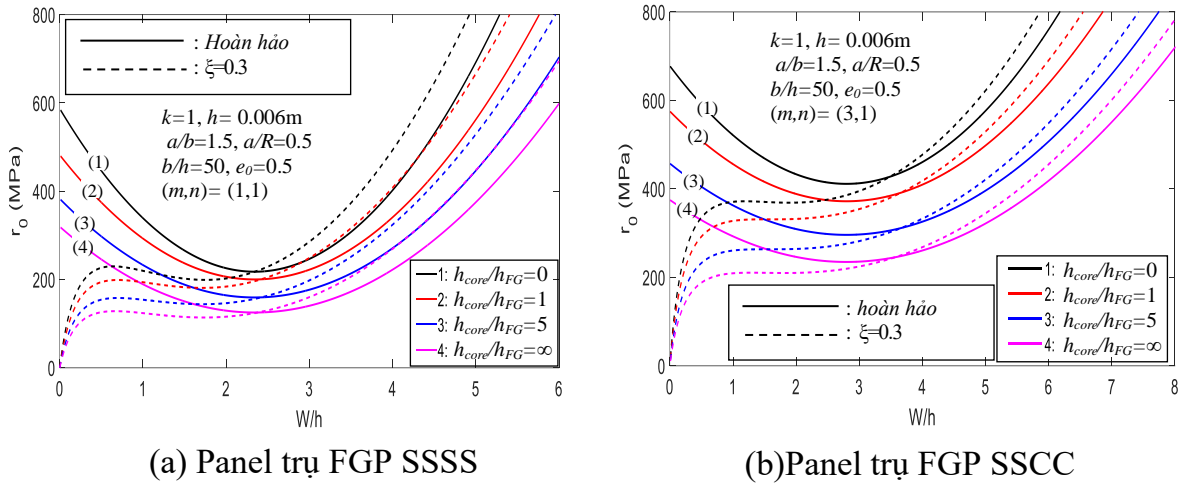
<sup>L</sup>Tải tới hạn dưới;

\* Mode tới hạn ( $m, n$ )





Hình 2.7. Ảnh hưởng của  $e_0$  đối với  $r_0 - W/h$



Hình 2.8. Ảnh hưởng của  $h_{core}/h_{FG}$  đối với  $r_0 - W/h$

**2.3.3.2. Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo hình học ban đầu  $\xi$  và chỉ số tỉ phần thể tích  $k$**

Ảnh hưởng của  $\xi$  đối với quan hệ tải - độ võng được mô tả qua đồ thị Hình 2.9. Quan sát Hình 2.9 ta thấy, độ không hoàn hảo  $\xi$  có ảnh hưởng đến các đường cong quan hệ tải - độ võng đáp ứng sau tới hạn của panel trụ sandwich FGP với cả hai trường hợp điều kiện biên là SSSS và SSCC. Cụ thể, khi  $\xi$  tăng lên trong giai đoạn độ võng còn nhỏ các đường cong sau ổn định sẽ thấp hơn. Ngoài ra, Hình 2.7 - Hình 2.10 cũng cho ta thấy, đường cong quan hệ tải - độ võng đáp ứng sau tới hạn của panel trụ xấp FG không hoàn hảo có điểm xuất phát tại góc tọa độ (tức là panel có độ võng ngay khi đặt tải), còn với panel trụ hoàn hảo độ võng chỉ xuất hiện khi tải trọng đạt đến giá trị tới hạn.

Ảnh hưởng của chỉ số tỉ phần thể tích  $k$  đối với tải trọng tới hạn và đường cong sau ổn định của panel trụ sandwich FGP được mô tả thông qua Bảng 2.6 và đồ thị Hình 2.10. Bảng 2.6 và Hình 2.10 cho thấy, khi  $k$  tăng thì tải trọng nén dọc trục tới hạn tăng. Nghĩa là với lớp phủ mặt càng giàu gốm ( $k$  càng lớn) sẽ làm tăng độ cứng cũng như tăng khả năng chịu tải của panel trụ xấp FG hoàn hảo. Tuy nhiên, do lớp phủ FGM mỏng nên ảnh hưởng của  $k$  đối với tải trọng nén tới hạn và ứng xử sau mất ổn định của panel trụ là không nhiều. Ví dụ, panel trụ sandwich FGP hoàn hảo SSSS, trường hợp  $k=10$  và  $b/h=50$ , có tải trọng tới hạn trên  $r_{upper}=410.6461$  MPa và tải trọng tới hạn dưới  $r_{lower}=175.6317$  MPa, lớn hơn trường hợp  $k=0$  và  $b/h=50$  lần lượt là 1.18 và 1.28 lần, tương ứng với tải tới hạn trên  $r_{upper}=346.8486$  MPa và tải tới hạn dưới  $r_{lower}=137.3272$  MPa.

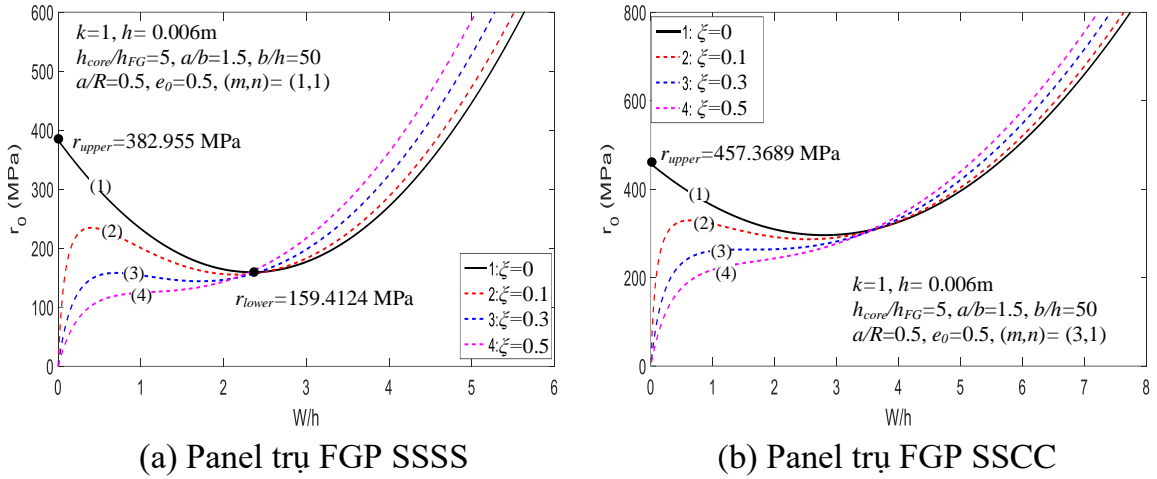
Bảng 2.6. Ảnh hưởng của  $k$  và  $b/h$  đối với tải trọng nén dọc trục tới hạn.  $\zeta=0$ ,  $e_0=0.5$ ,  $h=0.006\text{m}$ ,  $h_{core}/h_{FG}=5$ ,  $a/b=1.5$ ,  $a/R=0.5$ ,  $b/h=50$

$r_{cr}$ (MPa)	Điều kiện biên SSSS			Điều kiện biên SSCC		
	$b/h=30$	$b/h=50$	$b/h=70$	$b/h=30$	$b/h=50$	$b/h=70$
$k=0$	613.9123 <sup>U</sup> (2,1)*	346.8486 (1,1)	248.9830 (3,1)	894.6584 (3,1)	408.0846 (3,1)	274.0285 (3,1)
	422.8515 <sup>L</sup> (1,1)	137.3272 (1,1)	58.6624 (1,1)	743.4733 (3,1)	256.8995 (3,1)	122.8434 (3,1)
$k=0.5$	663.8529 (2,1)	371.1039 (1,1)	266.0557 (3,1)	976.1398 (3,1)	441.2549 (3,1)	293.8887 (3,1)
	466.1084 (1,1)	152.2350 (1,1)	65.7597 (1,1)	818.2098 (3,1)	283.3250 (3,1)	135.9587 (3,1)
$k=1$	688.1130 (2,1)	382.9550 (1,1)	274.4042 (3,1)	1015.5715 (3,1)	457.3689 (3,1)	303.5784 (3,1)
	486.9688 (1,1)	159.4124 (1,1)	69.1673 (1,1)	854.2691 (3,1)	296.0665 (3,1)	142.2760 (3,1)
$k=3$	723.1055 (2,1)	400.1874 (1,1)	286.5573 (3,1)	1072.1428(3,1)	480.6124 (3,1)	317.6397 (3,1)
	516.7476 (1,1)	169.6342 (1,1)	74.0010 (1,1)	905.7817 (3,1)	314.2513 (3,1)	151.2786 (3,1)
$k=5$	734.2468 (2,1)	405.7279 (1,1)	290.4700 (3,1)	1090.0361 (3,1)	488.0132 (3,1)	322.1498 (3,1)
	526.1083 (1,1)	172.8379 (1,1)	75.5083 (1,1)	921.9889 (3,1)	319.9660 (3,1)	154.1025 (3,1)
$k=10$	744.0705 (2,1)	410.6461 (1,1)	293.9465 (3,1)	1105.7412 (3,1)	494.5391 (3,1)	326.1467 (3,1)
	534.2885 (1,1)	175.6317 (1,1)	76.8181 (1,1)	936.1610 (3,1)	324.9589 (3,1)	156.5665 (3,1)
$k=\infty$	755.3922 (2,1)	416.3663 (1,1)	297.9948 (3,1)	1123.3159 (2,1)	502.0605 (3,1)	330.7850 (3,1)
	543.5999 (1,1)	178.8025 (1,1)	78.2971 (1,1)	952.3072 (3,1)	330.6408 (3,1)	159.3653 (3,1)

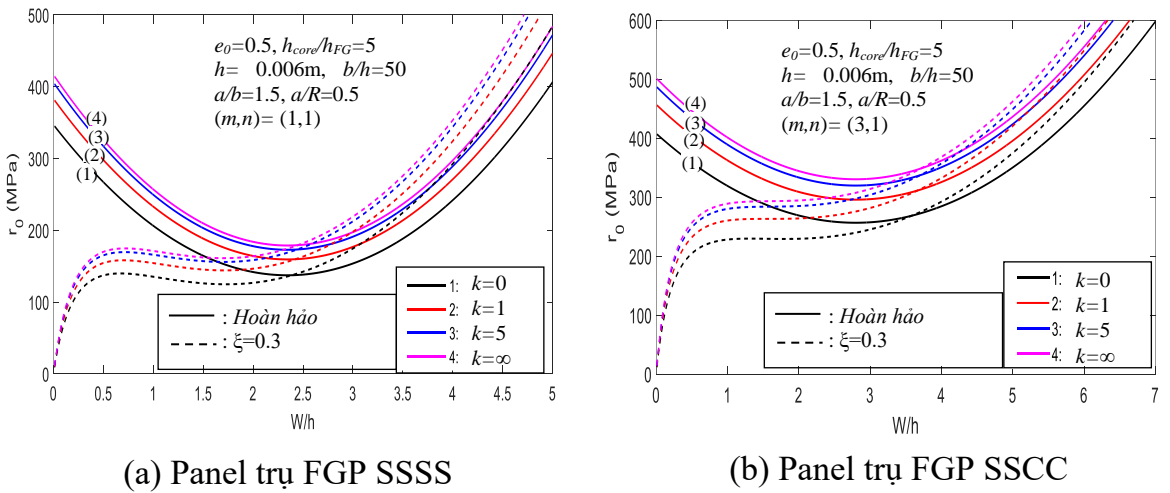
<sup>U</sup> Tải tới hạn trên;

<sup>L</sup>Tải tới hạn dưới;

\* Mode tới hạn ( $m, n$ )



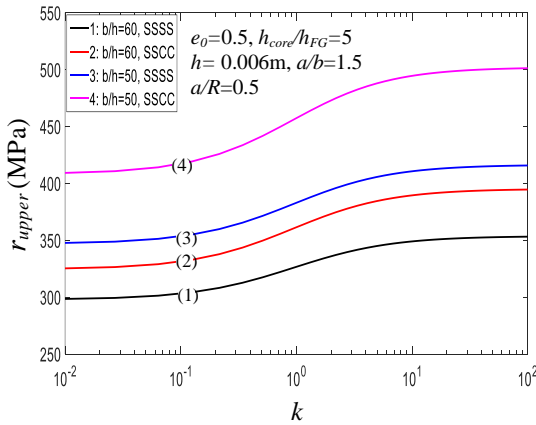
Hình 2.9. Ảnh hưởng của  $\zeta$  đối với  $r_0 - W/h$



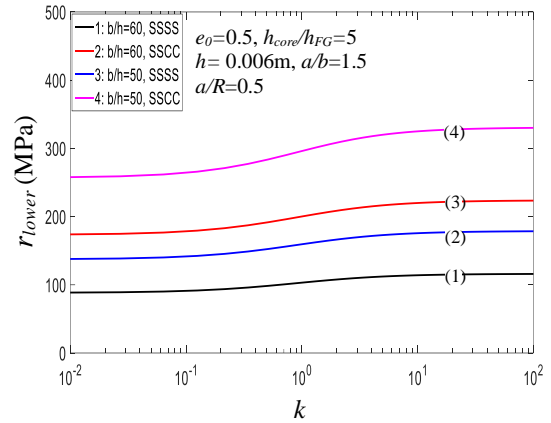
Hình 2.10. Ảnh hưởng của  $k$  đối với  $r_0 - W/h$

**2.3.3.3. Ảnh hưởng của hai trường hợp điều kiện biên**

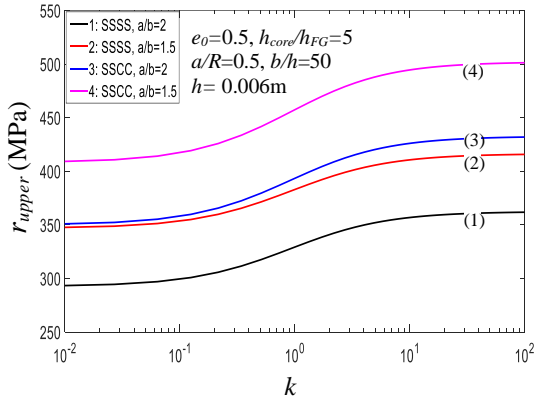
Ảnh hưởng của hai trường hợp điều kiện biên đối với tải trọng nén dọc trục tới hạn và đường cong mô tả đáp ứng sau tới hạn của panel trụ sandwich FGP được thể hiện thông qua Bảng 2.5-2.8 và Hình 2.11-2.14. Quan sát thấy, tải trọng nén dọc trục tới hạn tương ứng với trường hợp panel trụ sandwich FGP có điều kiện biên bốn cạnh tựa đơn là nhỏ hơn so với trường hợp panel trụ sandwich FGP có hai cạnh tựa đơn và hai cạnh thẳng ngàm. Ví dụ: Bảng 2.6, với cùng  $k=1$  và  $b/h=50$ , tải trọng nén dọc trục tới hạn trên và dưới của panel trụ SSCC lần lượt là  $r_{upper}=457.3689$  MPa và  $r_{lower}=296.0665$  MPa, lớn hơn trường hợp panel trụ SSSS là 1.19 và 1.86 lần, tương ứng với tải trọng tới hạn trên  $r_{upper}=382.9550$  MPa và tải trọng tới hạn dưới  $r_{lower}=159.4124$  MPa.



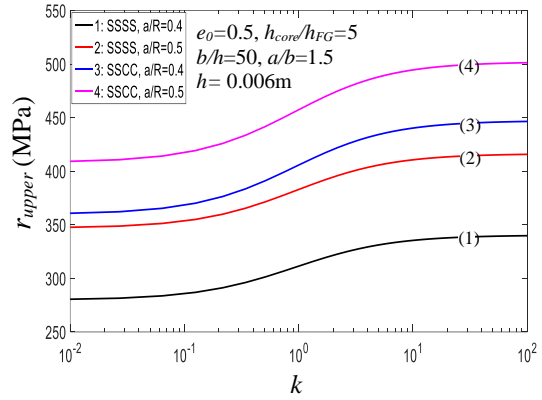
Hình 2.11. Ảnh hưởng của  $b/h$  đối với  $r_{upper} - k$



Hình 2.12. Ảnh hưởng của  $b/h$  đối với  $r_{lower} - k$



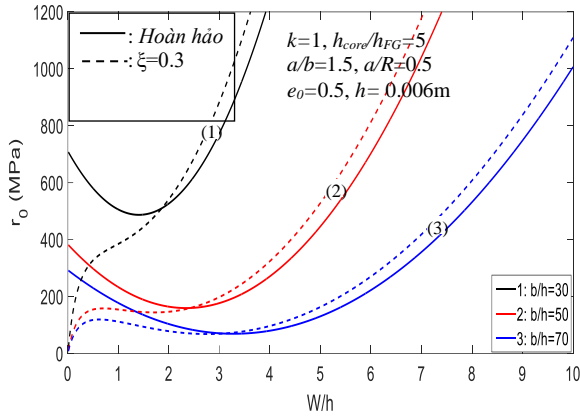
Hình 2.13. Ảnh hưởng của  $a/b$  đối với  $r_{upper} - k$



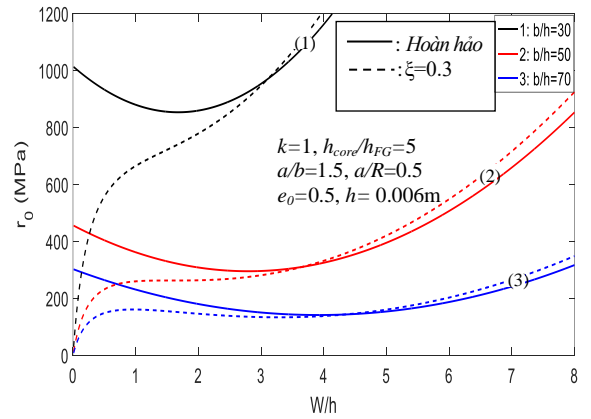
Hình 2.14. Ảnh hưởng của  $a/R$  đối với  $r_{upper} - k$

#### 2.3.3.4. Ảnh hưởng của các thông số hình học ( $b/h$ , $a/b$ , $a/R$ )

Ảnh hưởng của tỉ lệ  $b/h$ ,  $a/b$  và  $a/R$  đối với tải trọng tới hạn của panel trụ sandwich FGP được mô tả trong Bảng 2.6-2.7. Ảnh hưởng của  $b/h$  và  $a/R$  đối với đường cong quan hệ tải - độ võng của panel trụ được mô tả qua Hình 2.15-2.16. Ảnh hưởng của  $b/h$ ,  $a/b$  và  $a/R$  đến đường cong quan hệ  $r_{upper} - k$  và  $r_{lower} - k$  được mô tả trong Hình 2.11-2.14. Kết quả cho thấy, tải trọng nén dọc trục tới hạn của panel trụ sandwich FGP giảm đi đáng kể khi tỉ lệ  $b/h$  và  $a/b$  tăng, tải tới hạn tăng lên đáng kể khi  $a/R$  tăng. Kết luận này hoàn toàn phù hợp với thực tế là panel trụ sandwich FGP càng dài thì khả năng chịu tải nén dọc trục càng giảm, và khi chiều dài các cạnh panel trụ không đổi thì panel trụ càng cong ( $R$  càng nhỏ) thì chịu nén dọc trục càng tốt. Ví dụ: với panel trụ sandwich FGP SSCC có  $a/b = 1.5$ , tải nén dọc trục tới hạn trên là  $r_{upper} = 661.1627$  MPa (với  $a/R = 0.8$ ) lớn hơn tải trọng trên  $r_{upper} = 457.3689$  MPa (với  $a/R = 0.5$ ) và  $r_{upper} = 325.2189$  MPa (với  $a/R = 0.2$ ) lần lượt là 1.45 và 2.03 lần.

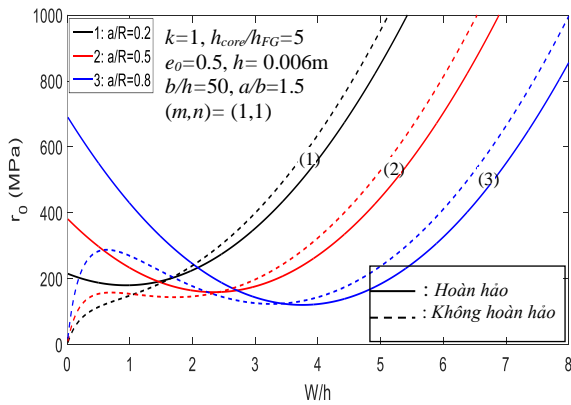


(a) Panel trụ FGP SSSS

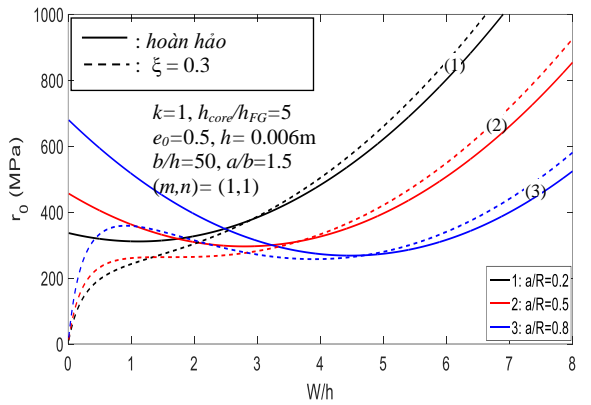


(b) Panel trụ FGP SSCC

Hình 2.15. Ảnh hưởng của  $b/h$  đối với  $r_0 - W/h$



(a) Panel trụ FGP SSSS



(b) Panel trụ FGP SSCC

Hình 2.16. Ảnh hưởng của  $a/R$  đối với  $r_0 - W/h$

Bảng 2.7. Ảnh hưởng của  $a/b$  và  $a/R$  đối với tải trọng nén dọc trục tới hạn.  $e_0=0.5, h_{core}/h_{FG}=5, k=1, \zeta=0, h=0.006m, b/h=50$

$r_{cr}$ (MPa)	Điều kiện biên SSSS			Điều kiện biên SSCC		
	$a/R=0.2$	$a/R=0.5$	$a/R=0.8$	$a/R=0.2$	$a/R=0.5$	$a/R=0.8$
$a/b=0.5$	460.2227 (1,1)*	1152.6820 (1,2)	1840.8907 (2,2)	520.4561 (1,1)	1192.2357 (2,1)	1255.9559 (2,2)
$a/b=1$	240.9471 (1,1)	581.1145 (2,1)	919.6631 (3,1)	365.6058 (2,1)	636.5938 (2,1)	945.7100 (3,1)
$a/b=2$	177.9827 (2,1)	288.1705 (2,1)	460.2227 (4,1)	303.1863 (3,1)	393.3820 (3,1)	520.4561 (4,1)
$a/b=4$	162.2415 (4,1)	189.7885 (4,1)	240.9471 (4,1)	290.3012 (6,1)	312.8501 (6,1)	353.0765 (7,1)
$a/b=5$	160.3526 (5,1)	177.9827 (5,1)	210.7242 (5,1)	289.5140 (8,1)	303.1985 (8,1)	328.6127 (8,1)

\* Mode tới hạn  $(m,n)$

## 2.4. Phân tích ổn định phi tuyến của panel trụ sandwich FGP trên nền đàn hồi

Xét panel trụ sandwich xấp FG có chiều dày  $h$ , bán kính mặt giữa là  $R$ , độ dài cạnh thẳng là  $a$ , độ dài cạnh cong là  $b$  được đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Panel trụ được xác định trong một hệ tọa độ  $xyz$  với mặt phẳng  $(x, y)$  trùng với mặt giữa của panel, tọa độ chiều dày của panel  $z$  ( $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ ) như được chỉ ra trong Hình 2.6. Panel trụ sandwich ba lớp, gồm có hai lớp phủ mặt FGM và lớp lõi FGP ở giữa có mô hình phân bố độ xấp đối xứng. Độ dày lớp lõi xấp là  $h_{core}$ , độ dày của mỗi lớp phủ mặt FGM là  $\frac{h_{FG}}{2}$ , ( $h = h_{core} + h_{FG}$ ). Giả thiết rằng các lớp được liên kết là hoàn hảo (tức bỏ qua sự bong tách giữa các lớp). Panel trụ sandwich FGP chịu tải trọng nén dọc trục với cường độ  $r_0$  trên cạnh  $x=0, x=a$ ;  $p_0$  trên cạnh  $y=0, y=b$ . Bài toán đặt ra là tìm tải tới hạn và xây dựng đường cong tải – độ võng đáp ứng sau tới hạn của panel trụ sandwich FGP có kể đến tương tác nền – panel trụ theo mô hình Pasternak.

Mô đun đàn hồi Young và hệ số Poisson của panel trụ sandwich được xác định theo biểu thức (2.29).

### 2.4.1. Giải bài toán panel trụ FGP đặt trên nền đàn hồi

Dựa trên lý thuyết vỏ Donnell với tính phi tuyến hình học von-Karman, hệ phương trình vi phân phi tuyến của panel trụ sandwich FGP đặt trên nền đàn hồi được xác định theo [88] là (2.19) và (2.38)

$$\begin{aligned} A_3 \nabla^4 f + \frac{1}{R} f_{,xx} + A_4 \nabla^4 w + f_{,yy} (w_{,xx} + w_{,xx}^*) - 2f_{,xy} (w_{,xy} + w_{,xy}^*) + \\ + f_{,xx} (w_{,yy} + w_{,yy}^*) + K_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) - K_1 w = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Với panel trụ sandwich FGP có bốn cạnh tựa đơn, điều kiện biên tương ứng xác định theo biểu thức (2.20)

$$w = 0, M_x = 0, N_{xy} = 0, N_x = -r_0 h \text{ tại } x = 0, x = a$$

$$w = 0, M_y = 0, N_{xy} = 0, N_y = -p_0 h \text{ tại } y = 0, y = b$$

Dựa vào điều kiện biên (2.20), ta chọn thành phần độ võng  $w, w^*$  dưới dạng [83]

$$\begin{aligned} w &= W \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ w^* &= \xi h \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.39)$$

Thay biểu thức (2.39) vào (2.19), ta có [34, 47]

$$f = B_1 \cos 2 \frac{m\pi}{a} x + B_2 \cos 2 \frac{n\pi}{b} y + B_3 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y + \frac{1}{2} N_x y^2 + \frac{1}{2} N_y x^2 \quad (2.40)$$

trong đó

$$B_1 = \frac{A_2 a^2 n^2 (W^2 + 2W\xi h)}{32b^2 m^2};$$

$$B_2 = \frac{A_2 b^2 m^2 (W^2 + 2W\xi h)}{32a^2 n^2};$$

$$B_3 = \frac{A_2 W m^2 \pi^2}{Ra^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2} - A_1 W.$$

Thay các biểu thức (2.39)-(2.40) vào (2.38), và sử dụng phương pháp Galerkin, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{W}{4} \left[ \left( A_3 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2 R} \right) \left( \frac{A_2 m^2 \pi^2}{a^2 R \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2} - A_1 \right) + A_4 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 \right] \\ & + (W^2 + 2\xi h W) \left[ -4A_2 A_3 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \beta^2 + \frac{A_2 n^2 \pi^2}{2b^2 R} \right] \frac{\delta_1 \delta_2}{3mn\pi^2} \\ & + W(\xi h + W) \left( \frac{A_2 m^2 \pi^2}{a^2 R \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2} - A_1 \right) \frac{8mn\pi^2}{3a^2 b^2} \delta_1 \delta_2 \\ & - (\xi h + W)(W^2 + 2\xi h W) \frac{A_2 \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right)}{64} - \frac{1}{4} \left[ K_2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) + K_1 \right] W \\ & = (\xi h + W) \frac{1}{4} \left( N_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + N_y \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) - \frac{N_y}{R} \frac{4}{mn\pi^2} \delta_1 \delta_2 \end{aligned}$$

Hay được viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned} & S_1^* W + S_2^* (W^2 + 2\xi h W) + S_3^* W(\xi h + W) - S_4^* (\xi h + W)(W^2 + 2\xi h W) \\ & - \frac{1}{4} \left[ K_2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) + K_1 \right] W = (\xi h + W) \frac{1}{4} \left( N_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + N_y \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) - \frac{N_y}{R} \frac{4}{mn\pi^2} \delta_1 \delta_2 \quad (2.41) \end{aligned}$$

trong đó

$$\delta_1 = \frac{1}{2} [1 - (-1)^m]; \quad \delta_2 = \frac{1}{2} [1 - (-1)^n];$$

$$S_1^* = \frac{1}{4} \left[ \left( A_3 \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2 R} \right) \left( \frac{A_2 m^2 \pi^2}{a^2 R \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2} - A_1 \right) + A_4 \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \right];$$

$$S_2^* = \left[ -4A_2 A_3 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{A_2}{2R} \right] \frac{n}{3b^2 m} \delta_1 \delta_2;$$

$$S_3^* = \left( \frac{A_2 m^2 \pi^2}{Ra^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2} - A_1 \right) \frac{8mn\pi^2}{3a^2 b^2} \delta_1 \delta_2; \quad S_4^* = \frac{A_2 \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right)}{64}.$$

Khi panel trụ chỉ chịu tải trọng dọc trục ( $N_{x0} = -r_0 h, N_{y0} = -p_0 h = 0$ ), biểu thức (2.41) có dạng

$$r_0 = \frac{-4a^2}{hm^2 \pi^2 (\xi h + W)} \left\{ \begin{array}{l} S_1 W + S_2 W(W + 2\xi h) + S_3 W(\xi h + W) \\ -S_4 W(\xi h + W)(W + 2\xi h) - \frac{1}{4} \left[ K_2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) + K_1 \right] W \end{array} \right\} \quad (2.42)$$

Với panel trụ FGP hoàn hảo, thay  $\xi = 0$  vào biểu thức (2.42), ta được

$$r_0 = \frac{-4a^2}{hm^2 \pi^2} \left( S_1 + S_2 W + S_3 W - S_4 W^2 - \frac{1}{4} \left[ K_2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) + K_1 \right] \right) \quad (2.43)$$

Từ biểu thức (2.43), cho  $w \rightarrow 0$  tải trọng tới hạn trên là

$$r_{0upper} = \frac{-4a^2}{hm^2 \pi^2} \left\{ S_1 - \frac{1}{4} \left[ K_2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) + K_1 \right] \right\} \quad (2.44)$$

Trường hợp không kể đến tương tác nền - panel trụ, tức  $K_1 = K_2 = 0$ . Biểu thức (2.44) được viết lại là

$$r_{0upper} = \frac{-4S_1}{h\alpha^2} = \frac{-1}{h\alpha^2} \left[ \left( A_3 (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \frac{\alpha^2}{R} \right) \left( \frac{A_2 \alpha^2}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} - A_1 \right) + A_4 (\alpha^2 + \beta^2)^2 \right] \quad (2.45)$$

Biểu thức (2.45) được sử dụng để xác định tải nén dọc trục tới hạn trên của panel trụ sandwich FGP hoàn hảo chịu nén đều dọc trục.



## 2.4.2. Kết quả tính toán số

### 2.4.2.1. Nghiên cứu so sánh

Nghiên cứu so sánh được thực hiện đối với tải tới hạn  $N_{cr}$  của panel trụ đẳng hướng,  $N_{cr} = r_{0upper} / (bh)$ , trong đó  $r_{0upper}$  xác định theo biểu thức (2.45) của luận án. Bảng 2.8 thể hiện kết quả so sánh giữa kết quả xác định theo biểu thức (2.45) của luận án với các kết quả được báo cáo trong công trình của Shen [25] và Jaunky [39].

Bảng 2.8. So sánh tải tới hạn trên  $N_{cr}$  panel trụ đẳng hướng.  $E=10^7$  psi,  $\nu = 0.3$  và  $h=0.24$ in

$a/b$	$a/R$	$b/h$	Jaunky [39]		Shen [25]	Luận án
			FEM	Lý thuyết Donnell	HSDT	Lý thuyết Donnell
3.1831	10	78.5398	41945.4	53080.6	51419.68	53572.20 (8,4)*
3.1831	10	157.0796	12360.0	13834.1	13119.99	13384.37 (1,2)
3.1831	10	314.1593	3358.8	3549.9	3228.12	3345.99 (3,4)

\* Mode tới hạn ( $m,n$ )

Ta thấy, kết quả tính được xác định theo biểu thức (2.45) của luận án là tương đồng với kết quả đã công bố của Shen [25], Jaunky [39]. Điều này khẳng định độ tin cậy của phương pháp nghiên cứu được thực hiện trong luận án.

Trong phần tiếp theo, luận án nghiên cứu ảnh hưởng của nền, hệ số độ xốp, tỉ lệ  $h_{core}/h_{FG}$  và kích thước hình học đến ổn định phi tuyến của panel trụ sandwich FGP chịu nén đều dọc trục. Lớp phủ mặt FGM là hỗn hợp Zirconia (ceramic) và Ti-6Al-4V (metal). Lớp lõi làm bằng Ti-6Al-4V xốp và hệ số Poisson  $\nu = 0,3$ . Các thông số về chỉ số tỉ phần thể tích, hệ số độ xốp, các thông số hình học, thông số nền được lấy như sau:  $k=1$ ,  $e_0=0.5$ ,  $h=0.006$ m,  $a/b=1.5$ ,  $b/h=50$ ,  $a/R=0.5$ ,  $h_{core}/h_{FG}=5$ ,  $K_1=6 \times 10^7$ N/m<sup>3</sup>,  $K_2=5 \times 10^5$ N/m.

### 2.4.2.2. Ảnh hưởng của thông số nền và hệ số độ xốp $e_0$

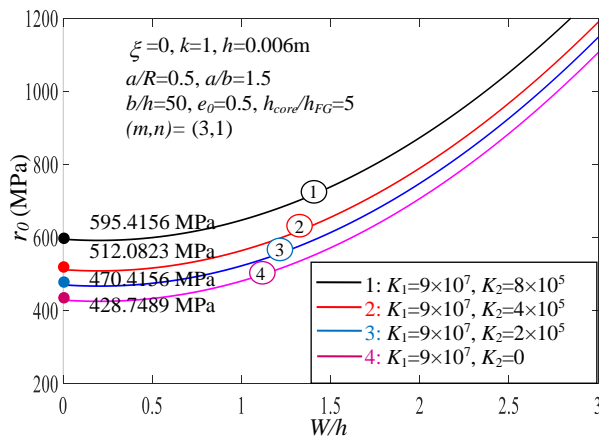
Sử dụng biểu thức (2.44), Bảng 2.9 cho thấy ảnh hưởng của hệ số nền  $K_1$ ,  $K_2$  đối với tải trọng nén dọc trục tới hạn trên của panel trụ sandwich FGP. Ta thấy, tải nén dọc trục tới hạn trên của panel tăng khi hệ số nền tăng. Ví dụ, cùng hệ số độ xốp  $e_0=0.5$ , tải nén tới hạn trên tăng khoảng 55%, từ  $r_{upper}=382.9550$ MPa (với  $K_1=K_2=0$ ) đến  $r_{upper}=595.4156$ MPa (với  $K_1=9 \times 10^7$ N/m<sup>3</sup>,  $K_2=8 \times 10^5$ N/m). Điều này cũng được quan sát thấy trong Hình 2.17. Ngoài ra, Bảng 2.9-2.11, và Hình 2.18 cũng thể hiện ảnh hưởng của hệ số độ xốp đối với tải nén tới hạn của panel, ta thấy tải nén tới hạn giảm khi hệ số độ xốp tăng. Ví dụ, Bảng 2.10 với  $h_{core}/h_{FG}=5$ , tải

trọng tới hạn trên giảm khoảng 25%, từ  $r_{upper}=597.0209\text{MPa}$  (với  $e_0=0$ ) đến  $r_{upper}=476.2146\text{MPa}$  (với  $e_0=0.8$ ). Điều này một lần nữa chứng tỏ hệ số độ xấp; nền đàn hồi ảnh hưởng khá lớn đến khả năng chịu nén dọc trục của panel trụ sandwich FGP.

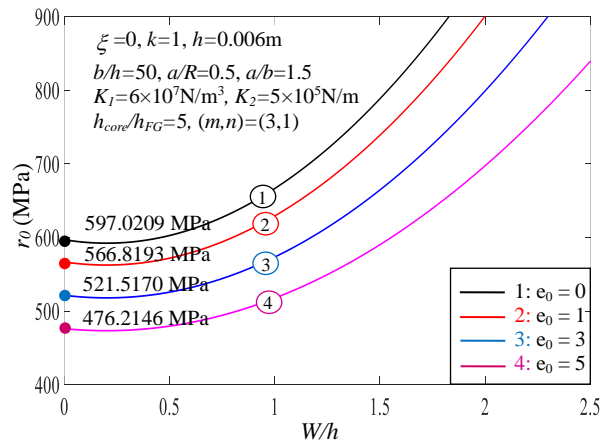
Bảng 2.9. Ảnh hưởng của các hệ số nền đối với tải nén dọc trục tới hạn trên.  $\xi=0$ ,  $h_{core}/h_{FG}=5$ ,  $h=0.006\text{m}$ ,  $k=1$ ,  $a/b=1.5$ ,  $a/R=0.5$ ,  $b/h=50$ .

$K_1$ (N/m <sup>3</sup> )	$K_2$ (N/m)	$r_{upper}$ (MPa)			
		$e=0$	$e=0.2$	$e=0.5$	$e=0.8$
0	0	468.9710(1,1)*	434.5646(1,1)	382.9550(1,1)	331.2172(2,1)
$3 \times 10^7$	0	481.4556(3,1)	451.2540(3,1)	405.9517(3,1)	356.8641(2,1)
$6 \times 10^7$	0	492.8542(3,1)	462.6527(3,1)	417.3503(3,1)	372.0480(3,1)
$9 \times 10^7$	0	504.2529(3,1)	474.0513(3,1)	428.7489(3,1)	383.4466(3,1)
$3 \times 10^7$	$2 \times 10^5$	523.1223 (3,1)	492.9207 (3,1)	447.6183 (3,1)	402.3160(3,1)
$6 \times 10^7$	$2 \times 10^5$	534.5209(3,1)	504.3193(3,1)	459.0170(3,1)	413.7146(3,1)
$9 \times 10^7$	$2 \times 10^5$	545.9195(3,1)	515.7180(3,1)	470.4156(3,1)	425.1133(3,1)
$3 \times 10^7$	$4 \times 10^5$	564.7889(3,1)	534.5874(3,1)	489.2850(3,1)	443.9827(3,1)
$6 \times 10^7$	$4 \times 10^5$	576.1876(3,1)	545.9860(3,1)	500.6836(3,1)	455.3813(3,1)
$9 \times 10^7$	$4 \times 10^5$	587.5862(3,1)	557.3846(3,1)	512.0823(3,1)	466.7799(3,1)
$3 \times 10^7$	$8 \times 10^5$	648.1223(3,1)	617.9207(3,1)	572.6183(3,1)	527.3160(3,1)
$6 \times 10^7$	$8 \times 10^5$	659.5209(3,1)	629.3193(3,1)	584.0170(3,1)	538.7146(3,1)
$9 \times 10^7$	$8 \times 10^5$	670.9195(3,1)	640.7180(3,1)	595.4156(3,1)	550.1133(3,1)

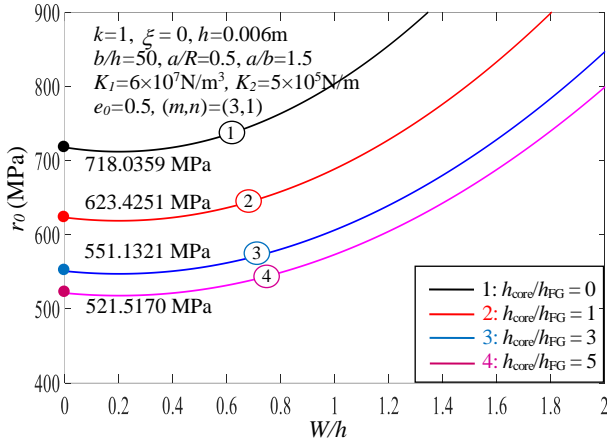
\* Mode tới hạn ( $m, n$ )



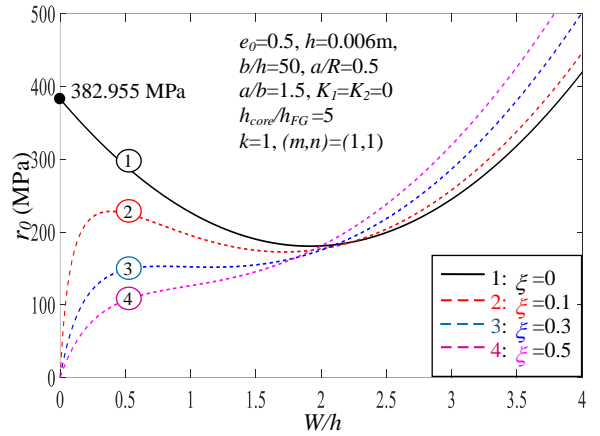
Hình 2.17. Ảnh hưởng của  $K_1$  và  $K_2$  đối với  $r_0 - W/h$



Hình 2.18. Ảnh hưởng của  $e_0$  đối với  $r_0 - W/h$



Hình 2.19. Ảnh hưởng của  $h_{core}/h_{FG}$  đối với  $r_0 - W/h$



Hình 2.20. Ảnh hưởng của  $\xi$  đối với  $r_0 - W/h$

**2.4.2.3. Ảnh hưởng của các thông số hình học ( $h_{core}/h_{FG}$ ,  $a/b$ ,  $a/R$ )**

Sử dụng biểu thức (2.44), Bảng 2.10 mô tả ảnh hưởng của  $e_0$  và  $h_{core}/h_{FG}$  đối với tải nén dọc trục tới hạn trên của panel trụ sandwich FGP. Sử dụng biểu thức (2.44), Bảng 2.11 mô tả ảnh hưởng của  $a/b$  và  $a/R$  đối với tải nén dọc trục tới hạn trên.

Bảng 2.10. Ảnh hưởng của  $e_0$  và  $h_{core}/h_{FG}$  đối với tải nén tới hạn trên.

$k=1, \zeta=0, h=0.006m, a/b=1.5, a/R=0.5, b/h=50, K_1=6 \times 10^7 N/m^3, K_2=5 \times 10^5 N/m$

$r_{upper}$ (MPa)	$e_0=0$	$e_0=0.2$	$e_0=0.5$	$e_0=0.8$
$h_{core}/h_{FG}=0$	718.0359(3,1)*	718.0359(3,1)	718.0359(3,1)	718.0359(3,1)
$h_{core}/h_{FG}=1$	659.1270(3,1)	644.8462(3,1)	623.4251(3,1)	602.0040(3,1)
$h_{core}/h_{FG}=3$	614.8104(3,1)	589.3391(3,1)	551.1321(3,1)	512.9251(3,1)
$h_{core}/h_{FG}=5$	597.0209(3,1)	566.8193(3,1)	521.5170(3,1)	476.2146(3,1)
$h_{core}/h_{FG}=10$	579.3658(3,1)	544.3449(3,1)	491.8136(3,1)	439.2822(3,1)
$h_{core}=h, h_{FG}=0$	556.1821(3,1)	514.6600(3,1)	452.3767(3,1)	390.0935(3,1)

\* Mode tới hạn ( $m, n$ )

Bảng 2.10 cho thấy, tải nén dọc trục tới hạn trên của panel giảm khi tỉ lệ  $h_{core}/h_{FG}$  tăng. Ví dụ, tải nén tới hạn trên giảm khoảng 59% từ  $r_{upper} = 718.0359$  MPa (với  $h_{core}/h_{FG}=0, e_0=0.5$ ) đến  $r_{upper}=452.3767$  MPa (với  $h_{core}=h, h_{FG}=0, e_0=0.5$ ). Nhận xét này cũng được quan sát thấy trong Hình 2.19: tải nén tới hạn

trên của panel giảm khi tỉ lệ  $h_{core}/h_{FG}$  tăng, nghĩa là tỉ lệ chiều dày  $h_{core}/h_{FG}$  có ảnh hưởng đáng kể đến tải trọng nén dọc trục tới hạn của panel trụ sandwich FGP.

Bảng 2.11. Ảnh hưởng của  $a/b$  và  $a/R$  đối với tải nén tới hạn trên.  $\xi = 0$ ,  $e_0 = 0.5$ ,  $k = 1$ ,  $h_{core}/h_{FG} = 5$ ,  $h = 0.006\text{m}$ ,  $b/h = 50$ ,  $K_1 = 6 \times 10^7 \text{N/m}^3$ ,  $K_2 = 5 \times 10^5 \text{N/m}$

$r_{upper}$ (MPa)	$a/R=0.2$	$a/R=0.4$	$a/R=0.5$	$a/R=0.6$	$a/R=0.8$
$a/b=0.5$	587.1866(1,1)*	1100.6347(2,1)	1267.9590(2,1)	1472.4665(2,1)	1950.7567(2,2)
$a/b=1$	425.9975(2,1)	587.1866(2,1)	708.0784(2,1)	810.8271(3,1)	1022.3878(3,1)
$a/b=1.5$	386.2391(2,1)	467.7873(3,1)	521.5170(3,1)	587.1866(3,1)	729.1057(4,1)
$a/b=2$	363.0327(3,1)	416.6829(3,1)	456.2205(4,1)	493.1596(4,1)	587.1866(4,1)
$a/b=3$	355.0744(5,1)	376.8615(5,1)	393.2017(5,1)	413.1732(5,1)	464.0095(5,1)
$a/b=4$	349.6202(6,1)	363.0327(6,1)	373.0921(6,1)	385.3870(6,1)	414.1460(7,1)
$a/b=5$	348.5246(8,1)	356.6645(8,1)	362.7693(8,1)	370.2309(8,1)	389.2238(8,1)

\* Mode tới hạn ( $m, n$ )

Bảng 2.11 cho thấy, với panel trụ sandwich FGP chịu nén đều dọc trục thì tải trọng tới hạn trên giảm khi tỉ số  $a/b$  tăng và tải trọng tới hạn trên tăng khi tỉ lệ  $a/R$  tăng lên. Ví dụ, cùng với tỉ lệ  $a/b=2$ , tải trọng tới hạn trên của panel trụ tăng khoảng 62%, từ  $r_{upper}=363.0327\text{MPa}$  (với  $a/R=0.2$ ) đến  $r_{upper}=587.1866\text{MPa}$  (với  $a/R=0.8$ ). Điều này chỉ ra, panel trụ sandwich FGP càng dài thì khả năng chịu lực càng kém.

## 2.5. Kết luận chương 2

Chương 2 sử dụng lý thuyết vỏ Donnell, phương pháp Galerkin đã giải quyết những nội dung chủ yếu sau

1. Đã nghiên cứu ảnh hưởng của bốn mô hình phân bố độ xấp đến ổn định phi tuyến của panel trụ xấp FG chịu nén đều dọc trục.
2. Đã phân tích ổn định phi tuyến tĩnh của panel trụ sandwich FGP không hoàn hảo với hai điều kiện biên khác nhau chịu nén đều dọc trục.
3. Đã phân tích ổn định của panel trụ sandwich FGP không hoàn hảo chịu nén đều dọc trục trên nền đàn hồi Pasternak.

**Từ các kết quả số, luận án đưa ra một số nhận xét đáng chú ý sau**

1. Với bốn mô hình phân bố độ xốp được nghiên cứu, panel trụ FGP mô hình phân bố xốp đối xứng có khả năng chịu lực tốt nhất, panel trụ mô hình phân bố xốp không đối xứng Loại b và Loại c có khả năng chịu lực như nhau, và chịu nén dọc trục kém nhất là panel trụ mô hình phân bố xốp đồng đều.
2. Khả năng chịu nén dọc trục của panel trụ FGP giảm khi hệ số độ xốp tăng.
3. Panel trụ sandwich FGP hai cạnh cong tựa đơn, hai cạnh thẳng ngàm chịu nén dọc trục tốt hơn panel trụ sandwich FGP bốn biên tựa đơn.
4. Nền đàn hồi làm tăng đáng kể khả năng chịu nén dọc trục của panel trụ sandwich FGP.
5. Panel trụ FGP càng mảnh khả năng chịu nén dọc trục càng kém.
6. Panel trụ FGP giàu gốm chịu nén dọc trục tốt hơn giàu kim loại.

Kết quả chính của chương 2 đã được công bố trong 3 bài báo [1], [2], [3] trong danh mục công trình công bố liên quan đến luận án. Trong đó có 1 bài trên tạp chí quốc tế danh mục ISI và 2 bài trên tạp chí, hội nghị uy tín trong nước.

### **Chương 3: PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ FGP CÓ GÂN GIA CƯỜNG CHỊU NÉN DỌC TRỰC HOẶC ÁP LỰC NGOÀI**

#### **3.1. Đặt vấn đề**

Nghiên cứu về ổn định của kết cấu dạng vỏ trụ có và không có gân gia cường chịu các tải trọng cơ trong môi trường nhiệt nhận được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học. Tổng quan cho thấy, với kết cấu dạng vỏ trụ FGP các nghiên cứu về bài toán ổn định còn ít, nhất là bài toán ổn định tĩnh của kết cấu dạng vỏ trụ FGP có và không có gân gia cường chịu tải trọng cơ trong môi trường nhiệt có xét đến tương tác vỏ với nền đàn hồi.

Chương 3 của luận án sử dụng lý thuyết vỏ Donnell, kỹ thuật san đều tác dụng gân của Lekhnitskii và phương pháp Galerkin nghiên cứu lời giải giải tích cho ba bài toán cơ bản sau đây:

Bài toán 1: Phân tích ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xấp đến ổn định phi tuyến của vỏ trụ FGP.

Bài toán 2: Phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu nén dọc trục.

Bài toán 3: Phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu áp lực ngoài.

Một số giả thiết trong chương 3

1. Về vật liệu: Vỏ trụ FGP được giả thiết là hoàn hảo về mặt hình dáng. Vỏ trụ sandwich FGP ba lớp, gồm hai lớp phủ mặt FGM mỏng và một lớp lõi FGP đối xứng ở giữa dày hơn. Vỏ trụ có gia cường gân trực giao FGM. Đặc tính vật liệu lớp phủ và gân gia cường được giả thiết là biến đổi theo độ dày với quy luật hàm lũy thừa. Lớp lõi xấp FG được đặc trưng bởi hệ số xấp ảnh hưởng đến các đặc tính vật lý theo hướng chiều dày vỏ. Tính liên tục vật liệu giữa lớp phủ với lớp lõi và gân gia cường được đảm bảo không bị tập trung ứng suất và phân tách các lớp.

2. Tương tác nền - vỏ trụ được xác định theo mô hình Pasternak với hai hệ số nền  $K_1$  và  $K_2$ . Trong đó, hệ số nền Winkler ( $K_1$ ) có thứ nguyên [lực/(chiều dài)<sup>3</sup>]; hệ số nền Pasternak ( $K_2$ ) có thứ nguyên [lực/(chiều dài)].

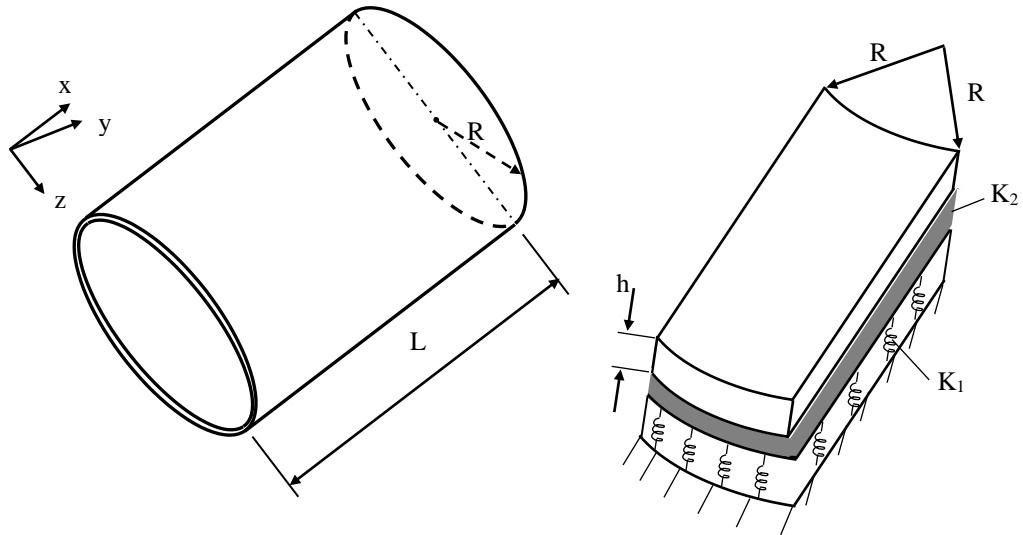
3. Tải trọng tác dụng lên vỏ trụ là tải trọng cơ - nhiệt, cụ thể là tải trọng nén dọc trục, áp lực ngoài và tải nhiệt.

4. Mặt giữa và mặt trung hòa được giả thiết là trùng nhau

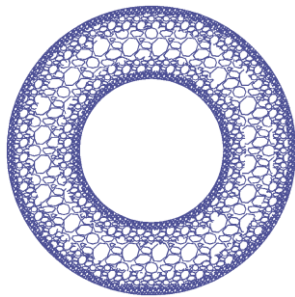
5. Trường nhiệt độ trong vỏ được giả thiết là phân bố đều

## 3.2. Phân tích ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xốp đến ổn định phi tuyến của vỏ trụ FGP

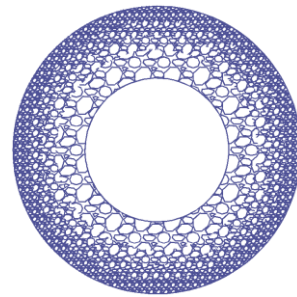
### 3.2.1. Mô hình vỏ trụ FGP



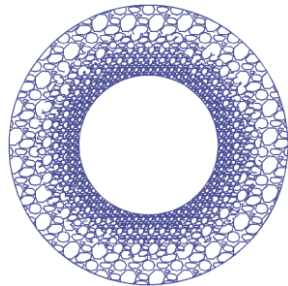
Hình 3.1. Mô hình vỏ trụ xốp FG được bao quanh bởi nền đàn hồi



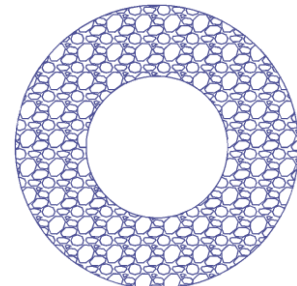
(a) Loại 1. Phân bố độ xốp đối xứng



(b) Loại 2a. Phân bố độ xốp không đối xứng



(c) Loại 2b: Phân bố độ xốp không đối xứng



(d) Loại 3: Phân bố độ xốp đồng đều

Hình 3.2. Các mô hình phân bố độ xốp của vỏ trụ FGP

Xét vỏ trụ FGP có bán kính mặt giữa là  $R$ , chiều dày  $h$ , chiều dài  $L$  chịu nén đều dọc trục trong môi trường nhiệt, bao quanh bởi nền đàn hồi (mô hình Pasternak). Vỏ

trụ được xác định trong một hệ tọa độ  $xyz$  có mặt phẳng  $(x, y)$  trùng với mặt giữa của vỏ, tọa độ chiều dày của vỏ  $z$  ( $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ ) như được mô tả trong Hình 3.1. Vỏ trụ xóp được xem xét gồm bốn loại mô hình phân bố độ xóp (Hình 3.2).

Mô đun đàn hồi Young, hệ số giãn nở nhiệt của vỏ trụ FGP được xác định như sau

*Loại 1: Phân bố độ xóp đối xứng*

$$(E_{sh}, \alpha_{sh}) = (E_m, \alpha_m) \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right]; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (3.1)$$

*Loại 2a,b: Phân bố độ xóp không đối xứng*

$$(E_{sh}, \alpha_{sh}) = (E_m, \alpha_m) \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right]; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (3.2a)$$

$$(E_{sh}, \alpha_{sh}) = (E_m, \alpha_m) \left[ 1 - e_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right]; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (3.2b)$$

*Loại 3: phân bố độ xóp đồng đều*

$$(E_{sh}, \alpha_{sh}) = (E_m, \alpha_m)(1 - e_0 \lambda) \quad (3.3)$$

trong đó

$E_{sh}$  là mô đun đàn hồi Young của vỏ trụ;

$E_m$  là giá trị lớn nhất của mô đun đàn hồi Young;

$\alpha_{sh}$  là hệ số giãn nở nhiệt của vỏ trụ;

$\nu$  là hệ số Poisson ( $\nu = 0,3$ );

$e_0$  là hệ số mật độ rỗng ( $0 < e_0 < 1$ ).

hệ số  $\lambda$  trong phân bố độ xóp đồng đều được xác định

$$\lambda = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left( \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2$$

Các biểu thức (3.1), (3.2a,b) và (3.3) cho thấy: khi  $e_0=0$ , vỏ trụ làm bằng kim loại không có lỗ rỗng.

### 3.2.2. Các phương trình cơ bản

Dựa trên lý thuyết vỏ Donnell có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến hình học von-Karman, biểu thức cân bằng phi tuyến của vỏ trụ FGP trong môi trường nhiệt có kể đến tương tác nền - vỏ trụ như sau [78, 81]

$$A_3 \nabla^4 \varphi + \frac{1}{R} \varphi_{,xx} + A_4 \nabla^4 w + \varphi_{,yy} w_{,xx} - 2\varphi_{,xy} w_{,xy} + K_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) - K_1 w = 0 \quad (3.4)$$



$$\nabla^4 \varphi + A_1 \nabla^4 w - A_2 \left( w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy} - w_{,xx} / R \right) = 0 \quad (3.5)$$

trong đó

$K_1, K_2$  là các hệ số nền;

$$A_1 = J_2 / D_{11}; A_2 = 1 / (J_0 D_{11}); A_3 = J_0 J_2; A_4 = J_0 (D_{12} J_1 + D_{22} J_2) - D_{13};$$

$$J_0 = \frac{1}{D_{11}^2 - D_{21}^2}; J_1 = D_{11} D_{12} - D_{21} D_{22}; J_2 = D_{11} D_{22} - D_{21} D_{12}.$$

với  $D_{ij}$  ( $i=1,2,3; j=1,2,3$ ) được xác định như sau

$$D_{1j} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} z^{j-1} dz; D_{2j} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} z^{j-1} dz; D_{3j} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} z^{j-1} dz = \frac{1}{2} (D_{1j} - D_{2j}).$$

Sử dụng biểu thức (3.4) và (3.5) có thể phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ xóp FG chịu tải trọng nén dọc trục trong môi trường nhiệt được bao quanh bởi nền đàn hồi.

### 3.2.3. Điều kiện biên và phương pháp giải

Xét vỏ trụ FGP chịu nén dọc trục có điều kiện biên tựa đơn ở hai đầu ( $x=0, x=L$ ). Độ võng của vỏ trụ có dạng [46, 83, 84]

$$w = w(x, y) = f_0 + f_1 \sin \alpha x \sin \beta y + f_2 \sin^2 \alpha x \quad (3.6)$$

trong đó

$f_0$  biểu thị độ võng đồng đều trước mất ổn định;

$f_1$  biểu thị độ võng tuyến tính sau mất ổn định;

$f_2$  biểu thị độ võng phi tuyến sau mất ổn định;

$$\alpha = m\pi / L; \quad \beta = n / R$$

với  $m$  là số nửa sóng dọc theo trục  $x$  và  $n$  là số sóng dọc theo trục  $y$ .

Thế  $w$  từ biểu thức (3.6) vào (3.5), ta có

$$\nabla^4 \varphi = A_2 (B_{01} \cos 2\alpha x + B_{02} \cos 2\beta y + B_{03} \sin \alpha x \sin \beta y + B_{04} \sin 3\alpha x \sin \beta y) \quad (3.7)$$

trong đó

$$B_{01} = \left[ \left( 8 \frac{A_1}{A_2} \alpha^4 - \frac{2}{R} \alpha^2 \right) f_2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 f_1^2 \right]; \quad B_{02} = \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 f_1^2;$$

$$B_{03} = - \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \frac{\alpha^2}{R} \right) f_1 + \alpha^2 \beta^2 f_1 f_2 \right]; \quad B_{04} = \alpha^2 \beta^2 f_1 f_2.$$

Biểu thức (3.7) được viết lại dạng

$$\varphi = B_1 \cos 2\alpha x + B_2 \cos 2\beta y + B_3 \sin \alpha x \sin \beta y + B_4 \sin 3\alpha x \sin \beta y - \frac{1}{2} p h y^2 - \frac{1}{2} \sigma_{0y} h x^2 \quad (3.8)$$

trong đó

$$B_1 = a_1 f_2 + a_2 f_1^2; \quad B_2 = a_3 f_1^2; \quad B_3 = a_4 f_1 f_2 + a_5 f_1; \quad B_4 = a_6 f_1 f_2.$$

với

$$a_1 = \left( 4 \frac{A_1}{A_2} \alpha^4 - \alpha^2 / R \right) \frac{A_2}{8\alpha^4}; \quad a_2 = \alpha^2 \beta^2 / \left( \frac{32\alpha^4}{A_2} \right); \quad a_3 = \frac{A_2 \alpha^2 \beta^2}{32\beta^4}; \quad a_4 = -\frac{A_2 \alpha^2 \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2};$$

$$a_5 = -\left[ \frac{A_1}{A_2} (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2 / R \right] \frac{A_2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}; \quad a_6 = \frac{A_2 \alpha^2 \beta^2}{81\alpha^4 + 18\alpha^2 \beta^2 + \beta^4}.$$

Thế  $w$  và  $\varphi$  từ các biểu thức (3.6), (3.8) vào (3.4), và áp dụng phương pháp Galerkin, ta được

$$-\frac{2\sigma_{0y}h}{R} - K_1 (f_2 + 2f_0) = 0 \quad (3.9)$$

$$f_1^2 = \frac{ph\alpha^2 + \sigma_{0y}h\beta^2 - [H_{01} + H_{04}f_2^2 + H_{05}f_2 + K_2(\alpha^2 + \beta^2) + K_1]}{H_{03}} \quad (3.10)$$

$$H_{06}f_2 + 8\alpha^2 f_2 ph + H_{07}f_1^2 + H_{08}f_1^2 f_2 - 8\frac{\sigma_{0y}h}{R} - 8K_2\alpha^2 f_2 - 6K_1 f_2 - 8K_1 f_0 = 0 \quad (3.11)$$

trong đó

$$H_{01} = -\left[ A_4 (\alpha^2 + \beta^2)^2 + a_5 \left( A_3 (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \frac{\alpha^2}{R} \right) \right];$$

$$H_{03} = 2\alpha^2 \beta^2 (a_2 + a_3), \quad H_{04} = -\alpha^2 \beta^2 (a_4 - a_6);$$

$$H_{05} = -\left[ a_4 \left( A_3 (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \frac{\alpha^2}{R} \right) + \alpha^2 \beta^2 a_5 - 2\alpha^2 \beta^2 a_1 \right];$$

$$H_{06} = 8\alpha^2 \left( 4A_4 \alpha^2 - 8\alpha^2 A_3 a_1 + \frac{2a_1}{R} \right);$$

$$H_{07} = 4 \left( a_5 \beta^2 - 16\alpha^2 A_3 a_2 + \frac{4a_2}{R} \right) \alpha^2;$$

$$H_{08} = 4(a_4 - a_6) \alpha^2 \beta^2.$$

Điều kiện chu vi kín của vỏ trụ là [46, 87]

$$\int_0^{2\pi R L} \int_0^0 v_{,y} dx dy = \int_0^{2\pi R L} \int_0^0 \left( \varepsilon_y^0 + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) dx dy = 0$$

$$\Rightarrow 8C_{12}^* ph - 8\frac{1}{A_2} \sigma_{0y} h + \frac{4}{R} (2f_0 + f_2) - \beta^2 f_1^2 + 8C_{26}^* \phi_1 = 0 \quad (3.12)$$

trong đó

$$C_{12}^* = D_{21} / J_0; \quad C_{26}^* = (D_{11} - D_{21}) / J_0; \quad \phi_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{sh}(z) \alpha_{sh}(z) \Delta T}{1 - \nu} dz.$$

Trong trường hợp nhiệt độ môi trường tăng đều ( $\Delta T = \text{const}$ ) từ giá trị ban đầu  $T_i$  (tại đó vỏ không chịu ứng suất nhiệt) đến giá trị cuối cùng là  $T_f$  và sự thay đổi nhiệt độ là  $\Delta T = T_f - T_i$  không phụ thuộc vào độ dày của vỏ trụ.

Từ biểu thức (3.9), ta có

$$\sigma_{0y} = -\frac{R}{2h} K_1 (f_2 + 2f_0) \quad (3.13)$$

Thay  $f_l$  và  $\sigma_{0y}$  từ các biểu thức (3.10), (3.13) vào (3.12), thu được

$$f_0 = L_{01} ph + L_{02} + L_{03} f_2 + L_{04} f_2^2 + 8L_0 C_{26}^* \phi_1 \quad (3.14)$$

Thay  $f_0$  từ biểu thức (3.14) vào (3.10), ta được

$$f_1^2 = L_{11} ph + L_{12} + L_{13} f_2 + L_{14} f_2^2 - \frac{8RK_1 \beta^2 L_0}{H_{03}} C_{26}^* \phi_1 \quad (3.15)$$

Thay  $f_0$  từ biểu thức (3.14) vào (3.10), ta có

$$\sigma_{0y} = -\frac{R}{h} K_1 \left[ f_2 / 2 + L_{01} ph + L_{02} + L_{03} f_2 + L_{04} f_2^2 + 8L_0 C_{26}^* \phi_1 \right] \quad (3.16)$$

trong đó

$$L_0 = -\frac{1}{\left[ \frac{8RK_1}{A_2} + \frac{8}{R} + \frac{\beta^4}{H_{03}} RK_1 \right]}; \quad L_{01} = L_0 \left( 8C_{12}^* - \frac{\beta^2 \alpha^2}{H_{03}} \right);$$

$$L_{02} = L_0 \frac{\beta^2}{H_{03}} \left[ H_{01} + K_2 (\alpha^2 + \beta^2) + K_1 \right];$$

$$L_{03} = L_0 \left( \frac{4RK_1}{A_2} + \frac{4}{R} + \frac{\beta^4 RK_1}{2H_{03}} + \frac{\beta^2 H_{05}}{H_{03}} \right); \quad L_{04} = L_0 \frac{\beta^2 H_{04}}{H_{03}};$$

$$L_{11} = \frac{1}{H_{03}} (\alpha^2 - RK_1 \beta^2 L_{01}); \quad L_{12} = -\frac{1}{H_{03}} \left[ RK_1 \beta^2 L_{02} + H_{01} + K_2 (\alpha^2 + \beta^2) + K_1 \right];$$

$$L_{13} = -\frac{1}{H_{03}} \left[ RK_1 \beta^2 (1/2 + L_{03}) + H_{05} \right]; \quad L_{14} = -\frac{1}{H_{03}} (RK_1 \beta^2 L_{04} + H_{04}).$$

Thay thế các giá trị  $f_0$ ,  $f_1$  và  $\sigma_{0y}$  từ các biểu thức (3.14)-(3.16) vào (3.11), ta thu được

$$p = -\frac{1}{\left[ H_{07}L_{11} + (8\alpha^2 + H_{08}L_{11})f_2 \right]h} \left[ H_{07}L_{12} + (H_{06} + H_{07}L_{13} + H_{08}L_{12} - 8K_2\alpha^2 - 4K_1)f_2 \right. \\ \left. + (H_{07}L_{14} + H_{08}L_{13})f_2^2 + H_{08}L_{14}f_2^3 - 8RK_1\beta^2L_0 \left( \frac{H_{07}}{H_{03}} + \frac{H_{08}}{H_{03}}f_2 \right) C_{26}^*\phi_1 \right] \quad (3.17)$$

Biểu thức (3.17) thể hiện mối quan hệ tải - độ võng, được sử dụng để xác định tải trọng tới hạn và phân tích quan hệ tải - độ võng đáp ứng sau tới hạn của vỏ trụ FGP chịu nén đều dọc trục trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi.

Từ biểu thức (3.17), khi cho  $f_2 \rightarrow 0$ , ta thu được tải trọng tới hạn trên

$$p_{upper} = -\frac{1}{H_{03}L_{11}h} \left[ H_{03}L_{12} - 8RK_1\beta^2L_0C_{26}^*\phi_1 \right] \quad (3.18)$$

Từ biểu thức (3.6), độ võng lớn nhất của vỏ trụ được xác định

$$W_{max} = f_0 + f_1 + f_2 \quad (3.19)$$

Thay thế các giá trị  $f_0$  và  $f_1$  từ các biểu thức (3.14), (3.15) vào (3.19), ta được

$$W_{max} = L_{01}ph + L_{02} + (L_{03} + 1)f_2 + L_{04}f_2^2 + 8L_0C_{26}^*\phi_1 \\ + \left[ L_{11}ph + L_{12} + L_{13}f_2 + L_{14}f_2^2 - \frac{8RK_1\beta^2L_0}{H_{03}}C_{26}^*\phi_1 \right]^{1/2} \quad (3.20)$$

Sử dụng biểu thức (3.17) và (3.20) có thể phân tích ảnh hưởng của mô hình phân bố độ xốp, các hệ số nền và môi trường nhiệt độ đến đường cong quan hệ tải - độ võng lớn nhất của vỏ trụ xốp FG.

### 3.2.3. Kết quả tính toán số

#### 3.2.3.1. Nghiên cứu so sánh

Để kiểm chứng độ tin cậy của lời giải, luận án tiến hành so sánh với kết quả tính toán theo tài liệu chuyên khảo của Brush và Almroth [82]. Nghiên cứu so sánh được thực hiện với vỏ trụ đẳng hướng chịu nén dọc trục tựa đơn ở hai đầu.

Sử dụng công thức (3.18), Bảng 3.1a chỉ ra sự so sánh kết quả tính toán của luận án với các kết quả tính toán theo biểu thức (5.50) trong tài liệu chuyên khảo của Brush và Almroth [82].

Bảng 3.1a cho thấy, kết quả tính toán tải trọng tới hạn của vỏ trụ đẳng hướng chịu nén dọc trục theo công thức (3.18) của luận án là tương đồng với kết quả tính toán theo biểu thức (5.50) trong tài liệu chuyên khảo của Brush và Almroth [82]. Điều này khẳng định độ tin cậy của phương pháp nghiên cứu được thực hiện trong luận án.

Bảng 3.1a. So sánh tải trọng tới hạn  $P^*$  của vỏ trụ đẳng hướng không có gân gia cường chịu nén dọc trục.  $E=70$  GPa,  $\nu=0,3$

$P^*$ (kN/m)	$L/R=1, L=1m, R=1m$		$L/R=2, L=1m, R=0.5m$	
	Brush and Almroth [82] $P^* = P / (2\pi R)$	Luận án $P^* = p_{upper} \cdot h$	Brush and Almroth [82] $P^* = P / (2\pi R)$	Luận án $P^* = p_{upper} \cdot h$
$R/h=100$	4237.2488 (3,9) <sup>a</sup>	4237.25 (3,9)	2118.2980 (5,9)	2118.30 (5,9)
$R/h=150$	1882.9301 (3,11)	1882.93 (3,11)	941.4651 (6,11)	941.47 (6,11)
$R/h=200$	1059.1518 (7,9)	1059.15 (7,9)	529.5759 (14,9)	529.58 (14,9)
$R/h=300$	470.7339 (10,1)	470.73 (10,1)	235.3663 (19,7)	235.37 (19,7)
$R/h=400$	264.7872 (5,18)	264.79 (5,18)	132.3936 (23,3)	132.39 (23,3)
$R/h=500$	169.4639 (10,17)	169.46 (10,17)	84.7320 (20,17)	84.73 (20,17)

<sup>a</sup> Mode tới hạn ( $m, n$ )

Trong phần tiếp theo, phân tích ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xốp, các hệ số nền và thông số nhiệt độ đối với ổn định và sau mất ổn định phi tuyến của vỏ trụ xốp FG chịu nén đều dọc trục sẽ được thực hiện. Vỏ trụ xốp FG được làm bằng thép xốp, các thông số hình học của vỏ, hệ số xốp và hệ số nền đàn hồi được lấy như sau:  $\Delta T=200K$ ,  $e_0=0.4$ ,  $K_1=2 \times 10^7 N/m^3$ ,  $K_2=1.5 \times 10^5 N/m$ ,  $h=0.01m$ ,  $R/h=100$ ,  $L/R=1.5$ .

Giả thiết mô đun đàn hồi Young và hệ số giãn nở nhiệt phụ thuộc vào nhiệt độ như sau [5]

$$P_i(T) = P_0 \left( P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right)$$

trong đó

$P_0, P_{-1}, P_1, P_2$  và  $P_3$  là hệ số nhiệt độ;

$T = T_0 + \Delta T$  (K) với  $T_0 = 300K$ .

Bảng 3.1b. Tính chất vật liệu của các vật liệu cấu thành vỏ

Vật liệu	Tính chất	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Zirconia	$E_c$ (Pa)	244.27e+9	0	-1.371e-3	1.214e-6	-3.681e-10
	$\alpha_c$ (K <sup>-1</sup> )	12.766e-6	0	-1.491e-3	1.006e-5	-6.778e-11
Ti-6Al-4V	$E_m$ (Pa)	122.56e+9	0	-4.586e-4	0	0
	$\alpha_m$ (K <sup>-1</sup> )	7.5788e-6	0	6.638e-4	-3.147e-6	0

### 3.2.3.2. Ảnh hưởng của mode $(m, n)$ và nhiệt độ $\Delta T$

Sử dụng biểu thức (3.17) và (3.18), Bảng 3.2a và Bảng 3.2b thể hiện ảnh hưởng của mode  $(m, n)$  đến tải trọng tới hạn trên và dưới của vỏ trụ FGP. Bảng 3.2a cho thấy, tải nén dọc trục tới hạn trên của vỏ trụ xấp xỉ FG là  $p_{upper} = 984,9455$  MPa tương ứng với mode tới hạn  $(m, n) = (8,4)$ . Bảng 3.2b cho thấy, tải nén dọc trục tới hạn dưới là  $p_{lower} = 401,8935$  MPa tương ứng với mode tới hạn  $(m, n) = (2, 6)$ .

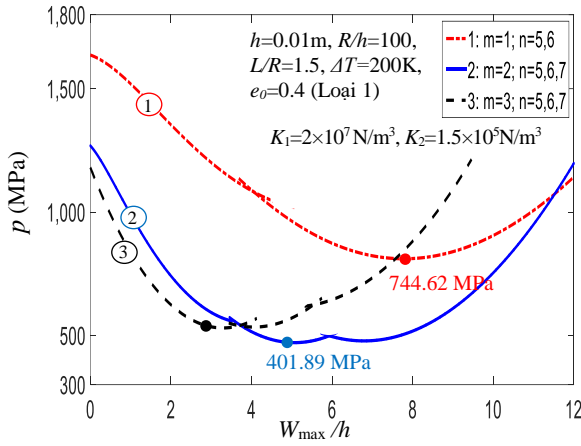
Bảng 3.2a. Ảnh hưởng của mode  $(m, n)$  đối với tải nén dọc trục tới hạn trên của vỏ trụ FGP (Loại 1).  $K_1=2 \times 10^7 \text{N/m}^3$ ,  $K_2=1.5 \times 10^5 \text{N/m}$ ,  $\Delta T=200\text{K}$ ,  $h=0.01\text{m}$ ,  $R/h=100$ ,  $L/R=1.5$ ,  $e_0=0.4$

$p_{upper}$ (MPa)	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
$m=6$	1180.8620	1144.5051	1101.9531	1059.6192	1023.7510
$m=7$	1037.8647	1024.6768	1009.9894	996.9533	988.9187
$m=8$	986.6583	985.1346	<b>984.9455</b>	987.8055	995.6461
$m=9$	995.9720	1000.7997	1008.6754	1020.6223	1037.8397
$m=10$	1048.6589	1057.1691	1069.7870	1087.1742	1110.1284

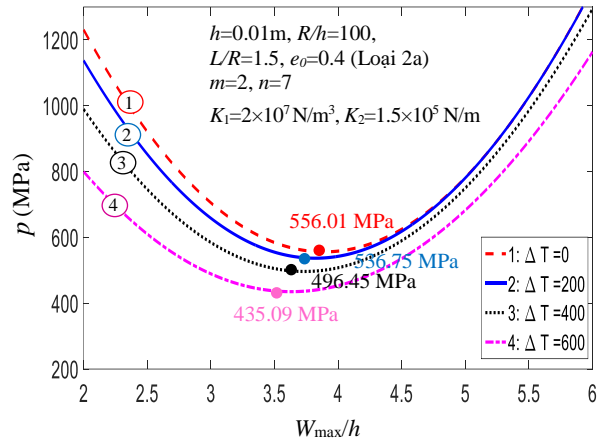
Bảng 3.2b. Ảnh hưởng của mode  $(m, n)$  đối với tải nén dọc trục tới hạn dưới của vỏ trụ FGP (Loại 1).  $K_1=2 \times 10^7 \text{N/m}^3$ ,  $K_2=1.5 \times 10^5 \text{N/m}$ ,  $\Delta T=200\text{K}$ ,  $h=0.01\text{m}$ ,  $R/h=100$ ,  $L/R=1.5$ ,  $e_0=0.4$

$p_{lower}$ (MPa)	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
$m=1$	661.9123	744.6211	911.3473	1145.0628	1411.5026
$m=2$	604.5420	425.4703	<b>401.8935</b>	459.3656	567.3302
$m=3$	745.0924	563.1998	467.4408	444.8528	475.7474
$m=4$	813.7184	697.7425	608.5792	561.3578	555.7758
$m=5$	939.8578	855.9685	778.7691	725.5126	702.7594

Sử dụng biểu thức (3.17) và (3.20), Hình 3.3 và Hình 3.4 lần lượt mô tả ảnh hưởng của mode  $(m, n)$  và nhiệt độ  $\Delta T$  đối với đường cong quan hệ tải - độ võng ( $p - W_{max}/h$ ). Ta thấy, khi  $\Delta T$  tăng các đường cong trở nên thấp hơn. Điều này chứng tỏ khi nhiệt độ tăng lên sẽ làm giảm khả năng chịu nén của vỏ trụ. Kết luận này cũng được thể hiện trong Bảng 3.3, ta thấy tải trọng tới hạn trên và dưới của vỏ trụ FGP giảm khi  $\Delta T$  tăng lên.



Hình 3.3. Ảnh hưởng của mode  $(m,n)$  đối với đường cong  $p - W_{\max}/h$



Hình 3.4. Ảnh hưởng của  $\Delta T$  đối với đường cong  $p - W_{\max}/h$

### 3.2.3.3. Ảnh hưởng của của mô hình phân bố độ xấp, hệ số độ xấp và nền đàn hồi

Ảnh hưởng của bốn mô hình phân bố độ xấp đối với tải tới hạn của vỏ trụ xấp FG được thể hiện trong các Bảng 3.3-Bảng 3.5. Kết quả cho thấy, với bốn mô hình phân bố xấp, tải nén dọc trục tới hạn của vỏ trụ xấp FG có mô hình phân bố xấp không đối xứng Loại 2a là lớn nhất, thứ hai là vỏ trụ xấp FG có mô hình phân bố xấp đối xứng (Loại 1), thứ ba là vỏ trụ có mô hình phân bố xấp không đối xứng Loại 2b, và tải tới hạn của vỏ trụ có mô hình phân bố xấp đồng đều (Loại 3) là nhỏ nhất.

Ảnh hưởng của  $e_0$  đối với tải trọng tới hạn trên và dưới của vỏ trụ FGP được mô tả trong Bảng 3.4 và Hình 3.5. Ta thấy rằng, tải nén dọc trục tới hạn của vỏ trụ FGP giảm khi độ xấp  $e_0$  tăng.

Bảng 3.3. Ảnh hưởng của các mô hình phân bố xấp và  $\Delta T$  đối với tải tới hạn.  $e_0=0.4$ ,  $K_1=2 \times 10^7 \text{ N/m}^3$ ,  $K_2=1.5 \times 10^5 \text{ N/m}^3$ ,  $h=0.01 \text{ m}$ ,  $R/h=100$ ,  $L/R=1.5$

$p_{cr}$ (MPa)	$\Delta T=0\text{K}$	$\Delta T=200\text{K}$	$\Delta T=400\text{K}$	$\Delta T=600\text{K}$	$\Delta T=800\text{K}$	
Loại 1	$p_{\text{upper}}$	1026.9885 (8,4)	984.9455 (8,4)	892.0460 (8,4)	748.2919 (8,4)	553.3334 (6,8)
	$p_{\text{lower}}$	420.2088 (2,6)	401.8935 (2,6)	367.8251 (2,6)	318.0161 (2,6)	252.4863 (2,6)
Loại 2a	$p_{\text{upper}}$	1884.2215 (12,2)	1806.6467 (12,2)	1634.6992 (12,2)	1368.3791 (12,2)	1007.6865 (12,2)
	$p_{\text{lower}}$	556.0087 (2,7)	536.7491 (2,7)	496.4476 (2,7)	435.0892 (2,7)	352.6234 (2,7)
Loại 2b	$p_{\text{upper}}$	962.2595 (8,5)	922.7552 (8,5)	835.6489 (8,5)	700.9435 (8,5)	518.5824 (7,7)
	$p_{\text{lower}}$	394.2554 (2,6)	377.0162 (2,6)	345.3452 (2,6)	299.2551 (2,6)	238.7683 (2,6)
Loại 3	$p_{\text{upper}}$	945.7243 (8,5)	906.9270 (8,5)	821.3684 (8,5)	689.0515 (8,5)	509.9844 (8,5)
	$p_{\text{lower}}$	389.5675 (2,6)	372.8021 (2,6)	341.9033 (2,6)	296.8834 (2,6)	236.7984 (3,7)

Bảng 3.4. Ảnh hưởng của các mô hình phân bố xấp và  $e_0$  đối với tải tới hạn.

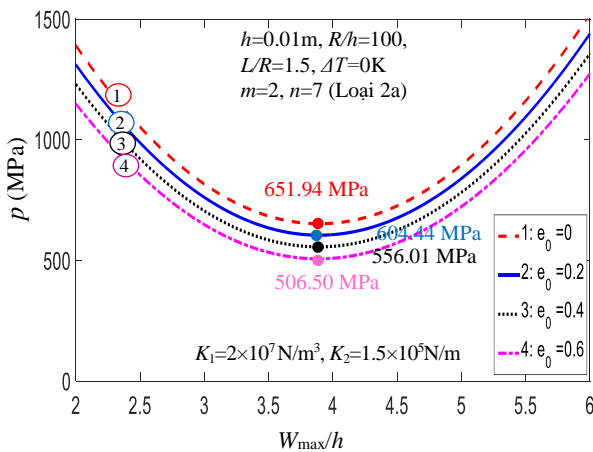
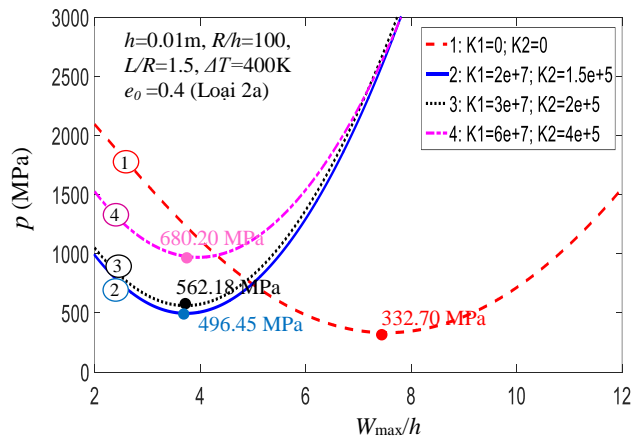
$$K_1=2 \times 10^7 \text{N/m}^3, K_2=1.5 \times 10^5 \text{N/m}, \Delta T=0\text{K}, h=0.01\text{m}, R/h=100, L/R=1.5$$

$p_{cr}$ (MPa)	$e_0=0$	$e_0=0.2$	$e_0=0.4$	$e_0=0.6$	$e_0=0.8$	
Loại 1	$p_{upper}$	1280.7581 (8,5)	1154.5314 (8,4)	1026.9885 (8,4)	897.1881 (8,2)	765.0733 (8,1)
	$p_{lower}$	480.4851 (2,6)	450.3985 (2,6)	420.2088 (2,6)	389.8540 (2,6)	359.2093 (2,6)
Loại 2a	$p_{upper}$	2248.4416 (11,5)	2070.8002 (12,1)	1884.2215 (12,2)	1689.4485 (12,5)	1479.3408 (13,1)
	$p_{lower}$	651.9433 (2,7)	604.4449 (2,7)	556.0087 (2,7)	506.5046 (2,7)	455.7658 (2,7)
Loại 2b	$p_{upper}$	1280.7581 (8,5)	1125.0446 (8,5)	962.2595 (8,5)	787.0060 (9,1)	589.4174 (9,1)
	$p_{lower}$	480.4851 (2,6)	438.7521 (2,6)	394.2554 (2,6)	345.3101 (2,6)	279.6293 (3,7)
Loại 3	$p_{upper}$	1280.7581 (8,5)	1117.3893 (8,5)	945.7243 (8,5)	760.8387 (9,1)	550.4792 (9,1)
	$p_{lower}$	480.4851 (2,6)	436.1819 (2,6)	389.5675 (2,6)	339.3120 (2,6)	271.1053 (3,7)

Bảng 3.5. Ảnh hưởng của các mô hình phân bố độ xấp và nền đối với tải tới hạn.

$$e_0=0.4, \Delta T=400\text{K}, h=0.01\text{m}, R/h=100, L/R=1.5$$

$p_{cr}$ (MPa)		Loại 1	Loại 2a	Loại 2b	Loại 3
$K_1=0 \times 10^7 \text{N/m}^3$	$p_{upper}$	869.8867 (6,8)	1616.4482 (8,12)	813.5287 (5,9)	799.2111 (5,9)
	$p_{lower}$	166.4448 (1,4)	332.7015 (1,5)	154.4963 (1,4)	151.7561 (1,4)
$K_1=3 \times 10^7 \text{N/m}^3$	$p_{upper}$	879.3236 (8,4)	1621.1720 (12,2)	822.2151 (8,5)	807.9566 (8,5)
	$p_{lower}$	378.9283 (2,6)	506.7499 (2,7)	356.4994 (2,6)	353.3507 (2,6)
$K_1=3 \times 10^7 \text{N/m}^3$	$p_{upper}$	900.4555 (8,4)	1641.2985 (12,2)	843.9834 (8,5)	829.7247 (8,5)
	$p_{lower}$	423.9103 (2,6)	562.1758 (2,7)	398.1096 (3,7)	392.9304 (3,7)
$K_1=6 \times 10^7 \text{N/m}^3$	$p_{upper}$	909.8659 (8,4)	1646.0016 (12,2)	852.7084 (8,5)	838.4686 (9,1)
	$p_{lower}$	482.7851 (3,7)	640.4236 (3,8)	451.0212 (3,7)	446.3217 (3,7)
$K_1=6 \times 10^7 \text{N/m}^3$	$p_{upper}$	930.9903 (8,4)	1666.1278 (12,2)	872.9946 (9,1)	858.5242 (9,1)
	$p_{lower}$	516.8979 (3,7)	680.1999 (3,6)	485.1601 (3,7)	480.4448 (3,7)

Hình 3.5. Ảnh hưởng của  $e_0$  đối với đường cong  $p - W_{max}/h$ Hình 3.6. Ảnh hưởng của nền đối với đường cong  $p - W_{max}/h$

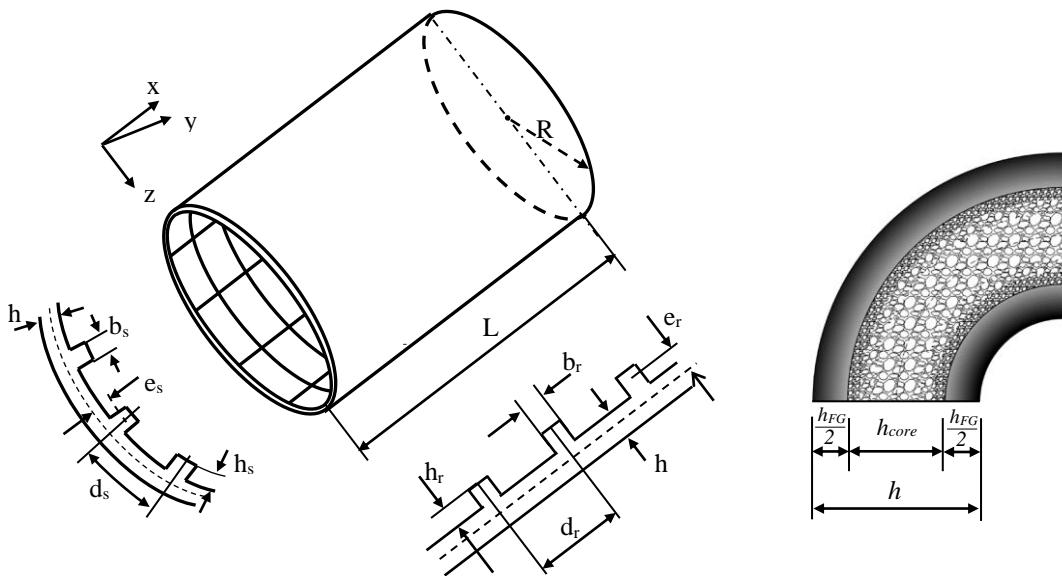


Ảnh hưởng của các hệ số nền đàn hồi  $K_1$  và  $K_2$  đến tải trọng tới hạn trên và dưới của vỏ trụ FGP được mô tả trong Bảng 3.5 và Hình 3.6. Quan sát thấy, tải nén dọc trục tới hạn trên và dưới của vỏ tăng khi các tham số  $K_1$  và  $K_2$  riêng biệt tăng hoặc  $K_1$  và  $K_2$  cùng tăng.

### 3.3. Phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu nén dọc trục

#### 3.3.1. Vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu nén dọc trục

Xét vỏ trụ sandwich FGP bán kính mặt giữa là  $R$ , chiều dày là  $h$  và chiều dài là  $L$ , vỏ trụ có gân trục giao gia cường chịu nén dọc trục, trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi. Vỏ trụ được xác định trong một hệ tọa độ  $xyz$  có mặt phẳng  $(x, y)$  trùng với mặt giữa của vỏ, tọa độ chiều dày của vỏ  $z$  ( $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ ) như được mô tả trong Hình 3.7. Vỏ trụ sandwich FGP ba lớp, gồm một lớp lõi xốp FG có mô hình phân bố xốp đối xứng (bọt kim loại) ở giữa, và hai lớp phủ FGM. Các lớp phủ mặt FGM là mỏng, trong khi lớp lõi xốp tương đối dày. Độ dày lớp lõi xốp là  $h_{core}$ , độ dày của mỗi lớp phủ mặt FGM là  $\frac{h_{FG}}{2}$  ( $h = h_{core} + h_{FG}$ ). Gân trục giao FGM gia cường hình chữ nhật có chiều rộng, chiều cao và khoảng cách các gân như mô tả trong Hình 3.7. Giả thiết các lớp được liên kết là hoàn hảo (tức bỏ qua sự bong tách giữa các lớp).



Hình 3.7. Mô hình vỏ trụ sandwich FGP có gân trục giao gia cường

Mô đun đàn hồi Young và hệ số giãn nở nhiệt của vỏ trụ sandwich FGP được xác định như sau

$$\begin{pmatrix} E_{sh} \\ \alpha_{sh} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} E_c \\ \alpha_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{mc} \\ \alpha_{mc} \end{pmatrix} \left( \frac{2z + h_{FG} + h_{core}}{h_{FG}} \right)^k, & -\frac{h_{FG} + h_{core}}{2} \leq z \leq -\frac{h_{core}}{2} \\ \begin{pmatrix} E_m \\ \alpha_m \end{pmatrix} \left[ 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi z}{h_{core}} \right) \right], & -\frac{h_{core}}{2} \leq z \leq \frac{h_{core}}{2} \\ \begin{pmatrix} E_c \\ \alpha_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{mc} \\ \alpha_{mc} \end{pmatrix} \left( \frac{-2z + h_{FG} + h_{core}}{h_{FG}} \right)^k, & \frac{h_{core}}{2} \leq z \leq \frac{h_{FG} + h_{core}}{2} \end{cases} \quad (3.21)$$

Hai trường hợp gân gia cường được nghiên cứu, mô đun đàn hồi Young và hệ số giãn nở nhiệt được xác định như sau

**Trường hợp 1:** Gân được thiết kế bên trong vỏ (gân trong)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} E_s \\ \alpha_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_c \\ \alpha_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{mc} \\ \alpha_{mc} \end{pmatrix} \left( \frac{2z - h}{2h_s} \right)^{k_2}, & \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_s \\ \begin{pmatrix} E_r \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_c \\ \alpha_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{mc} \\ \alpha_{mc} \end{pmatrix} \left( \frac{2z - h}{2h_r} \right)^{k_3}, & \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_r \end{cases} \quad (3.22)$$

**Trường hợp 2:** Gân được thiết kế bên ngoài vỏ (gân ngoài)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} E_s \\ \alpha_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_c \\ \alpha_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{mc} \\ \alpha_{mc} \end{pmatrix} \left( -\frac{2z + h}{2h_s} \right)^{k_2}, & -\frac{h}{2} - h_s \leq z \leq -\frac{h}{2} \\ \begin{pmatrix} E_r \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_c \\ \alpha_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{mc} \\ \alpha_{mc} \end{pmatrix} \left( -\frac{2z + h}{2h_r} \right)^{k_3}, & -\frac{h}{2} - h_r \leq z \leq -\frac{h}{2} \end{cases} \quad (3.23)$$

trong đó

$m, c, sh$  và  $s, r$  lần lượt là chỉ số biểu thị tính chất của kim loại, gồm, vỏ, gân dọc, gân vòng;

$E_m, E_c$  là mô đun đàn hồi Young của kim loại, gồm:  $E_{mc} = E_m - E_c, E_{cm} = E_c - E_m$ ;

$\alpha_m, \alpha_c$  là hệ số giãn nở nhiệt của kim loại, gồm:  $\alpha_{mc} = \alpha_m - \alpha_c, \alpha_{cm} = \alpha_c - \alpha_m$ ;

$E_{sh}, E_s, E_r$  lần lượt là mô đun đàn hồi Young của vỏ, gân dọc, gân vòng;

$\alpha_{sh}, \alpha_s, \alpha_r$  lần lượt là hệ số giãn nở nhiệt của vỏ, gân dọc, gân vòng;

$k, k_2, k_3$  lần lượt là chỉ số tỉ phần thể tích của vỏ trụ, gân dọc và gân vòng ( $k \geq 0; k_2 \geq 0; k_3 \geq 0$ );

$e_0$  là hệ số mật độ lỗ rỗng ( $0 \leq e_0 < 1$ );

$\frac{h_{FG}}{2}$  là độ dày của mỗi lớp phủ mặt FGM;

$h_{core}$  là độ dày của lớp lõi xốp FG;

$h_s, h_r$  lần lượt là độ dày của gân dọc và gân vòng;

$b_s, b_r$  lần lượt là chiều rộng của gân dọc, gân vòng;

$d_s, d_r$  lần lượt là chiều rộng của gân dọc, gân vòng;

Hệ số Poisson được coi là không thay đổi [88],  $\nu_{sh} = \nu_r = \nu_s = \nu = const$ .

### 3.3.2. Các phương trình cơ bản

Dựa trên lý thuyết vỏ Donnell với tính phi tuyến hình học von-Karman, các thành phần biến dạng ở một điểm cách mặt giữa một khoảng  $z$  của vỏ trụ FGP được xác định theo biểu thức (2.3).

Các thành phần  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  được xác định qua các thành phần chuyển vị  $u, v, w$  như sau [46, 82]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} + \frac{w_{,x}^2}{2} \\ v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{w_{,y}^2}{2} \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,xy} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

trong đó

$\varepsilon_x^0$  và  $\varepsilon_y^0$  là các thành phần biến dạng pháp tuyến;

$\gamma_{xy}^0$  là biến dạng trượt trong mặt phẳng ở mặt giữa ( $z=0$ ) của vỏ;

$u, v, w$  lần lượt là các thành phần chuyển vị theo phương  $x, y, z$ ;

$k_x, k_y, k_{xy}$ , là các thành phần độ cong uốn, xoắn.

Phương trình tương thích biến dạng - chuyển vị là

$$\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = - \frac{1}{R} w_{,xx} + w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} \quad (3.25)$$

Theo định luật Hooke có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ ( $\Delta T = T - T_0$ ), các thành phần ứng suất vỏ và gân gia cường được xác định như sau

$$\begin{aligned} \sigma_x^{sh} &= \frac{E_{sh}}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) - \frac{E_{sh} \alpha_{sh}}{1-\nu} \Delta T; & \sigma_y^{sh} &= \frac{E_{sh}}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) - \frac{E_{sh} \alpha_{sh}}{1-\nu} \Delta T; \\ \sigma_{xy}^{sh} &= \frac{E_{sh}}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^s &= E_s \varepsilon_x - E_s \alpha_s \Delta T \\ \sigma_y^r &= E_r \varepsilon_y - E_r \alpha_r \Delta T\end{aligned}\quad (3.27)$$

Sử dụng kỹ thuật san gân Lekhnitskii, các thành phần nội lực của vỏ trụ FGP là [81]

$$\begin{aligned}N_x &= C_{11} \varepsilon_x^0 + C_{12} \varepsilon_y^0 + C_{14} k_x + C_{15} k_y - \phi_1 - \phi_{1x}^T \\ N_y &= C_{12} \varepsilon_x^0 + C_{22} \varepsilon_y^0 + C_{24} k_x + C_{25} k_y - \phi_1 - \phi_{1y}^T \\ N_{xy} &= C_{33} \gamma_{xy}^0 + C_{36} k_{xy}\end{aligned}\quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}M_x &= C_{14} \varepsilon_x^0 + C_{24} \varepsilon_y^0 + C_{44} k_x + C_{45} k_y - \phi_2 - \phi_{2x}^T \\ M_y &= C_{15} \varepsilon_x^0 + C_{25} \varepsilon_y^0 + C_{45} k_x + C_{55} k_y - \phi_2 - \phi_{2y}^T \\ M_{xy} &= C_{63} \gamma_{xy}^0 + C_{66} k_{xy}\end{aligned}\quad (3.29)$$

trong đó, hệ số độ cứng  $C_{ij}$ , và các thông số nhiệt của vỏ và gân ( $\phi_i, \phi_{ij}^T$ ) xác định theo phụ lục A

Từ biểu thức (3.28), ta có

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= C_{22}^* N_x - C_{12}^* N_y + C_{14}^* k_x + C_{15}^* k_y + C_{16}^* \phi_1 + C_{22}^* \phi_{1x}^T - C_{12}^* \phi_{1y}^T \\ \varepsilon_y^0 &= -C_{12}^* N_x + C_{11}^* N_y + C_{24}^* k_x + C_{25}^* k_y + C_{26}^* \phi_1 - C_{12}^* \phi_{1x}^T + C_{11}^* \phi_{1y}^T \\ \gamma_{xy}^0 &= C_{33}^* N_{xy} - C_{36}^* k_{xy}\end{aligned}\quad (3.30)$$

Thế  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  từ biểu thức (3.30) vào (3.29), ta có

$$\begin{aligned}M_x &= D_{14}^* N_x + D_{24}^* N_y + D_{44}^* k_x + D_{45}^* k_y + D_{46}^* \phi_1 + D_{14}^* \phi_{1x}^T + D_{24}^* \phi_{1y}^T - \phi_2 - \phi_{2x}^T \\ M_y &= D_{15}^* N_x + D_{25}^* N_y + D_{54}^* k_x + D_{55}^* k_y + D_{56}^* \phi_1 + D_{15}^* \phi_{1x}^T + D_{25}^* \phi_{1y}^T - \phi_2 - \phi_{2y}^T \\ M_{xy} &= D_{63}^* N_{xy} + D_{66}^* k_{xy}\end{aligned}\quad (3.31)$$

trong đó, các thành phần  $C_{ij}^*, D_{ij}^*$  được xác định theo phụ lục B.

Dựa trên lý thuyết vỏ Donnell, các biểu thức cân bằng phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP bao quanh bởi nền đàn hồi theo mô hình Pasternak với các hệ số nền  $K_1, K_2$  được xác định là [82, 83]

$$\begin{aligned}N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0\end{aligned}\quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + \frac{N_y}{R} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} + \\ + K_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) - K_1 w = 0\end{aligned}\quad (3.33)$$

Sử dụng hàm ứng suất có dạng

$$N_x = \varphi_{,yy}, \quad N_y = \varphi_{,xx}, \quad N_{xy} = -\varphi_{,xy}.\quad (3.34)$$

Thay  $k_x, k_y, k_{xy}$  từ biểu thức (3.24) vào (3.31), và thay  $M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}$  từ biểu thức (3.31), (3.34) vào (3.33), ta có

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}w_{,xxxx} + \alpha_{12}w_{,xxyy} + \alpha_{13}w_{,yyyy} + \alpha_{14}\varphi_{,xxxx} + \alpha_{15}\varphi_{,xxyy} + \alpha_{16}\varphi_{,yyyy} \\ & + \frac{1}{R}\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy}w_{,xx} + \varphi_{,xx}w_{,yy} - 2\varphi_{,xy}w_{,xy} + K_2(w_{,xx} + w_{,yy}) - K_1w = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Thế  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  từ biểu thức (3.30) vào 3.24), ta thu được

$$\beta_{11}\varphi_{,xxxx} + \beta_{12}\varphi_{,xxyy} + \beta_{13}\varphi_{,yyyy} + \beta_{14}w_{,xxxx} + \beta_{15}w_{,xxyy} + \beta_{16}w_{,yyyy} - w_{,yy}^2 + w_{,xx}w_{,yy} + \frac{1}{R}w_{,xx} = 0 \quad (3.36)$$

trong đó, các thành phần  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  được xác định theo phụ lục C.

Sử dụng biểu thức (3.35) và (3.36) có thể phân tích ứng xử phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường, được bao quanh bởi nền đàn hồi trong môi trường nhiệt, chịu nén đều dọc trục.

### 3.3.3. Điều kiện biên và phương pháp giải

Xét vỏ trụ sandwich FGP có điều kiện biên tựa đơn tại  $x=0; x=L$  chịu nén đều dọc trục. Độ võng  $w$  của vỏ trụ được xác định theo biểu thức (3.6)

Thay biểu thức (3.6) vào (3.36), ta có

$$\varphi = B_1 \cos 2\alpha x + B_2 \cos 2\beta y + B_3 \sin \alpha x \sin \beta y + B_4 \sin 3\alpha x \sin \beta y - \frac{1}{2}p\varphi y^2 - \frac{1}{2}\sigma_{0y}hx^2 \quad (3.37)$$

trong đó  $B_1 = a_1f_2 + a_2f_1^2; B_2 = a_3f_1^2; B_3 = a_4f_1f_2 + a_5f_1; B_4 = a_6f_1f_2.$

với

$$\begin{aligned} a_1 &= (4\beta_{14}\alpha^4 - \alpha^2/R) / (8\beta_{11}\alpha^4); & a_2 &= \alpha^2\beta^2 / (32\beta_{11}\alpha^4); \\ a_3 &= \alpha^2\beta^2 / (32\beta_{13}\beta^4); & a_4 &= -\alpha^2\beta^2 / (\beta_{11}\alpha^4 + \beta_{12}\alpha^2\beta^2 + \beta_{13}\beta^4); \\ a_5 &= -(\beta_{14}\alpha^4 + \beta_{15}\alpha^2\beta^2 + \beta_{16}\beta^4 - \alpha^2/R) / (\beta_{11}\alpha^4 + \beta_{12}\alpha^2\beta^2 + \beta_{13}\beta^4); \\ a_6 &= \alpha^2\beta^2 / (81\beta_{11}\alpha^4 + 9\beta_{12}\alpha^2\beta^2 + \beta_{13}\beta^4). \end{aligned}$$

Thay  $w$  và  $\varphi$  từ biểu thức (3.6) và (3.37) vào (3.35), và áp dụng phương pháp Galerkin, ta được

$$\sigma_{0y} = -\frac{RK_1(f_2 + 2f_0)}{2h} \quad (3.38)$$

$$f_1^2 = \frac{p\alpha^2 + \sigma_{0y}h\beta^2 - [H_{01} + H_{04}f_2^2 + H_{05}f_2 + K_2(\alpha^2 + \beta^2) + K_1]}{H_{03}} \quad (3.39)$$

$$H_{06}f_2 + 8\alpha^2f_2ph + H_{07}f_1^2 + H_{08}f_1^2f_2 - 8\frac{\sigma_{0y}h}{R} - 8K_2\alpha^2f_2 - 6K_1f_2 - 8K_1f_0 = 0 \quad (3.40)$$

trong đó

$$\begin{aligned}
H_{01} &= - \left[ \alpha_{11} \alpha^4 + \alpha_{12} \alpha^2 \beta^2 + \alpha_{13} \beta^4 + a_5 \left( \alpha_{14} \alpha^4 + \alpha_{15} \alpha^2 \beta^2 + \alpha_{16} \beta^4 - \frac{\alpha^2}{R} \right) \right]; \\
H_{03} &= 2\alpha^2 \beta^2 (a_2 + a_3), \quad H_{04} = -\alpha^2 \beta^2 (a_4 - a_6); \\
H_{05} &= - \left[ a_4 \left( \alpha_{14} \alpha^4 + \alpha_{15} \alpha^2 \beta^2 + \alpha_{16} \beta^4 - \frac{\alpha^2}{R} \right) + \alpha^2 \beta^2 a_5 - 2\alpha^2 \beta^2 a_1 \right]; \\
H_{06} &= 8\alpha^2 \left( 4\alpha_{11} \alpha^2 - 8\alpha^2 \alpha_{14} a_1 + \frac{2a_1}{R} \right), \quad H_{07} = 4 \left( a_5 \beta^2 - 16\alpha^2 \alpha_{14} a_2 + \frac{4a_2}{R} \right) \alpha^2; \\
H_{08} &= 4(a_4 - a_6) \alpha^2 \beta^2.
\end{aligned}$$

Điều kiện chu vi kín của vỏ trụ là [46, 87]

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L v_{,y} dx dy = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left( \varepsilon_y^0 + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) dx dy = 0 \quad (3.41)$$

Từ các biểu thức (3.30), (3.34), (3.6) và (3.41), suy ra

$$8C_{12}^* ph - 8C_{11}^* \sigma_{0y} h + \frac{4}{R} (2f_0 + f_2) - \beta^2 f_1^2 + 8(C_{26}^* \phi_1 - C_{12}^* \phi_{1x}^T + C_{11}^* \phi_{1y}^T) = 0 \quad (3.42)$$

Thay  $\sigma_{0y}$  và  $f_1^2$  từ biểu thức (3.38), (3.39) vào (3.42), ta được

$$f_0 = L_{01} ph + L_{02} + L_{03} f_2 + L_{04} f_2^2 + 8L_0 (C_{26}^* \phi_1 - C_{12}^* \phi_{1x}^T + C_{11}^* \phi_{1y}^T) \quad (3.43)$$

Thay  $f_0$  từ biểu thức (3.43) và  $\sigma_{0y}$  từ biểu thức (3.38) vào (3.22), ta được

$$f_1^2 = L_{11} ph + L_{12} + L_{13} f_2 + L_{14} f_2^2 - \frac{8RK_1 \beta^2 L_0}{H_{03}} (C_{26}^* \phi_1 - C_{12}^* \phi_{1x}^T + C_{11}^* \phi_{1y}^T) \quad (3.44)$$

Thay  $f_0$  từ biểu thức (3.43) vào (3.38), ta thu được

$$\sigma_{0y} = -\frac{R}{h} K_1 \left[ f_2 / 2 + L_{01} ph + L_{02} + L_{03} f_2 + L_{04} f_2^2 + 8L_0 (C_{26}^* \phi_1 - C_{12}^* \phi_{1x}^T + C_{11}^* \phi_{1y}^T) \right] \quad (3.45)$$

trong đó

$$L_0 = - \frac{1}{\left[ 8C_{11}^* RK_1 + \frac{8}{R} + \frac{\beta^4}{H_{03}} RK_1 \right]}; \quad L_{01} = L_0 \left( 8C_{12}^* - \frac{\beta^2 \alpha^2}{H_{03}} \right);$$

$$L_{02} = L_0 \frac{\beta^2}{H_{03}} \left[ H_{01} + K_2 (\alpha^2 + \beta^2) + K_1 \right];$$

$$L_{03} = L_0 \left( 4C_{11}^* RK_1 + \frac{4}{R} + \frac{\beta^4 RK_1}{2H_{03}} + \frac{\beta^2 H_{05}}{H_{03}} \right); \quad L_{04} = L_0 \frac{\beta^2 H_{04}}{H_{03}};$$

$$L_{11} = \frac{1}{H_{03}} (\alpha^2 - RK_1 \beta^2 L_{01}); \quad L_{12} = -\frac{1}{H_{03}} \left[ RK_1 \beta^2 L_{02} + H_{01} + K_2 (\alpha^2 + \beta^2) + K_1 \right];$$

$$L_{13} = -\frac{1}{H_{03}} \left[ RK_1 \beta^2 (1/2 + L_{03}) + H_{05} \right]; L_{14} = -\frac{1}{H_{03}} (RK_1 \beta^2 L_{04} + H_{04}).$$

Thay thế  $f_0, \sigma_{0y}, f_1$  từ các biểu thức (3.43)-(3.45) vào (3.40), ta được

$$p = -\frac{1}{\left[ H_{07} L_{11} + (8\alpha^2 + H_{08} L_{11}) f_2 \right] h} \left[ H_{07} L_{12} \right. \\ \left. + (H_{06} + H_{07} L_{13} + H_{08} L_{12} - 8K_2 \alpha^2 - 4K_1) f_2 + (H_{07} L_{14} + H_{08} L_{13}) f_2^2 \right. \\ \left. + H_{08} L_{14} f_2^3 - 8RK_1 \beta^2 L_0 \left( \frac{H_{07}}{H_{03}} + \frac{H_{08}}{H_{03}} f_2 \right) (C_{26}^* \phi_1 - C_{12}^* \phi_{1x}^T + C_{11}^* \phi_{1y}^T) \right] \quad (3.46)$$

Biểu thức (3.46) được sử dụng để xác định tải trọng nén dọc trục tới hạn và phân tích quan hệ tải - độ võng đáp ứng sau tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường bao quanh bởi nền đàn hồi trong môi trường nhiệt, chịu nén đều dọc trục.

Từ biểu thức (3.46), cho  $f_2 \rightarrow 0$  ta được tải tới hạn trên

$$p_{upper} = -\frac{1}{H_{03} L_{11} h} \left[ H_{03} L_{12} - 8RK_1 \beta^2 L_0 (C_{26}^* \phi_1 - C_{12}^* \phi_{1x}^T + C_{11}^* \phi_{1y}^T) \right] \quad (3.47)$$

Nếu nhiệt độ môi trường xung quanh tăng đều ( $\Delta T = T_f - T_i = const$ ), các thông số nhiệt  $\phi_1, \phi_{1x}, \phi_{1y}$  được tính toán trong Phụ lục A.

Từ biểu thức (3.6), độ võng lớn nhất của vỏ trụ là (3.19).

Thay thế  $f_0, f_1$  từ các biểu thức (3.43)-(3.44) vào (3.19), ta có

$$W_{max} = L_{01} p h + L_{02} + (L_{03} + 1) f_2 + L_{04} f_2^2 + 8L_0 (C_{26}^* \phi_1 - C_{12}^* \phi_{1x}^T + C_{11}^* \phi_{1y}^T) \\ + \left[ L_{11} p h + L_{12} + L_{13} f_2 + L_{14} f_2^2 - \frac{8RK_1 \beta^2 L_0}{H_{03}} (C_{26}^* \phi_1 - C_{12}^* \phi_{1x}^T + C_{11}^* \phi_{1y}^T) \right]^{1/2} \quad (3.48)$$

Sử dụng biểu thức (3.46), (3.47) và (3.48) có thể xác định giá trị tải trọng tới hạn trên và phân tích quan hệ tải - độ võng lớn nhất của vỏ trụ sandwich FGP có gân FGM gia cường chịu nén dọc trục, trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi.

Độ co ngót trung bình của vỏ theo phương  $x$  được xác định là

$$\bar{\Delta}_x = -\frac{1}{2\pi RL} \int_0^{2\pi R} \int_0^L u_{,x} dx dy = -\frac{1}{2\pi RL} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left( \varepsilon_x^0 - \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) dx dy \quad (3.49)$$

Từ các biểu thức (3.30), (3.34), (3.6) và (3.49), suy ra

$$\bar{\Delta}_x = C_{22}^* p h - C_{12}^* \sigma_{0y} h + \frac{1}{8} f_1^2 \alpha^2 + \frac{1}{4} f_2^2 \alpha^2 - (C_{16}^* \phi_1 + C_{22}^* \phi_{1x}^T - C_{12}^* \phi_{1y}^T) \quad (3.50)$$

Thay thế  $f_1^2$  và  $\sigma_{0y}$  từ biểu thức (3.44) và (3.45) vào (3.50), ta có

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}_x = & ph \left[ C_{22}^* + C_{12}^* RK_1 L_{01} + \frac{1}{8} \alpha^2 L_{11} \right] + f_2 \left[ \frac{C_{12}^* RK_1}{2} + C_{12}^* RK_1 L_{03} + \frac{1}{8} \alpha^2 L_{13} \right] + \\
& + f_2^2 \left[ C_{12}^* RK_1 L_{04} + \frac{1}{8} \alpha^2 L_{14} + \frac{1}{4} \alpha^2 \right] + \left[ C_{12}^* RK_1 L_{02} + \frac{1}{8} \alpha^2 L_{12} \right] + \\
& + \left( C_{26}^* \phi_1 - C_{12}^* \phi_{1x}^T + C_{11}^* \phi_{1y}^T \right) \left[ 8L_0 C_{12}^* RK_1 - \frac{RK_1 \alpha^2 \beta^2 L_0}{H_{03}} \right] - \left( C_{16}^* \phi_1 + C_{22}^* \phi_{1x}^T - C_{12}^* \phi_{1y}^T \right)
\end{aligned} \quad (3.51)$$

Sử dụng biểu thức (3.46) và (3.51) có thể phân tích ảnh hưởng của các tham số đầu vào đến quan hệ tải - độ co của vỏ trụ FGP có gân FGM gia cường chịu nén đều dọc trục trong môi trường nhiệt, được bao quanh bởi nền đàn hồi.

Xét trường hợp  $f_1 = f_2 = 0$ , thay vào biểu thức (3.50) ta được

$$\bar{\Delta}_x = C_{22}^* ph - C_{12}^* \sigma_{0y} h - \left( C_{16}^* \phi_1 + C_{22}^* \phi_{1x}^T - C_{12}^* \phi_{1y}^T \right) \quad (3.52)$$

Biểu thức (3.52) cho thấy khi  $f_1 = 0$  và  $f_2 = 0$ , tồn tại mối quan hệ tuyến tính giữa  $\bar{\Delta}_x$  và  $p$ .

Thay thế  $\sigma_{0y}$  từ biểu thức (3.45) vào (3.52), ta có

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}_x = & \left[ C_{22}^* - \frac{C_{12}^* R^2 K_1}{C_{11}^* K_1 R^2 + 1} \right] ph \\
& - \frac{C_{12}^* R^2 K_1}{C_{11}^* K_1 R^2 + 1} \left( C_{26}^* \phi_1 - C_{12}^* \phi_{1x}^T + C_{11}^* \phi_{1y}^T \right) - \left( C_{16}^* \phi_1 + C_{22}^* \phi_{1x}^T - C_{12}^* \phi_{1y}^T \right)
\end{aligned} \quad (3.53)$$

Sử dụng các biểu thức (3.46), (3.51) và (3.53), ta có thể phân tích quan hệ tải - độ co ngót trung bình sau tới hạn của vỏ trụ FGP có gân gia cường chịu nén đều dọc trục trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi.

Khi vỏ chỉ chịu tải trọng cơ ( $\Delta T = 0$ ), biểu thức (3.46) dẫn đến

$$\begin{aligned}
p = & \frac{-1}{\left[ H_{07} L_{11} + (8\alpha^2 + H_{08} L_{11}) f_2 \right] h} \left[ H_{07} L_{12} + (H_{06} + H_{07} L_{13} + H_{08} L_{12} - 8K_2 \alpha^2 - 4K_1) f_2 \right. \\
& \left. + (H_{07} L_{14} + H_{08} L_{13}) f_2^2 + H_{08} L_{14} f_2^3 \right]
\end{aligned} \quad (3.54)$$

Sử dụng biểu thức (3.54) có thể xác định tải trọng tới hạn và vẽ các đường cong mô tả quan hệ tải trọng - độ võng sau tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu nén dọc trục, bao quanh bởi nền đàn hồi.

Từ biểu thức (3.54), cho  $f_2 \rightarrow 0$ , ta được tải trọng nén dọc trục tới hạn trên của vỏ trụ sandwich FGP không kể đến thành phần tải nhiệt là

$$P_{upper} = \frac{-L_{12}}{hL_{11}} = \frac{\left[ H_{01} + K_2 (\alpha^2 + \beta^2) + K_1 \right] (C_{11}^* RK_1 + 1/R)}{h \left( C_{11}^* RK_1 \alpha^2 + C_{12}^* RK_1 \beta^2 + \alpha^2 / R \right)} \quad (3.55)$$



### 3.3.4. Kết quả tính toán số

#### 3.3.4.1. Nghiên cứu so sánh

Để kiểm chứng độ tin cậy của nghiên cứu, hai so sánh được thực hiện. Kết quả so sánh được thể hiện trong hai Bảng 3.6 và 3.7.

Bảng 3.6. So sánh tải trọng tới hạn  $P_*$  vỏ trụ đẳng hướng không gân gia cường.  $E=70$  Gpa,  $\nu=0.3$ ,  $L=1$  m,  $R=0.5$  m

$P_*$ (N/m)	Brush và Almroth [82] $P_* = P / (2\pi R)$	Dũng và cộng sự [54] $P_* = p_{upper} h$	Luận án (3.55) $P_* = p_{upper} h$
$h=10^{-3}$ m	84731.96674 (20,17)	84731.96675 (20,17)	84 732 (20,17)
$h=2.5 \times 10^{-3}$ m	529575.91256 (14,9)	529575.91258 (14,9)	529 576 (14,9)
$h=5 \times 10^{-3}$ m	2118297.96728 (5,9)*	2118297.96733 (5,9)	2 118 298 (5,9)

\* Mode tới hạn ( $m, n$ ).

Bảng 3.7. So sánh tải trọng tới hạn vỏ trụ đồng nhất đẳng hướng có gân gia cường.  $E=70$  GPa,  $\nu=0.3$ ,  $L=1$  m,  $R=0.5$  m,  $h_s = h_r = 0.01$  m,  $b_s = b_r = 0.0025$  m, 50 gân dọc, 50 gân vòng

$P_*$ (MN/m)	Brush và Almroth [82] $P_* = P / (2\pi R)$	Luận án $P_* = p_{upper} h$
$h= 10^{-3}$ m	0.7057 (5,6)	0.692351 (5,6)
$h= 2.5 \times 10^{-3}$ m	1.4328 (6,7)	1.414724 (6,7)
$h= 5 \times 10^{-3}$ m	3.0906 (6,7)	3.072470 (6,7)
$h= 10^{-3}$ m	1.2897 (6,6)	1.276432 (6,6)
$h= 2.5 \times 10^{-3}$ m	2.1469 (9,4)	2.141014 (9,4)
$h= 5 \times 10^{-3}$ m	3.9551 (9,2)	3.952916 (9,3)

Nghiên cứu so sánh được thực hiện đối với tải trọng tới hạn  $p_*$  ( $P_* = p_{upper} h$ ). Sử dụng biểu thức (3.55), nghiên cứu so sánh thứ nhất được mô tả trong Bảng 3.6 (so sánh kết quả tính toán của luận án với các kết quả được tính toán dựa trên biểu thức (5.50) trong tài liệu của Brush và Almroth [82] và kết quả trong tài liệu [54] đã công bố của nhóm nghiên cứu Đào Văn Dũng và cộng sự). Nghiên cứu so sánh thứ hai được mô tả trong Bảng 3.7 (so sánh kết quả tính toán của luận án với các kết quả được tính toán dựa trên biểu thức (5.78) trong tài liệu của Brush và Almroth [82], và các kết quả đã công bố của nhóm nghiên cứu Đào Huy Bích và cộng sự [89]).

Bảng 3.6 và Bảng 3.7 cho ta thấy, kết quả tính toán theo công thức (3.55) của luận án là tương đồng với các kết quả được tính toán theo tài liệu của Brush và

Almroth [82], và các kết quả trong tài liệu đã công bố [54], [89]. Điều này khẳng định độ tin cậy của phương pháp nghiên cứu được thực hiện trong luận án.

Trong phần tiếp theo, luận án nghiên cứu ảnh hưởng của hệ số độ xoắn, tỉ lệ độ dày lớp lõi xoắn/lớp vỏ, các thông số hình học, nền đàn hồi, gân gia cường và nhiệt độ đến khả năng chịu nén dọc trục của vỏ trụ sandwich FGP. Lớp phủ mặt và gân FGM là hỗn hợp Zirconia (ceramic) và Ti-6Al-4V (metal). Lớp lõi xoắn là Ti-6Al-4V với hệ số Poisson là  $\nu = 0,3$ .

Các số liệu về vỏ và gân được lấy là:  $k=1$ ,  $K_1=2.5 \times 10^7 \text{N/m}^3$ ;  $K_2=2.5 \times 10^5 \text{N/m}$ ,  $h=0.006\text{m}$ ,  $R=0.6\text{m}$ ,  $L=1.2\text{m}$ ,  $b_s=b_r=0.006\text{m}$ ,  $h_s=h_r=0.006\text{m}$ ,  $n_s=n_r=20$  (gân trong);  $e_0=0.5$ ;  $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}=1$ .

### 3.3.3.2. Ảnh hưởng của mode $(m,n)$ và nhiệt độ $\Delta T$

Xét vỏ trụ sandwich FGP chỉ chịu tải cơ ( $\Delta T = 0$ ), sử dụng biểu thức (3.55), Bảng 3.8 mô tả ảnh hưởng của các mode  $(m, n)$  đối với tải nén dọc trục tới hạn dưới của vỏ trụ. Kết quả cho thấy, tải nén tới hạn dưới của vỏ là  $p_{\text{lower}}=444.8195 \text{ MPa}$  tương ứng với mode mất ổn định là  $(m, n) = (3, 6)$ .

Bảng 3.8. Ảnh hưởng của mode  $(m,n)$  đối với tải tới hạn dưới của vỏ trụ sandwich FGP có gia cường gân trong.  $k = 1$ ,  $e_0=0.5$ ;  $\Delta T=0\text{K}$ ,  $K_1=2.5 \times 10^7 \text{N/m}^3$ ,  $K_2=2.5 \times 10^5 \text{N/m}$ ,  $h=0.006\text{m}$ ,  $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}=1$ ,  $R=0.6\text{m}$ ,  $L=1.2\text{m}$ ,  $b_s=b_r=0.006\text{m}$ ,  $h_s=h_r=0.006\text{m}$ ,  $n_s=n_r=20$  (gân trong)

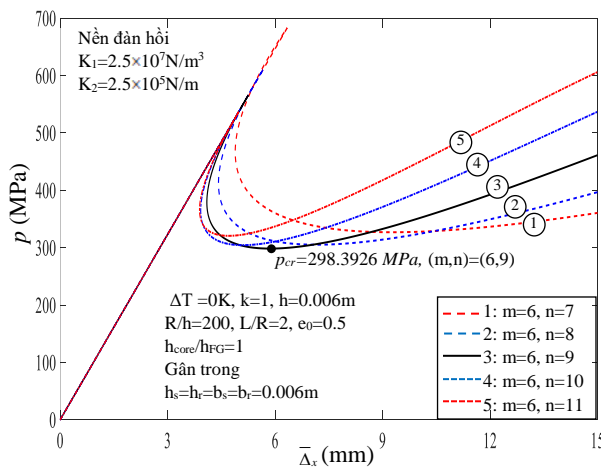
$p_{\text{lower}}$ (MPa)	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
$m=1$	1056.0959	1341.2639	1697.0810	2028.4931	2281.7586
$m=2$	488.3246	485.7881	604.0785	791.4213	1013.8594
$m=3$	583.1489	449.4815	<b>444.8195</b>	519.7857	646.7570
$m=4$	674.5839	534.6185	477.9293	491.3306	557.5451
$m=5$	751.5344	637.7225	567.7078	549.7132	578.8486

Sử dụng các biểu thức (3.54), (3.51) và (3.53), Hình 3.8 thể hiện ảnh hưởng của các mode  $(m, n)$  đối với quan hệ tải – độ co  $\bar{\Delta}_x$ . Sử dụng các biểu thức (3.46) và (3.48), Hình 3.9 thể hiện ảnh hưởng của các mode  $(m, n)$  khác nhau đối với các đường cong quan hệ tải – độ võng  $W_{\text{max}}/h$ .

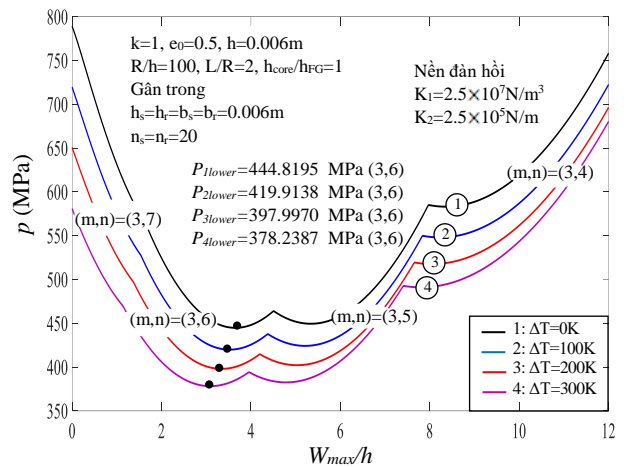
Hình 3.8 cho thấy, các đường quan hệ  $p - \bar{\Delta}_x$  đều bắt đầu từ gốc tọa độ (tải bằng 0 và chưa có biến dạng dọc trục), sau đó vỏ trụ bị co ngay khi bắt đầu đặt tải và ban đầu quan hệ tải và độ co thể hiện sự gia tăng tuyến tính (quan hệ tải - độ co là tuyến tính), xu hướng này tiếp tục tồn tại cho đến khi đạt đến điểm phân nhánh tuyến tính (tải tới hạn trên) thì quan hệ này là phi tuyến. Đường cân bằng sau mất

ổn định được đặc trưng bởi các bước nhảy liên tục ở các mode sau mất ổn định. Ta thấy, trong giai đoạn này khả năng chịu tải của vỏ giảm đi đáng kể cho đến khi đạt đến điểm thấp nhất, sau đó nó tăng dần. Các đặc điểm liên quan đến bước nhảy ở các mode sau mất ổn định trong vỏ trụ không có gân gia cường cũng được quan sát thấy trong nghiên cứu của Huang và Han [46].

Hình 3.9 cho thấy, nếu vỏ trụ chỉ chịu tải cơ ( $\Delta T = 0$ ), tải trọng nén dọc trục tới hạn dưới là  $p_{lower} = 444.8195 \text{ MPa}$  tương ứng với mode mất ổn định  $(m,n)=(3,6)$ . Kết quả này cũng được quan sát thấy trong Bảng 3.8. Ngoài ra, quan sát Hình 3.9 cũng cho thấy, khi  $\Delta T$  tăng các đường cong trở nên thấp hơn, tức là khi tải nhiệt tăng lên khả năng chịu tải trọng nén dọc trục của vỏ trụ giảm đi.



Hình 3.8. Ảnh hưởng của mode  $(m,n)$  đối với  $p - \bar{\Delta}_x$



Hình 3.9. Ảnh hưởng của mode  $(m,n)$  đối với  $p - W_{max}/h$

Bảng 3.9 thể hiện ảnh hưởng của  $\Delta T$  đến tải nén dọc trục tới hạn trên và dưới của vỏ trụ sandwich FGP. Bảng 3.9 cho thấy, khi  $\Delta T$  tăng thì tải trọng tới hạn trên và dưới của vỏ trụ đều giảm. Ví dụ, với  $e_0=0.5$  và  $h_{core}/h_{FG}=1$ , tại  $\Delta T=0K$  tải nén tới hạn dưới  $p_{lower}=444.8195 \text{ MPa}$ , lớn hơn tải nén tới hạn dưới tương ứng khi  $\Delta T=100K$  là  $24.9057 \text{ MPa}$ ,  $\Delta T=200K$  là  $46.8225 \text{ MPa}$  và  $\Delta T=300K$  là  $66.5808 \text{ MPa}$ . Điểm này cũng được quan sát thấy trong Hình 3.10 khi mô tả ảnh hưởng của nhiệt độ  $\Delta T$  đối với quan hệ  $k-p_{lower}$ .

Hình 3.11 cho thấy ảnh hưởng của  $\Delta T$  đối với quan hệ tải - độ co  $\bar{\Delta}_x$ . Quan sát thấy, điểm bắt đầu của các đường thẳng với  $\Delta T \neq 0K$  không xuất phát từ gốc tọa độ. Điều này cho thấy, trường nhiệt độ làm cho vỏ lệch ra ngoài (lệch tâm) trước khi chịu tác dụng của tải cơ. Khi vỏ chịu tải cơ (nén dọc trục) thì độ lệch tâm của nó giảm đi. Khi vượt qua điểm phân nhánh của tải trọng (điểm mất ổn định) ta thấy độ lệch hướng vào trong.

Bảng 3.9. Ảnh hưởng của  $e_0$ ,  $\Delta T$  và  $h_{core}/h_{FG}$  đối với tải tới hạn.  $k=1$ ;  
 $K_1=2.5 \times 10^7 \text{N/m}^3$ ;  $K_2=2.5 \times 10^5 \text{N/m}$ ,  $h=0.006\text{m}$ ;  $R/h=100$ ,  $L/R=2$ ,  $b_s=b_r=0.006\text{m}$ ,  $h_s=$   
 $h_r=0.006\text{m}$ ,  $n_s= n_r=20$  (gân trong)

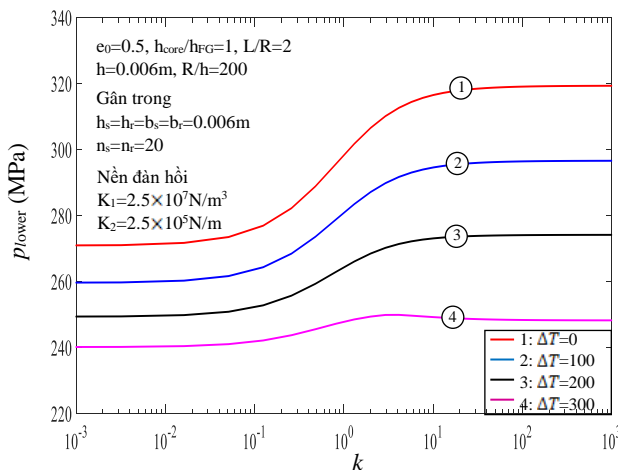
$e_0$	$h_{core}/h_{FG}$	$\Delta T=0^\circ\text{C}$	$\Delta T=100^\circ\text{C}$	$\Delta T=200^\circ\text{C}$	$\Delta T=300^\circ\text{C}$	
0	0	1008.8830 <sup>U</sup> (7,8) *	930.5002 (7,8)	865.9673 (7,8)	812.9389 (7,8)	
		485.4966 <sup>L</sup> (3,6)	454.8715 (3,6)	428.3020 (3,6)	404.5274 (3,6)	
	1	918.2770 (7,8)	855.3936 (7,8)	801.2631 (7,8)	754.4736(7,8)	
		459.0974 (3,6)	433.5096 (3,6)	411.1039 (3,6)	391.1266(3,6)	
	5	831.7304 (7,8)	783.6012 (7,8)	738.8568 (8,8)	697.4964 (8,8)	
		429.6252 (3,6)	409.4680 (3,6)	391.2569 (3,6)	374.7202 (3,6)	
	10	808.0092 (7,8)	763.3362 (8,8)	721.2079 (8,8)	681.3817 (8,8)	
		421.0876 (3,6)	402.4863 (3,6)	385.4445 (3,6)	369.8247 (3,6)	
	$h_{core}=h$	776.1441 (8,8)	736.7857 (8,8)	698.2057 (8,8)	660.3671 (8,8)	
	$h_{FG}=0$	409.8039 (3,6)	393.2525 (3,6)	377.7353 (3,6)	363.2907 (3,6)	
	0.2	0	1008.8830 (7,8)	930.5002 (7,8)	865.9673 (7,8)	812.9389 (7,8)
			485.4966 (3,6)	454.8715 (3,6)	428.3020 (3,6)	404.5274 (3,6)
		1	891.9098(7,8)	830.4216 (7,8)	777.6446 (7,8)	732.1492(7,8)
			453.4157(3,6)	428.1137 (3,6)	405.9160 (3,6)	386.0365(3,6)
5		780.4346 (7,8)	735.0503 (7,8)	693.4261 (7,8)	655.0004 (7,8)	
		416.7413 (3,6)	397.2977 (3,6)	379.7052 (3,6)	363.6545 (3,6)	
10		749.6705 (7,8)	708.7089 (7,8)	670.1449 (7,8)	633.6544 (7,8)	
		405.9320 (3,6)	388.1853 (3,6)	371.9047 (3,6)	356.9172 (3,6)	
$h_{core}=h$		709.6449 (7,8)	674.4234 (7,8)	639.8309 (7,8)	605.4854 (8,8)	
$h_{FG}=0$		391.5429 (3,6)	376.0419 (3,6)	361.4875 (3,6)	347.8864 (3,6)	
0.5		0	1008.8830(7,8)	930.5002 (7,8)	865.9673 (7,8)	812.9389(7,8)
			485.4966(3,6)	454.8715 (3,6)	428.3020 (3,6)	404.5274(3,6)
		1	852.3378(7,8)	792.9259 (7,8)	742.1625 (7,8)	698.5920(7,8)
			444.8195(3,6)	419.9138 (3,6)	397.9970 (3,6)	378.2387(3,6)
	5	703.0580(7,7)	662.0043 (7,7)	624.4954 (7,7)	589.9739(7,7)	
		394.6170(3,5)	376.2685 (3,5)	359.5426 (3,5)	344.1224(3,5)	

10		662.0571(7,8)	625.7740 (7,8)	591.8139 (7,8)	559.8229(7,8)
		379.5683(3,5)	363.1150 (3,5)	347.8607 (3,5)	333.6093(3,5)
$h_{core}=h$		608.0851(7,8)	578.3139 (7,8)	549.1048 (7,8)	520.4165(7,8)
	$h_{FG}=0$	360.0121(3,5)	346.0206 (3,5)	332.6853 (3,5)	319.9671(3,5)
0		1008.8830 (7,8)	930.5002 (7,8)	865.9673 (7,8)	812.9389 (7,8)
		485.4966 (3,6)	454.8715 (3,6)	428.3020 (3,6)	404.5274 (3,6)
1		809.2948(7,7)	752.5210 (7,7)	704.2195 (7,7)	662.9849(7,7)
		434.0196(3,5)	409.5184 (3,5)	388.1156 (3,5)	369.0488(3,5)
0.8	5	617.5391 (7,7)	581.0059 (7,7)	547.9498 (7,7)	517.7885 (7,7)
		364.7869 (3,5)	347.9716 (3,5)	332.6636 (3,5)	318.5121 (3,5)
10		565.8133 (7,7)	534.7376 (7,7)	505.8116 (7,7)	478.6798 (7,7)
		345.6874 (3,5)	331.0054 (3,5)	317.4149 (3,5)	304.6809 (3,5)
$h_{core}=h$		498.9704 (7,7)	474.9458 (7,7)	451.3721 (7,7)	428.1906 (7,7)
	$h_{FG}=0$	320.7715 (3,5)	308.8916 (3,5)	297.5704 (3,5)	286.7387 (3,5)

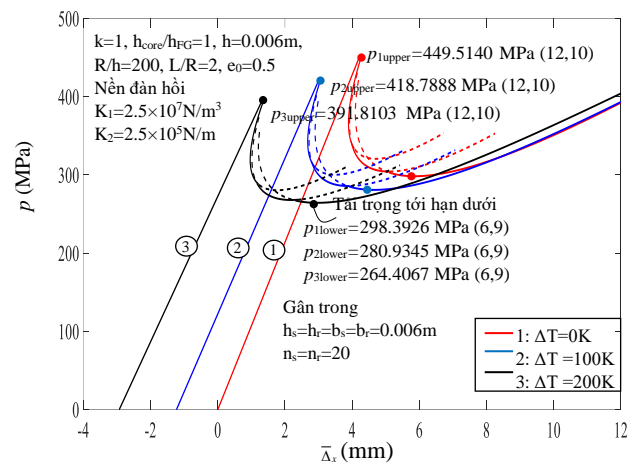
<sup>U</sup> Tải tới hạn trên;

<sup>L</sup> Tải tới hạn dưới;

\* Mode tới hạn ( $m, n$ )



Hình 3.10. Ảnh hưởng của  $\Delta T$  đối với  $p_{lower} - k$

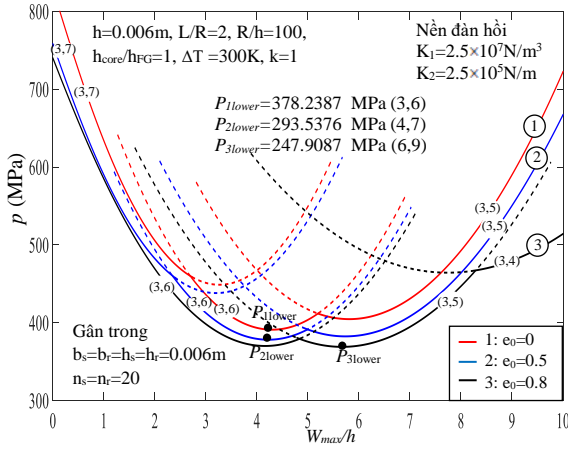


Hình 3.11. Ảnh hưởng của  $\Delta T$  đối với  $p - \bar{\Delta}_x$

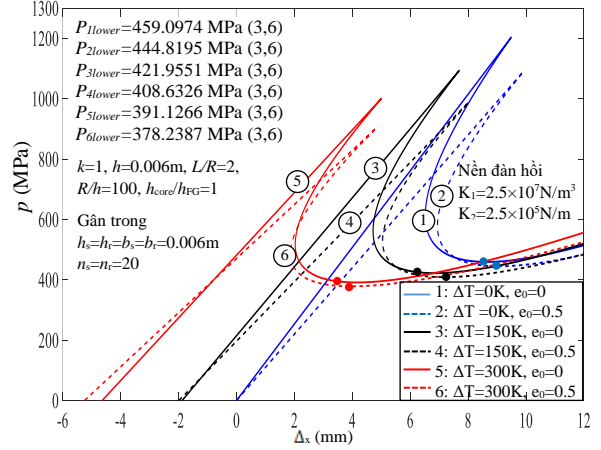
### 3.3.3.3. Ảnh hưởng của tỉ lệ $h_{core}/h_{FG}$ và hệ số độ xấp $e_0$

Bảng 3.9 cho thấy ảnh hưởng của  $h_{core}/h_{FG}$  và hệ số độ xấp  $e_0$  đối với tải trọng tới hạn trên và dưới. Ta thấy rằng, tải tới hạn trên và dưới của vỏ trụ sandwich FGP giảm khi  $h_{core}/h_{FG}$  tăng. Ví dụ, với  $e_0=0.5$  và  $\Delta T=300K$ , tải trọng tới hạn trên

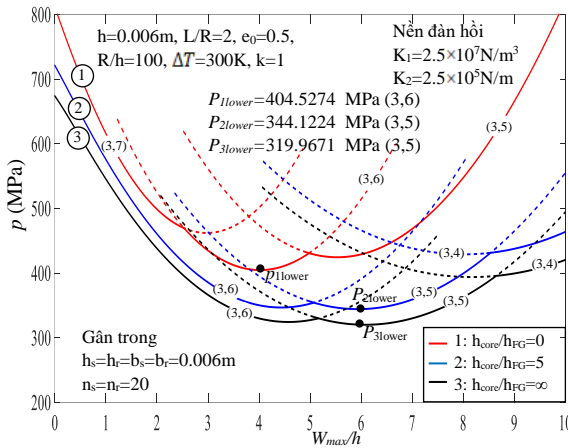
giảm khoảng 56% từ  $p_{upper}=812.9389\text{MPa}$  (với  $h_{core}/h_{FG}=0$ ) đến  $p_{upper}=520.4165\text{MPa}$  (với  $h_{FG}=0, h_{core}=h$ ), và tải trọng tới hạn dưới giảm khoảng 26% từ  $p_{lower}=404.5274\text{MPa}$  (với  $h_{core}/h_{FG}=0$ ) đến  $p_{lower}=319.9671\text{MPa}$  (với  $h_{FG}=0, h_{core}=h$ ).



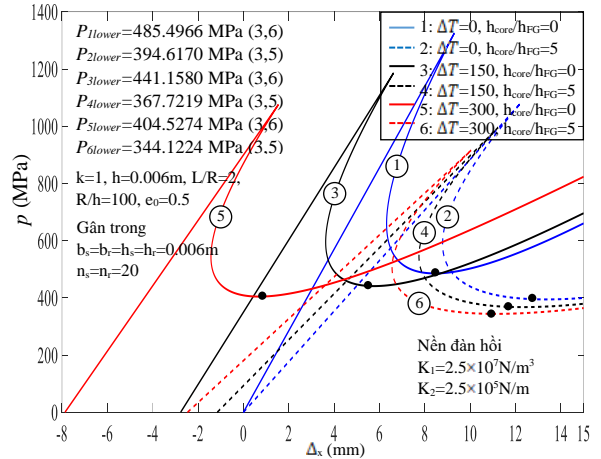
Hình 3.12. Ảnh hưởng của  $e_0$  đối với  $p - W_{max}/h$



Hình 3.13. Ảnh hưởng của  $e_0$  đối với  $p - \bar{\Delta}_x$



Hình 3.14. Ảnh hưởng của  $h_{core}/h_{FG}$  đối với  $p - W_{max}/h$



Hình 3.15. Ảnh hưởng của  $h_{core}/h_{FG}$  đối với  $p - \bar{\Delta}_x$

Bảng 3.9 cũng chỉ ra rằng, tải trọng nén dọc trục tới hạn của vỏ giảm khi hệ số độ xấp  $e_0$  tăng. Ví dụ, với cùng mức tăng tải nhiệt  $\Delta T=300\text{K}$  và tỉ lệ độ dày  $h_{core}/h_{FG}=10$ , tải nén tới hạn trên giảm khoảng 42% từ  $p_{upper}=681.3817\text{MPa}$  (với  $e_0=0$ ) đến  $p_{upper}=478.6798\text{MPa}$  (với  $e_0=0.8$ ). Nhận xét này còn được thể hiện trong các Hình 3.12-3.15 khi mô tả ảnh hưởng của  $e_0$  đến mối quan hệ tải - độ võng  $W_{max}/h$  (Hình 3.12), quan hệ tải - độ co  $\bar{\Delta}_x$  (Hình 3.13), và ảnh hưởng của tỉ lệ độ dày  $h_{core}/h_{FG}$  đến mối quan hệ tải - độ võng  $W_{max}/h$  (Hình 3.14), quan hệ tải - độ co

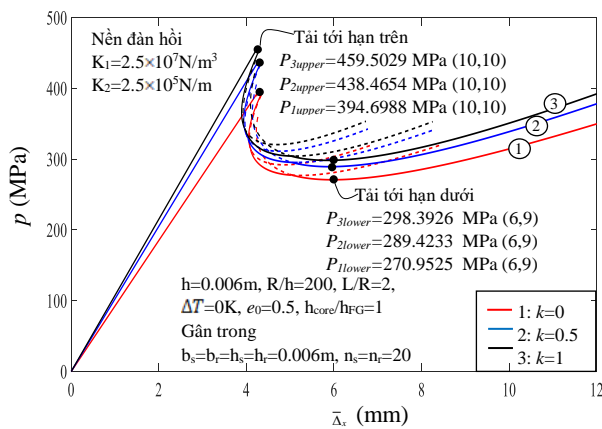
$\bar{\Delta}_x$  (Hình 3.15). Quan sát Hình 3.12 và Hình 3.14 ta thấy, khi  $h_{core}/h_{FG}$  và hệ số độ xấp  $e_0$  tăng lên các đường cong thể hiện tương ứng sẽ thấp hơn, nghĩa là khả năng chịu tải nén dọc trục của vỏ trụ sandwich FGP giảm đi.

### 3.3.3.4. Ảnh hưởng của chỉ số tỉ phần thể tích và nền đàn hồi

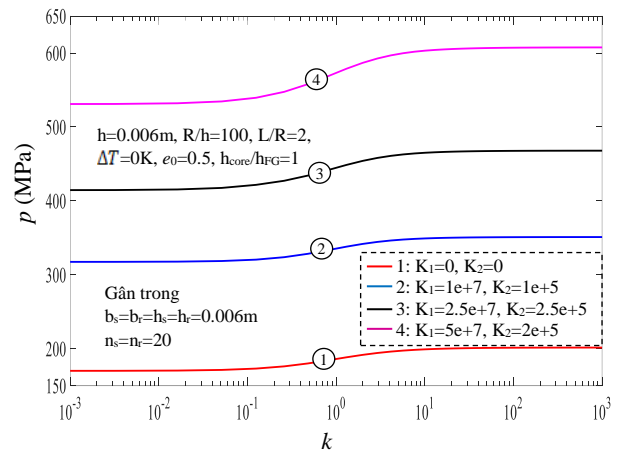
Bảng 3.10 cho thấy ảnh hưởng của  $k$  và các tham số nền đến tải trọng nén dọc trục tới hạn. Ta thấy, tải tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP là nhỏ nhất với  $k=0$  và nó tăng khi  $k$  tăng. Bảng 3.10 cũng chỉ ra rằng khi các tham số nền  $K_1$  và  $K_2$  tăng thì tải nén tới hạn của vỏ cũng tăng và là nhỏ nhất khi  $K_1=K_2=0$  (không nền).

Bảng 3.10. Ảnh hưởng của  $k$  và nền đối với tải trọng tới hạn.  $e_0=0.5$ ,  $h_{core}/h_{FG}=1$ ,  $\Delta T=0^{\circ}\text{C}$ ;  
 $h=0.006\text{m}$ ,  $R=0.6\text{m}$ ,  $L=1.2\text{m}$ ,  $b_s=b_r=0.006\text{m}$ ,  $h_s=h_r=0.006\text{m}$ ,  $n_s=n_r=20$  (gân trong).

Hệ số nền	$P_{cr}$ (MPa)	$k=0$	$k=0.5$	$k=1$	$k=5$
$K_1=0\text{ N/m}^3$	$p_{upper}$	654.3322(6,8)	735.9745(6,8)	776.5078(6,8)	850.0079(6,8)
$K_2=0\text{ N/m}$	$p_{lower}$	170.1913(1,3)	180.5337(1,3)	186.2562(1,3)	197.1048(1,3)
$K_1=2.5 \times 10^7\text{ N/m}^3$	$p_{upper}$	665.9403(7,8)	748.1393(7,8)	788.7364(7,8)	861.6630(7,8)
$K_2=0\text{ N/m}$	$p_{lower}$	333.5836(3,6)	351.8499(3,6)	361.9010(3,6)	379.3054(3,6)
$K_1=0\text{ N/m}^3$	$p_{upper}$	718.6538(7,8)	800.9298(7,8)	841.5607(7,8)	914.5336(7,8)
$K_2=2.5 \times 10^5\text{ N/m}$	$p_{lower}$	310.6699(1,3)	320.9929(1,3)	326.7063(1,3)	337.5445(1,3)
$K_1=2.5 \times 10^7\text{ N/m}^3$	$p_{upper}$	729.5299(7,8)	811.7369(7,8)	852.3378(7,8)	925.2712(7,8)
$K_2=2.5 \times 10^5\text{ N/m}$	$p_{lower}$	414.5134(3,5)	434.8188(3,6)	444.8195(3,6)	462.1542(3,6)



Hình 3.16. Ảnh hưởng của  $k$  đối với  $p - \bar{\Delta}_x$



Hình 3.17. Ảnh hưởng của nền đối với  $p_{lower} - k$

Ảnh hưởng của  $k$  và nền đối với khả năng chịu nén dọc trục của vỏ trụ sandwich FGP cũng được mô tả trên các Hình 3.16-3.17. Quan sát thấy, tải nén tới hạn của vỏ trụ giảm khi  $k$  giảm. Đặc tính này là phù hợp với tính chất của vật liệu, vì giá trị  $k = 0$  biểu thị lớp phủ của vỏ trụ giàu kim loại hơn sẽ có xu hướng mềm hơn so với vỏ trụ có lớp phủ giàu gốm.

### 3.3.3.5. Ảnh hưởng của các thông số hình học ( $R/h$ , $L/R$ )

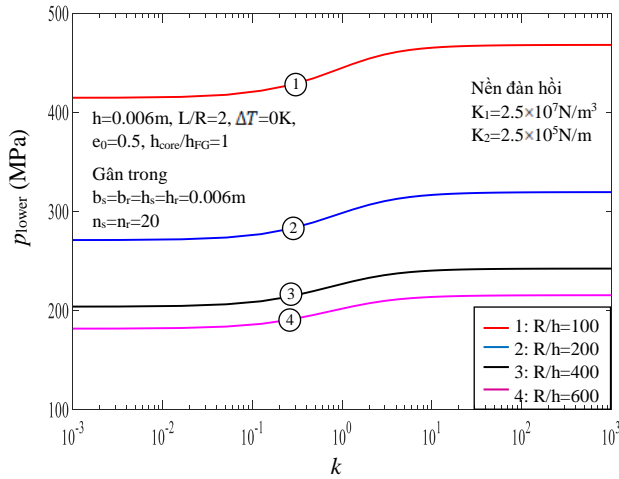
Bảng 3.11 mô tả ảnh hưởng của  $R/h$  và  $L/R$  đối với tải trọng nén dọc trục tới hạn trên và dưới của vỏ trụ sandwich FGP. Bảng 3.11 cho thấy, khi tỉ lệ  $R/h$  hoặc  $L/R$  tăng tải trọng nén dọc trục tới hạn trên và dưới của vỏ trụ đều giảm. Ví dụ: với cùng  $R/h=200$ , tải nén tới hạn dưới của vỏ trụ với  $L/R=0,5$  là  $p_{\text{lower}}=346.0287$  MPa lớn hơn trường hợp  $L/R=2$  khoảng 1.16 lần (với  $p_{\text{lower}}=298.3926$  MPa).

Bảng 3.11. Ảnh hưởng của  $R/h$ ,  $L/R$  đối với tải tới hạn.  $k=1$ ,  $\Delta T=0^{\circ}\text{C}$ ,  $K_1=2.5 \times 10^7 \text{N/m}^3$ ,  $K_2=2.5 \times 10^5 \text{N/m}$ ,  $h=0.006\text{m}$ ,  $b_s=b_r=0.006\text{m}$ ,  $h_s=h_r=0.006\text{m}$ ,  $n_s=n_r=20$  (gân bên trong),  $e_0=0.5$ ,  $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}=1$

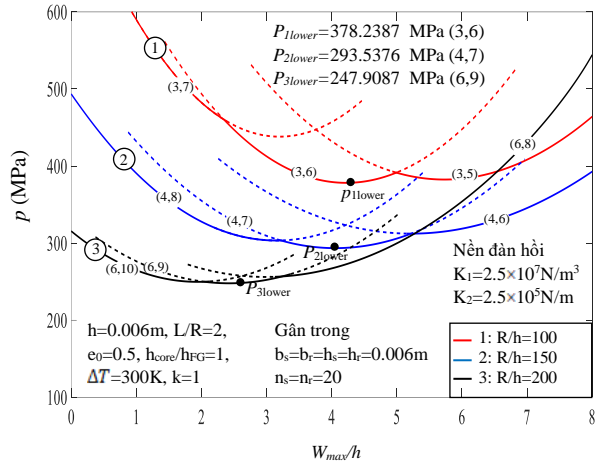
$R/h$	$p_{\text{cr}}$ (MPa)	$L/R=0.5$	$L/R=1$	$L/R=1.5$	$L/R=2$
100	$p_{\text{upper}}$	860.9419(2,7)	857.2133(4,7)	855.9467(6,7)	852.3378(7,8)
	$p_{\text{lower}}$	540.7506(1,6)	501.8815(2,6)	445.2049(2,5)	444.8195(3,6)
300	$p_{\text{upper}}$	323.3993(4,11)	321.6622(9,8)	320.0854(13,9)	319.2408(18,7)
	$p_{\text{lower}}$	261.5888(2,11)	255.6698(4,11)	253.5655(6,11)	251.5800(9,12)
500	$p_{\text{upper}}$	224.3246(6,9)	220.3002(13,1)	219.3478(19,1)	218.6699(26,1)
	$p_{\text{lower}}$	219.3676(4,16)	212.6860(7,15)	212.2615(10,15)	211.7625(14,16)

Hình 3.18 mô tả ảnh hưởng của  $R/h$  đối với mối quan hệ tải nén tới hạn dưới - chỉ số tỉ phần thể tích. Hình 3.19 mô tả ảnh hưởng của  $R/h$  đối với mối quan hệ  $p - W_{\text{max}}/h$ . Hình 3.18 và Hình 3.19 cho thấy khi tỷ số  $R/h$  tăng thì các đường cong có xu hướng thấp hơn, nghĩa là khi  $R/h$  tăng khả năng chịu nén dọc trục của vỏ trụ sandwich FGP giảm.





Hình 3.18. Ảnh hưởng của R/h đối với  $p_{lower} - k$



Hình 3.19. Ảnh hưởng của R/h đối với  $p - W_{max}/h$

**3.3.3.6. Ảnh hưởng của gân gia cường**

Bảng 3.12 mô tả ảnh hưởng của các gân gia cường đối với tải nén dọc trục tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP. Bảng 3.12 cho thấy, với các trường hợp bố trí gân gia cường được xem xét thì tải trọng nén dọc trục tới hạn trong trường hợp vỏ trụ có gân gia cường bên ngoài là lớn nhất, thứ hai là trường hợp vỏ trụ có gân gia cường bên trong và nhỏ nhất khi vỏ trụ không có gân gia cường. Ngoài ra, Bảng 3.12 cũng cho thấy khi thiết kế gân gia cường bên trong vỏ với số gân bằng nhau (40 gân) thì tải nén dọc trục tới hạn của vỏ trụ thiết kế 40 gân dọc gia cường ( $n_s=40, n_r=0$ ) là lớn nhất, thứ hai là vỏ trụ được thiết kế các gân trục giao gia cường ( $n_s=20, n_r=20$ ) và trường hợp vỏ trụ được thiết kế 40 gân vòng gia cường ( $n_s=0, n_r=40$ ) có tải nén tới hạn là nhỏ nhất.

Bảng 3.12. Ảnh hưởng của gân gia cường đối với tải tới hạn trên.  $e_0=0.5, h_{core}/h_{FG}=1, k=1, \Delta T=300^\circ C, h=0.006m, L/R=2, b_s=b_r=0.006m, h_s=h_r=0.006m, K_1=2.5 \times 10^7 N/m^3, K_2=2.5 \times 10^5 N/m.$

$p_{cr}$ (MPa)		R/h=100	R/h=200	R/h=300
Không gân ( $n_s=n_r=0$ )		630.2644 (11,1)*	343.7590 (16,1)	250.9132 (19,5)
$n_s=40, n_r=0$	Gân trong	708.2389 (5,8)	378.9682 (10,12)	263.3646 (13,15)
	Gân ngoài	745.4105 (6,8)	381.2173 (13,8)	266.0357 (14,14)
$n_s=20, n_r=20$	Gân trong	698.5920 (7,8)	367.6248 (12,10)	258.7624 (14,14)
	Gân ngoài	749.6283 (10,2)	373.9650 (15,1)	264.8245 (19,3)
$n_s=0, n_r=40$	Gân trong	644.5673 (9,7)	350.7274 (13,9)	251.3729 (16,13)
	Gân ngoài	703.1807 (12,1)	361.1648 (16,1)	258.5777 (20,1)

\* Mode tới hạn (m,n)

### 3.4. Phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu áp lực ngoài

#### 3.4.1. Vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu áp lực ngoài

Xét vỏ trụ sandwich FGP có bán kính mặt giữa là  $R$ , chiều dày là  $h$  và chiều dài là  $L$ , được gia cường bằng cường độ gân trực giao (gân trong) chịu áp lực ngoài. Vỏ trụ đặt trong hệ tọa độ như Hình 3.7.

Môđun đàn hồi Young của vỏ trụ và gân FGM gia cường được xác định bởi các biểu thức (3.21), (3.22).

#### 3.4.2. Các phương trình cơ bản

Dựa trên lý thuyết vỏ Donnell có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến hình học von-Karman, kỹ thuật san gân Lekhnitskii, hệ phương trình cân bằng phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP chịu áp lực ngoài có kể đến tương tác nền - vỏ trụ (mô hình nền Pasternak) được xác định bởi (3.36) và (3.56)

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}w_{,xxxx} + \alpha_{12}w_{,xxyy} + \alpha_{13}w_{,yyyy} + \alpha_{14}\varphi_{,xxxx} + \alpha_{15}\varphi_{,xxyy} + \alpha_{16}\varphi_{,yyyy} \\ & + \varphi_{,xx} / R + \varphi_{,xx}w_{,yy} + \varphi_{,yy}w_{,xx} - 2\varphi_{,xy}w_{,xy} + K_2(w_{,xx} + w_{,yy}) - K_1w + q = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

trong đó

$q$  là áp lực phân bố tác dụng lên mặt ngoài vỏ;

các thành phần  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  được xác định theo phụ lục C.

Sử dụng biểu thức (3.56) và (3.36) có thể phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ FGP chịu áp lực ngoài được bao quanh bởi nền đàn hồi theo mô hình Pasternak.

#### 3.4.3. Điều kiện biên và phương pháp giải

Xét vỏ trụ sandwich FGP với điều kiện biên tựa đơn tại  $x=0$ ;  $x=L$  chịu áp lực ngoài. Độ võng  $w$  của vỏ có dạng (3.6), hàm ứng suất  $\varphi$  có dạng (3.37)

Thế  $w$  và  $\varphi$  từ biểu thức (3.6) và (3.37) vào (3.56), và áp dụng phương pháp Galerkin, ta được

$$\sigma_{0y} = \frac{R}{2h} [2q - K_1(f_2 + 2f_0)] \quad (3.57)$$

$$f_1^2 = \frac{\sigma_{0y}h\beta^2 - [2D_{01} + 2D_{04}f_2^2 + 2D_{05}f_2 + K_2(\alpha^2 + \beta^2) + K_1]}{2D_{03}} \quad (3.58)$$

$$D_{06}f_2 + D_{07}f_1^2 + D_{08}f_1^2f_2 - 8\frac{\sigma_{0y}h}{R} - 8K_2\alpha^2f_2 - 6K_1f_2 - 8K_1f_0 + 8q = 0 \quad (3.59)$$

trong đó

$$D_{01} = -\frac{1}{2} \left[ \alpha_{11} \alpha^4 + \alpha_{12} \alpha^2 \beta^2 + \alpha_{13} \beta^4 + a_5 \left( \alpha_{14} \alpha^4 + \alpha_{15} \alpha^2 \beta^2 + \alpha_{16} \beta^4 - \frac{\alpha^2}{R} \right) \right];$$

$$D_{03} = \alpha^2 \beta^2 (a_2 + a_3); \quad D_{04} = -\frac{\alpha^2 \beta^2}{2} (a_4 - a_6);$$

$$D_{05} = -\frac{1}{2} \left[ a_4 \left( \alpha_{14} \alpha^4 + \alpha_{15} \alpha^2 \beta^2 + \alpha_{16} \beta^4 - \frac{\alpha^2}{R} \right) + \alpha^2 \beta^2 a_5 - 2\alpha^2 \beta^2 a_1 \right];$$

$$D_{06} = 8\alpha^2 \left( 4\alpha_{11} \alpha^2 - 8\alpha^2 \alpha_{14} a_1 + \frac{2a_1}{R} \right);$$

$$D_{07} = 4 \left( a_5 \beta^2 - 16\alpha^2 \alpha_{14} a_2 + \frac{4a_2}{R} \right) \alpha^2; \quad D_{08} = 4(a_4 - a_6) \alpha^2 \beta^2.$$

Điều kiện chu vi kín của vỏ trụ là [85]

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L v_{,y} dx dy = 0 \Rightarrow -8C_{11}^* \sigma_{0,y} h + \frac{4}{R} (2f_0 + f_2) - \beta^2 f_1^2 = 0 \quad (3.60)$$

Thế  $f_1^2$  từ biểu thức (3.58) vào (3.60), suy ra

$$f_0 = L_{A01} q + L_{A02} + L_{A03} f_2 + L_{A04} f_2^2 \quad (3.61)$$

Thế (3.61) vào (3.60) và (3.58), ta được

$$\sigma_{0,y} = \frac{R}{h} (1 - K_1 L_{A01}) q - \frac{R}{h} K_1 \left[ L_{A02} + \left( L_{A03} + \frac{1}{2} \right) f_2 + L_{A04} f_2^2 \right] \quad (3.62)$$

$$f_1^2 = L_{A11} q + L_{A12} + L_{A13} f_2 + L_{A14} f_2^2 \quad (3.63)$$

Trong đó:

$$L_{A0} = -\frac{1}{\left[ 8C_{11}^* RK_1 + \frac{8}{R} + \frac{R\beta^4}{2D_{03}} K_1 \right]}; \quad L_{A01} = -L_{A0} \frac{(16C_{11}^* RD_{03} + R\beta^4)}{2D_{03}};$$

$$L_{A02} = L_{A0} \frac{\beta^2}{2D_{03}} \left[ 2D_{01} + K_2 (\alpha^2 + \beta^2) + K_1 \right]; \quad L_{A03} = \frac{\beta^2 L_{A0} D_{05}}{D_{03}} - \frac{1}{2};$$

$$L_{A04} = L_{A0} \frac{\beta^2 D_{04}}{D_{03}}; \quad L_{A11} = \frac{R\beta^2}{2D_{03}} (1 - K_1 L_{A01});$$

$$L_{A12} = -\frac{\beta^2 RK_1 L_{A02} + 2D_{01} + K_2 (\alpha^2 + \beta^2) + K_1}{2D_{03}};$$

$$L_{A13} = -\frac{1}{2D_{03}} \left[ \beta^2 RK_1 \left( L_{A03} + \frac{1}{2} \right) + 2D_{05} \right]; \quad L_{A14} = -\frac{1}{2D_{03}} (\beta^2 RK_1 L_{A04} + 2D_{04}).$$

Thế  $f_0, \sigma_{0y}, f_1$  từ biểu thức (3.61)-(3.63) vào (3.59), ta được

$$q = -\frac{1}{(D_{07}L_{A11} + D_{08}L_{A11}f_2)} \times \left[ \begin{aligned} &D_{07}L_{A12} + (D_{06} + D_{07}L_{A13} + L_{A12}D_{08} - 8K_2\alpha^2 - 2K_1)f_2 \\ &+ (D_{07}L_{A14} + L_{A13}D_{08})f_2^2 + L_{A14}D_{08}f_2^3 \end{aligned} \right] \quad (3.64)$$

Biểu thức (3.64) được sử dụng để xác định tải trọng tới hạn và phân tích quan hệ tải - độ võng đáp ứng sau tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu áp lực ngoài phân bố đều.

Từ (3.64), cho  $f_2 \rightarrow 0$  được tải tới hạn trên

$$q_{upper} = -\frac{L_{A12}}{L_{A11}} = \frac{\beta^2 RK_1 L_{A02} + 2D_{01} + K_2(\alpha^2 + \beta^2) + K_1}{R\beta^2(1 - K_1 L_{A01})} \quad (3.65)$$

Thay thế  $f_0, f_1$  từ các biểu thức  $f_0, f_1$  (3.61), (3.63) vào (3.19), độ võng lớn nhất  $W_{max}$  của vỏ trụ được xác định

$$W_{max} = L_{A01}q + L_{A02} + (L_{A03} + 1)f_2 + L_{A04}f_2^2 + (L_{A11}q + L_{A12} + L_{A13}f_2 + L_{A14}f_2^2)^{1/2} \quad (3.66)$$

Sử dụng biểu thức (3.64) và (3.66) có thể xác định tải trọng tới hạn và phân tích ảnh hưởng của các thông số đầu vào đối với đường cong mô tả quan hệ tải - độ võng lớn nhất của vỏ trụ sandwich FGP có gân FGM gia cường chịu áp lực ngoài.

### 3.4.4. Kết quả tính toán số

#### 3.4.4.1. Nghiên cứu so sánh

Nghiên cứu so sánh được thực hiện đối với vỏ trụ đẳng hướng không gân và có gân gia cường chịu áp lực ngoài. Bảng 3.13 thể hiện so sánh kết quả tính theo công thức (3.65) của luận án với các kết quả được báo cáo trong công trình của Reddy và Starnes [52], Shen [53], Baruch và Singer [90].

Bảng 3.13. So sánh tải trọng tới hạn  $q$  (Psi) của vỏ trụ đẳng hướng

Shell	Reddy và Starnes [52]	Shen [53]	Baruch và Singer [90]	Luận án
Không gân	93.5	100.7 (1,4)*	102	103.327 (1,4)
Gân dọc	94.7	102.2 (1,4)	103	104.494 (1,4)
Gân vòng	357.5	368.3 (1,3)	370	379.694 (1,3)
Gân trục giao	365	374.1 (1,3)	377	387.192 (1,3)

\* Mode tới hạn  $(m, n)$

Bảng 3.13 cho thấy, kết quả tính toán thu được theo công thức (3.65) của luận án tương đồng với các báo cáo được công bố của Reddy và Starnes [52], Shen [53], Baruch và Singer [90]. Điều này khẳng định độ tin cậy của phương pháp nghiên cứu được thực hiện trong luận án.

Trong phần tiếp theo, luận án tiến hành phân tích ảnh hưởng của các thông số hình học, thông số độ xoắn, độ dày của lõi xoắn, nền đàn hồi, gân gia cường, các thông số vật liệu đối với tải trọng tới hạn và đường cong mô tả quan hệ tải - độ võng lớn nhất đáp ứng sau mất ổn định của vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường chịu áp lực ngoài. Lớp phủ mặt và gân gia cường được làm từ vật liệu FGM là hỗn hợp Zirconia và Ti-6Al-4V. Lõi lõi được làm bằng bột kim loại. Các thông số liệu của vỏ được lấy là:  $\Delta T=0K$ ,  $K_1=2 \times 10^7 \text{ N/m}^3$ ,  $K_2=6 \times 10^4 \text{ N/m}$ ,  $e_0=0.4$ ,  $p=1$ ,  $h_{core}/h_{FG}=3$ ,  $h=0.004\text{m}$ ,  $L/R=2$ ,  $R/h=80$ ,  $h_r=0.005\text{m}$ ,  $b_r=0.005\text{m}$ ,  $n_r=30$ ,  $h_s=0.005\text{m}$ ,  $b_s=0.005\text{m}$ ,  $n_s=30$ .

#### 3.4.4.2. Ảnh hưởng của hệ số độ xoắn và nền đàn hồi

Bảng 3.14. Ảnh hưởng của  $e_0$  và nền đối với tải tới hạn  $q_{cr}$  (kPa).  $\Delta T=0K$ ,  $p=1$ ,  $h=4\text{mm}$ ,  $h_{core}/h_{FG}=3$ ,  $R/h=80$ ,  $L/R=2$ ,  $h_s=5\text{mm}$ ,  $b_s=5\text{mm}$ ,  $h_r=5\text{mm}$ ,  $b_r=5\text{mm}$ ,  $n_s=n_r=30$

$K_w$ ( $\text{N/m}^3$ )	$K_s$ ( $\text{N/m}$ )	$e_0=0$	$e_0=0.4$	$e_0=0.8$
0	0	3202.736 <sup>U</sup> (1,5)*	2993.012 (1,5)	2715.348 (1,4)
		2710.793 <sup>L</sup> (1,4)	2468.121 (1,4)	2203.120 (1,4)
$2 \times 10^7$	0	3470.288 (1,5)	3261.511 (1,5)	3018.885 (1,5)
		3152.288 (1,5)	2920.901 (1,4)	2656.911 (1,4)
	$6 \times 10^4$	3676.982 (1,5)	3468.308 (1,5)	3225.825 (1,5)
		3363.202 (1,5)	3142.228 (1,4)	2878.410 (1,4)
	$9 \times 10^4$	3780.328 (1,5)	3571.707 (1,5)	3329.295 (1,5)
		3468.660 (1,5)	3252.892 (1,4)	2989.160 (1,4)
$4 \times 10^7$	0	3739.550 (1,5)	3531.979 (1,5)	3290.839 (1,5)
		3464.155 (1,5)	3312.903 (1,5)	3114.708 (1,4)
	$6 \times 10^4$	3946.931 (1,5)	3739.569 (1,5)	3498.714 (1,5)
		3675.800 (1,5)	3524.770 (1,5)	3337.243 (1,4)
	$9 \times 10^4$	4050.622 (1,5)	3843.365 (1,5)	3602.651 (1,5)
		3781.622 (1,5)	3630.704 (1,5)	3448.128 (1,5)

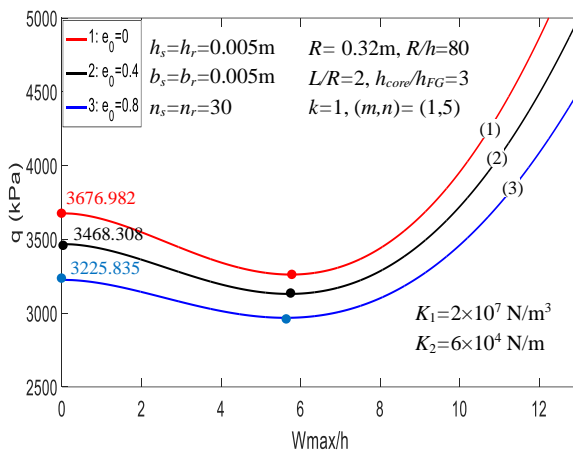
<sup>U</sup> Tải tới hạn trên;

<sup>L</sup> Tải tới hạn dưới;

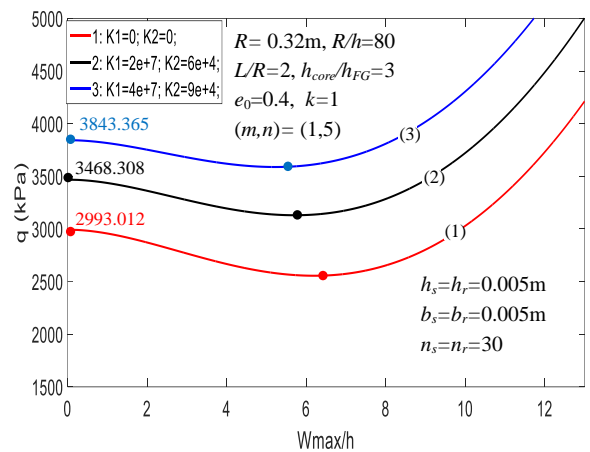
\* Mode tới hạn ( $m,n$ )

Sử dụng biểu thức (3.64) và (3.65), Bảng 3.14 mô tả ảnh hưởng của  $e_0$  và nền đối với tải tới hạn trên và dưới của vỏ trụ sandwich FGP chịu áp lực ngoài. Bảng 3.14 cho thấy, áp lực ngoài tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP giảm khi hệ số độ xấp  $e_0$  tăng. Nhận xét này cũng được quan sát thấy trong Hình 3.20 mô tả ảnh hưởng của  $e_0$  đối với quan hệ  $q - W_{max}/h$  của vỏ trụ sandwich FGP.

Ảnh hưởng nền đến tải trọng tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP được mô tả trong Bảng 3.14 và Hình 3.21. Có thể nhận thấy rằng, áp lực ngoài tới hạn của vỏ trụ tăng khi các hệ số nền  $K_1$  và  $K_2$  tăng riêng biệt hoặc cùng nhau tăng. Tải tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP trường hợp không có tương tác nền - vỏ trụ (tức là  $K_1 = K_2 = 0$ ) là nhỏ nhất. Ví dụ: với cùng một giá trị của hệ số xấp  $e_0 = 0.4$ , áp lực tới hạn trên là  $q_{upper} = 2993.012$  kPa với  $K_1 = K_2 = 0$  (không có nền), và  $q_{upper} = 3843.365$  kPa với  $K_1 = 4 \times 10^7$  N/m<sup>3</sup>,  $K_2 = 9 \times 10^4$  N/m, như vậy áp lực ngoài tới hạn đã tăng lên khoảng 28,4%.



Hình 3.20. Ảnh hưởng  $e_0$  đối với  $q - W_{max}/h$



Hình 3.21. Ảnh hưởng của nền đối với  $q - W_{max}/h$

#### 3.4.4.3. Ảnh hưởng của các thông số hình học ( $h_{core}/h_{FG}$ , $R/h$ , $L/R$ )

Bảng 3.15 cho thấy ảnh hưởng của  $h_{core}/h_{FG}$ ,  $R/h$ ,  $L/R$  tới tải trọng tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP. Hình 3.22 cũng thể hiện ảnh hưởng của tỉ lệ  $h_{core}/h_{FG}$  đối với các đường cong quan hệ tải - độ võng của vỏ trụ sandwich FGP. Kết quả chỉ ra rằng, khi tỉ lệ  $h_{core}/h_{FG}$  tăng thì giá trị tải trọng tới hạn giảm. Ví dụ: trường hợp  $L/R=2$ ,  $R/h=80$  tải tới hạn trên giảm từ  $q_{upper}=3997.851$  kPa (với  $h_{core}/h_{FG}=0$ ) đến  $q_{upper}=3168.536$  MPa (với  $h_{core}=h$ ,  $h_{FG}=0$ ).

Bảng 3.15 và Hình 3.23-3.26 mô tả ảnh hưởng của  $R/h$ ,  $L/R$  đối với áp lực ngoài tới hạn trên và dưới của vỏ trụ sandwich FGP chịu áp lực ngoài. Ta thấy rằng, tải trọng tới hạn  $q_{cr}$  giảm rõ rệt khi tỷ số  $R/h$  tăng lên, điều này cũng phù hợp với thực tế là vỏ càng mỏng thì giá trị của tải trọng tới hạn càng nhỏ. Bảng 3.15 cũng cho ta thấy, khả năng chịu áp lực ngoài của vỏ trụ sandwich FGP giảm đi đáng kể khi tỉ lệ  $L/R$  tăng lên.

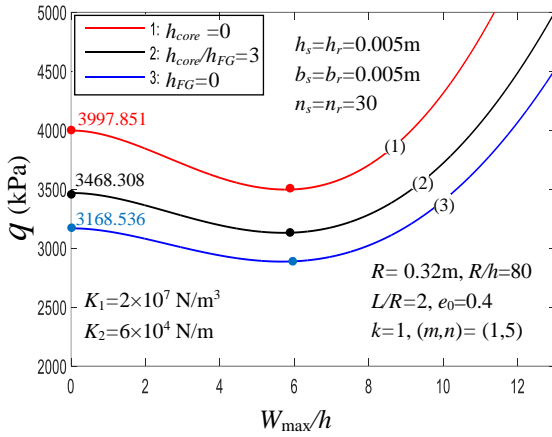
Bảng 3.15. Ảnh hưởng của các thông số hình học đối với tải tới hạn.  $k=1$ ,  $\Delta T=0K$ ,  $K_1=2 \times 10^7 \text{ N/m}^3$ ,  $K_2=6 \times 10^4 \text{ N/m}$ ,  $e_0=0.4$ ,  $R=320\text{mm}$ ,  $h_s=5\text{mm}$ ,  $b_s=5\text{mm}$ ,  $h_r=5\text{mm}$ ,  $b_r=5\text{mm}$ ,  $n_s=30$ ,  $n_r=30$

$q_{cr}$ (kPa)		$R/h=70$	$R/h=80$	$R/h=100$	$R/h=150$
$h_{core}=0$ $h_{FG}=h$	$L/R=1.5$	6713.093 <sup>U</sup> (1,5)*	5632.807 (1,5)	4348.823 (1,5)	2973.191 (1,5)
		5609.772 <sup>L</sup> (1,5)	4662.108 (1,5)	3568.630 (1,5)	2455.576 (1,5)
	$L/R=2$	4789.178 (1,5)	3997.851 (1,5)	3084.262 (1,5)	2149.996 (1,5)
		4359.533 (1,5)	3621.131 (1,5)	2783.505 (1,5)	1954.249 (1,5)
	$L/R=3$	3010.036 (1,4)	2566.530 (1,4)	2058.137 (1,4)	1530.278 (1,5)
		2786.149 (1,4)	2372.898 (1,4)	1907.329 (1,4)	1450.903 (1,4)
$h_{core}/h_{FG}=1$	$L/R=1.5$	6028.873 (1,5)	5052.500 (1,5)	3895.664 (1,5)	2665.383 (1,5)
		5163.989 (1,5)	4292.150 (1,5)	3286.087 (1,5)	2264.646 (1,5)
	$L/R=2$	4421.291 (1,5)	3693.065 (1,5)	2851.277 (1,5)	1990.090 (1,5)
		3942.605 (1,4)	3369.234 (1,4)	2615.151 (1,5)	1839.458 (1,5)
	$L/R=3$	2791.288 (1,4)	2387.142 (1,4)	1923.556 (1,4)	1453.967 (1,4)
		2617.298 (1,4)	2237.457 (1,4)	1808.361 (1,4)	1385.852 (1,4)
$h_{core}/h_F=3$	$L/R=1.5$	5565.780 (1,5)	4675.133 (1,5)	3616.725 (1,5)	2488.029 (1,5)
		4819.682 (1,5)	4020.073 (1,5)	3093.064 (1,5)	2146.553 (1,5)
	$L/R=2$	4136.379 (1,5)	3468.308 (1,5)	2691.578 (1,5)	1890.458 (1,5)
		3662.870 (1,4)	3142.228 (1,4)	2488.403 (1,5)	1763.062 (1,5)
	$L/R=3$	2625.273 (1,4)	2257.576 (1,4)	1833.209 (1,4)	1399.082 (1,4)
		2476.403 (1,4)	2130.079 (1,4)	1736.077 (1,4)	1343.504 (1,4)
$h_{core}/h_F=5$	$L/R=1.5$	5385.410 (1,5)	4530.736 (1,5)	3512.767 (1,5)	2424.223 (1,5)
		4678.786 (1,5)	3910.770 (1,5)	3017.846 (1,5)	2102.647 (1,5)
	$L/R=2$	4019.537 (1,5)	3377.796 (1,5)	2629.156 (1,5)	1853.229 (1,5)
		3554.253 (1,4)	3055.645 (1,4)	2437.088 (1,5)	1733.707 (1,5)
	$L/R=3$	2557.580 (1,4)	2205.710 (1,4)	1798.109 (1,4)	1378.661 (1,4)
		2417.120 (1,4)	2085.654 (1,4)	1707.052 (1,4)	1327.321 (1,4)
$h_{core}=h$ $h_{FG}=0$	$L/R=1.5$	4977.757 (1,5)	4208.402 (1,5)	3285.131 (1,5)	2288.321 (1,5)
		4349.876 (1,5)	3658.623 (1,5)	2847.875 (1,5)	2006.797 (1,5)
	$L/R=2$	3746.285 (1,5)	3168.536 (1,5)	2487.681 (1,5)	1771.566 (1,5)
		3309.234 (1,4)	2862.741 (1,4)	2318.058 (1,5)	1668.027 (1,5)
	$L/R=3$	2399.846 (1,4)	2086.247 (1,4)	1718.843 (1,4)	1333.950 (1,4)
		2276.277 (1,4)	1981.162 (1,4)	1640.039 (1,4)	1291.190 (1,4)

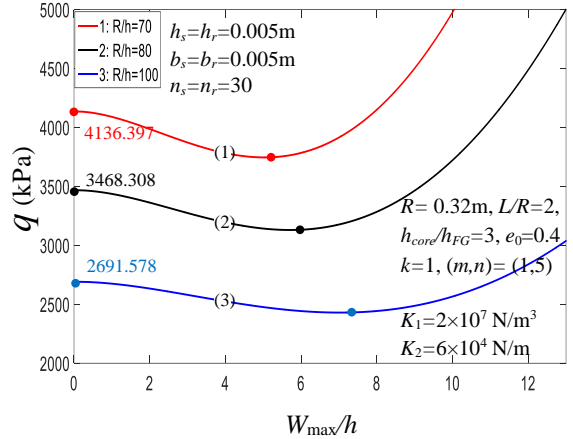
<sup>U</sup> Tải tới hạn trên;

<sup>L</sup> Tải tới hạn dưới;

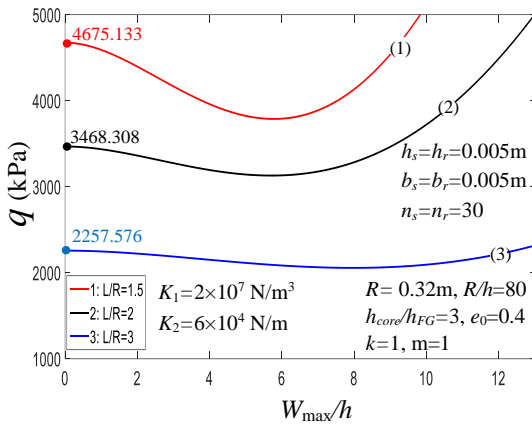
\* Mode tới hạn (m,n)



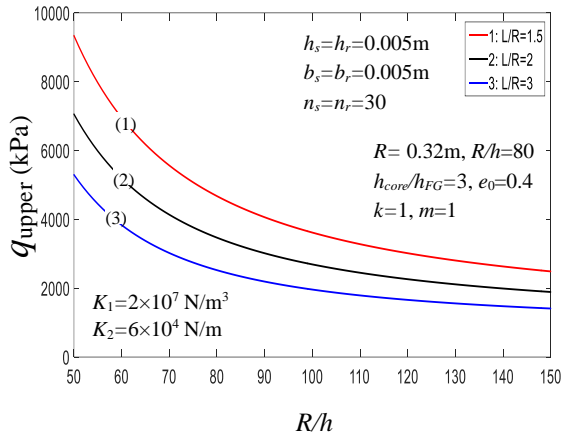
Hình 3.22. Ảnh hưởng của  $h_{core}/h_{FG}$  đối với  $q - W_{max}/h$



Hình 3.23. Ảnh hưởng của  $R/h$  đối với  $q - W_{max}/h$



Hình 3.24. Ảnh hưởng  $L/R$  đối với  $q - W_{max}/h$  đường (1,2):  $n=5$ ; đường(3):  $n=4$ .



Hình 3.25. Ảnh hưởng  $L/R$  đối với  $q_{upper} - R/h$  đường (1,2):  $n=5$ ; đường (3):  $n=4$ .

**3.4.4.4. Ảnh hưởng của gân gia cường và chỉ số tỉ phân thể tích**

Ảnh hưởng của gân gia cường đối với tải trọng tới hạn trên và dưới của vỏ trụ sandwich FGP chịu áp lực ngoài được thể hiện trong Bảng 3.16. Bảng 3.16 cho thấy, khả năng chịu áp lực ngoài của vỏ trụ sandwich FGP có gân vòng gia cường là tốt nhất, thứ hai là vỏ trụ có gân trực giao gia cường, thứ ba là vỏ trụ có gân dọc gia cường, và nhỏ nhất là khi vỏ trụ không có gân gia cường. Ví dụ với  $k=1$ , vỏ trụ sandwich FGP được thiết kế 60 gân gia cường, áp lực tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP được thiết kế 60 gân vòng gia cường là  $q=4516.512$  kPa lớn hơn trường hợp vỏ trụ được thiết kế gân trực giao gia cường ( $n_s=n_r=30$ ) có  $q=3468.308$  kPa khoảng 30%, và lớn hơn vỏ trụ sandwich FGP được thiết kế 60 gân dọc gia cường có  $q=1400.241$  kPa khoảng 222%.



Ảnh hưởng của chỉ số tỉ phần thể tích  $k$  đối với tải trọng tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP được thể hiện thông qua Bảng 3.16 và Hình 3.26-3.27. Ta thấy rằng, áp lực tới hạn của vỏ trụ tăng khi  $k$  tăng. Điều này là hoàn toàn phù hợp với tính chất vật liệu, vì giá trị  $k$  cao hơn tương ứng với vỏ giàu gốm sẽ có độ cứng cao hơn vỏ giàu kim loại.

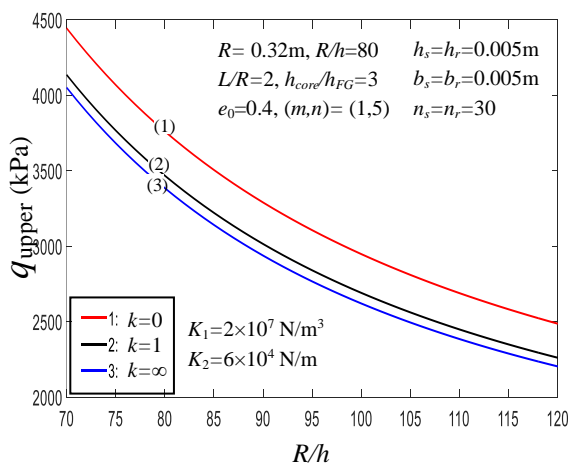
Bảng 3.16. Ảnh hưởng của gân gia cường và  $k$  đối với tải tới hạn.  $h=4\text{mm}$ ,  $R/h=80$ ,  $L/R=2$ ,  $h_{core}/h_{FG}=3$ ,  $h_s=5\text{mm}$ ,  $h_r=5\text{mm}$ ,  $b_s=5\text{mm}$ ,  $b_r=5\text{mm}$ ,  $n_s=30$ ,  $n_r=30$ ,  $\Delta T=0\text{K}$ ,  $K_w=2\times 10^7 \text{ N/m}^3$ ,  $K_s=6\times 10^4 \text{ N/m}$ ,  $e_0=0.4$

$q_{cr}$ (kPa)	Không gân	Gân dọc ( $n_s=60$ )	Gân vòng ( $n_r=60$ )	Gân trực giao ( $n_s=n_r=30$ )
$k=0$	1237.277 <sup>U</sup> (1,6)	1244.460 (1,6)	4687.754 (1,4)	3761.575 (1,5)
	1182.008 <sup>L</sup> (1,5)	1204.537 (1,5)	4114.811 (1,4)	3283.865 (1,4)
$k=0.5$	1343.330 (1,6)	1350.237 (1,6)	4529.226 (1,4)	3521.886 (1,5)
	1262.522 (1,5)	1282.081 (1,5)	3930.532 (1,4)	3161.382 (1,4)
$k=1$	1393.725 (1,6)	1400.241 (1,6)	4516.512 (1,4)	3468.308 (1,5)
	1300.836 (1,5)	1319.282 (1,5)	3904.212 (1,4)	3142.228 (1,4)
$k=5$	1485.786 (1,6)	1491.131 (1,6)	4534.340 (1,4)	3407.016 (1,5)
	1371.014 (1,5)	1387.360 (1,5)	3894.305 (1,4)	3132.362 (1,4)
$k=\infty$	1524.934 (1,6)	1529.547 (1,6)	4552.000 (1,4)	3385.620 (1,5)
	1401.016 (1,5)	1416.316 (1,5)	3898.026 (1,4)	3117.052 (1,5)

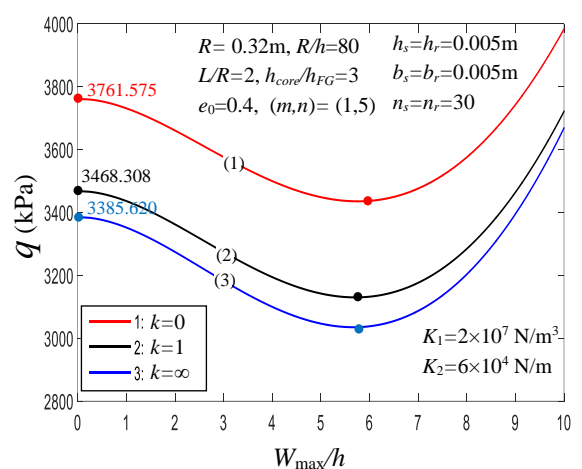
<sup>U</sup> Tải tới hạn trên;

<sup>L</sup> Tải tới hạn dưới;

\* Mode tới hạn ( $m,n$ )



Hình 3.26. Ảnh hưởng của  $k$  đối với đường cong  $q_{upper} - R/h$



Hình 3.27. Ảnh hưởng  $k$  đối với đường cong  $q - W_{max}/h$

### 3.5. Kết luận chương 3

Chương 3 sử dụng lý thuyết vỏ Donnell, kỹ thuật san gân Lekhnitskii và phương pháp Galerkin đã giải quyết những nội dung chủ yếu sau

1. Đã nghiên cứu ảnh hưởng của bốn mô hình phân bố độ xốp đến ổn định phi tuyến của kết cấu vỏ trụ xốp FGP chịu nén dọc trục, trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi Pasternak.

2. Đã phân tích ổn định của vỏ trụ sandwich FGP có gân trục giao gia cường chịu nén dọc trục, trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi Pasternak.

3. Đã phân tích ổn định của vỏ trụ sandwich FGP có gân trục giao gia cường chịu áp lực ngoài bao quanh bởi nền đàn hồi Pasternak.

#### Từ các kết quả số, luận án đưa ra một số nhận xét đáng chú ý sau

1. Với bốn mô hình phân bố độ xốp được nghiên cứu, vỏ trụ xốp FGP mô hình phân bố xốp không đối xứng Loại 2a là có khả năng chịu nén dọc trục tốt nhất, thứ hai là vỏ trụ xốp FGP mô hình phân bố xốp đối xứng, thứ ba là vỏ trụ có mô hình phân bố xốp không đối xứng Loại 2b, và chịu nén dọc trục kém nhất là vỏ trụ có mô hình phân bố xốp đồng đều.

2. Hệ số độ xốp  $e_0$  và trường nhiệt độ ảnh hưởng đáng kể đến khả năng chịu lực của vỏ trụ.

3. Gân gia cường, nền đàn hồi làm tăng đáng kể khả năng chịu nén dọc trục (hoặc áp lực ngoài) của vỏ trụ sandwich FGP.

4. Vỏ trụ sandwich FGP có gân gia cường bên ngoài chịu nén dọc trục tốt hơn vỏ trụ có gân gia cường bên trong.

5. Khi chịu áp lực ngoài, vỏ trụ sandwich FGP có gân vòng gia cường chịu áp lực ngoài tốt nhất.

6. Vỏ trụ FGP càng mảnh khả năng chịu lực càng kém.

7. Vỏ trụ FGP giàu gốm chịu lực tốt hơn vỏ giàu kim loại.

Kết quả chính của chương 3 đã được công bố trong 4 bài báo [4], [5], [6], [7] trong danh mục công trình công bố liên quan đến luận án. Trong đó có 1 bài đăng trên các tạp chí quốc tế danh mục ISI, 1 bài đăng trên hội nghị quốc tế danh mục Scopus, và 2 bài đăng trên tạp chí, hội nghị uy tín trong nước.

## **Chương 4: PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ FGP CÓ GÂN GIA CƯỜNG CHỊU TẢI XOẮN**

### **4.1. Đặt vấn đề**

Chương 4 của luận án sử dụng lý thuyết vỏ Donnell, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, kỹ thuật san đều tác dụng gân của Lekhnitskii và phương pháp Galerkin nghiên cứu lời giải giải tích cho hai bài toán cơ bản sau đây:

Bài toán 1: Phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu tải xoắn.

Bài toán 2: Phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân trục giao gia cường chịu tải xoắn.

Một số giả thiết trong chương 4

1. Vỏ trụ sandwich FGP ba lớp, gồm hai lớp phủ mặt FGM mỏng và một lớp lõi FGP đối xứng ở giữa dày hơn. Vỏ trụ có gia cường gân trục giao FGM. Đặc tính vật liệu lớp phủ và gân gia cường được giả thiết là biến đổi theo độ dày với quy luật hàm lũy thừa. Lớp lõi xốp FG được đặc trưng bởi hệ số xốp ảnh hưởng đến các đặc tính vật lý theo hướng chiều dày vỏ. Tính liên tục vật liệu giữa lớp phủ với lớp lõi và gân gia cường được đảm bảo không bị tập trung ứng suất và phân tách các lớp.

2. Tương tác nền - vỏ trụ được xác định theo mô hình Pasternak với hai hệ số nền  $K_1$  và  $K_2$ . Trong đó, hệ số nền Winkler ( $K_1$ ) có thứ nguyên  $[\text{lực}/(\text{chiều dài})^3]$ ; hệ số nền Pasternak ( $K_2$ ) có thứ nguyên  $[\text{lực}/(\text{chiều dài})]$ .

3. Tải trọng tác dụng lên vỏ trụ là tải trọng xoắn và tải nhiệt.

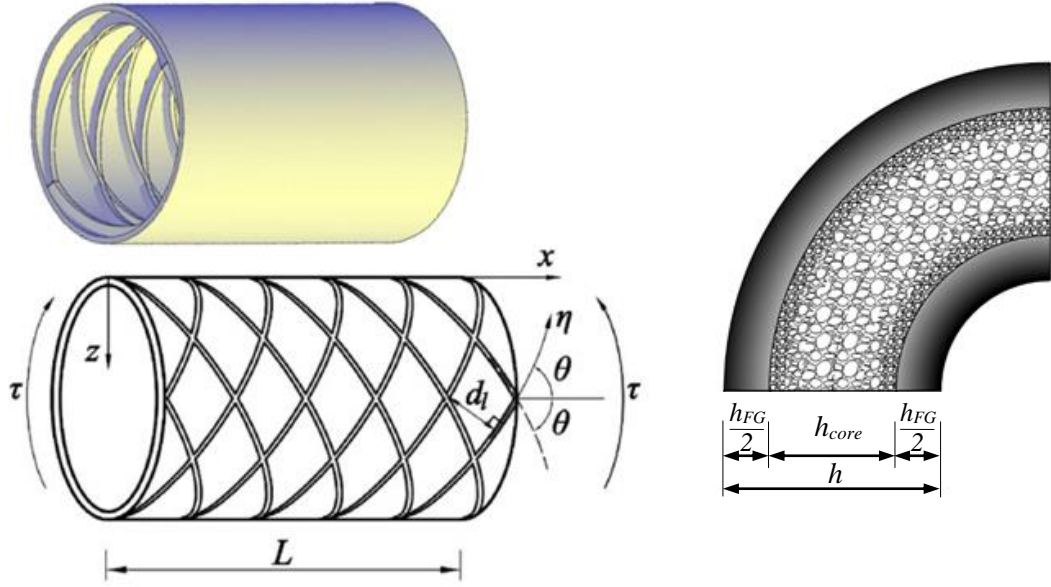
4. Mặt giữa và mặt trung hòa được giả thiết là trùng nhau

5. Trường nhiệt độ trong vỏ được giả thiết là phân bố đều

### **4.2. Phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu tải xoắn**

#### **4.2.1. Vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu tải xoắn**

Xét vỏ trụ sandwich FGP có bán kính mặt giữa là  $R$ , chiều dày là  $h$  và chiều dài là  $L$ . Vỏ trụ có gân xiên FGM gia cường chịu tải trọng xoắn, trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi Pasternak. Vỏ trụ được xác định trong một hệ tọa độ  $xyz$  có mặt phẳng  $(x, y)$  trùng với mặt giữa của vỏ, tọa độ chiều dày của vỏ  $z$  ( $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ ) như được mô tả trong Hình 4.1.



Hình 4.1. Mô hình vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu tải xoắn

$$\cos \theta = (n_p d_p) / (2\pi R)$$

Vỏ trụ sandwich FGP ba lớp, gồm một lớp lõi xốp FG có mô hình phân bố xốp đối xứng (bọt kim loại) ở giữa, và hai lớp phủ FGM. Hai lớp phủ mặt FGM là mỏng, trong khi lớp lõi xốp tương đối dày. Độ dày lớp lõi xốp FG là  $h_{core}$ , độ dày của mỗi lớp phủ FGM là  $\frac{h_{FG}}{2}$  ( $h = h_{core} + h_{FG}$ ). Gân xiên gia cường hình chữ nhật có chiều rộng là  $b_p$ , chiều cao là  $h_p$ , khoảng cách giữa hai gân là  $d_p$ . Giả thiết các lớp được liên kết là hoàn hảo (tức bỏ qua sự bong tách giữa các lớp).

Môđun đàn hồi Young và hệ số giãn nở nhiệt của vỏ trụ sandwich FGP được xác định bởi biểu thức (3.21)

Mô đun đàn hồi Young và hệ số giãn nở nhiệt của gân gia cường được xác định như sau

$$\begin{pmatrix} E_p \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_c \\ \alpha_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{mc} \\ \alpha_{mc} \end{pmatrix} \left( \frac{2z - h}{2h_p} \right)^{k_p} \quad (4.1)$$

trong đó

$k_p$  là chỉ số tỉ phân thể tích của gân xiên gia cường ( $k_p \geq 0$ );

$E_p$  là mô đun đàn hồi Young của gân xiên gia cường;

$\alpha_p$  là hệ số giãn nở nhiệt của gân xiên gia cường.

### 4.2.2. Các phương trình cơ bản

Theo lý thuyết vỏ Donnell với tính phi tuyến hình học von-Karman, các thành phần biến dạng ở một điểm cách mặt giữa một khoảng  $z$  của vỏ trụ sandwich FGP được xác định theo biểu thức (2.3).

Các thành phần  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  được xác định qua các thành phần chuyển vị  $u, v, w$  được xác định theo biểu thức (3.24).

Phương trình tương thích biến dạng - chuyển vị có dạng (3.25)

Theo định luật Hooke có kể đến môi trường nhiệt độ ( $\Delta T = T - T_0$ ), các thành phần ứng suất vỏ được xác định theo biểu thức (3.26)

Khi xét đến gân gia cường, định luật Hooke được viết bằng tọa độ địa phương  $\eta$  như sau

$$\sigma_\eta^p = E_p \varepsilon_\eta - E_p \alpha_p \Delta T \quad (4.2)$$

trong đó, chỉ số  $p$  biểu thị gân gia cường và sự thay đổi nhiệt độ là hàm của tọa độ độ dày.

Sử dụng kỹ thuật san đều tác dụng gân của Lekhnitskii, các thành phần nội lực của vỏ trụ FGP là

$$\begin{aligned} N_x &= C_{11} \varepsilon_x^0 + C_{12} \varepsilon_y^0 + C_{14} k_x + C_{15} k_y - \phi_1 - \phi_{1x}^T, \\ N_y &= C_{12} \varepsilon_x^0 + C_{22} \varepsilon_y^0 + C_{24} k_x + C_{25} k_y - \phi_1 - \phi_{1y}^T, \\ N_{xy} &= C_{33} \gamma_{xy}^0 + C_{36} k_{xy}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} M_x &= C_{14} \varepsilon_x^0 + C_{24} \varepsilon_y^0 + C_{44} k_x + C_{45} k_y - \phi_2 - \phi_{2x}^T, \\ M_y &= C_{15} \varepsilon_x^0 + C_{25} \varepsilon_y^0 + C_{45} k_x + C_{55} k_y - \phi_2 - \phi_{2y}^T, \\ M_{xy} &= C_{63} \gamma_{xy}^0 + C_{66} k_{xy}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

trong đó  $C_{ij}$  là hệ số độ cứng, được xác định như sau

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu^2} + 2 \frac{E_{1p} b_p}{d_p} \cos^4 \theta, & C_{12} &= \frac{\nu E_1}{1-\nu^2} + 2 \frac{E_{1p} b_p}{d_p} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ C_{14} &= \frac{E_2}{1-\nu^2} + 2 \frac{E_{2p} b_p}{d_p} \cos^4 \theta, & C_{15} &= \frac{\nu E_2}{1-\nu^2} + 2 \frac{E_{2p} b_p}{d_p} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ C_{22} &= \frac{E_1}{1-\nu^2} + 2 \frac{E_{1p} b_p}{d_p} \sin^4 \theta, & C_{24} &= \frac{\nu E_2}{1-\nu^2} + 2 \frac{E_{2p} b_p}{d_p} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ C_{25} &= \frac{E_2}{1-\nu^2} + 2 \frac{E_{2p} b_p}{d_p} \sin^4 \theta, & C_{33} &= \frac{E_1}{2(1+\nu)} + 2 \frac{E_{1p} b_p}{d_p} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

$$C_{36} = \frac{E_2}{1+\nu} + 4 \frac{E_{2p} b_p}{d_p} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad C_{44} = \frac{E_3}{1-\nu^2} + 2 \frac{E_{3p} b_p}{d_p} \cos^4 \theta,$$

$$C_{45} = \frac{\nu E_3}{1-\nu^2} + 2 \frac{E_{3p} b_p}{d_p} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad C_{55} = \frac{E_3}{1-\nu^2} + 2 \frac{E_{3p} b_p}{d_p} \sin^4 \theta,$$

$$C_{63} = \frac{E_2}{2(1+\nu)} + 2 \frac{E_{2p} b_p}{d_p} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad C_{66} = \frac{E_3}{1+\nu} + 4 \frac{E_{3p} b_p}{d_p} \sin^2 \theta \cos^2 \theta.$$

Thành phần  $\phi_i, \phi_{ij}^T$  là các thông số nhiệt và  $E_i, E_{ip}$  là mô đun đàn hồi Young, xác định theo phụ lục D

Từ biểu thức (4.3), ta có

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= C_{22}^* N_x - C_{12}^* N_y + C_{14}^* k_x + C_{15}^* k_y + C_{16}^* \phi_1 + C_{22}^* \phi_{1x}^T - C_{12}^* \phi_{1y}^T \\ \varepsilon_y^0 &= -C_{12}^* N_x + C_{11}^* N_y + C_{24}^* k_x + C_{25}^* k_y + C_{26}^* \phi_1 - C_{12}^* \phi_{1x}^T + C_{11}^* \phi_{1y}^T \\ \gamma_{xy}^0 &= C_{33}^* N_{xy} - C_{36}^* k_{xy} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Thế  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  từ biểu thức (4.5) vào (4.4), ta được

$$\begin{aligned} M_x &= D_{14}^* N_x + D_{24}^* N_y + D_{44}^* k_x + D_{45}^* k_y + D_{46}^* \phi_1 + D_{14}^* \phi_{1x}^T + D_{24}^* \phi_{1y}^T - \phi_2 - \phi_{2x}^T \\ M_y &= D_{15}^* N_x + D_{25}^* N_y + D_{54}^* k_x + D_{55}^* k_y + D_{56}^* \phi_1 + D_{15}^* \phi_{1x}^T + D_{25}^* \phi_{1y}^T - \phi_2 - \phi_{2y}^T \\ M_{xy} &= D_{63}^* N_{xy} + D_{66}^* k_{xy} \end{aligned} \quad (4.6)$$

trong đó, các thành phần  $C_{ij}^*, D_{ij}^*$  được xác định như sau

$$\begin{aligned} \Delta &= C_{22} C_{11} - C_{12}^2, \quad C_{22}^* = C_{22} / \Delta, \quad C_{12}^* = C_{12} / \Delta, \quad C_{14}^* = (C_{12} C_{24} - C_{22} C_{14}) / \Delta, \\ C_{15}^* &= (C_{12} C_{25} - C_{22} C_{15}) / \Delta, \quad C_{16}^* = (C_{22} - C_{12}) / \Delta, \quad C_{11}^* = C_{11} / \Delta, \\ C_{24}^* &= (C_{12} C_{14} - C_{11} C_{24}) / \Delta, \quad C_{25}^* = (C_{12} C_{15} - C_{11} C_{25}) / \Delta, \quad C_{26}^* = (C_{11} - C_{12}) / \Delta, \\ C_{33}^* &= 1 / C_{33}, \quad C_{36}^* = C_{36} / C_{33}. \\ D_{14}^* &= C_{14} C_{22}^* - C_{24} C_{12}^*, \quad D_{44}^* = C_{44} + C_{24} C_{24}^* + C_{14} C_{14}^*, \quad D_{24}^* = C_{24} C_{11}^* - C_{14} C_{12}^*, \\ D_{45}^* &= C_{14} C_{15}^* + C_{24} C_{25}^* + C_{45}, \quad D_{46}^* = (C_{14} C_{16}^* + C_{24} C_{26}^*), \quad D_{15}^* = C_{15} C_{22}^* - C_{25} C_{12}^*, \\ D_{54}^* &= C_{15} C_{14}^* + C_{25} C_{24}^* + C_{45}, \quad D_{25}^* = C_{25} C_{11}^* - C_{15} C_{12}^*, \quad D_{55}^* = C_{15} C_{15}^* + C_{25} C_{25}^* + C_{55}, \\ D_{56}^* &= (C_{15} C_{16}^* + C_{25} C_{26}^*), \quad D_{63}^* = C_{63} C_{33}^*, \quad D_{66}^* = C_{66} - C_{63} C_{36}^*. \end{aligned}$$

Sử dụng lý thuyết vỏ Donnell, hệ phương trình cân bằng phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP bao quanh bởi nền đàn hồi Pasternak với các hệ số nền  $K_1, K_2$  được xác định là

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
& M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + \frac{N_y}{R} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + \\
& + N_y w_{,yy} - K_1 w + K_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Các thành phần nội lực được biểu diễn qua hàm ứng suất của Airy  $A(x, y)$  như sau

$$N_x = A_{,yy}, \quad N_{xy} = -A_{,xy}, \quad N_y = A_{,xx} \tag{4.9}$$

Khi đó biểu thức (4.7) tự thỏa mãn.

Thay  $k_x, k_y, k_{xy}$  từ biểu thức (3.24) và  $M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}$  từ biểu thức (4.6) và (4.9) vào (4.8), ta được

$$\begin{aligned}
& \alpha_{11} w_{,xxxx} + \alpha_{12} w_{,xxyy} + \alpha_{13} w_{,yyyy} + \alpha_{14} A_{,xxxx} + \alpha_{15} A_{,xxyy} + \alpha_{16} A_{,yyyy} \\
& + \frac{1}{R} A_{,xx} + A_{,yy} w_{,xx} + A_{,xx} w_{,yy} - 2A_{,xy} w_{,xy} - K_1 w + K_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= -D_{44}^*, & \alpha_{12} &= -(D_{45}^* + 2D_{66}^* + D_{54}^*), & \alpha_{13} &= -D_{55}^*, \\
\alpha_{14} &= D_{24}^*, & \alpha_{15} &= (D_{14}^* - 2D_{63}^* + D_{25}^*), & \alpha_{16} &= D_{15}^*.
\end{aligned}$$

Thế  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  từ biểu thức (4.5) vào (3.25), ta được

$$\begin{aligned}
& \beta_{11} A_{,xxxx} + \beta_{12} A_{,xxyy} + \beta_{13} A_{,yyyy} + \beta_{14} w_{,xxxx} + \beta_{15} w_{,xxyy} + \beta_{16} w_{,yyyy} - (w_{,xy})^2 + \\
& + w_{,xx} \cdot w_{,yy} + \frac{w_{,xx}}{R} = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= C_{11}^*, & \beta_{12} &= C_{33}^* - 2C_{12}^*, & \beta_{13} &= C_{22}^*, \\
\beta_{14} &= -C_{24}^*, & \beta_{15} &= -(C_{14}^* + C_{25}^* + C_{36}^*), & \beta_{16} &= -C_{15}^*.
\end{aligned}$$

Biểu thức (4.10) và (4.11) thiết lập quan hệ độ võng  $w$  và hàm ứng suất  $A$ , được sử dụng để phân tích ổn định phi tuyến vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu tải trọng xoắn, trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi.

### 4.2.3. Điều kiện biên và phương pháp giải

Xét vỏ trụ có điều kiện biên tựa đơn ở hai đầu  $x=0; x=L$  chịu xoắn. Độ võng của vỏ trụ là [91]

$$w = w(x, y) = f_0 + f_1 \sin \alpha x \sin \beta (y - \lambda x) + f_2 \sin^2 \alpha x \tag{4.12}$$

trong đó

$$\alpha = m\pi / L; \quad \beta = n / R$$

với  $m$  là số nửa sóng dọc theo trục  $x$ ;  $n$  là số sóng dọc theo trục  $y$ .

Thế  $w$  từ biểu thức (4.12) vào (4.11), ta được

$$\begin{aligned}
\beta_{11}A_{,xxxx} + \beta_{12}A_{,xyxy} + \beta_{13}A_{,yyyy} &= G_{01} \cos 2\alpha x + G_{02} \cos 2\beta(y - \lambda x) \\
&+ G_{03} \cos \beta \left[ y + \left( \frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right) x \right] + G_{04} \cos \beta \left[ y - \left( \frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right) x \right] \\
&+ G_{05} \left\{ \cos \beta \left[ y - \left( 3 \frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right) x \right] - \cos \beta \left[ y + \left( 3 \frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right) x \right] \right\}
\end{aligned} \quad (4.13)$$

trong đó

$$\begin{aligned}
G_{01} &= 2f_2\alpha^2 \left( 4\beta_{14}\alpha^2 - \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{2}f_1^2\alpha^2\beta^2, \quad G_{02} = \frac{1}{2}f_1^2\alpha^2\beta^2, \\
G_{03} &= f_1 \left\{ \frac{1}{2}\beta_{14} \left[ (\alpha^2 + \beta^2\lambda^2)^2 + (2\alpha\beta\lambda)^2 \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} - \beta_{15}\beta^2 \right) (\alpha^2 + \beta^2\lambda^2) + \frac{1}{2}\beta_{16}\beta^4 \right. \\
&\quad \left. + \alpha\beta\lambda \left[ -2\beta_{14}(\alpha^2 + \beta^2\lambda^2) + \frac{1}{R} - \beta_{15}\beta^2 \right] \right\} + \frac{1}{2}f_1f_2\alpha^2\beta^2, \\
G_{04} &= \frac{1}{2}f_1 \left\{ -\beta_{14} \left[ (\alpha^2 + \beta^2\lambda^2)^2 + (2\alpha\beta\lambda)^2 \right] + \left( \frac{1}{R} - \beta_{15}\beta^2 \right) (\alpha^2 + \beta^2\lambda^2) \right. \\
&\quad \left. - \beta_{16}\beta^4 + 2\alpha\beta\lambda \left[ -2\beta_{14}(\alpha^2 + \beta^2\lambda^2) + \frac{1}{R} - \beta_{15}\beta^2 \right] \right\} - \frac{1}{2}f_1f_2\alpha^2\beta^2 \\
G_{05} &= \frac{1}{2}f_1f_2\alpha^2\beta^2
\end{aligned}$$

Nghiệm của (4.13) được xác định là

$$\begin{aligned}
A &= G_1 \cos 2\alpha x + G_2 \cos 2\beta(y - \lambda x) + G_3 \cos \beta \left[ y + \left( \frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right) x \right] + G_4 \cos \beta \left[ y - \left( \frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right) x \right] \\
&+ G_5 \cos \beta \left[ y - \left( 3 \frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right) x \right] + G_6 \cos \beta \left[ y + \left( 3 \frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right) x \right] - \tau hxy.
\end{aligned} \quad (4.14)$$

trong đó, thành phần  $G_i$  ( $i=1-6$ ) được xác định theo phụ lục E

Thế  $w$  và  $A$  từ biểu thức (4.12) và (4.14) vào (4.10), sau đó sử dụng phương pháp Galerkin, ta được

$$\left[ 2\tau h\beta^2\lambda + D_1 + D_2f_2 + D_3f_1^2 + D_4f_2^2 - K_1 - K_2(\alpha^2 + \beta^2\lambda^2 + \beta^2) \right] f_1 = 0 \quad (4.15)$$

$$D_5f_2 - D_6f_1^2 + D_7f_1^2f_2 - 4K_1f_0 - 3K_1f_2 - 4K_2\alpha^2f_2 = 0 \quad (4.16)$$

trong đó, thành phần  $D_i$  ( $i=1-7$ ) được xác định theo phụ lục F

Điều kiện chu vi kín của vỏ trụ được xác định theo biểu thức (3.41)

Từ các biểu thức (4.5), (4.9), (4.12) và (4.14), suy ra

$$2f_0 + f_2 - \frac{1}{4}Rf_1^2\beta^2 + 2R(C_{26}^*\phi_1 - C_{12}^*\phi_{1x}^T + C_{11}^*\phi_{1y}^T) = 0 \quad (4.17)$$

Từ các biểu thức (4.15)-(4.17), suy ra



$$\tau = -\frac{1}{2h\beta^2\lambda} \left\{ D_1 + D_2 \frac{2D_6f_1^2 + K_1Rf_1^2\beta^2 - 8K_1R(C_{26}^*\phi_1 - C_{12}^*\phi_{1,x}^T + C_{11}^*\phi_{1,y}^T)}{2(D_5 + D_7f_1^2 - K_1 - 4K_2\alpha^2)} + D_3f_1^2 \right. \\ \left. + D_4 \left[ \frac{2D_6f_1^2 + K_1Rf_1^2\beta^2 - 8K_1R(C_{26}^*\phi_1 - C_{12}^*\phi_{1,x}^T + C_{11}^*\phi_{1,y}^T)}{2(D_5 + D_7f_1^2 - K_1 - 4K_2\alpha^2)} \right]^2 - K_1 - K_2(\alpha^2 + \beta^2\lambda^2 + \beta^2) \right\} \quad (4.18)$$

Biểu thức (4.18) thiết lập quan hệ tải - độ võng, được sử dụng để xác định tải trọng xoắn tới hạn và vẽ đường cong quan hệ tải - độ võng mô tả đáp ứng sau tới hạn của vỏ trụ FGP có gân xiên gia cường chịu xoắn, trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi.

Khi bỏ qua thành phần nhiệt, biểu thức (4.18) được viết lại là

$$\tau = -\frac{1}{2h\beta^2\lambda} \left\{ D_1 + D_2 \frac{2D_6f_1^2 + K_1Rf_1^2\beta^2}{2(D_5 + D_7f_1^2 - K_1 - 4K_2\alpha^2)} + D_3f_1^2 \right. \\ \left. + D_4 \left[ \frac{2D_6f_1^2 + K_1Rf_1^2\beta^2}{2(D_5 + D_7f_1^2 - K_1 - 4K_2\alpha^2)} \right]^2 - K_1 - K_2(\alpha^2 + \beta^2\lambda^2 + \beta^2) \right\} \quad (4.19)$$

Nếu  $K_1 = K_2 = 0$  (không nền), thay vào (4.19), ta được

$$\tau = -\frac{1}{2h\beta^2\lambda} \left[ D_1 + \frac{D_2D_6f_1^2}{D_5 + D_7f_1^2} + D_3f_1^2 + \frac{D_4(D_6f_1^2)^2}{(D_5 + D_7f_1^2)^2} \right] \quad (4.20)$$

Từ biểu thức (4.20) cho  $f_1 \rightarrow 0$ , ta xác định được tải trọng tới hạn trên cho trường hợp vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu xoắn (bỏ qua ảnh hưởng của nhiệt độ và nền).

$$\tau_{upper} = \frac{-1}{2h\beta^2\lambda} \left\{ \alpha_{11} \left[ (\alpha^2 + \beta^2\lambda^2)^2 + (2\alpha\beta\lambda)^2 \right] + \alpha_{12}\beta^2(\alpha^2 + \beta^2\lambda^2) + \alpha_{13}\beta^4 \right. \\ \left. - \Gamma_{31}\beta^4 \left[ \alpha_{14} \left( \frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right)^4 + \left( \alpha_{15} - \frac{1}{R\beta^2} \right) \left( \frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right)^2 + \alpha_{16} \right] \right. \\ \left. + \Gamma_{41}\beta^4 \left[ \alpha_{14} \left( \frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right)^4 + \left( \alpha_{15} - \frac{1}{R\beta^2} \right) \left( \frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right)^2 + \alpha_{16} \right] \right\}. \quad (4.21)$$

Từ biểu thức (4.18) cho  $f_1 \rightarrow 0$ , ta xác định được tải trọng tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu xoắn trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi

$$\tau_{upper} = -\frac{1}{2h\beta^2\lambda} \left\{ D_1 + D_2 \frac{-8K_1R(C_{26}^*\phi_1 - C_{12}^*\phi_{1,x}^T + C_{11}^*\phi_{1,y}^T)}{2(D_5 - K_1 - 4K_2\alpha^2)} \right. \\ \left. + D_4 \left[ \frac{-8K_1R(C_{26}^*\phi_1 - C_{12}^*\phi_{1,x}^T + C_{11}^*\phi_{1,y}^T)}{2(D_5 - K_1 - 4K_2\alpha^2)} \right]^2 - K_1 - K_2(\alpha^2 + \beta^2\lambda^2 + \beta^2) \right\} \quad (4.22)$$

Sử dụng hai biểu thức (4.21) và (4.22), ta có thể xác định tải trọng tới hạn của vỏ hình trụ FGP có gân xiên gia cường trong trường hợp có xét đến và bỏ qua ảnh hưởng của nhiệt độ và nền.

Từ biểu thức (4.12), độ võng lớn nhất của vỏ trụ được xác định

$$W_{max} = f_0 + f_1 + f_2 \quad (4.23)$$

Thế  $f_0$  từ biểu thức (4.17) vào (4.23), ta được

$$W_{max} = \frac{1}{8}Rf_1^2\beta^2 - R(C_{26}^*\phi_1 - C_{12}^*\phi_{1,x}^T + C_{11}^*\phi_{1,y}^T) + f_1 \\ + \frac{2D_6f_1^2 + K_1Rf_1^2\beta^2 - 8K_1R(C_{26}^*\phi_1 - C_{12}^*\phi_{1,x}^T + C_{11}^*\phi_{1,y}^T)}{4(D_5 + D_7f_1^2 - K_1 - 4K_2\alpha^2)} \quad (4.24)$$

Sử dụng hai biểu thức (4.18) và (4.24), ta có thể vẽ đường cong quan hệ tải trọng xoắn - độ võng lớn nhất của vỏ trụ sandwich FGP chịu xoắn trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi.

Góc xoắn  $\psi$  của vỏ trụ được xác định như sau

$$\psi = \frac{1}{2\pi RL} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy = \frac{1}{2\pi RL} \int_0^{2\pi R} \int_0^L (\gamma_{xy}^0 - w_{,x}w_{,y}) dx dy \quad (4.25)$$

Thay  $\gamma_{xy}^0$  và  $N_{xy}$  từ biểu thức (4.5) và (4.9) vào (4.25), ta được

$$\psi = \frac{1}{2\pi RL} \int_0^{2\pi R} \int_0^L (C_{36}^*w_{,xy} - C_{33}^*A_{,xy} - w_{,x}w_{,y}) dx dy \quad (4.26)$$

Thay thế  $w$  và  $A$  từ biểu thức (4.12) và (4.14) vào (4.26), ta được

$$\psi = C_{33}^*\tau h + \frac{n^2\lambda}{4R^2} f_1^2 \quad (4.27)$$

Biểu thức (4.27) mô tả quan hệ giữa tải xoắn  $\tau$  và góc xoắn  $\psi$ , được sử dụng để vẽ đường cong quan hệ  $\tau - \psi$  của vỏ trụ sandwich FGP.

Biểu thức (4.27) cho thấy: khi  $f_1 = 0$  thì quan hệ giữa  $\tau - \psi$  là tuyến tính; khi  $\psi = 0$  thì  $f_1 = 0$  và  $\tau = 0$ , vì vậy đường cong  $\tau - \psi$  sẽ đi qua tọa độ ban đầu.

#### 4.2.4. Kết quả tính toán số

##### 4.2.4.1. Nghiên cứu so sánh

Để kiểm chứng độ tin cậy của lời giải, luận án tiến hành so sánh với kết quả đã được báo cáo trong tài liệu [67].

Sử dụng công thức (4.21), Bảng 4.1 chỉ ra sự so sánh kết quả tính toán của luận án với kết quả đã công bố của tác giả Vũ Hoài Nam cùng đồng nghiệp [67] đối với trường hợp vỏ trụ làm bằng vật liệu FGM có gân xiên gia cường chịu tải xoắn.

Bảng 4.1. So sánh tải trọng xoắn tới hạn trên  $\tau_{upper}$  (GPa) của vỏ trụ FGM có gân xiên gia cường. Silicon nitride (Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>)/Thép không gỉ SUS304),  $k_p=k$ ,  $h=0.005\text{m}$ ,  $L/R=3.75$ ,  $R/h=80$ ,  $h_{core}/h_{FG}=1/4$ ,  $e_0=0$ ,  $h_p=0.01\text{m}$ ,  $b_p=0.005\text{m}$ ,  $d_p=0.05\text{m}$  (không có nền đàn hồi)

$\Delta T$	$\Delta T=0\text{K}$		$\Delta T=300\text{K}$		$\Delta T=600\text{K}$	
Không có gân gia cường						
	Nam và cs [67]	Luận án	Nam và cs [67]	Luận án	Nam và cs [67]	Luận án
$k=0.2$	0.3827 (6, 0.29) <sup>a</sup>	0.3827 (6,0.29)	0.3007 (6,0.29)	0.3007 (6,0.29)	0.1519 (5,0.25)	0.1519 (5,0.25)
$k=1$	0.4784 (6,0.30)	0.4784 (6,0.30)	0.4136 (6,0.30)	0.4136 (6,0.30)	0.3101 (5,0.26)	0.3101 (5,0.26)
$k=5$	0.5459 (6,0.29)	0.5459 (6,0.29)	0.4937 (6,0.30)	0.4937 (6,0.30)	0.4301 (5,0.24)	0.4301 (5,0.24)
$k=10$	0.5559 (6,0.29)	0.5559 (6,0.29)	0.5057 (6,0.30)	0.5057 (6,0.30)	0.4498 (5,0.24)	0.4498 (5,0.24)
Có gân xiên gia cường						
$k=0.2$	1.269 (4,0.34,16) <sup>b</sup>	1.2693 (4,0.34,16)	0.9636 (4,0.34,16)	0.9636 (4,0.34,16)	0.4019 (4,0.33,16)	0.4019 (4,0.33,16)
$k=1$	1.5017 (4,0.34,17)	1.5017 (4,0.34,17)	1.2382 (4,0.33,17)	1.2382 (4,0.33,17)	0.8006 (4,0.32,17)	0.8006 (4,0.32,17)
$k=5$	1.7843 (4,0.34,17)	1.7843 (4,0.34,17)	1.5730 (4,0.34,17)	1.5730 (4,0.34,17)	1.2859 (4,0.33,18)	1.2859 (4,0.34,17)
$k=10$	1.8645 (4,0.34,17)	1.8645 (4,0.34,17)	1.6677 (4,0.35,17)	1.6677 (4,0.35,17)	1.4224 (4,0.34,18)	1.4224 (4,0.34,18)

<sup>a</sup> Mode tới hạn  $(n, \lambda)$ ;

<sup>b</sup> Mode tới hạn và số gân  $(n, \lambda, n_p)$ ;  $m=1$ .

Bảng 4.1 cho thấy, kết quả tính toán theo công thức (4.21) của luận án là tương đồng với kết quả đã được báo cáo trong tài liệu [67]. Điều này khẳng định độ tin cậy của phương pháp nghiên cứu được thực hiện trong luận án.

Trong phần tiếp theo, luận án nghiên cứu về vỏ trụ sandwich FGP có ba lớp, trong đó lớp lõi xếp ở giữa làm bằng bột kim loại và được phủ hai mặt bằng vật liệu FGM. Vỏ trụ FGP có gân xiên FGM gia cường, được bao quanh bởi nền đàn hồi Pasternak. Vật liệu FGM làm lớp phủ mặt và gân là hỗn hợp của Zirconia (gốm) và Ti-6Al-4V (kim loại) với các đặc tính vật liệu cấu thành vỏ trụ được xác định trong Bảng 2.5. Lớp lõi làm từ Ti-6Al-4V xếp. Hệ số Poisson  $\nu = 0,3$ .

Các thông số khảo sát được lấy như sau:  $h=0.008\text{m}$ ,  $L/R=3$ ,  $R/h=80$ ,  $h_{core}/h_{FG}=3$ ,  $e_0=0.5$ ,  $k_p=k=1$ ,  $h_p=0.01\text{m}$ ,  $b_p=0.008\text{m}$ ,  $d_p=0.08\text{m}$ ,  $K_1=8\times 10^6\text{N/m}^3$ ,  $K_2=2\times 10^5\text{N/m}$ ,  $\Delta T=300\text{K}$ .

#### 4.2.4.2. Ảnh hưởng của số lượng gân gia cường và nhiệt độ

Sử dụng hai biểu thức (4.18) và (4.22), luận án thực hiện khảo sát ảnh hưởng của số lượng gân gia cường đối với tải trọng tới hạn trên và tải trọng tới hạn dưới của vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu tải xoắn, bao quanh bởi nền đàn hồi. Kết quả khảo sát được mô tả trong Bảng 4.2 và các Hình 4.2a, 4.2b, 4.2c. Số lượng gân được lấy là  $n_p=1\div 25$ .

Quan sát kết quả thể hiện trong Bảng 4.2 và các Hình 4.2a, 4.2b, 4.2c có thể thấy rằng, khi  $n_p$  tăng thì tải trọng tới hạn của vỏ trụ tăng và sau đó giảm dần khi đạt giá trị lớn nhất.

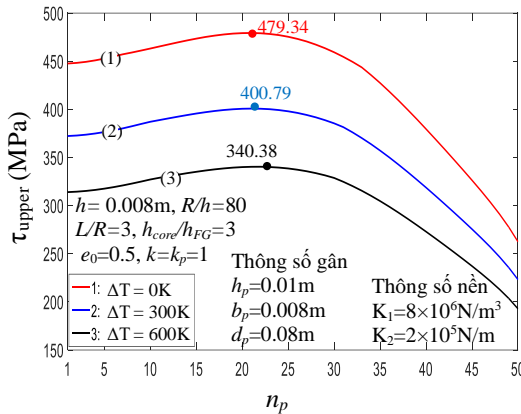
Bảng 4.2 cho thấy, tải trọng tới hạn đạt giá trị lớn nhất với  $n_p=21$  (trong trường hợp  $\Delta T=0\text{K}$  và  $\Delta T=300\text{K}$ ) sau đó giảm xuống. Điều này chỉ ra rằng, việc tăng số lượng gân gia cường không phải lúc nào cũng làm tăng khả năng chịu lực của vỏ trụ. Do số lượng gân xiên phụ thuộc vào góc của gân, vì vậy khi thay đổi số lượng gân sẽ làm cho góc của gân thay đổi và điều này làm thay đổi khả năng chịu lực của vỏ trụ. Quan sát Hình 4.2a, 4.2b và 4.2c ta thấy, với mỗi  $\Delta T$ ,  $e_0$  và tỉ số  $h_{core}/h_{FG}$  khác nhau sẽ cho các giá trị  $n_p$  (số gân) tối ưu khác nhau. Do đó, để tối ưu hóa kết cấu, trong các tính toán sau này,  $n_p$  được chọn sao cho tải trọng tới hạn của vỏ trụ là lớn nhất. Ngoài ra, Hình 4.2b cũng cho thấy sự gia tăng hệ số độ xếp  $e_0$  làm giảm độ cứng của vỏ trụ sandwich FGP, dẫn đến giảm tải trọng xoắn tới hạn của vỏ.

Bảng 4.2 cũng chỉ ra ảnh hưởng của nhiệt độ đối với tải trọng tới hạn trên và tải trọng tới hạn dưới của vỏ trụ. Ta thấy, tải xoắn tới hạn trên và tải xoắn tới hạn dưới của vỏ trụ FGP giảm đi rất nhiều khi nhiệt độ  $\Delta T$  tăng. Ví dụ, với vỏ trụ có cùng số gân ( $n_p=21$ ) tải trọng tới hạn dưới  $\tau_{lower}=467.5575\text{ MPa}$  với  $\Delta T=0\text{K}$  lớn hơn tải trọng tới hạn dưới với  $\Delta T=300\text{K}$  là  $76.0556\text{ MPa}$  và  $\Delta T=600\text{K}$  là  $134.4434\text{ MPa}$ .

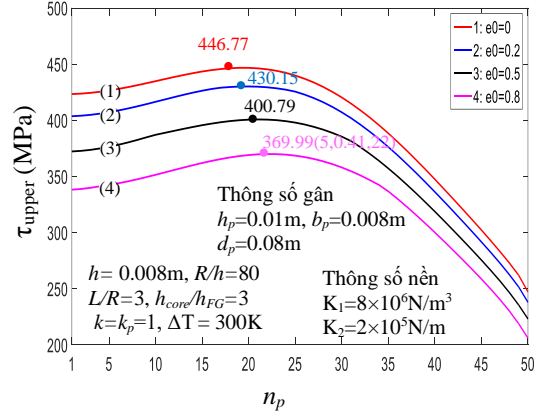
Bảng 4.2. Ảnh hưởng của số gân  $n_p$  và  $\Delta T$  đối với tải tới hạn. Zirconia/Ti-6Al-4V,  $k_p=k=1$ ,  $h=0.008\text{m}$ ,  $L/R=3$ ,  $R/h=80$ ,  $h_{core}/h_{FG}=3$ ;  $e_0=0.5$ ;  $h_p=0.01\text{m}$ ,  $b_p=0.008\text{m}$ ,  $d_p=0.08\text{m}$ ,  $K_1=8\times 10^6\text{ N/m}^3$ ,  $K_2=2\times 10^5\text{ N/m}$ ;

$n_p$	$\theta$ (độ) $\theta = \arccos\left(\frac{n_p d_p}{2\pi R}\right)$	$\Delta T=0\text{K}$		$\Delta T=300\text{K}$		$\Delta T=600\text{K}$	
		$\tau$	$(n, \lambda)$	$\tau$	$(n, \lambda)$	$\tau$	$(n, \lambda)$
15	72.64	473.4846 <sup>U</sup>	(5,0.43)	395.6732	(5,0.44)	335.1431	(5,0.44)
		461.5028 <sup>L</sup>	(5,0.43)	386.1711	(5,0.44)	327.6598	(5,0.44)
16	71.44	475.2088	(5,0.42)	397.0660	(5,0.43)	336.4800	(5,0.43)
		463.1788	(5,0.43)	387.6025	(5,0.43)	329.0115	(5,0.44)
17	70.23	476.6283	(5,0.42)	398.3157	(5,0.42)	337.6697	(5,0.43)
		464.6461	(5,0.42)	388.8704	(5,0.43)	330.1946	(5,0.43)
18	69.02	477.8173	(5,0.41)	399.3426	(5,0.42)	338.6588	(5,0.42)
		465.8894	(5,0.42)	389.9007	(5,0.42)	331.2412	(5,0.42)
19	67.79	478.7092	(5,0.41)	400.1006	(5,0.41)	339.4726	(5,0.41)
		466.7637	(5,0.41)	390.7328	(5,0.41)	332.0616	(5,0.42)
20	66.55	479.1963	(5,0.40)	400.6167	(5,0.40)	340.0282	(5,0.41)
		467.3464	(5,0.40)	391.2624	(5,0.41)	332.6651	(5,0.41)
21	65.31	479.3409	(5,0.39)	400.7889	(5,0.40)	340.3263	(5,0.40)
		467.5575	(5,0.40)	391.5019	(5,0.40)	333.0515	(5,0.41)
22	64.05	479.0622	(5,0.39)	400.6316	(5,0.39)	340.3795	(5,0.39)
		467.3284	(5,0.39)	391.4601	(5,0.40)	333.1141	(5,0.40)
23	62.77	478.3013	(5,0.38)	400.1608	(5,0.38)	340.0811	(5,0.39)
		466.7212	(5,0.38)	391.0037	(5,0.39)	332.9255	(5,0.39)
24	61.48	477.1221	(5,0.37)	399.2441	(5,0.38)	339.4935	(5,0.38)
		465.6170	(5,0.38)	390.2299	(5,0.38)	332.4260	(5,0.39)
25	60.17	475.4168	(5,0.37)	397.9739	(5,0.37)	338.5929	(5,0.38)

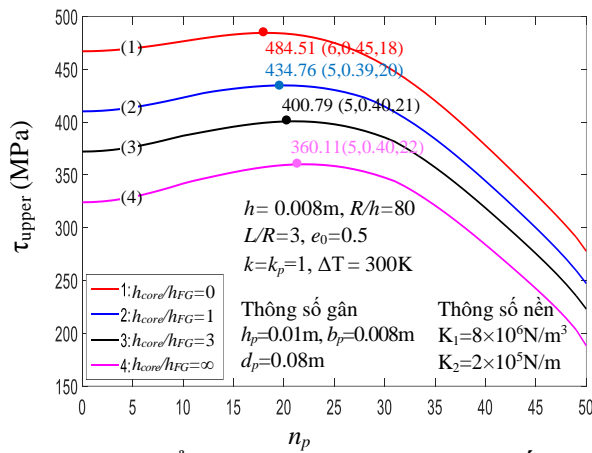
<sup>U</sup> Tải trọng tới hạn trên; <sup>L</sup> Tải trọng tới hạn dưới; <sup>a</sup> Mode tới hạn  $(n, \lambda)$ ; <sup>b</sup> Mode tới hạn và số gân  $(n, \lambda, n_p)$ ;  $m=1$ .



Hình 4.2a. Ảnh hưởng của  $\Delta T$  đối với đường cong  $\tau - n_p$



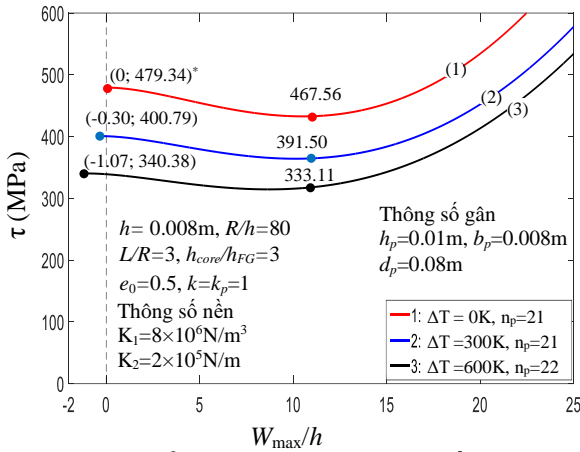
Hình 4.2b. Ảnh hưởng của  $e_0$  đối với đường cong  $\tau - n_p$



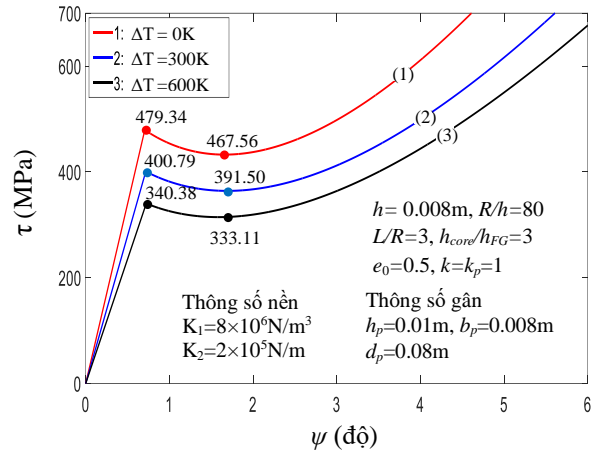
Hình 4.2c. Ảnh hưởng của  $h_{core}/h_{FG}$  đối với đường cong  $\tau - n_p$

Ảnh hưởng của sự thay đổi nhiệt độ đối với tải tới hạn trên và tải tới hạn dưới của vỏ trụ cũng được thể hiện trong Bảng 4.5, Hình 4.8 và Hình 4.9. Có thể thấy rằng, tải tới hạn của vỏ giảm xuống rất nhiều khi  $\Delta T$  tăng. Ví dụ, với trường hợp vỏ trụ có gân xiên gia cường, chỉ số tỉ phần thể tích  $k=1$ , tải trọng tới hạn dưới  $\tau_{lower}=467.5575$  MPa (với  $\Delta T=0\text{K}$ ) lớn hơn tải trọng tới hạn dưới tương ứng với  $\Delta T=300\text{K}$  là 76.0556 MPa và  $\Delta T=600\text{K}$  là 134.4434 MPa.

Sử dụng các biểu thức (4.18), (4.24) và (4.27), tiến hành khảo sát ảnh hưởng của  $\Delta T$  đến đường cong quan hệ tải xoắn - độ võng  $W_{max}/h$ , và đường cong quan hệ tải xoắn - góc xoắn  $\psi$ , kết quả này được mô tả trong Hình 4.3a và Hình 4.3b. Quan sát Hình 4.3a ta thấy, các đường cong 2 và 3 không bắt đầu tại một điểm trên trục  $y$ . Điều này cho thấy, môi trường nhiệt độ làm cho vỏ lệch ra ngoài (lệch âm) trước khi nó chịu tải cơ. Khi vỏ chịu tải xoắn, độ võng hướng ra ngoài của nó giảm cho đến khi tải xoắn đạt đến điểm phân đôi (tải xoắn tới hạn) thì độ võng hướng vào trong xảy ra.



Hình 4.3a. Ảnh hưởng của  $\Delta T$  đối với đường cong  $\tau - W_{\max}/h$ . \* Tọa độ ( $W_{\max}/h$ ;  $\tau$ )



Hình 4.3b. Ảnh hưởng của  $\Delta T$  đối với đường cong  $\tau - \psi$

#### 4.2.4.3. Ảnh hưởng của hệ số độ xấp $e_0$ và tỉ lệ $h_{core}/h_{FG}$

Sử dụng các biểu thức (4.18) và (4.22), Bảng 4.3 mô tả ảnh hưởng của hệ số độ xấp  $e_0$  và tỉ lệ độ dày  $h_{core}/h_{FG}$  đến tải xoắn tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu tải trọng xoắn, trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi.

Hình 4.4a và 4.4b thể hiện ảnh hưởng của tỉ lệ  $h_{core}/h_{FG}$  đến đường cong quan hệ tải - độ võng  $W_{\max}/h$  và đường cong quan hệ tải - góc xoắn  $\psi$  của vỏ trụ. Quan sát thấy, khi tỉ lệ độ dày  $h_{core}/h_{FG}$  tăng lên thì giá trị tải trọng xoắn tới hạn trên và tải trọng xoắn tới hạn dưới của vỏ trụ giảm đi. Cụ thể, Hình 4.4a và 4.4b cho thấy tải tới hạn trên giảm khoảng 35% từ  $\tau_{upper}=484.51$  MPa (với  $h_{core}/h_{FG}=0$ ) đến  $\tau_{upper}=360.11$  MPa (với  $h_{core}=h, h_{FG}=0$ ), và tải trọng tới hạn dưới giảm khoảng 33% từ  $\tau_{lower}=470.24$  MPa (với  $h_{core}/h_{FG}=0$ ) đến  $\tau_{lower}=352.52$  MPa (với  $h_{core}=h, h_{FG}=0$ ). Điều này phù hợp thực tế vì với vỏ trụ sandwich FGP khi chiều dày lớp lõi tăng lên, độ cứng của vỏ giảm dẫn đến giảm tải trọng tới hạn.

Hình 4.5a và 4.5b một lần nữa cho thấy ảnh hưởng của hệ số xấp  $e_0$  đối với đường cong  $\tau - W_{\max}/h$  và đường cong  $\tau - \psi$  của vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường. Quan sát thấy, việc tăng hệ số xấp  $e_0$  làm cho mô đun đàn hồi Young của vật liệu xấp giảm, dẫn đến các đường cong ứng xử phi tuyến  $\tau - W_{\max}/h$  và  $\tau - \psi$  thấp hơn, đồng thời giảm tải trọng xoắn tới hạn  $\tau_{cr}$ .

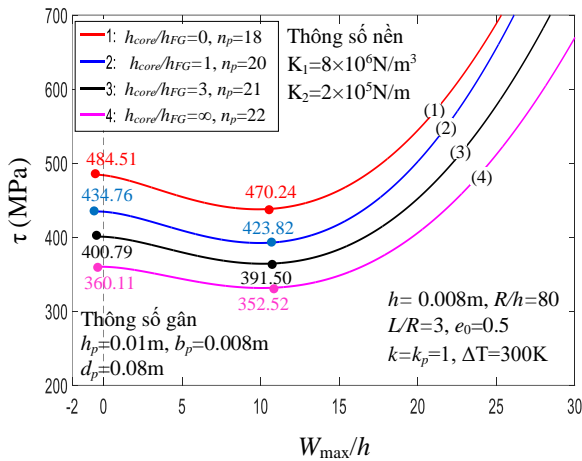
Bảng 4.3. Ảnh hưởng của  $e_0$  và  $h_{core}/h_{FG}$  đối với tải tới hạn.  $k_p=k=1$ ,  $h=0.008\text{m}$ ,  
 $L/R=3$ ,  $R/h=80$ ,  $h_p=0.01\text{m}$ ,  $b_p=0.008\text{m}$ ,  $d_p=0.08\text{m}$ ;  $\Delta T=300\text{K}$ ,  $K_1=8\times 10^6\text{N/m}^3$ ,  
 $K_2=2\times 10^5\text{N/m}$

$\tau_{cr}$ (MN)	$e_0=0$	$e_0=0.2$	$e_0=0.5$	$e_0=0.8$
$h_{core}/h_{FG} = 0$	484.5079 <sup>U</sup>	484.5079	484.5079	484.5079
	(6,0.45,18)*	(6,0.45,18)	(6,0.45,18)	(6,0.45,18)
	470.2419 <sup>L</sup>	470.2419	470.2419	470.2419
	(6,0.45,19)	(6,0.45,19)	(6,0.45,19)	(6,0.45,19)
$h_{core}/h_{FG} = 0.5$	470.4880	464.5054	454.6001	442.8058
	(6,0.45,19)	(6,0.45,19)	(5,0.39,19)	(5,0.39,20)
	457.2020	451.7570	442.4818	431.4970
	(6,0.45,19)	(6,0.46,19)	(5,0.39,20)	(5,0.39,20)
$h_{core}/h_{FG} = 1$	462.0125	452.5323	434.7647	416.1985
	(6,0.45,19)	(6,0.46,19)	(5,0.39,20)	(5,0.39,21)
	449.2386	440.5607	423.8204	406.3750
	(6,0.46,19)	(6,0.45,20)	(5,0.39,20)	(5,0.40,21)
$h_{core}/h_{FG} = 2$	452.2306	438.1537	412.7643	386.3572
	(6,0.45,19)	(5,0.39,20)	(5,0.39,21)	(5,0.40,22)
	439.8884	426.7493	402.9400	378.1198
	(6,0.45,20)	(5,0.39,20)	(5,0.40,21)	(5,0.41,22)
$h_{core}/h_{FG} = 3$	446.7687	430.1537	400.7889	369.9882
	(6,0.45,19)	(5,0.39,20)	(5,0.40,21)	(5,0.41,22)
	434.6961	419.1365	391.5019	362.4617
	(6,0.45,20)	(5,0.39,20)	(5,0.40,21)	(5,0.41,23)
$h_{core}/h_{FG} = 4$	443.2844	425.1322	393.2250	359.6299
	(6,0.46,19)	(5,0.39,20)	(5,0.40,21)	(5,0.40,23)
	431.3795	414.3472	384.2959	352.5701
	(6,0.45,20)	(5,0.39,20)	(5,0.40,21)	(5,0.41,23)
$h_{core}/h_{FG} = 5$	440.8617	421.6868	388.0297	352.4784
	(6,0.46,19)	(5,0.39,20)	(5,0.40,21)	(5,0.41,23)
	429.0801	411.0566	379.3288	345.7424
	(6,0.45,20)	(5,0.39,20)	(5,0.40,22)	(5,0.41,23)
$h_{core}/h_{FG} = \infty$	427.7195	403.1782	360.1058	313.4251
	(6,0.45,20)	(5,0.40,20)	(5,0.40,22)	(5,0.41,24)
	416.4297	393.2742	352.5240	308.2232
	(6,0.46,20)	(5,0.39,21)	(5,0.41,22)	(5,0.42,24)

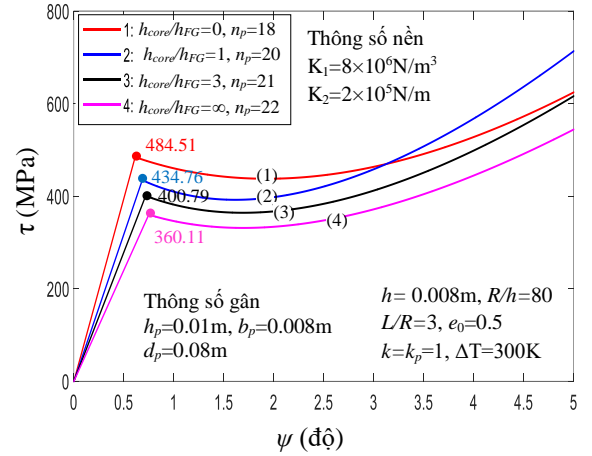
<sup>U</sup>Tải trọng tới hạn trên; <sup>L</sup>Tải trọng tới hạn dưới;

<sup>b</sup>Mode tới hạn và số gân xiên ( $n, \lambda, n_p$ );  $m=1$ .

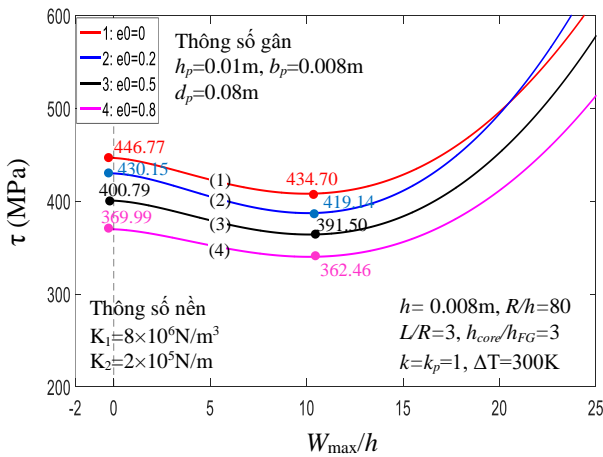




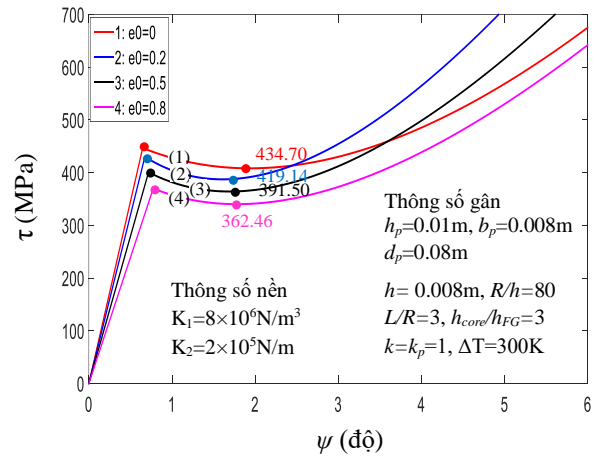
Hình 4.4a. Ảnh hưởng  $h_{core}/h_{FG}$  đối với đường cong  $\tau - W_{max}/h$



Hình 4.4b. Ảnh hưởng  $h_{core}/h_{FG}$  đối với đường cong  $\tau - \psi$



Hình 4.5a. Ảnh hưởng của  $e_0$  đối với đường cong  $\tau - W_{max}/h$



Hình 4.5b. Ảnh hưởng của  $e_0$  đối với đường cong  $\tau - \psi$

#### 4.2.4.4. Ảnh hưởng của nền và gân gia cường

Sử dụng biểu thức (4.27), Bảng 4.4 mô tả ảnh hưởng của nền và gân gia cường đối với tải trọng tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu tải xoắn, trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi. Những ảnh hưởng này cũng được mô tả qua đường cong quan hệ tải - độ võng  $W_{max}/h$  và đường cong quan hệ tải - góc xoắn  $\psi$  trong Hình 4.6a-b và Hình 4.7a-b. Quan sát thấy, tải xoắn tới hạn tăng khi các hệ số nền  $K_1$  và  $K_2$  tăng riêng biệt hoặc tăng đồng thời.

Bảng 4.4 cũng cho thấy, giá trị tải trọng xoắn tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP có thiết kế gân xiên gia cường lớn hơn nhiều so với vỏ không thiết kế gân gia cường. Nhận xét này cũng được quan sát thấy trong Bảng 4.5.

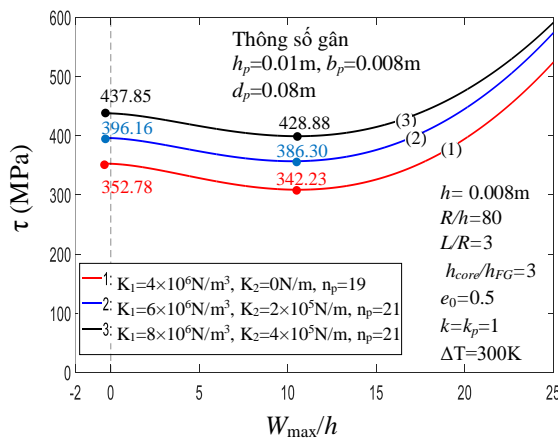
Bảng 4.4. Ảnh hưởng của gân gia cường và nền đối với tải tới hạn.  $k_p=k=1$ ,  $h=0.008m$ ,  $L/R=3$ ,  $R/h=80$ ,  $h_{core}/h_{FG}=3$ ;  $e_0=0.5$ ;  $h_p=0.01m$ ,  $b_p=0.008m$ ,  $d_p=0.08m$ ;  $\Delta T=300K$

$\tau$ (MPa)	$K_1=4 \times 10^6$ N/m <sup>3</sup>	$K_1=6 \times 10^6$ N/m <sup>3</sup>	$K_1=8 \times 10^6$ N/m <sup>3</sup>
Không có gân gia cường			
$K_2=0$ N/m	168.9697 <sup>U</sup> (6,0.32) <sup>a</sup>	172.8967 (6,0.32)	176.7365 (6,0.33)
	161.7076 <sup>L</sup> (6,0.33)	166.5562 (6,0.33)	171.2986 (6,0.34)
$K_2=2 \times 10^5$ N/m	211.0407 (6,0.36)	214.4954 (6,0.37)	216.7899 (7,0.41)
	203.3444 (6,0.37)	207.6639 (6,0.38)	211.5087 (7,0.43)
$K_2=4 \times 10^5$ N/m	247.9847 (7,0.44)	249.9836 (7,0.44)	251.9836 (7,0.44)
	240.4477 (7,0.45)	243.4386 (7,0.45)	246.4276 (7,0.45)
Có gân xiên gia cường			
$K_2=0$ N/m	352.7848 (5,0.38,19) <sup>*</sup>	357.6063 (5,0.38,19)	362.4033 (5,0.38,20)
	342.2256 (5,0.38,19)	347.6833 (5,0.39,19)	353.1260 (5,0.38,20)
$K_2=2 \times 10^5$ N/m	391.4515 (5,0.39,21)	396.1587 (5,0.39,21)	400.7889 (5,0.40,21)
	381.0327 (5,0.39,21)	386.3016 (5,0.40,21)	391.5019 (5,0.40,21)
$K_2=4 \times 10^5$ N/m	429.1654 (5,0.41,22)	433.6470 (5,0.41,22)	437.8470 (5,0.42,21)
	418.7717 (5,41,22)	423.8502 (5,0.41,22)	428.8785 (5,0.42,22)

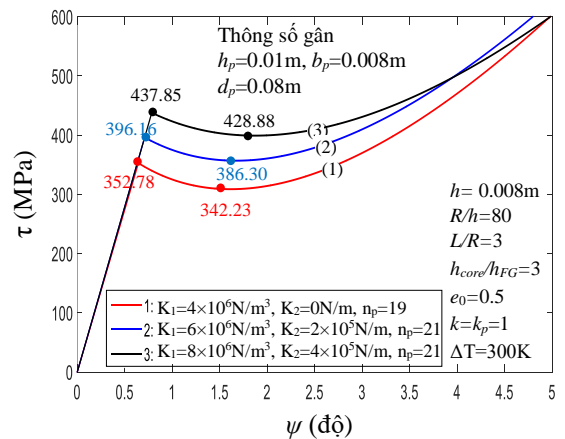
<sup>U</sup> Tải trọng xoắn tới hạn trên;    <sup>L</sup> Tải trọng xoắn tới hạn dưới;

<sup>a</sup> Mode tới hạn ( $n, \lambda$ );

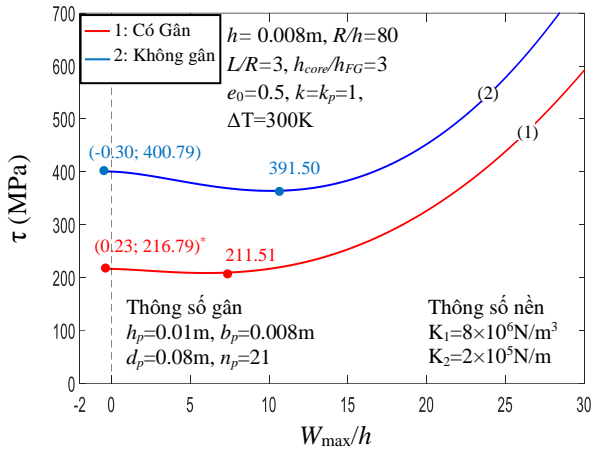
<sup>\*</sup> Mode tới hạn và số gân xiên ( $n, \lambda, n_p$ );  $m=1$ .



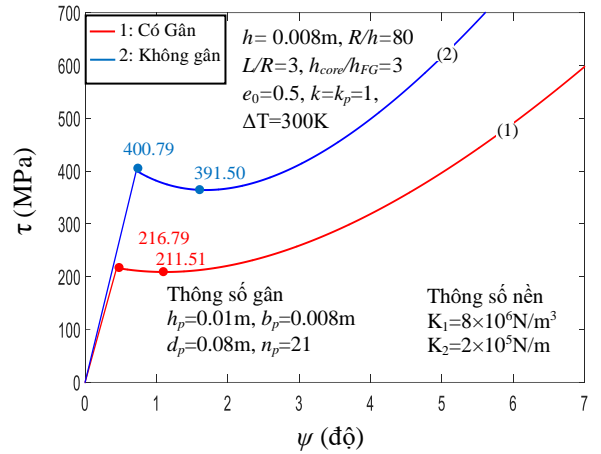
Hình 4.6a. Ảnh hưởng của nền đối với đường cong  $\tau - W_{max}/h$



Hình 4.6b. Ảnh hưởng của nền đối với đường cong  $\tau - \psi$



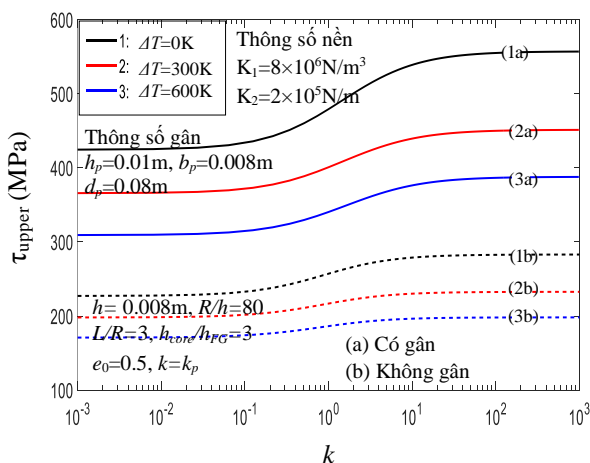
Hình 4.7a. Ảnh hưởng của  $\Delta T$  đối với đường cong  $\tau - W_{max}/h$ . \* Tọa độ ( $W_{max}/h; \tau$ )



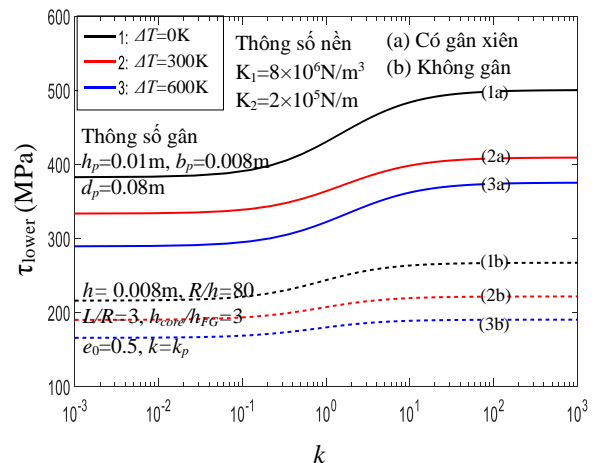
Hình 4.7b. Ảnh hưởng của  $\Delta T$  đối với đường cong  $\tau - \psi$

#### 4.2.4.5. Ảnh hưởng của chỉ số tỉ phần thể tích $k$

Sử dụng biểu thức (4.22), Bảng 4.5 mô tả ảnh hưởng của chỉ số tỉ phần thể tích  $k$  đến tải trọng xoắn tới hạn trên và dưới của vỏ trụ sandwich FGP. Bảng 4.5 cho thấy, khi giá trị  $k$  tăng thì tải xoắn tới hạn trên và dưới của vỏ cũng đều tăng. Nhận xét này cũng được quan sát thấy trong Hình 4.8-4.9. Ta nhận thấy, nhận xét này là hoàn toàn hợp lý, vì giá trị  $k$  càng lớn thì thành phần gồm của lớp phủ càng phong phú dẫn đến tăng độ cứng cũng như tăng khả năng chịu xoắn của vỏ trụ sandwich FGP.



Hình 4.8. Ảnh hưởng của  $k$  đối với tải xoắn tới hạn trên



Hình 4.9. Ảnh hưởng của  $k$  đối với tải xoắn tới hạn dưới

Bảng 4.5. Ảnh hưởng của  $\Delta T$  và  $k$  đối với tải tới hạn.  $k_p=k$ ,  $h=0.008\text{m}$ ,  $L/R=3$ ,  $R/h=80$ ,  $h_{core}/h_{FG}=3$ ,  $e_0=0.5$ ,  $h_p=0.01\text{m}$ ,  $b_p=0.008\text{m}$ ,  $d_p=0.08\text{m}$ ;  $K_1=8\times 10^6\text{N/m}^3$ ,  $K_2=2\times 10^5\text{N/m}$

$\tau$ (MPa)	$k=0$	$k=0.5$	$k=1$	$k=5$	
Không có gân gia cường	$\Delta T=0\text{K}$	227.0353 <sup>U</sup>	247.3741	256.3696	272.6354
		(7,0.41) <sup>a</sup>	(7,0.41)	(6,0.36)	(6,0.36)
		220.8271 <sup>L</sup>	240.0333	248.3867	263.9595
		(7,0.42)	(6,0.37)	(6,0.37)	(6,0.37)
	$\Delta T=300\text{K}$	198.0047	210.7564	216.7899	227.6862
		(7,0.41)	(7,0.41)	(7,0.41)	(6,0.37)
		193.3944	205.6937	211.5087	221.2464
		(7,0.43)	(7,0.43)	(7,0.43)	(6,0.38)
	$\Delta T=600\text{K}$	170.8348	181.5111	186.2155	194.0139
		(7,0.43)	(7,0.42)	(7,0.42)	(6,0.37)
		167.7173	178.0347	182.5464	189.2717
		(7,0.44)	(7,0.43)	(7,0.43)	(6,0.38)
Có gân xiên gia cường	$\Delta T=0\text{K}$	424.4563 <sup>U</sup>	459.7751	479.3409	526.0678
		(5,0.40,20) <sup>*</sup>	(5,0.39,21)	(5,0.39,21)	(5,0.40,21)
		414.0914 <sup>L</sup>	448.5082	467.5575	513.1859
		(5,0.40,21)	(5,0.40,21)	(5,0.40,21)	(5,0.40,21)
	$\Delta T=300\text{K}$	365.7845	388.3205	400.7889	430.8531
		(5,0.40,21)	(5,0.40,21)	(5,0.40,21)	(5,0.40,21)
		357.4786	379.3636	391.5019	420.8897
		(5,0.40,21)	(5,0.40,21)	(5,0.40,21)	(5,0.40,21)
	$\Delta T=600\text{K}$	307.7310	329.3102	340.3795	368.0000
		(6,0.47,21)	(5,0.40,22)	(5,0.39,22)	(5,0.39,22)
		301.6684	322.3820	333.1141	360.0904
		(6,0.47,22)	(5,0.40,22)	(5,0.40,22)	(5,0.40,22)

<sup>U</sup> Tải trọng xoắn tới hạn trên;    <sup>L</sup> Tải trọng xoắn tới hạn dưới;

<sup>a</sup> Mode tới hạn ( $n, \lambda$ );

<sup>b</sup> Mode tới hạn và số gân xiên ( $n, \lambda, n_p$ );  $m=1$ .

#### 4.2.4.6. Ảnh hưởng của các thông số hình học

Ảnh hưởng của các thông số hình học  $R/h$  và  $L/R$  đối với tải trọng xoắn tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP được mô tả trong Bảng 4.6. Ảnh hưởng của  $R/h$  và  $L/R$  đối với đường cong  $\tau - W_{\max} / h$  và đường cong  $\tau - \psi$  được mô tả trên Hình 4.10a-b, Hình 4.11a-b. Kết quả cho thấy, khi tăng tỉ số  $R/h$  và  $L/R$  thì khả năng chịu

tải xoắn của vỏ trụ giảm đi đáng kể. Ví dụ, với  $R/h=50$ , tải trọng xoắn tới hạn  $\tau_{lower}=754,6674$  MPa khi  $L/R=2$  lớn hơn tải xoắn tới hạn tương ứng với  $L/R=3$  và  $L/R=4$  lần lượt là 1.16 và 1.32 lần.

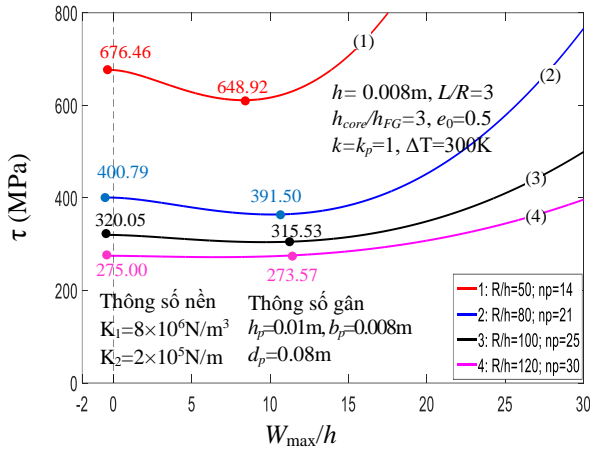
Bảng 4.6. Ảnh hưởng của các thông số hình học đối với tải xoắn tới hạn.

$k_p=k=1$ ,  $h=0.008\text{m}$ ,  $L/R=3$ ,  $R/h=80$ ,  $h_{core}/h_{FG}=3$ ,  $e_0=0.5$ ,  $h_p=0.01\text{m}$ ,  $b_p=0.008\text{m}$ ,  
 $d_p=0.08\text{m}$ ;  $K_1=8\times 10^6\text{ N/m}^3$ ,  $K_2=2\times 10^5\text{ N/m}$ ,  $\Delta T=300\text{K}$

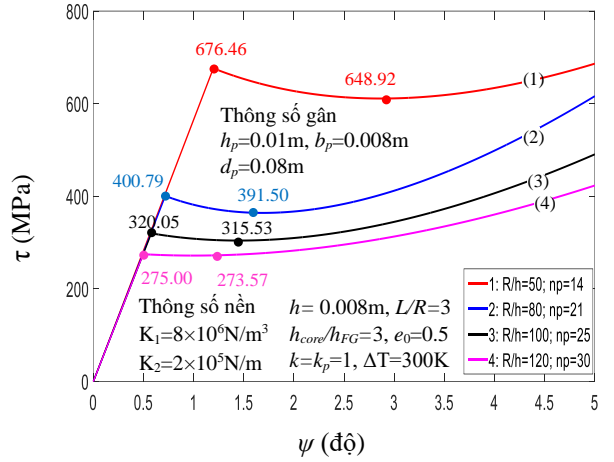
$\tau$ (MPa)	$R/h=50$	$R/h=80$	$R/h=100$	$R/h=120$
$L/R=2$	805.7635 <sup>U</sup>	464.7240	368.1736	304.8706
	(5,0.46,18) <sup>*</sup>	(6,0.45,26)	(7,0.47,31)	(7,0.45,37)
	754.6674 <sup>L</sup>	443.7726	356.1096	297.6751
	(5,0.48,18)	(6,0.46,26)	(7,0.48,31)	(7,0.46,37)
$L/R=2.5$	721.2529	426.4960	338.5817	285.2827
	(5,0.46,16)	(6,0.46,23)	(6,0.43,28)	(7,0.46,33)
	684.1230	412.8723	331.0756	281.6992
	(5,0.47,16)	(6,0.46,23)	(6,0.43,28)	(7,0.46,33)
$L/R=3$	676.4564	400.7889	320.0456	274.9965
	(5,0.47,14)	(5,0.40,21)	(6,0.43,25)	(7,0.46,30)
	648.9152	391.5019	315.5288	273.5684
	(5,0.48,14)	(5,0.40,21)	(6,0.43,26)	(7,0.46,31)
$L/R=3.5$	621.7701	378.7487	309.2324	265.3579
	(4,0.39,13)	(5,0.40,19)	(6,0.44,23)	(6,0.42,27)
	601.4621	372.4197	306.6160	264.6750
	(4,0.39,13)	(5,0.41,19)	(6,0.44,24)	(6,0.42,28)
$L/R=4$	586.7978	364.9207	302.4197	258.7553
	(4,0.39,12)	(5,0.41,17)	(6,0.44,22)	(6,0.42,25)
	571.3903	360.4654	301.0618	258.7553
	(4,0.40,12)	(5,0.41,17)	(6,0.44,22)	(6,0.42,25)

<sup>U</sup> Tải trọng xoắn tới hạn trên; <sup>L</sup> Tải trọng xoắn tới hạn dưới;

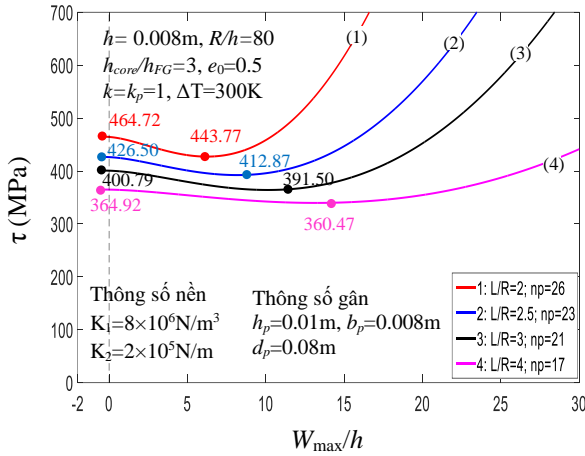
\* Mode tới hạn và số gân xiên ( $n, \lambda, n_p$ );  $m=1$ .



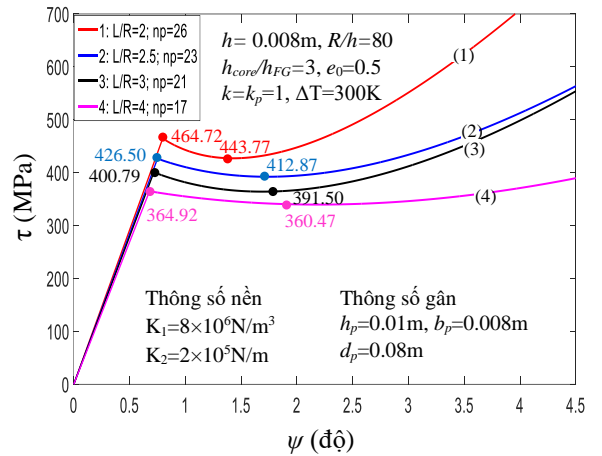
Hình 4.10a. Ảnh hưởng của  $R/h$  đối với đường cong  $\tau - W_{max}/h$



Hình 4.10b. Ảnh hưởng của  $R/h$  đối với đường cong  $\tau - \psi$



Hình 4.11a. Ảnh hưởng của  $L/R$  đối với đường cong  $\tau - W_{max}/h$



Hình 4.11b. Ảnh hưởng của  $L/R$  đối với đường cong  $\tau - \psi$

### 4.3. Phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân trực giao gia cường chịu tải xoắn

#### 4.3.1. Vỏ trụ sandwich FGP có gân trực giao gia cường chịu tải xoắn

Xét vỏ trụ sandwich FGP có bán kính mặt giữa là  $R$ , chiều dày là  $h$  và chiều dài là  $L$  có gân trực giao FGM gia cường, chịu tải trọng xoắn trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi. Vỏ trụ được xác định trong một hệ tọa độ  $xyz$  có mặt phẳng  $(x, y)$  trùng với mặt giữa của vỏ và tọa độ chiều dày của vỏ  $z$  ( $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ ) như được mô tả trong Hình 3.7. Vỏ trụ sandwich FGP ba lớp, gồm một lớp lõi xốp FG có mô hình phân bố xốp đối xứng (bột kim loại) ở giữa, và hai lớp phủ FGM. Các lớp phủ mặt FGM là mỏng, trong khi lớp lõi xốp tương đối dày. Độ dày lớp lõi xốp là

$h_{core}$ , độ dày của mỗi lớp phủ mặt FGM là  $\frac{h_{FG}}{2}$  ( $h=h_{core}+h_{FG}$ ). Gân trục giao FGM gia cường hình chữ nhật có chiều rộng, chiều cao và khoảng cách các gân như mô tả trong Hình 3.7. Giả thiết các lớp được liên kết là hoàn hảo (tức bỏ qua sự bong tách giữa các lớp).

Môđun đàn hồi Young và hệ số giãn nở nhiệt của vỏ trụ FGP và gân gia cường FGM lần lượt được xác định theo biểu thức (3.21) và (3.22)

### 4.3.2. Các phương trình cơ bản

Theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến hình học von-Karman, các thành phần biến dạng ở một điểm cách mặt giữa vỏ một khoảng  $z$  là [92]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ w_{,x} + \phi_x \\ w_{,y} + \phi_y \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

với

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{w_{,x}^2}{2} \\ v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{w_{,y}^2}{2} \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

trong đó

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$  lần lượt là biến dạng theo phương  $x$  và  $y$ ;

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  là biến dạng cắt;

$u, v, w$  lần lượt là các thành phần chuyển vị theo phương  $x, y$  và  $z$ ;

$\phi_x, \phi_y$  lần lượt là góc xoay theo mặt phẳng  $yz$  và  $xz$ ;

$\varepsilon_x^0$  và  $\varepsilon_y^0$  là các thành phần biến dạng pháp tuyến;

$\gamma_{xy}^0$  là biến dạng trượt trong mặt phẳng ở mặt giữa ( $z=0$ ) của vỏ.

Theo định luật Hooke có kể đến môi trường nhiệt độ ( $\Delta T = T - T_0$ ), các thành phần ứng suất của vỏ và gân (gân trong) được xác định như sau

$$\begin{aligned}\sigma_x^{sh} &= \frac{E_{sh}}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) - \frac{E_{sh}\alpha_{sh}}{1-\nu}\Delta T \\ \sigma_y^{sh} &= \frac{E_{sh}}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) - \frac{E_{sh}\alpha_{sh}}{1-\nu}\Delta T \\ \sigma_{xy}^{sh} &= \frac{E_{sh}}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} & \sigma_{xz}^{sh} &= \frac{E_{sh}}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} \\ \sigma_{yz}^{sh} &= \frac{E_{sh}}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}.\end{aligned}\quad (4.30)$$

và gân gia cường

$$\begin{aligned}\sigma_x^s &= E_s\varepsilon_x - E_s\alpha_s\Delta T \\ \sigma_y^r &= E_r\varepsilon_y - E_r\alpha_r\Delta T \\ \sigma_{xz}^s &= G_s\gamma_{xz} & \sigma_{yz}^r &= G_r\gamma_{yz}\end{aligned}\quad (4.31)$$

Sử dụng kỹ thuật san đều tác dụng của gân gia cường và bỏ qua biến dạng xoắn của các gân, các thành phần nội lực của vỏ trụ FGP là [64]

$$\begin{aligned}N_x &= C_{11}\varepsilon_x^0 + C_{12}\varepsilon_y^0 + C_{14}\phi_{x,x} + C_{15}\phi_{y,y} - \phi_1 - \phi_{1x}^T \\ N_y &= C_{12}\varepsilon_x^0 + C_{22}\varepsilon_y^0 + C_{24}\phi_{x,x} + C_{25}\phi_{y,y} - \phi_1 - \phi_{1y}^T \\ N_{xy} &= C_{33}\gamma_{xy}^0 + C_{36}\frac{1}{2}(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ M_x &= C_{14}\varepsilon_x^0 + C_{24}\varepsilon_y^0 + C_{44}\phi_{x,x} + C_{45}\phi_{y,y} - \phi_2 - \phi_{2x}^T \\ M_y &= C_{15}\varepsilon_x^0 + C_{25}\varepsilon_y^0 + C_{45}\phi_{x,x} + C_{55}\phi_{y,y} - \phi_2 - \phi_{2y}^T \\ M_{xy} &= C_{63}\gamma_{xy}^0 + C_{66}\frac{1}{2}(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ Q_x &= C_7(w_{,x} + \phi_x) & Q_y &= C_8(w_{,y} + \phi_y)\end{aligned}\quad (4.32)$$

trong đó, các thành phần độ cứng  $C_{ij}$  và thông số nhiệt  $\phi_i, \phi_{ij}^T$  được xác định trong phụ lục A (gân trong).

Thay  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  từ biểu thức (4.29) vào biểu thức (4.32) và (4.33), ta được

$$\begin{aligned}N_x &= C_{11}\left(u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2\right) + C_{12}\left(v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2}w_{,y}^2\right) + C_{14}\phi_{x,x} + C_{15}\phi_{y,y} - \phi_1 - \phi_{1x}^T \\ N_y &= C_{12}\left(u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2\right) + C_{22}\left(v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2}w_{,y}^2\right) + C_{24}\phi_{x,x} + C_{25}\phi_{y,y} - \phi_1 - \phi_{1y}^T \\ N_{xy} &= C_{33}\left(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}\right) + C_{36}\frac{1}{2}(\phi_{x,y} + \phi_{y,x})\end{aligned}\quad (4.34)$$



$$\begin{aligned}
M_x &= C_{14} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) + C_{24} \left( v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) + C_{44} \phi_{,x,x} + C_{45} \phi_{,y,y} - \phi_2 - \phi_{2x}^T \\
M_y &= C_{15} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) + C_{25} \left( v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) + C_{45} \phi_{,x,x} + C_{55} \phi_{,y,y} - \phi_2 - \phi_{2y}^T \\
M_{xy} &= C_{63} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y}) + C_{66} \frac{1}{2} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\
Q_x &= C_7 (w_{,x} + \phi_x) \qquad Q_y = C_8 (w_{,y} + \phi_y)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Các phương trình cân bằng phi tuyến của vỏ trụ có kể đến tương tác vỏ - nền đàn hồi Pasternak dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất được xác định là [92]

$$\begin{aligned}
N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\
N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\
Q_{x,x} + Q_{y,y} + \frac{N_y}{R} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy}^0 w_{,xy} - K_1 w + K_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) &= 0 \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\
\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Thay  $N_{ij}$  và  $M_{ij}$  qua các thành phần  $u$ ,  $v$ ,  $w$  và  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  vào biểu thức (4.36), ta thu được

$$\begin{aligned}
C_{11} (u_{,xx} + w_{,x} w_{,xx}) + C_{12} \left( v_{,xy} - \frac{w_{,x}}{R} + w_{,y} w_{,xy} \right) + C_{14} \phi_{,x,xx} + C_{15} \phi_{,y,xy} \\
+ C_{33} (u_{,yy} + v_{,xy} + w_{,xy} w_{,y} + w_{,x} w_{,yy}) + C_{36} \frac{1}{2} (\phi_{x,yy} + \phi_{y,xy}) = 0
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
C_{33} (u_{,xy} + v_{,xx} + w_{,xx} w_{,y} + w_{,x} w_{,xy}) + C_{36} \frac{1}{2} (\phi_{x,xy} + \phi_{y,xx}) + C_{12} (u_{,xy} + w_{,x} w_{,xy}) \\
+ C_{22} \left( v_{,yy} - \frac{w_{,y}}{R} + w_{,y} w_{,yy} \right) + C_{24} \phi_{,x,xy} + C_{25} \phi_{,y,yy} = 0
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
C_7 (w_{,xx} + \phi_{x,x}) + C_8 (w_{,yy} + \phi_{y,y}) \\
+ \frac{1}{R} \left[ C_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) + C_{22} \left( v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) + C_{24} \phi_{,x,x} + C_{25} \phi_{,y,y} - \phi_1 - \phi_{1y}^T \right] \\
+ \left[ C_{11} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) + C_{12} \left( v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) + C_{14} \phi_{,x,x} + C_{15} \phi_{,y,y} - \phi_1 - \phi_{1x}^T \right] w_{,xx} \\
+ 2 \left[ C_{33} (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y}) + C_{36} \frac{1}{2} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \right] w_{,xy} \\
+ \left[ C_{12} \left( u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) + C_{22} \left( v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) + C_{24} \phi_{,x,x} + C_{25} \phi_{,y,y} - \phi_1 - \phi_{1y}^T \right] w_{,yy} \\
+ 2N_{xy}^0 w_{,xy} - K_1 w + K_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) = 0
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$C_{14}(u_{,xx} + w_{,x}w_{,xx}) + C_{24}\left(v_{,xy} - \frac{w_{,x}}{R} + w_{,y}w_{,xy}\right) + C_{44}\phi_{x,xx} + C_{45}\phi_{y,xy} \quad (4.40)$$

$$+ C_{63}(u_{,yy} + v_{,xy} + w_{,xy}w_{,y} + w_{,x}w_{,yy}) + C_{66}\frac{1}{2}(\phi_{x,yy} + \phi_{y,xy}) - C_7(w_{,x} + \phi_x) = 0$$

$$C_{63}(u_{,xy} + v_{,xx} + w_{,xx}w_{,y} + w_{,x}w_{,xy}) + C_{66}\frac{1}{2}(\phi_{x,xy} + \phi_{y,xx}) + C_{15}(u_{,xy} + w_{,x}w_{,xy}) \quad (4.41)$$

$$+ C_{25}\left(v_{,yy} - \frac{w_{,y}}{R} + w_{,y}w_{,yy}\right) + C_{45}\phi_{x,xy} + C_{55}\phi_{y,yy} - C_8(w_{,y} + \phi_y) = 0$$

Các biểu thức (4.37-4.41) được sử dụng để phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP chịu tải xoắn trong môi trường nhiệt được bao quanh bởi nền đàn hồi Pasternak.

### 4.3.3. Điều kiện biên và phương pháp giải

Xét vỏ trụ sandwich FGP chịu xoắn, điều kiện biên tựa đơn tại  $x=0$ ;  $x=L$ .

Độ võng của vỏ là [93]

$$u = U \sin\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{ny}{R}\right) \quad v = V \sin\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{ny}{R}\right)$$

$$w = W \cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{ny}{R}\right) \quad (4.42)$$

$$\phi_x = \Phi_x \sin\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{ny}{R}\right) \quad \phi_y = \Phi_y \sin\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{ny}{R}\right)$$

trong đó  $m, n$  lần lượt là số nửa sóng dọc theo trục  $x$ , số sóng dọc theo trục  $y$ .

Thay biểu thức (4.42) vào các biểu thức (4.37-4.41), sau đó sử dụng phương pháp Galerkin, ta được

$$a_{11}U + a_{12}V + a_{13}W + a_{14}\Phi_x + a_{15}\Phi_y = 0 \quad (4.43)$$

$$a_{21}U + a_{22}V + a_{23}W + a_{24}\Phi_x + a_{25}\Phi_y = 0 \quad (4.44)$$

$$a_{31}U + a_{32}V + \left[ a_{33} + (\phi_1 + \phi_{1x}^T) \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + (\phi_1 + \phi_{1y}^T) \frac{n^2}{R^2} \right] W + a_{34}\Phi_x + a_{35}\Phi_y + a_{36}W^3 = 0 \quad (4.45)$$

$$- 2N_{xy}^0 \frac{mn\pi}{LR} - K_1 - K_2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)$$

$$a_{41}U + a_{42}V + a_{43}W + a_{44}\Phi_x + a_{45}\Phi_y = 0 \quad (4.46)$$

$$a_{51}U + a_{52}V + a_{53}W + a_{54}\Phi_x + a_{55}\Phi_y = 0 \quad (4.47)$$

trong đó các thành phần  $a_{ij}$  được xác định trong phụ lục G.

Từ các biểu thức (4.43-4.44) và (4.46-4.47), suy ra

$$U = \frac{D_1}{D}W, \quad V = \frac{D_2}{D}W, \quad \Phi_x = \frac{D_3}{D}W, \quad \Phi_y = \frac{D_4}{D}W. \quad (4.48)$$

trong đó, thành phần  $D, D_i$  được xác định là

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} -a_{13} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{23} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{43} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ -a_{53} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & -a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & -a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & -a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & -a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & -a_{53} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad D_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & -a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & -a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & -a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & -a_{53} \end{bmatrix}$$

Thay  $U, V, \Phi_x, \Phi_y$  từ biểu thức (4.48) vào (4.45), ta được

$$\tau = -\frac{LR}{2mn\pi h} \begin{bmatrix} a_{31} \frac{D_1}{D} + a_{32} \frac{D_2}{D} + a_{33} + \left(\phi_1 + \phi_{1x}^T\right) \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \left(\phi_1 + \phi_{1y}^T\right) \frac{n^2}{R^2} \\ -K_1 - K_2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2}\right) + a_{34} \frac{D_3}{D} + a_{35} \frac{D_4}{D} + a_{36} W^2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Biểu thức (4.49) thiết lập quan hệ  $\tau$  và  $W$ , sử dụng để phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ FGP chịu tải trọng xoắn trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi.

Từ biểu thức (4.49) cho  $W \rightarrow 0$ , ta xác định được tải xoắn tới hạn trên của vỏ trụ sandwich có gân trực giao gia cường chịu tải xoắn, trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi

$$\tau_{cr} = -\frac{LR}{2mn\pi h} \begin{bmatrix} a_{31} \frac{D_1}{D} + a_{32} \frac{D_2}{D} + a_{33} + \left(\phi_1 + \phi_{1x}^T\right) \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \left(\phi_1 + \phi_{1y}^T\right) \frac{n^2}{R^2} \\ -K_1 - K_2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2}\right) + a_{34} \frac{D_3}{D} + a_{35} \frac{D_4}{D} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

#### 4.3.4. Kết quả tính toán số

##### 4.3.4.1. Nghiên cứu so sánh

Bảng 4.7. So sánh tải trọng xoắn tới hạn của vỏ trụ có gân gia cường.  $h=0.005\text{m}$ ,  $R/h=50$ ,  $L/R=2$ ,  $h_s=h_r=0.005\text{m}$ ,  $b_s=b_r=0.005\text{m}$ ,  $K_1=1.5 \times 10^7 \text{N/m}^3$ ,  $K_2=1.5 \times 10^5 \text{N/m}$ ,  $\Delta T=0^\circ\text{C}$

$\tau$ (MPa)	Gân dọc ( $n_s=40, n_r=0$ )		Gân vòng ( $n_s=0, n_r=40$ )		Gân trực giao ( $n_s=n_r=20$ )	
	Hòa và cs [94]	Luận án	Hòa và cs [94]	Luận án	Hòa và cs [94]	Luận án
Ceramic	929.44766 (1,5)*	929.448 (1,5)	2056.14803 (1,4)	2056.148 (1,4)	1602.16579 (1,4)	1602.166 (1,4)
Kim loại	223.74721 (1,5)	223.747 (1,5)	426.90258 (1,4)	426.903 (1,4)	343.27428 (1,4)	343.274 (1,4)

\* Mode tới hạn ( $m, n$ )

Để kiểm chứng độ tin cậy của lời giải, luận án sử dụng công thức (4.50) để tính toán số và so sánh với báo cáo của tác giả Lê Khả Hòa và Đào Văn Dũng [94].

Bảng 4.7 chỉ ra sự so sánh giữa kết quả tính toán của luận án với các kết quả nghiên cứu của tác giả Lê Khả Hòa và Đào Văn Dũng [94] đối với trường hợp vỏ trụ FGM có gia cường gân trực giao chịu tải trọng xoắn. Kết quả cho thấy, tính toán thu được theo công thức (4.50) của luận án là tương đồng với kết quả đã công bố của tác giả Lê Khả Hòa và Đào Văn Dũng [94]. Điều này khẳng định độ tin cậy của phương pháp nghiên cứu được thực hiện trong luận án.

Trong phần tiếp theo, luận án nghiên cứu ảnh hưởng của các thông số đầu vào đến khả năng chịu xoắn của vỏ trụ sandwich FGP. Lớp phủ mặt và gân FGM là hỗn hợp của Alumina với  $E_c = 380\text{GPa}$ ,  $\alpha_c = 5.4 \times 10^{-6} \text{K}^{-1}$ . Lớp lõi xốp là Aluminum với  $E_m = 70\text{GPa}$ ,  $\alpha_m = 22.2 \times 10^{-6} \text{K}^{-1}$  và hệ số Poisson là  $\nu = 0.3$ .

Các số liệu khảo sát của vỏ và gân được lấy là:  $k_2=k_3=k=1$ ,  $h=0.006\text{m}$ ,  $L/R=1.5$ ,  $R/h=70$ ,  $h_{core}/h_{FG}=3$ ,  $e_0=0.6$ ,  $\Delta T=0\text{K}$ ,  $h_s=h_r=0.006\text{m}$ ,  $b_s=b_r=0.006\text{m}$ ,  $n_s=18$ ,  $n_r=18$ ,  $K_1=4 \times 10^7 \text{N/m}^3$ ,  $K_2=3 \times 10^5 \text{N/m}$ .

#### 4.3.4.2. Ảnh hưởng của hệ số độ xốp $e_0$ và tỉ lệ $h_{core}/h_{FG}$

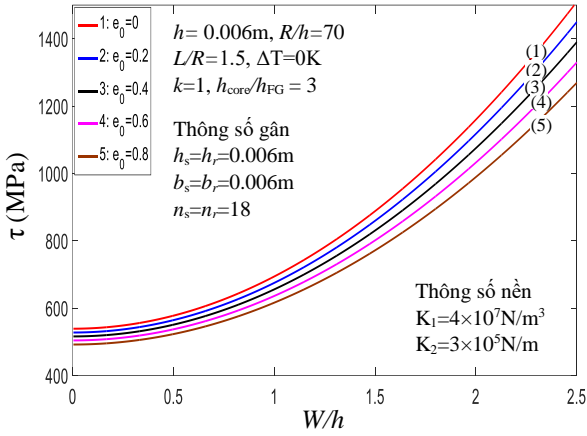
Sử dụng hai biểu thức (4.49) và (4.50), luận án thực hiện khảo sát ảnh hưởng của  $e_0$  và tỉ lệ  $h_{core}/h_{FG}$  đối với ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP. Kết quả số được thể hiện trong Bảng 4.8 và Hình 4.12-4.15.

Bảng 4.8. Ảnh hưởng của  $e_0$  và  $h_{core}/h_{FG}$  đối với tải tới hạn.  $k_2=k_3=k=1$ ,  $K_1=4 \times 10^7 \text{N/m}^3$ ,  $K_2=3 \times 10^5 \text{N/m}$ ,  $e_0=0.6$ ,  $\Delta T=0\text{K}$ ,  $h=0.006\text{m}$ ,  $L/R=1.5$ ,  $R/h=70$ ,  $h_{core}/h_{FG}=3$ ,  $h_s=h_r=0.006\text{m}$ ,  $b_s=b_r=0.006\text{m}$ ,  $n_s=18$ ,  $n_r=18$

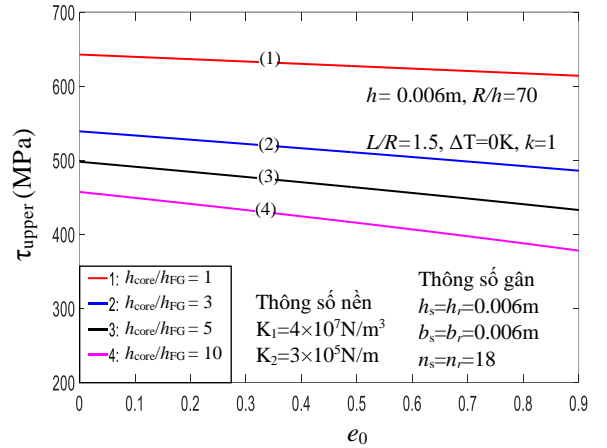
$\tau$ (MPa)	$e_0=0$	$e_0=0.2$	$e_0=0.4$	$e_0=0.6$	$e_0=0.8$
$h_{core}/h_{FG} = 0$	789.871 (1,5)*	789.871 (1,5)	789.871 (1,5)	789.871 (1,5)	789.871 (1,5)
$h_{core}/h_{FG} = 1$	642.683 (1,5)	636.408 (1,5)	630.079 (1,5)	623.694 (1,5)	617.247 (1,5)
$h_{core}/h_{FG} = 3$	539.022 (1,5)	527.710 (1,5)	516.144 (1,5)	504.282 (1,5)	492.078 (1,5)
$h_{core}/h_{FG} = 5$	497.934 (1,5)	484.333 (1,5)	470.304 (1,5)	455.763 (1,5)	440.602 (1,5)
$h_{core}/h_{FG} = \infty$	402.192 (2,6)	373.734 (2,6)	344.486 (2,6)	314.188 (2,6)	282.448 (2,6)

\* Mode tới hạn ( $m, n$ )

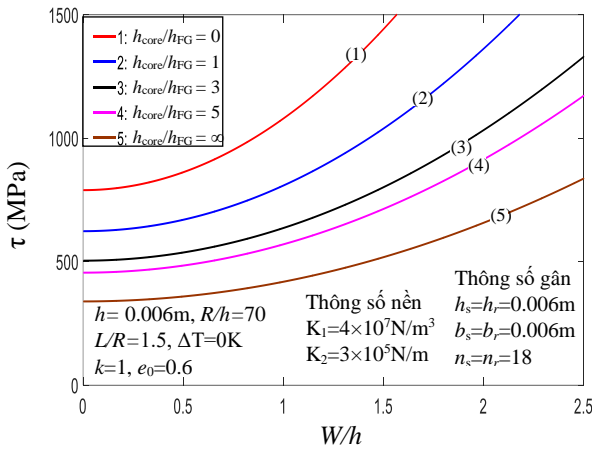
Bảng 4.8 mô tả ảnh hưởng của  $e_0$  và  $h_{core}/h_{FG}$  đối với tải trọng tới hạn. Bảng 4.8 cho thấy, tải xoắn tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP giảm khi  $e_0$  tăng. Nhận xét này cũng được quan sát thấy trong các Hình 4.12 mô tả ảnh hưởng của  $e_0$  đối với đường cong  $\tau - W/h$  và Hình 4.13 mô tả ảnh hưởng của  $e_0$  đối với tải tới hạn trên  $\tau_{upper}$ .



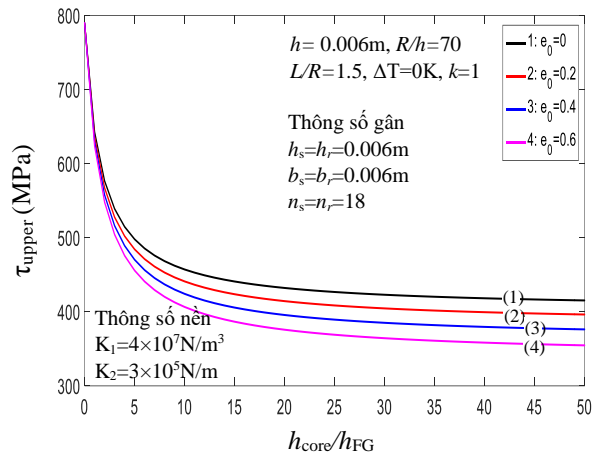
Hình 4.12. Ảnh hưởng của  $e_0$  đối với đường cong  $\tau$ - $W/h$



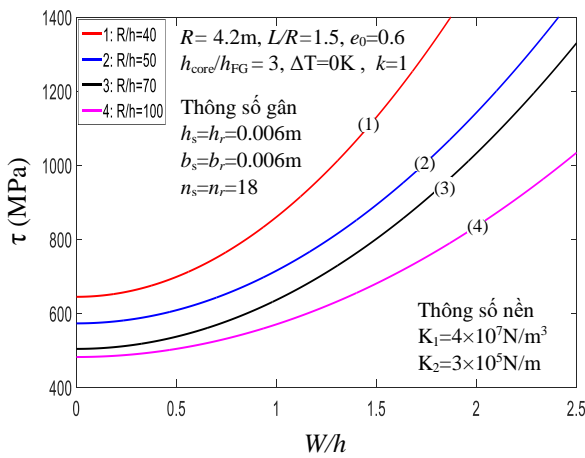
Hình 4.13. Ảnh hưởng của  $e_0$  đối với tải tới hạn trên  $\tau_{\text{upper}}$



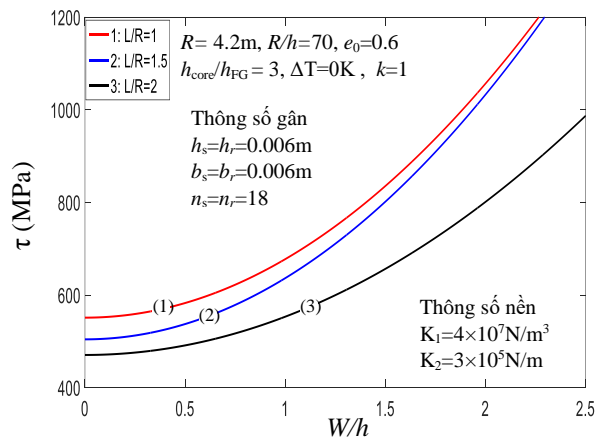
Hình 4.14. Ảnh hưởng của  $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}$  đối với đường cong  $\tau$ - $W/h$



Hình 4.15. Ảnh hưởng của  $h_{\text{core}}/h_{\text{FG}}$  đối với tải tới hạn trên  $\tau_{\text{upper}}$



Hình 4.16. Ảnh hưởng của  $R/h$  đối với đường cong  $\tau$ - $W/h$



Hình 4.17. Ảnh hưởng của  $L/R$  đối với đường cong  $\tau$ - $W/h$

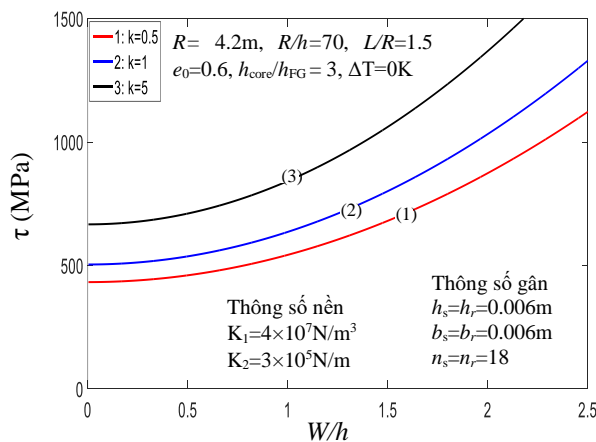
Bảng 4.8 và các Hình 4.14 và Hình 4.15 cũng cho thấy, khi tỉ lệ  $h_{core}/h_{FG}$  tăng thì tải xoắn tới hạn giảm. Điều này phù hợp thực tế là khi chiều dày lớp lõi tăng làm độ cứng của vỏ giảm dẫn đến giảm tải trọng tới hạn.

#### 4.3.4.3. Ảnh hưởng của chỉ số tỉ phần thể tích $k$ , nhiệt độ và gân gia cường

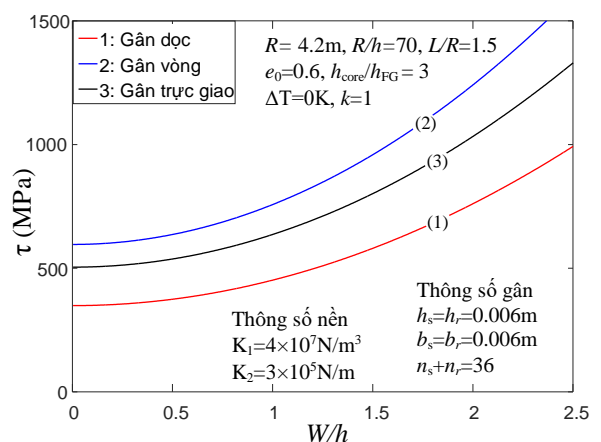
Bảng 4.9. Ảnh hưởng của  $a/b$  và  $a/R$  đối với tải tới hạn.  $k_2=k_3=k$ ,  $K_1=4\times 10^7$  N/m<sup>3</sup>,  $K_2=3\times 10^5$  N/m,  $e_0=0.6$ ,  $\Delta T=0$ K,  $h=0.006$ m,  $L/R=1.5$ ,  $R/h=70$ ,  $h_{core}/h_{FG}=3$ ,  $h_s=h_r=0.006$ m,  $b_s=b_r=0.006$ m,  $n_s=18$ ,  $n_r=18$

$\tau$ (MPa)	Gân dọc $n_s=36, n_r=0$	Gân vòng $n_s=0, n_r=36$	Gân trực giao $n_s=n_r=18$	
$k=0$	226.626 (2,7)*	333.925 (2,6)	299.116 (1,5)	
$k=0.5$	310.045 (1,5)	498.616 (1,4)	432.902 (1,5)	
$\Delta T=0$ K	$k=1$	348.847 (1,5)	573.007 (1,4)	504.282 (1,5)
	$k=5$	421.456 (1,5)	737.735 (1,4)	666.828 (1,5)
	$k=\infty$	453.887 (1,5)	837.984 (1,4)	756.674 (1,4)
$k=0$	138.615 (1,6)	239.695 (1,5)	205.528 (1,5)	
$k=0.5$	201.641 (1,6)	352.552 (1,5)	302.385 (1,5)	
$\Delta T=50$ K	$k=1$	241.549 (1,5)	436.383 (1,5)	370.801 (1,5)
	$k=5$	322.125 (1,5)	614.662 (1,4)	544.327 (1,5)
	$k=\infty$	362.628 (1,5)	726.781 (1,4)	658.412 (1,5)

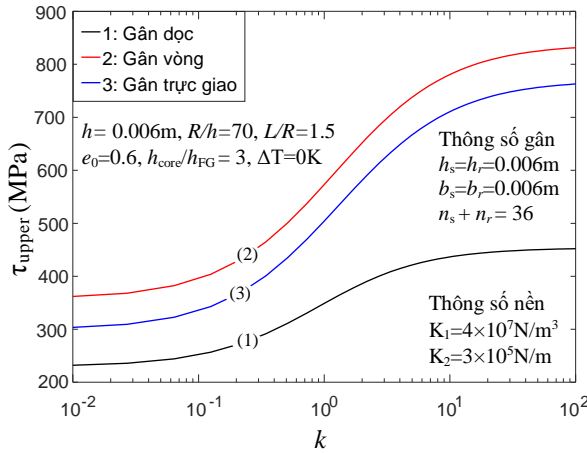
\* Mode tới hạn ( $m, n$ )



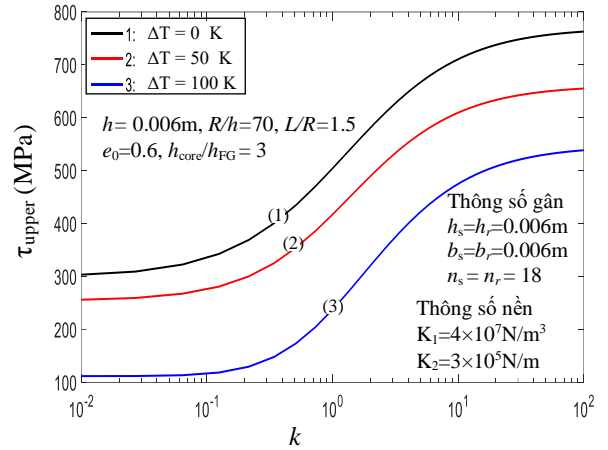
Hình 4.18. Ảnh hưởng của  $k$  đối với đường cong  $\tau$ - $W/h$



Hình 4.19. Ảnh hưởng của gân đối với đường cong  $\tau$ - $W/h$



Hình 4.20. Ảnh hưởng của gân và  $k$  đối với tải tới hạn trên  $\tau_{upper}$



Hình 4.21. Ảnh hưởng của  $\Delta T$  và  $k$  đối với tải tới hạn trên  $\tau_{upper}$

Ảnh hưởng của  $k$ ,  $\Delta T$  và gân gia cường đến tải xoắn tới hạn được mô tả trong Bảng 4.9 và minh họa qua đồ thị Hình 4.18-4.21.

Bảng 4.9 cho ta thấy, tải xoắn tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP tăng khi chỉ số tỉ phần thể tích  $k$  tăng. Điều này cũng được quan sát thấy trong các Hình 4.18, Hình 4.20. Ảnh hưởng của  $\Delta T$  đối với tải xoắn tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP được thể hiện trong Bảng 4.9 và Hình 4.21. Quan sát thấy, tải trọng xoắn tới hạn của vỏ trụ giảm khi nhiệt độ  $\Delta T$  tăng. Ví dụ, Bảng 4.9 cho thấy, trường hợp  $n_s=n_r=18$  tải trọng xoắn tới hạn trên của vỏ giảm khoảng 36% từ  $\tau=504.282$  MPa (với  $\Delta T=0K$ ,  $k_2=k_3=k=1$ ) xuống  $\tau=370.801$  MPa (với  $\Delta T=0K$ ,  $k_2=k_3=k=1$ ).

Bảng 4.9 và Hình 4.19, Hình 4.20 cũng cho ta thấy ảnh hưởng của gân gia cường đến tải xoắn tới hạn. Cụ thể, cùng với 36 gân gia cường, tải xoắn tới hạn của vỏ trụ được thiết kế 36 gân dọc gia cường là nhỏ nhất, thứ hai là vỏ trụ được thiết kế gia cường gân trực giao ( $n_s=n_r=18$ ) và lớn nhất khi vỏ được thiết kế gia cường bằng 36 gân vòng.

#### 4.3.4.4. Ảnh hưởng của tỉ lệ hình học $R/h$ và $L/R$

Bảng 4.10 và Hình 4.16 và Hình 4.17 thể hiện ảnh hưởng của tỷ số  $R/h$  và  $L/R$  đến ổn định phi tuyến của vỏ. Kết quả cho ta thấy, tải xoắn tới hạn của vỏ trụ giảm rõ rệt khi tỷ số  $R/h$  và  $L/R$  tăng riêng biệt hoặc tăng đồng thời. Điều này cũng chứng tỏ là vỏ càng mỏng thì khả năng chịu lực càng giảm.

Bảng 4.10. Ảnh hưởng của  $R/h$  và  $L/R$  đối với tải trọng tới hạn.  $K_1=4 \times 10^7 \text{ N/m}^3$ ,  
 $K_2=3 \times 10^5 \text{ N/m}$ ,  $e_0=0.6$ ,  $\Delta T=0\text{K}$ ,  $k_2=k_3=k=1$ ,  $R=0.42\text{m}$ ,  $L/R=1.5$ ,  $R/h=70$ ,  
 $h_{core}/h_{FG}=3$ ,  $h_s=h_r=0.006\text{m}$ ,  $b_s=b_r=0.006\text{m}$ ,  $n_s=18$ ,  $n_r=18$

$\tau$ (MPa)	$L/R=1$	$L/R=1.5$	$L/R=2$	$L/R=3$
$R/h=30$	1055.686 (1,4)*	818.678 (1,4)	766.512 (1,4)	608.513 (1,3)
$R/h=40$	787.764 (1,5)	644.903 (1,4)	581.546 (1,4)	525.765 (1,3)
$R/h=50$	654.884 (1,5)	573.198 (1,4)	507.723 (1,4)	508.425 (1,3)
$R/h=70$	551.133 (1,5)	504.282 (1,5)	470.548 (1,4)	438.078 (2,5)
$R/h=100$	521.547 (1,5)	482.359 (2,6)	453.152 (2,6)	418.706 (3,6)

\* Mode tới hạn ( $m, n$ )

#### 4.5. Kết luận chương 4

Chương 4 sử dụng lý thuyết vỏ Donnell, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, kỹ thuật san đều tác dụng của gân Lekhnitskii và phương pháp Galerkin đã giải quyết những nội dung chủ yếu sau

1. Đã phân tích ổn định của vỏ trụ sandwich FGP có gân xiên gia cường chịu tải xoắn, trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi Pasternak.

2. Đã phân tích ổn định của vỏ trụ sandwich FGP có gân trục giao gia cường chịu tải xoắn, trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi Pasternak.

#### Từ các kết quả số, luận án đưa ra một số nhận xét đáng chú ý sau

1. Hệ số độ xấp  $e_0$  và trường nhiệt ảnh hưởng đáng kể đến khả năng chịu xoắn của vỏ trụ.

2. Gân gia cường, nền đàn hồi làm tăng đáng kể khả năng chịu xoắn của vỏ trụ sandwich FGP.

3. Với vỏ trụ có gân xiên gia cường chịu xoắn, việc thay đổi số lượng gân xiên sẽ làm thay đổi khả năng chịu lực của vỏ. Điều thú vị là khi khoảng cách gân xiên không đổi, số gân xiên tăng không đồng nghĩa với tải xoắn tới hạn tăng (do ảnh hưởng của góc gân). Vì vậy, để tối ưu hóa số gân cần phải tính toán cụ thể.

4. Với ba dạng gân gia cường (gân dọc, gân vòng, gân trục giao), vỏ trụ sandwich FGP được gia cường gân vòng chịu xoắn tốt nhất.

5. Vỏ trụ FGP càng mảnh khả năng chịu xoắn càng kém

6. Vỏ trụ FGP giàu gốm chịu xoắn tốt hơn vỏ giàu kim loại.

Kết quả chính của chương 4 đã được công bố trong 2 bài báo [8], [9] trong danh mục công trình công bố liên quan đến luận án. Trong đó có 1 bài đăng trên các tạp chí quốc tế danh mục ISI, 1 bài báo đăng trên tạp chí uy tín trong nước.



## **KẾT LUẬN**

Từ những kết quả nghiên cứu, luận án có những đóng góp mới nổi bật sau

1. Bằng cách tiếp cận giải tích, phương pháp Galerkin luận án đã xây dựng các biểu thức để phân tích ảnh hưởng của bốn mô hình phân bố độ xoắn đến ổn định phi tuyến của kết cấu panel trụ và vỏ trụ FGP chịu nén dọc trục.

2. Sử dụng lý thuyết vỏ Donnell với tính phi tuyến hình học von-Karman, luận án đã thiết lập các biểu thức phân tích ổn định phi tuyến của panel trụ sandwich FGP chịu nén dọc trục có và không xét đến tương tác panel - nền Pasternak. Sau đó, sử dụng phương pháp Galerkin thu được biểu thức để xác định tải tới hạn và vẽ đường cong tải - độ võng mô tả đáp ứng sau tới hạn của kết cấu.

3. Sử dụng lý thuyết vỏ Donnell, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, kỹ thuật san gân của Lekhnitskii và phương pháp Galerkin với nghiệm độ võng ba số hạng, luận án đã xây dựng được biểu thức để xác định tải tới hạn và vẽ đường cong quan hệ tải - độ võng mô tả đáp ứng sau tới hạn của vỏ trụ sandwich FGP có gân FGM gia cường chịu tải cơ trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi Pasternak.

5. Khảo sát bằng số một cách chi tiết ảnh hưởng của các tham số đầu vào như: các mô hình phân bố xoắn, hệ số độ xoắn, chỉ số tỉ phần thể tích, độ không hoàn hảo, điều kiện biên, kích thước hình học, tỉ lệ độ dày lớp lõi xoắn/lớp phủ, gân gia cường, hệ số nền, nhiệt độ đến bài toán ổn định phi tuyến của panel trụ và vỏ trụ FGP.

6. Thông qua các kết quả số đã khảo sát, tại mỗi chương của luận án đã rút ra một số nhận xét có ý nghĩa khoa học và thực tiễn cho các tính toán trong tương lai và giúp ích cho các nhà thiết kế, chế tạo có thể lựa chọn các thông số kết cấu phù hợp với điều kiện làm việc thực tế của kết cấu.

## **MỘT SỐ HƯỚNG PHÁT TRIỂN TỪ LUẬN ÁN**

Theo quan điểm của tác giả, luận án có thể được phát triển theo một số hướng nghiên cứu sau:

1. Phân tích ổn định tĩnh và động phi tuyến của vỏ trụ, vỏ nón FGP chịu tải trọng cơ trong môi trường nhiệt với các điều kiện biên khác nhau.

2. Phân tích ổn định tĩnh và động của panel trụ, vỏ trụ và vỏ nón FGP có gắn áp điện chịu tải cơ nhiệt phức tạp.

3. Nghiên cứu tối ưu hóa kích thước, số lượng, tỉ trọng và loại gân gia cường cho bài toán kết cấu panel trụ, vỏ trụ, vỏ nón FGP có gân gia cường chịu tải cơ nhiệt phức tạp.

4. Nghiên cứu thực nghiệm kiểm chứng các kết quả mô phỏng số.

## DANH MỤC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Do Quang Chan, **Pham Van Hoan**, Nguyen Thoi Trung, Le Kha Hoa & Duong Thanh Huan, 2021, Nonlinear buckling and post-buckling of imperfect FG porous sandwich cylindrical panels subjected to axial loading under various boundary conditions, *Acta Mechanica*, 232, pp. 1163-1179. (ISI, Q2).

2. **Phạm Văn Hoàn**, Đào Như Mai và Lê Khả Hòa, 2021, phân tích ảnh hưởng mô hình phân bố độ xốp đến sự ổn định của panel trụ làm bằng vật liệu FGP, *Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn lần thứ XV Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp, Đại học Thái Nguyên TP. Thái Nguyên, ngày 24, 25 tháng 9 năm 2021*, pp. 412-421.

3. **Pham Van Hoan**, Dao Nhu Mai, Khuc Van Phu, Le Kha Hoa, 2022, Nonlinear buckling and post-buckling of imperfect FG porous sandwich cylindrical panels subjected to axial loading on elastic foundation, *Vietnam Journal of Mechanics*, 44(4), pp. 514-525.

4. Le Kha Hoa, **Pham Van Hoan**, Bui Thi Thu Hoai & Do Quang Chan, 2021, Nonlinear Buckling and Postbuckling of ES-FG Porous Cylindrical Shells Under External Pressure, *Modern Mechanics and Applications*, pp. 743-754. (Scopus Q4).

5. Le Kha Hoa, **Pham Van Hoan**, and Dao Nhu Mai, 2022, Influence of porosity distribution pattern on the nonlinear stability of porous cylindrical shells under axial compression, *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ XI. Tập 1, Cơ học vật rắn biến dạng. Hà Nội, 02-03/12/2022*, pp. 380-390.

6. **Pham Van Hoan**, Le Kha Hoa, 2024, Nonlinear stability of ES-FG porous sandwich cylindrical shells subjected to axial compression in thermal environment, *Structures*, 63, 106280. (ISI, Q1).

7. **Phạm Văn Hoàn**, Đào Như Mai, Khúc Văn Phú và Lê Khả Hòa, 2024, Ổn định phi tuyến của vỏ trụ sandwich FGP có gân FGM gia cường chịu nén dọc trục, *Hội nghị cơ học toàn quốc Kỷ niệm 45 năm thành lập Viện Cơ học 09/4/2024*, pp. 256-265.

8. Tran Minh Tu, Duc-Kien Thai, **Pham Van Hoan** & Le Kha Hoa, 2022, Nonlinear behavior of FG porous cylindrical sandwich shells reinforced by spiral stiffeners under torsional load including thermal effect, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 29(27), pp. 5860-5875. (ISI, Q2).

9. **Pham Van Hoan**, Dao Nhu Mai, Phan Van Ba and Le Kha Hoa, 2024, Analyzing the nonlinear torsional buckling and post-buckling of ES - FG Porous cylindrical shells in thermal environment using FSDT in terms of the displacement components, *Vietnam Journal of Mechanics*, 46(1), pp. 67-79.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Koizumi M., 1997, FGM activities in Japan, *Composites Part B: Engineering*, 28, pp. 1-4.
2. Reddy J.N., Chin C.D., 1998, Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates, *Journal of Thermal Stresses*, 21(6), pp. 593-626.
3. Javaheri R., Eslami M.R., 2002, Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading, *ZAMM*, 82(4), pp. 277-283.
4. Javaheri R., Eslami M.R., 2002, Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory, *Journal of Thermal Stresses*, 25(1), pp. 603-25.
5. Shen H.S., 2009, Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells, *CRC Press, Boca Raton*.
6. Hoàng Văn Tùng, 2011, *Ổn định nhiệt đàn hồi của tấm và vỏ Composite biến đổi chức năng*, Luận án tiến sĩ Cơ học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
7. Lê Khả Hòa, 2015, *Phân tích ổn định tĩnh của vỏ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên*, Luận án tiến sĩ Cơ học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
8. Alinia M.M., Ghanadpour S.A.M., 2009, Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates, *Composite Structures*, 88(3), pp. 354-359.
9. Mahamood M.R., Akinlabi T.E., 2012, Functionally graded material: An overview, *Proceedings of the World Congress on Engineering*, Vol III.
10. Barati M.R., Zenkour A.M., 2017, Investigating post-buckling of geometrically imperfect metal foam nanobeams with symmetric and asymmetric porosity distributions, *Composite Structures*, 182, pp. 91-98.
11. Chen D., Yang J., Kitipornchai S., 2016, Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 108, pp. 14-22.
12. Thang P.T., Nguyen-Thoi T., Lee D., Kang J., Lee J., 2018, Elastic buckling and free vibration analyses of porous-cellular plates with uniform and non-uniform porosity distributions, *Aerospace Science and Technology*, 79, pp. 278-287.
13. Xue Y., Jin G., Ma X., Chen H., Ye T., Chen M., Zhang Y., 2019, Free vibration analysis of porous plates with porosity distributions in the thickness and in-plane directions using isogeometric approach, *International Journal of Mechanical Sciences*, 152, pp. 346-362.
14. Banhart J., 2001, Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams, *Progress in Materials Science*, 46(6), pp. 559-632.

15. Davies G.J., Zhen S., 1983, Metallic foams: their production, properties and applications, *Journal of Materials Science*, 18, pp. 1899-1911.
16. Liu P.S., Liang K.M., 2001, Review Functional materials of porous metals made by P/M, electroplating and some other techniques, *Journal of Materials Science*, 36, pp. 5059-5072.
17. Liu P.S., Yu B., Hu A., Liang K.M., 2002, Techniques for the preparation of porous metals, *Journal of Material Science and Technology*, 18(4), pp. 299-305.
18. Nosko M., Kováčik J., 2017, Sound absorption ability of aluminium foams, *Metallic Foam*. 1(1), pp. 15-41.
19. Đào Huy Bích, 2000, *Lý thuyết đàn hồi*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
20. Đào Văn Dũng, 2016, *Phân tích ổn định và động lực của kết cấu cơ tính biến thiên*, Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật.
21. Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình, 2002, *Ổn định công trình*, Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật.
22. Vũ Thành Long, 2023, *Ổn định của vỏ FGM có lỗ rỗng và panel sandwich FG-CNTRC với các cạnh biên chịu liên kết đàn hồi*, Luận án Tiến sĩ Cơ Kỹ thuật, Viện hàn lâm Khoa học Việt Nam.
23. Shen H.S., 2007, Postbuckling analysis of axially loaded piezolaminated cylindrical panels with temperature-dependent properties, *Composite Structures*, 79, pp. 390-403.
24. Shen H.S., Liew K.M., 2004, Postbuckling of axially loaded functionally graded cylindrical panels with piezoelectric actuators in thermal environments, *Journal of Engineering Mechanics*, 130, pp. 982-995.
25. Shen H.S., 2002, Postbuckling analysis of axially loaded functionally graded cylindrical panels in thermal environments, *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 5991-6010.
26. Shen H.S., Xiang Y., 2014, Postbuckling of axially compressed nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *Composites Part B: Engineering*, 67, pp. 50-61.
27. Shen H.S., 2016, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations subjected to lateral pressure in thermal environments, *Engineering Structures*, 122, pp. 174-183.
28. Shen H.S., Xiang Y., 2015, Nonlinear response of nanotube-reinforced composite cylindrical panels subjected to combined loadings and resting on elastic foundations, *Composite Structures*, 131, pp. 939-950.

29. Liew K.M., Lei Z.X., Yu J.L., Zhang L.W., 2014, Postbuckling of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels under axial compression using a meshless approach, Postbuckling of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels under axial compression using a meshless approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 268, pp. 1-17.

30. Civalek O., 2017, Buckling analysis of composite panels and shells with different material properties by discrete singular convolution (DSC) method, *Composite Structures*, 161, pp. 93-110.

31. Zghal S., Frikha A., Dammak F., 2018, Mechanical buckling analysis of functionally graded power-based and carbon nanotubes-reinforced composite plates and curved panels, *Composites Part B: Engineering*, 150, pp.165-183.

32. García-Macías E., Rodríguez-Tembleque L., Castro-Triguero R., Sáez A., 2017, Eshelby-Mori-Tanaka approach for post-buckling analysis of axially compressed functionally graded CNT/polymer composite cylindrical panels, *Composites Part B: Engineering*, 128, pp. 208-224.

33. García-Macías E., Rodríguez-Tembleque L., Castro-Triguero R., Sáez A., 2017, Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced curved panels under axial compression and shear, *Composites Part B: Engineering*, 108, pp. 243-256.

34. Trang L.T.N., Tung H.V., 2018, Thermomechanical nonlinear analysis of axially compressed carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations with tangentially restrained edges, *Journal of Thermal Stresses*, 41(4), pp. 1-21.

35. Trang L.T.N., Tung H.V., 2019, Thermomechanical nonlinear stability of pressure-loaded functionally graded carbon nanotube-reinforced composite doubly curved panels with tangentially restrained edges, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 233(16), pp. 5848-5859.

36. Tung H.V., Trang L.T.N., 2018, Imperfection and tangential edge constraint sensitivities of thermomechanical nonlinear response of pressure-loaded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels, *Acta Mechanica*, 229, pp. 1949-1969.

37. Trang L.T.N., Tung H.V., 2018, Nonlinear stability of CNT-reinforced composite cylindrical panels with elastically restrained straight edges under combined thermomechanical loading conditions, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 33(2).

38. Turvey G.J., 1977, Buckling of simply supported cross-ply cylindrical panels on elastic foundations, *Aeronautical Journal*, 81, pp. 88-91.

39. Jaunky N., Knight N.F., 1999, An assessment of shell theories for buckling of circular cylindrical laminated composite panels loaded in axial compression, *International Journal of Solids and Structures*, 36(25), pp. 3799-3820.
40. Sohn K.J., Kim J.H., 2008, Structural stability of functionally graded panels subjected to aero-thermal loads, *Composite Structures*, 82, pp. 317-325.
41. Kweon J.H., Hong C.S., 1994, An improved arc-length method for post-buckling analysis of composite cylindrical panel, *Computers & Structures*, 53, pp. 541-549.
42. Wilde R., Zawodny P., Magnucki K., 2007, Critical state of an axially compressed cylindrical panel with three edges simply supported and one edge free, *Thin-Walled Struct*, 45, pp. 955-959.
43. Yang Y., Liew K.M., Wu Y.F., Kitipornchai S., 2006, Thermo-mechanical postbuckling of FGM cylindrical panels with temperature dependent properties, *International Journal of Solids and Structures*, 43, pp. 307-324.
44. Alijani F., Aghdam M.M., 2009, A semi-analytical solution for stress analysis of moderately thick laminated cylindrical panels with various boundary conditions, *Composite Structures*, 89, pp. 543-550.
45. Golmakani M.E., Far M.N.S., Moravej M., 2016, Dynamic relaxation method for nonlinear buckling analysis of moderately thick FG cylindrical panels with various boundary conditions, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 30, pp. 5565-5575.
46. Huang H., Han Q., 2008, Buckling of imperfect functionally graded cylindrical shells under axial compression, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 27(6), pp. 1026-1036.
47. Duc N.D., Tuan N.D., Quan T.Q., Quyen N.V., Anh T.V., 2015, Nonlinear mechanical, thermal and thermo-mechanical postbuckling of imperfect eccentrically stiffened thin FGM cylindrical panels on elastic foundations, *Thin-Walled Structures*, 96, pp. 155-168.
48. Duc N.D., Tung H.V., 2010, Nonlinear analysis of stability for functionally graded cylindrical panels under axial compression, *Computational Materials Science*, 49(4), pp. 313-316.
49. Dung D.V., Nga N.T., 2012, On the nonlinear post-buckling behavior of imperfect functionally graded cylindrical panels taking into account the thickness dependent Poisson ratio, *Proceedings of the Nineth National Conference on Mechanics*, Hanoi 8-9 December, pp. 197-207.

50. Dung D.V., Hoa L.K., 2012, Nonlinear analysis of buckling and postbuckling for axially compressed functionally graded cylindrical panels with the Poisson's ratio varying smoothly along the thickness, *Vietnam Journal of Mechanics*, 34(1), pp. 27-44.
51. Najafizadeh M.M., Hasani A., Khazaeinejad P., 2009, Mechanical stability of functionally graded stiffened cylindrical shells, *Applied Mathematical Modelling*, 33, pp. 1151-1157.
52. Reddy J.N., Starnes J.H., 1993, General buckling of stiffened circular cylindrical shells according to a Layerwise theory, *Computers & Structures*, 49, pp. 605-616.
53. Shen H.S., 1998, Post-buckling analysis of imperfect stiffened laminated cylindrical shells under combined external pressure and thermal loading, *International Journal of Mechanical Sciences*, 40(4), pp. 339-355.
54. Dung D.V., Nga N.T, Hoa L.K., 2017, Nonlinear stability of functionally graded material (FGM) sandwich cylindrical shells reinforced by FGM stiffeners in thermal environment, *Applied Mathematics and Mechanics*, 38, pp. 647-670.
55. Duc N.D., Quan T.Q., 2013, Nonlinear postbuckling of imperfect eccentrically stiffened P-FGM double curved thin shallow shells on elastic foundations in thermal environments, *Composite Structures*, 106, pp. 590-600.
56. Duc N.D., Khoa N.D., Thiem H.T., 2017, Nonlinear thermo-mechanical response of eccentrically stiffened Sigmoid FGM circular cylindrical shells subjected to compressive and uniform radial loads using the Reddy's thirdorder shear deformation shell theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 25(13), 1156-1167.
57. Duc N.D., Thang P.T., 2014, Nonlinear bucking of imperfect eccentrically stiffened metal-ceramic-metal S-FGM thin circular cylindrical shells with temperature-dependent properties in thermal environments, *International Journal of Mechanical Sciences*, 81, pp. 17-25.
58. Duc N.D., Thang P.T., 2014, Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened ceramic-metal-ceramic FGM thin circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations and subjected to axial compression, *Composite Structures*, 110, pp. 200-206.
59. Duc N.D., Thang P.T., 2015, Nonlinear dynamic response and vibration of shear deformable imperfect eccentrically stiffened S-FGM circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations, *Aerospace Science and Technology*, 40, pp.115-127.
60. Duc N.D., Thang P.T., Dao N.T., Tac H.V., 2015, Nonlinear buckling of higher deformable S-FGM thick circular cylindrical shells with metalceramic-metal

layers surrounded on elastic foundations in thermal environment, *Composite Structures*, 121, pp.134-141.

61. Thang P.T., Duc N.D., Trung N.T., 2017, Thermomechanical buckling and postbuckling of cylindrical shell with functionally graded coatings and reinforced by stringers, *Aerospace Science and Technology*, 66, pp. 392-401.

62. Dung D.V., Hoa L.K., 2013, Nonlinear buckling and postbuckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure, *Thin-Walled Struct*, 63, pp. 117-124.

63. Dung D.V., Hoa L.K., 2013, Torsional buckling and postbuckling of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells surrounded by elastic medium, *Proceeding of the Eleventh National Conference on Deformable Solid Mechanics, HochiMinh City 7-9/11/2013*, pp. 346-354.

64. Dung, D.V., Hoa, L.K., 2013, Research on nonlinear torsional buckling and post-buckling of eccentrically stiffened functionally graded thin circular cylindrical shells, *Composites Part B: Engineering*, 51, pp. 300-309.

65. Dung D.V., Hoa L.K., 2015, Nonlinear torsional buckling and postbuckling of eccentrically stiffened FGM cylindrical shells in thermal environment, *Composites Part B: Engineering*, 69, pp. 378-388.

66. Dung D.V., Thiem H.T., 2017, Mechanical and thermal postbuckling of FGM thick circular cylindrical shells reinforced by FGM stiffener system using higher-order shear deformation theory, *Applied Mathematics and Mechanics*, 38(1), pp. 73-98.

67. Nam V.H., Phuong N.T., Trung N.T., 2019, Nonlinear buckling and postbuckling of sandwich FGM cylindrical shells reinforced by spiral stiffeners under torsion loads in thermal environment, *Acta Mechanica*, 230(9), p. 3183-3204.

68. Chen D., Gao K., Yang J., Zhang L., 2023, Functionally graded porous structures: Analyses, performances, and applications - A Review, *Thin-Walled Structures*, 191, 111046.

69. Chen D., Kitipornchai S., Yang J., 2018, Dynamic response and energy absorption of functionally graded porous structures, *Materials & Design*, 140, pp. 473-487.

70. Keleshteri M.M., Jelovica J., 2020, Nonlinear Vibration Behavior of Functionally Graded Porous Cylindrical Panels, *Composite Structures*, 239, 112028.

71. Akbari H., Azadi M., Fahham H., 2022, Free vibration analysis of thick sandwich cylindrical panels with saturated FG-porous core, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 50(4), pp. 1268-1286.



72. Anh V.M., Duc N.D., 2019, Nonlinear Vibration of Porous Functionally Graded Cylindrical Panel Using Reddy's High Order Shear Deformation, *VNU Journal of Science*, 35(4), pp. 1-21.

73. Foroutan K., Shaterzadeh A., Ahmadi H., 2020, Nonlinear static and dynamic hygrothermal buckling analysis of imperfect functionally graded porous cylindrical shells, *Applied Mathematical Modelling*, 77, pp. 539-553.

74. Shahgholian-Ghahfarokhi D., Safarpour M., Rahimi A., 2019, Torsional buckling analyses of functionally graded porous nanocomposite cylindrical shells reinforced with graphene platelets (GPLs), *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 49(1), pp. 81-102.

75. Duc-Kien T., Tu T.M., Hoa L.K., Hung D.X., Linh N.N., 2018, Nonlinear stability analysis of eccentrically stiffened functionally graded truncated conical sandwich shells with porosity, *Materials*, 11(11), pp. 1-32.

76. Zhenhuan Z., Yiwen N., Zhenzhen T., Shengbo Z., Jiabin S., Xinsheng X., 2019, Accurate nonlinear buckling analysis of functionally graded porous graphene platelet reinforced composite cylindrical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, 151, pp. 537-550.

77. Hoa L.K., Phi B.G., Chan D.Q., Hieu D.V., 2020, Buckling Analysis of FG Porous Truncated Conical Shells Resting on Elastic Foundations in the Framework of the Shear Deformation Theory, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 14(1), pp. 218-247.

78. Ly L.N., Phuong N. T., Nam V. H., Duc V. M., 2019, Nonlinear buckling analysis of spiral stiffened porous FGM cylindrical shells under axial compression, *Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc, Kỷ niệm 40 năm thành lập Viện Cơ học, Hà Nội 09/4/2019*, pp. 242-249.

79. Dong Y.H., He L.W., Wang L., Li Y.H., Yang J., 2018, Buckling of spinning functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite cylindrical shells: an analytical study, *Aerospace Science and Technology*, 82-83, pp. 466-478.

80. Belica T., Magnucki K., 2013, Stability of a porous cellular cylindrical shell subjected to combined loads, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 51(4), pp. 927-936.

81. Nam V.H., Trung N.T., Hoa L.K., 2019, Buckling and post-buckling of porous cylindrical shells with functionally graded composite coating under torsion in thermal environment, *Thin-Walled Struct*, 144, 106253.

82. Brush D.O., Almroth B.O., 1975, *Buckling of bars, plates and shells*, New York: Mc Graw-Hill.

83. Volmir A.S., 1963, *Stability of elastic systems*, Science Edition, Moscow.
84. Huang H., Han Q., 2010, Research on nonlinear postbuckling of functionally graded cylindrical shells under radial loads, *Composite Structures*, 92, pp. 1352-1357.
85. Quan T.Q., Tran P., Tuan N.D., Duc N.D., 2015, Nonlinear dynamic analysis and vibration of shear deformable eccentrically stiffened S-FGM cylindrical panels with metal–ceramic–metal layers resting on elastic foundations, *Composite Structures*, 126, pp. 16-33.
86. Duc N.D., Quan T.Q., 2014, Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened FGM cylindrical panels on elastic foundation subjected to mechanical loads, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 46, pp. 60-71.
87. Huang H., Han Q., 2009, Nonlinear elastic buckling and postbuckling of axially compressed functionally graded cylindrical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, 51(7), pp. 500-507.
88. Feyzi M.R., Khorshidvand A.R., 2017, Axisymmetric post-buckling behavior of saturated porous circular plates, *Thin-Walled Structures*, 112, pp. 149-158.
89. Bich D.H., Dung D.V., Nam V.H., Phuong N.T., 2013, Nonlinear static and dynamic buckling analysis of imperfect eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical thin shells under axial compression, *International Journal of Mechanical Sciences*, 74, pp. 190-200.
90. Baruch M., Singer J., 1963, Effect of eccentricity of stiffeners on the general instability of stiffened cylindrical shells under hydro-static pressure, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 5, pp. 23-27.
91. Huang H., Han Q., 2009, Nonlinear buckling and postbuckling of heated functionally graded cylindrical shells under combined axial compression and radial pressure, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(2), pp. 209-218.
92. Reddy J.N., 2003, *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and Analysis*, Second Edition.
93. Takano A., 2011, Buckling of thin and moderately thick anisotropic cylinders under combined torsion and axial compression, *Thin-Walled Structures*, 49(2), pp. 304-316.
94. Hoa L.K., Dung D.V., 2015, Nonlinear torsional buckling and postbuckling of FGM cylindrical shells reinforced by FGM stiffeners in thermal environment using FSDT in terms of displacement components, *Hội nghị toàn quốc lần thứ 12 về Cơ học vật rắn biến dạng*, pp. 583-590.

## PHỤ LỤC

### Phụ lục A

Các hệ số  $C_{ij}$ ,  $\phi_i$ ,  $\phi_{ij}^T$  trong công thức (3.28) và (3.29) được xác định như sau

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu^2} + \frac{E_{1s}b_s}{d_s}, & C_{12} &= \frac{\nu E_1}{1-\nu^2}, & C_{14} &= \frac{E_2}{1-\nu^2} + \frac{E_{2s}b_s}{d_s}, & C_{15} &= \frac{\nu E_2}{1-\nu^2}, \\
 C_{22} &= \frac{E_1}{1-\nu^2} + \frac{E_{1r}b_r}{d_r}, & C_{24} &= \frac{\nu E_2}{1-\nu^2}, & C_{25} &= \frac{E_2}{1-\nu^2} + \frac{E_{2r}b_r}{d_r}, & C_{33} &= \frac{E_1}{2(1+\nu)}, \\
 C_{36} &= \frac{E_2}{1+\nu}, & C_{44} &= \frac{E_3}{1-\nu^2} + \frac{E_{3s}b_s}{d_s}, & C_{45} &= \frac{\nu E_3}{1-\nu^2}, & C_{55} &= \frac{E_3}{1-\nu^2} + \frac{E_{3r}b_r}{d_r}, \\
 C_{63} &= \frac{E_2}{2(1+\nu)}, & C_{66} &= \frac{E_3}{1+\nu},
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 C_7 &= \frac{5}{6} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{sh}}{2(1+\nu)} dz + \frac{b_s}{d_s} \int_{h/2}^{h/2+h_s} \frac{E_s(z)}{2(1+\nu)} dz \right] = \frac{5}{12(1+\nu)} \left[ E_1 + \frac{b_s}{d_s} E_{1s} \right], \\
 C_8 &= \frac{5}{6} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_{sh}}{2(1+\nu)} dz + \frac{b_r}{d_r} \int_{h/2}^{h/2+h_s} \frac{E_r(z)}{2(1+\nu)} dz \right] = \frac{5}{12(1+\nu)} \left[ E_1 + \frac{b_r}{d_r} E_{1r} \right].
 \end{aligned} \tag{A.1a}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh} dz = E_c h_{FG} + E_{mc} h_{FG} \frac{1}{k+1} + E_m \left[ h_{core} - e_0 \frac{2h_{core}}{\pi} \right] \\
 E_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} z E_{sh} dz = 0 \\
 E_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 E_{sh} dz = \frac{E_c}{12} \left[ (h_{FG} + h_{core})^3 - h_{core}^3 \right] \\
 &\quad + \frac{E_{mc}}{4} \left[ \frac{h_{FG}^3}{k+3} - \frac{2h_{FG}^2 (h_{FG} + h_{core})}{k+2} + \frac{h_{FG} (h_{FG} + h_{core})^2}{k+1} \right] + E_m \left[ \frac{h_{core}^3}{12} - \frac{e_0 h_{core}^3 (\pi^2 - 8)}{2\pi^3} \right] \\
 \phi_1 &= \frac{1}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh} \alpha_{sh} \Delta T dz = \frac{1}{1-\nu} \Delta T \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh} \alpha_{sh} dz = \frac{1}{1-\nu} \Delta T \phi_{10} \\
 \phi_{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh} \alpha_{sh} dz = E_c \alpha_c h_{FG} + E_m \alpha_m a - E_m \alpha_m e_0 \frac{4a}{\pi} + E_m \alpha_m e_0^2 \frac{a}{2} \\
 &\quad + E_c \alpha_{mc} \frac{h_{FG}}{(k+1)} + E_{mc} \alpha_c \frac{h_{FG}}{(k+1)} + E_{mc} \alpha_{mc} \frac{h_{FG}}{(2k+1)}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Trường hợp gân trong

$$\begin{aligned}
 E_{1s} &= \int_{h/2}^{h/2+h_s} E_s(z) dz = E_c h_s + E_{mc} \frac{h_s}{k_2+1}, \\
 E_{2s} &= \int_{h/2}^{h/2+h_s} E_s(z) \cdot z dz = \frac{E_c}{2} h h_s \left( \frac{h_s}{h} + 1 \right) + E_{mc} h_s h \left( \frac{1}{k_2+2} \frac{h_s}{h} + \frac{1}{2k_2+2} \right), \\
 E_{3s} &= \int_{h/2}^{h/2+h_s} z^2 E_s(z) dz = \frac{E_c}{3} h_s^3 \left( \frac{3}{4} \frac{h^2}{h_s^2} + \frac{3}{2} \frac{h}{h_s} + 1 \right) + E_{mc} h_s^3 \left[ \frac{1}{k_2+3} + \frac{1}{k_2+2} \frac{h}{h_s} + \frac{1}{4(k_2+1)} \frac{h^2}{h_s^2} \right], \\
 \phi_{1x}^T &= \frac{b_s}{d_s} \int_{h/2}^{h/2+h_s} E_s \alpha_s \Delta T dz \\
 E_{1r} &= \int_{h/2}^{h/2+h_r} E_r(z) dz = E_c h_r + E_{mc} \frac{h_r}{k_3+1}, \\
 E_{2r} &= \int_{h/2}^{h/2+h_r} z E_r(z) dz = \frac{E_c}{2} h h_r \left( \frac{h_r}{h} + 1 \right) + E_{mc} h_r h \left( \frac{1}{k_3+2} \frac{h_r}{h} + \frac{1}{2k_3+2} \right), \\
 E_{3r} &= \int_{h/2}^{h/2+h_r} z^2 E_r(z) dz = \frac{E_c}{3} h_r^3 \left( \frac{3}{4} \frac{h^2}{h_r^2} + \frac{3}{2} \frac{h}{h_r} + 1 \right) + E_{mc} h_r^3 \left[ \frac{1}{k_3+3} + \frac{1}{k_3+2} \frac{h}{h_r} + \frac{1}{4(k_3+1)} \frac{h^2}{h_r^2} \right], \\
 \phi_{1y}^T &= \frac{b_r}{d_r} \int_{h/2}^{h/2+h_r} E_r \alpha_r \Delta T dz
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

khi  $\Delta T = const$  thì

$$\begin{aligned}
 \phi_{1x}^T &= \phi_{0x} h_s \Delta T \text{ với } \phi_{0x} = \frac{b_s}{d_s} \left[ E_c \alpha_c + \frac{E_c \alpha_{mc} + E_{mc} \alpha_c}{k_2+1} + \frac{E_{mc} \alpha_{mc}}{2k_2+1} \right], \\
 \phi_{1y}^T &= \phi_{0y} h_r \Delta T \text{ với } \phi_{0y} = \frac{b_r}{d_r} \left[ E_c \alpha_c + \frac{E_c \alpha_{mc} + E_{mc} \alpha_c}{k_3+1} + \frac{E_{mc} \alpha_{mc}}{2k_3+1} \right].
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Trường hợp gân ngoài

$$\begin{aligned}
 E_{1s} &= \int_{-h/2-h_s}^{-h/2} E_s(z) dz = E_c h_s + E_{mc} \frac{h_s}{k_2+1}, \\
 E_{2s} &= \int_{-h/2-h_s}^{-h/2} z E_s(z) dz = -E_c \frac{h_s h + h_s^2}{2} - E_{mc} \left( \frac{h_s^2}{k_2+2} + \frac{h_s h}{2k_2+2} \right), \\
 E_{3s} &= \int_{-h/2-h_s}^{-h/2} z^2 E_s(z) dz = E_c \frac{3h_s h^2 + 6h_s^2 h + 4h_s^3}{12} + E_{mc} \left( \frac{h_s^3}{k_2+3} + \frac{h_s^2 h}{k_2+2} + \frac{h_s h^2}{4k_2+4} \right)
 \end{aligned}$$

### III

$$\begin{aligned}\phi_{1x}^T &= \frac{b_s}{d_s} \int_{-h/2-h_s}^{-h/2} E_s \alpha_s \Delta T dz, \\ E_{1r} &= E_c h_r + E_{mc} \frac{h_r}{k_3 + 1}, \quad E_{2r} = -E_c \frac{h_r h + h_r^2}{2} - E_{mc} \left( \frac{h_r^2}{k_3 + 2} + \frac{h_r h}{2k_3 + 2} \right), \\ E_{3r} &= E_c \frac{3h_r h^2 + 6h_r^2 h + 4h_r^3}{12} + E_{mc} \left( \frac{h_r^3}{k_3 + 3} + \frac{h_r^2 h}{k_3 + 2} + \frac{h_r h^2}{4k_3 + 4} \right), \\ \phi_{1y}^T &= \frac{b_r}{d_r} \int_{-h/2-h_r}^{-h/2} E_r \alpha_r \Delta T dz.\end{aligned}\tag{A.5}$$

khi  $\Delta T = const$  thì

$$\begin{aligned}\phi_{1x}^T &= \phi_{0x} h_s \Delta T \quad \text{với} \quad \phi_{0x} = \frac{b_s}{d_s} \left( E_c \alpha_c + \frac{E_c \alpha_{mc} + E_{mc} \alpha_c}{k_2 + 1} + \frac{E_{mc} \alpha_{mc}}{2k_2 + 1} \right) \\ \phi_{1y}^T &= \phi_{0y} h_r \Delta T \quad \text{với} \quad \phi_{0y} = \frac{b_r}{d_r} \left( E_c \alpha_c + \frac{E_c \alpha_{mc} + E_{mc} \alpha_c}{k_3 + 1} + \frac{E_{mc} \alpha_{mc}}{2k_3 + 1} \right)\end{aligned}\tag{A.6}$$

Các giá trị  $e_s$  và  $e_r$  biểu thị độ lệch tâm, khoảng cách từ mặt giữa của vỏ đến trọng tâm mặt cắt ngang của gân gia cường (Hình 3.7).

#### Phụ lục B

Các hệ số  $C_{ij}^*$ ,  $D_{ij}^*$  trong công thức (3.30) và (3.31) được xác định như sau

$$\begin{aligned}\Delta &= C_{22} C_{11} - C_{12}^2, \quad C_{22}^* = C_{22} / \Delta, \quad C_{12}^* = C_{12} / \Delta, \quad C_{14}^* = (C_{12} C_{24} - C_{22} C_{14}) / \Delta, \\ C_{15}^* &= (C_{12} C_{25} - C_{22} C_{15}) / \Delta, \quad C_{16}^* = (C_{22} - C_{12}) / \Delta, \quad C_{11}^* = C_{11} / \Delta, \\ C_{24}^* &= (C_{12} C_{14} - C_{11} C_{24}) / \Delta, \quad C_{25}^* = (C_{12} C_{15} - C_{11} C_{25}) / \Delta, \quad C_{26}^* = (C_{11} - C_{12}) / \Delta, \\ C_{33}^* &= 1 / C_{33}, \quad C_{36}^* = C_{36} / C_{33}.\end{aligned}\tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}D_{14}^* &= C_{14} C_{22}^* - C_{24} C_{12}^*, \quad D_{44}^* = C_{44} + C_{24} C_{24}^* + C_{14} C_{14}^*, \quad D_{24}^* = C_{24} C_{11}^* - C_{14} C_{12}^*, \\ D_{45}^* &= C_{14} C_{15}^* + C_{24} C_{25}^* + C_{45}, \quad D_{46}^* = (C_{14} C_{16}^* + C_{24} C_{26}^*), \quad D_{15}^* = C_{15} C_{22}^* - C_{25} C_{12}^*, \\ D_{54}^* &= C_{15} C_{14}^* + C_{25} C_{24}^* + C_{45}, \quad D_{25}^* = C_{25} C_{11}^* - C_{15} C_{12}^*, \quad D_{55}^* = C_{15} C_{15}^* + C_{25} C_{25}^* + C_{55}, \\ D_{56}^* &= (C_{15} C_{16}^* + C_{25} C_{26}^*), \quad D_{63}^* = C_{63} C_{33}^*, \quad D_{66}^* = C_{66} - C_{63} C_{36}^*.\end{aligned}\tag{B.2}$$

#### Phụ lục C

Các thành phần  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  trong công thức (3.35) và (3.36) được xác định như sau

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= -D_{44}^*, \quad \alpha_{12} = -(D_{45}^* + 2D_{66}^* + D_{54}^*), \quad \alpha_{13} = -D_{55}^*, \\ \alpha_{14} &= D_{24}^*, \quad \alpha_{15} = (D_{14}^* - 2D_{63}^* + D_{25}^*), \quad \alpha_{16} = D_{15}^*.\end{aligned}$$

## IV

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= C_{11}^*, & \beta_{12} &= C_{33}^* - 2C_{12}^*, & \beta_{13} &= C_{22}^*, \\ \beta_{14} &= -C_{24}^*, & \beta_{15} &= -(C_{14}^* + C_{25}^* + C_{36}^*), & \beta_{16} &= -C_{15}^*.\end{aligned}$$

### Phụ lục D

Các thành phần  $\phi_i$ ,  $\phi_{ij}^T$  và  $E_i$ ,  $E_{ip}$  trong công thức (4.8) và (4.9) được xác định như sau

Vỏ trụ sandwich FGP

$$E_1 = \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh} dz = E_c h_{FG} + E_{mc} h_{FG} \frac{1}{k+1} + E_m \left[ h_{core} - e_0 \frac{2h_{core}}{\pi} \right], \quad E_2 = \int_{-h/2}^{h/2} z E_{sh} dz = 0,$$

$$\begin{aligned}E_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 E_{sh} dz = \frac{E_c}{12} \left[ (h_{FG} + h_{core})^3 - h_{core}^3 \right] \\ &+ \frac{E_{mc}}{4} \left[ \frac{h_{FG}^3}{k+3} - \frac{2h_{FG}^2 (h_{FG} + h_{core})}{k+2} + \frac{h_{FG} (h_{FG} + h_{core})^2}{k+1} \right] + E_m \left[ \frac{h_{core}^3}{12} - \frac{e_0 h_{core}^3 (\pi^2 - 8)}{2\pi^3} \right]\end{aligned}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh} \alpha_{sh} \Delta T dz = \frac{1}{1-\nu} \phi_{10} h \Delta T \quad (\Delta T = const)$$

$$\phi_{10} h = \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh} \alpha_{sh} dz = E_m \alpha_m \frac{h_{core}}{\pi} \left[ \pi - 4e_0 + \frac{e_0^2 \pi}{4} \right] + h_{FG} \left[ 2E_c \alpha_c + (\alpha_c E_{mc} + E_c \alpha_{mc}) \frac{1}{k+1} + \frac{E_{mc} \alpha_{mc}}{2k+1} \right]$$

Gân gia cường

$$E_{1p} = \int_{h/2}^{h/2+h_p} E_p(z) dz = E_c h_p + E_{mc} \frac{h_p}{k_p+1},$$

$$E_{2p} = \int_{h/2}^{h/2+h_p} z E_p(z) dz = \frac{E_c}{2} h h_p \left( \frac{h_p}{h} + 1 \right) + E_{mc} h_p h \left( \frac{1}{k_p+2} \frac{h_p}{h} + \frac{1}{2k_p+2} \right),$$

$$E_{3p} = \int_{h/2}^{h/2+h_p} z^2 E_p(z) dz = \frac{E_c}{3} h_p^3 \left( \frac{3}{4} \frac{h^2}{h_p^2} + \frac{3}{2} \frac{h}{h_p} + 1 \right) + E_{mc} h_p^3 \left[ \frac{1}{k_p+3} + \frac{1}{k_p+2} \frac{h}{h_p} + \frac{1}{4(k_p+1)} \frac{h^2}{h_p^2} \right]$$

$$\phi_{1x}^T = \frac{b_p n_p}{2\pi R \cos \theta} \int_{h/2}^{h/2+h_p} 2E_p \alpha_p (\cos^6 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \Delta T dz = \phi_{0x} h_p \Delta T$$

$$\phi_{0x} h_p = 2 \frac{b_p h_p}{d_p} \left[ E_c \alpha_c + \frac{1}{k_p+1} (E_{mc} \alpha_c + E_c \alpha_{mc}) + \frac{1}{2k_p+1} E_{mc} \alpha_{mc} \right] (\cos^6 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta)$$

$$\phi_{1y}^T = \frac{b_p}{d_p} \int_{h/2}^{h/2+h_p} 2E_p \alpha_p (\sin^6 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \Delta T dz = \phi_{0y} h_p \Delta T$$

$$\phi_{0y} h_p = 2 \frac{b_p h_p}{d_p} \left[ E_c \alpha_c + \frac{1}{k_p+1} (E_{mc} \alpha_c + E_c \alpha_{mc}) + \frac{1}{2k_p+1} E_{mc} \alpha_{mc} \right] (\sin^6 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta)$$

**Phụ lục E**

Các thành phần  $G_i$  ( $i=1-6$ ) trong công thức (4.22) được xác định như sau

$$G_1 = \frac{G_{01}}{16\beta_{11}\alpha^4} = \Gamma_{11}f_2 + \Gamma_{12}f_1^2, \quad G_2 = \frac{G_{02}}{16\beta^4[\beta_{11}\lambda^4 + \beta_{12}\lambda^2 + \beta_{13}]} = \Gamma_{21}f_1^2,$$

$$G_3 = \frac{G_{03}}{\beta^4\left[\beta_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \lambda\right)^4 + \beta_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \lambda\right)^2 + \beta_{13}\right]} = \Gamma_{31}f_1 + \Gamma_{32}f_1f_2,$$

$$G_4 = \frac{G_{04}}{\beta^4\left[\beta_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \lambda\right)^4 + \beta_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \lambda\right)^2 + \beta_{13}\right]} = \Gamma_{41}f_1 + \Gamma_{42}f_1f_2,$$

$$G_5 = \frac{G_{05}}{\beta^4\left[\beta_{11}\left(3\frac{\alpha}{\beta} + \lambda\right)^4 + \beta_{12}\left(3\frac{\alpha}{\beta} + \lambda\right)^2 + \beta_{13}\right]} = \Gamma_5f_1f_2,$$

$$G_6 = \frac{-G_{05}}{\beta^4\left[\beta_{11}\left(3\frac{\alpha}{\beta} - \lambda\right)^4 + \beta_{12}\left(3\frac{\alpha}{\beta} - \lambda\right)^2 + \beta_{13}\right]} = \Gamma_6f_1f_2.$$

trong đó

$$\Gamma = \alpha^2 + \beta^2\lambda^2, \quad \Gamma_{11} = \frac{4\beta_{14}\alpha^2 - 1/R}{8\beta_{11}\alpha^2}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\beta^2}{32\beta_{11}\alpha^2},$$

$$\Gamma_{21} = \frac{\alpha^2}{32\beta^2[\beta_{11}\lambda^4 + \beta_{12}\lambda^2 + \beta_{13}]},$$

$$\Gamma_{31} = \frac{-\frac{1}{2}\left\{-\beta_{14}\left[\Gamma^2 + (2\alpha\beta\lambda)^2\right] + \left(\frac{1}{R} - \beta_{15}\beta^2\right)\Gamma - \beta_{16}\beta^4\right\} + \alpha\beta\lambda\left[-2\beta_{14}\Gamma + \frac{1}{R} - \beta_{15}\beta^2\right]}{\beta^4\left[\beta_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \lambda\right)^4 + \beta_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \lambda\right)^2 + \beta_{13}\right]},$$

$$\Gamma_{32} = \frac{\alpha^2}{2\beta^2\left[\beta_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \lambda\right)^4 + \beta_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \lambda\right)^2 + \beta_{13}\right]},$$

$$\Gamma_{41} = \frac{-\beta_{14}\left[\Gamma^2 + (2\alpha\beta\lambda)^2\right] + \left(\frac{1}{R} - \beta_{15}\beta^2\right)\Gamma - \beta_{16}\beta^4 + 2\alpha\beta\lambda\left[-2\beta_{14}\Gamma + \frac{1}{R} - \beta_{15}\beta^2\right]}{2\beta^4\left[\beta_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \lambda\right)^4 + \beta_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \lambda\right)^2 + \beta_{13}\right]},$$

## VI

$$\Gamma_{42} = \frac{-\alpha^2}{2\beta^2 \left[ \beta_{11} \left( \frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right)^4 + \beta_{12} \left( \frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right)^2 + \beta_{13} \right]},$$

$$\Gamma_5 = \frac{\alpha^2}{2\beta^2 \left[ \beta_{11} \left( 3\frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right)^4 + \beta_{12} \left( 3\frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right)^2 + \beta_{13} \right]},$$

$$\Gamma_6 = \frac{-\alpha^2}{2\beta^2 \left[ \beta_{11} \left( 3\frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right)^4 + \beta_{12} \left( 3\frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right)^2 + \beta_{13} \right]}.$$

### Phụ lục F

Các thành phần  $D_i$  ( $i=1-7$ ) trong công thức (4.23) và (4.24) được xác định như sau

$$\begin{aligned} D_1 &= \alpha_{11} \left[ (\alpha^2 + \beta^2 \lambda^2)^2 + (2\alpha\beta\lambda)^2 \right] + \alpha_{12} \beta^2 (\alpha^2 + \beta^2 \lambda^2) + \alpha_{13} \beta^4 \\ &\quad - \Gamma_{31} \beta^4 \left[ \alpha_{14} \left( \frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right)^4 + \left( \alpha_{15} - \frac{1}{R\beta^2} \right) \left( \frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right)^2 + \alpha_{16} \right] \\ &\quad + \Gamma_{41} \beta^4 \left[ \alpha_{14} \left( \frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right)^4 + \left( \alpha_{15} - \frac{1}{R\beta^2} \right) \left( \frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right)^2 + \alpha_{16} \right], \\ D_2 &= -\Gamma_{32} \beta^4 \left[ \alpha_{14} \left( \frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right)^4 + \left( \alpha_{15} - \frac{1}{R\beta^2} \right) \left( \frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right)^2 + \alpha_{16} \right] \\ &\quad + \alpha^2 \beta^2 (-\Gamma_{31} + \Gamma_{41} - 2\Gamma_{11}) + \Gamma_{42} \beta^4 \left[ \alpha_{14} \left( \frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right)^4 + \left( \alpha_{15} - \frac{1}{R\beta^2} \right) \left( \frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right)^2 + \alpha_{16} \right], \\ D_3 &= -2(\Gamma_{21} + \Gamma_{12}) \alpha^2 \beta^2, D_4 = (-\Gamma_{32} + \Gamma_{42} - \Gamma_5 + \Gamma_6) \alpha^2 \beta^2, D_5 \\ &= -8\alpha^2 \left[ -2\alpha_{11} \alpha^2 + \left( 4\alpha_{14} \alpha^2 - \frac{1}{R} \right) \Gamma_{11} \right], \\ D_6 &= 8\alpha^2 \Gamma_{12} \left( 4\alpha_{14} \alpha^2 - \frac{1}{R} \right) + 2(\Gamma_{31} - \Gamma_{41}) \alpha^2 \beta^2, D_7 = 2\alpha^2 \beta^2 (-\Gamma_{32} + \Gamma_{42} - \Gamma_5 + \Gamma_6). \end{aligned}$$

### Phụ lục G

Các thành phần  $a_{ij}$  trong công thức (4.52) - (4.56) được xác định như sau

$$\begin{aligned} a_{11} &= -C_{11} \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - C_{33} \frac{n^2}{R^2}, & a_{12} &= -C_{12} \frac{mn\pi}{LR} - C_{33} \frac{mn\pi}{LR} \\ a_{13} &= C_{12} \frac{1}{R} \frac{m\pi}{L}, & a_{14} &= -C_{14} \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - C_{36} \frac{1}{2} \frac{n^2}{R^2} \\ a_{15} &= -C_{15} \frac{mn\pi}{LR} - C_{36} \frac{1}{2} \frac{mn\pi}{LR} \end{aligned}$$



## VII

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= -C_{33} \frac{mn\pi}{LR} - C_{12} \frac{mn\pi}{LR}, & a_{22} &= \left( -C_{33} \frac{m^2\pi^2}{L^2} - C_{22} \frac{n^2}{R^2} \right) \\
 a_{23} &= C_{22} \frac{1}{R} \frac{n}{R}, & a_{24} &= \left( -C_{36} \frac{1}{2} \frac{mn\pi}{LR} - C_{24} \frac{mn\pi}{LR} \right) \\
 a_{25} &= \left( -C_{36} \frac{1}{2} \frac{m^2\pi^2}{L^2} - C_{25} \frac{n^2}{R^2} \right) \\
 a_{31} &= \frac{1}{R} C_{12} \frac{m\pi}{L}, & a_{32} &= \frac{1}{R} C_{22} \frac{n}{R}, & a_{33} &= -C_7 \frac{m^2\pi^2}{L^2} - C_8 \frac{n^2}{R^2} - C_{22} \frac{1}{R^2} \\
 a_{34} &= C_7 \frac{m\pi}{L} + \frac{1}{R} C_{24} \frac{m\pi}{L}, & a_{35} &= C_8 \frac{n}{R} + \frac{1}{R} C_{25} \frac{n}{R} \\
 a_{36} &= \left( -\frac{1}{8} C_{11} \frac{m^4\pi^4}{L^4} - C_{12} \frac{1}{8} \frac{n^2 m^2 \pi^2}{R^2 L^2} - \frac{1}{2} C_{33} \frac{m^2 n^2 \pi^2}{L^2 R^2} - \frac{1}{8} C_{12} \frac{m^2 n^2 \pi^2}{L^2 R^2} - \frac{1}{8} C_{22} \frac{n^4}{R^4} \right) \\
 a_{41} &= -C_{14} \frac{m^2\pi^2}{L^2} - C_{63} \frac{n^2}{R^2}, & a_{42} &= -C_{24} \frac{mn\pi}{LR} - C_{63} \frac{mn\pi}{LR} \\
 a_{43} &= C_{24} \frac{1}{R} \frac{m\pi}{L} + C_7 \frac{m\pi}{L}, & a_{44} &= -C_{44} \frac{m^2\pi^2}{L^2} - C_{66} \frac{1}{2} \frac{n^2}{R^2} - C_7 \\
 a_{45} &= -C_{45} \frac{mn\pi}{LR} - C_{66} \frac{1}{2} \frac{mn\pi}{LR} \\
 a_{51} &= -C_{63} \frac{mn\pi}{LR} - C_{15} \frac{mn\pi}{LR}, & a_{52} &= -C_{63} \frac{m^2\pi^2}{L^2} - C_{25} \frac{n^2}{R^2} \\
 a_{53} &= C_{25} \frac{1}{R} \frac{n}{R} + C_8 \frac{n}{R}, & a_{54} &= -C_{66} \frac{1}{2} \frac{mn\pi}{LR} - C_{45} \frac{mn\pi}{LR} \\
 a_{55} &= -C_{66} \frac{1}{2} \frac{m^2\pi^2}{L^2} - C_{55} \frac{n^2}{R^2} - C_8
 \end{aligned}$$