BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Khuất Thị Bình

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẶP CHO BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN ỨNG DỤNG

Hà Nội – 2024

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Khuất Thị Bình

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LẶP CHO BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 9 46 01 12

Xác nhận của Học viện
Khoa học và Công nghệ
KT. GIÁM ĐỐC
PHÓ GIÁM ĐỐC

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ
VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

Nguyễn Thị Trung

Người hướng dẫn
(Ký, ghi rõ họ tên)

GS.TS. Nguyễn Bường

Hà Nội - 2024

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan các kết quả được trình bày trong luận án là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của GS.TS Nguyễn Bường. Các kết quả trong luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình của ai khác. Kết quả viết chung với các tác giả khác đều nhận được sự nhất trí của các đồng tác giả khi đưa vào luận án

Tôi xin chịu trách nhiệm về lời cam đoan của mình.

Hà Nội, Ngày 21 tháng 9 năm 2024

Nghiên cứu sinh

Khuất Thị Bình

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành tại Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam dưới sự hướng dẫn tận tình của GS.TS Nguyễn Bường, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và những ý kiến đóng góp quý báu của GS.TS Đỗ Văn Lưu, GS.TS Trần Vũ Thiệu, PGS.TS Nguyễn Thị Thu Thủy, TS Nguyễn Thị Quỳnh Anh, ... đã tận tâm giúp đỡ NCS. Từ đáy lòng mình, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các Thầy Cô.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn đến Ban lãnh đạo, các Thầy Cô cùng toàn thể cán bộ, công nhân viên thuộc Viện Công nghệ Thông tin, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã tạo mọi điều kiện tốt nhất, giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám đốc, các Thầy Cô đồng nghiệp của Học viện Ngân hàng và toàn thể anh chị em nghiên cứu sinh, bạn bè đồng nghiệp đã luôn quan tâm, động viên, trao đổi và đóng góp những ý kiến quý báu cho tác giả trong suốt quá trình học tập, semina, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin kính tặng những người thân yêu trong gia đình của mình, những người đã luôn động viên, chia sẻ và khích lệ để tác giả có thể hoàn thành công việc học tập và nghiên cứu của mình niềm vinh hạnh này.

Tác giả

Khuất Thị Bình

MỤC LỤC

DANH MỤC KÝ HIỆU

$\mathbb{N}^*$	tập hợp các số tự nhiên khác không
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập hợp các số thực không âm
$\mathbb{R}_-$	tập hợp các số thực không dương
$\mathbb{R}^n$	không gian véctơ Euclid n chiều
$\mathbb{R}^n_+$	tập hợp các véctơ không âm của không gian $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n_-$	tập hợp các véctơ không dương của không gian $\mathbb{R}^n$
X^*	không gian đối ngẫu tôpô của không gian X
2^X	tập các tập con của tập hợp X
$\langle \xi, x \rangle$	giá trị của $\xi \in X^*$ tại $x \in X$
$\emptyset$	tập rỗng
$\mathrm{gra}T$	đồ thị của ánh xạ T
T^{-1}	ánh xạ nghịch đảo của ánh xạ T
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
$A := B$	A được định nghĩa bằng B
$A \subseteq B$	A là tập con của B
$A \cup B$	hợp của hai tập hợp A và B
$z = [x, y]$	phần tử z gồm hai thành phần x và y
SFP	bài toán chấp nhận tách
MSSFP	bài toán chấp nhận tách đa tập
SEP	bài toán trùng tách
MSSEP	bài toán trùng tách đa tập
ASEP	bài toán trùng tách xấp xỉ
VIP	bài toán bất đẳng thức biến phân
$S(0, a)$	hình cầu tâm 0 bán kính a

MỞ ĐẦU

Lý thuyết điểm bất động của ánh xạ không giãn và các mở rộng của nó đóng một vai trò quan trọng không những trong việc nghiên cứu lý thuyết phương trình vi phân thường, phương trình vi phân đạo hàm riêng, bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân... mà còn trong các bài toán liên quan trực tiếp đến bài toán thực tế như: bài toán chấp nhận lồi, bài toán chấp nhận tách và trùng tách đa tập. các bài toán này nảy sinh từ một số bài toán thực tế như: bài toán khôi phục và xử lý ảnh, bài toán xạ trị ... (xem, [1, 2, 3] và các tài liệu được trích dẫn trong đó).

Những phương pháp cơ bản tìm điểm bất động của một ánh xạ không giãn là phương pháp lặp Krasnosel'skii–Mann [4, 5], phương pháp lặp Ishikawa [6], phương pháp lặp Halpern [7] và phương pháp xấp xỉ mềm [8]. Các phương pháp lặp Krasnosel'skii–Mann và Ishikawa cho kết quả hội tụ yếu, trong khi phương pháp lặp Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm cho kết quả hội tụ mạnh trong không gian vô hạn chiều.

Một số cải biên của các phương pháp trên cũng đã được đề xuất để tìm điểm bất động của một ánh xạ không giãn như sự kết hợp của phương pháp lặp Krasnosel'skii–Mann và Ishikawa với phương pháp đường dốc nhất hoặc sự kết hợp phương pháp lặp Krasnosel'skii–Mann và phương pháp lặp Halpern [9, 10]....

Một số phương pháp trên cũng đã được áp dụng để giải bài toán chấp nhận tách, bài toán trùng tách và bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn.

Mục tiêu của luận án là đề xuất một số phương pháp lặp mới xấp xỉ nghiệm bài toán chấp nhận tách, bài toán trùng tách và bài toán bất đẳng thức biến phân nhằm khắc phục được một số hạn chế của các phương pháp trước đó.

Bài toán 1. Bài toán chấp nhận tách đa tập (MSSFP)

Cho H_1 và H_2 là các không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$. Cho $A : H_1 \to H_2$ là ánh xạ tuyến tính bị chặn. Cho C_i và Q_j là các tập con lồi, đóng tương ứng trong H_1 và H_2, với mỗi $i \in J_1$ và $j \in J_2$, ở đây, J_1 và J_2 là tập các chỉ số, có thể là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được. Bài toán MSSFP, là bài toán:

$$\text{Tìm } x \in C := \bigcap_{i \in J_1} C_i \text{ sao cho } Ax \in Q := \bigcap_{j \in J_2} Q_j. \tag{MSSFP}$$

Khi các tập chỉ số J_1 và J_2 gồm một phần tử thì bài toán MSSFP trở thành bài toán chấp nhận tách (SFP): tìm $x \in C$ sao cho $Ax \in Q$.

Bài toán MSSFP được nghiên cứu lần đầu tiên bởi Censor và Elfving [2] trong trường hợp $J_1 = \{1, \ldots, N\}$, $J_2 = \{1, \ldots, M\}$ là các tập hữu hạn. Khi N và M nguyên dương, để giải bài toán (MSSFP), ông cùng các cộng sự đưa ra một phương pháp lặp dựa trên cơ sở phương pháp chiếu gradient. Phương pháp lặp này có hạn chế cỡ bước lặp bởi hệ số Lipschitz của ánh xạ gradient phụ thuộc vào chuẩn $\|A\|$ của ánh xạ chuyển A. Để tránh việc phải tính toán hệ số Lipschitz, Zhao và Yang [11] đã giới thiệu phương pháp chiếu tự thích nghi, áp dụng việc tìm kiếm theo tia kiểu Armijo ([12, 13]), Tuy nhiên, phương pháp lặp này cần số lần lặp phù hợp. Tiếp tục nghiên cứu, Zhao và Yang [11] đưa ra cách giải tự thích nghi mới, trong đó tác giả sử dụng một tham số lặp phụ để tính toán trực tiếp bước lặp phụ trong mỗi lần lặp, không cần ước tính hệ số Lipschitz hoặc chọn số lần lặp phụ (có nghĩa là việc chọn tham số lặp trong phương pháp này không phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển). Cách tiếp cận này đã được trình bày trong [14] cho bài toán SFP. Mặt khác, Xu [15] đã chỉ ra bài toán (MSSFP) tương đương với bài toán tìm điểm bất động chung của họ ánh xạ trung bình và đưa ra phương pháp lặp kế tiếp; phương pháp lặp đồng thời và phương pháp lặp tuần hoàn để xấp xỉ nghiệm bài toán (MSSFP). Các phương pháp lặp này sử dụng một số bước lặp cố định, phụ thuôc vào hệ số Lipschitz. Phương pháp lặp đồng thời và Phương pháp lặp tuần hoàn với cỡ bước lặp tự thích nghi [11, 13] đã được nghiên cứu gần đây trong [16, 17]. Các phương pháp lặp kể trên cho sự hội tụ yếu trong không gian vô hạn chiều. Để nhận được sự hội tụ mạnh của các phương pháp này, Xu [18] đã đề xuất phương pháp hiệu chỉnh lặp kiểu Bruck [19] và Bakushinsky [20]. Dãy lặp được xây dựng như sau:

$$z^{k+1} = P_C(I - \gamma_k(A^*(I - P_Q)A + \alpha_k I))z^k,\ z^1 \in H_1,\ k \geq 1, \tag{0.1}$$

ở đây, P_C và P_Q là phép chiếu mêtric chiếu H_1 và H_2 lên C và Q tương ứng, A^* là ánh xạ đối ngẫu A, các tham số dương γ_k và α_k đủ nhỏ, dần tới 0 khi $k \to \infty$ và $0 < \gamma_k \leq \alpha_k/(\|A\|^2 + \alpha_k)$. Phương pháp này cũng còn hạn chế khi tham số phụ thuộc vào việc tính chuẩn của toán tử chuyển. Gần đây, với ý tưởng loại bỏ việc tính chuẩn của toán tử chuyển trong biểu thức của γ_k trong (0.1), Tian và Zhang [21] đã đưa ra một phương pháp lặp tự thích nghi mới để tính toán trực tiếp số bước lặp bởi $\gamma_k = \rho_k f(x^k)/\|A^*(I - P_Q)Ax^k\|^2$ với $\varepsilon < \rho_k < 4 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ tùy ý đủ nhỏ, ở đây $f(x) = \frac{1}{2}\|(I - P_Q)Ax\|^2$, với điều kiện ($\alpha$): $\alpha_k \in (0, 1)$ với mọi $k \geq 1$, $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$. Tuy nhiên, việc chứng minh kết quả này chưa hoàn thành vì chưa chỉ ra được $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\alpha_k = +\infty$ khi $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = 0$.

Mặt khác, các điều kiện đặt lên các tham số trong biểu thức mô tả phương pháp của Xu khi giải bài toán MSSFP với các tập chỉ số J_1 và J_2 là vô hạn đếm được thì trong quá trình thực hiện theo phương pháp này cần phải tính toán trên các tổng vô hạn, đây cũng là một việc khá phức tạp. Gần đây, để khắc phục tồn tại này, Nguyễn Bường và các cộng sự [22] đã mở rộng phương pháp (0.1) để giải bài toán MSSFP trong trường hợp các tập chỉ số J_1 và J_2 là vô hạn đếm được. Trong đề xuất này, quá trình tính toán chỉ cần tính trên các tổng hữu hạn, điều này làm cho các bước tính toán trong quá trình giải bài toán đơn giản hơn. Tuy nhiên, phương pháp này vẫn chưa loại bỏ được đại lượng chuẩn của toán tử chuyển khỏi biểu thức của tham số lặp γ_k.

Vì vậy, mục tiêu thứ nhất của luận án là đưa ra một phương pháp hiệu chỉnh lặp mới xấp xỉ nghiệm bài toán chấp nhận tách đa tập (MSSFP)***, ở đó, tham số lặp γ_k được chọn không phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển.***

Bài toán 2. Bài toán trùng tách đa tập (MSSEP)

Cho H_1, H_2 và H_3 là các không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$. Cho $A : H_1 \to H_3$ và $B : H_2 \to H_3$ là hai ánh xạ tuyến tính bị chặn. Cho J_1, J_2 là hai tập chỉ số, $\{C_i\}_{i\in J_1}$ và $\{Q_j\}_{j\in J_2}$ là hai họ tập con lồi, đóng trong H_1 và H_2 tương ứng. Bài toán MSSEP là bài toán:

$$\text{Tìm điểm } z=[x,y],\ x\in C:=\cap_{i\in J_1}C_i \text{ và } y\in Q:=\cap_{j\in J_2}Q_j \quad \text{sao cho } Ax=By. \tag{0.2}$$

Rõ ràng, nếu $H_2=H_3$ và $B=I$, thì bài toán MSSEP trở thành bài toán MSSFP. Đặc biệt, nếu các tập chỉ số J_1 và J_2 chỉ gồm một phần tử thì bài toán MSSEP chính là bài toán trùng tách (SEP): tìm điểm $z=[x,y]$, $x\in C$, $y\in Q$ sao cho $Ax=By$.

Bài toán SEP là một mở rộng của bài toán SFP và là một bài toán tối ưu với ràng buộc yếu, có nhiều ứng dụng, chẳng hạn ứng dụng trong bài toán chia miền trong vi phân đạo hàm riêng [23] và ứng dụng trong lý thuyết trò chơi [24] ... Năm 2013, Byrne và Moudafi [25] là hai tác giả nghiên cứu bài toán này đầu tiên trong không gian hữu hạn chiều. Để giải bài toán này, hai tác giả xét bài toán cực tiểu của phiếm hàm lồi sau:

$$\min f(z), z\in S, \tag{0.3}$$

ở đây, $z=[x,y]$, $x\in C$, $y\in Q$, $S=C\times Q$, $f(z)=\frac{1}{2}\|Ax-By\|^2$ và giới thiệu phương pháp trùng tách đồng thời:

$$z^{k+1}=P_S(I-\gamma_k G^*G)z^k,\ z^1\in H,\ k\in\mathbb{N}_+, \tag{0.4}$$

với $S=C\times Q\subseteq H=H_1\times H_2$, H là không gian Hilbert với tích vô hướng:

$$\langle z_1,z_2\rangle=\langle x_1,x_2\rangle+\langle y_1,y_2\rangle$$

và chuẩn

$$\|z\|=\sqrt{\langle z,z\rangle},$$

với $z_i=[x_i,y_i]$, $x_i\in H_1$, $y_i\in H_2$, $i=1,2$, $z^k=[x^k,y^k]$, $G=[A-B]$, G^* là ánh xạ đối ngẫu của G và γ_k là tham số lặp. Tập nghiệm của bài toán SEP trùng với tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân:

$$\text{Tìm một điểm } z_*\in S \text{ sao cho } \langle Tz_*,z-z_*\rangle\geq 0\ \forall z\in S, \tag{0.5}$$

với $T = G^*G$. Bài toán đặt không chỉnh (0.5) với ánh xạ phi tuyến đơn điệu và liên tục Lipschitz T trong H có thể được giải bằng phương pháp hiệu chỉnh trong [27] và [28]. Trong [19] và [20] Bruck và Bakushinsky cũng đề xuất phương pháp hiệu chỉnh lặp, đó là:

$$z^{k+1} = P_S(I - \gamma_k(T + \alpha_k I))z^k. \tag{0.6}$$

Hơn nữa, Chen cùng các cộng sự [29] đã đưa ra phương pháp (0.6) trong trường hợp $T = G^*G$. Sự hội tụ mạnh của dãy lặp $\{z^k\}$ tới nghiệm có chuẩn cực tiểu của bài toán (0.5) được đảm bảo bởi các điều kiện về α_k và γ_k. Các phương pháp giải bài toán SEP được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu (xem [30, 31, 32, 33] và các tài liệu trích dẫn).

Một số phương pháp lặp để giải quyết bài toán MSSEP trong trường hợp $J_1 = \{1, 2, \cdots, N\}$, $J_2 = \{1, 2, \cdots, M\}$ và $N < M$, đã được nghiên cứu bởi Shi và cộng sự trong [34], bởi Tian và cộng sự trong [35] bằng cách thêm $C_i = C_N$ với $N < i \leq M$. Cùng nghiên cứu bài toán này, năm 2013, Chen và các cộng sự đã đề xuất phương pháp giải bài toán (0.2) trong trường hợp các tập chỉ số J_1, J_2 là vô hạn đếm được [36]. Các tác giả đã chứng minh được sự hội tụ mạnh của dãy lặp tới điểm $z_* = [x_*, y_*] = P_\Gamma f(z_*)$.

Phương pháp của Chen và các cộng sự là cải biên của một phương pháp đã được nghiên cứu trong [34, 37] với các họ vô hạn tập hợp. Tồn tại trong phương pháp này là gặp nhiều khó khăn trong thực hành, vì ở mỗi bước lặp k, ta đều phải tính toán với một tổng vô hạn. Sau đó, một số nghiên cứu nhằm giải quyết tồn tại này và đã đề xuất một số kết quả liên quan đến bài toán (0.2) cũng như phát hiện một số ứng dụng của nó (xem [29] đề xuất năm 2014, [38] đề xuất năm 2016). Tuy nhiên, tất cả các đề xuất này đều chưa giải quyết được tồn tại trên.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Có thể thay tổng vô hạn ở mỗi bước lặp ở các phương pháp này bằng một tổng hữu hạn không? Mục tiêu thứ 2 của luận án sẽ trả lời câu hỏi này.

Bài toán 3. Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach

Cho E là một không gian Banach, $F : E \to E$ là một ánh xạ phi tuyến, C là một tập con lồi, đóng của E. Bài toán bất đẳng thức biến phân, viết tắt là VIP, với ánh xạ giá F và tập ràng buộc C trong không gian Banach E được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } p_* \in C \text{ sao cho } \langle Fp_*, j(p_* - p)\rangle \leq 0 \quad \forall p \in C, \tag{VIP}$$

ở đây, j là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E.

Khi E là không gian Hilbert H, thì ánh xạ đối ngẫu j là ánh xạ đơn vị và do đó, bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert:

$$\text{Tìm } p_* \in C \text{ sao cho } \langle Fp_*, p_* - p\rangle \leq 0 \quad \forall p \in C. \tag{0.7}$$

Phương pháp cơ bản đầu tiên giải bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert H khi F là ánh xạ η-đơn điệu mạnh và L-Lipschitz đã được đề xuất vào năm 1964 bởi Goldstein [39]. Thuật toán này được mô tả như sau: với điểm xuất phát x_0 bất kỳ trong C, các xấp xỉ tiếp theo được xác định bởi:

$$x^{k+1} = P_C(I - \mu_k F)x^k, \ k \geq 0,$$

trong đó, P_C là phép chiếu mêtric chiếu H lên tập đóng lồi C, $\mu_k = \mu \in (0, \frac{2\eta}{L^2})$, I là toán tử đơn vị trong H. Có hai hướng để mở rộng thuật toán này. Hướng thứ nhất nhằm giảm điều kiện đặt lên ánh xạ giá F như tính đơn điệu mạnh hay tính liên tục Lipschitz. Hướng thứ hai liên quan đến việc tính toán phép chiếu P_C, vì nói chung, khó để tìm được biểu thức tường minh cho P_C. Để giải quyết vấn đề thứ hai này, Yamada đã thay P_C bằng một hoặc một họ hữu hạn ánh xạ không giãn.

Trong một số trường hợp, ta thường xét bài toán bất đẳng thức biến phân với ràng buộc:

$$C = \bigcap_{i \in J} C_i,$$

với $C_i, i \in J$ là họ nào đó các tập con khác rỗng trong không gian Hilbert H, ở đây các tập C_i có thể cho dạng hiện như các hình cầu, không gian con $\ldots$, nhưng cũng có thể được cho dưới dạng ẩn như tập nghiệm của bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn hay tập nghiệm của bài toán cân bằng ... Các phương pháp cơ bản để tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn được sử dụng khá hiệu quả như phương pháp Krasnosel'skii–Mann, phương pháp lặp Ishikawa, phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ mềm.

Như ta thấy phương pháp lặp Ishikawa về hình thức là một mở rộng của phương pháp lặp Krasnosel'skii–Mann. Hai phương pháp này chỉ cho hội tụ yếu. Tuy nhiên, có ví dụ chỉ ra rằng, có những bài toán khi sử dụng phương pháp lặp Ishikawa thì dãy lặp này hội tụ đến nghiệm của bài toán nhưng khi sử dụng phương pháp lặp Krasnosel'ski–Mann thì không hội tụ. Vì vậy, việc kết hợp giữa các phương pháp khác nhau để tạo ra phương pháp hội tụ mạnh đã được đề cập đến và thu hút nhiều nhà nghiên cứu quan tâm, chẳng hạn: Kết hợp giữa phương pháp lặp Man với phương pháp đường dốc nhất được đề xuất bởi Ceng và cộng sự năm 2008 [40]. Kết hợp giữa phương pháp xấp xỉ mềm với phương pháp đường dốc nhất. Kết hợp giữa phương pháp Krasnosel'skii–Man với phương pháp đường dốc nhất [41] và một số đề xuất khác.

Việc kết hợp giữa phương pháp đường dốc nhất và phương pháp lặp Ishikawa xấp xỉ nghiệm bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach để thu được dãy lặp hội tụ mạnh là mục tiêu nghiên cứu tiếp theo mà luận án nhằm tới.

Luận án trình bày các kết quả nghiên cứu để giải quyết ba vấn đề nêu ở trên.

Nội dung của Luận án được trình bày trong ba chương.

Chương 1: Trình bày một số khái niệm cơ bản và một số phương pháp giải bài toán chấp nhận tách, bài toán trùng tách đa tập và bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn.

Chương 2: "Phương pháp hiệu chỉnh lặp giải các bài toán chấp nhận tách và trùng tách đa tập". Trong chương này, tác giả đề xuất một phương pháp hiệu chỉnh lặp mới kiểu Lavrentiev để giải bài toán chấp nhận tách đa tập trong các không gian Hilbert thực, trong đó, tham số lặp γ_k được chọn không phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển. Phần thứ hai của chương, đề xuất một phương pháp hiệu chỉnh lặp mới xấp xỉ nghiệm bài toán trùng tách đa tập trong các không gian Hilbert thực, mà ở mỗi bước lặp chỉ phải tính các tổng hữu hạn. Trong mỗi phần, tác giả đưa ra và tính toán một số ví dụ số minh họa cho các phương pháp đề xuất.

Chương 3: "Phương pháp lai ghép đường dốc nhất giải bài toán bất đẳng thức biến phân". Trong chương này, tác giả đề xuất một phương pháp lặp, trên cơ sở kết hợp phương pháp lặp Ishikawa với phương pháp đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân khi tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của họ vô hạn ánh xạ không giãn trong không gian Banach. Kết quả số minh họa cho sự hội tụ mạnh của phương pháp đề xuất cũng được đưa ra trong phần cuối của chương.

Các kết quả của luận án được báo cáo tại: Hội thảo Quốc gia lần thứ XXIII về một số vấn đề chọn lọc của Công nghệ Thông tin và Truyền thông, Quảng Ninh, 5–6/11/2020.

CHƯƠNG 1. MỘT SỐ KIẾN THỨC BỔ TRỢ

Chương này trình bày các khái niệm cơ bản trong không gian Hilbert, không gian Banach; Giới thiệu bài toán chấp nhận tách, bài toán trùng tách đa tập cùng một số phương pháp cơ bản giải các bài toán này. Các kiến thức của chương này được sử dụng để trình bày và nghiên cứu các kết quả chính của luận án trong Chương 2 và Chương 3.

1.1. Một số toán tử trong không gian Hilbert và không gian Banach

1.1.1. Một số toán tử trong không gian Hilbert

Cho H là không gian Hilbert với tích vô hướng và chuẩn lần lượt được ký hiệu là $\langle ., . \rangle$ và $\|.\|$.

Định nghĩa 1.1.1. ([42]) Dãy $\{x^k\} \subset H$ được gọi là hội tụ mạnh tới phần tử $x \in H$, ký hiệu $x^k \to x$, nếu $\|x^k - x\| \to 0$ khi $k \to \infty$.
Dãy $\{x^k\} \subset H$ được gọi là hội tụ yếu tới phần tử $x \in H$, ký hiệu $x^k \rightharpoonup x$, nếu $\langle x^k, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ khi $n \to \infty$ với mọi $y \in H$.

Nhận xét 1.1.1. (a) Hội tụ mạnh kéo theo hội tụ yếu, nhưng điều ngược lại không đúng.

(b) Nếu dãy $\{x^k\} \subset H$ thỏa mãn các điều kiện $\|x^k\| \to \|x\|$ và $x^k \rightharpoonup x$ thì $x^k \to x$ khi $k \to \infty$.

Định nghĩa 1.1.2. ([42]) Với mỗi $a \in \mathbb{R}, z \in H$ và $z \neq 0$, các tập $\{x \in H : \langle z, x\rangle \leq a\}$ và $\{x \in H : \langle z, x\rangle \geq a\}$ được gọi là các nửa không gian của H.

Định nghĩa 1.1.3. ([42]) Cho C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực H, I là ánh xạ đơn vị trên H. Ánh xạ $T : C \to H$ được gọi là:

(a) *L- liên tục Lipschitz* nếu tồn tại hằng số $L > 0$ thỏa mãn

$$\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\| \text{ với mọi } x, y \in C.$$

Nếu $L < 1$ thì T là ánh xạ co, nếu $L = 1$ thì T là ánh xạ không giãn.

(b) *η-đơn điệu mạnh* nếu

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq \eta\|x - y\|^2, \text{ với mọi } x, y \in C.$$

(c) *γ-giả co chặt* nếu tồn tại hằng số $\gamma \in [0, 1)$ sao cho

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \leq \|x - y\|^2 - \gamma\|(I - T)x - (I - T)y\|^2, \text{ với mọi } x, y \in C.$$

(d) *γ-ngược đơn điệu mạnh* nếu tồn tại hằng số $\alpha > 0$ sao cho

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq \alpha\|Tx - Ty\|^2, \text{với mọi } x, y \in C.$$

(e) *α-trung bình* nếu $T = (1 - \alpha)I + \alpha T'$ với hằng số $\alpha \in (0, 1)$ và T' là ánh xạ không giãn.

Định nghĩa 1.1.4. ([42]) Xét ánh xạ $T : H \to H$ trên không gian Hilbert thực H. Một điểm $x \in H$ được gọi là *điểm bất động* của ánh xạ T nếu $Tx = x$.

Ký hiệu tập điểm bất động của T là $\mathrm{Fix}(T)$, tức là, $\mathrm{Fix}(T) =\{x \in H \mid Tx = x\}$.

Nhận xét 1.1.2. Trong không gian Hilbert thực H,

(a) Nếu tồn tại ánh xạ trung bình S, ánh xạ không giãn V và $\alpha \in (0, 1)$ thỏa mãn $T = (1 - \alpha)S + \alpha V$ thì T là ánh xạ trung bình.

(b) T là không giãn chặt nếu $T = \frac{1}{2}(I + V)$ trong đó V là ánh xạ không giãn, tức là mọi ánh xạ không giãn chặt là 1/2-trung bình.

(c) T là không giãn chặt khi và chỉ khi $I - T$ là không giãn chặt.

(d) Hợp hữu hạn của các ánh xạ trung bình là trung bình. Trong trường hợp riêng, nếu T_i là α_i-trung bình với $\alpha_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$ thì hợp T_1T_2 là α-trung bình với $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2$.

(e) Nếu các ánh xạ $\{T_i\}_{i=1}^N$ là α_i-trung bình, trong đó α_i là các số thực thuộc $(0, 1)$ và λ_i là các số thực thuộc $(0, 1]$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ thì $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i T_i$ là ánh xạ α-trung bình với $\alpha = \max\{\alpha_i : 1 \leq i \leq N\}$.

(f) Nếu các ánh xạ $\{T_i\}_{i=1}^N$ là trung bình và có điểm bất động chung, thì

$$\bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}\,(T_i) = \mathrm{Fix}(T_1 T_2 \cdots T_N).$$

Định nghĩa 1.1.5. ([42]) Cho $T : H \to 2^H$ là toán tử đa trị có miền xác định và miền giá trị lần lượt là $D(T) := \{x \in H \mid Tx \neq \emptyset\}$ và $R(T) = \{y \in Tx \mid x \in D(T)\}$.

(a) *Đồ thị* của T ký hiệu gra$T$ và xác định bởi

$$\mathrm{gra}T = \{(x, u) \in H \times H \mid u \in Tx\}.$$

(b) *Toán tử nghịch đảo* $T^{-1} : H \to 2^H$ xác định bởi

$$T^{-1}u = \{x \in H \mid u \in Tx\},$$

tức là $(u, x) \in \mathrm{gra}T^{-1} \Leftrightarrow (x, u) \in \mathrm{gra}T$.

Định nghĩa 1.1.6. Toán tử T được gọi là

(a) *đơn điệu* nếu

$$\langle u - v, x - y\rangle \geq 0, \forall (x, u), (y, v) \in \mathrm{gra}T;$$

(b) *đơn điệu cực đại* nếu T là đơn điệu và đồ thị của T không thực sự nằm trong đồ thị của một toán tử đơn điệu nào khác.

Nhận xét 1.1.3. Với $\lambda > 0$, nếu T đơn điệu thì T^{-1} và λT cũng đơn điệu, nếu T đơn điệu cực đại thì T^{-1} và λT cũng đơn điệu cực đại.

Bổ đề 1.1.1. ([43]) Cho C là một tập con lồi, đóng của một không gian Hilbert thực H và cho $T : C \to C$ là ánh xạ không giãn với $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Nếu $\{x^k\}$ là một dãy trong C hội tụ yếu tới x và $(I - T)x^k$ hội tụ mạnh tới y, thì $(I - T)x = y$. Trường hợp đặc biệt, nếu $y = 0$, thì $x \in \mathrm{Fix}(T)$.

Bổ đề 1.1.2. ([44]) Cho H là không gian Hilbert thực và cho $F : H \to H$ là toán tử η-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Khi đó, với mọi $t \in (0, 1), I - tF$ là ánh xạ co với hệ số co $1 - t\tau$ ở đây $\tau = 1 - \sqrt{(1 - \eta)/\gamma}$.

Bổ đề 1.1.3. ([45]) Cho $\{a_k\}$ là dãy các số thực với dãy con $\{k_l\}$ của dãy $\{k\}$ sao cho $a_{k_l} < a_{k_l+1}$ với mọi $l \in \mathbb{N}_+$. Khi đó, tồn tại dãy không giảm $\{m_k\} \subseteq \mathbb{N}_+$ sao cho $m_k \to \infty, a_{m_k} \leq a_{m_k+1}$ và $a_k \leq a_{m_k+1}$ với mọi số thực $k \in \mathbb{N}_+$ đủ lớn. Đặc biệt, $m_k = \max\{l \leq k : a_l \leq a_{l+1}\}$.

Định nghĩa 1.1.7. Cho C là một tập con khác rỗng, lồi, đóng của H. Với mỗi $x \in H$ đều tồn tại một phần tử $P_C x \in C$ thỏa mãn

$$\|x - P_C x\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Phần tử $P_C x$ xác định như trên được gọi là *hình chiếu* của x lên tập C và ánh xạ $P_C : H \to C$ biến mỗi phần tử $x \in H$ thành $P_C x$ được gọi là *phép chiếu metric* chiếu H lên C.

Mệnh đề 1.1.1. ([43]) Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H. Khi đó, ánh xạ $P_C : H \to C$ là phép chiếu metric từ H lên C khi và chỉ khi, với mỗi $x \in H$,

$$\langle x - P_C x, y - P_C x\rangle \leq 0, \forall y \in C,$$

và với mỗi $u \in H, z \in C$ ta có $\|u - P_C u\|^2 + \|P_C u - z\|^2 \leq \|u - z\|^2,\ u \in H, z \in C$.

1.1.2. Một số toán tử trong không gian Banach

Định nghĩa 1.1.8. ([46]) Cho E là không gian tuyến tính định chuẩn thực. Cho $S_1(0) := \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

(a) Không gian E được gọi là có chuẩn khả vi Gâteaux nếu:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

tồn tại với mỗi $x, y \in S_1(0)$.

(b) E được gọi là không gian có chuẩn khả vi Gâteaux đều nếu giới hạn trên đạt được đồng đều với $x \in S_1(0)$.

(c) Giả sử $\dim(E) \geq 2$. Mô đun trơn của E là hàm số $\rho_E : [0, \alpha) \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\rho_E(\tau) = \sup\{\frac{1}{2}(\|x + y\| + \|x - y\|) - 1 \mid \|x\| \leq 1, \|y\| \leq \tau\}$$

(d) E được gọi là q-trơn đều nếu tồn tại một hằng số $c > 0$ thỏa mãn $\rho_E(\tau) \leq c\tau^q$.

Không gian L_p (hoặc l_p) với $1 < p < \alpha$ và không gian Sobolev $W^p{}_m$ với $1 < p < \alpha$ là các không gian q-trơn đều.

(e) Không gian E được gọi là lồi chặt, nếu với mỗi $x, y \in S_1(O)$ và $x \neq y$, ta có:

$$\|(1-\lambda)x + \gamma y\| < 1, \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Định nghĩa 1.1.9. ([47]) Cho X là một không gian Banach, X^* là không gian liên hợp của X. Một ánh xạ J_φ từ X vào X^* xác định bởi

$$J_\varphi(x) = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\| \|x^*\| \text{ và } \|x^*\| = \varphi(\|x\|)\},$$

được gọi là *ánh xạ đối ngẫu* tương ứng với hàm φ.

Khi $\varphi(t) = t, \forall t \in X, J_\varphi = J$ *là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc* của X.

Nhận xét 1.1.4. ([47])

(a) Nếu X là không gian Hilbert thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc là ánh xạ đơn vị trên X.

(b) Nếu X là không gian trơn thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc là đơn trị và nếu chuẩn của X là khả vi Gâteaux đều thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc là chuẩn sao yếu liên tục đều trên mọi tập con bị chặn của X.

Trong luận án này, ta ký hiệu ánh xạ đối ngẫu đơn vị của chuẩn là j và ánh xạ đối ngẫu tổng quát đơn trị là j_q.

Bổ đề 1.1.4. ([40]) *Cho E là không gian Banach trơn và $F : E \to E$ là một ánh xạ η-j đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Khi đó,*

(i) Với mọi $t \in (0,1)$, $I - tF$ là ánh xạ co với hệ số co $1 - \lambda\tau$, ở đây $\tau = 1 - \sqrt{(1-\eta)/\gamma}$;

(ii) Khi $t = 1$, $I - F$ cũng là co với hệ số $\tau_1 = \sqrt{(1-\eta)/\gamma}$.

Bổ đề 1.1.5. ([47]) *Cho E là không gian Banach trơn. Khi đó,*

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + \; 2\langle y, j(x+y)\rangle, \; \forall x, y \in E.$$

Bổ đề 1.1.6. ([48]) *Cho $\{a_k\}$ là dãy số thực không âm thỏa mãn*

$$a_{k+1} \le (1-b_k)a_k + b_k c_k + d_k,$$

ở đây $\{b_k\}, \{c_k\}$ và $\{d_k\}$ là dãy các số thực sao cho

(i) $b_k \in [0,1]$ *và* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$*;*

(ii) $\limsup_{k\to\infty} c_k \le 0$*;*

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} d_k < \infty$.

Khi đó, $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Bổ đề 1.1.7. ([49]) *Cho $\{x^k\}$ và $\{w^k\}$ bị chặn trong không gian Banach E sao cho $x^{k+1} = h_k x^k + (1-h_k)w^k$ với $k \ge 1$, ở đây $\{h_k\}$ thỏa mãn điều kiện*

$$0 < \liminf_{k\to\infty} h_k \le \limsup_{k\to\infty} h_k < 1.$$

Giả sử rằng

$$\limsup_{k\to\infty}\big(\|w^{k+1} - w^k\| - \|x^{k+1} - x^k\|\big) \le 0.$$

Khi đó, $\lim_{k\to\infty} \|x^k - w^k\| = 0$.

Bổ đề 1.1.8. ([76]) *Cho F là một ánh xạ η- j đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt trên không gian Banach phản xạ lồi chặt hoặc trơn đều E, có chuẩn khả vi Gâteaux, sao cho $\eta + \gamma > 1$ và cho T là ánh xạ không giãn trên E với $C := \mathrm{Fix}(T) \ne \emptyset$. Khi đó, với dãy bị chặn $\{x^k\}$ trong E, $\lim_{k\to\infty} \|x^k - Tx^k\| = 0$, thì*

$$\limsup_{k\to\infty} \langle Fp_*, j(p_* - x^k)\rangle \le 0, \tag{1.1}$$

ở đây $p_* \in C$ là nghiệm duy nhất của Bài toán bất đẳng thức biến phân

$$\langle Fp_*, j(p_* - p)\rangle \le 0 \quad \forall p \in C = \mathrm{Fix}(T). \tag{1.2}$$

Bổ đề 1.1.9. ([27]) *Nếu dãy các số thực* $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ *và* $\{t_k\}$ *là giới nội thỏa mãn:*

$$a_{k+1} \le a_k - t_k\psi(a_{k+1}) + b_k \text{ với } k \ge 1,$$

ở đây, $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *là hàm không giảm liên tục trên* $(0, \infty)$ *với* $\psi(0) = 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$ *và* $\lim_{k\to\infty}(b_k/t_k) = 0$, *thì* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Bổ đề 1.1.10. ([46]) *Cho* $\{a_k\}, \{b_k\}$ *và* $\{c_k\}$ *là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:*

(i) $a_{k+1} \le (1 - b_k)a_k + c_k, \quad b_k < 1,$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \alpha, \quad \lim_{k\to+\infty}(c_k/b_k) = 0$

thì $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Bổ đề 1.1.11. ([46]) *Cho* $1 < q \le 2$ *và* E *là một không gian Banach thực, trơn thì những kết luận sau là tương đương:*

(i) E *là* q*- trơn đều.*

(ii) Tồn tại một hằng số $c_q > 0$ *sao cho với* $\forall x, y \in E$ *thì*

$$\|x + y\|^q \le \|x\|^q + q\langle y, j_q(x)\rangle + c_q\|y\|^q.$$

1.2. Một số phương pháp xấp xỉ nghiệm bài toán điểm bất động, bài toán chấp nhận tách, trùng tách

1.2.1. Bài toán điểm bất động

Bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert H được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x \in C \text{ sao cho } Tx = x, \tag{1.3}$$

ở đây $C \subseteq H$, $T : C \to C$ là ánh xạ không giãn trên không gian Hilbert H.

Ta ký hiệu tập nghiệm của Bài toán (1.3) là Fix(T).

Việc tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn là một chủ đề quan trọng trong lý thuyết giải tích phi tuyến và có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực, chẳng hạn trong khôi phục hình ảnh và xử lý tín hiệu [1, 50]. Phần lớn các phương pháp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn dựa trên phương pháp lặp Krasnosel'skii-Mann và phương pháp lặp Halpern.

Phương pháp lặp Krasnosel'skii-Mann

Phương pháp lặp Mann được đề xuất đầu tiên vào năm 1953, ở đó, dãy lặp $\{x^k\}$ được xác định bởi

$$x^{k+1} = \alpha_k x^k + (1-\alpha_k)Tx^k, k \geq 1, \tag{1.4}$$

với $x^1 \in C$ bất kỳ và $\{\alpha_k\}$ là dãy trong $(0, 1)$. Mann [5] đã chứng minh rằng nếu $\{\alpha_k\}$ thỏa mãn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(1-\alpha_k) = \infty$ thì dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu về điểm bất động của T.

Trong trường hợp $\alpha_k = \lambda, \forall k \in N$ thì phương pháp lặp Mann trở thành phương pháp lặp Krasnosel'skii [4]. Tổng quát hơn, sự hội tụ yếu của phương pháp lặp Mann được Reich [51] chỉ ra trong không gian Banach lồi đều. Ngoài ra, một phản ví dụ được đưa ra bởi Genel và Lindenstrass [52] đã chỉ ra rằng trong không gian vô hạn chiều, phương pháp lặp Mann không thể hội tụ mạnh.

Phương pháp lặp Ishikawa

Năm 1974, Ishikawa [6] đã đề xuất phương pháp lặp:

$$\begin{cases} y^k & = \beta_k x^k + (1-\beta_k)Tx^k \\ x^{k+1} & = \alpha_k x^k + (1-\alpha_k)Ty^k \end{cases} \tag{1.5}$$

ở đây $k \geq 1$, $x^1 \in C, \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ là các dãy trong $[0, 1]$.
Trong trường hợp $\beta_k = 1, \forall k \in N$ thì phương pháp lặp Ishikawa trở thành phương pháp lặp Mann. Tác giả đã chứng minh được rằng nếu các dãy $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{k\to\infty}(1-\beta_k) = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\beta_k = \infty$ và T là ánh xạ Lipschitz giả co thì dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới một điểm bất động của T.

Phương pháp lặp Halpern

Một phương pháp lặp thông dụng để nghiên cứu ánh xạ không giãn là xấp xỉ nó bởi một họ ánh xạ co. Tức là, lấy $t \in (0,1)$ và xây dựng ánh xạ co $T_t : C \to C$ bởi công thức

$$T_t x = tu + (1-t)Tx, x \in C,$$

trong đó, $u \in C$ cố định. Theo nguyên lý ánh xạ co thì ánh xạ T_t có điểm bất động duy nhất x_t trong C. Trong trường hợp T có điểm bất động, Browder [50] đã chứng minh được kết quả sau.

Định lý 1.2.1. ([50]) *Cho C là tập con đóng lồi và giới nội của H, $T : C \to C$ là ánh xạ không giãn. Cố định $u \in C$ và xây dựng $\{x^t\} \subset C$ bởi công thức*

$$x^t = tu + (1-t)Tx^t, t \in (0,1). \tag{1.6}$$

Khi đó, với $t \to 0$ thì $\{x^t\}$ hội tụ mạnh về phần tử của Fix(T) gần u nhất, tức là $P_{\mathrm{Fix}(T)}u$.

Dựa trên kết quả này, Halpern [7] đề xuất phép lặp

$$x^{k+1} = \alpha_k u + (1-\alpha_k)Tx^k, k \geq 1, \tag{1.7}$$

ở đây $u, x^1 \in C$, $\alpha_k \in [0,1]$. Ông đã chứng minh được kết quả sau đây:

Định lý 1.2.2. ([7]) *Cho C là tập đóng lồi và giới nội của không gian Hilbert H và T là ánh xạ không giãn xác định trên C. Chọn dãy $\{\alpha_k\} \subseteq [0,1]$ và $\alpha_k = \dfrac{1}{k^a}, 0 < a < 1$. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ xác định bởi (1.7) hội tụ mạnh về $P_{\mathrm{Fix}(T)}u$.*

Hơn nữa, Halpern cũng chỉ ra rằng điều kiện

(C1) $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$
là điều kiện cần cho sự hội tụ của $\{x^k\}$, tức là nếu dãy $\{x^k\}$ xác định bởi (1.7) hội tụ mạnh với mọi tập con C và mọi ánh xạ không giãn T xác định trên C thì dãy $\{\alpha_k\}$ phải thỏa mãn điều kiện $(C1)$.

Năm 1977, Lions [53] đã mở rộng kết quả của Halpern bằng việc chứng minh sự hội tụ của dãy $\{x^k\}$ về $P_{\mathrm{Fix}(T)}u$ nếu $\{\alpha_k\}$ thỏa mãn điều kiện $(C1)$ và

(C2) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\alpha_k - \alpha_{k-1}|}{\alpha_k^2} = 0.$

Ta thấy rằng, các điều kiện của Lions đối với dãy $\{\alpha_k\}$ đã loại trừ trường hợp $\alpha_k = 1/(k+1)$. Để khắc phục điều này, năm 1992, Wittmann [54] đã chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp Halpern trong đó thay điều kiện $(C2)$ bởi điều kiện

$(C2')$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \infty.$

Dễ thấy, nếu $\{\alpha_k\}$ là dãy giảm thì $(C2')$ chính là hệ quả của $(C1)$. Do đó trong trường hợp này $(C1)$ chính là điều kiện cần và đủ để phương pháp lặp Halpern hội tụ.

Sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp Halpern tới một điểm bất động của T cũng được chứng minh trong không gian Banach. Năm 2002, Xu [48] mở rộng kết quả của Lions sang không gian Banach trơn đều. Tác giả đã chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp xác định bởi (1.7) tới điểm bất động của T nếu dãy $\{\alpha_k\}$ thỏa mãn điều kiện $(C1)$ và

(C2") $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\alpha_k - \alpha_{k-1}|}{\alpha_{k+1}} = 0.$

Để ý rằng, trong kết quả trên Xu đã thay điều kiện $(C2)$ bởi điều kiện nhẹ hơn $(C2'')$ và rõ ràng trong trường hợp này dãy $\alpha_k = \dfrac{1}{k+1}$ là thỏa mãn.

Một câu hỏi mở được đặt ra là nếu dãy số thực $\{\alpha_k\}$ thỏa mãn điều kiện $(C1)$ có đủ để đảm bảo sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp Halpern cho ánh xạ không giãn không? Gần đây, một số nhà nghiên cứu đã xem xét câu hỏi này. Các tác giả đã đưa ra một số cải biên của phương pháp lặp (1.7) mà kết quả hội tụ mạnh nhận được với điều kiện dãy $\{\alpha_k\}$ chỉ cần thỏa mãn điều kiện $(C1)$.

Một cải biên của phương pháp Halpern là phương pháp xấp xỉ mềm được đưa ra bởi Moudafi [8], bằng cách sử dụng một ánh xạ co f trên C thay cho u trong (1.7).

Phương pháp xấp xỉ mềm

Cho T là ánh xạ không giãn xác định trên tập đóng lồi C, số thực $t \in (0, 1]$ và ánh xạ $f : C \to C$ là ánh xạ co. Ánh xạ $T_t : C \to C$ được xác định bởi công thức

$$T_t x = tf(x) + (1 - t)Tx, \forall x \in C.$$

Dễ thấy T_t cũng là ánh xạ co, do đó T_t có điểm bất động duy nhất x^t, tức là x^t là nghiệm duy nhất của phương trình

$$x^t = tf(x^t) + (1 - t)Tx^t, t \in (0, 1]. \tag{1.8}$$

Rời rạc hóa (1.8), ta nhận được công thức sau

$$x^{k+1} = \alpha_k f(x^k) + (1 - \alpha_k)Tx^k, k \geq 1, \tag{1.9}$$

trong đó $\{\alpha_k\} \subset [0, 1]$. Trong trường hợp $f(x) = u \in C, \forall x \in C$ thì công thức (1.8) trở thành công thức (1.6), còn công thức (1.9) chính là công thức lặp Halpern (1.7). Phương pháp xây dựng dãy $\{x^k\}$ theo (1.9) được gọi là phương pháp xấp xỉ mềm. Phương pháp này được Moudafi [8] đề xuất vào năm 2000 để tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Sự hội tụ của phương pháp được cho bởi định lý sau.

Định lý 1.2.3. ([8]) *Cho C là tập con đóng lồi, khác rỗng của không gian Hilbert H, $T : C \to C$ là ánh xạ không giãn thỏa mãn* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ *và $f : C \to C$ là ánh xạ co. Giả sử rằng dãy $\{x^k\}$ xác định bởi: $x^1 \in C$,*

$$x^{k+1} = \frac{1}{1 + \varepsilon_k} Tx^k + \frac{\varepsilon_k}{1 + \varepsilon_k} f(x^k),\ k \geq 1, \tag{1.10}$$

trong đó, $\varepsilon_k \in (0, 1)$ thỏa mãn

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0, \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \infty \text{ và } \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k} \right| = 0.$$

Khi đó, dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh về $z \in \mathrm{Fix}(T)$, với $z = P_{\mathrm{Fix}(T)} f(z)$.

Để ý rằng $z = P_{\mathrm{Fix}(T)} f(z)$ tương đương với z là nghiệm của bất đẳng thức biến phân

$$\langle (I - f)z, z - x \rangle \leq 0,\ \forall x \in \mathrm{Fix}(T). \tag{1.11}$$

Năm 2004, Xu [55] đã mở rộng kết quả của Moudafi, tác giả đã chứng minh được rằng nếu $\{\alpha_k\}$ thỏa mãn điều kiện $(C1)$ và

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \infty \text{ hoặc } \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = 1,$$

thì dãy $\{x^k\}$ xác định bởi (1.9) hội tụ mạnh về $z \in \mathrm{Fix}(T)$. Các kết quả này cho phép áp dụng phương pháp xấp xỉ mềm cho bài toán tối ưu lồi, bài toán quy hoạch tuyến tính, bao hàm thức đơn điệu. Ta biết rằng, phương pháp lặp Mann, Ishikawa cho kết quả hội tụ yếu, còn phương pháp lặp Halpern, xấp xỉ mềm cho kết quả hội tụ mạnh. Để tìm điểm bất động của một ánh xạ hoặc một họ ánh xạ, người ta có thể kết hợp các phương pháp Krasnosel'skii-Mann, phương pháp xấp xỉ mềm với phương pháp đường dốc nhất, . . . để có kết quả hội tụ mạnh.

Năm 2005, Kim và Xu [10] đã đưa ra một kết hợp của phương pháp lặp Krasnosel'skii-Mann và phương pháp lặp Halpern sao cho

$$x^{k+1} = t_k u + (1 - t_k)((1 - \beta_k)x^k + \beta_k T x^k),\ k \geq 1, \tag{1.12}$$

và chứng minh sự hội tụ mạnh với các điều kiện:

(t) $t_k \in (0, 1),\ \lim_{k\to\infty} t_k = 0$ và $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$;

$$\sum_{k=1}^{\infty} |t_{k+1} - t_k| < \infty;\ \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_{k+1} - \beta_k| < \infty,$$

và cùng một số giả thiết khác về β_k.

Tiếp theo, Yao và các cộng sự [9] đã đưa ra một cải biên của phương pháp lặp Krasnosel'skii-Mann

$$x^{k+1} = \big((1 - \beta_k)I + \beta_k T\big)(1 - t_k)x^k,\ k \geq 1, \tag{1.13}$$

tham số t_k và β_k thỏa mãn, tương ứng các điều kiện (t) và (β), trong đó điều kiện β được xác định:

(β) $\beta_k \in [a, b] \subset (0, 1)$ với mọi $k \geq 1$,

thì dãy lặp (1.13) hội tụ mạnh tới một điểm bất động của T.

Shehu [80] đã mở rộng kết quả này từ không gian Hilbert H tới một không gian Banach lồi đều E, có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Ta biết rằng cả hai phương pháp (1.4) và (1.5) chỉ hội tụ yếu trong trường hợp tổng quát (có thể xem trong [52]). Rõ ràng, (1.5) thật sự tổng quát hơn (1.4). Nhưng việc nghiên cứu (1.4) có lẽ đơn giản hơn (1.5) và định lý hội tụ cho (1.4) có thể tổng quát hơn định lý hội tụ cho (1.5) khi cung cấp dãy $\{\beta_k\}$ thỏa mãn các điều kiện thích hợp. Tuy nhiên, phương pháp (1.5) có ưu việt riêng. Thực tế, phương pháp (1.4) có thể không hội tụ còn (1.5) có thể vẫn hội tụ với một ánh xạ giả co và Lipschitz trong không gian Hilbert (xem tài liệu [82]).

Reich [51] đã chỉ ra rằng nếu E là không gian Banach lồi đều, có chuẩn khả vi Fréchet, và nếu dãy $\{\beta_k\}$ trong (1.4) thỏa mãn $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(1-\beta_k) = \infty$, thì dãy $\{x^k\}$ tổng quát bởi (1.4), hội tụ yếu tới một điểm thuộc $\mathrm{Fix}(T)$.

Một mở rộng kết quả đó đã được đưa ra trong [83], ở đây Tian và Xu đã chứng minh sự hội tụ yếu của (1.5) dưới các điều kiện:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(1-\beta_k) = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(1-\alpha_k) < \infty$$

và $\limsup_{k\to\infty} \alpha_k < 1$.

Tiếp theo, Qin và các cộng sự trong [84], bằng cách sử dụng T^k thay cho T trong (1.5), đã đưa ra phương pháp lặp sau đây,

$$x^{k+1} = t_k u + (1-t_k)T^k x^k, \ k \geq 1, \tag{1.14}$$

đó là sự kết hợp của phương pháp Ishikawa với phương pháp Halpern. Họ đã chứng minh rằng, dãy lặp tổng quát bởi (1.14) hội tụ mạnh tới một điểm thuộc $\mathrm{Fix}(T)$ trong không gian Banach lồi đều, khi t_k, β_k và α_k thỏa mãn các điều kiện: (t), $\beta_k \to 0$, $\alpha_k \leq \overline{a} \in (0,1)$, tức là, $\limsup_{k\to\infty} \alpha_k < 1$ và

$$\sum_{k=1}^{\infty} |t_{k+1} - t_k| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_{k+1} - \beta_k| < \infty. \tag{1.15}$$

Li [56] đã chứng minh một cải biên của (1.14), đó là phương pháp xấp xỉ mềm Ishikawa,

$$x^{k+1} = t_k f(x^k) + (1-t_k)T^k x^k, \ k \geq 1, \tag{1.16}$$

và đã chứng minh được kết quả hội tụ mạnh của (1.16) với các điều kiện (t), (β), $|\alpha_{k+1} - \alpha_k| \to 0$.

1.2.2. Bài toán chấp nhận tách đa tập

Xét bài toán MSSFP đã được đề cập trong phần Mở đầu:

$$\text{Tìm } x \in C := \bigcap_{i \in J_1} C_i \text{ sao cho } Ax \in Q := \bigcap_{j \in J_2} Q_j. \tag{1.17}$$

Phương pháp tự thích nghi

Trong [21], Tian và Zhang đã cải tiến phương pháp của Xu [18] nhằm loại bỏ việc cần phải tính chuẩn của toán tử chuyển trong quá trình thực hiện phương pháp của Xu để giải bài toán SFP. Phương pháp của Tian và Zhang đề xuất trong [21] được gọi là phương pháp tự thích nghi.

Trong phương pháp này, Tian và Zhang xác định hàm $f : H \to \mathbb{R}$ như sau:

$$f(x) = \frac{1}{2}\|I - P_Q)Ax\|^2,$$

ở đây, C và Q là hai tập con lồi, đóng, không rỗng của không gian Hilbert H_1 và H_2 tương ứng, $A : H_1 \to H_2$ là toán tử tuyến tính bị chặn. Khi đó,

$$\bigtriangledown f(x) = A^*(I - P_Q)Ax.$$

Thuật toán được xây dựng như sau:

$$x_{k+1} = P_C(x_k - \gamma_k(A^*(I - P_Q)Ax_k + \alpha_k I)x_k), \quad \text{với mọi } \ k \geq 0, \tag{1.18}$$

ở đây, $\gamma_k = \rho_n f(x_k)/\| \bigtriangledown f(x_k)\|^2$ với $0 < \rho_k < 4$, α_k là tham số hiệu chỉnh.

Nếu $\bigtriangledown f(x_k) = 0$, thì $x_{k+1} = x_k$ là nghiệm của bài toán SFP và dãy lặp kết thúc.

Ngược lại, gán $k = k + 1$ và đi đến (1.18) để đánh giá lần lặp tiếp theo x_{k+2}.

Định lý 1.2.4. ([21]) *Giả sử rằng tập nghiệm $S = \{x \in C \mid Ax \in Q\}$ của bài toán* SFP *là khác rỗng và các dãy tham số α_k, ρ_k thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $\{\alpha_k\} \subset (0,1)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$,

(ii) $\epsilon \leq \rho_k \leq 4 - \epsilon$ *với* $\epsilon > 0$ *nhỏ tùy ý.*

Khi đó, dãy lặp x_k *được xác định bởi (1.18) hội tụ mạnh đến* $z \in S$, *ở đây* $z = P_S(0)$.

Để chứng minh định lý (1.2.4), các tác giả sử dụng một số bổ đề dưới đây.

Bổ đề 1.2.1. [21] *Cho hàm* f *xác định trên không gian Hilbert thực* H *được cho bởi* $f(x) = \frac{1}{2}\|I - P_Q)Ax\|^2$. *Khi đó*

(i) f *là khả vi lồi,*

(ii) $\bigtriangledown f(x) = A^*(I - P_Q)Ax,\ \forall x \in H$,

(iii) $\bigtriangledown f$ *là* $\|A\|^2$ *- liên tục Lipschitz trên* H.

Bổ đề 1.2.2. [21] *Cho* a_k *là một dãy số thực không âm sao cho*

$$a_{k+1} \leq (1 - \alpha_k)a_k + \alpha_k\sigma_k, \quad k \geq 0,$$

ở đây, $\{\alpha_k\}$ *là dãy trong* $(0,1)$ *và* σ_k *là dãy trong* $\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

(i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$,

(ii) $\limsup\limits_{k\to\infty} \sigma_k \leq 0$ *hoặc* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k\|\sigma_k\| < \infty$,

khi đó $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

Bổ đề 1.2.3. [21] *Cho* $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *là một dãy số thực sao cho tồn tại một dãy con* $\gamma_{n_i} < \gamma_{n_i+1}$ *với mọi* $i \in \mathbb{N}$. *Khi đó tồn tại một dãy không giảm* $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *của* $\mathbb{N}$ *sao cho* $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \infty$ *và các điều kiện sau đều thỏa mãn bởi tất cả các số* $k \in \mathbb{N}$:

$$\gamma_{m_k} \leq \gamma_{m_k+1}, \quad \gamma_k \leq \gamma_{m_k+1}$$

Thực tế, m_k *là* n *số lớn nhất trong tập hợp* $\{1, ..., k\}$ *sao cho điều kiện*

$$\gamma_n \leq \gamma_{n+1}$$

thỏa mãn.

Phương pháp hiệu chỉnh lặp

Xét bài toán MSSFP (1.17). Để giải bài toán này, trong [22], Nguyễn Bường và cộng sự đã xây dựng thuật toán sau:

$$x^{k+1} = U^k T_{\gamma_k,\alpha_k} x^k, \ x^1 \in H_1, \tag{1.19}$$

ở đó,

$$U^k = \frac{1}{\tilde{\beta}_k} \sum_{i=1}^{k} \beta_i P_{C_i}, \ T_{\gamma_k,\alpha_k} = I - \gamma_k (A^*(I - V^k)A + \alpha_k I), \ V^k = \frac{1}{\tilde{\eta}_k} \sum_{j=1}^{k} \eta_j P_{Q_j}, \tag{1.20}$$

$\tilde{\beta}_k = \beta_1 + \cdots + \beta_k$, $\tilde{\eta}_k = \eta_1 + \cdots + \eta_k$, các tham số β_i, η_j, α_k và γ_k thỏa mãn các điều kiện sau:

(C10) $\beta_i > 0$ với mọi $i \in \mathbb{N}_+$ và $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i = 1$;

(C11) $\eta_j > 0$ với mọi $j \in \mathbb{N}_+$ và $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \eta_j = 1$;

(C12) $\alpha_k \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}_+$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ và $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$;

(C13) $\gamma_k \in (\varepsilon_0, 2/(\|A\|^2 + 2))$ với mọi $k \in \mathbb{N}_+$, ε_0 là một số dương nhỏ.

Để chứng minh cho sự hội tụ mạnh của phương pháp trên, tác giả đã đưa ra các bổ đề và định lý sau:

Bổ đề 1.2.4. ([22]) *Cho H_1 và H_2 là hai không gian Hilbert thực, T_j với mỗi $j \in J_2$ là ánh xạ không giãn trong H_2 sao cho $\cap_{j\in J_2}\mathrm{Fix}(T_j) \neq \emptyset$ và A là ánh xạ tuyến tính bị chặn từ H_1 vào H_2. Khi đó,*

$$\cap_{j\in J_2} A^{-1}\mathrm{Fix}(T_j) = \cap_{j\in J_2}\mathrm{Fix}(I - \gamma A^*(I - T_j)A) = A^{-1}(\cap_{j\in J_2}\mathrm{Fix}(T_j)),$$

với γ là số dương.

Bổ đề 1.2.5. ([22]) *Cho* H_1, H_2, A *và* γ *như trong Bổ đề 1.2.4 và* T_j *với mỗi* $j \in \mathbb{N}_+$ *là ánh xạ không giãn trong* H_2 *sao cho* $\cap_{j=1}^{\infty}\mathrm{Fix}(T_j) \neq \emptyset$. *Khi đó,*

$$\tilde{C} := \cap_{j\in\mathbb{N}_+}\mathrm{Fix}(I - \gamma A^*(I - T_j)A) = \mathrm{Fix}(T_\infty),$$

ở đó, $T_\infty = I - \gamma A^*(I - V_\infty)A$, $V_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j T_j$ *và* η_j *thỏa mãn điều kiện* $(C12)$.

Bổ đề 1.2.6. ([22]) *Cho* H *là không gian Hilbert thực và* S_i *với mỗi* $i \in \mathbb{N}_+$ *là ánh xạ không giãn chặt trong* H. *Giả sử điều kiện* $(C11)$ *thỏa mãn, khi đó, các ánh xạ* $S_\infty := \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i S_i$ *và* $I - S_\infty$ *là ánh xạ không giãn chặt.*

Bổ đề 1.2.7. ([22]) *Cho* H_1, H_2 *và* A *như trong Bổ đề 1.2.4, khi đó, với số cố định tùy ý* $\gamma \in (0, 2/(\|A\|^2 + 2\alpha))$, *ánh xạ* $T_{\gamma,\alpha} := I - \gamma(A^*(I - V)A + \alpha I)$ *là co với hằng số* $1 - \gamma\alpha$, *ở đó* V *là ánh xạ không giãn chặt và* α *là số dương trong khoảng* $(0, 1)$. *Khi* $\alpha = 0$, $T_\gamma := I - \gamma A^*(I - V)A$ *là ánh xạ không giãn.*

Định lý 1.2.5. ([22]) *Cho* H_1, H_2 *và* A *như trong Bổ đề 1.2.4,* $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ *và* $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}_+}$ *tương ứng là hai họ vô hạn các tập con lồi đóng trong* H_1 *và* H_2. *Giả sử* $\Gamma \neq \emptyset$ *và các điều kiện* $(C10), (C11), (C12), (C13)$ *thỏa mãn. Khi đó, dãy* $\{x^k\}$ *xác định bởi (1.19)- (1.20) hội tụ mạnh tới nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán MSSFP (1.17).*

Từ kết quả của Định lý 1.2.5 với các trường hợp đặc biệt của các tập chỉ số J_1 và J_2 chúng tôi thu được các Định lý sau.

Định lý 1.2.6. ([22]) *Cho* H_1, H_2 *và* A *như trong Định lý 1.2.5,* $\{C_i\}_{i=1}^{N}$ *và* $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}_+}$ *tương ứng là hai họ các tập con lồi, đóng trong* H_1 *và* H_2. *Giả sử* $\Gamma \neq \emptyset$, *dãy lặp* $\{x^k\}$ *được xác định bởi:*

$$x^1 \in H_1, x^{k+1} = UT_{\gamma_k,\alpha_k}x^k, \quad \forall k \geq 1, \tag{1.21}$$

ở đó, $U = \sum_{i=1}^{N} \beta_i P_{C_i}$, $T_{\gamma_k,\alpha_k} = I - \gamma_k(A^*(I - V^k)A + \alpha_k I)$, $V^k = \frac{1}{\tilde{\eta}_k}\sum_{j=1}^{k} \eta_j P_{Q_j}$, *với các tham số* β_i, η_j, α_k *và* γ_k *thỏa mãn các điều kiện* $(C11), (C12), (C13)$ *và*

$(C10')$ $\beta_i > 0$ *với* $1 \leq i \leq N$ *sao cho* $\sum_{i=1}^{N} \beta_i = 1$.

Khi đó, dãy $\{x^k\}$ *hội tụ mạnh tới nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán (1.17).*

Định lý 1.2.7. ([22]) *Cho* H_1, H_2 *và* A *như trong Định lý 1.2.5,* $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ *và* $\{Q_j\}_{j=1}^M$ *tương ứng là hai họ các tập con lồi, đóng trong* H_1 *và* H_2*. Giả sử* $\Gamma \neq \emptyset$*, dãy lặp* $\left\{x^k\right\}$ *được xác định bởi:*

$$x^1 \in H_1, x^{k+1} = U^k(I - \gamma_k(A^*(I - V)A + \alpha_k I))x^k, \quad \forall k \geq 1, \tag{1.22}$$

ở đó, $U^k = \frac{1}{\tilde{\beta}_k}\sum_{i=1}^{k}\beta_i P_{C_i}$*,* $V = \sum_{i=1}^{M}\eta_j P_{Q_j}$ *với các tham số* β_i*,* η_j*,* α_k *và* γ_k *thỏa mãn các điều kiện* $(C10), (C12), (C13)$ *và*
$(C11')$ $\eta_j > 0$ *với* $1 \leq j \leq M$ *sao cho* $\sum_{j=1}^{M}\eta_j = 1$*.*
Khi đó, dãy $\left\{x^k\right\}$ *hội tụ mạnh tới nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán (1.17).*

Định lý 1.2.8. ([22]) *Cho* H_1, H_2 *và* A *như trong Định lý 1.2.5,* $\{C_i\}_{i=1}^M$ *và* $\{Q_j\}_{j=1}^N$ *tương ứng là hai họ các tập con lồi, đóng trong* H_1 *và* H_2*. Giả sử* $\Gamma \neq \emptyset$*, dãy lặp* $\left\{x^k\right\}$ *được xác định bởi:*

$$x^1 \in H_1, x^{k+1} = U(I - \gamma_k(A^*(I - V)A + \alpha_k I))x^k, \quad \forall k \geq 1, \tag{1.23}$$

ở đó, $U = \sum_{i=1}^{N}\beta_i P_{C_i}$*,* $V = \sum_{i=1}^{M}\eta_j P_{Q_j}$ *với các tham số* β_i*,* η_j*,* α_k *và* γ_k *thỏa mãn các điều kiện* $(C10'), (C11'), (C12), (C13)$*. Khi đó, dãy* $\left\{x^k\right\}$ *hội tụ mạnh tới nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán (1.17).*

1.2.3. Bài toán trùng tách đa tập

Xét bài toán MSSEP trong các không gian Hilbert thực đã được đề cập ở phần mở đầu. Tìm điểm $z = [x, y]$, thỏa mãn

$$x \in C := \cap_{i\in J_1} C_i \text{ và } y \in Q := \cap_{i\in J_2} Q_i \text{ sao cho } Ax = By. \tag{1.24}$$

Bài toán trùng tách xấp xỉ (ASEP) là bài toán tìm cực tiểu của hàm

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\|Ax - By\|_2^2, \tag{1.25}$$

trong đó, $x \in C$ và $y \in Q$.

Ở phần Mở đầu của luận án đã giới thiệu một số nghiên cứu của một số tác giả, trong đó có nghiên cứu của Chen và các cộng sự [36] giải bài toán (1.24). Trong [36], Chen và các cộng sự đã dẫn luận bài toán MSSEP có liên quan chặt chẽ đến bài toán ASEP. Ở mục này, luận án trình bày phương pháp hiệu chỉnh cho bài toán ASEP [36].

Để giải bài toán MSSEP, nhiều nhà nghiên cứu cũng đã đề xuất các phương pháp khác nhau, tuy nhiên các phương pháp đó đều còn những nhược điểm làm cho quá trình thực hiện phương pháp gặp nhiều khó khăn. Song hành với những phương pháp đó, Byrne và Moudafi giới thiệu phương pháp lặp đồng thời (SSEA) với dãy lặp được xác định như sau:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= P_C(x^k - \gamma_k A^T(Ax^k - By^k)), \\ y^{k+1} &= P_Q(y^k + \gamma_k B^T(Ax^k - By^k)), \end{aligned} \tag{1.26}$$

ở đây, $\epsilon \leq \gamma_k \leq (2/P(G^TG)) - \epsilon$. Tuy nhiên thuật toán này chỉ hội tụ yếu đến nghiệm của bài toán MSSEP trong không gian Hilbert vô hạn chiều.

Để có được sự hội tụ mạnh, Chen đề xuất phương pháp hiệu chỉnh cho bài toán ASEP. Phương pháp này được diễn giải như sau: Cho $S = C \times Q$. Ta định nghĩa

$$G = [A - B]; \quad \omega^T = [x \quad y]. \tag{1.27}$$

Bài toán ASEP có thể được biến đổi dưới dạng Tìm $\omega \in S$ với ω là cực tiểu của hàm $\|G\omega\|$. Vì vậy, việc giải bài toán ASEP (1.25) tương đương với giải bài toán:

$$\min f(\omega) = \frac{1}{2}\|G\omega\|^2; \quad \omega \in S. \tag{1.28}$$

Để cực tiểu hóa (1.28) nhìn chung là khó. Tác giả đã xem xét đến phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov:

$$\min f_\epsilon(\omega) = \frac{1}{2}\|G\omega\|^2 + \frac{1}{2}\epsilon\|\omega\|^2, \tag{1.29}$$

ở đây, $\omega \in S$ và $\epsilon > 0$ là tham số hiệu chỉnh. Bài toán (1.29) có nghiệm duy nhất được ký hiệu là ω_ϵ. Giả sử rằng bài toán (1.28) có nghiệm và ω_{min} là nghiệm có chuẩn nhỏ nhất, nghĩa là $\omega_{min} \in \Gamma$ (Γ là tập nghiệm của bài toán (1.28)) có tính chất

$$\|\omega_{\min}\| = \min\{\|\overline{\omega}\| : \overline{\omega} \in \Gamma\}. \tag{1.30}$$

Bổ đề 1.2.8. [36] *Nếu bài toán (1.28) có nghiệm, thì* $\lim_{n\to 0} z_n$ *tồn tại và là nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán (1.28).*

Định lý 1.2.9. [36] *Giả sử rằng bài toán (1.28) có nghiệmh. Xác định dãy* z_n *bởi thuật toán lặp:*

$$z_{n+1} = P_s(I - \gamma_n)z_n = P_S((1 - \epsilon_n\gamma_n\nabla f_{\epsilon_n})z_n - \gamma_n G^T G z_n), \tag{1.31}$$

ở đây, ϵ_n *và* γ_n *thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $0 < \gamma_n \leq \epsilon_n/(\|G\|^2 + \epsilon_n)^2$ *với mọi* n*;*

(ii) $\epsilon_n \to 0$ *và* $\gamma_n \to 0$*;*

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n\gamma_n = \infty$*;*

(iv) $(|\gamma_{n+1} - \gamma_n| + \gamma_n|\epsilon_{n+1} - \epsilon_n|)/(\epsilon_{n+1}\gamma_{n+1})^2 \to 0$,

khi đó z_n *hội tụ mạnh đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán (1.28).*

Nhận xét 1.2.1. *(a) Chú ý rằng* $\epsilon_n = n^{-\delta}$ *với* $\gamma_n = n^{-\sigma}$ *với* $0 < \delta < \sigma < 1$ *và* $\sigma + 2\delta < 1$ *thỏa mãn (i) - (iv).*

(b) Có thể thể hiện thuật toán (1.31) trong điều kiện của x, y*, và chọn*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P_C((1 - \epsilon_n\gamma_n)x_n - \gamma_n A^T(Ax_n - By_n)), \\ y_{n+1} &= P_Q((1 - \epsilon_n\gamma_n)y_n + \gamma_n B^T(Ax_n - By_n)). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Có thể thấy rằng toàn bộ chuỗi (x_n, y_n) *được tạo ra trong (1.31) hội tụ mạnh đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán ASEP với điều kiện là bài toán ASEP ổn định và* ϵ_n, γ_n *thỏa mãn điều kiện (i) - (iv).*

(c) Bây giờ, áp dụng thuật toán để giải bài toán ASFP khi $B = I$*; thuật toán (1.31) trở thành*

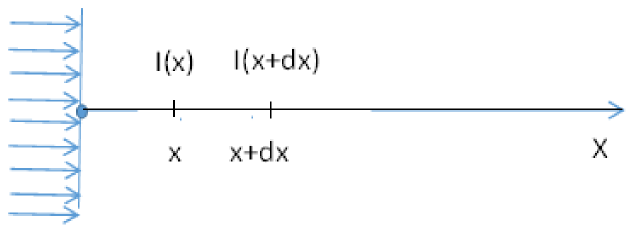
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P_C((1 - \epsilon_n\gamma_n)x_n - \gamma_n A^T(Ax_n - y_n)), \\ y_{n+1} &= P_Q((1 - \epsilon_n\gamma_n)y_n + \gamma_n B^T(Ax_n - y_n)). \end{aligned} \tag{1.33}$$

1.3. Một số ứng dụng của bài toán chấp nhận tách

Bài toán SFP trong không gian Hilbert hữu hạn chiều đã được nghiên cứu đầu tiên bởi Censor và Elfving [57] đối với các bài toán ngược phát sinh từ các bài toán xử lý và khôi phục hình ảnh [1], gần đây, nó còn được ứng dụng trong y học để điều biến cường độ xạ trị [2], [3], [58], [59]. Mục này, luận án trình bày hai ứng dụng của bài toán chấp nhận tách đa tập.

1.3.1. Bài toán xử lý tín hiệu số và khôi phục ảnh

Xét bài toán chụp cắt lớp X-quang từ việc nghiên cứu các cơ chế hấp thụ tia X của vật chất, ta có thể xây dựng biểu thức định lượng biểu diễn mối quan hệ giữa cường độ tia x là $I(x)$ và độ suy giảm tuyến tính $\mu(x)$ như sau: Trong



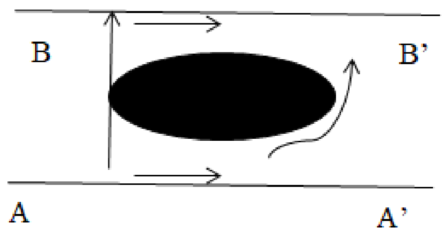
quá trình tương tác với vật chất, cường độ chùm tia Rơnghen trên một đơn vị diện tích bề mặt vuông góc với phương truyền sẽ giảm đi. Trong những điều kiện nhất định có thể coi sự suy giảm này tỷ lệ với quãng đường đi. Để dẫn ra công thức về sự thay đổi cường độ I, ta xét một chùm tia chiếu đến với cường độ không đổi I_0 trên mặt phân giới AA', với giả thiết ban đầu như trên hình vẽ ta có

$$dI(x) = -\mu(x)I(x)dx. \tag{1.34}$$

Hệ số tỷ lệ μ trong (1.34) được gọi là hệ số hấp thụ tuyến tính, hệ số này là một hàm phụ thuộc vào ba tọa độ không gian và là đại lượng đặc trưng cơ bản cho cấu trúc vật chất, được xác định nhờ các phương pháp chụp cắt lớp máy tính và được làm cơ sở trong việc tái tạo hình ảnh chụp cắt lớp. Từ (1.34) ta có

$$I(x) = I_0 e^{-\int_0^x \mu(y)dy}. \tag{1.35}$$

Biểu thức trên là định luật hấp thụ tổng quát Ber. Từ đây cho thấy, khi độ dày lớp vật chất (x) hoặc độ suy giảm tuyến tính μ càng lớn thì cường độ chùm tia ló càng nhỏ, tức là tia Rơnghen bị hấp thụ càng nhiều. Sơ đồ ghi chụp thông tin về đối tượng do Haunsfield và Mac - Cormac đề xuất và thực hiện như sau: Nguồn tia Rơnghen tập trung dưới dạng chùm hẹp dọc theo đoạn định hướng



AA’, phần thu dọc BB’. Phần phát và phần thu dịch chuyển một cách đồng bộ, việc lấy thông tin là cường độ tia ở đầu ra phần phát và đầu vào phần thu được tiến hành với các bước thiết lập trước. Logarit của tỷ số cường độ tia ở đầu vào phần thu đối với cường độ ban đầu được gọi là hình chiếu. Các đoạn định hướng AA’, BB’ được cố định trên cùng một khung, khung này có thể xoay quanh trục cố định. Đối với mỗi vị trí cố định của khung, người ta đo một bộ các hình chiếu tương ứng với tổ hợp các tia song song, bộ các hình chiếu này đôi khi còn gọi là bộ hình quét.

Để khôi phục lại cấu trúc bên trong của đối tượng được chiếu tia X cần phải có tập hợp các bộ hình quét cho tất cả các vị trí có thể có của khung. Thực tế, việc lấy thông tin được tiến hành tương ứng với một tập hợp rời rạc các góc quay có bước nhất định $\delta\theta$.

Giả sử kích thước chiều ngang của tia Rơnghen vô cùng nhỏ và có thể bỏ qua ảnh hưởng của tán xạ. Lúc này có thể đặc trưng tia bởi cường độ $J(x)$ tại điểm x đã cho trong tia. Sự thay đổi cường độ theo tia được tính bằng hệ số hấp thụ tuyến tính $\mu(x)$ theo công thức Ber. Gọi phân bố $\mu(x)$ theo thiết diện quét cho trước là cấu trúc của đối tượng. Chọn trong mặt phẳng quét một hệ tọa độ đề các Oxy với trục quay của hệ thống đi qua gốc O. Gắn với khung quay một hệ tọa độ đề các di động Ouv có Ou hướng từ phần phát đến đầu thu dọc theo hướng trung tâm (đi qua trục quay). Vị trí của hệ tọa độ đề các di động so với hệ tọa độ cố định được xác định bởi góc θ sao cho

$$u = x\cos\theta + y\sin\theta \quad v = -x\sin\theta + y\, cos\theta$$

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta \qquad y = u\sin\theta + v\, cos\theta$$

Tương ứng với (1.35), ta có

$$I(u,v) = I_0 e^{-\int\limits_{-R}^{R}\mu(x,y)du}, \tag{1.36}$$

với $\mu(x,y)$ là hệ số hấp thụ tuyến tính, μ được lấy trên tia với vị trí hiện thời được xác định bằng góc θ và khoảng cách v tính từ tia hiện thời tới tia trung tâm, I_0 là giá trị cường độ tia Rơnghen tại đầu ra phần phát, $2R$ là quãng đường tia đi qua.

Giả thiết bên ngoài đối tượng nghiên cứu thì $\mu = 0$ (chẳng hạn trong không khí), do đó tích phân trong (1.36) chỉ lấy trong phần đối tượng nghiên cứu, nếu coi miền lấy tích phân là miền vô hạn thì ta có khái niệm hình chiếu như sau:

$$p(v,\theta) = -\ln\frac{I(v,\theta)}{I_0} = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu(x,y)du. \tag{1.37}$$

Vậy bài toán cơ bản của chụp cắt lớp Rơnghen máy tính là xác định đại lượng $\mu(x,y)$ qua tập các hình chiếu $p(u,\theta)$. Trong đó hệ số hấp thụ tuyến tính $\mu(x,y)$ đặc trưng cho cấu trúc bên trong đối tượng nghiên cứu, còn tập các hình chiếu là đại lượng được xác định thông qua kết quả đo đạc bên ngoài đối tượng, nên bài toán chụp cắt lớp máy tính còn gọi là bài toán khôi phục cấu trúc hay tái tạo hình.

Vì chụp cắt lớp sử dụng máy tính để điều khiển việc ghi nhận thông tin từ các phần cảm biến, sau đó lưu trữ và chuẩn bị thông tin cho việc chẩn đoán, nên một trong số các vấn đề cơ bản là rời rạc hóa, tức là chuyển các phân bố liên tục theo tọa độ và thời gian sang các hàm rời rạc với các đối số rời rạc.

Hiện nay có nhiều phương pháp rời rạc hóa khôi phục cấu trúc đối tượng, trong đó, phương pháp lặp là một phương pháp mang tính đặc thù của bài toán chụp cắt lớp. Giả thiết miền đối tượng nghiên cứu được xác định bởi miền D, rời rạc tích phân trong (1.37) ta có hệ phương trình

$$p(u,v) = \sum_i A^{(i)}(u,v)\mu_i. \tag{1.38}$$

Trong vế phải của (1.36) chỉ xuất hiện giá trị của hàm $\mu(x,y)$ tại các phần tử mà tia đang xét đi qua. Tiến hành đo cho N_s vị trí của tia, ký hiệu hình chiếu $p(u,v) = p_{i,k}$ và $A^{(0)} = A_{i,j} = \theta_j$ tương ứng với $\mu = \mu_i$ ta nhận được hệ phương trình

$$\sum_{j=1}^{N_s} A_{j,k}\mu_j = p_{i,k}. \tag{1.39}$$

Đặt $A = (A_{i,k}, x = (\mu_j), b = (p_{i,k}))$, ta thấy bài toán (1.39) là bài toán chấp nhận lồi dạng

$$Ax = b. \tag{1.40}$$

Trong thực tế, khi giải Bài toán (1.40) thường có sai số, dạng tổng quát có thể phát biểu: Tìm $x \in C$, tập lồi trong H,

$$b = Ax + w, \tag{1.41}$$

với là sai số w thuộc một khoảng nhỏ, $\|\mathrm{w}\| \le \varepsilon, \varepsilon > 0$ đủ nhỏ. Việc giải bài toán này dẫn đến bài toán hiệu chỉnh sau:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{E}^n} \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2, \\ &\|x\|_1 \le t, \end{aligned} \tag{1.42}$$

ở đây $A \in \mathbb{E}^{m\times n}, b \in \mathbb{E}^m$, một không gian Euclidian m- chiều với chuẩn $\|\cdot\|_2$, và t là hằng số dương. Bài toán (1.42) trình bày khả năng tìm một số nghiệm của bài toán SFP với l_1 ràng buộc và liên quan chặt chẽ với bài toán giảm nhiễu cơ bản [60], đã được ứng dụng rộng rãi trong lý thuyết xử lý tín hiệu số. Dễ thấy rằng các tập $C = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\|_1 \leq t\}$ và $Q = \{b\}$ là lồi đóng trong $\mathbb{E}^n$ và $\mathbb{E}^m$, tương ứng. Khi đó, bài toán (1.42) có thể xem như một bài toán SFP.

Để giải bài toán (1.42) ta có thể sử dụng phương pháp lặp hiệu chỉnh Tikhonov,

$$\min_{x \in \mathbb{E}^n} \{\frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \gamma\|x\|_1\}. \tag{1.43}$$

1.3.2. Bài toán xạ trị

Tiếp theo, ta chỉ ra ví dụ thứ hai trong điều biến cường độ xạ trị đã được đưa ra trong [61]. Ta chia toàn bộ khối lượng cơ thể của bệnh nhân thành m phần, đánh số bởi $i = 1, 2, \cdots, m$. Giả sử tất cả các phần giải phẫu, bao gồm cả những phần thuộc mục xạ trị theo kế hoạch (PTVs) và các tổ chức rủi ro (OAR) đã được xác định. Ta ký hiệu tập hợp các chỉ số từng phần trong cấu trúc t là S_t. Mỗi thành phần đánh dấu bởi i có thể thuộc nhiều tập S_t, tức là, các cấu trúc khác nhau có thể chồng chéo. Ta sẽ giả sử thêm rằng cường độ tia xạ trị được phân bố độc lập đối với mỗi chùm nhỏ n phần, $n \leq m$, chúng có cấu trúc hình học nhất định và được đánh số bởi $j = 1, 2, \cdots, n$. Các cường độ x_j của các chùm nhỏ là thành phần trong vector n-chiều $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{E}^n$ - không gian cường độ xạ trị. Ở đây, các x_j không âm với mỗi $1 \leq j \leq n$, tức là, x thuộc tập hợp

$$X_+ = \{x \in \mathbb{E}^n : x_j \geq 0 \text{ với mọi } j = 1, 2, \cdots, n\}. \tag{1.44}$$

Ta biết trong [2] rằng có các ràng buộc khác như ràng buộc X_l phụ thuộc vào thiết bị sử dụng trong điều trị,... Các ràng buộc là các tập lồi đóng trong $\mathbb{E}^n$.

Cho $d_{ij} \geq 0$ là liều lượng hấp thụ (lượng năng lượng do bức xạ hạt nhân (hoặc ion hóa) truyền cho một đơn vị khối lượng của vật liệu hấp thụ) của phần thứ i do sự bức xạ của một đơn vị cường độ xạ trị từ chùm thứ j, có thể được tính toán như sau. Cho h_i là toàn bộ liều lượng hấp thụ trong phần i, ta có thể tính toán h_i bởi

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j. \tag{1.45}$$

Gọi $h = (h_1, h_2, \cdots, h_m)$ là toàn bộ liều lượng các phần xạ trị. *Ma trận liều lượng hấp thụ* $H = (d_{ij})$ là $m \times n$-ma trận. Trong không gian liều lượng hấp thụ, đối với mỗi cấu trúc S_t, ràng buộc điển hình thường gặp là liều lượng không nên vượt quá cận trên u_t. Điều đó có nghĩa là x thuộc tập hợp

$$H_{\max,t} = \{h \in \mathbb{E}^m : h_i \leq u_i \text{ với mọi } i \in S_t\}. \tag{1.46}$$

Tương tự, trong khối lượng mục tiêu, liều lượng nên giảm dưới một giới hạn thấp hơn l_t, tức là, x thuộc tập hợp

$$H_{\min,t} = \{h \in \mathbb{E}^m : l_i \leq h_i \text{ với mọi } i \in S_t\}. \tag{1.47}$$

Mặt khác, với mỗi khối lượng của S_t, bao gồm các phần N_t, ta xét hàm

$$E_t(h) = \left(\frac{1}{N_t} \sum_{i \in S_t} h_i^{\alpha_t}\right)^{1/\alpha_t}, \tag{1.48}$$

với tham số α_t là số mô riêng lẻ phụ thuộc từng bệnh lý, có giá trị âm với khối lượng mục tiêu và dương ($\alpha_t \geq 1$) với các tổ chức rủi ro OAR. Khi $\alpha_t = 1$, hàm trên là liều lượng trung bình của cấu trúc t. Hàm $E_t(h)$ xác định trên tập vector liều lượng xạ trị của cấu trúc S_t với giá trị đơn trị. Với mỗi khối lượng mục tiêu PTV của cấu trúc S_t, ta có cận dưới $E_t^{\min}$. Cho

$$\Omega_t = \{h \in \mathbb{E}^m : E_t^{\min} \leq E_t(h) \text{ và } \alpha_t < 0\}. \tag{1.49}$$

Tương tự, với mỗi cấu trúc rủi ro OAR của S_t, ta có cận trên $E_t^{\max}$. Đặt

$$\Gamma_t = \{h \in \mathbb{E}^m : E_t(h) \leq E_t^{\max} \text{ và } \alpha_t \geq 1\}. \tag{1.50}$$

Các tập hợp, xác định bởi (1.46), (1.47), (1.49), (1.50) là các tập lồi. Vì vậy, ta có bài toán MSSFP với các ràng buộc được xác định trong không gian cường độ bức xạ $\mathbb{E}^n$ và các ràng buộc của nó trong không gian hấp thụ $\mathbb{E}^m$ bởi phép biến đổi tuyến tính H. Bài toán này có thể được phát biểu:

$$\text{Tìm } p_* \in X_+ \cap \big(\cap_l X_l\big) \text{ sao cho } h_* = Hp_* \in \cap_v H_v, \tag{1.51}$$

ở đây H_v được xác định bởi mỗi ràng buộc (1.46), (1.47), (1.49), (1.50).

Kết luận

Chương 1 của Luận án nhắc lại một số khái niệm và tính chất của một số toán tử trong không gian Hilbert và không gian Banach. Chương này cũng trình bày một số phương pháp xấp xỉ nghiệm các bài toán điểm bất động, bài toán chấp nhận tách và bài toán trùng tách để làm tiền đề dẫn dắt tới các phương pháp được đề xuất ở Chương 2 và Chương 3 để giải bài toán chấp nhận tách đa tập , bài toán trùng tách đa tập và bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của họ ánh xạ không giãn.

CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH LẶP XẤP XỈ NGHIỆM BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH VÀ TRÙNG TÁCH ĐA TẬP

Chương này đề xuất hai phương pháp hiệu chỉnh lặp xấp xỉ nghiệm bài toán chấp nhận tách và bài toán trùng tách đa tập trong không gian Hilbert thực vô hạn chiều. Nội dung của chương được viết trong hai mục. Mục 2.1 trình bày phương pháp hiệu chỉnh lặp kiểu Lavrentiev và Bruck–Bakushinskii xấp xỉ nghiệm bài toán chấp nhận tách đa tập. Mục 2.2 trình bày một phương pháp hiệu chỉnh lặp xấp xỉ nghiệm bài toán trùng tách đa tập. Sự hội tụ mạnh của hai phương pháp này được chứng minh chi tiết cùng các ví dụ số minh họa. Kết quả của chương được viết dựa trên hai bài báo khoa học [**CT2**] và [**CT3**] trong Danh mục công trình công bố của tác giả luận án.

2.1. Bài toán chấp nhận tách đa tập

Mục này đề xuất một phương pháp hiệu chỉnh lặp xấp xỉ nghiệm bài toán MSSFP và chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp, sau đó trình bày các ví dụ số để minh họa cho thuật toán. Để tiện cho việc trình bày, chúng tôi phát biểu lại bài toán MSSFP đã được nêu ở phần Mở đầu.

Cho H_1 và H_2 là hai không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\|\cdot\|$ tương ứng. Cho $A : H_1 \to H_2$ là một ánh xạ tuyến tính bị chặn. Cho $C_i \subseteq H_1$ và $Q_j \subseteq H_2$ là các tập con lồi, đóng tương ứng trong H_1 và H_2, $i \in J_1$ và $j \in J_2$, với J_1 và J_2 là các tập chỉ số (có thể hữu hạn hoặc vô hạn đếm được). Bài toán MSSFP được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x \in C := \bigcap_{i \in J_1} C_i \text{ sao cho } Ax \in Q := \bigcap_{j \in J_2} Q_j. \qquad \text{(MSSFP)}$$

Ký hiệu Γ là tập nghiệm của bài toán (MSSFP). Giả sử $\Gamma \neq \emptyset$.

2.1.1. Phương pháp hiệu chỉnh kiểu Lavrentiev

Để tìm nghiệm của phương trình $Ax = f$ với A là toán tử tuyến tính không âm, Lavrentiev đề xuất phương pháp hiệu chỉnh $Ax + \alpha x = f, \alpha > 0$, có nghiệm duy nhất x_α. Khi $\alpha \to 0$, x_α hội tụ đến một nghiệm của phương trình này.

Luận án đề xuất một phương pháp hiệu chỉnh kiểu Lavrentiev xấp xỉ nghiệm bài toán (MSSFP) trong không gian Hilbert thực như sau:

$$F^k u^k + \alpha_k(u^k - x^+) = 0, \tag{2.1}$$

ở đây,

$$F^k = I - U^k + A^*(I - V^k)A, \tag{2.2}$$

$$U^k = \frac{1}{\beta^k}\sum_{i=1}^{k}\beta_i P_{C_i}, \qquad V^k = \frac{1}{\eta^k}\sum_{j=1}^{k}\eta_j P_{Q_j}, \tag{2.3}$$

ở đây, $x^+ \in H_1$ là điểm dự đoán, α_k, β_i, γ_k, η_j là các tham số dương, cùng với $\beta^k = \beta_1 + \cdots + \beta_k$, $\eta^k = \eta_1 + \cdots + \eta_k$.

Giả sử các tham số γ_k, α_k, β_i và η_j thỏa mãn các giả thiết dưới đây:

(a) $\gamma_k, \alpha_k \in (0,1)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k/\alpha_k = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, $\alpha_{k+1} < \alpha_k$ và $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k\alpha_k = \infty$,

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\alpha}_k/(\gamma_k\alpha_k^2) = 0$ ở đây $\tilde{\alpha}_k = (\alpha_{k-1}/\alpha_k) - 1$,

(c) $\beta_i > 0$ với mọi $i \geq 1$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i = 1$ và $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k/(\gamma_k\alpha_k^2) = 0$,

(d) $\eta_j > 0$ với mọi $j \geq 1$ sao cho $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \eta_j = 1$ và $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k/(\gamma_k\alpha_k^2) = 0$.

Nhận xét 2.1.1. Ví dụ về các dãy tham số thỏa mãn các điều kiện **(a)**–**(d)** là

$$\gamma_k = 1/(k+1)^a,\ \ \alpha_k = 1/(k+1)^b,$$

ở đây, $0 < b < a$ với $a + 2b < 1$ và $\eta_i = \beta_i = 1/(i(i+1))$.

Gọi các điều kiện (c’), (d’) được xác định như sau:

(c') $\beta_i > 0$ với mọi $i \geq 1$ sao cho $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i = 1$,

(d') $\eta_j > 0$ với mọi $j \geq 1$ sao cho $\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j = 1$.

Ta có kết quả sau trong trường hợp các tập chỉ số J_1 và J_2 là vô hạn đếm được.

Định lý 2.1.1. *Cho H_1 và H_2 là hai không gian Hilbert thực và A là ánh xạ tuyến tính bị chặn từ H_1 vào H_2, $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ và $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}_+}$ là hai họ vô hạn các tập con lồi, đóng trong H_1 và H_2 tương ứng. Giả sử các điều kiện* **(c')** *và* **(d')** *được thỏa mãn. Khi đó,*

(i) Với mỗi $\alpha_k > 0$, bài toán (2.1) có một nghiệm duy nhất u^k.

(ii) Nếu $\Gamma \neq \emptyset$, thì $\lim_{k\to\infty} u^k = p_* \in \Gamma$ thỏa mãn

$$\|p_* - x^+\| \leq \|p - x^+\| \ \forall p \in \Gamma. \tag{2.4}$$

(iii)

$$\|u^k - u^{k-1}\| \leq d_k = \frac{2M_1}{\alpha_k}\left[\frac{\beta_k}{\beta^k} + \tilde{\alpha}_k + \frac{\eta_k}{\eta^k}\right] + \tilde{\alpha}_k(M_1 + \|x^+\|), \tag{2.5}$$

ở đây, M_1 là hằng số dương nào đó.

Chứng minh. (i) Từ (2.3), dễ nhận thấy U^k và V^k là các ánh xạ không giãn trên H_1 và H_2 tương ứng. Suy ra $T^k := U^k + A^*(I - V^k)A$ cũng là ánh xạ không giãn. Do đó, $F^k = I - T^k$ là ánh xạ đơn điệu trên H_1 với mỗi $k \geq 1$. Khi đó, $F^k + \alpha_k(I - x^+)$ là ánh xạ α_k-đơn điệu mạnh trên H_1. Theo [27], (2.1) có nghiệm duy nhất u^k với mỗi $k \geq 1$.

(ii) Trước hết, ta chứng minh dãy $\{u^k\}$ bị chặn. Thật vậy, lấy điểm $p \in \Gamma$, khi đó, dễ thấy:

$$(I - U^k)p = 0 \text{ và } A^*(I - V^k)Ap = 0,$$

và do đó, $F^k p = 0$. Sử dụng phương trình này, tính đơn điệu của F^k và $\alpha_k > 0$ với mỗi k trong (2.1), ta có bất đẳng thức

$$\langle u^k - x^+, u^k - p\rangle \leq 0 \text{ với mọi } k \geq 1.$$

Do đó,

$$\|u^k - x^+\| \leq \|p - x^+\| \quad \forall p \in \Gamma. \tag{2.6}$$

Từ bất đẳng thức này suy ra dãy $\{u^k\}$ là bị chặn. Điều này cùng với

$$\begin{aligned}\|P_{C_i}u^{k-1}\| &\leq \|P_{C_i}u^{k-1} - P_{C_i}p\| + \|p\| \\ &\leq \|u^{k-1} - p\| + \|p\| \leq \|u^{k-1}\| + 2\|p\| \ \forall i \geq 1,\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\|A^*P_{Q_j}Au^{k-1}\| &\leq \|A^*P_{Q_j}Au^{k-1} - A^*P_{Q_j}Ap\| + \|A^*Ap\| \\ &\leq \|A^*\|\|Au^{k-1} - Ap\| + \|A\|^2\|p\| \\ &\leq \|A\|^2(\|u^{k-1}\| + 2\|p\|) \ \forall j \geq 1,\end{aligned}$$

suy ra tồn tại hằng số M_1 dương sao cho

$$\sup_{i,j,k\geq 1}\left\{\|u^k\|, \|P_{C_i}u^{k-1}\|, \|A^*P_{Q_j}Au^{k-1}\|\right\} \leq M_1.$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh dãy $\{u^k\}$ hội tụ tới p_* thỏa mãn (2.4). Trước hết ta chứng minh rằng

$$\lim_{k\to\infty}\|(I - P_{C_i})u^k\| = 0 \text{ và } \lim_{k\to\infty}\|(I - P_{Q_j})Au^k\| = 0 \ \forall i, j \geq 1. \tag{2.7}$$

Để chứng minh điều này ta cần chứng minh

$$\lim_{k\to\infty}\|(I - U^k)u^k\| = 0 \text{ và } \lim_{k\to\infty}\|A^*(I - V^k)Au^k\| = 0. \tag{2.8}$$

Thật vậy, vì U^k là ánh xạ không giãn nên $I - U^k$ là ánh xạ 2-liên tục Lipschitz với $k \geq 1$. Vì ánh xạ $I - P_{C_i}$ là (1/2)-ngược đơn điệu mạnh, nên

$$\begin{aligned}&\langle (I - U^k)x - (I - U^k)y, x - y\rangle \\ &= \left\langle x - \sum_{i=1}^{k}(\beta_i/\beta^k)P_{C_i}x - \left(y - \sum_{i=1}^{k}(\beta_i/\beta^k)P_{C_i}y\right), x - y\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k}(\beta_i/\beta^k)\langle (I - P_{C_i})x - (I - P_{C_i})y, x - y\rangle \\ &\geq (1/2)\sum_{i=1}^{k}(\beta_i/\beta^k)\|(I - P_{C_i})x - (I - P_{C_i})y\|^2 \\ &\geq (1/2)\left\|\sum_{i=1}^{k}(\beta_i/\beta^k)(I - P_{C_i})x - (I - P_{C_i})y\right\|^2 \\ &= (1/2)\|(I - U^k)x - (I - U^k)y\|^2.\end{aligned}$$

Do đó, $I - U^k$ cũng là ánh xạ (1/2)-ngược đơn điệu mạnh.

Tương tự, vì $A^*(I - P_{Q_j})A$ là ánh xạ $(1/(2\|A\|^2))$-ngược đơn điệu mạnh trên H_1 [62], nên ánh xạ $A^*(I - V^k)A$ cũng là ánh xạ $(1/(2\|A\|^2))$-ngược đơn điệu mạnh trên H_1. Do đó, $A^*(I-V^k)A$ là ánh xạ $(2\|A\|^2)$-liên tục Lipschitz với $k \geq 1$. Từ định nghĩa F^k trong (2.1) và (2.2) và tính ngược đơn điệu mạnh của $I - U^k$ và $A^*(I - V^k)A$, ta nhận được

$$\begin{aligned}(1/2)(\|(I - U^k)u^k\|^2 + (1/\|A\|^2)\|A^*(I - V^k)Au^k\|^2) &\leq \langle F^k u^k - F^k p, u^k - p\rangle \\ &\leq \alpha_k\langle u^k - x^+, p - u^k\rangle \\ &\leq \alpha_k\langle p - x^+, p - u^k\rangle \\ &\leq \alpha_k(\|p\| + \|x^+\|)(\|p\| + M_1).\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức này cùng với $\alpha_k \to 0$, ta được giới hạn trong (2.8). Rõ ràng,

$$\begin{aligned}\|(I - U^k)u^k\|(M_1 + \|p\|) &\geq \langle (I - U^k)u^k - (I - U^k)p, u^k - p\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k}(\beta_i/\beta^k)\langle (I - P_{C_i})u^k - (I - P_{C_i})p, u^k - p\rangle \\ &\geq (1/2)\sum_{i=1}^{k}(\beta_i/\beta^k)\|(I - P_{C_i})u^k\|^2.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\|(I - P_{C_i})u^k\|^2 \leq 2(M_1 + \|p\|)(\beta^k/\beta_i)\|(I - U^k)u^k\|.$$

Từ đẳng thức này cùng với $\beta^k \to 1$ khi $k \to \infty$ và giới hạn thứ nhất trong (2.8), ta suy ra giới hạn trong (2.7) với mỗi $i \geq 1$. Tương tự,

$$\begin{aligned}\|A^*(I - V^k)Au^k\|(M_1 + \|p\|) &\geq \langle A^*(I - V^k)Au^k - A^*(I - V^k)Ap, u^k - p\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{k}(\eta_j/\eta^k)\langle (I - P_{Q_j})Au^k - (I - P_{Q_j})Ap, Au^k - Ap\rangle \\ &\geq (1/2)\sum_{j=1}^{k}(\eta_j/\eta^k)\|(I - P_{Q_j})Au^k\|^2,\end{aligned}$$

do vậy, ta có giới hạn thứ hai trong (2.7) với mỗi $j \geq 1$. Hơn nữa, vì dãy $\{u^k\}$ bị chặn, nên tồn tại dãy con $\{u^n\}$ của $\{u^k\}$, $u^n = u^{k_n}$, sao cho $\{u^n\}$ hội tụ yếu tới điểm $\overline{p} \in H_1$ khi $n \to \infty$. Khi đó, thay k trong (2.7) bởi n và cho $n \to \infty$, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \|(I - P_{C_i})u^n\| = 0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} \|(I - P_{Q_j})Au^n\| = 0 \ \forall i, j \geq 1.$$

Vì P_{C_i} và P_{Q_j} là các ánh xạ không giãn, nên theo Bổ đề 1.1.1

$$(I - P_{C_i})\overline{p} = 0 \text{ và } (I - P_{Q_j})A\overline{p} = 0 \text{ với mọi } i, j \geq 1,$$

tức là, $\overline{p} \in \Gamma$. Sử dụng tính chất sự hội tụ yếu của dãy $\{u^n\}$ và bất đẳng thức (2.6) với k được thay bởi n, ta nhận được (2.4), ở đây, p_* được thay bởi $\overline{p}$. Dễ thấy rằng điểm hội tụ yếu của dãy $\{u^k\}$ có tính chất như $\overline{p}$. Hơn nữa, ta biết rằng p_* trong (2.4) xác định duy nhất. Do đó, các dãy $\{u^k\}$ hội tụ yếu tới p_* khi $k \to \infty$. Tiếp theo, từ sự hội tụ yếu của dãy $\{u^k\}$ tới p_* và (2.6), ta có $\|u^k - x^+\| \to \|p_* - x^+\|$. Sử dụng tính chất của không gian Hilbert H_1, ta có sự hội tụ mạnh của $\{u^k\}$ tới p_* khi $k \to \infty$.

(iii) Ta sẽ đánh giá $\|u^k - u^{k-1}\|$. Từ (2.6), dễ thấy rằng

$$\langle F^k u^k - F^{k-1}u^{k-1} + \alpha_k(u^k - x^+) - \alpha_{k-1}(u^{k-1} - x^+), u^{k-1} - u^k\rangle = 0,$$

điều này cùng với tính đơn điệu của F^k suy ra

$$\begin{aligned}
\alpha_k\|u^k - u^{k-1}\|^2 &\leq \langle F^{k-1}u^{k-1} - F^k u^{k-1}, u^k - u^{k-1}\rangle \\
&\quad + (\alpha_{k-1} - \alpha_k)\langle u^{k-1} - x^+, u^k - x^{k-1}\rangle \\
&\leq \big[\|F^k u^{k-1} - F^{k-1}u^{k-1}\| \\
&\quad + (\alpha_{k-1} - \alpha_k)\|u^{k-1} - x^+\|\big]\|u^k - u^{k-1}\|,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

ở đây,

$$\begin{aligned}
\|F^k u^{k-1} - F^{k-1}u^{k-1}\| &= \|U^{k-1}u^{k-1} - U^k u^{k-1} - A^*V^k Au^{k-1} + A^*V^{k-1}Au^{k-1}\| \\
&\leq \|U^{k-1}u^{k-1} - U^k u^{k-1}\| + \|A^*V^{k-1}Au^{k-1} - A^*V^k Au^{k-1}\|
\end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned}
\|U^{k-1}u^{k-1} - U^k u^{k-1}\| &= \left\| \frac{1}{\beta^{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i P_{C_i} u^{k-1} - \frac{1}{\beta^k} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i P_{C_i} u^{k-1} - \frac{1}{\beta^k} \beta_k P_{C_k} u^{k-1} \right\| \\
&\le \left| \frac{1}{\beta^{k-1}} - \frac{1}{\beta^k} \right| \beta^{k-1} M_1 + \frac{\beta_k}{\beta^k} M_1 = \frac{2\beta_k}{\beta^k} M_1, \\
\|A^* V^{k-1} A u^{k-1} - A^* V^k A u^{k-1}\| &= \left\| \frac{1}{\eta^{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} \eta_j A^* P_{Q_j} A u^{k-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\eta^k} \sum_{j=1}^{k-1} \eta_j A^* P_{Q_j} A u^{k-1} - \frac{1}{\eta^k} \eta_k A^* P_{Q_k} A u^{k-1} \right\| \\
&\le \left| \frac{1}{\eta^{k-1}} - \frac{1}{\eta^k} \right| \eta^{k-1} M_1 + \frac{\eta_k}{\eta^k} M_1 = \frac{2\eta_k}{\eta^k} M_1.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Khi đó, từ (2.9) và (2.10) ta có

$$\|u^k - u^{k-1}\| \le \frac{2M_1}{\alpha_k} \left[\frac{\beta_k}{\beta^k} + \tilde{\alpha}_k + \frac{\eta_k}{\eta^k} \right] + \tilde{\alpha}_k (M_1 + \|x^+\|) = d_k,$$

tức là ta có (2.5). Vậy định lý được chứng minh. □

Ở thuật toán (2.1), phương trình phi tuyến (2.1) chỉ có ý nghĩa về mặt lý thuyết, việc tính toán tìm nghiệm là rất khó khăn. Thuật toán (2.11) được xây dựng trong định lý sau là chuyển từ thuật toán (2.1) sang dẫy lặp (2.11) thì việc tính toán sẽ khả thi hơn nhiều. Bây giờ chúng ta xét định lý sau và sẽ chứng minh sự hội tụ mạnh của thuật toán (2.11)

Định lý 2.1.2. *Cho H_1, H_2, A, C_i và Q_j như trong Định lý 2.1.1. Giả sử tập nghiệm Γ của bài toán* (MSSFP) *khác rỗng. Giả sử các điều kiện* **(a)**, **(b)**, **(c)** *và* **(d)** *được thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{z^k\}$ xác định bởi*

$$z^{k+1} = (I - \gamma_k(F^k + \alpha_k I))z^k + \gamma_k \alpha_k x^+, \ k \ge 1, \tag{2.11}$$

hội tụ mạnh tới p_* thỏa mãn (2.4) khi $k \to \infty$, ở đây F^k được định nghĩa bởi (2.2).

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh dãy $\{z^k\}$ sinh bởi (2.11) là bị chặn. Thật vậy, lấy $p \in \Gamma$ và sử dụng bất đẳng thức $\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\langle y, x+y\rangle$ với bất kỳ $x, y \in H_1$, ta có

$$\begin{aligned}
\|z^{k+1} - p\|^2 &= \|z^k - p - \gamma_k(F^k z^k + \alpha_k(z^k - x^+))\|^2 \\
&\le \|z^k - p\|^2 - 2\gamma_k\langle F^k z^k + \alpha_k(z^k - x^+), z^{k+1} - p\rangle \\
&= \|z^k - p\|^2 - 2\gamma_k\alpha_k\|z^{k+1} - p\|^2 + 2\gamma_k\langle \alpha_k(z^{k+1} - z^k) - F^k z^{k+1} \\
&\qquad + \alpha_k(x^+ - p) + F^k z^{k+1} - F^k z^k, z^{k+1} - p\rangle.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Mặt khác, từ $F^k p = 0$, từ tính đơn điệu của F^k, ta có bất đẳng thức

$$\langle -F^k z^{k+1}, z^{k+1} - p\rangle \le 0. \tag{2.13}$$

Sử dụng định nghĩa F^k trong (2.2) và tính chất của P_{C_i} và P_{Q_j}, ta nhận được

$$\begin{aligned}
\|F^k z^{k+1} - F^k z^k\| &\le \|(I - U^k)z^{k+1} - (I - U^k)z^k\| \\
&\qquad + \|A^*(I - V^k)Az^{k+1} - A^*(I - V^k)Az^k)\| \\
&\le 2(1 + \|A\|^2)\|z^{k+1} - z^k\|.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Vì $\alpha_k < 1$, bằng các lập luận như trên, ta có

$$\begin{aligned}
\|F^k z^k + \alpha_k(z^k - x^+)\| &= \|F^k z^k - F^k p + \alpha_k(z^k - p) + \alpha_k(p - x^+)\| \\
&\le (2 + 2\|A\|^2 + \alpha_k)\|z^k - p\| + \alpha_k\|p - x^+\| \\
&\le (3 + 2\|A\|^2)\|z^k - p\| + \alpha_k\|p - x^+\|.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Do vậy, từ (2.12) đến (2.15), ta nhận được

$$\begin{aligned}
\|z^{k+1} - p\|^2 &\le \|z^k - p\|^2 - 2\gamma_k\alpha_k\|z^{k+1} - p\|^2 \\
&\qquad + 2\gamma_k\big[(3 + 2\|A\|^2)\gamma_k((3 + 2\|A\|^2)\|z^k - p\| + \alpha_k\|p - x^+\|) \\
&\qquad + \alpha_k\|x^+ - p\|\big]\|z^{k+1} - p\|
\end{aligned}$$

với mỗi $p \in \Gamma$. Do đó,

$$\begin{aligned}
\|z^{k+1} - p_*\|^2 &\le \|z^k - p_*\|^2 - 2\gamma_k\alpha_k\|z^{k+1} - p_*\|^2 \\
&\qquad + 2\gamma_k\big[(3 + 2\|A\|^2)^2\gamma_k\|z^k - p_*\| \\
&\qquad + \big((3 + 2\|A\|^2) + 1\big)\alpha_k\|x^+ - p_*\|\big]\|z^{k+1} - p_*\|.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Từ $\lim\limits_{k\to\infty}(\gamma_k/\alpha_k) = 0$, ta có thể giả sử rằng $(\gamma_k/\alpha_k) \le d := 1/(2(3 + 2\|A\|^2))^2)$ với mọi số nguyên dương $k \ge k_0$. Cho r là số thực dương sao cho $z^k \in B_r(p_*)$

($B_r(p_*)$ là hình cầu tâm p_* và bán kính r trong H_1), và x^+ được chọn sao cho $x^+ \in B_{r/(2(3+2\|A\|^2+1))}(p_*)$. Ta chứng minh rằng z^{k+1} cũng thuộc $B_r(p_*)$, tức là, $\|z^{k+1} - p_*\| \leq r$. Tồn tại một trong hai khả năng: hoặc $\|z^{k+1} - p_*\| \leq \|z^k - p_*\|$ hoặc $\|z^{k+1} - p_*\| > \|z^k - p_*\|$. Trong trường hợp thứ nhất, rõ ràng $z^{k+1} \in B_r(p_*)$. Mặt khác, từ (2.16) ta có

$$\|z^{k+1} - p_*\| \leq (\gamma_k/\alpha_k)(3 + 2\|A\|^2)^2 r + (r/2) \leq r \ \forall k \geq k_0.$$

Điều đó có nghĩa là dãy $\{z^k\}$ bị chặn.

Bây giờ, để chứng minh $\{z^k\}$ hội tụ mạnh tới p_* khi $k \to \infty$, ta chỉ ra rằng $\|z^k - u^k\| \to 0$. Thật vậy, ta đánh giá $\|z^{k+1} - u^k\|$ như sau:

$$\begin{aligned}
\|z^{k+1} - u^k\|^2 &= \|z^k - u^k - \gamma_k(F^k z^k + \alpha_k(z^k - x^+))\|^2 \\
&\leq \|z^k - u^k\|^2 - 2\gamma_k\alpha_k\langle z^{k+1} - u^k, z^{k+1} - u^k\rangle \\
&\quad + 2\gamma_k\langle \alpha_k(z^{k+1} - z^k) - F^k z^k - \alpha_k(u^k - x^+), z^{k+1} - u^k\rangle \\
&= \|z^k - u^k\|^2 - 2\gamma_k\alpha_k\|z^{k+1} - u^k\|^2 + 2\gamma_k\langle \alpha_k(z^{k+1} - z^k) \\
&\quad + \big[\alpha_k(x^+ - u^k) - F^k u^k\big] - \big[F^k z^{k+1} - F^k u^k\big] \\
&\quad + \big[F^k z^{k+1} - F^k z^k\big], z^{k+1} - u^k\rangle.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Từ u^k thỏa mãn (2.1) và ánh xạ F^k là đơn điệu, nên

$$\alpha_k(x^+ - u^k) - F^k u^k = 0 \text{ và } -\langle F^k z^{k+1} - F^k u^k, z^{k+1} - u^k\rangle \leq 0.$$

Khi đó, từ (2.14), (2.17) và $\alpha_k < 1$ suy ra

$$\begin{aligned}
\|z^{k+1} - u^k\|^2 &\leq \|z^k - u^k\|^2 - 2\gamma_k\alpha_k\|z^{k+1} - u^k\|^2 + 2\gamma_k\langle \alpha_k(z^{k+1} - z^k) \\
&\quad + \big[F^k z^{k+1} - F^k z^k\big], z^{k+1} - u^k\rangle \\
&\leq \|z^k - u^k\|^2 - 2\gamma_k\alpha_k\|z^{k+1} - u^k\|^2 \\
&\quad + 2\gamma_k\big(3 + 2\|A\|^2\big)\|z^{k+1} - z^k\|\|z^{k+1} - u^k\| \\
&= \|z^k - u^k\|^2 - 2\gamma_k\alpha_k\|z^{k+1} - u^k\|^2 \\
&\quad + 2\gamma_k^2\big(3 + 2\|A\|^2\big)\|F^k z^k + \alpha_k(z^k - x^+)\|\|z^{k+1} - u^k\|.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Tiếp theo, từ (2.15) với tính chất của dãy $\{z^k\}$, $\{\alpha_k\}$ ta suy ra dãy

$$\{\|F^k z^k + \alpha_k(z^k - x^+)\|\}$$

bị chặn. Do đó, tồn tại số thực dương M_2 sao cho

$$\sup_{k\geq 1}\{\|z^{k+1}-u^k\|;\big(3+2\|A\|^2\big)\|F^k z^k+\alpha_k(z^k-x^+)\|\}\leq M_2,$$

do dãy $\{u^k\}$ bị chặn.

Chú ý rằng (2.18) và tính chất của không gian Hilbert, ta nhận được

$$\begin{aligned}\|z^{k+1}-u^k\|^2 &\leq \|z^k-u^k\|^2-2\gamma_k\alpha_k\|z^{k+1}-u^k\|^2+2\gamma_k^2M_2^2\\ &\leq \|z^k-u^{k-1}\|^2+2\langle u^{k-1}-u^k,z^k-u^k\rangle \\ &\quad -2\gamma_k\alpha_k\|z^{k+1}-u^k\|^2+2\gamma_k^2M_2^2.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Từ (2.19) và (2.5), ta có

$$\|z^{k+1}-u^k\|^2\leq \|z^k-u^{k-1}\|^2-2\gamma_k\alpha_k\|z^{k+1}-u^k\|^2+2d_kM_2+2\gamma_k^2M_2^2.\tag{2.20}$$

Cuối cùng, bằng cách ứng dụng Bổ đề 1.1.9 cho (2.20), $\|z^k-u^{k-1}\|\to 0$, cùng với điều kiện **(a)**–**(d)** và

$$\|z^k-u^k\|\leq \|z^k-u^{k-1}\|+\|u^k-u^{k-1}\|,$$

suy ra $\|z^k-u^k\|\to 0$ khi $k\to\infty$. Chứng minh định lý được hoàn thành. □

Trong trường hợp một trong hai tập J_1 và J_2 là hữu hạn, hoặc cả hai tập chỉ số đều hữu hạn, ta có các kết quả sau đây.

Định lý 2.1.3. *Cho H_1, H_2 và A như trong Định lý 2.1.1. Cho $\{C_i\}_{i=1}^N$ và $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}_+}$ là hai họ tập con lồi, đóng trong H_1 và H_2, tương ứng. Giả sử $\Gamma\neq\emptyset$ và các điều kiện* **(a)**, **(b)**, **(d)** *và*

(c") *$\beta_i>0$ với $1\leq i\leq N$ sao cho $\sum_{i=1}^N\beta_i=1$*

thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{z^k\}$ xác định bởi

$$z^{k+1}=z^k-\gamma_k((I-U)z^k+A^*(I-V^k)Az^k+\alpha_k(z^k-x^+)),k\geq 1,z^1\in H_1,\tag{2.21}$$

hội tụ mạnh tới p_* thỏa mãn (2.4) khi $k\to\infty$, ở đây,

$$U=\sum_{i=1}^N\beta_iP_{C_i},\ V^k=\frac{1}{\eta^k}\sum_{j=1}^k\eta_jP_{Q_j}.$$

Định lý này, tác giả đã xây dựng thuật toán 2.21 cho bài toán MSSFP trong trường hợp họ C_i là hữu hạn, họ Q_j là vô hạn đếm được các tập hợp. Sau đây, chúng ta sẽ chứng minh cho sự hội tụ mạnh của dãy $\{z^k\}$ về nghiệm xấp xỉ của bài toán MSSFP trong trương hợp đang xét.

Chứng minh. Lập luận tương tự như chứng minh Định lý 2.1.1 và 2.1.2 với

$$F^k = I - U + A^*(I - V^k)A,$$

ta thu được kết quả cần chứng minh.

Trong trường hợp này, ta có

$$\|F^k u^{k-1} - F^{k-1}u^{k-1}\| = \| - A^*V^kAu^{k-1} + A^*V^{k-1}Au^{k-1}\| \le \frac{2\eta_k}{\eta^k}M_1.$$

□

Như vậy, thay vì **(c)**, ta chỉ cần điều kiện **(c”)**, tức là ngoài việc loại bỏ được điều kiện về giới hạn trong **(c)** thì thay vì phải tính tổng vô hạn trong **(c)**, ở đây ta chỉ cần tính tổng hữu hạn trong **(c”)** - Điều này làm cho việc tính toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều.

Tiếp theo, chúng ta xét bài toán trong trường hợp họ C_i là vô han, họ Q_j là hữu hạn các tập hợp, ta xây dựng dãy lặp được mô tả trong định lý sau:

Định lý 2.1.4. *Cho H_1, H_2 và A như trong Định lý 2.1.1. Cho $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ và $\{Q_j\}_{j=1}^M$ là hai họ tập con lồi, đóng trong H_1 và H_2 tương ứng. Giả sử $\Gamma \neq \emptyset$ và các điều kiện:* **(a)**, **(b)**, **(c)** *và*

(d”) *$\eta_j > 0$ với $1 \le j \le M$ sao cho $\sum_{j=1}^{M} \eta_j = 1$*

thỏa mãn. Khi đó, khi $k \to \infty$, dãy $\{z^k\}$ xác định bởi

$$\begin{aligned} &z^{k+1} = z^k - \gamma_k((I - U^k)z^k + A^*(I - V)Az^k + \alpha_k(z^k - x^+)), k \ge 1, z^1 \in H_1,\\ &U^k = \frac{1}{\beta^k}\sum_{i=1}^{k}\beta_i P_{C_i},\ V = \sum_{j=1}^{M}\eta_j P_{Q_j}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

hội tụ mạnh tới p_* thỏa mãn (2.4).

Sau đây, chúng ta sẽ chứng minh định lý này.

Chứng minh. Để đơn giản, như trong chứng minh Định lý 2.1.1, có thể đánh giá

$$\|F^k u^{k-1} - F^{k-1} u^{k-2}\| = \| - U^k u^{k-1} + U^{k-1} u^{k-1}\| \leq \frac{2\beta_k}{\beta^k} M_1,$$

và ta chỉ cần điều kiện **(d")** thay vì điều kiện **(d)**.

Như vậy, thay vì **(d)**, ta chỉ cần điều kiện **(d")**, tức là ngoài việc loại bỏ được điều kiện về giới hạn trong **(d)** thì thay vì phải tính tổng vô hạn trong **(d)**, ở đây ta chỉ cần tính tổng hữu hạn trong **(d")** - Điều này làm cho việc tính toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều.

□

Tổ hợp các kết quả trong Định lý 2.1.3 và 2.1.4, ta có kết quả cho trường hợp cả C_i, Q_j đều hữu hạn.

Định lý 2.1.5. *Cho H_1, H_2 và A như trong Định lý 2.1.1. Cho $\{C_i\}_{i=1}^N$ và $\{Q_j\}_{j=1}^M$ là hai họ tập con lồi đóng trong H_1 và H_2 tương ứng. Giả sử $\Gamma \neq \emptyset$ và các điều kiện* **(a)**, **(b)**, **(c')** *và* **(d')** *được thỏa mãn. Khi đó, khi $k \to \infty$, dãy $\{z^k\}$ xác định bởi*

$$z^{k+1} = z^k - \gamma_k((I-U)z^k + A^*(I-V)Az^k + \alpha_k(z^k - x^+)), k \geq 1, z^1 \in H_1, \quad (2.23)$$

với U và V được xác định như trong Định lý 2.1.3 và 2.1.4 tương ứng, hội tụ mạnh tới p_* thỏa mãn (2.4).

Nhận xét 2.1.2. (a) Chương 1 đã trình bày hai phương pháp hiệu chỉnh lặp giải bài toán (MSSFP). Phương pháp hiệu chỉnh lặp của Xu và cộng sự [18] cho bởi dãy lặp:

$$z^{k+1} = P_C(I - \gamma_k(A^*(I - P_Q)A + \alpha_k I))z^k, \ z^1 \in H_1, \ k \geq 1, \quad (2.24)$$

với việc chọn $0 < \gamma_k \leq \frac{\alpha_k}{(\|A\|^2 + \alpha_k)}$ trong mỗi bước lặp còn phụ thuộc vào chuẩn của toán tử A. Việc tính chuẩn của toán tử A không hề dễ dàng, do vậy, sẽ có những khó khăn trong việc sử dụng phương pháp (2.24). Phương pháp trong luận án đề xuất đã loại bỏ được hạn chế này.

(b) Nguyễn Bường và các cộng sự [22] đã mở rộng phương pháp (2.24) để giải bài toán (MSSFP) trong trường hợp các tập chỉ số J_1 và J_2 là hữu hạn:

$$z^{k+1} = U^k T_{\gamma_k,\alpha_k} z^k, \tag{2.25}$$

với $T_{\gamma_k,\alpha_k} = I - \gamma_k(A^*(I - V^k)A + \alpha_k I)$, và V^k được định nghĩa như trong (2.3). Sự hội tụ của dãy $\{z^k\}$ được thiết lập phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển. Phương pháp được đề xuất trong luận án đã khắc phục được hạn chế này, ngoài ra, luận án đã mở rộng bài toán trong trường hợp các tập chỉ số J_1 và J_2 là vô hạn đếm được.

2.1.2. Ví dụ số minh họa

Ở Chương 1 đã trình một số ứng dụng thực tế của bài toán MSSFP. Để minh họa tính toán, ta xét bài toán MSSFP trong các không gian Hilbert thực hữu hạn chiều $\mathbb{E}^m$ và $\mathbb{E}^n$ với

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \text{ và } Q = \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

ở đây,

$$C_i = \Big\{x \in \mathbb{E}^n \;\Big|\; a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \cdots + a_n^i \le b_i\Big\}, \tag{2.26}$$

với $a_l^i, b_i \in (-\infty; +\infty)$, $1 \le l \le n$ và $i \in \mathbb{N}_+$,

$$Q_j = \Big\{y \in \mathbb{E}^m \;\Big|\; \sum_{l=1}^{m}(y_l - a_l^j)^2 \le R_j\Big\},\ R_j > 0, \tag{2.27}$$

với $a_l^j \in (-\infty; +\infty)$, $1 \le l \le m$, $j \in \mathbb{N}_+$ và A là ma trận cỡ $m \times n$.

Ví dụ 2.1. Trong ví dụ thứ nhất, luận án xét trường hợp $m = n = 2$, A là ma trận đơn vị, $a_1^i = 1/i, a_2^i = -1$, $b_i = 0$, $\forall i \ge 1$, $R_j = 1$ và $a^j = (1/j, 0)$, $\forall j \ge 1$ và $x^+ = (0, 0)$. Khi đó, $x_* = (0; 0)$ là nghiệm duy nhất có chuẩn cực tiểu của (2.26), (2.27). Từ $A = I$, phương pháp (2.11) với ánh xạ được định nghĩa trong (2.2) có dạng

$$z^{k+1} = (1 - \gamma_k(2 + \alpha_k))z^k + \gamma_k(U^k z^k + V^k z^k). \tag{2.28}$$

Sử dụng phương pháp (2.28) với

$$\beta_i = \eta_i = 1/(i(i+1)),\ \alpha_k = 1/(k+1)^{1/8},\ \gamma_k = 1/(k+1)^{1/2}$$

và điểm bắt đầu $x^1 = (-3.0; 3.0)$, ta có được kết quả cho trong Bảng 2.1.

Bảng 2.1: Kết quả số của Ví dụ 2.1 sử dụng (2.28)

k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}	k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}
10	-0.0072951049	-0.0123790731	60	-0.0000003749	-0.0000006109
20	-0.0003743916	-0.0006192857	70	-0.0000001070	-0.0000001742
30	-0.0000421668	-0.0000692232	80	-0.0000000337	-0.0000000548
40	-0.0000070196	-0.0000114815	90	-0.0000000115	-0.0000000187
50	-0.0000014904	-0.0000014325	100	-0.0000000042	-0.0000000068

Ví dụ 2.2. Trong ví dụ thứ hai, luận án sử dụng $C_i, \beta_i, \eta_j, R_j, \gamma_k, \alpha_k$ và điểm bắt đầu x^1 giống như trong Ví dụ 2.1. Ở đây, luận án xét bài toán trong trường hợp $Q_j = \{y \in \mathbb{E}^3 : \|y - a^j\| \le 1\}$ với $a^j = (1/(j+1); 1/(j+1); 1/(j+1))$ và A là ma trận cỡ 3×2 với $a_{i1} = 1$, $i = 1, 2, 3$, các phần tử còn lại bằng 0. Khi đó, $x_* = (0; 0)$ là nghiệm duy nhất có chuẩn nhỏ nhất. Kết quả tính toán khi dùng phương pháp (2.11) với các ánh xạ được định nghĩa trong (2.2) được trình bày trong Bảng 2.2.

Nhận xét 2.1.3. Tương tự, trong trường hợp $m = n = 2$ và A là ma trận đơn vị, phương pháp (2.25) của Nguyễn Bường và các cộng sự [22] với ánh xạ được định nghĩa như (2.3) có dạng

$$x^{k+1} = U^k((1 - \gamma_k(1 + \alpha_k))x^k + \gamma_k V^k x^k). \tag{2.29}$$

Sử dụng phương pháp (2.29) với $\gamma_k = 1/(1.05 + (1/k))$, $\alpha_k = 1/k$, thỏa mãn điều kiện (α) và dữ liệu tương tự như trên, ta có kết quả trong các Bảng 2.3 và 2.4 [22].

Bảng 2.2: Kết quả tính toán Ví dụ 2.2 theo công thức (2.11)

k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}	k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}
10	-0.0067281333	-0.0450293607	60	-0.0000189750	-0.0000189751
20	-0.0025241606	-0.0026043616	70	-0.0000078161	-0.0000078161
30	-0.0005405073	-0.0005415133	80	-0.0000034561	-0.0000034561
40	-0.0001513849	-0.0001514139	90	-0.0000016184	-0.0000016184
50	-0.0000504382	-0.0005043396	100	-0.0000007947	-0.0000007947

Bảng 2.3: Kết quả của Ví dụ 2.1 được tính theo công thức (2.29)

k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}
1	0.0243902439	0.3658536585	100	0.0012390505	0.0083945251
10	0.0102553274	0.0694794968	500	0.0002695347	0.0018260888
20	0.0055344982	0.0374960376	1000	0.0001394192	0.0009445606
30	0.0038180428	0.0258671112	2000	0.0000720824	0.0004883558
40	0.0029249862	0.0198166827	3000	0.0000489994	0.0000331969

So sánh các kết quả minh họa trong Bảng 2.1, 2.2 với Bảng **??**, 2.4 ta thấy rằng cả hai phương pháp của luận án đề xuất đều hiệu quả. Hơn nữa, phương pháp hiệu chỉnh lặp của luận án hội tụ nhanh hơn các kết quả của Nguyễn Bường và các cộng sự trong [22].

Ví dụ 2.3. Xét trường hợp

$$a_{11} = 0.1, a_{12} = 0.2, a_{21} = 0.2,$$
$$a_{22} = 0.4, a_{31} = a_{32} = 0,$$

trong Ví dụ 2.2, có nhiều nghiệm, bao gồm cả điểm không, là nghiệm có chuẩn cực tiểu bởi vì $x^+ = 0$. Các kết quả số tính bởi phương pháp (2.11) với ánh xạ được định nghĩa trong (2.2) với dữ liệu tương tự như trên, ta được kết quả cho trong Bảng 2.5.

Nhận xét 2.1.4. Bảng 2.2 và Bảng 2.5 chỉ ra rằng, với ví dụ có nghiệm duy

Bảng 2.4: Kết quả của Ví dụ 2.2 được tính theo công thức (2.25)

k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}
1	0.6019388274	1.5365833659	100	0.0142047415	0.0363009852
10	0.1176994981	0.3004546610	500	0.0030934268	0.0078966734
20	0.0635189516	0.1621465290	1000	0.0016001024	0.0040846244
30	0.0438193443	0.1118588139	2000	0.0008272834	0.0021118284
40	0.0356981140	0.0856945566	3000	0.0005623615	0.0014355553

Bảng 2.5: Kết quả của Ví dụ 2.3 tính theo công thức (2.11)

k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}	k	z_1^{k+1}	z_2^{k+1}
10	-0.0420263650	-0.0420003267	60	-0.0000380359	-0.0000380359
20	-0.0051177476	-0.0051176931	70	-0.0000156676	-0.0000156667
30	-0.0010841787	-0.0010841781	80	-0.0000069279	-0.0000069279
40	-0.0003034753	-0.0003034753	90	-0.0000032440	-0.0000032440
50	-0.0001011055	-0.0001011055	100	-0.0000015929	-0.0000012929

nhất hoặc nhiều nghiệm, phương pháp (2.11) với ánh xạ xác định bởi (2.2) luôn cho kết quả hội tụ tốt. Hơn nữa, nếu bài toán có nghiệm duy nhất, thì phương pháp đề xuất của luận án trong mục này cho kết quả tốt hơn so với kết quả trong [22].

2.2. Bài toán trùng tách đa tập

Để tiện theo dõi, chúng tôi phát biểu lại bài toán MSSEP đã được giới thiệu ở phần Mở đầu.

Cho H_1, H_2 và H_3 là các không gian Hilbert thực, $A : H_1 \to H_3$ và $B : H_2 \to H_3$ là hai ánh xạ bị chặn. Lấy J_1, J_2 là hai tập chỉ số, $\{C_i\}_{i\in J_1}$ và $\{Q_j\}_{j\in J_2}$ là hai họ tập con lồi, đóng trong H_1 và H_2 tương ứng. Bài toán MSSEP được phát biểu như sau: tìm điểm $z = [x, y]$,

$$x \in C := \bigcap_{i \in J_1} C_i \text{ và } y \in Q := \bigcap_{j \in J_2} Q_j \text{ sao cho } Ax = By. \tag{MSSEP}$$

Ký hiệu tập nghiệm của bài toán (MSSEP) là Ω. Giả thiết rằng Ω khác rỗng. Ở Chương 1, chúng ta đã phân tích phương pháp lặp của Chen và các cộng sự [36] xấp xỉ nghiệm bài toán (MSSEP) trong trường hợp $J_1 = J_2 = \mathbb{N}_+$ với dãy lặp

$$z^{k+1} = t_k z^k + \alpha_k \tilde{f}(z^k) + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{k,i} P_{S_i}(I - \lambda_{k,i} G^* G) z^k, \ k \geq 1,$$

ở đây, $\tilde{f}$ là ánh xạ co trong không gian Hilbert $H = H_1 \times H_2$, $S_i = C_i \times Q_i$, $G = [A - B]$, G^* là toán tử liên hợp của G. Trong phương pháp này, ta nhận thấy ở mỗi bước lặp ta phải tính toán các tổng vô hạn. Việc tính toán các tổng vô hạn sẽ gặp khó khăn trong quá trình tính toán. Phương pháp được đề xuất trong luận án này đã khắc phục được hạn chế nêu trên. Cụ thể, luận án đề xuất một phương pháp hiệu chỉnh lặp, một mở rộng của phương pháp (0.6) được giới thiệu bởi Bakushinsky và Bruck để xấp xỉ nghiệm bài toán (MSSEP).

2.2.1. Phương pháp hiệu chỉnh lặp kiểu Bakushinsky–Bruck

Mở rộng phương pháp hiệu chỉnh lặp (0.6) của Bakushinsky và Bruck [19, 20] giải bài toán (MSSEP) trong các không gian Hilbert vô hạn chiều, luận án đề xuất dãy lặp sau đây: xuất phát từ xấp xỉ đầu $z^1 \in H$ tùy ý, các xấp xỉ tiếp theo được xác định bởi:

$$z^{k+1} = U_k T_{\gamma_k, t_k} z^k, \tag{2.30}$$

ở đây,

$$U_k = \frac{1}{\tilde{\beta}_k} \sum_{i=1}^{k} \beta_i P_{S_i}, \ T_{\gamma_k, t_k} = I - \gamma_k [G^* G + t_k I], \tag{2.31}$$

γ_k, t_k, β_i là các tham số dương và $\tilde{\beta}_k = \beta_1 + \cdots + \beta_k$.

Nhận xét 2.2.1. Trong phương pháp đề xuất mới này, ta nhận thấy, các bước tính toán chỉ phải thực hiện trên các tổng hữu hạn, do đó, kết quả này tốt hơn một số phương pháp đã được đề xuất trước đó do việc tính toán ở mỗi bước lặp dễ dàng hơn.

Giả sử các tham số γ_k, t_k, β_i thỏa mãn với các điều kiện:

(t) $t_k \in (0,1)$ với mọi k, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ và $\sum\limits_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$,

(β) $\beta_i > 0$ với mọi i và $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i = 1$,

(γ) $\gamma_k \in (0, 2/(\|A\|^2 + t_k))$, $\lim\inf\limits_{k\to\infty} \gamma_k > 0$ và $\lim\limits_{k\to\infty}(\gamma_{k+1} - \gamma_k) = 0$.

Để chứng minh cho sự hội tụ mạnh của dãy lặp trên, trước hết, chúng ta chứng minh một số bổ đề sau.

Bổ đề 2.2.1. *Cho H_1, H_2 và H_3 là các không gian Hilbert thực và cho các ánh xạ $A : H_1 \to H_3$, $B : H_2 \to H_3$ là tuyến tính bị chặn. Khi đó, với hằng số $\gamma \in (0, 2/(\|G\|^2+2\alpha))$, ở đây, $G = [A - B] : H \to H$, ánh xạ $T_{\gamma,t} := I - \gamma[G^*G + tI]$ là ánh xạ co với hệ số co $1 - \gamma t$, $t \in (0,1)$. Khi $t = 0$, thì $T_\gamma := I - \gamma G^*G$ là ánh xạ không giãn, trong đó $H = H_1 \times H_2$.*

Chứng minh. Thật vậy, dễ thấy rằng

$$\begin{aligned}\|T_{\gamma,t}u - T_{\gamma,t}v\|^2 =& (1-\gamma t)^2\|u-v\|^2 + \gamma^2\|G^*Gu - G^*Gv\|^2 \\ & - 2\gamma(1-\gamma t)\langle G^*Gu - G^*Gv, u - v\rangle \\ \le& (1-\gamma t)^2\|u-v\|^2 + \gamma^2\|G^*\|^2\|Gu - Gv\|^2 \\ & - 2\gamma(1-\gamma t)\|Gu - Gv\|^2 \\ \le& \ (1-\gamma t)^2\|u-v\|^2,\end{aligned}$$

bởi vì $2\gamma(1-\gamma t)/\|G\|^2 \ge \gamma^2$ và $\|G\| = \|G^*\|$. Từ đó, $T_{\gamma,t}$ là một ánh xạ co. Rõ ràng, T_γ là ánh xạ không giãn khi $t = 0$. □

Bổ đề 2.2.2. *Cho H là không gian Hilbert và G là ánh xạ tuyến tính bị chặn trên H. Khi đó, $\mathrm{Zer}G := \{z \in H \mid Gz = 0\} = \mathrm{Fix}(T_\gamma)$ ở đây T_γ được xác định như trong Bổ đề 2.2.1 với số thực dương γ.*

Chứng minh. Rõ ràng nếu $p \in \mathrm{Zer}G$ thì $p \in \mathrm{Fix}(T_\gamma)$ với mọi số thực dương γ.

Ngược lại, nếu $z \in \mathrm{Fix}(T_\gamma)$ thì $Gz = 0$. Lấy một điểm $p \in \mathrm{Zer}G$. Từ $z \in \mathrm{Fix}(T_\gamma)$ và $p \in \mathrm{Zer}G$, ta có $G^*Gz = 0$ và $Gp = 0$, tương ứng. Hơn nữa, từ

Bổ đề 2.2.1, tính chất G và đẳng thức cuối ta suy ra

$$\begin{aligned}\|z-p\|^2 &= \|T_\gamma z - T_\gamma p\|^2 \\ &= \|z-p\|^2 + \gamma^2\|G^*Gz - G^*Gp\|^2 \\ &\quad - 2\gamma\langle G^*Gz - G^*Gp, z-p\rangle \\ &= \|z-p\|^2 - 2\gamma\|Gz\|^2.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Suy ra $Gz = 0$ với $\gamma > 0$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2.2.3. *Tập nghiệm Ω của bài toán* (MSSEP) *trùng với tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân*

$$\textit{Tìm } z_* \in S \textit{ sao cho } \langle Tz_*, z - z_*\rangle \geq 0 \ \forall z \in S, \tag{VIP}$$

với $T = G^*G$.

Chứng minh. Dễ thấy rằng, nếu $z \in \Omega$ thì z là một nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP).

Ngược lại, nếu z_* là một nghiệm của bài toán (VIP) thì $z_* \in S$, tức là, $x_* \in C$ và $y_* \in Q$ và

$$\langle Gz_*, Gz_* - Gz\rangle \leq 0 \text{ với mọi } z = [x, y] \in S.$$

Với $\tilde{z} \in \Omega$, ta có $G\tilde{z} = 0$ (xem, [57]), vì vậy, từ bất đẳng thức cuối với z được thay bởi $\tilde{z}$, ta có $Gz_* = 0$. Kết hợp với $x_* \in C$ và $y_* \in Q$ suy ra $z_* \in \Omega$. □

Bây giờ ta sẽ đưa ra định lý hội tụ mạnh của phương pháp đề xuất.

Định lý 2.2.1. *Cho H_1, H_2, H_3, A và B như trong Bổ đề 2.2.1. Cho C_i và Q_j, với mỗi $i \in J_1$ và mỗi $j \in J_2$ với $J_1 = J_2 = \mathbb{N}_+$, là các tập con lồi, đóng trong H_1 và H_2 tương ứng. Giả sử các điều kiện* (γ), (β) *và* (t) *được thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{z^k\}$ xác định bởi* (2.30) *và* (2.31)*, khi $k \to \infty$, hội tụ mạnh tới một nghiệm của bài toán* MSSEP*.*

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh $\{z^k\}$ xác định bởi (2.30) và (2.31) là bị chặn. Thật vậy, với điểm $z = [x, y] \in \Omega$, ta có $x \in C_i$, $y \in Q_j$ với mọi $i, j \in \mathbb{N}_+$

và $Ax = By$. Khi đó, dễ thấy rằng $U_k z = z$, $Gz = 0$ ở đây $G = [A - B]$ và từ Bổ đề 2.2.2, ta có

$$z = T_{\gamma_k} z = P_{S_i} T_{\gamma_k} z, \text{ với mọi } k, i \in \mathbb{N}_+. \tag{2.33}$$

Do đó, từ tính không giãn của ánh ánh xạ U_k và Bổ đề 2.2.1, suy ra

$$\begin{aligned} \|z^{k+1} - z\| &= \|U_k T_{\gamma_k, t_k} z^k - U_k T_{\gamma_k} z\| \\ &\leq \|T_{\gamma_k, t_k} z^k - T_{\gamma_k} z\| \\ &= \|T_{\gamma_k, t_k} z^k - T_{\gamma_k, t_k} z + \gamma_k t_k z\| \\ &\leq (1 - \gamma_k t_k)\|z^k - z\| + \gamma_k t_k \|z\| \\ &\leq \max\{\|z^1 - z\|, \|z\|\}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Suy ra, dãy $\{z^k\}$ bị chặn. Khi đó, tồn tại hằng số $\widetilde{M} > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} \sup_{k\geq 1}\{\|z^k\|, \|z^{k+1} - z\|^2\} &\leq \|T_{\gamma_k, t_k} z^k - T_{\gamma_k} z\|^2 \\ &= \|T_{\gamma_k} z^k - T_{\gamma_k} z\|^2 + (\gamma_k t_k)^2 \|z^k\|^2 \\ &\quad - 2\gamma_k t_k \langle T_{\gamma_k} z^k - T_{\gamma_k} z, z^k\rangle \\ &= \|z^k - z\|^2 - 2\gamma_k \langle Gz^k, Gz^k\rangle + \gamma_k^2 \|G^* G z^k\|^2 \\ &\quad + (\gamma_k t_k)^2 \|z^k\|^2 - 2\gamma_k t_k \langle T_{\gamma_k} z^k - T_{\gamma_k} z, z^k\rangle \\ &\leq \|z^k - z\|^2 - 2\gamma_k \|Gz^k\|^2 + \gamma_k^2 \|G^*\|^2 \|Gz^k\|^2 \\ &\quad + (\gamma_k t_k)^2 \|z^k\|^2 - 2\gamma_k t_k \langle T_{\gamma_k} z^k - T_{\gamma_k} z, z^k\rangle \\ &\leq \|z^k - z\|^2 - \gamma_k (2 - \gamma_k \|G\|^2)\|Gz^k\|^2 \\ &\quad + (\gamma_k t_k)^2 \widetilde{M}^2 + 2\gamma_k t_k \widetilde{M}^2. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Hơn nữa, vì U_k là ánh xạ không giãn, nên

$$\begin{aligned} \|z^{k+1} - U_k z^k\| &= \|U_k T_{\gamma_k, t_k} z^k - U_k z^k\| \\ &\leq \|T_{\gamma_k, t_k} z^k - z^k\| \leq \gamma_k \|G^*\| \|Gz^k\| + \gamma_k t_k \widetilde{M}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Từ tính chất của phép chiếu mêtric P_{S_i} (Mệnh đề 1.1.1) với $u = \tilde{z}^k := T_{\gamma_k, t_k} z^k$, ta có thể viết

$$\|\tilde{z}^k - P_{S_i}\tilde{z}^k\|^2 + \|P_{S_i}\tilde{z}^k - z\|^2 \leq \|\tilde{z}^k - z\|^2,$$

và vì vậy,

$$\sum_{i=1}^{k} (\beta_i/\tilde{\beta}_k)\|\tilde{z}^k - P_{S_i}\tilde{z}^k\|^2 + \sum_{i=1}^{k} (\beta_i/\tilde{\beta}_k)\|P_{S_i}\tilde{z}^k - z\|^2 \leq \|\tilde{z}^k - z\|^2.$$

Vì hàm $\|.\|^2$ là hàm lồi trên H, nên từ bất đẳng thức cuối ta suy ra

$$\Big\|\sum_{i=1}^{k}(\beta_i/\tilde{\beta}_k)(\tilde{z}^k - P_{S_i}\tilde{z}^k)\Big\|^2 + \Big\|\sum_{i=1}^{k}(\beta_i/\tilde{\beta}_k)(P_{S_i}\tilde{z}^k - z)\Big\|^2 \le \|\tilde{z}^k - z\|^2.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}\|T_{\gamma_k,t_k}z^k - z^{k+1}\|^2 + \|z^{k+1} - z\|^2 &\le \|T_{\gamma_k,t_k}z^k - z\|^2\\ &= \|T_{\gamma_k}z^k - T_{\gamma_k}z - \gamma_k t_k z^k\|^2\\ &= \|T_{\gamma_k}z^k - T_{\gamma_k}z\|^2 - 2\gamma_k t_k\langle T_{\gamma_k}z^k - T_{\gamma_k}z, z^k\rangle\\ &\quad + (\gamma_k t_k)^2\|z^k\|^2\\ &\le \|z^k - z\|^2 + 2\gamma_k t_k\widetilde{M}^2 + (\gamma_k t_k)^2\widetilde{M}^2.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}\|T_{\gamma_k,t_k}z^k - z^{k+1}\|^2 = \|z^k - z^{k+1}\|^2 + \|\gamma_k t_k z^k + \gamma_k G^*Gz^k\|^2\\ - 2\langle\gamma_k t_k z^k + \gamma_k G^*Gz^k, z^k - z^{k+1}\rangle.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Do U_k là ánh xạ không giãn, P_{S_i} là ánh xạ không giãn tiệm cận với (2.33), $\|u\|^2$ là hàm lồi và T_{γ_k,t_k} là ánh xạ co với hệ số co $1 - \gamma_k t_k$, nên

$$\begin{aligned}\|z^{k+1} - z\|^2 =& \|U_kT_{\gamma_k,t_k}z^k - U_kP_{S_i}T_{\gamma_k}z\|^2\\ \le& \sum_{i=1}^{k}(\beta_i/\tilde{\beta}_k)\|P_{S_i}T_{\gamma_k,t_k}z^k - P_{S_i}T_{\gamma_k}z\|^2\\ \le& \langle T_{\gamma_k,t_k}z^k - T_{\gamma_k}z, z^{k+1} - z\rangle\\ =& \langle T_{\gamma_k,t_k}z^k - T_{\gamma_k,t_k}z, z^{k+1} - z\rangle + \gamma_k t_k\langle z, z - z^{k+1}\rangle\\ \le& (1 - \gamma_k t_k)\|z^k - z\|\|z^{k+1} - z\| + \gamma_k t_k\langle z, z - z^{k+1}\rangle\\ \le& \frac{1 - \gamma_k t_k}{2}\|z^k - z\|^2 + \frac{1}{2}\|z^{k+1} - z\|^2 + \gamma_k t_k\langle z, z - z^{k+1}\rangle.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Suy ra,

$$\|z^{k+1} - z\|^2 \le (1 - \gamma_k t_k)\|z^k - z\|^2 + 2\gamma_k t_k\langle z, z - z^{k+1}\rangle. \tag{2.40}$$

Ta xét hai trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho $\|z^{k+1} - z\| \le \|z^k - z\|$ với mọi $k \ge k_0$. Do đó, $\lim\limits_{k\to\infty}\|z^k - z\|$ tồn tại. Như vậy, từ (2.35) suy ra rằng, tồn tại

$\lim_{k\to\infty} \|z^k - z\|$ và điều kiện (α),

$$\limsup_{k\to\infty} \gamma_k(2 - \gamma_k\|G\|^2)\|Gz^k\|^2 = 0. \tag{2.41}$$

Từ điều kiện (γ), ta có

$$\gamma_k(2 - \gamma_k\|G\|^2) \geq \gamma_k(2 - (2\|G\|^2/(\|G\|^2 + 2)) \geq 4\varepsilon_0/(\|G\|^2 + 2). \tag{2.42}$$

Điều này cùng với (2.41) suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \|Gz^k\|^2 = 0. \tag{2.43}$$

Hơn nữa, theo (2.36), (2.43) và $t_k \to 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \|z^{k+1} - U_k z^k\| = 0. \tag{2.44}$$

Tiếp theo, từ sự tồn tại của giới hạn $\lim_{k\to\infty} \|z^k - z\|$, (2.37) và $t_k \to 0$, ta có

$$\lim_{k\to\infty} \|T_{\gamma_k,t_k} z^k - z^{k+1}\| = 0. \tag{2.45}$$

Từ

$$\|\gamma_k t_k z^k + \gamma_k G^* G z^k\| \leq \gamma_k t_k \|z^k\| + \gamma_k \|G^*\| \|Gz^k\|,$$

kết hợp (2.43) và điều kiện $(\mathbf{t})$ ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty} \|\gamma_k t_k z^k + \gamma_k G^* G z^k\| = 0. \tag{2.46}$$

Vì vậy, từ tính bị chặn của dãy $\{z^k\}$, ta có

$$\lim_{k\to\infty} \langle \gamma_k t_k z^k + \gamma_k G^* G z^k, z^k - z^{k+1}\rangle = 0. \tag{2.47}$$

Từ (2.38), (2.45), (2.46), (2.47), ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty} \|z^{k+1} - z^k\| = 0. \tag{2.48}$$

Từ dãy $\{z^k\}$ và $\{\gamma_k\}$ bị chặn, không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng tồn tại một dãy con $\{k_l\}$ của $\{k\}$ sao cho $\{z^{k_l}\}$ hội tụ yếu tới $\tilde{z} \in H$ và $\gamma_{k_l} \to \tilde{\gamma} \in [\varepsilon_0, 2/(\|G\|^2 + 2)]$ khi $l \to \infty$. Ta sẽ chứng minh $\tilde{z} \in \Gamma$. Thật vậy, sử dụng [63] và Bổ đề 2.2.2, chứng tỏ rằng $\tilde{z} \in \mathrm{Fix}(U_\infty) \cap \mathrm{Fix}(T_{\tilde{\gamma}})$, ở đây,

$U_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i P_{S_i}$. Trước hết, ta chứng minh rằng $\tilde{z} \in \mathrm{Fix}(U_\infty)$. Thật vậy, từ (2.44) và (2.48) suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \|z^k - U_k z^k\| = 0. \tag{2.49}$$

Tiếp theo, do

$$\overline{U}_n u := \sum_{i=1}^{n} \beta_i P_{S_i} u \to U_\infty u = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i P_{S_i} u \text{ khi } n \to \infty,$$

với mọi $u \in H$ (xem [63]), nên ta có thể viết:

$$\begin{aligned}
\|\overline{U}_k u - U_\infty u\| &= \lim_{n\to\infty} \|\overline{U}_k u - \overline{U}_n u\| \\
&\le \sum_{n=k}^{\infty} \|\overline{U}_{n+1} u - \overline{U}_n u\| = \sum_{n=k}^{\infty} \beta_{n+1} \|P_{S_{n+1}} u\| \\
&\le \sum_{n=k}^{\infty} \beta_{n+1} (\|u - z\| + \|z\|),
\end{aligned} \tag{2.50}$$

ở đây, z là một điểm trong Ω.

Ngược lại, sử dụng điều kiện (β), $\overline{U}_k u \to U_\infty u$ khi $k \to \infty$ với mọi $u \in H$ và vì vậy, $U_k u \to U_\infty u$ khi $k \to \infty$ với mọi $u \in H$, bởi vì $\tilde{\beta}_k \to 1$ khi $k \to \infty$ và $U_k u = (1/\tilde{\beta}_k)\overline{U}_k u$. Vì vậy, với mọi $\varepsilon > 0$ và một điểm $u' \in H$ tồn tại số nguyên $l_\varepsilon(u') > 0$ sao cho $\|U_{k_l} u' - U_\infty u'\| < \varepsilon$ với mọi số nguyên $k_l \ge l_\varepsilon(u')$. Do đó, với mọi $k_l \ge l_\varepsilon(u')$, ta nhận được

$$\begin{aligned}
\sup_{u\in D} \|U_{k_l} u - U_\infty u\| &\le \sup_{u\in D_1} \|U_{k_l} u - U_\infty u\| \\
&= \|U_{k_l} u' - U_\infty u'\| < \varepsilon,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

với điểm tùy ý $u' \in D_1$, tập con bị chặn H sao cho $D \subseteq D_1$. Hơn nữa, lấy $D = \{z^{k_l}\}$, ta có

$$\lim_{l\to\infty} \|U_{k_l} z^{k_l} - U_\infty z^{k_l}\| = 0. \tag{2.52}$$

Như vậy, từ (2.49), (2.52) và

$$\|z^{k_l} - U_\infty z^{k_l}\| \le \|z^{k_l} - U_{k_l} z^{k_l}\| + \|U_{k_l} z^{k_l} - U_\infty z^{k_l}\|,$$

suy ra $\|z^{k_l} - U_\infty z^{k_l}\| \to 0$. Khi đó, theo Bổ đề 2.2.2, $\tilde{z} \in \mathrm{Fix}(U_\infty)$. Tiếp theo, ta chứng minh rằng $\tilde{z} \in \mathrm{Fix}(T_{\tilde{\gamma}})$. Thật vậy, từ (2.45) và (2.48), ta có được

$$\lim_{k\to\infty} \|z^k - T_{\gamma_k, t_k} z^k\| = 0,$$

cùng với (2.43),

$$\begin{aligned}\|z^{k_l} - T_{\tilde{\gamma}} z^{k_l}\| &\le \|z^{k_l} - T_{\gamma_{k_l}, t_{k_l}} z^{k_l}\| + \|T_{\gamma_{k_l}, t_{k_l}} z^{k_l} - T_{\tilde{\gamma}} z^{k_l}\| \\ &\le \gamma_{k_l} \|G^* G z^{k_l}\| + \|T_{\gamma_{k_l}} z^{k_l} - T_{\tilde{\gamma}} z^{k_l}\| + \gamma_{k_l} t_{k_l} \|z^{k_l}\| \\ &\le \gamma_{k_l} \|G^*\| \|G z^{k_l}\| + |\gamma_{k_l} - \tilde{\gamma}| \widetilde{M} + \gamma_{k_l} t_{k_l} \widetilde{M},\end{aligned} \tag{2.53}$$

và từ giả thiết suy ra rằng $\|z^{k_l} - T_{\tilde{\gamma}} z^{k_l}\| \to 0$. Từ kết quả Bổ đề 1.1.1, ta có $\tilde{z} \in \mathrm{Fix}(T_{\tilde{\gamma}})$. Tương tự, ta thấy rằng mọi dãy con hội tụ yếu của $\{z^k\}$ đều hội tu yếu tới nghiệm của Bài toán (MSSEP). Tiếp theo, do Bổ đề 2.2.3, ta chứng minh rằng $\{z^k\}$ hội tụ mạnh tới nghiệm có chuẩn cực tiểu z_* của bài toán (VIP). Ta khẳng định rằng

$$\limsup_{k\to\infty} \langle z_*, z_* - z^k \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle z_*, z_* - z^{k_m} \rangle = \langle z_*, z_* - \tilde{z} \rangle \le 0, \tag{2.54}$$

ở đây z_* là nghiệm có chuẩn cực tiểu của bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP). Cuối cùng, sử dụng (2.40) với z được thay bởi z_*, (2.54) và Bổ đề 1.1.6, ta khẳng định rằng $\|z^k - z_*\| \to 0$ khi $k \to \infty$.

Trường hợp 2: Tồn tại dãy con $\{k_l\}$ của dãy $\{k\}$ sao cho $\|z^{k_l} - z\| < \|z^{k_l+1} - z\|$ với mọi $l \in \mathbb{N}_+$. Vì vậy, do Bổ đề 1.1.3, tồn tại dãy không giảm $\{m_k\} \subseteq \mathbb{N}_+$ sao cho $m_k \to \infty$,

$$\begin{aligned}&\|z^{m_k} - z\| \le \|z^{m_k+1} - z\| \\ &\|z^k - z\| \le \|z^{m_k+1} - z\| \text{ với mỗi } k \in \mathbb{N}_+.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Khi đó, từ $\{z^k\}$ là dãy bị chặn, tồn tại $\lim\limits_{k\to\infty} \|z^{m_k} - z\|$ và vì vậy, bằng các lập luận tương tự như trên, ta khẳng định đẳng thức (2.43)-(2.45) và (2.48) với k được thay bởi m_k và mọi điểm giới hạn yếu $\tilde{z}$ của $\{z^{m_k}\}$ thuộc tập Ω. Hơn nữa,

$$\limsup_{k\to\infty} \langle z_*, z_* - z^{m_k+1} \rangle = \langle z_*, z_* - \tilde{z} \rangle \le 0. \tag{2.56}$$

Từ (2.40) và bất đẳng thức đầu tiên trong (2.55) với z được thay bởi z_* suy ra

$$\|z^{m_k} - z_*\|^2 \le 2\langle z_*, z_* - z^{m_k+1} \rangle, \tag{2.57}$$

với mỗi $k \in \mathbb{N}_+$. Theo (2.56) và (2.57),

$$\limsup_{k\to\infty} \|z^{m_k} - z_*\|^2 = 0. \tag{2.58}$$

Tiếp theo, từ (2.48) với k được thay bởi m_k và (2.58), ta có

$$\lim_{k\to\infty} \|z^{m_k+1} - z_*\| \le \lim_{k\to\infty} \|z^{m_k+1} - z^{m_k}\| + \lim_{k\to\infty} \|z^{m_k} - z_*\| = 0, \qquad (2.59)$$

cùng với bất đẳng thức thứ hai trong (2.55) suy ra rằng $\lim_{k\to\infty} \|z^k - z_*\| = 0$. Ta có điều cần chứng minh. □

Trong trường hợp ít nhất một trong hai tập J_1 và J_2 là hữu hạn, ta nhận được các kết quả sau.

Định lý 2.2.2. *Cho H_1, H_2, H_3, A, B như trong Bổ đề 2.2.1, cho C_i và Q_j là các tập con lồi đóng trong H_1 và H_2 tương ứng với $J_1 = \{1, \dots, N\}$, $J_2 = \{1, \dots, M\}$ và $N < M$. Giả sử các điều kiện (γ) và (t) được thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{z^k\}$ được xác định bởi*

$$z^{k+1} = UT_{\gamma_k,t_k} z^k, k \ge 1,\ z^1 \in H,\ U = \sum_{i=1}^{M} \beta_i P_{S_i},$$

hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán MSSEP khi $k \to \infty$, ở đây, $C_i = C_N$, $i = N+1, \dots, M$, $\beta_i > 0$ và $\sum_{i=1}^{M} \beta_i = 1$.

Chứng minh. Đặt $C_i = C_N$ với mọi $i > N$ và $Q_j = Q_M$ với mọi $j > M$, định lý được chứng minh tương tự Định lý 2.2.1. □

Trong trường hợp J_1 hữu hạn, tức là $J_1 = \{1, \cdots, N\}$ và $J_2 = \mathbb{N}_+$, bằng cách đặt $C_i = C_N$, $i = N+1, \dots, \infty$, ta trở lại trường hợp trong Định lý 2.2.1. Trong trường hợp chỉ J_2 là hữu hạn thì tương tự.

Nhận xét 2.2.2. (a) Ta có thể biểu diễn phương pháp (2.30) trong các điều kiện về x và y như sau: với điểm khởi đầu $x^1 \in H_1$ và $y^1 \in H_2$,

$$\begin{cases} v^k = Ax^k - By^k, \\ x^{k+1} = \tilde{U}_k\big((1-\gamma_k t_k)x^k - \gamma_k A^* v^k\big), \\ y^{k+1} = \tilde{V}_k\big((1-\gamma_k t_k)y^k + \gamma_k B^* v^k\big), \end{cases} \qquad (2.60)$$

ở đây $\tilde{U}_k$ được định nghĩa như trong (2.3) và $\tilde{V}_k = (1/\tilde{\beta}_k) \sum_{i=1}^{k} \beta_i P_{Q_i}$.

(b) Có thể sử dụng phương pháp (2.60) với $H_3 = H_2$ và $B = I$ cho bài toán MSSFP với $J_1 = J_2 = \mathbb{N}_+$, ta nhận được phương pháp hiệu chỉnh lặp mới: với điểm xuất phát $x^1 \in H_1$ và $y^1 \in H_2$,

$$\begin{cases} v^k = Ax^k - y^k, \\ x^{k+1} = \tilde{U}_k\big((1-\gamma_k t_k)x^k - \gamma_k A^* v^k\big), \\ y^{k+1} = \tilde{V}_k\big((1-\gamma_k t_k)y^k + \gamma_k v^k\big). \end{cases} \tag{2.61}$$

Với các điều kiện (γ), (β) và (t), dãy $\{x^k\}$ xác định bởi (2.61) hội tụ mạnh tới x_* là nghiệm của bài toán MSSFP khi $k \to \infty$.

Rõ ràng, phương pháp (2.61) khác phương pháp (2.25) với ánh xạ được định nghĩa trong (2.3).

(c) Phương pháp hiệu chỉnh lặp (2.61) cho bài toán SFP có dạng,

$$\begin{cases} v^k = Ax^k - y^k, \\ x^{k+1} = P_C\big((1-\gamma_k t_k)x^k - \gamma_k A^* v^k\big), \\ y^{k+1} = P_Q\big((1-\gamma_k t_k)y^k + \gamma_k v^k\big). \end{cases} \tag{2.62}$$

Ta thấy, phương pháp này khác hoàn toàn với phương pháp của Yao trong [85].

2.2.2. Ví dụ số minh họa

Ta xét bài toán MSSEP trong các không gian Hilbert thực hữu hạn chiều $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{E}^m$, $\mathbb{E}^p$ với $C = \cap_{i=1}^{\infty} C_i$, $Q = \cap_{j=1}^{\infty} Q_j$, ở đây,

$$C_i = \Big\{x \in \mathbb{E}^n \mid \tilde{a}_1^i x_1 + \tilde{a}_2^i x_2 + \cdots + \tilde{a}_n^i \le b_i\Big\},$$

$\tilde{a}_j^i, b_i \in (-\infty; +\infty)$, với $1 \le j \le n$ và $i \in \mathbb{N}_+$ và

$$Q_j = \Big\{y \in \mathbb{E}^m \mid \sum_{l=1}^{m}(y_l - \overline{a}_l^j)^2 \le r_j\Big\},\ r_j > 0,$$

$\overline{a}_l^j \in (-\infty; +\infty)$ với $1 \le l \le m$ và $j \in \mathbb{N}_+$, A và B là các ma trận cấp $p \times n$ và $p \times m$ tương ứng.

Ví dụ 2.4. Xét trường hợp $H_1 = \mathbb{E}^2$, $H_2 = \mathbb{E}^3$ và $H_3 = \mathbb{E}^4$ với $\tilde{a}_1^i = 1/i, \tilde{a}_2^i = -1$ và $b_i = 0$ với mọi $i \geq 1$; $r_j = 1$ và $\overline{a}^j = (1/(j+1); 1/(j+1); 1/(j+1))$ với mọi $j \geq 1$ và

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, dễ thấy rằng $z_* = [x_*, y_*]$, với $x_* = (0; 0)$ và $y_* = (0; 0; 0)$, là nghiệm có chuẩn cực tiểu của bài toán MSSEP với các điều kiện như trên. Sử dụng phương pháp (2.60) với $\gamma_k = 0.05 + 0.05/k$, $\beta_i = 1/(i(i+1))$, $\alpha_k = 1/k$ và một điểm xuất phát $z^1 = [x^1, y^1]$ với $x^1 = (-2.0; -2.0)$, $y^1 = (-2.0; -2.0; -2.0)$, ta có các giá trị của $\|z^k - z_*\| = \sqrt{\|x^k - x_*\|^2 + \|y^k - y_*\|^2}$ được thể hiện trong Bảng 2.6.

Bảng 2.6: Kết quả của Ví dụ 2.4 được tính theo thuật toán (2.60)

k	$\|z^{k+1} - z_*\|$	k	$\|z^{k+1} - z_*\|$
10	0.0126467309	100	0.0000712257
20	0.0011458555	200	0.0000058032
30	0.0006146665	300	0.0000005387
40	0.0004108535	400	0.0000000527
50	0.0002940086	500	0.0000000053

Kết luận

Chương 2 đã đề xuất hai phương pháp hiệu chỉnh lặp xấp xỉ nghiệm bài toán chấp nhận tách đa tập và bài toán trùng tách đa tập, chứng minh sự hội tụ mạnh của các phương pháp đề xuất và đưa ra một số ví dụ số minh họa. Các phương pháp được đề xuất là mới và giải quyết được một khó khăn quan trọng khi thực hiện (khó khăn là phải tính $\|A\|$ và các tổng vô hạn). Kết quả này được minh họa bằng ví dụ cụ thể.

CHƯƠNG 3. PHƯƠNG PHÁP LAI GHÉP ĐƯỜNG DỐC NHẤT VỚI PHƯƠNG PHÁP ISHIKAWA XẤP XỈ NGHIỆM BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

Chương này đề xuất một phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trong trường hợp tập chấp nhận được là tập điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn. Nội dung của Chương được viết thành hai mục. Mục thứ nhất giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân và trình bày một số cải biên của phương pháp đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm cho bài toán này. Mục thứ hai trình bày một đề xuất của tác giả đó là: Phương pháp lai ghép đường dốc nhất với phương pháp Ishikawa xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân, tác giả chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp và đưa ra ví dụ số minh họa. Kết quả của Chương 2 được công bố trong bài báo **[CT1]** trong Danh mục công trình công bố của tác giả luận án.

3.1. Bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert H hoặc không gian Banach E và trình bày phương pháp lai ghép đường dốc nhất với phương pháp Ishikawa giải bài toán này.

3.1.1. Bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert

Cho H là không gian Hilbert; C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong H, cho $T_i : H \to H$, $i = 1, \ldots, N$, là các ánh xạ không giãn trên không gian Hilbert H. Bài toán tìm điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn $\{T_i\}_{i=1}^N$ trong không gian Hilbert H là bài toán:

$$\text{Tìm } p \in H \text{ sao cho } p \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(T_i). \tag{3.1}$$

Cho $F : H \to H$. Bài toán bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá F và tập ràng buộc C trong không gian Hilbert H được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } p_* \in C \text{ sao cho } \langle Fp_*, p_* - p\rangle \leq 0 \ \forall p \in C. \tag{3.2}$$

Nếu F là ánh xạ η-đơn điệu mạnh và L-liên tục Lipschitz với η và L là các số thực dương, thì bài toán bất đẳng thức biến phân (3.2) có nghiệm duy nhất. Ta cũng biết rằng, bài toán này tương đương với phương trình điểm bất động

$$p = P_C(p - \mu Fp), \ \mu > 0.$$

Trong luận án này, xét bài toán bất đẳng thức biến phân trong trường hợp tập ràng buộc C là tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn $T : H \to H$, $C = \mathrm{Fix}(T)$ hoặc tập điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn $T_i : H \to H$, $C = \cap_{i=1}^N \mathrm{Fix}(T_i)$:

$$\text{Tìm } p_* \in \mathrm{Fix}(T) \text{ sao cho } \langle Fp_*, p_* - p\rangle \leq 0, \ \forall p \in \mathrm{Fix}(T). \tag{3.3}$$

hoặc

$$\text{Tìm } p_* \in \bigcap_{i=1}^N \mathrm{Fix}(T_i) \text{ sao cho } \langle Fp_*, p_* - p\rangle \leq 0, \ \forall p \in \bigcap_{i=1}^N \mathrm{Fix}(T_i). \tag{3.4}$$

Lớp bài toán này đóng một vai trò quan trọng trong thực tế, chẳng hạn như bài toán khôi phục tín hiệu, bài toán điều khiển công suất và bài toán tài chính… (xem [64]-[65]). Một trong những phương pháp hữu hiệu giải lớp bài toán này là phương pháp lai ghép đường dốc nhất được Yamada đề xuất năm 2001 [66], với thuật toán được xây dựng như sau:

$$x^{k+1} = \big(I - t_{k+1}\mu F\big)Tx^k, \ k \geq 1, \tag{3.5}$$

xấp xỉ nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân (3.3). Phương pháp này khá hiệu quả khi ánh xạ F thỏa mãn điều kiện đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz vì nó đã khắc phục được khó khăn của việc thực hiện phép chiếu mêtric P_C lên tập con lồi đóng bất kỳ C. Cụ thể, Yamada đã chứng minh được định lý hội tụ mạnh sau.

Định lý 3.1.1. *([66]) Cho $F : H \to H$ là ánh xạ L-liên tục Lipschitz và η-đơn điệu mạnh trên H, $T : H \to H$ là ánh xạ không giãn với $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$ và dãy $\{t_k\}$ thỏa mãn các điều kiện:*

(t') $t_k \in (0, 1]$, *với mọi* $k \geq 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$,

(D3) $\lim\limits_{k\to\infty} [(t_k - t_{k+1})/t_{k+1}^2] = 0$.

Khi đó, với điểm ban đầu tùy ý $x^1 \in H$, dãy lặp $\{x^k\}$ xác định bởi (3.5) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất p_* của bài toán bất đẳng thức biến phân* (3.3).

Để giải bài toán (3.4), Yamada [66] đã xây dựng dãy lặp xoay vòng như sau:

$$\begin{cases} x^1 \in H \\ x^{k+1} = (I - t_{k+1}\mu F)T_{[k+1]}(x^k), \;\; k \geq 1, \end{cases} \tag{3.6}$$

ở đây $[k] = k \bmod N$ là hàm modulo lấy giá trị trong tập $\{1, \ldots, N\}$. Sự hội tụ của phương pháp (3.6) được cho trong định lý sau.

Định lý 3.1.2. *([66]) Cho $F : H \to H$ là ánh xạ L-liên tục Lipschitz và η-đơn điệu mạnh trên H, $T_i : H \to H$, $i = 1, \ldots, N$, là họ hữu hạn các ánh xạ không giãn với $C := \cap_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$ và*

$$C = \mathrm{Fix}(T_1T_2\ldots T_N) = \mathrm{Fix}(T_2T_3\ldots T_NT_1) = \cdots = \mathrm{Fix}(T_NT_1\ldots T_{N-1}). \tag{3.7}$$

Giả sử $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$, dãy $\{t_k\} \in (0, 1]$ thỏa mãn điều kiện **(t')** *và*

(D4') $\lim\limits_{k\to\infty} (t_k/t_{k+N}) = 1$.

Khi đó, với điểm ban đầu tùy ý $x^1 \in H$, dãy lặp $\{x^k\}$ xác định bởi (3.6) hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất p_* của bài toán bất đẳng thức biến phân (3.4).

Năm 2003, Xu và Kim [67] chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp (3.5) và (3.6) nhưng với những điều kiện nhẹ hơn.

Định lý 3.1.3. *([67]) Cho $F : H \to H$ là ánh xạ L-liên tục Lipschitz và η-đơn điệu mạnh trên H, $T : H \to H$ là ánh xạ không giãn với $C := \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$ và dãy $\{t_k\} \in (0, 1]$ thỏa mãn các điều kiện* **(t')** *và*

(D3') $\lim_{k\to\infty}(t_k/t_{k+1}) = 1$.

Khi đó, với điểm ban đầu tùy ý $x^1 \in H$ dãy lặp $\{x^k\}$ xác định bởi (3.5) hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất p_* của bài toán bất đẳng thức biến phân (3.3)*1.*

Nhận xét 3.1.1. (a) Để ý rằng,

(a1) Điều kiện **(D3')** tương đương với điều kiện $\lim_{k\to\infty}[(t_k - t_{k+1})/t_{k+1}] = 0$.

(a2) Điều kiện **(D4')** tương đương với điều kiện $\lim_{k\to\infty}[(t_k - t_{k+N})/t_{k+N}] = 0$.

(b) Có thể thấy, điều kiện **(D3')** yếu hơn điều kiện **(D3)**, hơn nữa điều kiện **(D3')** cho phép lựa chọn dãy tham số $\{1/k\}$ trong khi đó **(D3)** không thỏa mãn.

Năm 2007, Zeng và cộng sự [68] đã đề xuất hai thuật toán lặp tương ứng với các thuật toán (3.5) và (3.6) với tham số μ không phải là hằng số.

$$x^1 \in H, x^{k+1} = (I - t_{k+1}\mu_{k+1}F)T(x^k),\ k \geq 1 \tag{3.8}$$

và

$$x^1 \in H, x^{k+1} = (I - t_{k+1}\mu_{k+1}F)T_{[k+1]}(x^k),\ k \geq 1. \tag{3.9}$$

Điều kiện đặt lên các dãy tham số cũng được cải biên đảm bảo sự hội tụ mạnh của phương pháp (3.8) và (3.9).

Định lý 3.1.4 (xem [68]). *Cho $F : H \to H$ là ánh xạ L-liên tục Lipschitz và η-đơn điệu mạnh trên H, $T : H \to H$ là ánh xạ không giãn với $C = \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\mu_k \in (0, 2\eta/L^2)$ và thỏa mãn các điều kiện sau:*

(C1) $t_k \in (0,1)$ *thỏa mãn điều kiện* $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$,

(C2) $\left|\mu_k - \eta/L^2\right| \leq \sqrt{\eta^2 - aL^2}/L^2$, *với* $a \in (0, \eta^2/L^2)$,

(C3) $\lim_{k\to\infty}(\mu_{k+1} - (t_k/t_{k+1})\mu_k) = 0$.

Khi đó, nếu

$$\limsup_{k\to\infty}\langle Tx^k - x^{k+1}, Tx^k - x^k\rangle \leq 0$$

thì dãy lặp $\{x^k\}$ xác định bởi (3.8) hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất p_* của bài toán bất đẳng thức biến phân (3.3).

Định lý 3.1.5. *([68]) Cho $F : H \to H$ là ánh xạ L-liên tục Lipschitz và η-đơn điệu mạnh trên H, $T_i : H \to H$, $i = 1, \dots, N$ là họ hữu hạn các ánh xạ không giãn với $C := \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$ và thỏa mãn điều kiện (3.7). Giả sử $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$ và thỏa mãn các điều kiện* **(C1)**, **(C2)** *và*

(C3') $\lim_{k\to\infty} (\mu_{k+N} - (t_k/t_{k+N})\mu_k) = 0.$

Khi đó, nếu

$$\limsup_{k\to\infty} \langle T_{[k+N]} \dots T_{[k+1]} x^k - x^{k+N}, T_{[k+N]} \dots T_{[k+1]} x^k - x^k \rangle \leq 0,$$

thì dãy lặp $\{x^k\}$ xác định bởi (3.9) hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất p_* của bài toán bất đẳng thức biến phân (3.4) trên tập $C = \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(T_i)$.

Một số mở rộng hoặc cải biên của phương pháp lai ghép đường dốc nhất được giới thiệu trong những năm gần đây như nghiên cứu của Nguyễn Bường và cộng sự [69, 70] năm 2011, Zhou và Wang năm 2014 ... hoặc xét bài toán (3.4) trong trường hợp tổng quát hơn khi C là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn: Iemoto và Takahashi [71] năm 2008, Yao và cộng sự [72] năm 2010, Wang và cộng sự [73] năm 2011, Nguyễn Bường và cộng sự trong [46], [41] năm 2016 ...

3.1.2. Bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach

Bây giờ ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach. Cho E là không gian Banach, E^* là không gian đối ngẫu của E, C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của E và $F : E \to E$ là một ánh xạ phi tuyến. Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach E được phát biểu như sau: tìm $p_* \in C$ sao cho

$$\langle Fp_*, j(p_* - p) \rangle \leq 0 \quad \forall p \in C, \tag{3.10}$$

ở đây, $\langle x, x^* \rangle$ được dùng thay cho $x^*(x)$ với $x \in E$, $x^* \in E^*$ và j là ánh xạ đối ngẫu của E. Khi E là không gian Hilbert, ánh xạ đối ngẫu j là ánh xạ đơn vị và bài toán (3.10) trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân (3.2) trong không gian Hilbert.

Để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach (3.10) trong trường hợp $C := \mathrm{Fix}(T)$ với $T : E \to E$, Nguyễn Bường và các cộng sự [41] đã đề xuất một phương pháp lặp mới, là sự kết hợp giữa phương pháp đường dốc nhất với phương pháp Krasnoisel'skii–Mann để thiết lập một dãy lặp hội tụ mạnh. Với xấp xỉ ban đầu $x^1 \in E$ tùy ý, các xấp xỉ tiếp theo được xây dựng như sau:

$$x^{k+1} = (I - t_k F)(\alpha_k I + (1 - \alpha_k)T)x^k, \ k \geq 1, \tag{3.11}$$

ở đây $F : E \to E$ là toán tử η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt, tham số t_k thỏa mãn điều kiện (t) và $\alpha_k \in [a, b] \subset (0, 1)$:
Dãy lặp (3.11) bao hàm cả hai dãy lặp được đề xuất bởi Kim và Xu trong [74], Yao cùng cộng sự trong [75].

Bổ đề 3.1.1. *([41]) Cho F là toán tử η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$ trong không gian Banach trơn đều E. Cho $T : E \to E$ là một ánh xạ không giãn sao cho* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$*. Với $k \in (0, 1)$, chọn $\alpha_k \in (a, b) \subset (0, 1)$ và $t_k \in (0, 1)$ tùy ý sao cho $t_k \to 0$ khi $k \to 0$ và y_k được xác định bởi:*

$$y^k = (I - t_k F)T^k y^k, \quad T^k = \alpha_k I + (1 - \alpha_k)T.$$

Khi đó, dãy y^k hội tụ mạnh đến p^* là nghiệm của bài toán (3.10) *với* $C := \mathrm{Fix}(T)$ *khi $k \to 0$.*

Bổ đề 3.1.2. *([41]) Cho E, F và T như trong Bổ đề 3.1.1. Giả sử các tham số t_k và α_k thỏa mãn các điều kiện* **(C1)**, **(C2)** *và* **(C3)**. *Khi đó, nếu dãy $\{x^k\}$ được xác định bởi* (3.11) *là bị chặn và $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^k - Tx^k\| = 0$, thì*

$$\limsup_{k\to\infty} \langle Fp^*, j(p^* - x^k)\rangle \leq 0.$$

Định lý 3.1.6. *([41]) Cho E, F, A, t_k và α_k như trong Bổ đề 3.1.1. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ xác định bởi* (3.11) *hội tụ mạnh đến phần tử p^* là nghiệm của bài toán* (3.10) *với* $C := \mathrm{Fix}(T)$.

Nhận xét 3.1.2. Nếu $F = (1 - a)I$ với $a \in (0, 1)$ là một điểm cố định. Khi đó, ta có thể viết $F = I - f$ với $f = aI$ và $F : E \to E$ là một ánh xạ

η-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt trên E với các số dương η, γ thỏa mãn $\eta + \gamma > 1$. Lấy $\gamma \in [0, 1)$, rõ ràng $\eta + \gamma > 1$ khi $\eta = 1 - a$ và $\gamma \in (a, 1)$ bất kỳ. Thay F bởi $(1 - a)I$ trong (3.11), ta có thuật toán sau:

$$x^{k+1} = (1 - \lambda_k)(\alpha_k I + (1 - \alpha_k)T)x^k, \ k \geq 1, \tag{3.12}$$

ở đây, $\lambda_k = t_k(1 - a)$.

Sự hội tụ mạnh của (3.12) được chứng minh bởi định lý sau:

Định lý 3.1.7. *([41]) Cho $T : E \to E$ là ánh xạ không giãn trên không gian Banach trơn đều hoặc phản xạ và lồi chặt E với chuẩn khả vi Gâteaux đều. Giả thiết rằng t_k và α_k thỏa mãn các điều kiện* **(C1)**, **(C2)** *và* **(C3)**. *Cố định một số $a \in (0, 1)$. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ xác định bởi (3.12) hội tụ mạnh tới một điểm thuộc tập $\mathrm{Fix}(T)$.*

3.2. Phương pháp lai ghép đường dốc nhất với phương pháp Ishikawa xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân

Mục này, luận án trình bày phương pháp lai ghép đường dốc nhất với phương pháp Ishikawa xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn hoặc tập điểm bất động chung của họ ánh xạ không giãn trong không gian Banach.

3.2.1. Bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn

Trong mục này, chúng tôi xét bài toán bất đẳng thức biến phân (3.10) khi $C := \mathrm{Fix}(T)$, tức là bài toán

$$\text{Tìm } p_* \in \mathrm{Fix}(T) \text{ sao cho } \langle Fp_*, j(p_* - p)\rangle \leq 0 \quad \forall p \in \mathrm{Fix}(T). \tag{3.13}$$

Ta xét bài toán (3.13) trong trường hợp E là không gian Banach trơn đều hoặc phản xạ lồi chặt với chuẩn khả vi Gâteaux đều, ánh xạ giá $F : E \to E$ là η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt. Để tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn $T : E \to E$ trên E hoặc tìm nghiệm của lớp bài toán bất đẳng thức biến phân (3.13), luận án kết hợp phương pháp đường dốc nhất với phương pháp Krasnosel'skii–Mann [41] hoặc kết hợp với phương pháp Ishikawa. Dãy lặp được xây dựng như sau: với điểm xấp xỉ ban đầu $x^1 \in E$ tùy ý, các xấp xỉ tiếp theo được xác định bởi

$$x^{k+1} = (I - t_k F)T^k x^k, \ k \geq 1, \tag{3.14}$$

ở đây,

$$T^k = (1 - \beta_k)I + \beta_k T\big[(1 - \alpha_k)I + \alpha_k T\big], \ k \geq 1, \tag{3.15}$$

và các tham số t_k, β_k và α_k thỏa mãn các điều kiện (t) và:

(β**)** $\beta_k \in [a, b] \subset (0, 1)$ với mọi $k \geq 1$,

(α**)** $\alpha_k \in [0, \overline{a}]$, với $\overline{a} \in (0, 1)$, $\forall k \geq 1$ và $\alpha_k \to 0$ khi $k \to \infty$.

Sự hội tụ mạnh của dãy lặp (3.14) được chứng minh trong định lý sau đây.

Định lý 3.2.1. *Cho $F : E \to E$ là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt trên không gian Banach hoặc trơn đều hoặc phản xạ lồi chặt E, có chuẩn khả vi Gâteaux, sao cho $\eta + \gamma > 1$ và $T : E \to E$ là ánh xạ không giãn sao cho* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. *Giả sử t_k, β_k và α_k thỏa mãn các điều kiện* (*t*), (β) *và* (α) *tương ứng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ được xác định bởi (3.14) với T^k được định nghĩa trong (3.15) hội tụ mạnh tới p_* là nghiệm của bài toán* (3.13).

Chứng minh. Từ $T^k p = p$ với mỗi $p \in \mathrm{Fix}(T)$ và $k \geq 1$, theo Bổ đề 1.1.4,

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - p\| &= \|(I - t_k F)T^k x^k - (I - t_k F)T^k p - t_k F p\| \\
&\leq (1 - t_k \tau)\|x^k - p\| + t_k \tau \|Fp\|/\tau \leq \max\Big\{\|x^1 - p\|, \|Fp\|/\tau\Big\},
\end{aligned}$$

ở đây, $\tau = 1 - \sqrt{(1 - \eta)/\gamma}$. Do đó, dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Vì vậy, các dãy $\{Tx^k\}$, $\{Tx^{k+1}\}$, $\{T^k x^k\}$, $\{T^{k+1} x^k\}$, $\{FT^k x^k\}$ và $\{Ty^k\}$ cũng bị chặn, ở đây ta xác định $y^k = (1 - \alpha_k)x^k + \alpha_k T x^k$. Không giảm tính tổng quát, ta giả sử các dãy này bị chặn bởi một hằng số dương M_1. Dễ thấy rằng,

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= t_k (I - F)T^k x^k + (1 - t_k)T^k x^k \\
&= t_k (I - F)T^k x^k + (1 - t_k)\big[(1 - \beta_k)x^k + \beta_k T y^k\big] \\
&= h_k x^k + (1 - h_k)w^k,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

ở đây, $h_k = (1-t_k)(1-\beta_k)$ và

$$w^k = \frac{t_k(I-F)T^kx^k}{1-h_k} + \frac{(1-t_k)\beta_k Ty^k}{1-h_k}.$$

Rõ ràng, từ các điều kiện (t) và (β), ta có

$$0 < \liminf_{k\to\infty} h_k \le \limsup_{k\to\infty} h_k < 1.$$

Tiếp theo, ta có thể viết

$$\begin{aligned}
&\frac{t_{k+1}(I-F)T^{k+1}x^{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{t_k(I-F)T^kx^k}{1-h_k}\\
&= \frac{t_{k+1}}{1-h_{k+1}}\big[(I-F)T^{k+1}x^{k+1} - (I-F)T^{k+1}x^k\big]\\
&\quad + \frac{t_{k+1}}{1-h_{k+1}}\big[(I-F)T^{k+1}x^k - (I-F)T^kx^k\big]\\
&\quad + \left[\frac{t_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{t_k}{1-h_k}\right]\times(I-F)T^kx^k,\\
&\frac{(1-t_{k+1})\beta_{k+1}Ty^{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{(1-t_k)\beta_kTy^k}{1-h_k}\\
&= \frac{(1-t_{k+1})\beta_{k+1}}{1-h_{k+1}}\big[Ty^{k+1} - Ty^k\big]\\
&\quad + \left[\frac{(1-t_{k+1})\beta_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{(1-t_k)\beta_k}{1-h_k}\right]Ty^k.
\end{aligned}$$

Như vậy,

$$\begin{aligned}
\|w^{k+1}-w^k\| &\le \frac{t_{k+1}(1-\tau_1)}{1-h_{k+1}}\big[\|x^{k+1}-x^k\| + 2M_1\big] + \left|\frac{t_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{t_k}{1-h_k}\right|2M_1\\
&\quad + \frac{(1-t_{k+1})\beta_{k+1}}{1-h_{k+1}}\big(\|x^{k+1}-x^k\| + M_1(\alpha_{k+1}+\alpha_k)\big)\\
&\quad + \left|\frac{(1-t_{k+1})\beta_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{(1-t_k)\beta_k}{1-h_k}\right|M_1\\
&= \left[\frac{t_{k+1}(1-\tau_1)}{1-h_{k+1}} + \frac{(1-t_{k+1})\beta_{k+1}}{1-h_{k+1}}\right]\|x^{k+1}-x^k\| + \tilde{c}_k,\\
&= \frac{t_{k+1}(1-\tau_1) + (1-t_{k+1})\beta_{k+1}}{t_{k+1}+\beta_{k+1}-t_{k+1}\beta_{k+1}}\|x^{k+1}-x^k\| + \tilde{c}_k,\\
&\le \|x^{k+1}-x^k\| + \tilde{c}_k,
\end{aligned}$$

ở đây, $\tilde{c}_k$ là tổng các thành phần còn lại và với các điều kiện (t), (β) và (α), $\tilde{c}_k \to 0$ khi $k\to\infty$. Vì vậy,

$$\limsup_{k\to\infty}\big(\|w^{k+1}-w^k\| - \|x^{k+1}-x^k\|\big) \le 0.$$

Từ kết quả của Bổ đề 1.1.7, ta có

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - w^k\| = 0. \tag{3.17}$$

Từ (3.16) và (3.17), suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = \lim_{k\to\infty} (1 - h_k)\|x^k - w^k\| = 0. \tag{3.18}$$

Theo (3.14), $\|x^{k+1} - T^k x^k\| \le t_k M_1 \to 0$, khi $k \to \infty$. Điều này cùng với (3.18) suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - T^k x^k\| = 0. \tag{3.19}$$

Bây giờ, ta chứng minh

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - Tx^k\| = 0. \tag{3.20}$$

Để làm được điều đó, đầu tiên ta chứng minh $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^k - Ty^k\| = 0$. Thật vậy, từ định nghĩa của T^k và y^k, ta suy ra $x^k - T^k x^k = \beta_k(x^k - Ty^k)$ và vì vậy sử dụng điều kiện (β), ta được

$$\|x^k - Ty^k\| \le \|x^k - T^k x^k\|/a,$$

cùng với (3.19) suy ra giới hạn cần chứng minh. Hơn nữa, từ

$$\begin{aligned}\|x^k - Tx^k\| &\le \|x^k - Ty^k\| + \|Ty^k - Tx^k\| \\ &\le \|x^k - Ty^k\| + \|y^k - x^k\| \\ &= \|x^k - Ty^k\| + \|(1-\alpha_k)x^k + \alpha_k Tx^k - x^k\| \\ &= \|x^k - Ty^k\| + \alpha_k\|x^k - Tx^k\|\end{aligned}$$

và α_k thỏa mãn điều kiện (α), $\|x^k - Tx^k\| \le \|x^k - Ty^k\|/(1-\overline{a})$, ta có (3.20). Bây giờ, ta ước lượng giá trị $\|x^{k+1} - p_*\|^2$ như sau:

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - p_*\|^2 &= \|(I - t_k F)T^k x^k - p_*\|^2 \\ &= \|(I - t_k F)T^k x^k - (I - t_k F)T^k p_* - t_k F p_*\|^2 \\ &\le (1 - t_k\tau)\|x^k - p_*\|^2 + 2t_k\tau\langle Fp_*, j(p_* - x^{k+1})\rangle/\tau \\ &= (1 - b_k)\|x^k - p_*\|^2 + b_k c_k,\end{aligned} \tag{3.21}$$

ở đây, p_* là nghiệm của bài toán (3.13) và

$$b_k = t_k\tau,$$
$$c_k = 2\big[\langle Fp_*, j(p_* - x^k)\rangle + \langle Fp_*, j(p_* - x^{k+1}) - j(p_* - x^k)\rangle\big]/\tau.$$

Từ $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$, nên $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$. Vì vậy, từ (3.18), (3.21), Bổ đề 1.1.6 và tính chất của j, suy ra được $\lim_{k\to\infty} \|x^k - p_*\|^2 = 0$. Đây là điều phải chứng minh. □

Nhận xét 3.2.1. (a) Định lý 3.2.1 vẫn có giá trị đối với phương pháp: $y^1 \in E$ là một phần tử bất kỳ và

$$y^{k+1} = T^k(I - t_kF)y^k,\ k \geq 1, \tag{3.22}$$

với các điều kiện tương tự về E, F, T, t_k, β_k và α_k như trong Định lý 3.2.1. Thật vậy, đặt $y^k = T^kx^k$ trong thuật toán (3.14), ta xác định được biểu thức $y^{k+1} = T^{k+1}x^{k+1} = T^{k+1}(I - t_kF)y^k$. Đặt $\beta_k := \beta_{k+1}$ và $\alpha_k := \alpha_{k+1}$, ta khẳng định (3.22).

Hơn nữa, nếu $t_k \to 0$ thì $\{x^k\}$ là hội tụ khi và chỉ khi $\{y^k\}$ cũng hội tụ và giới hạn của chúng trùng nhau. Thật vậy, từ (3.14), suy ra rằng $\|x^{k+1} - y^k\| \leq t_k\|Fy^k\|$. Từ đó, khi $\{x^k\}$ hội tụ, $\{x^k\}$ bị chặn, và vì vậy $\{y^k\}$ bị chặn. Từ đó ta suy ra $\{Fy^k\}$ cũng bị chặn. Từ $t_k \to 0$ khi $k \to \infty$, từ bất đẳng thức cuối và sự hội tụ của $\{x^k\}$ suy ra sự hội tụ của $\{y^k\}$ và giới hạn của hai dãy trùng nhau. Trong trường hợp $\{y^k\}$ hội tụ, ta chứng minh tương tự.

(b) Ta lấy $F = I - f$ với $f = a'I$ và một hằng số cố định $a' \in (0, 1)$. Khi đó, F là một ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt trên E với các hằng số dương η và γ sao cho $\eta + \gamma > 1$. Thật vậy, từ

$$\begin{aligned}\langle Fx - Fy, j(x - y)\rangle &= (1 - a')\|x - y\|^2\\ &= \|x - y\|^2 - \frac{1}{a'}\|a'x - a'y\|^2 = \|x - y\|^2 - \frac{1}{a'}\|fx - fy\|^2\\ &= \|x - y\|^2 - \frac{1}{a'}\|(I - F)x - (I - F)y\|^2\\ &\leq \|x - y\|^2 - \gamma\|(I - F)x - (I - F)y\|^2,\end{aligned}$$

ở đây, $\gamma \in [0, 1)$ là một hằng số cố định. Rõ ràng, $\eta + \gamma > 1$ với $\eta = 1 - a'$ và hằng số $\gamma \in (a', 1)$ cho trước. Thay F bởi $I - f = (1 - a')I$ trong (3.14), ta nhận được thuật toán sau:

$$x^{k+1} = (1 - t'_k)T^k x^k,\ k \geq 1, \tag{3.23}$$

ở đây, $t'_k = t_k(1 - a')$.

Định lý 3.2.2. *Cho T là ánh xạ không giãn trên không gian Banach trơn đều hoặc phản xạ lồi chặt E với chuẩn khả vi Gâteaux đều. Giả sử rằng t_k, β_k và α_k thỏa mãn các điều kiện (t), (β) và (α), tương ứng, hằng số $a' \in (0, 1)$. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ được cho bởi (3.23), hội tụ mạnh tới một điểm bất động của ánh xạ T.*

Nhận xét 3.2.2. (a) Ta xét trường hợp khi T là ánh xạ không giãn trên một tập con lồi đóng Q của E. Rõ ràng, với điểm khởi đầu $x^1 \in Q$, $x^k \in Q$, $T^k x^k \in Q$ với mọi k. Như vậy, nếu tập Q chứa các điểm gốc của E thì $x^{k+1} \in Q$, bởi vì $x^{k+1} = \tau_k T^k x^k$ với $\tau_k = 1 - t'_k \in (0, 1)$. Điều đó có nghĩa là phương pháp (3.23) được xác định với mỗi $x^1 \in Q$, và vì vậy, Định lý 3.2.2 có giá trị trong trường hợp này.

Khi tập Q không chứa điểm gốc của E, ta lấy $f = a'I + (1 - a')u$ với điểm cố định $u \in Q$. Từ đó dễ thấy rằng $F = I - f$ cũng là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt sao cho $\eta + \gamma > 1$. Từ đó, thay cho (3.23), ta có phương pháp Halpern–Ishikawa:

$$\begin{cases} x^1 \in Q, \quad \text{tùy ý}, \\ x^{k+1} = t'_k u + \big(1 - t'_k\big)T^k x^k,\ k \geq 1, \end{cases} \tag{3.24}$$

đó là phương pháp (1.14) với phép đặt $t_k := t'_k$. Rõ ràng, t_k thỏa mãn điều kiện (t) khi và chỉ khi t'_k cũng như vậy. Phương pháp (3.24), theo Định lý 3.2.2, hội tụ mạnh trong không gian Banach trơn đều hoặc phản xạ lồi chặt E, điều đó có nghĩa là phương pháp (1.14) cần các điều kiện mạnh hơn về t_k, β_k và α_k, cần thêm điều kiện (1.15), so với phương pháp đề xuất trong luận án.

(b) Cho $\tilde{a} > 1$ và f là ánh xạ $\tilde{a}$-j đồng bức trên E, tức là,

$$\langle fx - fy, j(x-y)\rangle \geq \tilde{a}\|fx - fy\|^2,\ \forall x, y \in E.$$

Dễ thấy rằng f là một ánh xạ co với hệ số $1/\tilde{a} \in (0,1)$, và vì vậy, $F := I - f$ là một ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh với $\eta = 1 - (1/\tilde{a})$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned}\langle Fx - Fy, j(x-y)\rangle &= \|x-y\|^2 - \langle fx - fy, j(x-y)\rangle\\ &\leq \|x-y\|^2 - \tilde{a}\|fx - fy\|^2\\ &\leq \|x-y\|^2 - \gamma\|(I-F)x - (I-F)y\|^2,\end{aligned}$$

với mỗi $\gamma \in (0, \tilde{a}]$. Với số $\gamma \in ((1/\tilde{a}), \tilde{a}]$ nào đó, ta có F là một ánh xạ γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Tiếp theo, thay thế F bởi $I - f$ trong (3.22), luận án đưa ra một phương pháp xấp xỉ mềm Ishikawa mới:

$$y^{k+1} = T^k(t_k f y^k + (1-t_k)y^k),\ y^1 \in E,\ k \geq 1, \tag{3.25}$$

đây là một cải tiến của (1.14) và khác với (1.16). Rõ ràng, nếu f là một ánh xạ $\tilde{a}$-j-đồng bức trên Q, một tập con lồi đóng của E, thì phương pháp (3.25) cũng xác định với $y^1 \in Q$ nào đó.

Với một ánh xạ α-j-đồng bức f, ta có thể nhận được ánh xạ $\tilde{\alpha}$-j-đồng bức $\tilde{f}$ với $\tilde{\alpha} > 1$ bằng cách xét $\tilde{f} := \beta f$ với hằng số dương $\beta < \alpha$. Thật vậy, $\tilde{\alpha} = \alpha/\beta > 1$ và

$$\begin{aligned}\langle \tilde{f}x - \tilde{f}y, j(x-y)\rangle &= \langle \beta fx - \beta fy, j(x-y)\rangle\\ &\geq \beta\alpha\|fx - fy\|^2 = \tilde{\alpha}\|\tilde{f}x - \tilde{f}y\|^2.\end{aligned}$$

3.2.2. Bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của họ ánh xạ không giãn

Mục này xét bài toán (3.10) trong trường hợp $C = \cap_{i\geq 1}\mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$, với $\{T_i\}$ là họ vô hạn ánh xạ không giãn trên E, tức là

$$\text{Tìm } p_* \in \cap_{i\geq 1}\mathrm{Fix}(T_i) \text{ sao cho } \langle Fp_*, j(p_* - p)\rangle \leq 0 \quad \forall p \in \cap_{i\geq 1}\mathrm{Fix}(T_i). \tag{3.26}$$

Ta định nghĩa T^k như sau:

$$T^k = (1-\beta_k)I + \beta_k W^k\big((1-\alpha_k)I + \alpha_k W^k\big), \tag{3.27}$$

ở đây $\{W^k\}$ là một dãy ánh xạ từ $E \to E$ thỏa mãn các điều kiện:

(*i*) Tồn tại $Wx := \lim\limits_{k\to\infty} W^k x$ với mọi $x \in E$ và nếu $\cap_{i\geq 1}\mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$ thì ta có $\mathrm{Fix}(W) = \cap_{i\geq 1}\mathrm{Fix}(T_i)$,

(*ii*) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup_{x\in B} \|W^k x - Wx\| = 0$ với B là tập con bị chặn.

Nhận xét 3.2.3. Có thể thấy

$$S^k = \sum_{i=1}^{k} t_i T_i/\tilde{t_k},$$

với $\tilde{t_k} = t_1 + \cdots + t_k$ và

$$V^k = T_1' \cdots T_k',$$

ở đây, $T_i' = t_i I + (1-t_i)T_i$ với $t_i \in (0,\infty)$ sao cho $\sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i = \tilde{t} < \infty$ cũng thỏa mãn các điều kiện (*i*) và (*ii*) như W^k.

Luận án đưa ra một phương pháp mới là một mở rộng của kết quả trong [41] xấp xỉ nghiệm bài toán (3.26). Chúng tôi kết hợp phương pháp đường dốc nhất với phương pháp lặp Ishikawa. Một trong các trường hợp riêng của phương pháp mới được đề xuất là phương pháp lặp Halpern.

Định lý 3.2.3. *Cho F là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt trong không gian Banach lồi, hoặc trơn đều hoặc phản xạ E, có chuẩn khả vi Gâteaux, sao cho $\eta + \gamma > 1$ và $\{T_i\}$ là họ vô hạn ánh xạ không giãn trên E sao cho $\cap_{i\geq 1}\mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Giả sử t_k, β_k và α_k tương ứng thỏa mãn các điều kiện* (t), (β) *và* (α)*. Khi đó, dãy lặp $\{x^k\}$ được xác định bởi (3.14) với T^k cho trong (3.27) hội tụ mạnh tới nghiệm p_* của bài toán* (3.26).

Chứng minh. Chứng minh tương tự như Định lý 3.2.1, dãy $\{x^k\}$ được xác định bởi (3.14) và (3.27) là bị chặn. Do đó tồn tại hằng số dương M_2 sao cho các dãy $\{x^k\}$, $\{T^k x^k\}$, $\{T^{k+1}x^k\}$, $\{FT^k x^k\}$, $\{W^k x^k\}$ và $\{W^{k+1}x^k\}$ thuộc $S(0, M_2)$, hình cầu tâm 0 bán kính M_2. Hơn nữa, ta có đẳng thức (3.16) tương tự với h_k, $y^k = (1-\alpha_k)x^k + \alpha_k W^k x^k$ và

$$w^k = \frac{t_k(I-F)T^k x^k}{1-h_k} + \frac{(1-t_k)\beta_k W^k y^k}{1-h_k}.$$

Trong ước lượng giá trị của $\|w^{k+1} - w^k\|$, đầu tiên ta cần tính toán giá trị $\|T^{k+1}x - T^k x\|$ với mỗi $x \in S(0, M_2)$. Đặt $\tilde{y}^k = (1-\alpha_k)x + \alpha_k W^k x$. Dễ dàng kiểm tra được rằng $\tilde{y}^k \in S(0, M_2)$ và $W^k \tilde{y}^k \in S(0, M_2)$ với mỗi $x \in S(0, M_2)$. Từ đó,

$$\begin{aligned}\|T^{k+1}x - T^k x\| &= \|(1-\beta_{k+1})x + \beta_{k+1}W^{k+1}\tilde{y}^{k+1} - ((1-\beta_k)x + \beta_k W^k \tilde{y}^k)\| \\ &\le |\beta_{k+1} - \beta_k|\|x\| + \beta_{k+1}\big(\|\tilde{y}^{k+1} - \tilde{y}^k\| \\ &\quad + \|W^{k+1}\tilde{y}^k - W^k\tilde{y}^k\|\big) + |\beta_{k+1} - \beta_k|\|W^k\tilde{y}^k\|,\end{aligned}$$

ở đây

$$\|\tilde{y}^{k+1} - \tilde{y}^k\| \le |\alpha_{k+1} - \alpha_k|\|x\| + \alpha_{k+1}\|W^{k+1}x - W^k x\| + |\alpha_{k+1} - \alpha_k| M_2.$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}\|T^{k+1}x - T^k x\| \le 2|\beta_{k+1} - \beta_k| M_2 + \beta_{k+1}\big[2|\alpha_{k+1} - \alpha_k| M_2 \\ + \alpha_{k+1}\|W^{k+1}x - W^k x\| + \|W^{k+1}\tilde{y}^k - W^k\tilde{y}^k\|\big].\end{aligned} \tag{3.28}$$

Từ các điều kiện (β) và (α), có thể thấy rằng tồn tại dãy con $\{k_m\}$ của $\{k\}$ sao cho $\beta_{k_m} \to \beta'$ khi $m \to \infty$. Khi đó, $|\beta_{k_m+1} - \beta_{k_m}| \to 0$ và $|\alpha_{k_m+1} - \alpha_{k_m}| \to 0$ khi $m \to \infty$. Bây giờ, thay x và k trong (3.28) bởi x^{k_m} và k_m, tương ứng, và sử dụng điều kiện (ii) với $B = S(0, M_2)$ đối với W^{k_m}, ta có giới hạn

$$\lim_{m\to\infty} \|T^{k_m+1}x^{k_m} - T^{k_m}x^{k_m}\| = 0.$$

Xét biểu thức

$$x^{k_m+1} = h_{k_m}x^{k_m} + (1-h_{k_m})w^{k_m}, \tag{3.29}$$

ở đây, $h_{k_m} = (1-t_{k_m})(1-\beta_{k_m})$ và

$$w^{k_m} = \frac{t_{k_m}(I-F)T^{k_m}x^{k_m}}{1-h_{k_m}} + \frac{(1-t_{k_m})\beta_{k_m}W^{k_m}y^{k_m}}{1-h_{k_m}}.$$

Ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-t_{k_m+1})\beta_{k_m+1}W^{k_m+1}y^{k_m+1}}{1-h_{k_m+1}} - \frac{(1-t_{k_m})\beta_{k_m}W^{k_m}y^{k_m}}{1-h_{k_m}} \\
&= \frac{(1-t_{k_m+1})\beta_{k_m+1}}{1-h_{k_m+1}}\big[W^{k_m+1}y^{k_m+1} - W^{k_m+1}y^{k_m}\big] \\
&\quad + \frac{(1-t_{k_m+1})\beta_{k_m+1}}{1-h_{k_m+1}}\big[W^{k_m+1}y^{k_m} - W^{k}y^{k_m}\big] \\
&\quad + \left[\frac{(1-t_{k_m+1})\beta_{k_m+1}}{1-h_{k_m+1}} - \frac{(1-t_{k_m})\beta_{k_m}}{1-h_{k_m}}\right]W^{k_m}y^{k_m}.
\end{aligned}$$

Do vậy, như trong chứng minh Định lý 3.2.1,

$$\begin{aligned}
\|w^{k_m+1} - w^{k_m}\| &\le \left[\frac{t_{k_m+1}(1-\tau_1)}{1-h_{k_m+1}} + \frac{(1-t_{k_m+1})\beta_{k_m+1}}{1-h_{k_m+1}}\right]\|x^{k_m+1} - x^{k_m}\| + \bar{c}_{k_m} \\
&= \frac{t_{k_m+1}(1-\tau_1) + (1-t_{k_m+1})\beta_{k_m+1}}{1-\beta_{k_m+1} + t_{k_m+1}\beta_{k_m+1}}\|x^{k_m+1} - x^{k_m}\| + \bar{c}_{k_m} \\
&\le \|x^{k_m+1} - x^{k_m}\| + \bar{c}_{k_m},
\end{aligned}$$

$\bar{c}_{k_m} \to 0$ khi $m \to \infty$. Vì vậy, ta có kết quả tương tự (3.17) với k được thay bởi k_m, tức là, $\|x^{k_m} - w^{k_m}\| \to 0$, và vì vậy, theo Bổ đề 1.1.7 và (3.29), ta có $\|x^{k_m+1} - x^{k_m}\| \to 0$, điều này cùng với $\|x^{k_m+1} - T^{k_m}x^{k_m}\| \le t_{k_m}M_1 \to 0$ khi $m \to \infty$ suy ra rằng

$$\lim_{m\to\infty} \|x^{k_m} - T^{k_m}x^{k_m}\| = 0. \tag{3.30}$$

Bây giờ, ta chứng minh rằng

$$\lim_{m\to\infty} \|x^{k_m} - W^{k_m}x^{k_m}\| = 0. \tag{3.31}$$

Với mục đích như vậy, đầu tiên ta chứng minh rằng $\lim\limits_{m\to\infty} \|x^{k_m} - W^{k_m}y^{k_m}\| = 0$, ở đây điểm

$$y^{k_m} = (1-\alpha_{k_m})x^{k_m} + \alpha_{k_m}W^{k_m}x^{k_m}.$$

Từ $x^{k_m} - T^{k_m}x^{k_m} = \beta_{k_m}(x^{k_m} - W^{k_m}y^{k_m})$, và vì vậy, với điều kiện (β),

$$\|x^{k_m} - W^{k_m}y^{k_m}\| \le \|x^{k_m} - T^{k_m}x^{k_m}\|/a,$$

cùng với (3.30) suy ra giới hạn cuối. Mặt khác,

$$\begin{aligned}\|x^{k_m} - W^{k_m}x^{k_m}\| &\le \|x^{k_m} - W^{k_m}y^{k_m}\| + \|W^{k_m}y^{k_m} - W^{k_m}x^{k_m}\| \\ &\le \|x^{k_m} - W^{k_m}y^{k_m}\| + \|y^{k_m} - x^{k_m}\| \\ &= \|x^{k_m} - W^{k_m}y^{k_m}\| + \|(1-\alpha_{k_m})x^{k_m} + \alpha_{k_m}W^{k_m}x^{k_m} - x^{k_m}\| \\ &= \|x^{k_m} - W^{k_m}y^{k_m}\| + \alpha_{k_m}\|x^{k_m} - W^{k_m}x^{k_m}\|\end{aligned}$$

ta đạt được bất đẳng thức cuối $\|x^{k_m} - W^{k_m}x^{k_m}\| \le \|x^{k_m} - W^{k_m}y^{k_m}\|/(1-\overline{a})$, từ đây cùng với giới hạn cuối, ta có (3.31). Tiếp theo, kết hợp (3.31), bất đẳng thức cuối

$$\|x^{k_m} - Wx^{k_m}\| \le \|x^{k_m} - W^{k_m}x^{k_m}\| + \sup_{x\in S(0,M_2)} \|W^{k_m}x - Wx\|,$$

và điều kiện (ii) đối với W^{k_m}, ta có được $\lim\limits_{m\to\infty} \|x^{k_m} - Wx^{k_m}\| = 0$. Như trong chứng minh Định lý 3.2.1, dãy $\{x^{k_m}\}$ hội tụ mạnh tới p_* trong (3.26) khi $m \to \infty$. Bằng lập luận tương tự, bất kỳ dãy con hội tụ của dãy $\{x^k\}$ đều hội tụ tới p_*. Do nghiệm p_* của bài toán 3.26 là duy nhất nên tất cả các dãy $\{x^k\}$ hội tụ tới p_*. Ta hoàn thành chứng minh định lý. □

Nhận xét 3.2.4. (a) Các Nhận xét 3.2.1 và 3.2.2 vẫn còn đúng với T^k được định nghĩa bởi (3.27).

(b) Lấy $\alpha_k = 0$ trong (3.14) và (3.27), ta có phương pháp đường dốc nhất Krasnoselskii–Mann trong [4] và mở rộng của nó tới họ vô hạn ánh xạ không giãn T_i trên E, cụ thể là phương pháp

$$x^{k+1} = (I - t_kF)((1-\beta_k)I + \beta_kW^k)x^k,\ k \ge 1,$$

và dạng tương đương của nó

$$x^{k+1} = \big((1-\beta_k)I + \beta_kW^k\big)(I - t_kF)x^k,\ k \ge 1, \tag{3.32}$$

(xem Nhận xét 3.2.1). Thay F trong (3.32) bởi $(1-a')I$, ta có phương pháp

$$y^{k+1} = \big((1-\beta_k)I + \beta_kW^k\big)(1 - t'_k)y^k,\ k \ge 1.$$

Sự hội tụ mạnh của nó được chứng minh trong [79] trong không gian Banach lồi đều và trơn đều với các điều kiện (t), (β),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in B} \|W^{k+1}x - W^k x\| = 0$$

và điều kiện (i) trong định nghĩa về W^k. Marino và Muglia [81] thay thế điều kiện (ii) trong định nghĩa về W^k bởi $\lim_{k\to\infty} \|W^{k+1}x - W^k x\| = 0$ đều với $x \in B$ và kết hợp phương pháp đường dốc nhất với phương pháp Krasnosel'skii–Mann, đã nghiên cứu các phương pháp

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \beta_k x^k + (1-\beta_k)(I - t_k D)W^k x^k \text{ và} \\ x^{k+1} &= \beta_k (I - t_k D)x^k + (1-\beta_k)W^k x^k, \ k \geq 1, \end{aligned} \tag{3.33}$$

trong không gian Hilbert thực H, ở đây D là ánh xạ η-đơn điệu mạnh và L-liên tục Lipschitz. Sự hội tụ mạnh của (3.33) được chứng minh dưới các điều kiện (t) với $\lim_{k\to\infty} |t_k - t_{k+1}|/t_{k+1} = 0$, $\beta_k \in (0, \overline{a}]$ với $\lim_{k\to\infty} |\beta_k - \beta_{k+1}|/\beta_{k+1} = 0$ và thêm điều kiện về W^k liên quan đến họ ánh xạ $\{T_i\}$. Ta chú ý rằng các ánh xạ $V^k = T_1' \cdots T_k'$ ở đây $T_i' = t_i I + (1-t_i)T_i$ với $t_i \in (0, \infty)$ sao cho $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = \tilde{\gamma} < \infty$ và $S^k = \sum_{i=1}^{k} t_i T_i / \tilde{t_k}$ với $\tilde{t_k} = t_1 + \cdots + t_k$ cũng thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) trong định nghĩa về W^k (xem [46], [76]). Trong [76], Nguyễn Bường cùng các cộng sự đã giới thiệu các phương pháp

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= (1-\beta_k)x^k + \beta_k S^k (I - t_k F)x^k \text{ và} \\ x^{k+1} &= (1-\beta_k)S^k x^k + \beta_k (I - t_k F)x^k, \end{aligned}$$

đưa ra kết quả hội tụ mạnh trong không gian Banach phản xạ lồi chặt với chuẩn khả vi Gâteaux với các điều kiện (t) và (β).

(c) Li [56] đã nghiên cứu phương pháp (1.16), ở đây, T^k được định nghĩa trong (3.27) với W^k-ánh xạ của Shimoji và Takahashi (xem, [77]). Katchang và Kumam [78] đã đưa ra phương pháp:

$$x^{k+1} = t_k \gamma f(x^k) + (I - t_k A)T^k x^k, \ k \geq 1,$$

một cải biên của (1.16) và chứng minh rằng nó hội tụ trong không gian Banach với một ánh xạ đối ngẫu j dưới các điều kiện (t), $\lim_{k\to\infty} \beta_k = 0$ và

$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, ở đây, A là ánh xạ tuyến tính bị chặn dương trên E và γ là hằng số dương nào đó.

3.3. Ví dụ số minh họa

Mục này đưa ra ví dụ số minh họa phương pháp đường dốc nhất dạng Ishikawa giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của một hoặc một họ ánh xạ không giãn.

Với họ các ánh xạ không giãn $T_i = (1 - 1/(i+1))I$, $E = \mathbb{R}^1$, ta có $\cap_{i\geq 1}\mathrm{Fix}(T_i) = \{0\}$ và $\lim_{k\to\infty} T_k x = Ix$ với mỗi $x \in \mathbb{R}^1$. Vì vậy, điều kiện (i) trong định nghĩa về W^k không thỏa mãn vì $\mathrm{Fix}(I) = \mathbb{R}^1$.

Họ $\{T_i = P_{C_i}\}$, ở đây P_{C_i} là phép chiếu mêtric của $H = \mathbb{E}^2$, một không gian Euclide, lên tập $C_i = \{x = (x_1, x_2) \in H \mid a_i \leq x_2 \leq b_i\}$ với $a_i = 1 - 1/(i+1)$ và $b_i = 2 + 1/(i+1)$ với mọi $i \geq 1$, thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) trong định nghĩa về W^k. Trong trường hợp này, ta có $C = \cap_{i=1}^{\infty} C_i = \{x \in \mathbb{E}^2 \mid 1 \leq x_2 \leq 2\}$ và ta có thể lấy $W^k = T_k$ với mọi $k \geq 1$. Lấy $u = (1.0; 0.0)$, ta có nghiệm của (3.26) là $p_* = (1.0; 1.0)$. Trong nội dung tiếp theo, ta sẽ sử dụng phần mềm Matlab để tính toán ví dụ này.

Bây giờ sử dụng phương pháp (3.24) và T^k trong (3.27) với điểm bắt đầu $x^1 = (2.5; 2.5)$, $t_k = 1/(k+1)$, $\beta_k = 0.2 + 1/(k+1)$ và $\alpha_k = 1/(k+1)$. Kết quả tính toán được đưa ra trong Bảng 3.1.

Bảng 3.1: Kết quả tính theo thuật toán (3.24) và (3.27) với $W^k = T_k$

k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}
10	1.1363636364	0.6411155490	100	1.0148514851	0.9431215161
20	1.0714285714	0.7700827178	200	1.0074626866	0.9707901594
30	1.0483870968	0.8326554114	300	1.0049833887	0.9803526365
40	1.0365853659	0.8687796127	400	1.0037406484	0.9851987678
50	1.0294117647	0.8921748170	500	1.0029940120	0.9881273689

Trong trường hợp $a_i = 1 + 1/(i+1)$, ta có $C = \{x \in \mathbb{E}^2 \mid 1.5 \le x_2 \le 2\}$ và $p_* = (1.0; 1.5)$. Hơn nữa, điều kiện (i) trong định nghĩa về W^k đối với T_k, tức là $W^k = T_k$, không xảy ra. Để tính toán bằng phương pháp (3.24), ta dùng $W^k = S^k$ trong (3.27) ở đây $S^k = \sum_{i=1}^{k} t_i T_i / \tilde{t_k}$ với $\tilde{t_k} = t_1 + \cdots + t_k$ với $t_i = 1/i(i+1)$. Các kết quả tính toán được đưa ra trong Bảng 3.2.

Bảng 3.2: Kết quả tính theo thuật toán (3.24) và (3.27) với $W^k = S^k$.

k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}
10	0.8226906920	0.9967100188	100	0.8216765320	1.3503455533
20	0.8116106625	1.1196844726	200	0.8261485102	1.4207098495
30	0.8123975068	1.1852032060	300	0.8280615950	1.4464230799
40	0.8142620005	1.2298614455	400	0.8291386059	1.4595495405
50	0.8160321266	1.2628985966	500	0.8298349294	1.4675113528

Kết luận

Chương 3 của Luận án đề xuất một số phương pháp tìm nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của một hoặc một họ ánh xạ không giãn, chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp đề xuất. Các kết quả mới đề xuất có 3 ưu điểm sau:

1. Phương pháp mới này hội tụ mạnh, còn phương pháp Ishikawa hội tụ yếu.

2. Dãy W^k được chọn ở phương pháp mới này là tổng quát của dãy S^k và V^k trong các nghiên cứu trước (xem [40] và [45]). Nghĩa là kết quả trong nghiên cứu [40] và [45] là hai trường hợp riêng của kết quả mới này.

3. Phương pháp Halpern là trường hợp riêng của phương pháp mới này.

Cuối Chương 3, luận án cũng đưa ra các ví dụ số minh họa cho sự hội tụ của các phương pháp đề xuất.

KẾT LUẬN VÀ CÁC HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

KẾT LUẬN

Luận án đã đạt được các kết quả sau:

1. Đề xuất phương pháp hiệu chỉnh lặp giải bài toán chấp nhận tách đa tập (MSSFP) trong không gian Hilbert thực, chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp đề xuất và tính toán ví dụ minh họa (xem [**CT2**] trong Danh mục các công trình công bố của tác giả). Hiệu quả của phương pháp đề xuất là tham số lặp γ_k được chọn không phụ thuộc vào chuẩn của toán tử chuyển.

2. Giới thiệu phương pháp hiệu chỉnh lặp giải bài toán trùng tách đa tập (MSFEP) trong không gian Hilbert thực, chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp đề xuất và tính toán ví dụ minh họa (xem [**CT3**] trong Danh mục các công trình công bố của tác giả). Phương pháp được đề xuất trong các trường hợp tập chỉ số J_1 và J_2 là các họ vô hạn tập đếm được hoặc là các tập có số phần tử hữu hạn hoặc một trong hai tập có số phần tử hữu hạn, tập còn lại có số phần tử vô hạn. Phương pháp được đề xuất trong luận án tốt hơn phương pháp của Chen và cộng sự trong [36], đó là, ở mỗi bước lặp chỉ phải tính toán trên một tổng hữu hạn thay cho việc tính toán trên một tổng vô hạn như trong nghiên cứu của Chen và các cộng sự. Chú ý rằng, việc tính toán trên các tổng vô hạn là rất phức tạp và tốn kém về chi phí tính toán.

3. Đề xuất một một số phương pháp lặp mới, kết hợp giữa phương pháp đường dốc nhất với phương pháp Ishikawa xấp xỉ nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn hoặc trên tập điểm bất động chung của một họ các ánh xạ không giãn trong không gian Banach. Chứng minh sự hội tụ mạnh của các phương pháp đề xuất, xét các trường hợp đặc biệt của phương pháp và tính toán

ví dụ minh họa (xem **[CT1]** trong Danh mục các công trình công bố của tác giả).

HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

Trong thời gian tới:

1. Chúng tôi nghiên cứu mở rộng các kết quả trong Chương 2 và Chương 3 cho trường hợp T_i, U_i là các ánh xạ giả co trên không gian Hilbert.

2. Nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh lặp loại Extragradient cho bài toán xét trong Chương 3 với F là ánh xạ η-đơn điệu mạnh và L-liên tục Lipschitz.

3. Nghiên cứu sự kết hợp giữa thành phần quán tính và các phương pháp lặp hiệu chỉnh để làm tăng độ hội tụ của phương pháp này.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ

[CT1] Buong Ng., Anh Ng.T.Q., Binh K.T., (2020), Steepest-Descent Ishikawa Iterative Methods for a Class of Variational Inequalities in Banach Spaces, *Filomat* 34 (5), (2020) 1557–1569. (SCI-E, Q2).

[CT2] Buong Ng., Hoai P.T.T, Binh K.T, (2020), New Iterative regularization methods for the multiple-sets split feasibility problem, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 388(3), 113291. DOI 10-1016/j cam 2020. (SCI, Q2).

[CT3] Buong Ng., Anh Ng.T.Q., Binh, K.T., 2020, Iterative methods for the multiple-sets split equality problem in Hilbert spaces, *Kỷ yếu Hội thảo quốc gia lần thứ XXIII: Một số vấn đề chọn lọc của Công nghệ thông tin và truyền thông – Quảng Ninh*, 5–6/11/2020, 151–157.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] C.Byrne, 2004, A unified treatment of some iterative algorithm in signal processing and image reconstruction, *Inverse Problems*, **20**, 103-120.

[2] Y. Censor, T. Elfving, N. Knop, T. Bortfeld, 2005, The multiple-sets split feasibility problem and its applications for inverse problems, *Inverse Problems*, **21**, 2071-2084.

[3] Y. Censor, T. Bortfeld, B. Martin, A. Trofimov, 2006, *A unified approach for inverse problems in intensity-modulated radiation therapy*, *Phys. Med. Biol*, **51**, 2353-2365.

[4] M.A. Krasnosel'skii, 1995, Two remarks on the method of successive approximations, *Uspekhi Math Nauk*, **10**, 123-127.

[5] W.R. Mann, 1953, Mean value methods in iteration, *Proc. Amer. Math. Soc*, **4**, 506–510.

[6] S. Ishikawa, 1974, Fixed points by a new iteration method, *Proc. Amer. Math. Soc*, **44**, 147-150.

[7] B. Halpern, 1967, Fixed points of nonexpansive maps, *Bull. Amer. Math. Soc,* **73,** 957 - 961.

[8] A. Moudafi, 2000, Viscosity approximation methods for fixed-points problems, *J. Math. Anal. Appl.* **241,** 46 - 55.

[9] Y. Yao, H. Zhou, Y.Ch. Liou, 2009, Strong convergence of a modified Krasnosel'skii-Mann iterative algorithm for nonexpansive mapping, *J. Math. Comput. Appl*, **29**, 383–389.

[10] T.H. Kim, H.K. Xu, 2005, Strong convergence of modified Mann iterations, *Nonl. Anal*, **61**, (1-2), 51-60.

[11] J. Zhao, Q. Yang, 2013, A simple projection method for solving the multiple-sets split feasibility problem, *Inverse Probl. Sci. Eng*, **21**(3), 537-546.

[12] W. Zhang, D. Han, Zh. Li, 2009, A self-adaptive projection method for solving the multiple-sets split feasibility problem, Inverse Problems, **25**, 115001.

[13] J. Zhao, Y. Zhang, Q. Yang, 2012, Modified projection methods for the split feasibility problem and the multiple-sets split feasibility problem, *Appl. Math. Comput*, **219**, 1644-1653.

[14] G. López, V.M. Marquez, F. Wang, H.K. Xu, 2012, Solving the split feasibility problem without prior knowledge of matrix norms, *Inverse Problems*, **28**, 085004.

[15] H.K. Xu, 2006, A variable Krasnosel'skiiM-ann algorithm and the multiple-set split feasibility problem, *Inverse Problems*, **22**, 2021-2034.

[16] J. Wang, Y. Hu, C.K.W. Hu, X. Zhuang, 2019, A family of projection gradient methods for solving the multiple-sets split feasibility problem, *J. Optim. Theory Appl*, **183**, 520-534.

[17] M. Wen, J. Peng, Y. Tang, 2015, A cyclic and simultaneous iterative method for solving the multiple-sets split feasibility problem, *J. Optim. Theory Appl,* 166, 844 - 860.

[18] H.K. Xu, 2010, Iterative methods for the split feasibility problem in infinite-dimensional Hilbert spaces, *Inverse Problems*, **26**, Article ID 105018.

[19] Bruck R. E, 1974, A strong convergent iterative method for the solution $0 \in Ux$ for a maximal monotone operator U in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl*, **48**, 114-126.

[20] A.B. Bakushinsky, 1977, Methods for solving monotonic variational inequalities based on the principle of iterative regularization, *Comput. Math. Math. Phys*, **17**, 12-24.

[21] M. Tian, H.F. Zhang, 2017 The regularized CQ algorithm without a priori knowledge of operator norm for solving the split feasibility problem, *J. Ineq. Appl*, 207

[22] Ng. Buong, Ph.Th. Hoai, Kh.Th. Binh, 2019, Iterative regularization methods for the multiple-sets split feasibility problem in Hilbert spaces, *Acta Appl. Math*, **165**, (1), 183-197.

[23] H. Attouch, A. Cabot, P. Frankel, J. Peypouquet, 2011, Alternating proximal algorithms for constrained variational inequalities. Application to domain decomposition for PDE's, *Nonl. Anal*, **74**, 7455-7473.

[24] H. Attouch, 2009, Alternating minimization and projection algorithms. From convexity to nonconvexity, *Commmunication in Instituto Nazionale di Alta Mathematica Citta Universitaria-Rome*, Italy, June 8-12.

[25] C. Byrne, A. Moudafi, 2013, Extensions of the CQ algorithm for the split feasibility and split equality problems, *Working paper*, UAG.

[26] P.T. Polyak, 1987, *Introduction for Optimization*, New-York.

[27] Y. Alber, I.P. Ryazantseva, 2006, *Nonlinear Ill-Posed Problems of Monotone Type*, Springer, .

[28] A.B. Bakushinsky, A. Goncharsky, 1989, *Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers.

[29] R. Chen, J. Wang, H. Zhang, 2014, General split equality problems in Hilbert spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, **35**.

[30] Q.L. Dong, S. He, H.B. Yan, 2013, Several projection algorithms for the split equality problem, *Wseas Transaction on Mathematics*, **12**, (11), 1087-1096.

[31] Q.L. Dong, S. He, J. Zhao, 2015, Solving the split equality problem without prior knowledge of operator norms, *Optimization*, **64**, (9) 1887-1906.

[32] P.T. Vuong, J.J. Strodiot, Ng.V. Hien, 2015, A gradient projection method for solving split equality and split feasibility problems in Hilbert spaces, *Optimization*, **64** (11) 2321-2341.

[33] H. Yu, F. Wang, 2018, Relaxed alternating CQ algorithms for the split feasibility problem in Hilbert spaces, *J. Ineq. Appl*, 335.

[34] L. Shi, R. Chen, Y.J. Wu, 2014, An iterative algorithm for the split equality and multiple-sets split equality problems, *Abstr. Appl. Anal*, Article ID 620813.

[35] D. Tian, L. Shi, R. Chen, 2016, Iterative algorithm for solving the multiple-sets split equality problem with split self-adaptive step size in Hilbert spaces, *Journal of Ineq. Appl*, (34) DOI: 10.1186/s13660-016-0982-7.

[36] R. Chen, J. Li, Y. Ren, 2013, Regularization method for the approximate split equality problem in infinite-dimensional Hilbert spaces, *Abstr. Appl. Anal*, 813635, 5 pp.

[37] M. Eslamian, A. Latif, 2013, General split feasibility problem in Hilbert spaces, *Abstr. Appl. Anal*, Article ID 805104 DOI: 10.1155/805104.

[38] Ch.Sh.Chuang, W.sh. Du, 2016 Hybrid simultaneous algorithms for the split equality problem and applications, *Journal of Ineq. Appl*, 2016**198**, DOI:10.1186/s13660-016-1141-x.

[39] A.A. Goldstein, 1964, Convex programming in Hilbert space, *Bull.Am. Math. Soc*, **70**, 709-710.

[40] L.C. Ceng, Q.H. Ansari, J.C. Yao, 2008, Mann-type steepest-descent and modified hybrid steepest descent methods for variational inequalities in Banach spaces, *Num. Funct. Anal. Optim*, **29,** (9-10), 987–1033.

[41] Ng. Buong, V.X.Quynh, Ng.Th.Th.Thuy, 2016, A steepest-descent Krasnosel'skii-Mann algorithm for a class of variational inequalities in Banach spaces, *J. Fixed Point Theory Appl*, **18**, 519-532.

[42] Hoàng Tụy *Hàm thực và Giải tích hàm, 2005*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[43] K. Goebel, W.A. Kirk, 1990, Topics in Metric Fixed Point Theory, *Cambridge Studies in Advanced Math*, **28**, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[44] L.C. Ceng, H.K. Xu, J.Ch. Yao, 2008,, Strong convergence of an iterative method with perturbed mappings for nonexpansive and accretive operators, *Num. Funct. Anal. Optim*, *29(3-4)*, 324-345.

[45] P.E. Mainge', 2008, Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization, *Set-Valued Var. Anal*, **16** 899-912.

[46] Ng. Buong, Ng.Th.H. Phuong, 2012, Regularization methods for a class of variational inequalities in Banach spaces, *Comput. Mat. and Mat. Phyics*, **52**(11), 1487-1496.

[47] I. Cioranescu, 1990, Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems, *Kluwer Acad. Publ., Dordrecht*, 260 pp.

[48] H.K. Xu, 2002, Iterative algorithms for nonlinear operators, *J. Lond. Math. Soc.,* **66,** 240-256.

[49] T. Suzuki, 2005, Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces, *J. Fixed Point Theory and Appl*, 7103-123.

[50] F.E. Browder, 1967, Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **24**, 82–90.

[51] S. Reich, 1979, Weak convergence theorem for nonexpansive mappings in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.,* **67**, 274-276.

[52] A. Genel, J. Lindenstrass, 1975, An example concerning fixed points, *Israel Journal of Mathematics*, **22**, 81 - 86.

[53] P.L. Lions, 1997, Approximation de points fixes de contractions, *CR Acad. Sci. Paris Ser.AB*, **284**, 1357 - 1359.

[54] R. Wittmann, 1992, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, *Archivder Mathematik*, **58**, 486 - 491.

[55] H.K. Xu, 2004, Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl*, **298**, 279–291.

[56] Y. Li, 2012, Convergence of modified Ishikawa iterative processes for an infinite family of nonexpansive mappings, *Fixed Point Theory*, **13**, 307-317.

[57] Y. Censor, T. Elfving, 1994, A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product spaces, *Numer. Algorithms*, **8** 221-239.

[58] Y. Censor, A. Motova A, A. Segal, 2007, Perturbed projections and subgradient projections for the multiple-sets split feasibility problem, J. Math. Anal. Appl, **327**, 1244-1256.

[59] Y. Censor, A. Segal, 2008, Iterative projection methods in biomedical inverse problems, Mathematical Methods in Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Radiation Therapy (IMRT), ed Y. Censor, M. Jiang and A.K. Louis, (Edizioni della Normale, Pisa, Italy), 65-96.

[60] S. Chen, D. Donoho, M. Sauders, 1998, Atomic decomposition by basic pursuit, *SIAM J. Sci. Comput*, **20**, 33-61.

[61] J.R. Palta, T.R. Mackie, 2003, *Intensity-Modulated Radiation Therapy: The State of the Art. Madison*, WI: Medical Physics Publishing.

[62] S. Takahashi, W. Takahashi, M. Toyota, 2010, Strong convergence theorems for maximal monotone operators with nonlinear mappings in Hilbert spaces, *J. Optim. Theory Appl,* 147, 27 - 41.

[63] R.E. Bruck, 1973, Properties of fixed point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces, *Trans. AMS*, **179** 251-262.

[64] I. Iiduka, 2009, An egordic algorithm for the power-control games in CDMA data networks, *J. Math. Model. Algorithms*, **8**, 1-18.

[65] I. Iiduka, 2013, Fixed point optimization algorithms for distributed optimization in network systems, *SIAM J. Optim*, **23**, 1-26.

[66] I. Yamada, 2001, The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive

mappings.In: Butnariu, D., Censor, Y., Reich, S. (Eds) *Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Applications*, *North-Holland, Amsterdam*, 473-504.

[67] H.K. Xu, T.H. Kim, 2003, Convergence of hybrid steepest-descent methods for variational inequalities, *J. Optim. Theory Appl*, **119,** 185-201.

[68] L.C. Zeng, N.C. Wong, J.C. Yao, 2007, Convergence analysis of modified hybrid steepest-descent methods with variable parameters for variational inequalities, *J. Optim. Theory Appl,* **132**, 51-69.

[69] Ng. Buong, Ng.Th.Q. Anh, 2011, An implicit iteration method for variational inequalities over the set of common fixed points for a finite family of nonexpansive mappings in Hilbert spaces, *Hindawi Publish Coporation, Fixed Point Thoery Applications*, volume article ID 276859.

[70] Ng. Buong, L.Th. Duong, 2011, An explicit iterative algorithm for a class of variational inequalities in Hilbert spaces, *J. Optim. Theory Appl*, **151**, 513-524.

[71] Sh. Iemoto, W. Takahashi,2008, Strong convergence theorems by a hybrid steepest descent method for countable nonexpansive mappings in Hilbert spaces, *Sci. Math. Jpn*, **21**, 555-570.

[72] Y. Yao, M.A. Noor, Y.C. Liou, 2010, A new hybrid iterative algorithm for variational inequalities, *Appl. Math. Comput*, **216**, 822-829.

[73] H. Wang, Y. Song, 2011, An iteration scheme for nonexpansive mappings and variational inequalities, *Bull. Korean Math. Soc*, **48**(5), 991-1002.

[74] T.H.Kim, H.K. Xu, 2005, Strong Convergence of modified Mann iterations. *Nonlinear Anal.* **61**, 51-60.

[75] Y. Yao, H. Zhou, Y.Ch. Liou, 2009, Strong Convergence of a modified Krasnosel'skii-Mann iterative algorithm for non-expansive mappings, *J. Appl. Math. Comput*, **29**, 383-389.

[76] Ng. Buong, Ng.S. Ha, Ng.Th.Th. Thuy, 2016, A new explixit iteration method for a class of variational inequalities, *Numer. Algorithm*, **72**, 467-481.

[77] K. Shimoji, W. Takahashi, 2001, Strong convergence to common fixed points of infinite nonexpansive mappings and applications, *Taiwa. J. Math*, **5**, 387–404.

[78] Ph. Katchang, P. Kumam, 2010, Strong convergence of the modified Ishikawa iterative method for infinitely many nonexpansive mappings in Banach spaces, *Computer Math. with Appl*, **59**, 3473–3483.

[79] Y. Shehu, G.C. Ugwunnadi, 2015, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings by modified Krasnoselskii-Mann iterative algorithm in Banach spaces, *Taiwanese J. Math*, **13**(2), 405–419.

[80] Y. Shehu, 2013, Modified Krasnosel'skii-Mann iterative algorithm for nonexpansive mappings in Banach spaces, *Arab J. Math*, **2**, 209-219.

[81] G. Marino, L. Muglia, 2015, On the auxiliary mappings generated by a family of mappings and solutions of variational inequalities, *Optim. Lett*, **9**, 263–282.

[82] C.E. Chidume, S.A. Mutangadura, 2001, An example on the Mann iteration method for Lipschitz pseudocontractions, *Proc. Amer. Math. Soc*, **129**, 2359–2363.

[83] K.K. Tan, H.K. Xu, 1993, Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process, *J. Math. Anal. Appl*, **178**, 301-308.

[84] X. Qin, Y. Su, M. Shang, 2008, Strong convergence of the composite Halpern iterations, *J. Math. Anal. Appl*, **339**, 996-1002.

[85] Y. Yao, W. Jiang, Y.C. Liou, 2012, Regularized methods for the split feasibility problem, *Abstr. Appl. Anal*, Article ID 140679, **13**, https://doi.org/10.1155/140679.