BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Nguyễn Minh Kim

PHƯƠNG PHÁP ENTROPY CHO CÁC HỆ PHẢN ỨNG KHUẾCH TÁN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - Năm 2024

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Nguyễn Minh Kim

PHƯƠNG PHÁP ENTROPY CHO CÁC HỆ PHẢN ỨNG KHUẾCH TÁN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 8 46 01 12

Hoàng Thế Tuấn

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC :

1. PGS. TS. Hoàng Thế Tuấn
2. TS. Tăng Quốc Bảo

Hà Nội - Năm 2024

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đề tài nghiên cứu trong luận văn này là công trình nghiên cứu của tôi dựa trên những tài liệu, số liệu do chính tôi tự tìm hiểu và nghiên cứu. Chính vì vậy, các kết quả nghiên cứu đảm bảo trung thực và khách quan nhất. Đồng thời, kết quả này chưa từng xuất hiện trong bất cứ một nghiên cứu nào. Các số liệu, kết quả nêu trong luận văn là trung thực, nếu sai tôi chịu hoàn toàn trách nhiệm trước pháp luật.

Hà Nội, tháng 10 năm 2024

Học viên

NGUYỄN MINH KIM

LỜI CẢM ƠN

Luận văn "Phương pháp entropy cho các hệ phản ứng-khuếch tán" là một công trình đòi hỏi nhiều nỗ lực của tôi, và được sự giúp đỡ tận tình, động viên, khích lệ đến từ nhiều cá nhân, đoàn thể.

Trước hết, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Viện Toán học, các Quý Thầy Cô đã giúp tôi trang bị tri thức, tạo môi trường điều kiện thuận lợi nhất trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Với sự kính trọng sâu sắc, tôi xin được bày tỏ lời cảm ơn tới hai thầy hướng dẫn của tôi là PGS TS. Hoàng Thế Tuấn và TS. Tăng Quốc Bảo đã giúp đỡ, hướng dẫn tận tình cho tôi trong suốt thời gian thực hiện luận văn này. Xin cảm ơn lãnh đạo, ban cán bộ Học Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã giúp đỡ chia sẻ thông tin, cung cấp cho tôi nhiều nguồn tư liệu, tài liệu hữu ích phục vụ cho đề tài luận văn này.

Tôi cũng xin gửi lời tri ân sâu sắc đến gia đình và bạn bè đã động viên, hỗ trợ, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, làm việc và hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Học viên

Nguyễn Minh Kim

Mục lục

LỜI MỞ ĐẦU

Tổng quan tình hình nghiên cứu và sự cần thiết tiến hành nghiên cứu

Trong vật lý, hệ phản ứng-khuếch tán, chẳng hạn như hệ truyền nhiệt, có nhiều ứng dụng thực tế. Những nghiên cứu về hệ phản ứng-khuếch tán của mạng lưới phản ứng hóa học bậc nhất (first order chemical reaction network) đã có từ những công trình kinh điển như của Horn, Jackson và Feinberg ([1],[2]). Mục tiêu chính là nghiên cứu trạng thái cân bằng và sự tiến hóa của mạng lưới các phản ứng một cách độc lập với giá trị cụ thể của các hệ số phản ứng trong hệ.

Ở Áo, nhóm của TS. Tăng Quốc Bảo xét các bài toán phản ứng-khuếch tán cho hệ thuận nghịch yếu, cả khi sự khuếch tán suy biến và không suy biến ([3]). Sử dụng tính thuận nghịch yếu của hệ, phương pháp entropy và bất đẳng thức Gronwall, nhóm của TS. Tăng Quốc Bảo chứng minh được sự tồn tại, tính duy nhất của trạng thái cân bằng phức dương của hệ, chứng minh được sự hội tụ cấp lũy thừa của trạng thái của hệ theo thời gian về trạng thái cân bằng cũng như ước lượng tốc độ hội tụ thông qua entropy.

Tuy nhiên, bài toán dưới dạng phương trình vi phân đạo hàm riêng với điều kiện biên Neumann ($\frac{du}{d\nu} = 0$ trên biên $\partial\Omega$), cũng như các đánh giá định lượng cho sự tiến hóa của hệ theo thời gian, chẳng hạn như đánh giá tốc độ hội tụ, ít xuất hiện hơn so với bài toán phương trình vi phân đạo hàm riêng với điều kiện biên Dirichlet, trong đó giá trị của hàm trên biên là cho trước ($u = f$ trên $\partial\Omega$). Do vậy, cần có thêm nghiên cứu về bài toán các bài toán phản ứng-khuếch tán dưới dạng phương trình vi phân đạo hàm riêng với điều kiện biên Neumann, cũng như các đánh giá định lượng cho sự tiến hóa của các hệ đó theo thời gian.

Nội dung chính của luận văn:

Ta xét hệ **N** là một hệ phản ứng bậc nhất:

$$S_i \underset{a_{ij}(t)}{\overset{a_{ji}(t)}{\rightleftarrows}} S_j \qquad (i \neq j),$$

trong đó $S_i \quad (i \in \{1, \ldots, N\}) \ (N \geq 2)$ là các chất hóa học, biểu hiện thông qua hàm nồng độ $u_i(x,t)$ tại vị trí $x \in \Omega$ và thời điểm $t \geq 0$.
Ở đây:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một tập mở bị chặn và liên thông với biên $\partial\Omega$ là C^1, tức là với mỗi $x_0 \in \partial\Omega$, tồn tại $r > 0$ và một hàm C^1 là $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ sao cho:

  $$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) : x_N > \gamma(x_1, \ldots, x_{N-1})\}$$

  sau khi hoán đổi và đổi chiều các trục toạ độ nếu cần ([4]).

- Thông qua phép hiệu chỉnh $x \mapsto |\Omega|^{1/n}x$, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $|\Omega| = 1$.

Đồng thời ta giả sử mỗi S_i khuếch tán với độ khuếch tán (diffusion rate) $d_i \geq 0$. Áp dụng định luật thứ hai của Fick và định luật tác dụng khối lượng, ta có hệ phương trình phản ứng khuếch tán sau cho vectơ nồng độ $X(x,t) = [u_1(x,t), \ldots, u_N(x,t)]^T$:

$$\begin{cases} X_t = D\Delta X + A(t)X \quad (x \in \Omega, t > 0), \\ \partial_\nu u_i = 0 \quad (x \in \partial\Omega, t > 0) \text{ với mọi } i \text{ sao cho } d_i > 0, \\ X(x,0) = X_0(x) \geq 0 \quad (x \in \Omega), \end{cases} \tag{0.0.1}$$

trong đó:

- $X_0(x) = [u_{1,0}(x), \ldots, u_{N,0}(x)]^T$: vectơ điều kiện đầu,
- $D = diag(d_1, \ldots, d_N)$: ma trận hệ số khuếch tán,
- $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq N}$: ma trận phản ứng (reaction matrix), với $a_{ij}(t)$ là tốc độ phản ứng $S_j \to S_i$ với $i \neq j$ và $a_{ij}(t) \quad (i, j \in \{1, \ldots, N\})$

thỏa mãn

$$\begin{cases} a_{ij}(t) \geq 0 \quad \text{với mọi } i, j = 1, \ldots, N \text{ sao cho } i \neq j, \\ a_{jj}(t) = -\sum_{i=1, i\neq j}^{N} a_{ij}(t) \;\; \text{với mọi } j = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{0.0.2}$$

Đồng thời, từ điều kiện biên Neumann, ta có sự bảo toàn tổng khối lượng sau:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} u_i(x,t)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} u_{i,0}(x)dx = M$$

với mọi $t \geq 0$, trong đó M được gọi là tổng khối lượng ban đầu.

Trong trường hợp $a_{ij}(t)$ không đổi theo thời gian, sử dụng phương pháp entropy và bất đẳng thức Gronwall, sự hội tụ cấp lũy thừa theo thời gian cho nghiệm của hệ **N** theo thời gian về trạng thái cân bằng phức trong trường hợp hệ **N** thỏa mãn tính thuận nghịch yếu cũng như một số ước lượng tốc độ hội tụ thông qua entropy đã được chứng minh trong [3]. Trong luận văn này chúng tôi sẽ mở rộng kết quả này cho trường hợp tốc độ phản ứng $a_{ij}(t)$ phụ thuộc vào thời gian và $a_{ij}(t)$ hội tụ đến $a_{ij,\infty}$ khi $t \to +\infty$ và đồ thị ứng với ma trận giới hạn $A_\infty = (a_{ij,\infty})$ là liên thông mạnh, trong cả hai trường hợp là khuếch tán không suy biến và khuếch tán suy biến.

Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng các công cụ và kiến thức của phép tính vi - tích phân cổ điển, lý thuyết các không gian Sobolev, các nguyên lý từ giải tích hàm cùng phương pháp entropy.

Cấu trúc luận văn:

Ngoài phần Một số kí hiệu sử dụng trong luận văn, Lời mở đầu, Lời cảm ơn, Lời cam đoan, Phụ lục, Kết luận và Tài liệu tham khảo, Luận văn được chia thành ba chương:

- Chương 1: Các khái niệm về hệ phản ứng khuếch tán và các kiến thức chuẩn bị.

- Chương 2: Định nghĩa, chứng minh sự tồn tại duy nhất của nghiệm yếu của hệ phương trình (0.0.1) và mở rộng kết quả trong [3] về sự hội tụ lũy thừa đến trạng thái cân bằng trong cho hệ có hệ số phản ứng $a_{ij}(t)$ phụ thuộc thời gian và hội tụ cấp lũy thừa đến $a_{ij,\infty}$.

- Chương 3: Chứng minh các định lí chính về sự hội tụ của nghiệm về trạng thái cân bằng và các đánh giá về tốc độ hội tụ của nghiệm khi hệ số phản ứng $a_{ij}(t)$ hội tụ cấp tổng quát (tức là $|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}|$ bị chặn trên bởi hàm liên tục).

MỘT SỐ KÍ HIỆU SỬ DỤNG TRONG LUẬN VĂN:

- ":=": "được định nghĩa là".
- "$\equiv$": "bằng nhau khắp nơi".
- "h.k.n": "hầu khắp nơi".
- $\mathbb{R}$: Tập số thực.
- $\mathbb{R}^n$: Không gian Euclide n chiều.
- $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) lần lượt kí hiệu đoạn $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, nửa khoảng $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, nửa khoảng $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ và khoảng $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- $A - B$: Tập hiệu $\{x | x \in A$ và $x \notin B\}$
- $B(x_0, r)$: Quả cầu mở tâm x_0 bán kính r.
- μ_1: Độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$.
- μ: Nếu không nói gì thêm, μ sẽ là kí hiệu độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$.
- $\partial\Omega$: Biên của Ω.
- $|\Omega|$: Độ đo Lebesgue của Ω, tức là $|\Omega| = \mu(\Omega)$.
- inf, sup: lần lượt là cận dưới đúng và cận trên đúng.
- $\underset{\Omega'}{esssup}\{f(x)\}$ hay $\underset{x\in\Omega'}{esssup}\{f(x)\}$: Chặn trên đúng hầu khắp nơi:

  $$\underset{x\in\Omega'}{esssup}\{f(x)\} = \inf\{C \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} : f(x) \leq C \text{ h.k.n trên } \Omega'\}$$
- $f : X \to Y : u \mapsto v$: hàm f từ X vào Y, biến u thành v.
- $u'(t)$ hay $\frac{d}{dt}u$: Đạo hàm thông thường theo biến t của hàm u.

- Δu: Laplacian của u.
- $\int_\Omega f d\mu$: tích phân (Lebesgue) theo μ của f trên Ω.
- $\int_a^b f dx$ $(a, b \in \mathbb{R})$: tích phân (Lebesgue) của hàm số f từ a đến b.
- $||\cdot||_X$: chuẩn vectơ trong không gian định chuẩn X.
- X^*: không gian đối ngẫu liên tục của X, trang bị chuẩn toán tử:

$$||x^*||_{X^*} = \sup_{||x||_X \leq 1} \{|x^*(x)|\}.$$

- $span(S)$: không gian vectơ con sinh bởi tập S.
- L^*: toán tử (tuyến tính) liên hợp của $L : U \to V$, xác định bởi:

$$(L^*(x^*))(x) = x^*(Lx) \text{ với mỗi } x^* \in V^* \text{ và mỗi } x \in U.$$

- $C(\Omega)$: Không gian hàm số liên tục từ Ω, trang bị chuẩn max $||\cdot||_{C(\Omega)}$:

$$||f||_{C(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} \{|f(x)|\}.$$

- $C^\infty(\Omega)$: Không gian các hàm số thực trơn trên Ω.
- $C_c^\infty(\Omega)$: Không gian các hàm số thực trơn và có giá compact trên Ω.
- $AC([a, b])$: Không gian các hàm liên tục tuyệt đối trên đoạn $[a, b]$, trang bị chuẩn max: $||f||_{AC([a,b])} = \max_{x \in [a,b]}\{|f(x)|\}$.
- $D^\alpha\psi$: đạo hàm riêng theo cấp α thông thường của $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$D^\alpha \psi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_N}} \psi$$

  và $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ với mỗi $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$.
- ∂_ν: đạo hàm theo hướng vectơ pháp tuyến ν tại điểm biên $x \in \partial\Omega$.

- $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$: Không gian các hàm số thực $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho $|f|^p$ khả tích Lebesgue trên Ω. $L^p(\Omega)$ được trang bị chuẩn $||\cdot||_p$ sau:

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

- $L^p_{loc}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$: Không gian các hàm số thực $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho $f \in L^p(\omega)$ với mọi tập mở ω sao cho $\bar{\omega}$ compact và $\bar{\omega} \subset \Omega$.

- $L^\infty(\Omega)$: Không gian các hàm số thực $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho $|f|$ bị chặn hầu khắp nơi trên Ω . $L^\infty(\Omega)$ được trang bị chuẩn $||\cdot||_{L^\infty}$ sau:

$$||f||_{L^\infty} = \underset{x\in\Omega}{esssup}\{f(x)\}$$

  (Ta đồng nhất các hàm bằng nhau hầu khắp nơi trong $L^p(\Omega)$, $L^p_{loc}(\Omega)$ và $L^\infty(\Omega)$).

- $\bar{f} := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f dx$: trung bình của f trên Ω.

- $||f||$: chuẩn trong $L^2(\Omega)$ của f, hay $||f|| = ||f||_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 dx}$.

- $M_{m\times n}(X)$: không gian các ma trận $B = (b_{ij})_{m\times n}$ cấp $m \times n$ với $b_{ij} \in X$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$, trang bị chuẩn $||B||_{M_{m\times n}(X)} = \max\limits_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}\{||b_{ij}||_X\}$.

- $diag(x_1, \ldots, x_n)$: ma trận chéo cấp $n \times n$ với các thành phần trên đường chéo lần lượt là $x_1, \ldots, x_n$.

- $(u, v)_H$: tích vô hướng của $u, v \in H$ trong không gian H.

- $\boldsymbol{1}_A$: ánh xạ đặc trưng $X \to \{0, 1\}$ của tập con A của X.

- "$u_n \to u$ trong X" hay "$u_n \xrightarrow{X} u$": Dãy (u_n) hội tụ mạnh đến u trong X.

- "$u_n \rightharpoonup u$ trong X" hay "$u_n \overset{X}{\rightharpoonup} u$": (u_n) hội tụ yếu đến u trong X.

- $f|_A$: thu hẹp của $f : X \to Y$ xuống $A \subset X$: $f|_A : A \to Y : x \mapsto f(x)$.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Đồ thị ứng với một ma trận

Cho một ma trận $\mathbf{A}$ thực cấp $N \times N$ sao cho $\mathbf{A}_{ij} \geq 0$ với mỗi $i \neq j$. Ta định nghĩa đồ thị có hướng $G_{\mathbf{A}}$ tương ứng với $\mathbf{A}$ như sau:

- Đỉnh của $G_{\mathbf{A}}$ là N chất $S_1, \ldots, S_N$,
- Cạnh của $G_{\mathbf{A}}$: Ta có cạnh $S_i \to S_j$ từ S_i đến S_j $(i \neq j)$ nếu $\mathbf{A}_{ji} > 0$.

Ta định nghĩa khái niệm lớp, mảng liên thông trong $G_{\mathbf{A}}$ như sau:

Định nghĩa 1. (Tính liên thông và lớp liên thông ([5]))

- *Cạnh vô hướng: khi có cạnh $S_i \to S_j$ hoặc cạnh $S_j \to S_i$ trong $G_{\mathbf{A}}$, ta nói rằng $\{S_i, S_j\}$ là một cạnh vô hướng giữa S_i và S_j của $G_{\mathbf{A}}$ (từ S_i đến S_j và từ S_j đến S_i).*
- *Đường đi vô hướng: Dãy đỉnh $p : S_i \equiv S_{r_1}, \ldots, S_{r_k} \equiv S_j$ được gọi là đường đi vô hướng từ S_i đến S_j nếu với mọi $1 \leq l \leq k-1$, tồn tại cạnh vô hướng từ $S_{r_l} \to S_{r_{l+1}}$ trong $G_{\mathbf{A}}$, hay nói cách khác $\mathbf{A}_{r_{l+1}r_l} > 0$ hoặc $\mathbf{A}_{r_l r_{l+1}} > 0$. Khi đó ta nói S_i và S_j liên thông (vô hướng) và gọi $k-1$ là độ dài của đường đi vô hướng p.*
- *Đường đi đơn: Đường đi vô hướng $p : S_i \equiv S_{r_1}, \ldots, S_{r_k} \equiv S_j$ với các đỉnh $S_{r_1}, \ldots, S_{r_k}$ đôi một phân biệt được gọi là một đường đi đơn.*

- *Lớp liên thông* $\mathbf{L}$ *của đồ thị* $G_{\mathbf{A}}$ *là một tập liên thông (vô hướng) tối đại của đồ thị* G *của* $G_{\mathbf{A}}$*, tức là cả hai điều kiện sau được thỏa mãn:*
  - *Liên thông: Với mỗi cặp đỉnh* $S_i, S_j \in \mathbf{L}$*,* S_i *và* S_j *liên thông.*
  - *Tối đại: Nếu* $S_i \in L$ *và* $S_j \notin L$ *thì* S_i, S_j *không liên thông.*

Ta nói $G_{\mathbf{A}}$ liên thông nếu 2 đỉnh bất kì của nó liên thông, tức là $G_{\mathbf{A}}$ có duy nhất một lớp liên thông.

Nhận xét 1. Mỗi đường đi ngắn nhất $p : S_i \equiv S_{r_1}, \ldots, S_{r_k} \equiv S_j$ từ S_i đến S_j cũng là một đường đi đơn (vô hướng) vì nếu có 2 đỉnh S_{r_u}, S_{r_v} $(1 \leq u, v \leq k)$ nào đó của p trùng nhau với $u < v$ thì chập hai đỉnh này lại, ta được đường đi sau từ S_i đến S_j:

$$p^* : S_i \equiv S_{r_1}, \ldots, S_{r_u}(\equiv S_{r_v}), S_{r_{v+1}}, \ldots, S_{r_k} \equiv S_j$$

với độ dài $u + (k - v) - 1 = k - 1 - (v - u) < k - 1 =$ độ dài của p, mâu thuẫn với tính ngắn nhất của p.

Định nghĩa 2 (**Mảng liên thông mạnh ([5])**)**.** *Một đồ thị con* H *của đồ thị* $G_{\mathbf{A}}$ *ứng với* $\mathbf{A}$ *được gọi là một mảng liên thông mạnh nếu với hai đỉnh bất kì* S_i, S_j *của* H*, ta luôn tìm được một đường đi (có hướng)* $S_i \equiv S_{i_1} \to S_{i_2} \to \cdots \to S_{i_r} \equiv S_j$*, tức là với mọi* $1 \leq l \leq r-1$*, ta có* $S_{i_l} \to S_{i_{l+1}}$ *là một cạnh của* $G_{\mathbf{A}}$*, với* $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_r}$ *đều nằm trong* H *và* H *là tối đại đối với tính chất này.*

Ta nói $G_{\mathbf{A}}$ là liên thông mạnh nếu nó chỉ có duy nhất một mảng liên thông mạnh. Nếu $G_{\mathbf{A}}$ liên thông mạnh thì $G_{\mathbf{A}}$ liên thông.

Ta có bổ đề quan trọng sau:

Bổ đề 1. **(Bổ đề 2.2 trong [3])** *Cho ma trận* $\boldsymbol{A}$ *có vectơ riêng trái dương* $(1, \ldots, 1)^T$ *đối với giá trị riêng* 0*. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

- *Đồ thị* $G_{\mathbf{A}}$ *ứng với* $\mathbf{A}$ *là liên thông mạnh;*

- *Với mỗi $M > 0$, tồn tại duy nhất $X_\infty = (u_{1,\infty}, \dots, u_{N,\infty}) > 0$ để*

$$\begin{cases} \mathbf{A}X_\infty = 0, \\ u_{1,\infty} + \cdots + u_{N,\infty} = M. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

1.2 Một số kiến thức cơ bản

Các kết quả sau đóng vai trò quan trọng trong luận văn:

Bổ đề 2 (Bất đẳng thức Gronwall dạng đạo hàm ([4])). *Cho các hàm $f(x), g(x)$ trên I với $I = [a, b]$ hoặc $I = [a, b)$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$ sao cho $f(x)$ không âm trên I, $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a, b)$ và $f(x)$ khả vi trên (a, b). Khi đó, nếu:*

$$f'(x) \leq g(x)f(x) \text{ với mỗi } x \text{ thuộc miền trong } I^o = (a, b),$$

thì

$$f(x) \leq f(a)e^{\int_a^x g(s)ds} \text{ với mỗi } x \in I.$$

Từ bất đẳng thức Gronwall ta có hệ quả sau:

Bổ đề 3. *Cho hàm $f(t)$ liên tục trên I với I là $[c, d)$ hoặc $[c, d]$ và khả vi trên miền trong $I^o = (c, d)$ của I $(c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, c < d)$ và các hàm $a(t)$, $b(t)$ liên tục trên I cùng hằng số $t^* \in I, t^* < d$ sao cho với mỗi $t \in I^o$ thỏa mãn $t > t^*$, ta có:*

$$f'(t) \leq a(t)f(t) + b(t).$$

Khi đó, với mỗi $t \in I$ sao cho $t \geq t^*$, ta có:

$$f(t) \leq [\int_{t^*}^t e^{(\int_s^t a(\tau)d\tau)}b(s)ds] + f(t^*)e^{(\int_{t^*}^t a(\tau)d\tau)}.$$

Định nghĩa 3. (Định nghĩa hàm số lồi ([6])) *Cho tập $I = (a, b)$ với $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Một hàm số $\phi : I \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi trên I*

nếu với mỗi $x, y \in I$ và mỗi $t \in [0, 1]$, ta có:

$$\phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y).$$

Bổ đề 4 (**Bất đẳng thức Jensen ([6])**). *Cho hàm số $\phi : I \to \mathbb{R}$ lồi trên I. Khi đó, ta có các bất đẳng thức sau:*

(i) ***Bất đẳng thức Jensen dạng rời rạc:*** *Với mỗi dãy số $p_1, \ldots, p_n \geq 0$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ và mỗi dãy $x_1, \ldots, x_n \in I$ ta có:*

$$\phi\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \phi(x_i).$$

(ii) ***Bất đẳng thức Jensen dạng tích phân:*** *Cho $I = \mathbb{R}$, tức là hàm số $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lồi trên $\mathbb{R}$, cho (Ω, Σ, μ) là một không gian độ đo với $\mu(\Omega) = 1$ và $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho $f \in L^1(\Omega)$. Khi đó:*

$$\phi\Big(\int_\Omega f d\mu\Big) \leq \int_\Omega (\phi \circ f) d\mu.$$

Định nghĩa 4. *(***Không gian Sobolev ([4])***)*

(1) ***Đạo hàm yếu:*** *Cho $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Khi đó, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ được gọi đạo hàm yếu theo biến x_i của u nếu với mỗi $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, ta có: (ở đây ψ_{x_i} là đạo hàm theo x_i thông thường của ψ)*

$$\int_\Omega u\psi_{x_i} dx = -\int_\Omega v\psi dx.$$

Hàm v như vậy là duy nhất (h.k.n trên Ω) và ta kí hiệu nó (nếu tồn tại) là u_{x_i}.

Tổng quát hơn, hàm $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ được gọi đạo hàm yếu theo cấp $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ của $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ nếu với mỗi $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, ta có:

$$\int_\Omega u D^\alpha \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\psi dx.$$

Hàm v như vậy là duy nhất (h.k.n trên Ω) và ta kí hiệu nó (nếu tồn *tại) là* $D^\alpha u$.

(2) ***Không gian Sobolev***: *Với mỗi* $k \in \mathbb{N}^*$, $1 \le p \le \infty$, *ta định nghĩa:*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) | D^\alpha u \text{ tồn tại}, D^\alpha u \in L^p(\Omega)$$

$$\text{với mỗi } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ sao cho } |\alpha| \le k\}$$

và $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$. *Ta trang bị cho* $W^{k,p}(\Omega)$ *chuẩn sau đây:*

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx)^{\frac{1}{p}} \text{ nếu } 1 \le p < \infty, \\ \sum_{i=1}^N esssup_\Omega \{|D^\alpha u|\} \text{ nếu } p = \infty. \end{cases}$$

Với chuẩn này thì $W^{k,p}(\Omega)$ *trở thành không gian Banach và* $H^k(\Omega)$ *trở thành không gian Hilbert cùng với tích vô hướng sau:*

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

Với mỗi $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *ta định nghĩa gradient (yếu)* ∇u *của* u *như sau:*

$$\nabla u := (u_{x_1}, \ldots, u_{x_N}) \quad (\in (L^p(\Omega))^N).$$

Định nghĩa 5. (Không gian hàm phụ thuộc thời gian ([4])) *Cho* $T \in \mathbb{R}, T > 0$ *và không gian Banach* X. *Khi đó, ta định nghĩa các không gian sau:*

Với $1 \le p \le \infty$, *ta định nghĩa:*

$$L^p(0,T;X) := \{u : [0,T] \to X | \int_0^T ||u(t)||_X^p dt < +\infty\} \text{ khi } p < \infty,$$

$$L^p(0,T;X) := \{u : [0,T] \to X | \underset{t \in [0,T]}{esssup} \{||u(t)||_X\} < +\infty\} \text{ khi } p = \infty,$$

với chuẩn

$$||u||_{L^p(0,T;X)} := \begin{cases} (\int_0^T ||u(t)||_X^p dt)^{\frac{1}{p}} \text{ khi } p < \infty, \\ esssup_{t\in[0,T]}\{||u(t)||_X\} \text{ khi } p = \infty, \end{cases}$$

và $C([0,T];X) := \{u : [0,T] \to X | u$ *liên tục trên* $[0,T]\}$ *trang bị chuẩn* $||u||_{C([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]}\{||u(t)||_X\}$. *Khi đó,* $L^p(0,T;X)$ *và* $C([0,T];X)$ *là các không gian Banach. Hơn nữa, khi* X *là không gian Hilbert thì* $L^2(0,T;X)$ *là không gian Hilbert với tích vô hướng là:*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt.$$

Định nghĩa 6. (Đạo hàm yếu theo thời gian [4]) *Hàm* $v \in L^1(0,T;X)$ *là đạo hàm yếu theo thời gian của* $u \in L^1(0,T;X)$, *kí hiệu* $\partial_t u$, *nếu với mỗi* $\psi \in C_c^\infty(0,T)$, *ta có:*

$$\int_0^T u\psi' dt = -\int_0^T v\psi dt.$$

Ta định nghĩa không gian các hàm liên tục và không gian các hàm có đạo hàm theo thời gian như sau:

$$C^1([0,T];X) := \{u \in C([0,T];X)|\ \partial_t u \text{ tồn tại và } \partial_t u \in C([0,T];X)\},$$

đồng thời $C^1([0,T];X)$ *được trang bị chuẩn:*

$$||u||_{C^1([0,T];X)} := \max_{t\in[0,T]}\{|u(t)|\} + \max_{t\in[0,T]}\{|\partial_t u(t)|\}$$

Với mỗi $1 \le p \le \infty$, *ta định nghĩa:*

$$W^{1,p}(0,T;X) := \{u \in L^p(0,T;X)|\ \partial_t u \text{ tồn tại và } \partial_t u \in L^p(0,T;X)\},$$

với chuẩn

$$||u||_{W^{1,p}(0,T;X)} := \begin{cases} \Big[\displaystyle\int_0^T (||u||_X^p + ||\partial_t u||_X^p) dt \Big]^{\frac{1}{p}} \text{ nếu } p < \infty, \\ \underset{t\in[0,T]}{esssup} (||u(t)||_X + ||\partial_t u(t)||_X) \text{ nếu } p = \infty, \end{cases}$$

và $H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$ *và* $W^{0,p}(0,T;X) = L^p(0,T;X)$.

Bổ đề 5. ([4]) *Cho* X *là một không gian Banach thực,* $T > 0$ *và* $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ *với* $1 \le p \le \infty$. *Khi đó* $u \in C([0,T];X)$.

Bổ đề 6. ([4]) *Cho* $u \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ *với* $\partial_t u \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)$. *Khi đó* $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$.

Bổ đề 7 (Bất đẳng thức Poincare ([4])). *Cho* Ω *là một tập mở, bị chặn và liên thông trong* $\mathbb{R}^N$ *với biên* $\partial\Omega$ *là* C^1. *Cho* $1 \le p \le \infty$. *Thế thì tồn tại hằng số* $C > 0$ *chỉ phụ thuộc vào* N, p *và* Ω *sao cho với mỗi* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *ta có:*

$$||u - \bar{u}||_{L^p(\Omega)} \le C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}.$$

Từ bổ đề trên, ta có hằng số Poincare $C_2 > 0$ (ứng với $p = 2$) chỉ phụ thuộc vào Ω và N sao cho với mỗi $u \in H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, ta có $||u - \bar{u}|| \le C_2||\nabla u||$ hay

$$\int_\Omega |u - \bar{u}|^2 dx \le C_P \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad (C_P = C_2^2 > 0).$$

Định nghĩa 7. (Phần dương và phần âm)
Cho hàm $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Ta nhắc lại định nghĩa hàm phần dương và hàm phần âm của u trên Ω như sau:

- Phần dương: $u^+(x) = \max\{u(x), 0\} = u(x)\boldsymbol{1}_{\{y\in\Omega:u(y)\ge 0\}}(x) \ge 0$.
- Phần âm: $u^-(x) = -\min\{u(x), 0\} = -u(x)\boldsymbol{1}_{\{y\in\Omega:u(y)<0\}}(x) \ge 0$.

Khi đó $u = u^+ - u^-$, $|u| = u^+ + u^-$ và khi $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ thì:

$$\nabla u^+ = \nabla u_i \boldsymbol{1}_{\{y\in\Omega: u(y)\geq 0\}}, \nabla u^- = -\nabla u_i \boldsymbol{1}_{\{y\in\Omega: u(y)<0\}} \text{ h.k.n trên } \Omega.$$

Bổ đề 8. (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ([6]))
Cho không gian vectơ thực H với tích vô hướng $(\cdot,\cdot)_H$ và chuẩn $||\cdot||_H$ sinh bởi $(\cdot,\cdot)_H$, tức là $||u||_H = \sqrt{(u,u)_H}$. Khi đó, với mỗi $u, v \in H$, ta có:

$$|(u,v)_H| \leq ||u||_H||v||_H.$$

Bổ đề 9. (Định lí biểu diễn Riesz ([7])) *Cho không gian Hilbert H với tích vô hướng $(\cdot,\cdot)_H$ và $||\cdot||_H$ là chuẩn sinh bởi $(\cdot,\cdot)_H$. Khi đó, với mỗi phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \in H^*$, tồn tại duy nhất $u_f \in H$ sao cho với mỗi $v \in H$, ta có $f(v) = (u_f, v)_H$. Hơn nữa khi đó $||f||_{H^*} = ||u_f||_H$.*

Khi đó song ánh $F_H^{-1} : H^* \to H : f \mapsto u_f$ và ánh xạ ngược $F_H : H \to H^* : u \mapsto (v \mapsto (u,v)_H)$ đều là đẳng cấu tuyến tính liên tục.

Bổ đề 10. ([7]) *Cho H là một không gian Hilbert tách được và $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ là một cơ sở trực giao của H. Khi đó*

$$\textit{Tập } G := \{\sum_{k=1}^{N_0} f_k(t)g_k | f_k(t) \in C^\infty(0,T)\} \textit{ trù mật trong } L^2(0,T;H).$$

Định nghĩa 8. (Toán tử compact ([7])) *Cho các không gian tuyến tính định chuẩn H và K. Khi đó, toán tử tuyến tính $T : H \to K$ được gọi là compact nếu $T(B_H)$ có bao đóng compact trong K, trong đó B_H là quả cầu đóng đơn vị của H.*

Ta có một số tính chất của toán tử tuyến tính compact ([7]):

- Mọi toán tử tuyến tính compact đều liên tục.
- Với các toán tử tuyến tính $L : U \to V$ và $L' : V \to W$ sao cho L liên tục và L' compact hoặc L' compact và L liên tục thì $L' \circ L : U \to W$ là một toán tử compact.

Bổ đề 11 (Định lí Schauder ([7])). *Toán tử tuyến tính liên tục $L : U \to V$ là compact khi và chỉ khi toán tử liên hợp $L^* : V^* \to U^*$ là compact.*

Định nghĩa 9. (Toán tử tự liên hợp trong không gian Hilbert ([4])) *Cho không gian Hilbert H với tích vô hướng $(\cdot, \cdot)_H$. Khi đó, toán tử tuyến tính liên tục $L : H \to H$ được gọi là tự liên hợp nếu với mỗi $u, v \in H$, ta có:*

$$(Lu, v)_H = (u, Lv)_H.$$

Định lí sau cho phép ta có được cơ sở thích hợp để xây dựng nghiệm khi có được toán tử compact tự liên hợp:

Bổ đề 12. (Định lí phổ ([4])) *Cho không gian Hilbert tách được H và cho $S : H \to H$ là một toán tử compact tự liên hợp. Khi đó, tồn tại cơ sở trực chuẩn đếm được $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ của H gồm toàn các vectơ riêng của S (tức là tồn tại dãy giá trị riêng $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ của S sao cho với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có $S(g_k) = \nu_k g_k$).*

Bổ đề 13. (Định lí điểm bất động Banach) *Cho không gian metric đủ (X, d) và ánh xạ $f : X \to X$ là một ánh xạ co, tức là tồn tại $0 \leq q < 1$ sao cho với mỗi $x, y \in X$, ta có:*

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y).$$

Khi đó, có duy nhất một phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = x$.

Bổ đề 14. (Hệ quả của định lí Rellich-Kondrachov (nhận xét cuối trang 274 trong [4])) *Cho $\Omega \subset R^N$ là một tập mở, bị chặn với biên $\partial\Omega$ là C^1. Khi đó, với mọi $1 \leq p \leq \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ nhúng compact vào trong $L^p(\Omega)$, kí hiệu $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$, tức là nhúng chính tắc $I : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) : u \mapsto u$ là compact.*

Định nghĩa 10. (Phép nhúng chính tắc $L^2(\Omega)$ vào $(H^1(\Omega))^*$ (tương tự như trong [4]))

Áp dụng hệ quả của định lí Rellich-Kondrachov, nhúng chuẩn tắc $I : H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega) : u \mapsto u$ là compact. Do đó, theo định lí

Schauder, ánh xạ liên hợp $I^* : (L^2(\Omega))^* \to (H^1(\Omega))^*$ là một toán tử compact (và cũng là một phép nhúng), trong đó

$$\text{Vói mỗi } g \in (H^1(\Omega))^* \text{ và mỗi } u \in L^2(\Omega) : I^*(g)(u) = g(Iu) = g(u).$$

Đồng thời, áp dụng định lí biểu diễn Riesz cho các không gian Hilbert $L^2(\Omega)$ và $H^1(\Omega)$, các ánh xạ $F_{L^2(\Omega)} : L^2(\Omega) \to (L^2(\Omega))^*$ và $F^{-1}_{H^1(\Omega)} : (H^1(\Omega))^* \to H^1(\Omega)$ là xác định và đều là đẳng cấu tuyến tính liên tục. Do đó:

- Ta định nghĩa ánh xạ nhúng chuẩn tắc $T_\Omega : L^2(\Omega) \to (H^1(\Omega))^*$ như sau:
  $T_\Omega(u)(v) = (u,v)_{L^2(\Omega)}$ với mọi $u \in L^2(\Omega)$ và mọi $v \in H^1(\Omega)$.
  Khi đó T_Ω thỏa mãn $T_\Omega = I^* \circ F_{L^2(\Omega)}$ nên T_Ω là một toán tử nhúng compact. Ta sử dụng phép nhúng này để nhúng $L^2(\Omega)$ vào $(H^1(\Omega))^*$, và dưới phép nhúng này, với mỗi $u \in L^2(\Omega)$, ta có:

$$\text{Với mỗi } v \in H^1(\Omega) : \langle u, v\rangle = (u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uvdx \text{ và}$$
$$||u||_{(H^1(\Omega))^*} := ||T_\Omega u||_{(H^1(\Omega))^*} = \sup_{||v||_{H^1(\Omega)} \le 1} \{|(u,v)_{L^2(\Omega)}|\},$$

  trong đó $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là phép ghép cặp chính tắc giữa $H^1(\Omega)$ và $(H^1(\Omega))^*$:

$$\langle f, v\rangle = f(v) \text{ với mỗi } f \in (H^1(\Omega))^* \text{ và mỗi } v \in H^1(\Omega).$$

- Định nghĩa ánh xạ $S_\Omega : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ sao cho với mỗi $u \in H^1(\Omega)$, ta có $S_\Omega(u)$ là phần tử duy nhất của $H^1(\Omega)$ để

$$(S_\Omega(u), v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uvdx \text{ với mỗi } v \in H^1(\Omega).$$

  Khi đó S_Ω thỏa mãn $S_\Omega = F^{-1}_{H^1(\Omega)} \circ I^* \circ F_{L^2(\Omega)} \circ I$ nên S_Ω compact. Hơn nữa, với mỗi $u, v \in H^1(\Omega)$, ta có $(S_\Omega(u), v)_{H^1(\Omega)} = (u, S_\Omega(v))_{H^1(\Omega)}$. Vậy $S_\Omega : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ là một toán tử tự liên hợp và compact.

Đồng thời, ta có một số bất đẳng thức sơ cấp sau:

- Bất đẳng thức Young với $p = q = 2$ cho số thực bất kì dạng:
$2xy \leq x^2 + y^2$ và tổng quát hơn là $2xy \leq \frac{1}{\rho}x^2 + \rho y^2$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và $\rho \in \mathbb{R}, \rho > 0$ bất kì.

- Bất đẳng thức quen thuộc $e^x \geq x + 1$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$.

- Bất đẳng thức Cauchy-Schawarz dạng $x^2 + y^2 \geq \dfrac{1}{2}(x - y)^2$ với mỗi $x, y \in \mathbb{R}$.

CHƯƠNG 2

TRƯỜNG HỢP CÁC HỆ SỐ PHẢN ỨNG PHỤ THUỘC VÀO THỜI GIAN

Trong chương này, chúng tôi xét hệ phương trình cho hệ phản ứng-khuếch tán ban đầu với tốc độ phản ứng $a_{ij}(t)$ hội tụ khi $t \to +\infty$ với mỗi $1 \leq i, j \leq N$, cụ thể:

$$a_{ij}(t) \to a_{ij,\infty} \in \mathbb{R} \text{ khi } t \to +\infty \text{ với mỗi } i, j = 1, \ldots, N. \tag{2.0.1}$$

Qua giới hạn $t \to +\infty$ đối với các điều kiện ở (0.0.2), ta được ma trận $A_\infty = (a_{ij,\infty})_{N\times N}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_{ij,\infty} \geq 0 \text{ với mỗi } i, j = 1, \ldots, N,\ i \neq j, \\ a_{jj,\infty} = -\sum_{i=1, i\neq j}^{N} a_{ij,\infty} \text{ với mỗi } j = 1, \ldots, N, \end{cases} \tag{2.0.2}$$

nên $(1, \ldots, 1)^T$ là một vectơ riêng trái ứng với giá trị riêng 0 của A_∞.

Ở đây, ta chỉ xét trường hợp đồ thị $G_\infty = G_{A_\infty}$ ứng với ma trận A_∞ liên thông mạnh và $a_{ij}(t) \in L^\infty([0, +\infty))$ với mỗi $1 \leq i, j \leq N$. Đồng thời ta kí hiệu $H_A = \max_{1\leq i,j\leq N}\{||a_{ij}||_{L^\infty}\} > 0$. Khi đó, với mỗi $1 \leq i, j \leq N$:

$$a_{ij}(t) \leq |a_{ij}(t)| \leq ||a_{ij}||_{L^\infty} \leq H_A \text{ h.k.n trên } [0, +\infty).$$

2.1 Trạng thái cân bằng

Trạng thái cân bằng của hệ (0.0.1) được định nghĩa như sau

Định nghĩa 11 (Trạng thái cân bằng (equilibrium))**.** *Với $M > 0$ thì trạng thái $X_* = (u_{1,*}, \dots, u_{N,*}) > 0$ được gọi là trạng thái cân bằng nếu nó thỏa mãn:*

$$A_\infty X_* = 0 \text{ và } u_{1,*} + \cdots + u_{N,*} = M.$$

Khi $M > 0$ thì do G_∞ liên thông mạnh và A_∞ có vectơ riêng trái dương $(1, \dots, 1)^T$ ứng với giá trị riêng 0 nên theo bổ đề 1, có duy nhất một trạng thái cân bằng, ta kí hiệu là $X_\infty = (u_{1,\infty}, \dots, u_{N,\infty})$.

Nhận xét 2. Cũng theo bổ đề 1, tồn tại duy nhất trạng thái dương $X^1_\infty = (u^1_{1,\infty}, \dots, u^1_{N,\infty})$ sao cho $A_\infty X^1_\infty = 0$ và $u^1_{1,\infty} + \cdots + u^1_{N,\infty} = 1$. Ta gọi X^1_∞ là trạng thái đơn vị và nó chỉ phụ thuộc vào A_∞.
Khi $M > 0$ thì $\frac{X_\infty}{M} = (\frac{u_{1,\infty}}{M}, \dots, \frac{u_{N,\infty}}{M}) > 0$ thỏa mãn:

$$A_\infty(\frac{X_\infty}{M}) = \frac{A_\infty X_\infty}{M} = 0 \text{ và } \frac{u_{1,\infty}}{M} + \cdots + \frac{u_{N,\infty}}{M} = \frac{M}{M} = 1.$$

Kết hợp với tính duy nhất của X^1_∞, ta thu được:

$$X^1_\infty = \tfrac{X_\infty}{M} \text{ hay } u^1_{i,\infty} = \tfrac{u_{i,\infty}}{M} \text{ và do đó } u_{i,\infty} = M u^1_{i,\infty} \text{ với mỗi } 1 \le i \le N.$$

2.2 Nghiệm yếu của hệ phản ứng khuếch tán

Ở phần này, ta sẽ đưa ra kết quả về sự tồn tại duy nhất của nghiệm yếu của hệ (0.0.1), đưa ra một số đánh giá năng lượng cho nghiệm yếu và tìm hiểu liên hệ giữa nghiệm yếu và nghiệm cổ điển:

Định nghĩa 12. *Cho $T > 0$. Hàm vectơ $X = (u_1, \dots, u_N)$ với các hàm $u_i : [0, T] \to L^2(\Omega)$ được gọi là một nghiệm yếu của hệ (0.0.1) nếu các tính chất sau được thỏa mãn với mỗi $1 \le i \le N$:*

(1) $u_i \in C([0,T]; L^2(\Omega))$,

(2) *Khi* $d_i > 0$, *ta có* $u_i \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$, $\partial_t u_i \in L^2(0,T; (H^1(\Omega))^*)$ *và với mọi* $\omega \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$, *ta có:*

$$\int_0^T \langle \partial_t u_i, \omega \rangle \, dt = -d_i \int_0^T \int_\Omega \nabla u_i \nabla \omega dx dt + \sum_{j=1}^N \int_0^T a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dx dt. \tag{2.2.3}$$

(3) *Khi* $d_i = 0$, *ta có* $u_i \in H^1(0,T; L^2(\Omega))$ *và với mọi* $\omega \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, *ta có:*

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u_i \omega dx dt = \sum_{j=1}^N \int_0^T a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dx dt. \tag{2.2.4}$$

(4) $u_i(\cdot, 0) = u_{i,0}$.

Tiếp theo, ta có định lí sau về sự tồn tại duy nhất của nghiệm yếu và một số đánh giá năng lượng cho nghiệm yếu:

Định lí 1. *Hệ ban đầu (0.0.1) có nghiệm yếu* $X = (u_1, \ldots, u_N)$ *trên* $[0,T]$ *với mỗi* $T > 0$ *và nghiệm đó là duy nhất h.k.n trên* Ω, *tức là với* $Z = (z_1, \ldots, z_N)$ *cũng là nghiệm yếu trên* $[0,T]$ *của hệ (0.0.1), ta có:*

$$u_i(x,t) = z_i(x,t) \text{ h.k.n trên } \Omega \text{ với mỗi } i \in \{1, \ldots, N\} \text{ và mỗi } t \in [0,T].$$

Hơn nữa:

(1) $X(t) \geq 0$ *h.k.n trên* Ω *với mọi* $t \in [0,T]$.

(2) *Bảo toàn khối lượng:* $\displaystyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega u_i dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega u_{i,0} dx = M$ *trên* $[0,T]$.

(3) *Ta có các đẳng thức sau:*
Khi $d_i > 0$ *thì với mỗi* $\phi \in H^1(\Omega)$, *ta có:*

$$\langle \partial_t u_i, \phi \rangle = -d_i \int_\Omega \nabla u_i \nabla \phi dx + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \phi dx \text{ h.k.n trên } [0,T], \tag{2.2.5}$$

và khi $d_i = 0$ thì với mỗi $\phi \in L^2(\Omega)$, ta có:

$$\int_\Omega \partial_t u_i \phi dx = \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \phi dx \text{ h.k.n trên } [0,T]. \qquad (2.2.6)$$

(4) *Ta có các đánh giá năng lượng sau:*

- *Đánh giá bình phương: Với mỗi $t \in [0,T]$, ta có:*

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega |u_i(x,t)|^2 dx \leq K_{X_0} e^{\mu_A t}. \qquad (2.2.7)$$

- *Với mỗi $i = 1, \dots, N$, ta có $||u_i||_{C([0,T],L^2(\Omega))} \leq \sqrt{K_{X_0}} e^{\mu_A T}$,*
- *Khi $d_i > 0$, ta có $||u_i||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C^1_{i,D,A} \sqrt{K_{X_0}} e^{\mu_A T}$ và:*

$$||\partial_t u_i||_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)} \leq C^2_{i,D,A} \sqrt{K_{X_0}} e^{\mu_A T},$$

- *Khi $d_i = 0$ thì $||u_i||_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq C^3_A \sqrt{K_{X_0}} e^{\mu_A T}$,*

với $K_{X_0} = \sum_{i=1}^N ||u_{i,0}||^2_{L^2(\Omega)}$, μ_A và C^3_A phụ thuộc vào hàm $A(t)$ và $C^1_{i,D,A}, C^2_{i,D,A} > 0$ chỉ phụ thuộc vào i, D và hàm $A(t)$, cụ thể ta có thể lấy $\mu_A = NH_A$ cùng với:

$$C^1_{i,D,A} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{NH_A}\right)}, C^2_{i,D,A} = \sqrt{d_i + H_A}, C^3_A = \sqrt{\frac{1}{2NH_A} + \frac{H_A}{2}}.$$

Chứng minh định lí 1. Ta sẽ sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin theo cách tương tự như trong [4]. Chứng minh chi tiết dài và được trình bày cụ thể trong phụ lục. □

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra liên hệ giữa nghiệm cổ điển và nghiệm yếu của hệ (0.0.1):

Định nghĩa 13. (Nghiệm cổ điển địa phương và toàn cục)
Ta định nghĩa nghiệm cổ điển (toàn cục) như sau:

- Cho $T > 0$. Ta nói $X = (u_1, \dots, u_N)$ với $u_i : [0,T] \to H^1(\Omega)$ là một nghiệm cổ điển địa phương trên $[0,T]$ của hệ (0.0.1) nếu với mỗi $1 \le i \le N$, ta có $u_i \in C^1([0,T], C^2(\bar{\Omega}))$ và:

$$\begin{cases} \text{Với mỗi } 1 \le i \le N, x \in \Omega, t \in (0,T] : \partial_t u_i = d_i \Delta u_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t) u_i, \\ \text{Với mỗi } 1 \le i \le N \text{ để } d_i > 0, x \in \partial\Omega \text{ và } t \in (0,T] : \partial_\nu u_i = 0, \\ \text{Với mỗi } 1 \le i \le N : u_i(\cdot, 0) = u_{i,0}. \end{cases}$$

- Ta nói $X = (u_1, \dots, u_N)$ với $u_i : [0, +\infty) \to H^1(\Omega)$ là một nghiệm cổ điển toàn cục của hệ (0.0.1) nếu với mỗi $T > 0$, thu hẹp

$$X\Big|_{[0,T]} = (u_1\Big|_{[0,T]}, \dots, u_N\Big|_{[0,T]})$$

là nghiệm cổ điển địa phương trên $[0,T]$ của hệ (0.0.1).

Định lí sau cho ta liên hệ giữa nghiệm cổ điển và nghiệm yếu của hệ (0.0.1):

Định lí 2. *(Nghiệm cổ điển là nghiệm yếu)*

(1) *Với $T > 0$ và nghiệm cổ điển địa phương $X = (u_1, \dots, u_N)$ trên $[0,T]$ của hệ (0.0.1) thì X cũng là nghiệm yếu của hệ (0.0.1) trên $[0,T]$.*

(2) *Đặc biệt, nếu $X = (u_1, \dots, u_N)$ với $u_i : [0, +\infty) \to H^1(\Omega)$ là một nghiệm cổ điển toàn cục của hệ (0.0.1) thì với mỗi $T > 0$:*

$X\Big|_{[0,T]} = (u_1\Big|_{[0,T]}, \dots, u_N\Big|_{[0,T]})$ *là nghiệm yếu trên $[0,T]$ của hệ (0.0.1).*

(Nghiệm yếu đủ chuẩn tắc là nghiệm cổ điển)

(3) *Với mỗi $T > 0$: Nếu $a_{ij}(t) \in C([0,T])$ với mỗi $1 \le i, j \le N$ thì mỗi nghiệm yếu $X = (u_1, \dots, u_N)$ trên $[0,T]$ của hệ (0.0.1) thỏa mãn $u_i \in C^1([0,T], C^2(\bar{\Omega}))$ với mỗi $1 \le i \le N$ đều là nghiệm cổ điển địa phương của hệ (0.0.1) trên $[0,T]$.*

Chứng minh. **(1)** Xét mỗi $T > 0$ và mỗi nghiệm cổ điển địa phương $X = (u_1, \ldots, u_N)$ trên $[0, T]$ của hệ (0.0.1):

Theo định nghĩa nghiệm cổ điển địa phương, ta có

$$u_i \in C^1([0,T], C^2(\bar{\Omega})) \text{ với mỗi } i \in \{1, \ldots, N\},$$

và

- Với mỗi $1 \le i \le N, x \in \Omega, t \in (0,T]$: $\partial_t u_i = d_i \Delta u_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t) u_i$,
- Với mỗi $1 \le i \le N$ để $d_i > 0, x \in \partial\Omega$ và $t \in (0,T] : \partial_\nu u_i = 0$,
- Với mỗi $1 \le i \le N$: $u_i(\cdot, 0) = u_{i,0}$.

Vậy với mỗi $1 \le i \le N$, $u_i \in C([0,T], L^2(\Omega))$ và $u_i(\cdot,0) = u_{i,0}$, khi $d_i > 0$ thì $u_i \in L^2([0,T], H^1(\Omega))$ và $\partial_t u_i \in L^2([0,T], (H^1(\Omega))^*)$, còn khi $d_i = 0$ thì $u_i \in H^1([0,T], L^2(\Omega))$. Đồng thời, sử dụng tích phân từng phần, ta được:

Khi $d_i > 0$ và với mọi $\omega \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$:

$$\int_0^T \langle \partial_t u_i, \omega \rangle \, dt = \int_0^T \int_\Omega \partial_t u_i \omega dx dt$$
$$= d_i \int_0^T \int_\Omega \Delta u_i \omega dx dt + \sum_{j=1}^{N} \int_0^T a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dx dt$$
$$= -d_i \int_0^T \int_\Omega \nabla u_i \nabla \omega dx + \sum_{j=1}^{N} \int_0^T a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dx \quad (\text{do } \partial_\nu u_i \equiv 0),$$

và khi $d_i = 0$ và với mọi $\omega \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$:

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u_i \omega dx = \sum_{j=1}^{N} \int_0^T a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dx.$$

Vậy X là một nghiệm yếu trên $[0,T]$ của hệ (0.0.1).

(2) Suy ra ngay từ phần (**1**) và định nghĩa nghiệm cổ điển toàn cục.

(3) Xét mỗi $T > 0$ sao cho $a_{ij}(t) \in C([0,T])$ và mỗi nghiệm yếu $X = (u_1, \ldots, u_N)$ trên $[0,T]$ của hệ (0.0.1) thỏa mãn $u_i \in C^1([0,T], C^2(\bar{\Omega}))$

với mỗi $i \in \{1, \ldots, N\}$:

Khi đó $u_i(\cdot, 0) = u_{i,0}$ với mỗi $1 \leq i \leq N$. Hơn nữa, với mỗi $1 \leq i \leq N$ và mỗi $\omega \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, sử dụng định nghĩa nghiệm yếu và tích phân từng phần, ta được:

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u_i \omega dxdt = -d_i \int_0^T \int_\Omega \nabla u_i \nabla \omega dxdt + \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dxdt$$
$$= d_i(\int_0^T \int_\Omega \Delta u_i \omega dxdt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u_i \omega dxdt) + \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dxdt. \tag{2.2.8}$$

Đặc biệt do $\int_0^T \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u_i \omega dxdt = 0$ với mỗi $\omega \in C([0, T]; C_c^\infty(\Omega)) \subset L^2(0, T; H^1(\Omega))$ nên với mỗi $\omega \in C([0, T]; C_c^\infty(\Omega))$, ta được:

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u_i \omega dxdt = \int_0^T \int_\Omega (d_i \Delta u_i + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) u_j) \omega dxdt.$$

Kết hợp với giả thiết $a_{ij}(t) \in C([0, T])$ và $u_i \in C^1([0, T], C^2(\bar{\Omega}))$ với mỗi $1 \leq i, j \leq N$, ta được $\partial_t u_i = d_i \Delta u_i + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) u_j$ với mỗi $1 \leq i \leq N, x \in \Omega$ và $t \in (0, T]$. Thế $\partial_t u_i = d_i \Delta u_i + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) u_j$ vào (2.2.8), với mỗi $1 \leq i \leq N$ sao cho $d_i > 0$ và mỗi $\omega \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, ta được

$$d_i \int_0^T \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u_i \omega dxdt = 0 \text{ nên } \int_0^T \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u_i \omega dxdt = 0 \text{ (do } d_i > 0).$$

Do đó với mỗi $1 \leq i \leq N$ để $d_i > 0$, mỗi $x \in \partial\Omega$ và $t \in (0, T]$, ta có $\partial_\nu u_i = 0$. Vậy X là nghiệm cổ điển địa phương của hệ (0.0.1) trên $[0, T]$.

□

2.3 Hàm entropy cho hệ phản ứng khuếch tán

Ta sẽ định nghĩa khái niệm entropy tương đối và dùng nó để định lượng sự hội tụ về trạng thái cân bằng của nghiệm của hệ (0.0.1).

Định nghĩa 14 (**Định nghĩa entropy tương đối** (**[3, trang 8]**))**.** *Ta định nghĩa entropy tương đối như sau:*

$$E(S|T) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{|s_i|^2}{t_i} dx$$

với mỗi $S = (s_1, \ldots, s_N), T = (t_1, \ldots, t_N)$ *sao cho với mỗi* $i \in \{1, \ldots, N\}$, *ta có* $s_i, t_i \in L^2(\Omega)$ *và* $t_i(x) \neq 0$ *trên* Ω.

Từ phần này trở đi, nếu không nói gì thêm, ta hiểu "X là nghiệm của hệ (0.0.1)" là "X là một nghiệm cổ điển toàn cục của hệ (0.0.1)" và ta luôn giả thiết $M := \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} u_{i,0} dx > 0$.

Ta sẽ đánh giá tốc độ hội tụ của nghiệm X của hệ 0.0.1 đến X_∞ thông qua đánh giá $E(X - X_\infty|X_\infty) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{|u_i - u_\infty|^2}{u_{i,\infty}} dx$. Để đơn giản hóa tính toán, ta sử dụng kí hiệu $W = X - X_\infty$:

$$W = (w_1, \ldots, w_N) = (u_1 - u_{1,\infty}, \ldots, u_N - u_{N,\infty}) = X - X_\infty.$$

Do X, X_∞ lần lượt thỏa mãn $X_t = D\Delta X + A(t)X \quad (x \in \Omega, t > 0)$ và $(X_\infty)_t = 0 = D\Delta X_\infty + A_\infty X_\infty$, bằng cách trừ vế với vế hai đẳng thức trên, ta được $W = X - X_\infty$ thỏa mãn:

$$W_t = D\Delta W + A(t)W + (A(t) - A_\infty)X_\infty \quad (x \in \Omega, t > 0)$$

và $\partial_\nu w_i = \partial_\nu u_i = 0 \quad (x \in \partial\Omega, t > 0)$ mỗi khi $d_i > 0$ với điều kiện ban đầu $W(x, 0) = X(x, 0) - X_\infty = X_0(x) - X_\infty$.

Hơn nữa, khối lượng ban đầu của W là 0 được bảo toàn, tức là:

$$M_W = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega w_i(x,t)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega w_{i,0}dx = M - M = 0 \text{ với mỗi } t \geq 0.$$

Đánh giá ban đầu cho entropy:

Theo đánh giá (2.2.7) định lí 1, với $T > 0$ và mỗi nghiệm yếu $X = (u_1, \ldots, u_N)$ của hệ (0.0.1), với mỗi $t \in [0,T]$, ta có

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |u_i(x,t)|^2 dx \leq \sum_{i=1}^{N} ||u_{i,0}||^2 e^{2NH_A t} = K_{X_0} e^{\mu_A t}.$$

Vì $\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega u_i dx = M$ và $\sum_{i=1}^{N} u_{i,\infty} = M$ nên với $t \in [0,T]$, ta được:

$$\begin{aligned}
E(X - X_\infty|X_\infty)(t) &= E(W|X_\infty)(t) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{|u_i - u_{i,\infty}|^2}{u_{i,\infty}} dx \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{|u_i|^2}{u_{i,\infty}} dx - 2\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega u_i dx + \sum_{i=1}^{N} u_{i,\infty} = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{|u_i|^2}{u_{i,\infty}} dx - M \\
&\leq \max_{1\leq i\leq N}\{\frac{1}{u_{i,\infty}}\}(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |u_i|^2 dx) - M \leq \max_{1\leq i\leq N}\{\frac{1}{u_{i,\infty}}\} K_{X_0} e^{\mu_A t} - M,
\end{aligned}$$

tức là ta có đánh giá ban đầu sau cho entropy với mỗi $t \in [0,T]$:

$$E(W|X_\infty)(t) \leq \alpha_{X_0} e^{\mu_A t} - M \leq \alpha_{X_0} e^{\mu_A t}, \tag{2.3.9}$$

với hằng số $\alpha_{X_0} = \max_{1\leq i\leq N}\{\frac{1}{u_{i,\infty}}\} K_{X_0} \geq 0$ chỉ phụ thuộc vào A_∞, M và X_0, còn $\mu_A = 2H_A N > 0$ chỉ phụ thuộc vào hàm $A(t)$ và N.

Đặc biệt, với nghiệm (cổ điển toàn cục) X bất kì của hệ (0.0.1) thì với mỗi $T > 0$, $X|_{[0,T]}$ là nghiệm yếu của hệ (0.0.1) trên $[0,T]$ nên mỗi $t \in [0, +\infty)$ thỏa mãn

$$E(W|X_\infty)(t) \leq \alpha_{X_0} e^{\mu_A t} - M \leq \alpha_{X_0} e^{\mu_A t}. \tag{2.3.10}$$

2.4 Ước lượng độ tiêu tán của entropy

Tuy nhiên, ta muốn có chặn trên của entropy tốt hơn so với chặn lũy thừa ở đánh giá ban đầu (2.3.10). Để thực hiện điều đó, ta sẽ sử dụng đánh giá sau:

Bổ đề 15. ***(Bổ đề về độ tiêu tán của entropy)***
Cho các hàm vectơ $X = (u_1, \dots, u_N), Y = (v_1, \dots, v_N)$ và $T > 0$ để với mọi $1 \le i \le N$, ta có $u_i, v_i \in H^1(0, T; H^2(\Omega)), v_i(x, t) \neq 0$ trên $\Omega \times [0, T]$ và:

$$X_t = D\Delta X + A(t)X + (A(t) - A_\infty)Y \text{ và } Y_t = D\Delta Y + A_\infty Y \text{ trên } \Omega \times (0, T),$$

và khi $d_i > 0$, ta có điều kiện biên $\partial_\nu u_i \equiv \partial_\nu v_i \equiv 0$ trên $\partial\Omega$. Kí hiệu $E(X|Y)(t) := E(X(t)|Y(t))$. Khi đó, với mỗi $t \in (0, T)$, ta có:

$$\begin{aligned} D(X|Y)(t) &= -\frac{d}{dt}E(X|Y)(t) \\ &= 2\sum_{i=1}^N d_i \int_\Omega v_i |\nabla(\frac{u_i}{v_i})|^2 dx + \sum_{i,j=1, i<j}^N (a_{ij}(t)v_j + a_{ji}(t)v_i) \int_\Omega (\frac{u_i}{v_i} - \frac{u_j}{v_j})^2 dx \\ &- \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega (a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}) v_j (\frac{u_i^2}{v_i^2} + 2\frac{u_i}{v_i}) dx. \end{aligned}$$

Chứng minh. Từ giả thiết, với mỗi $i \in \{1, \dots, N\}$, ta có:

$$\partial_t u_i = d_i \Delta u_i + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) u_j + \sum_{j=1}^N (a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}) v_j, \partial_t v_i = d_i \Delta v_i + \sum_{j=1}^N a_{ij,\infty} v_j.$$

Ta tính toán $\frac{d}{dt}E(X|Y)(t)$ như sau:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(X|Y)(t) &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{d}{dt}(\frac{|u_i|^2}{v_i}) dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega (\frac{2u_i}{v_i}\partial_t u_i - \frac{u_i^2}{v_i^2}\partial_t v_i) dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega [2\frac{u_i}{v_i}(d_i \Delta u_i + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) u_j + \sum_{j=1}^N (a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}) v_j) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{u_i^2}{v_i^2}(d_i\Delta v_i + \sum_{j=1}^N a_{ij,\infty}v_j)]dx \\
&= \sum_{i=1}^N \int_\Omega 2d_i(\frac{u_i}{v_i}\Delta u_i - \frac{u_i^2}{2v_i^2}\Delta v_i)dx \\
&+ \sum_{i=1}^N \int_\Omega \Big[2\frac{u_i}{v_i}(\sum_{j=1}^N a_{ij}(t)u_j) - \frac{u_i^2}{v_i^2}(\sum_{j=1}^N a_{ij}(t)v_j)\Big]dx \\
&+ \sum_{i=1}^N \int_\Omega \Big[\sum_{j=1}^N (a_{ij}(t) - a_{ij,\infty})v_j\Big](\frac{u_i^2}{v_i^2} + 2\frac{u_i}{v_i})dx \\
&= \sum_{i=1}^N \int_\Omega J_D^{(i)}dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega J_{R_1}^{(i)}dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega J_{R_2}^{(i)}dx = I_D + I_{R_1} + I_{R_2},
\end{aligned}
$$

với $J_D^{(i)} := 2d_i(\frac{u_i}{v_i}\Delta u_i - \frac{u_i^2}{2v_i^2}\Delta v_i)$, $J_{R_1}^{(i)} = 2\frac{u_i}{v_i}(\sum_{j=1}^N a_{ij}(t)u_j) - \frac{u_i^2}{v_i^2}(\sum_{j=1}^N a_{ij}(t)v_j)$ và $J_{R_2}^{(i)} = \Big[\sum_{j=1}^N (a_{ij}(t) - a_{ij,\infty})v_j\Big](\frac{u_i^2}{v_i^2} + 2\frac{u_i}{v_i})$ với mỗi $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Điều kiện biên $\partial_\nu u_i \equiv \partial_\nu v_i \equiv 0$ trên $\partial\Omega$ với mỗi $1 \le i \le N$ sao cho $d_i > 0$ cho phép ta sử dụng tích phân từng phần để có:

$$
\begin{aligned}
I_D &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega J_D^{(i)}dx = \sum_{i=1}^N 2d_i \int_\Omega (\frac{u_i}{v_i}\Delta u_i - \frac{u_i^2}{2v_i^2}\Delta v_i)dx \\
&= -2\sum_{i=1}^N d_i \int_\Omega (\nabla(\frac{u_i}{v_i}) \cdot \nabla u_i - \frac{u_i}{v_i}\nabla(\frac{u_i}{v_i}) \cdot \nabla v_i)dx \\
&= -2\sum_{i=1}^N d_i \int_\Omega v_i \nabla(\frac{u_i}{v_i}) \cdot (\frac{\nabla u_i v_i - \nabla v_i u_i}{v_i^2})dx = -2\sum_{i=1}^N d_i \int_\Omega v_i |\nabla(\frac{u_i}{v_i})|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Để tính I_{R_1}, ta dùng $a_{ii}(t) = -\sum_{j=1, j\neq i}^N a_{ij}(t)$ vào tính $J_{R_1}^{(i)}$ như sau:

$$
\begin{aligned}
J_{R_1}^{(i)} &= 2\frac{u_i}{v_i}\Big[(\sum_{j=1,j\neq i}^N a_{ij}(t)u_j) - u_i \sum_{j=1,j\neq i}^N a_{ji}(t)\Big] \\
&- \frac{u_i^2}{v_i^2}\Big[(\sum_{j=1 j\neq i}^N a_{ij}(t)v_j) - v_i \sum_{j=1,j\neq i}^N a_{ji}(t)\Big]
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \Big[2\frac{u_i}{v_i}(a_{ij}(t)u_j - a_{ji}(t)u_i) - \frac{u_i^2}{v_i^2}(a_{ij}(t)v_j - a_{ji}(t)v_i) \Big].$$

Từ đó, thực hiện tính toán tương tự như trong chứng minh của bổ đề 2.3 của [3], ta được

$$I_{R_1} = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega J_R^{(i)} = - \sum_{i,j=1, i<j}^{N} \int_\Omega (a_{ij}(t)v_j + a_{ji}(t)v_i)(\frac{u_i}{v_i} - \frac{u_j}{v_j})^2 dx.$$

Vậy

$$D(X|Y)(t) = -\frac{d}{dt}E(X|Y)(t) = -(I_D + I_{R_1} + I_{R_2})$$
$$= 2\sum_{i=1}^{N} d_i \int_\Omega v_i |\nabla(\frac{u_i}{v_i})|^2 dx + \sum_{i,j=1,i<j}^{N} \int_\Omega (a_{ij}(t)v_j + a_{ji}(t)v_i)(\frac{u_i}{v_i} - \frac{u_j}{v_j})^2 dx$$
$$- \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \Big[(a_{ij}(t) - a_{ij,\infty})v_j\Big](\frac{u_i^2}{v_i^2} + 2\frac{u_i}{v_i})dx.$$

□

Áp dụng bổ đề 15 cho W và X_∞, ta được công thức độ tiêu tán entropy tổng quát sau với mọi $t > 0$:

$$\begin{aligned} D(W|X_\infty)(t) &= -\frac{d}{dt}E(W|X_\infty)(t) = 2\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega d_i \frac{|\nabla w_i|^2}{u_{i,\infty}} dx \\ &+ \sum_{i,j=1,i<j}^{N} (a_{ij}(t)u_{j,\infty} + a_{ji}(t)u_{i,\infty}) \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx \\ &- \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(t) - a_{ij,\infty})u_{j,\infty} \int_\Omega (\frac{w_i^2}{u_{i,\infty}^2} + 2\frac{w_i}{u_{i,\infty}})dx \\ &= P_D + P_R - P_L, \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

trong đó tổng $P_D := 2\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega d_i \frac{|\nabla w_i|^2}{u_{i,\infty}} dx$ được gọi là phần khuếch tán, tổng $P_R := \sum_{i,j=1,i<j}^{N} (a_{ij}(t)u_{j,\infty} + a_{ji}(t)u_{i,\infty}) \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx$ được gọi là phần phản ứng và tổng $P_L := \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(t) - a_{ij,\infty})u_{j,\infty} \int_\Omega (\frac{w_i^2}{u_{i,\infty}^2} + 2\frac{w_i}{u_{i,\infty}})dx$ được gọi là phần giới hạn của công thức (2.4.11).

Tiếp theo, chúng tôi đi đến phần chính của chương 2. Cụ thể, chúng tôi sẽ chứng minh rằng, dưới các điều kiện lí tưởng sau

$$\sigma := \inf_{t>0} \sigma(t) := \inf_{t>0} (\min_{(a_{ij}(t),a_{ji}(t))\neq(0,0),i<j} \{a_{ij}(t)u_{j,\infty} + a_{ji}(t)u_{i,\infty}\}) > 0, \tag{2.4.12}$$

$$\text{có } \delta > 0 \text{ để } |a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| < e^{-\delta t} \text{ với mỗi } 1 \le i,j \le N \text{ và } t > 0, \tag{2.4.13}$$

và các hệ số khuếch tán dương ($d_i > 0$ với mọi $i \in \{1, \ldots, N\}$) thì định lí mở rộng của định lí 1.11 trong [3] đúng:

Định lí 3 (**Định lí ước lượng độ tiêu tán entropy hiệu chỉnh**). *Tồn tại hằng số $\gamma, L, C > 0$ chỉ phụ thuộc vào hàm $A(t)$, D, Ω, M và δ để*

$$D(W|X_\infty) \ge (\gamma - Le^{-\gamma t})E(W|X_\infty) - Ce^{-\gamma t} \text{ với mọi } t > 0.$$

Chứng minh. Chứng minh tương tự như trong định lí 1.1 của [3], sử dụng

$$\sigma = \inf_{t>0} \sigma(t) = \inf_{t>0} (\min_{(a_{ij}(t),a_{ji}(t))\neq(0,0),i<j} \{a_{ij}(t)u_{j,\infty} + a_{ji}(t)u_{i,\infty}\}) > 0,$$

ta tìm được $\alpha > 0$ chỉ phụ thuộc vào hàm $A(t)$, D, Ω và M sao cho:

$$2\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega d_i \frac{|\nabla w_i|^2}{u_{i,\infty}} dx + \sum_{i,j=1,i<j}^{N} (a_{ij}(t)u_{j,\infty} + a_{ji}(t)u_{i,\infty}) \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx$$
$$\ge \alpha E(W|X_\infty) \text{ với mọi } t > 0.$$

Đồng thời, sử dụng $|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| < e^{-\delta t}$ với mọi $1 \le i,j \le N$ và $t > 0$

và bất đẳng thức $2xy \le x^2 + y^2$ với $x = \dfrac{|w_i|}{u_{i,\infty}}$ và $y = 1$, ta được

$$\begin{aligned}
P_L &= \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}) u_{j,\infty} \int_\Omega \Big(\frac{w_i^2}{u_{i,\infty}^2} + 2\frac{w_i}{u_{i,\infty}}\Big) dx \\
&\le \sum_{i,j=1}^{N} \Big[|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| u_{j,\infty} \Big] \int_\Omega \Big(\frac{w_i^2}{u_{i,\infty}^2} + 2\frac{|w_i|}{u_{i,\infty}}\Big) dx \\
&\le e^{-\delta t} \Big(\sum_{j=1}^{N} u_{j,\infty}\Big) \Big[\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big(2\frac{w_i^2}{u_{i,\infty}^2} + 1\Big) dx \Big] = e^{-\delta t} M \Big(2 \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{w_i^2}{u_{i,\infty}^2} dx + N\Big) \\
&\le \Big[2M \max_{1 \le i \le N} \{\frac{1}{u_{i,\infty}}\} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{w_i^2}{u_{i,\infty}} dx + MN \Big] e^{-\delta t} = (LE(W|X_\infty) + C) e^{-\delta t},
\end{aligned}$$

với $L = 2M \max_{1 \le i \le N} \{\dfrac{1}{u_{i,\infty}}\}$ và $C = MN$. Kết hợp với công thức độ tiêu tán entropy tổng quát (2.4.11), ta được:

$$\begin{aligned}
&D(W|X_\infty) \ge \alpha E(W|X_\infty) - P_L \ge (\alpha - Le^{-\delta t}) E(W|X_\infty) - Ce^{-\delta t} \\
&\ge (\gamma - Le^{-\gamma t}) E(W|X_\infty) - Ce^{-\gamma t},
\end{aligned}$$

với $\gamma = \min\{\alpha, \delta\} > 0$, hoàn tất chứng minh. $\square$

2.5 Định lí hội tụ cấp lũy thừa đến trạng thái cân bằng

Theo định lí 3, khi điều kiện (2.4.12) và (2.4.13) được thỏa mãn thì hàm $f(t) = E(W|X_\infty)(t)$ thỏa mãn $-f'(t) \ge (\gamma - Le^{-\gamma t}) f(t) - Ce^{-\gamma t}$ hay $f'(t) \le (Le^{-\gamma t} - \gamma) f(t) + Ce^{-\gamma t}$ với mỗi $t > 0$. Do đó, áp dụng bổ đề 3 cho $f(t)$, với chú ý rằng $\frac{\gamma}{2} t + 1 \le e^{\frac{\gamma}{2} t}$ với mỗi $t \ge 0$, ta được:

$$\begin{aligned}
&E(W|X_\infty)(t) = f(t) \le \int_0^t e^{\int_s^t (Le^{-\gamma\tau} - \gamma) d\tau} Ce^{-\gamma s} ds + f(0) e^{\int_0^t (Le^{-\gamma\tau} - \gamma) d\tau} \\
&= [C(\int_0^t e^{\frac{L}{\gamma} e^{-\gamma s}} ds) + f(0) e^{\frac{L}{\gamma}}] e^{(-\frac{L}{\gamma} e^{-\gamma t} - \gamma t)} \le [C(\int_0^t e^{\frac{L}{\gamma}} ds) + f(0) e^{\frac{L}{\gamma}}] e^{-\gamma t}
\end{aligned}$$

$$= e^{\frac{L}{\gamma}}(Ct + f(0))e^{-\gamma t} \leq e^{\frac{L}{\gamma}} \max\{\frac{2C}{\gamma}, f(0)\}(\frac{\gamma}{2}t + 1)e^{-\gamma t} \leq Ge^{-\frac{\gamma}{2}t},$$

với $G = e^{\frac{L}{\gamma}} \max\{\frac{2C}{\gamma}, f(0)\} > 0$ chỉ phụ thuộc $f(0) = E(W|X_\infty)(0) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{|u_{i,0} - u_{i,\infty}|^2}{u_{i,\infty}} dx$ và γ, L, C, nghĩa là G chỉ phụ thuộc vào hàm $A(t)$, D, Ω, M, X_0 và δ, còn $\dfrac{\gamma}{2} > 0$ chỉ phụ thuộc vào hàm $A(t)$, D, Ω, M và δ.

Vậy ta có định lí sau:

Định lí 4 (**Định lí hội tụ cấp lũy thừa đến trạng thái cân bằng**). *Khi hệ* $\mathbf{N}$ *đã thỏa mãn cả (2.4.12) và (2.4.13) thì mỗi nghiệm* $X = (u_1, \ldots, u_N)$ *của hệ ban đầu (0.0.1) của trường hợp tổng quát đều hội tụ theo cấp lũy thừa đến trạng thái cân bằng* $X_\infty = (u_{1,\infty}, \ldots, u_{N,\infty})$ *theo nghĩa là:*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{|u_i - u_{i,\infty}|^2}{u_{i,\infty}} dx = E(X - X_\infty|X_\infty)(t) \leq Ge^{-\theta t} \text{ với mọi } t \geq 0,$$

với hằng số $G > 0$ *chỉ phụ thuộc vào hàm* $A(t)$, D, Ω, M, X_0 *và* δ, *còn hằng số mũ* $\theta > 0$ *chỉ phụ thuộc vào* $A(t)$, D, Ω, M *và* δ.

CHƯƠNG 3

ĐÁNH GIÁ ENTROPY TỔNG QUÁT VÀ SỰ HỘI TỤ VỀ TRẠNG THÁI CÂN BẰNG CỦA NGHIỆM

Trong chương này, ta sẽ chứng minh các kết quả chính của luận văn. Cụ thể, ta sẽ mở rộng định lí 3 trong cả hai trường hợp khuếch tán không suy biến và khuếch tán suy biến, trong đó điều kiện (2.4.12) có thể không còn đúng và điều kiện (2.4.13) được thay bởi điều kiện:

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq B(t) \text{ với mọi } i, j \in \{1, \ldots, N\} \text{ và mọi } t > 0, \quad (3.0.1)$$

với $B(t)$ là một hàm không âm và liên tục trên $[0, +\infty)$. Cụ thể, ta sẽ chứng minh rằng một dạng yếu của điều kiện (2.4.12) vẫn còn đúng và áp dụng nó để mở rộng 3. Trước hết, ta chứng minh bổ đề 16 sau:

Bổ đề 16. (Bổ đề về ánh xạ đường đi đơn và thời điểm k-giới hạn)

Cho hệ $\mathbf{N}$ *trong trường hợp tổng quát. Khi đó:*

- *Tồn tại ánh xạ* $p : P_N \to SPath(G_\infty)$ *từ tập hợp* P_N *các cặp* (i, j) *với* $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ *và* $i \neq j$ *tới tập hợp* $SPath(G_\infty)$ *các đường đi đơn vô hướng trong* G_∞ *sao cho:*
  Với mọi $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ *sao cho* $i \neq j$, p_{ij} *là một đường đi đơn vô*

hướng từ S_i đến S_j trong G_∞.

Ánh xạ p như thế được gọi là một ánh xạ đường đi đơn của A_∞.

- *Với mỗi $k \in (0,1)$, tồn tại hằng số $t^k \geq 0$ để với mỗi $1 \leq i, j \leq N$ và mỗi $t > t^k$, ta có*

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq (1-k) \min_{\{i \neq j, a_{ij,\infty} > 0\}} \{a_{ij,\infty}\},$$

Số t^k như thế được gọi là một thời điểm k-giới hạn của hàm $A(t)$.

Hơn nữa, với t^k là một thời điểm k-giới hạn bất kì của $A(t)$ thì với mọi $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ sao cho $i \neq j$ và mọi $t > t^k$, ta có $a_{ij}(t) \geq k a_{ij,\infty}$.

Chứng minh.

- G_∞ liên thông mạnh nên G_∞ liên thông, vì vậy với mỗi $1 \leq i, j \leq N$ để $i \neq j$, tồn tại đường đi vô hướng từ S_i đến S_j trong G_∞ và trong số chúng ta lấy một đường đi p_{ij} ngắn nhất thì theo nhận xét 1, p_{ij} là một đường đi đơn vô hướng từ S_i đến S_j, tức là $p_{ij} \in SPath(G_\infty)$. Vậy $p : P_N \to SPath(G_\infty) : (i,j) \mapsto p_{ij}$ là ánh xạ cần tìm.

- Với mọi $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, ta có $\lim\limits_{t \to +\infty} a_{ij}(t) = a_{ij,\infty}$. Kết hợp điều đó với $(1-k) \min\limits_{\{i \neq j, a_{ij,\infty} > 0\}} \{a_{ij,\infty}\} > 0$, ta suy ra rằng tồn tại $t_{ij} \geq 0$ để

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq (1-k) \min_{\{i \neq j, a_{ij,\infty} > 0\}} \{a_{ij,\infty}\} \text{ với mọi } t > t_{ij}.$$

Lấy $t_0^k = \max\limits_{1 \leq i,j \leq N} \{t_{ij}\} \geq 0$ thì với mọi $1 \leq i, j \leq N$, ta được ngay:

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq (1-k) \min_{\{i \neq j, a_{ij,\infty} > 0\}} \{a_{ij,\infty}\} \text{ với mọi } t > t_0^k.$$

Như vậy t_0^k là một thời điểm k-giới hạn cần tìm.

Hơn nữa, với t^k là thời điểm k-giới hạn bất kì của hàm $A(t)$ thì với mỗi $1 \leq i, j \leq N$ sao cho $i \neq j$ và mỗi $t > t^k$, ta có $a_{ij,\infty} \geq 0$ nên hoặc ta có $a_{ij,\infty} > 0$ và khi đó $|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq (1-k) a_{ij,\infty}$ nên

$$a_{ij}(t) \geq a_{ij,\infty} - (1-k) a_{ij,\infty} = k a_{ij,\infty},$$

hoặc $a_{ij,\infty} = 0$ và $a_{ij}(t) \geq 0 = ka_{ij,\infty}$. Vậy ta luôn có $a_{ij}(t) \geq ka_{ij,\infty}$.

Bổ đề được chứng minh xong. □

Nhận xét 3. Đại lượng $\min_{\{i\neq j, a_{ij,\infty}>0\}}\{a_{ij,\infty}\}$ sẽ được gọi là độ cao của A_∞, kí hiệu là h_{A_∞}, tức là: $h_{A_\infty} := \min_{\{i\neq j, a_{ij,\infty}>0\}}\{a_{ij,\infty}\} > 0$.
Như vậy, thời điểm $t^k \geq 0$ là một thời điểm k-giới hạn của hàm $A(t)$ nếu:

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq (1-k)h_{A_\infty} \text{ với mỗi } 1 \leq i, j \leq N \text{ và mỗi } t > t^k.$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh dạng yếu sau của điều kiện (2.4.12) vẫn đúng:

Bổ đề 17. *Kí hiệu $X_\infty = (u_{1,\infty}, \ldots, u_{N,\infty})$ là trạng thái cân bằng của hệ tổng quát (0.0.1), cho t^k là một thời điểm k-giới hạn của hàm $A(t)$ ($k \in (0,1)$) và một ánh xạ đường đi đơn $p : P_N \to SPath(G_\infty)$ của A_∞ và kí hiệu*

$$E_p := \{(i,j) \in P_N | \text{ Có } (u,v) \in P_N \text{ để } S_i \to S_j \text{ nằm trên } p_{uv} \text{ trong } G_\infty\},$$

là tập cặp chỉ số của cạnh vô hướng của p. Thế thì khi đó:

$$\begin{aligned} \sigma_p &:= \min_{(i,j)\in E_p}\{a_{ij,\infty}u_{j,\infty} + a_{ji,\infty}u_{i,\infty}\} > 0 \text{ và} \\ \chi_{k,p} &:= \inf_{t>t^k}\Big(\min_{(i,j)\in E_p}\{a_{ij}(t)u_{j,\infty} + a_{ji}(t)u_{i,\infty}\}\Big) \geq k\sigma_p > 0. \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

Chứng minh. Theo bổ đề 16, thời điểm k-giới hạn t^k thỏa mãn:

$$a_{ij}(t) \geq ka_{ij,\infty} \text{ với mỗi } i, j \in \{1, \ldots, N\} \text{ sao cho } i \neq j \text{ và mọi } t > t^k.$$

Do đó, với mọi $(i,j) \in E_p$ và mỗi $t > t^k$, ta có $a_{ij}(t)u_{j,\infty} + a_{ji}(t)u_{i,\infty} \geq k(a_{ij,\infty}u_{j,\infty} + a_{ji,\infty}u_{i,\infty}) \geq k(\min_{(i,j)\in E_p}\{a_{ij,\infty}u_{j,\infty} + a_{ji,\infty}u_{i,\infty}\}) = k\sigma_p$.
Vì vậy

$$\chi_{k,p} = \inf_{t>t^k}\Big(\min_{(i,j)\in E_p}\{a_{ij}(t)u_{j,\infty} + a_{ji}(t)u_{i,\infty}\}\Big) \geq k\sigma_p.$$

Đồng thời cũng theo bổ đề 16, ta có: Với mọi $i, j \in \{1, \ldots, N\}, i \neq j$: p_{ij}

là một đường đi đơn vô hướng từ S_i đến S_j trong G_∞ nên:

Với mỗi $(i,j) \in E_p$ thì $S_i \to S_j$ là một cạnh vô hướng của p_{uv} trong G_∞, do đó $a_{ji,\infty} > 0$ hoặc $a_{ij,\infty} > 0$ nên $a_{ij,\infty}u_{j,\infty} + a_{ji,\infty}u_{i,\infty} > 0$. Do đó:

$$\sigma_p = \min_{(i,j)\in E_p} \{a_{ij,\infty}u_{j,\infty} + a_{ji,\infty}u_{i,\infty}\} > 0.$$

Vậy $\chi_{k,p} \geq k\sigma_p > 0$ và chứng minh hoàn tất. $\square$

Định nghĩa 15. (Lưu lượng max-min)
Kí hiệu tập tất cả các ánh xạ đường đi đơn của G_∞ là Pf_{G_∞}. Khi đó, từ bổ đề 17, ta suy ra $\sigma_p^1 := \min_{(i,j)\in E_p}\{a_{ij,\infty}u^1_{j,\infty} + a_{ji,\infty}u^1_{i,\infty}\}$ thỏa mãn

$$\sigma_p^1 = \frac{\min_{(i,j)\in E_p}\{a_{ij,\infty}u_{j,\infty} + a_{ji,\infty}u_{i,\infty}\}}{M} = \frac{\sigma_p}{M} > 0,$$

với mỗi $p \in Pf_{G_\infty}$. Ta định nghĩa:

$$\sigma^1_{A_\infty} := \max_{p\in Pf_{G_\infty}} \{\sigma_p^1\},$$

là lưu lượng max-min (max-min flow) của A_∞. Khi đó:

- $\sigma^1_{A_\infty} > 0$ chỉ phụ thuộc vào A_∞,
- Tồn tại ánh xạ đường đi đơn p^∞ của A_∞ để $\sigma^1_{A_\infty} = \sigma^1_{p^\infty} = \frac{\sigma_{p^\infty}}{M}$. Ánh xạ p^∞ như thế được gọi là ánh xạ cực đại hóa của A_∞.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh định lí chính thứ nhất của luận văn, cho phép ta đưa ra ước lượng tổng quát cho độ tiêu tán của entropy trong trường hợp khuếch tán không suy biến:

Định lí 5 (**Định lí ước lượng độ tiêu tán entropy cho trường hợp khuếch tán không suy biến**). *Giả sử hệ* **N** *có các hệ số khuếch tán $d_i > 0$ với mỗi $i \in \{1,\dots,N\}$. Khi đó, tồn tại hằng số $\lambda > 0$ chỉ phụ thuộc vào A_∞, D và Ω và hằng số $L, C > 0$ chỉ phụ thuộc vào A_∞ và M sao cho các tính chất sau đều đúng:*

- *Với mỗi thời điểm k-giới hạn t^k của hàm $A(t)$ ($k \in [\frac{1}{2}, 1)$), ta có:*

$$D(W|X_\infty) \geq (\lambda - LF_k(t))E(W|X_\infty) - CF_k(t) \text{ với mỗi } t > t^k,$$

trong đó $F_k(t) = (1-k)h_{A_\infty}$ trên $[0, +\infty)$.

- *Nếu một hàm $B(t)$ không âm và liên tục trên $[0, +\infty)$ thỏa mãn:*

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq B(t) \text{ với mỗi } i, j \in \{1, \ldots, N\} \text{ và mỗi } t > 0,$$

thì với mỗi thời điểm k-giới hạn t^k của hàm $A(t)$ ($k \in [\frac{1}{2}, 1)$), ta có:

$$D(W|X_\infty) \geq (\lambda - LD_k(t))E(W|X_\infty) - CD_k(t) \text{ với mỗi } t > t^k,$$

trong đó $D_k(t) = \min\{B(t), (1-k)h_{A_\infty}\}$ trên $[0, +\infty)$.

Cụ thể, với mỗi $\rho > 0$, ta có thể lấy $\lambda = \min\{2 \min\limits_{1\leq i\leq N}\{d_i\}C_P, \frac{\epsilon_{A_\infty}\zeta_{A_\infty}}{2}\}$, $L = L_\rho = (1 + \frac{1}{\rho})M \max_{1\leq i\leq N}\{\frac{1}{u_{i,\infty}}\}$ và $C = C_\rho = \rho MN$, trong đó $\epsilon_{A_\infty} = \dfrac{2\sigma^1_{A_\infty}}{N(N-1)^2}$ và $\zeta_{A_\infty} = \dfrac{1}{2}\min\limits_{1\leq j\leq N}\{\dfrac{1}{u^1_{j,\infty}}\}(\min\limits_{1\leq j\leq N}\{\dfrac{1}{u^1_{j,\infty}}\} + N)$.

Chứng minh định lí. Để chứng minh định lí này, ta trước hết đánh giá

$$2\sum_{i=1}^N \int_\Omega d_i \frac{|\nabla w_i|^2}{u_{i,\infty}}dx + \sum_{i,j=1, i<j}^N (a_{ij}(t)u_{j,\infty} + a_{ji}(t)u_{i,\infty}) \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx,$$

sử dụng chứng minh giống như trong bổ đề 2.4 trong [3], với bổ đề 17 thay cho điều kiện (2.4.12). Ta thực hiện đánh giá này theo ba bước sau:

Bước 1: Tính cộng tính của $E(W|X_\infty)$:

Đặt $\bar{W} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_N)$. Với chú ý rằng $\bar{w}_i = \int_\Omega w_i dx$ với mỗi $1 \leq i \leq N$ (do $|\Omega| = 1$), ta có:

$$E(W|X_\infty) = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{|w_i|^2}{u_{i,\infty}}dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{|w_i - \bar{w}_i|^2}{u_{i,\infty}}dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{|\bar{w}_i|^2}{u_{i,\infty}}dx$$
$$= E(W - \bar{W}|X_\infty) + E(\bar{W}|X_\infty), \tag{3.0.3}$$

(do $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{2(w_i-\bar{w}_i)\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}dx = \sum_{i=1}^{N} 2\frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}(\bar{w}_i-\bar{w}_i)=0$).

Bước 2: Đánh giá phần khuếch tán $P_D = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega d_i\frac{|\nabla w_i|^2}{u_{i,\infty}}dx$**:**

Theo bất đẳng thức Poincare, tồn tại hằng số $C_P = C_P(\Omega) > 0$ để $\int_\Omega |\nabla f|^2 dx \geq C_P\int_\Omega |f-\bar{f}|^2dx$, với mọi $f \in H^1(\Omega)$. Do đó:

$$\begin{aligned}
P_D &= 2\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i}{u_{i,\infty}}\int_\Omega |\nabla w_i|^2dx \geq 2\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i}{u_{i,\infty}}C_P\int_\Omega |w_i-\bar{w}_i|^2dx\\
&\geq 2\min_{1\leq i\leq N}\{d_i\}C_P\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\frac{|w_i-\bar{w}_i|^2}{u_{i,\infty}}dx = 2\min_{1\leq i\leq N}\{d_i\}C_P E(W-\bar{W}|X_\infty).
\end{aligned}$$

Bước 3: Đánh giá $\displaystyle\sum_{i,j=1,i<j}^{N}(a_{ij}(t)u_{j,\infty}+a_{ji}(t)u_{i,\infty})\int_\Omega(\frac{w_i}{u_{i,\infty}}-\frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2dx$ **và** $D(W|X_\infty)$**:**

Lấy một ánh xạ cực đại hóa p^∞ của A_∞, tức là $\sigma^1_{A_\infty} = \sigma^1_{p^\infty} = \frac{\sigma_{p^\infty}}{M}$. Bổ đề 17 cho ta:

$$\chi_{k,p^\infty} = \inf_{t>t^k}\Big(\min_{(i,j)\in E_{p^\infty}}\{a_{ij}(t)u_{j,\infty}+a_{ji}(t)u_{i,\infty}\}\Big) \geq k\sigma_{p^\infty} = kM\sigma^1_{A_\infty} > 0. \tag{3.0.4}$$

Tiếp theo, với mỗi $1 \leq i,j \leq N, i<j$ và mỗi $t > t^k$, đường đi đơn vô hướng p^∞_{ij} có dạng $p^\infty_{ij} : S_{h_1} \to \cdots \to S_{h_r}$ $(r \geq 2)$ đi từ $S_{h_1} \equiv S_i$ đến $S_{h_r} \equiv S_j$ trong G_∞ với các đỉnh S_{h_s} đôi một phân biệt, . Vậy, với mỗi $1 \leq s \leq r-1$, ta có $h_s \neq h_{s+1}$ và $S_{h_s} \to S_{h_{s+1}}$ là nằm trên đường đi vô hướng p^∞_{ij} trong G_∞ với $1 \leq i,j \leq N, i \neq j$ dẫn đến $(h_s,h_{s+1}) \in E_{p^\infty}$ nên kết hợp với $t > t^k$, áp dụng (3.0.4), với mỗi $s \in \{1,\ldots,r-1\}$, ta có:

$$\begin{aligned}
&a_{h_sh_{s+1}}(t)u_{h_s,\infty} + a_{h_{s+1}h_s}(t)u_{h_{s+1},\infty}\\
&\geq \inf_{t>t^k}\Big(\min_{(i,j)\in E_{p^\infty}}\{a_{ij}(t)u_{j,\infty}+a_{ji}(t)u_{i,\infty}\}\Big) \geq kM\sigma^1_{A_\infty}.
\end{aligned}$$

Vì vậy:

$$\begin{aligned}
P_R &= \sum_{i,j=1,i<j}^{N} (a_{ij}(t)u_{j,\infty} + a_{ji}(t)u_{i,\infty}) \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx \\
&\geq \sum_{s=1}^{r-1} (a_{h_s h_{s+1}}(t)u_{h_s,\infty} + a_{h_{s+1}h_s}(t)u_{h_{s+1},\infty}) \int_\Omega (\frac{w_{h_s}}{u_{h_s,\infty}} - \frac{w_{h_{s+1}}}{u_{h_{s+1},\infty}})^2 dx \\
&\geq kM\sigma^1_{A_\infty} \sum_{s=1}^{r-1} \int_\Omega (\frac{w_{h_s}}{u_{h_s,\infty}} - \frac{w_{h_{s+1}}}{u_{h_{s+1},\infty}})^2 dx. \qquad (3.0.5)
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen dạng rời rạc cho hàm lồi $y = x^2$ kết hợp với $r \leq N$ do $\{S_{h_1}, \ldots, S_{h_r}\}$ đôi một phân biệt và $\{S_{h_1}, \ldots, S_{h_r}\} \subset \{S_1, \ldots, S_N\}$, ta thu được:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{r-1} \int_\Omega (\frac{w_{h_s}}{u_{h_s,\infty}} - \frac{w_{h_{s+1}}}{u_{h_{s+1},\infty}})^2 dx = \int_\Omega \sum_{s=1}^{r-1} (\frac{w_{h_s}}{u_{h_s,\infty}} - \frac{w_{h_{s+1}}}{u_{h_{s+1},\infty}})^2 dx \\
&\geq \int_\Omega \frac{1}{r-1} \Big[\sum_{s=1}^{r-1} (\frac{w_{h_s}}{u_{h_s,\infty}} - \frac{w_{h_{s+1}}}{u_{h_{s+1},\infty}}) \Big]^2 dx = \frac{1}{r-1} \int_\Omega (\frac{w_{h_1}}{u_{h_1,\infty}} - \frac{w_{h_r}}{u_{h_r,\infty}})^2 dx \\
&= \frac{1}{r-1} \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx \geq \frac{1}{N-1} \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx. \qquad (3.0.6)
\end{aligned}$$

Từ (3.0.5) và (3.0.6), ta thu được, với mỗi $t > t^k$ và mỗi $1 \leq i, j \leq N, i < j$:

$$P_R \geq \frac{kM\sigma^1_{A_\infty}}{N-1} \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx.$$

Do có $N(N-1)/2$ cặp (i, j) với $1 \leq i, j \leq N, i < j$ nên cộng vế với vế tất cả $N(N-1)/2$ bất đẳng thức trên, chia cả hai vế cho $N(N-1)/2$ và áp dụng bất đẳng thức Jensen dạng tích phân đối với $y = x^2$ cho ta bất đẳng thức sau với mỗi $t > t^k$:

$$P_R \geq kM\epsilon_{A_\infty} \sum_{i,j=1,i<j}^{N} \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx \geq kM\epsilon_{A_\infty} \sum_{i,j=1,i<j}^{N} (\frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}} - \frac{\bar{w}_j}{u_{j,\infty}})^2, \qquad (3.0.7)$$

ở đây $\epsilon_{A_\infty} = \dfrac{2\sigma^1_{A_\infty}}{N(N-1)^2} > 0$ chỉ phụ thuộc vào A_∞.

Hơn nữa, với $\Delta_\infty = \min\limits_{1\le i\le N}\{\dfrac{1}{u_{i,\infty}}\}$ và $\sum\limits_{j=1}^N \bar{w}_j = \sum\limits_{j=1}^N \int_\Omega w_j dx = 0$ cùng với $\sum\limits_{j=1}^N u_{j,\infty} = M$ nên với mỗi $t \ge 0$, ta được:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1,i<j}^N \Big(\frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}} - \frac{\bar{w}_j}{u_{j,\infty}}\Big)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \Big(\frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}} - \frac{\bar{w}_j}{u_{j,\infty}}\Big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \frac{1}{u_{j,\infty}}\Big(\frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}\sqrt{u_{j,\infty}} - \frac{\bar{w}_j}{\sqrt{u_{j,\infty}}}\Big)^2 \ge \frac{\Delta_\infty}{2}\sum_{i,j=1}^N \Big(\frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}\sqrt{u_{j,\infty}} - \frac{\bar{w}_j}{\sqrt{u_{j,\infty}}}\Big)^2 \\
&= \frac{\Delta_\infty}{2}\Big[\sum_{i,j=1}^N \Big(\frac{\bar{w}_i^2}{u_{i,\infty}^2}u_{j,\infty} + \frac{\bar{w}_j^2}{u_{j,\infty}} - 2\frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}\bar{w}_j\Big)\Big] \\
&= \frac{\Delta_\infty}{2}\Big[\Big(\sum_{i=1}^N \frac{\bar{w}_i^2}{u_{i,\infty}^2}\Big)M + N\sum_{j=1}^N \frac{\bar{w}_j^2}{u_{j,\infty}}\Big] \ (\text{do } \sum_{j=1}^N \bar{w}_j = 0 \text{ và } \sum_{j=1}^N u_{j,\infty} = M) \\
&\ge \frac{\Delta_\infty}{2}(M\Delta_\infty + N)\sum_{i=1}^N \frac{\bar{w}_i^2}{u_{i,\infty}} = \zeta E(\bar{W}|X_\infty),
\end{aligned}
$$

với $\zeta := \dfrac{\Delta_\infty}{2}(M\Delta_\infty + N) > 0$ nên kết hợp với (3.0.7), ta được:

$$P_R \ge kM\epsilon_{A_\infty}\zeta E(\bar{W}|X_\infty) = k\epsilon_{A_\infty}\zeta_{A_\infty}E(\bar{W}|X_\infty),$$

với $\zeta_{A_\infty} := M\zeta = \dfrac{M\Delta_\infty}{2}(M\Delta_\infty + N) = \dfrac{1}{2}\min\limits_{1\le j\le N}\{\dfrac{1}{u^1_{j,\infty}}\}(\min\limits_{1\le j\le N}\{\dfrac{1}{u^1_{j,\infty}}\} + N)$ chỉ phụ thuộc vào A_∞.
Mà **Bước 1** và **Bước 2** cho ta $E(W|X_\infty) = E(W - \bar{W}|X_\infty) + E(\bar{W}|X_\infty)$ và $P_D = 2\sum\limits_{i=1}^N \int_\Omega d_i \dfrac{|\nabla w_i|^2}{u_{i,\infty}}dx \ge (2\min\limits_{1\le i\le N}\{d_i\}C_P)E(W - \bar{W}|X_\infty)$. Vậy:

$$
\begin{aligned}
P_D + P_R &\ge (2\min_{1\le i\le N}\{d_i\}C_P)E(W - \bar{W}|X_\infty) + k\epsilon_{A_\infty}\zeta_{A_\infty}E(\bar{W}|X_\infty) \\
&\ge \min\{2\min_{1\le i\le N}\{d_i\}C_P, k\epsilon_{A_\infty}\zeta_{A_\infty}\}(E(W - \bar{W}|X_\infty) + E(\bar{W}|X_\infty))
\end{aligned}
$$

$$\geq \min\{2\min_{1\leq i\leq N}\{d_i\}C_P, \frac{1}{2}\epsilon_{A_\infty}\zeta_{A_\infty}\}E(W|X_\infty) = \lambda E(W|X_\infty),$$

với $\lambda := \min\{2\min_{1\leq i\leq N}\{d_i\}C_P, \frac{\epsilon_{A_\infty}\zeta_{A_\infty}}{2}\} > 0$ chỉ phụ thuộc A_∞, D và Ω.

Vậy với mỗi $t > t^k$, công thức độ tiêu tán tổng quát (2.4.11) cho ta

$$D(W|X_\infty) = P_D + P_R - P_L \geq \lambda E(W|X_\infty) - P_L. \tag{3.0.8}$$

Tiếp theo, với mỗi $\rho > 0$, ta có:

- Ta có $|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq (1-k)h_{A_\infty} = F_k(t)$ với mỗi $1 \leq i,j \leq N$ và $t > t^k$ nên kết hợp với bất đẳng thức Young dạng $2xy \leq \frac{1}{\rho}x^2 + \rho y^2$ với $x = \frac{|w_i|}{u_{i,\infty}}$ và $y = 1$ cho ta các bất đẳng thức sau với mỗi $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
P_L &= \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega (a_{ij}(t) - a_{ij,\infty})u_{j,\infty}(\frac{w_i^2}{u_{i,\infty}^2} + 2\frac{w_i}{u_{i,\infty}})dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega |a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}|u_{j,\infty}(\frac{w_i^2}{u_{i,\infty}^2} + 2\frac{|w_i|}{u_{i,\infty}})dx \\
&\leq F_k(t)(\sum_{j=1}^N u_{j,\infty})\Big[\sum_{i=1}^N \int_\Omega (\frac{w_i^2}{u_{i,\infty}^2} + \frac{1}{\rho}\frac{w_i^2}{u_{i,\infty}^2} + \rho)dx\Big] \\
&\leq MF_k(t)\Big[(1+\frac{1}{\rho})\max_{1\leq i\leq N}\{\frac{1}{u_{i,\infty}}\}\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{w_i^2}{u_{i,\infty}}dx + \rho N\Big] \\
&= ((1+\frac{1}{\rho})M\max_{1\leq i\leq N}\{\frac{1}{u_{i,\infty}}\}E(W|X_\infty) + \rho MN)F_k(t) \\
&= (L_\rho E(W|X_\infty) + C_\rho)F_k(t),
\end{aligned} \tag{3.0.9}$$

với $L_\rho = (1+\frac{1}{\rho})M\max_{1\leq i\leq N}\{\frac{1}{u_{i,\infty}}\} > 0$ và $C_\rho = \rho MN > 0$.

Từ (3.0.8) và (3.0.9), ta được:

$$D(W|X_\infty) \geq (\lambda - L_\rho F_k(t))E(W|X_\infty) - C_\rho F_k(t) \text{ với mỗi } t > t^k.$$

- Nếu $|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq B(t)$ với mỗi $1 \leq i,j \leq N$ và mỗi $t > 0$ thì với mỗi $t > t^k$ và mỗi $1 \leq i, j \leq N$, ta có $|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq (1-k)h_{A_\infty}$ nên $|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq \min\{B(t), (1-k)h_{A_\infty}\} = D_k(t)$. Từ đó, bằng lập luận tương tự như trên, ta được:

$$P_L \leq (L_\rho E(W|X_\infty) + C_\rho)D_k(t),$$

với $L_\rho = (1 + \frac{1}{\rho})M \max_{1\leq i\leq N}\{\frac{1}{u_{i,\infty}}\}$ và $C_\rho = \rho MN$ và do đó ta có $D(W|X_\infty) \geq (\lambda - L_\rho D_k(t))E(W|X_\infty) - C_\rho D_k(t)$ với mỗi $t > t^k$.

Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét 4. Do trong chứng minh của định lí 5, chứng minh của các bất đẳng thức: Với mỗi $t > t^k$:

$$P_R \geq kM\epsilon_{A_\infty} \sum_{i,j=1, i<j}^{N} \int_\Omega \left(\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}}\right)^2 dx, \tag{3.0.10}$$

và với mỗi $\rho > 0$ và $t > t^k$:

$$P_L = \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(t) - a_{ij,\infty})u_{j,\infty}\left(\frac{w_i^2}{u_{i,\infty}^2} + 2\frac{w_i}{u_{i,\infty}}\right) \leq (L_\rho E(W|X_\infty) + C_\rho)F_k(t), \tag{3.0.11}$$

cũng như:

$$P_L \leq (L_\rho E(W|X_\infty) + C_\rho)D_k(t), \tag{3.0.12}$$

khi $|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq B(t)$ với mỗi $1 \leq i, j \leq N$ và mỗi $t \geq 0$ đều không dùng đến tính dương của d_i cũng như $k \geq \frac{1}{2}$ nên (3.0.10), (3.0.11) và (3.0.12) vẫn đúng khi $k \in (0,1)$ bất kì và kể cả khi có $1 \leq i \leq N$ để $d_i = 0$, ở đây $\epsilon_{A_\infty} = \dfrac{2\sigma^1_{A_\infty}}{N(N-1)^2}$ cùng với $L_\rho = (1 + \frac{1}{\rho})M \max_{1\leq i\leq N}\{\frac{1}{u_{i,\infty}}\}$, $C_\rho = \rho MN$, $F_k(t) = (1-k)h_{A_\infty}$ và $D_k(t) = \min\{B(t), (1-k)h_{A_\infty}\}$.

Nhận xét 5. Trong định lí 5:

- Với $\rho = \frac{1}{N}$, ta có thể lấy $L = L_{\frac{1}{N}} = \frac{(1+N)}{\min_{1\leq i\leq N}\{u^1_{i,\infty}\}}$ chỉ phụ thuộc vào A_∞ và $C = C_{\frac{1}{N}} = \frac{1}{N}NM = M$ (việc này không ảnh hưởng gì đến λ).

- $\lambda = \min\{2\min\limits_{1\le i\le N}\{d_i\}C_P, \frac{\epsilon_{A_\infty}\zeta_{A_\infty}}{2}\}$, trong đó, với mỗi $(i,j)\in E_{p^\infty}$ thì $a_{ij,\infty} > 0$ nên $a_{ij,\infty} \ge \min\limits_{\{i\ne j, a_{ij,\infty}>0\}}\{a_{ij,\infty}\} = h_{A_\infty}$, dẫn đến:

$$\sigma^1_{A_\infty} = \sigma^1_{p^\infty} = \min_{(i,j)\in E_{p^\infty}}\{a_{ij,\infty}u^1_{j,\infty} + a_{ji,\infty}u^1_{i,\infty}\} \ge h_{A_\infty}\min_{1\le j\le N}\{u^1_{j,\infty}\},$$

và $\zeta_{A_\infty} = \frac{1}{2}\min\limits_{1\le j\le N}\{\frac{1}{u^1_{j,\infty}}\}(\min\limits_{1\le j\le N}\{\frac{1}{u^1_{j,\infty}}\} + N) \ge \frac{1}{2}\min\limits_{1\le j\le N}\{\frac{1}{u^1_{j,\infty}}\}N$ nên

$$\frac{\epsilon_{A_\infty}\zeta_{A_\infty}}{2} = \frac{\sigma^1_{A_\infty}\zeta_{A_\infty}}{N(N-1)^2} \ge \frac{h_{A_\infty}\min_{1\le j\le N}\{u^1_{j,\infty}\}\min_{1\le j\le N}\{\frac{1}{u^1_{j,\infty}}\}}{2(N-1)^2},$$

nên $\lambda = \min\{2\min\limits_{1\le i\le N}\{d_i\}C_P, \frac{\epsilon_{A_\infty}\zeta_{A_\infty}}{2}\}$ trong định lí 5 có thể thay bằng hằng số dễ tính toán hơn là:

$$\lambda_1 = \min\{2\min_{1\le i\le N}\{d_i\}C_P, \frac{h_{A_\infty}\min_{1\le j\le N}\{u^1_{j,\infty}\}\min_{1\le j\le N}\{\frac{1}{u^1_{j,\infty}}\}}{2(N-1)^2}\}.$$

3.1 Đánh giá tổng quát cho entropy trong trường hợp khuếch tán không suy biến

Khi hệ phản ứng **N** có các hệ số khuếch tán đều dương thì theo định lí 5, với mỗi thời điểm k-giới hạn t^k của hàm $A(t)$ ($k\in[\frac{1}{2},1)$) và hàm $f(t) = E(W|X_\infty)(t)$, ta có:

$f'(t) \le (LF_k(t) - \lambda)f(t) + CF_k(t)$ với mọi $t > t^k$, trong đó $F_k(t) = (1-k)h_{A_\infty}$ liên tục trên $[0,+\infty)$. Do đó, áp dụng bổ đề 3 cho hàm $f(t)$ với $a(t) = LF_k(t) - \lambda$ và $b(t) = CF_k(t)$, với mọi $t \ge t^k$, ta được:

$$\begin{aligned}
f(t) &\le (\int_{t^k}^t e^{\int_s^t (LF_k(\tau)-\lambda)d\tau} CF_k(s)ds) + f(t^k)e^{\int_{t^k}^t (LF_k(\tau)-\lambda)d\tau}\\
&= C(\int_{t^k}^t e^{\int_s^t (L(1-k)h_{A_\infty}-\lambda)d\tau}(1-k)h_{A_\infty}ds) + f(t^k)e^{\int_{t^k}^t (L(1-k)h_{A_\infty}-\lambda)d\tau}\\
&= C(1-k)h_{A_\infty}(\int_{t^k}^t e^{-(\lambda-L(1-k)h_{A_\infty})(t-s)}ds) + f(t^k)e^{-(\lambda-L(1-k)h_{A_\infty})(t-t^k)},
\end{aligned}$$

nên nếu $\lambda - L(1-k)h_{A_\infty} > 0$ thì đặt $ex(k) = \lambda - L(1-k)h_{A_\infty}$, với mọi $t \geq t^k$, ta có:

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \frac{C(1-k)h_{A_\infty}}{ex(k)}(1 - e^{-ex(k)(t-t^k)}) + f(t^k)e^{-ex(k)(t-t^k)} \\ &\leq \frac{C(1-k)h_{A_\infty}}{\lambda - L(1-k)h_{A_\infty}} + E(W|X_\infty)(t^k)e^{-(\lambda - L(1-k)h_{A_\infty})(t-t^k)}. \end{aligned}$$

Vậy ta có đánh giá tổng quát sau:

Với thời điểm k-giới hạn t^k bất kì của $A(t)$ ($k \in [\frac{1}{2}, 1)$) sao cho ta có $\lambda - L(1-k)h_{A_\infty} > 0$ thì với mọi $t \geq t^k$, ta có:

$$E(W|X_\infty)(t) \leq \frac{C(1-k)h_{A_\infty}}{\lambda - L(1-k)h_{A_\infty}} + E(W|X_\infty)(t^k)e^{-(\lambda - L(1-k)h_{A_\infty})(t-t^k)}. \tag{3.1.13}$$

Hơn nữa, nếu điều kiện sau được thỏa mãn:

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq B(t) \text{ với mọi } i, j \in \{1, \ldots, N\} \text{ và mọi } t > 0,$$

với $B(t)$ không âm, liên tục trên $[0, +\infty)$ thì với mọi $t > t^k$, ta có:

$$f'(t) \leq (LD_k(t) - \lambda)f(t) + CD_k(t),$$

trong đó $D_k(t) = \min\{B(t), (1-k)h_{A_\infty}\}$ liên tục trên $[0, +\infty)$.

Áp dụng bổ đề 3 cho hàm $f(t) = E(W|X_\infty)(t)$, với $a(t) = LD_k(t) - \lambda$ và $b(t) = CD_k(t)$, ta được đánh giá tổng quát sau với mọi $t \geq t^k$:

$$E(W|X_\infty) \leq C\int_{t^k}^t e^{\int_s^t (LD_k(\tau)-\lambda)d\tau} D_k(s)ds + E(W|X_\infty)(t^k)e^{\int_{t^k}^t (LD_k(\tau)-\lambda)d\tau}. \tag{3.1.14}$$

3.2 Đánh giá entropy cho hệ có khuếch tán suy biến

Ở phần này, ta sẽ chứng minh định lí chính thứ hai của luận văn. Cụ thể, ta sẽ mở rộng định lí 5 cho trường hợp sự khuếch tán có thể suy biến thông qua định lí 6 sau:

Định lí 6 (**Độ tiêu tán entropy cho hệ có khuếch tán suy biến**). *Cho hệ* **N** *có ít nhất một hệ số khuếch tán* $d_i > 0$ *. Khi đó, tồn tại hằng số* $\lambda' > 0$ *chỉ phụ thuộc vào* A_∞*,* D *và* Ω *và hằng số* $L', C' > 0$ *chỉ phụ thuộc vào* A_∞ *và* M *sao cho:*

- *Với mỗi thời điểm k-giới hạn* t^k *của hàm* $A(t)$ $(k \in (0,1))$ *và mọi* $t > t^k$*, ta có:*

  $$D(W|X_\infty) \geq (k\lambda' - L'F_k(t))E(W|X_\infty) - C'F_k(t),$$

  trong đó $F_k(t) = (1-k)h_{A_\infty}$ *trên* $[0, +\infty)$.

- *Với* $B(t)$ *là một hàm không âm và liên tục trên* $[0, +\infty)$ *thỏa mãn:*

  $$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq B(t) \text{ với mọi } i, j \in \{1, \dots, N\} \text{ và mọi } t > 0,$$

  thì với mỗi thời điểm k-giới hạn t^k *của hàm* $A(t)$ $(k \in (0,1))$*, ta có:*

  $$D(W|X_\infty) \geq (k\lambda' - L'D_k(t))E(W|X_\infty) - C'D_k(t) \text{ với mọi } t > t^k,$$

  trong đó $D_k(t) = \min\{B(t), (1-k)h_{A_\infty}\}$ *trên* $[0, +\infty)$.

Hơn nữa, ta có thể lấy $\lambda' = (\sum_{i:d_i>0}^{N} \min_{1\leq i\leq N}\{\frac{d_i C_P u^1_{i,\infty}}{N}, \frac{\epsilon_{A_\infty}}{4}\}) \min_{1\leq j\leq N}\{\frac{1}{u^1_{j,\infty}}\}$*,* $L' = L'_\rho = (1+\frac{1}{\rho})M \max_{1\leq i\leq N}\{\frac{1}{u_{i,\infty}}\}$ *và* $C' = C'_\rho = \rho M N$ *với mỗi* $\rho > 0$*, trong đó* $\epsilon_{A_\infty} = \dfrac{2\sigma^1_{A_\infty}}{N(N-1)^2}$.

Chứng minh. Với $k \in (0,1)$, công thức độ tiêu tán entropy tổng quát (2.4.11) cho ta:

$$D(W|X_\infty)(t) = P_D + P_R - P_L.$$

Mà theo nhận xét 4, với mỗi thời điểm k-giới hạn t^k của hàm $A(t)$ và mọi $t > t^k$, công thức $P_R \geq kM\epsilon_{A_\infty} \sum_{i,j=1,i<j}^{N} \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx$ vẫn đúng. Kết hợp với $\sum_{i,j=1,i<j}^{N} \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx \geq \frac{1}{2}\sum_{i,j:d_i>0}^{N} \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx$, ta được:

$$P_R \geq \frac{kM\epsilon_{A_\infty}}{2} \sum_{i,j:d_i>0}^{N} \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx.$$

Vì vậy, với $\Upsilon_i = C_P u_{i,\infty} > 0$ với mỗi i, ta có:

$$\begin{aligned}
&P_D + P_R = 2\sum_{i=1}^{N} d_i \int_\Omega \frac{|\nabla w_i|^2}{u_{i,\infty}} dx + P_R \\
&\geq 2\sum_{i:d_i>0}^{N} d_i \int_\Omega \frac{|\nabla w_i|^2}{u_{i,\infty}} dx + \frac{kM\epsilon_{A_\infty}}{2} \sum_{i,j:d_i>0}^{N} \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx \\
&\geq \sum_{i:d_i>0}^{N} \min\{\frac{2d_i}{N}, \frac{kM\epsilon_{A_\infty}}{2\Upsilon_i}\} \sum_{j=1}^{N} \Big[\int_\Omega \frac{|\nabla w_i|^2}{u_{i,\infty}} dx + \Upsilon_i \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx \Big] \\
&= \sum_{i:d_i>0}^{N} \min\{\frac{2d_i}{N}, \frac{kM\epsilon_{A_\infty}}{2\Upsilon_i}\} \Lambda_i,
\end{aligned}$$

với $\Lambda_i := \sum_{j=1}^{N} \Big[\int_\Omega \frac{|\nabla w_i|^2}{u_{i,\infty}} dx + \Upsilon_i \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx \Big]$ $(1 \leq i \leq N)$ nên

$$D(W|X_\infty)(t) \geq (\sum_{i:d_i>0}^{N} \min\{\frac{2d_i}{N}, \frac{kM\epsilon_{A_\infty}}{2\Upsilon_i}\} \Lambda_i) - P_L. \tag{3.2.15}$$

Hơn nữa, lập luận tương tự **Bước 1** của chứng minh định lí 5, ta được:

$$E(W|X_\infty) = E(W-\bar{W}|X_\infty)+E(\bar{W}|X_\infty) = \sum_{j=1}^{N}\Big(\int_\Omega \frac{|w_j-\bar{w}_j|^2}{u_{j,\infty}}dx+\frac{\bar{w}_j^2}{u_{j,\infty}}\Big),$$

nên ta thực hiện các tính toán tiếp theo tương tự như định lí 2.6 trong [3]:

Với mỗi $1 \le i, j \le N$, sử dụng bất đẳng thức Poincare và bất đẳng thức $x^2+y^2 \ge \frac{1}{2}(x-y)^2$, ta được:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{|\nabla w_i|^2}{u_{i,\infty}}dx + \Upsilon_i \int_\Omega \Big(\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}}\Big)^2 dx \\
&\ge C_P u_{i,\infty} \int_\Omega \frac{|w_i-\bar{w}_i|^2}{u_{i,\infty}^2}dx + \Upsilon_i \int_\Omega \Big(\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}}\Big)^2 dx \\
&= \Upsilon_i \int_\Omega \Big(\frac{w_i-\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}\Big)^2 dx + \Upsilon_i \int_\Omega \Big(\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}}\Big)^2 dx \\
&\ge \frac{\Upsilon_i}{2} \int_\Omega \Big[\Big(\frac{w_i-\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}\Big) - \Big(\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}}\Big)\Big]^2 dx \\
&= \frac{\Upsilon_i}{2} \int_\Omega \Big(\frac{w_j}{u_{j,\infty}} - \frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}\Big)^2 dx \\
&= \frac{\Upsilon_i}{2} \int_\Omega \Big(\frac{w_j}{u_{j,\infty}} - \frac{\bar{w}_j}{u_{j,\infty}} + \frac{\bar{w}_j}{u_{j,\infty}} - \frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}\Big)^2 dx \\
&= \frac{\Upsilon_i}{2} \Big[\int_\Omega \Big(\frac{w_j}{u_{j,\infty}} - \frac{\bar{w}_j}{u_{j,\infty}}\Big)^2 dx + \int_\Omega \Big(\frac{\bar{w}_j}{u_{j,\infty}} - \frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}\Big)^2 dx\Big] \\
&\Big(\text{do } 2\Big(\frac{\bar{w}_j}{u_{j,\infty}} - \frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}\Big) \int_\Omega \Big(\frac{w_j}{u_{j,\infty}} - \frac{\bar{w}_j}{u_{j,\infty}}\Big)dx = 0\Big) \\
&= \frac{\Upsilon_i}{2}\frac{1}{u_{j,\infty}} \Big[\int_\Omega \frac{|w_j-\bar{w}_j|^2}{u_{j,\infty}}dx + \Big(\frac{\bar{w}_j}{\sqrt{u_{j,\infty}}} - \frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}\sqrt{u_{j,\infty}}\Big)^2\Big] \\
&\ge \frac{\Upsilon_i}{2} \min_{1\le j\le N}\Big\{\frac{1}{u_{j,\infty}}\Big\} \Big[\int_\Omega \frac{|w_j-\bar{w}_j|^2}{u_{j,\infty}}dx + \Big(\frac{\bar{w}_j^2}{u_{j,\infty}} - 2\frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}\bar{w}_j + \frac{\bar{w}_i^2}{u_{i,\infty}^2}u_{j,\infty}\Big)\Big] \\
&\ge \beta_i\Big(\int_\Omega \frac{|w_j-\bar{w}_j|^2}{u_{j,\infty}}dx + \frac{\bar{w}_j^2}{u_{j,\infty}} - 2\frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}}\bar{w}_j\Big),
\end{aligned}$$

với $\beta_i := \frac{1}{2}\Upsilon_i \min_{1\le j\le N}\{\frac{1}{u_{j,\infty}}\} = \frac{1}{2}\Upsilon_i \Delta_\infty$ và $\Delta_\infty := \min_{1\le j\le N}\{\frac{1}{u_{j,\infty}}\}$. Vì vậy, kết hợp với $\sum_{j=1}^{N} \bar{w}_j = \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega w_j dx = 0$, với mỗi $1 \le i \le N$, ta có:

$$\begin{aligned}\Lambda_i &= \sum_{j=1}^{N} \Big[\int_\Omega \frac{|\nabla w_i|^2}{u_{i,\infty}} dx + \Upsilon_i \int_\Omega (\frac{w_i}{u_{i,\infty}} - \frac{w_j}{u_{j,\infty}})^2 dx \Big] \\ &\ge \beta_i \Big[\sum_{j=1}^{N} (\int_\Omega \frac{|w_j - \bar{w}_j|^2}{u_{j,\infty}} dx + \frac{\bar{w}_j^2}{u_{j,\infty}}) - 2\frac{\bar{w}_i}{u_{i,\infty}} \sum_{j=1}^{N} \bar{w}_j \Big] = \beta_i E(W|X_\infty).\end{aligned}$$

Do đó, kết hợp với $\dfrac{\beta_i}{\Upsilon_i} = \dfrac{1}{2}\Delta_\infty$, $\beta_i = \frac{1}{2} C_P u_{i,\infty} \Delta_\infty$ và $0 < k < 1$, ta được:

$$\begin{aligned}&\sum_{i:d_i>0}^{N} \min\{\frac{2d_i}{N}, \frac{kM\epsilon_{A_\infty}}{2\Upsilon_i}\} \Lambda_i \ge \sum_{i:d_i>0}^{N} \min\{\frac{2d_i}{N}, \frac{kM\epsilon_{A_\infty}}{2\Upsilon_i}\} \beta_i E(W|X_\infty) \\ &\ge k\Big[\sum_{i:d_i>0}^{N} \min\{\frac{d_i C_P u_{i,\infty} \Delta_\infty}{N}, \frac{M\epsilon_{A_\infty}\Delta_\infty}{4}\} \Big] E(W|X_\infty) = k\lambda' E(W|X_\infty),\end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned}\lambda' &:= \sum_{i:d_i>0}^{N} \min\{\frac{d_i C_P u_{i,\infty} \Delta_\infty}{N}, \frac{M\epsilon_{A_\infty}\Delta_\infty}{4}\} \\ &= (\sum_{i:d_i>0}^{N} \min\{\frac{d_i C_P u_{i,\infty}^1}{N}, \frac{\epsilon_{A_\infty}}{4}\}) \min_{1\le j\le N}\{\frac{1}{u_{j,\infty}^1}\} > 0\end{aligned}$$

chỉ phụ thuộc vào A_∞, D và Ω.
Kết hợp với (3.2.15), với mọi $t > t^k$, ta được:

$$D(W|X_\infty) \ge k\lambda' E(W|X_\infty) - P_L.$$

Cuối cùng, với $\rho > 0$, $L'_\rho := (1 + \dfrac{1}{\rho}) M \max_{1\le i\le N}\{\dfrac{1}{u_{i,\infty}}\}$ và $C'_\rho := \rho M N$, ta có:

- Theo nhận xét 4, với mỗi $t > t^k$, ta có $P_L \le (L'_\rho E(W|X_\infty) + C'_\rho) F_k(t)$ nên với mọi $t > t^k$:

$$D(W|X_\infty) \ge (k\lambda' - L'_\rho F_k(t)) E(W|X_\infty) - C'_\rho F_k(t),$$

trong đó $F_k(t) = (1-k)h_{A_\infty}$ trên $[0, +\infty)$.

- Nếu $|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq B(t)$ với mọi $i, j \in \{1, \dots, N\}$ và mọi $t > 0$ thì với $D_k(t) = \min\{B(t), (1-k)h_{A_\infty}\}$, theo nhận xét 4, với mọi $t > t^k$, ta được $P_L \leq (L'_\rho E(W|X_\infty) + C'_\rho)D_k(t)$ nên:

$$D(W|X_\infty) \geq (k\lambda' - L'_\rho D_k(t))E(W|X_\infty) - C'_\rho D_k(t).$$

Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét 6. Với $\rho = \frac{1}{N}$, ta có thể lấy $L' = L'_{\frac{1}{N}} = \frac{(1+N)}{\min_{1\leq i\leq N}\{u^1_{i,\infty}\}}$ chỉ phụ thuộc vào A_∞ và $C' = C'_{\frac{1}{N}} = M$ chỉ phụ thuộc vào M (việc thay đổi này không ảnh hưởng gì đến hằng số λ').

Tiếp theo, áp dụng bổ đề 3 cho kết quả của định lí 6 và lập luận tương tự như ở phần 3.1 "Đánh giá tổng quát cho entropy", ta được định lí sau về các đánh giá tổng quát cho entropy khi sự khuếch tán có thể suy biến:

Định lí 7 (Định lí đánh giá tổng quát). *Với hệ* $\mathbf{N}$ *có ít nhất một hệ số khuếch tán dương (Có* $i \in \{1, \dots, N\}$ *để* $d_i > 0$*) và* $\lambda', C', L' > 0$ *là các hằng số trong định lí 6 thì:*

Đánh giá tổng quát thứ nhất*:*
Với mỗi $k \in (0,1)$ *sao cho* $k\lambda' - L'(1-k)h_{A_\infty} > 0$ *và thời điểm k-giới hạn* t^k *bất kì của* $A(t)$ *thì với mỗi* $t \geq t^k$*, ta có:*

$$E(W|X_\infty) \leq \frac{C'(1-k)h_{A_\infty}}{k\lambda' - L'(1-k)h_{A_\infty}} + E(W|X_\infty)(t^k)e^{-(k\lambda' - L'(1-k)h_{A_\infty})(t-t^k)}. \tag{3.2.16}$$

Đánh giá tổng quát thứ hai*:*
Nếu hàm $B(t)$ *liên tục, không âm trên* $[0, +\infty)$ *thỏa mãn*

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq B(t) \text{ với mỗi } i, j \in \{1, \dots, N\} \text{ và mỗi } t > 0,$$

thì với mỗi $k \in (0,1)$*, mỗi thời điểm k-giới hạn* t^k *của hàm* $A(t)$ *và mỗi*

$t \geq t^k$, *với* $D_k(t) = \min\{B(t), (1-k)h_{A_\infty}\}$ *trên* $[0, +\infty)$, *ta có:*

$$E(W|X_\infty) \leq C' \int_{t^k}^{t} e^{\int_s^t (L'D_k - k\lambda')d\tau} D_k(s)ds + E(W|X_\infty)(t^k)e^{\int_{t^k}^t (L'D_k - k\lambda')d\tau}. \tag{3.2.17}$$

Đánh giá entropy tổng quát (3.2.16) và (3.2.17) cho phép ta chứng minh 2 định lí quan trọng sau về sự hội tụ về trạng thái cân bằng của hệ.

Định lí 8 (**Định lí về chặn trên của entropy và hội tụ về trạng thái cân bằng**). *Với hệ* $\mathbf{N}$ *có ít nhất một hệ số khuếch tán* d_i *dương thì mỗi nghiệm* $X = (u_1, \ldots, u_N)$ *của hệ (0.0.1) đều hội tụ về trạng thái cân bằng* $X_\infty = (u_{1,\infty}, \ldots, u_{N,\infty})$ *theo nghĩa là:*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_\Omega \frac{|u_i - u_{i,\infty}|^2}{u_{i,\infty}} dx = \lim_{t\to+\infty} E(W|X_\infty)(t) = 0.$$

và tồn tại hằng số $\kappa > 0$ *chỉ phụ thuộc vào hàm* $A(t)$, D, Ω, M *và* X_0 *sao cho mỗi nghiệm* $X = (u_1, \ldots, u_N)$ *của hệ ban đầu (0.0.1) đều thỏa mãn:*

$$E(W|X_\infty)(t) \leq \kappa \text{ với mọi } t \geq 0.$$

Chứng minh. Ta chia chứng minh thành 2 phần:

Phần 1: Chặn trên của entropy:

Lấy $k_0 \in (0,1)$ để $k_0\lambda' - L'(1-k_0)h_{A_\infty} \geq \frac{\lambda'}{2} > 0$, cụ thể ta có thể lấy $k_0 = \frac{L'h_{A_\infty} + \frac{\lambda'}{2}}{L'h_{A_\infty} + \lambda'} = k_0(A_\infty, \Omega, D)$. Do $k_0 \in (0,1)$ với $k_0\lambda' - L'(1-k_0)h_{A_\infty} > 0$ nên lấy t^{k_0} là một thời điểm k_0-giới hạn cụ thể của $A(t)$ ($t^{k_0} = t^{k_0}(A, \Omega, D)$) thì theo đánh giá tổng quát (3.2.16), với mọi $t \geq t^{k_0}$, ta được bất đẳng thức sau cho $f(t) = E(W|X_\infty)(t)$:

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \frac{C'(1-k_0)h_{A_\infty}}{k_0\lambda' - L'(1-k_0)h_{A_\infty}} + f(t^{k_0})e^{-(k_0\lambda' - L'(1-k_0)h_{A_\infty})(t - t^{k_0})} \\ &\leq \frac{\frac{C'}{L'}L'(1-k_0)h_{A_\infty}}{k_0\lambda' - L'(1-k_0)h_{A_\infty}} + f(t^{k_0}) \leq \frac{C'}{L'} + f(t^{k_0}), \end{aligned}$$

(do $L'(1-k_0)h_{A_\infty} \leq k_0\lambda' - \frac{\lambda'}{2} < \lambda' - \frac{\lambda'}{2} = \frac{\lambda'}{2} \leq k_0\lambda' - L'(1-k_0)h_{A_\infty}$) nên:

$$E(W|X_\infty)(t) \leq \frac{C'}{L'} + E(W|X_\infty)(t^{k_0}). \tag{3.2.18}$$

Tiếp theo, đánh giá ban đầu (2.3.10) cho ta $E(W|X_\infty)(t) \leq \alpha_{X_0}e^{\mu_A t} - M$ với mọi $t \geq 0$, ở đây $\alpha_{X_0} = \alpha_{X_0}(A_\infty, M, X_0) \geq 0$ và $\mu_A = 2H_A N$. Do đó $0 \leq E(W|X_\infty)(t^{k_0}) \leq \alpha_{X_0}e^{\mu_A t^{k_0}} - M$. Kết hợp với (3.2.18), ta được:

$$E(W|X_\infty)(t) \leq \frac{C'}{L'} + (\alpha_{X_0}e^{\mu_A t^{k_0}} - M) \text{ với mọi } t \geq t^{k_0}.$$

Còn khi $0 \leq t \leq t^{k_0}$ thì $E(W|X_\infty)(t) \leq \alpha_{X_0}e^{\mu_A t} - M \leq \alpha_{X_0}e^{\mu_A t_{k_0}} - M$.

Vậy với mỗi $t \geq 0$, ta có $E(W|X_\infty)(t) \leq \frac{C'}{L'} + (\alpha_{X_0}e^{\mu_A t^{k_0}} - M) = \kappa$ với $\kappa = \frac{C'}{L'} + (\alpha_{X_0}e^{\mu_A t^{k_0}} - M) > 0$ chỉ phụ thuộc vào A, Ω, D, M và X_0.

Phần 2: Chứng minh $\lim\limits_{t\to+\infty} E(W|X_\infty)(t) = 0$**:**
Với mỗi $\epsilon > 0$, lấy $k_1 \in (0,1)$ để:

$$k_1\lambda' - L'(1-k_1)h_{A_\infty} \geq \frac{\lambda'}{2} > 0 \text{ và } \frac{C'(1-k_1)h_{A_\infty}}{k_1\lambda' - L'(1-k_1)h_{A_\infty}} \leq \frac{\epsilon}{2},$$

cụ thể $k_1 = \max\{\frac{L'h_{A_\infty} + \frac{\lambda'}{2}}{L'h_{A_\infty} + \lambda'}, 1 - \frac{\epsilon\lambda'}{4C'h_{A_\infty}}\} = k_1(A_\infty, \Omega, D, M, \epsilon)$. Tương tự như **phần 1**, ta lấy được thời điểm k_1-giới hạn của $A(t)$ là t^{k_1} với $t^{k_1} = t^{k_1}(k_1, A)$. Khi đó $k_1 \in (0,1)$ và $k_1\lambda' - L'(1-k_1)h_{A_\infty} \geq \frac{\lambda'}{2} > 0$ nên với hàm $f(t) = E(W|X_\infty)(t)$ và sử dụng $f(t^{k_1}) = E(W|X_\infty)(t^{k_1}) \leq \kappa$, với mỗi $t \geq t^{k_1}$, đánh giá tổng quát thứ nhất (3.2.16) cho ta:

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \frac{C'(1-k_1)h_{A_\infty}}{k_1\lambda' - L'(1-k_1)h_{A_\infty}} + f(t^{k_1})e^{-(k_1\lambda' - L'(1-k_1)h_{A_\infty})(t-t^{k_1})} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \kappa e^{-\frac{\lambda'}{2}(t-t^{k_1})}. \end{aligned}$$

Cuối cùng, ta lấy $t_2 = t_2(\kappa, t^{k_1}, \lambda', \epsilon) \geq 0$ thỏa mãn $\kappa e^{-\frac{\lambda'}{2}(t-t^{k_1})} < \dfrac{\epsilon}{2}$ với mọi $t \geq t_2$, chẳng hạn $t_2 = |t^{k_1} + \dfrac{2}{\lambda'}\ln(\dfrac{4\kappa}{\epsilon})|$. Khi đó, đặt $t_3 = \max\{t^{k_1}, t_2\}$

$(t_3 = t_3(A, \Omega, D, M, X_0, \epsilon))$ thì với mọi $t \geq t_3$, ta có:

$$0 \leq E(W|X_\infty)(t) = f(t) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Vậy $\lim_{t\to+\infty} E(W|X_\infty)(t) = 0$, hoàn tất chứng minh. □

Định lí 9 (**Định lí mở rộng của định lí 4**)**.** *Với hệ* $\mathbf{N}$ *có ít nhất một hệ số khuếch tán* d_i *dương và hàm* $A(t)$ *thỏa mãn: (ở đây* $h, \delta > 0$ *là các hằng số)*

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq he^{-\delta t} \text{ với mọi } i, j \in \{1, \ldots, N\} \text{ và mọi } t > 0,$$

mỗi nghiệm $X = (u_1, \ldots, u_N)$ *của hệ tổng quát (0.0.1) đều hội tụ theo cấp lũy thừa đến trạng thái cân bằng* $X_\infty = (u_{1,\infty}, \ldots, u_{N,\infty})$ *theo nghĩa là:*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{|u_i - u_{i,\infty}|^2}{u_{i,\infty}} dx = E(W|X_\infty)(t) \leq G_0 e^{-\theta t} \text{ với mọi } t \geq 0,$$

với $\theta = \theta(A_\infty, D, \Omega, \delta) > 0$ *và* $G_0 = G_0(A_\infty, D, \Omega, M, h, \delta, X_0, \theta) > 0$. *Hơn nữa, ta có thể lấy* $0 < \theta < \min\{\lambda', \delta\}$ *bất kì, với* $\lambda' = \lambda'(A_\infty, \Omega, D)$ *trong định lí 6.*

Chứng minh. Trong chứng minh này, chúng tôi sẽ sử dụng các hằng số λ', C', L' nêu trong định lí 6.

Với $k \in (0, 1)$, thời điểm k-giới hạn t^* của hàm $A(t)$ bất kì và $B(t) = he^{-\delta t}$ cùng với $D_k(t) = \min\{B(t), (1-k)h_{A_\infty}\} \leq B(t) = he^{-\delta t}$ thì áp dụng đánh giá tổng quát (3.2.17) cho $f(t) = E(W|X_\infty)(t)$ với mỗi $t \geq t^*$ cho ta:

$$\begin{aligned}
f(t) &\leq C'\Big(\int_{t^*}^{t} e^{\int_s^t (L'D_k(\tau) - k\lambda')d\tau} D_k(s)ds\Big) + f(t^*)e^{\int_{t^*}^t (L'D_k(\tau)-k\lambda')d\tau} \\
&\leq C'\Big(\int_{t^*}^{t} e^{\int_s^t (L'he^{-\delta\tau} - k\lambda')d\tau} he^{-\delta s}ds\Big) + f(t^*)e^{\int_{t^*}^t (L'he^{-\delta\tau}-k\lambda')d\tau} \\
&= C'h\Big(\int_{t^*}^{t} e^{-\frac{L'h}{\delta}(e^{-\delta t} - e^{-\delta s})} e^{k\lambda'(s-t)} e^{-\delta s} ds\Big) + f(t^*)e^{-\frac{L'h}{\delta}(e^{-\delta t} - e^{-\delta t^*})} e^{k\lambda'(t^*-t)} \\
&\leq C'he^{\frac{L'h}{\delta}(e^{-\delta t^*})}\Big(\int_{t^*}^{t} e^{(k\lambda'-\delta)s}ds\Big)e^{-k\lambda' t} + f(t^*)e^{\frac{L'h}{\delta}(e^{-\delta t^*})} e^{k\lambda'(t^*-t)}, \quad (3.2.19)
\end{aligned}$$

(do $-\frac{L'h}{\delta}(e^{-\delta t}-e^{-\delta s}) \le -\frac{L'h}{\delta}(e^{-\delta t}-e^{-\delta t^*}) = \frac{L'h}{\delta}e^{-\delta t^*} - \frac{L'h}{\delta}e^{-\delta t} \le \frac{L'h}{\delta}e^{-\delta t^*}$ với mọi $t \ge s \ge t^*$).

Với mỗi $0 < \theta < \min\{\lambda', \delta\}$, lấy $k_1 \in (0,1)$ để $k_1\lambda' - \theta > 0$, cụ thể lấy $k_1 = \frac{1+\frac{\theta}{\lambda'}}{2}$ chỉ phụ thuộc vào A_∞, D, Ω và θ. Khi đó $k_1\lambda' - \delta < k_1\lambda' - \theta$ và $k_1\lambda' - \theta > 0$ nên với mỗi $t \ge t^*$, ta có:

$$\int_{t^*}^{t} e^{(k_1\lambda'-\delta)s}ds \le \int_{t^*}^{t} e^{(k_1\lambda'-\theta)s}ds = \frac{e^{(k_1\lambda'-\theta)t} - e^{(k_1\lambda'-\theta)t^*}}{k_1\lambda'-\theta} \le \frac{e^{(k_1\lambda'-\theta)t}}{k_1\lambda'-\theta}. \tag{3.2.20}$$

Đồng thời, $t_1 = \dfrac{|\ln(\frac{h}{(1-k_1)h_{A_\infty}})|}{\delta} \ge 0$ là một thời điểm k_1-giới hạn của $A(t)$ do với mọi $i,j \in \{1,\dots,N\}$ và mọi $t > t_1$, ta có:

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \le he^{-\delta t} \le he^{-\delta t_1} \le he^{-(\ln(\frac{h}{(1-k_1)h_{A_\infty}}))} = (1-k_1)h_{A_\infty}.$$

Sử dụng (3.2.19) và (3.2.20) cho $k = k_1$ và $t^* = t_1$, ta suy ra, với mỗi $t \ge t_1$, ta có:

$$\begin{aligned}
f(t) &\le C'he^{\frac{L'h}{\delta}(e^{-\delta t_1})}(\frac{e^{(k_1\lambda'-\theta)t}}{k_1\lambda'-\theta})e^{-k\lambda' t} + f(t_1)e^{\frac{L'h}{\delta}(e^{-\delta t_1})}e^{k\lambda'(t_1-t)}\\
&= \Big[(\frac{C'h}{k_1\lambda'-\theta})e^{-\theta t} + (f(t_1)e^{k_1\lambda' t_1})e^{-k_1\lambda' t}\Big]e^{\frac{L'h}{\delta}(e^{-\delta t_1})}\\
&\le \Big[(\frac{C'h}{k_1\lambda'-\theta} + f(t_1)e^{k_1\lambda' t_1})e^{-\theta t}\Big]e^{\frac{L'h}{\delta}(e^{-\delta t_1})} \quad (\text{do } k_1\lambda' > \theta)\\
&= (\alpha_1 + \beta_1 f(t_1))e^{-\theta t},
\end{aligned}$$

với $\alpha_1 = \dfrac{C'h}{k_1\lambda'-\theta}e^{\frac{L'h}{\delta}(e^{-\delta t_1})}$ và $\beta_1 = e^{k_1\lambda' t_1}e^{\frac{L'h}{\delta}(e^{-\delta t_1})}$.
Mà với mọi $1 \le i,j \le N$, ta có $||a_{ij}||_{L^\infty} = esssup_{t\ge 0}|a_{ij}(t)|$ nên:

$$||a_{ij}||_{L^\infty} \le \sup_{t>0}(|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| + |a_{ij,\infty}|) \le \sup_{t>0}(he^{-\delta t} + |a_{ij,\infty}|) \le H_1,$$

với $H_1 = h + \max\limits_{1\le i,j\le N}|a_{ij,\infty}| > 0$ nên $H_A = \max\limits_{1\le i,j\le N}\{||a_{ij}||_{L^\infty}\} \le H_1$, vì vậy theo đánh giá ban đầu (2.3.10), với mỗi $t \ge 0$, ta được:

$$E(W|X_\infty)(t) \le \alpha_{X_0}e^{\mu_A t} = \alpha_{X_0}e^{2NH_A t} \le \alpha_{X_0}e^{2NH_1 t} = \alpha_{X_0}e^{\mu_1 t}, \tag{3.2.21}$$

nên $f(t_1) = E(W|X_\infty)(t_1) \le \alpha_{X_0} e^{\mu_1 t_1}$ với $\alpha_{X_0} = \alpha_{X_0}(A_\infty, M, X_0) \ge 0$ và $\mu_1 = 2H_1 N = 2(h + \max_{1\le i,j\le N} |a_{ij,\infty}|)N = \mu_1(A_\infty, h) > 0$.

Vậy $E(W|X_\infty)(t) = f(t) \le (\alpha_1 + \beta_1 f(t_1))e^{-\theta t} \le (\alpha_1 + \beta_1 \alpha_{X_0} e^{\mu_1 t_1})e^{-\theta t}$ với mỗi $t \ge t_1$, tức là với $G_1 = (\alpha_1 + \beta_1 \alpha_{X_0} e^{\mu_1 t_1}) > 0$ thì

$$E(W|X_\infty)(t) \le G_1 e^{-\theta t} \text{ trên } [t_1, +\infty). \tag{3.2.22}$$

Đồng thời, từ đánh giá (3.2.21), ta có $E(W|X_\infty)(t) \le \alpha_{X_0} e^{\mu_1 t}$ với mỗi $t \ge 0$ nên với mỗi $0 \le t < t_1$, ta có $E(W|X_\infty)(t)e^{\theta t} \le \alpha_{X_0} e^{(\mu_1+\theta)t} \le \alpha_{X_0} e^{(\mu_1+\theta)t_1} = G_2$, dẫn đến

$$E(W|X_\infty)(t) \le G_2 e^{-\theta t} \text{ trên } [0, t_1). \tag{3.2.23}$$

Từ (3.2.22) và (3.2.23), ta được $E(W|X_\infty)(t) \le \max\{G_1, G_2\}e^{-\theta t} = G_0 e^{-\theta t}$ với mỗi $t \ge 0$, trong đó hằng số dương $G_0 = \max\{G_1, G_2\} = \max\{\alpha_1 + \beta_1 \alpha_{X_0} e^{\mu_1 t_1}, \alpha_{X_0} e^{(\mu_1+\theta)t_1}\}$ chỉ phụ thuộc vào A_∞, D, Ω, M, h, δ, X_0 và θ , kết thúc chứng minh. $\square$

3.3 Đánh giá entropy cho chặn thường gặp

Trong phần này, chúng tôi sẽ sử dụng định lí 6 để đưa ra đánh giá định lượng cho $E(W|X_\infty)(t)$ khi $t \to +\infty$ khi điều kiện thường gặp là $\lim\limits_{t\to+\infty} B(t) = 0$ được thỏa mãn cũng như ước lượng tốc độ hội tụ về 0 của $E(W|X_\infty)(t)$. Ở phần này, ta sử dụng $\lambda' > 0$ trong định lí 6 và kí hiệu $L'_\rho = \dfrac{(1 + \frac{1}{\rho})}{\min_{1\le i\le N}\{u^1_{i,\infty}\}}$ cùng với $C'_\rho = \rho NM$ với mỗi $\rho > 0$.

Với mỗi $0 < \theta < \lambda'$ và mỗi $\epsilon, \epsilon' > 0$, chọn $\rho^* = \dfrac{\epsilon\theta}{NM} > 0$ thì do $0 < \frac{\theta}{\lambda'} < 1$ nên ta chọn được $k^* \in (0,1)$ thỏa mãn $k^* > \frac{\theta}{\lambda'}$ hay $k^*\lambda' - \theta > 0$, cụ thể chọn $k^* = \frac{1+\frac{\theta}{\lambda'}}{2}$ chỉ phụ thuộc vào A_∞, D, Ω và θ. Khi đó

$$\lim_{t\to+\infty} B(t) = 0 < \min\{(1-k^*)h_{A_\infty}, \frac{k^*\lambda' - \theta}{L'_{\rho^*}}\},$$

nên ta lấy được $t_0 = t_0(k^*, h_{A_\infty}, \lambda', B, \theta, L'_{\rho^*}) = t_0(A_\infty, D, \Omega, B, \theta, \epsilon)$ sao cho:

$$B(t) < \min\{(1-k^*)h_{A_\infty}, \frac{k^*\lambda' - \theta}{L'_{\rho^*}}\} \text{ với mọi } t > t_0 \geq 0.$$

Khi đó, với mọi $t_1 \geq t_0$, ta có:

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq B(t) < (1-k^*)h_{A_\infty} \text{ với mọi } t > t_1 \text{ và mọi } 1 \leq i, j \leq N.$$

Vậy mỗi $t_1 \geq t_0$ đều là thời điểm k^*-giới hạn của $A(t)$. Vì vậy, áp dụng đánh giá tổng quát (3.2.17) với $D_{k^*}(t) = \min\{B(t), (1-k^*)h_{A_\infty}\} \leq B(t)$, với mỗi $t > t_1 \geq t_0$, ta được:

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}E(W|X_\infty) = D(W|X_\infty)\\
&\geq (k^*\lambda' - L'_{\rho^*}D_{k^*}(t))E(W|X_\infty) - C'_{\rho^*}D_{k^*}(t)\\
&\geq (k^*\lambda' - L'_{\rho^*}B(t))E(W|X_\infty) - C'_{\rho^*}B(t)\\
&\geq (k^*\lambda' - (k^*\lambda' - \theta))E(W|X_\infty) - C'_{\rho^*}B(t) = \theta E(W|X_\infty) - C'_{\rho^*}B(t).
\end{aligned}$$

với $C'_{\rho^*} = \rho^* NM = \epsilon\theta$ nên

$$\frac{d}{dt}E(W|X_\infty) \leq -\theta E(W|X_\infty) + C'_{\rho^*}B(t) = -\theta E(W|X_\infty) + \epsilon\theta B(t).$$

Áp dụng bổ đề 3 cho hàm $E(W|X_\infty)(t)$ với hàm $a(t) = -\theta$ và hàm $b(t) = \epsilon\theta B(t)$, với mỗi $t \geq t_1$, ta được:

$$E(W|X_\infty)(t) \leq \Big[\epsilon\theta(\int_{t_1}^{t} e^{\theta(s-t_1)}B(s)ds) + E(W|X_\infty)(t_1)\Big]e^{-\theta(t-t_1)}. \tag{3.3.24}$$

Hơn nữa, chứng minh của định lí 8 cho ta $t' = t'(A, D, M, \Omega, X_0, \epsilon') \geq 0$ thỏa mãn $E(W|X_\infty)(t_1) \leq \epsilon'$ với mọi $t_1 \geq t'$. Kết hợp với (3.3.24), với mỗi $t \geq t_1 \geq t^0 = \max\{t_0, t'\}$, ta được:

$$E(W|X_\infty)(t) \leq \Big[\epsilon\theta(\int_{t_1}^{t} e^{\theta(s-t_1)}B(s)ds) + \epsilon'\Big]e^{-\theta(t-t_1)}$$

$$\leq \Big[\epsilon\theta(\max_{s\in[t_1,t]}\{B(s)\})(\int_{t_1}^{t} e^{\theta(s-t_1)}ds) + \epsilon'\Big]e^{-\theta(t-t_1)}$$
$$= \Big[\epsilon\theta(\max_{s\in[t_1,t]}\{B(s)\})(\frac{e^{\theta(t-t_1)}-1}{\theta}) + \epsilon'\Big]e^{-\theta(t-t_1)}$$
$$= \epsilon(\max_{s\in[t_1,t]}\{B(s)\})(1-e^{-\theta(t-t_1)}) + \epsilon' e^{-\theta(t-t_1)},$$

và $E(W|X_\infty)(t) \leq \epsilon'$ cũng như $-\frac{d}{dt}E(W|X_\infty) \geq \theta E(W|X_\infty) - \epsilon\theta B(t)$.

Vậy ta có kết quả tổng quát sau:

Định lí 10 (Định lí hội tụ đến trạng thái cân bằng mở rộng). *Với hệ* $\mathbf{N}$ *có ít nhất một hệ số khuếch tán* $d_i > 0$ *và hàm* $B(t)$ *liên tục, không âm trên* $[0,+\infty)$ *thỏa mãn* $\lim_{t\to+\infty} B(t) = 0$ *và*

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq B(t) \text{ với mỗi } i,j \in \{1.\ldots,N\} \text{ và mỗi } t > 0,$$

thì mỗi nghiệm $X = (u_1,\ldots,u_N)$ *của hệ (0.0.1) đều hội tụ đến trạng thái cân bằng* $X_\infty = (u_{1,\infty},\ldots,u_{N,\infty})$ *theo nghĩa là:*

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{|u_i-u_{i,\infty}|^2}{u_{i,\infty}}dx = E(W|X_\infty)(t) \to 0 \text{ khi } t \to +\infty.$$

Hơn nữa, với hằng số λ' *ở định lí 6 thì với* $\theta \in (0,\lambda')$ *và* $\epsilon,\epsilon' > 0$ *bất kì, tồn tại hằng số* $t^0 = t^0(A,\Omega,D,M,X_0,B,\theta,\epsilon,\epsilon') \geq 0$ *sao cho mỗi nghiệm* $X = (u_1,\ldots,u_N)$ *của hệ (0.0.1) đều thỏa mãn:*

- (*Tốc độ phát tán entropy*) *Với mọi* $t > t_1 \geq t^0$, *ta có:*

$$D(W|X_\infty)(t) = -\frac{d}{dt}E(W|X_\infty)(t) \geq \theta E(W|X_\infty)(t) - \epsilon\theta B(t).$$

- (*Chặn trên entropy*) *Với mỗi* $t \geq t^0$, *ta có* $E(W|X_\infty)(t) \leq \epsilon'$.

- (*Chặn trên của entropy và hàm* $B(t)$) *Mọi* $t \geq t_1 \geq t^0$ *thỏa mãn:*

$$E(W|X_\infty)(t) \leq \epsilon(\max_{s\in[t_1,t]}\{B(s)\})(1-e^{-\theta(t-t_1)}) + \epsilon' e^{-\theta(t-t_1)}.$$

Trước khi đi đến kết quả tiếp theo, ta định nghĩa khái niệm kí hiệu **o** nhỏ:

Định nghĩa 16 (Kí hiệu o nhỏ ([8])). *Cho hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$ cùng xác định trên $[a, +\infty)$ ($a \in \mathbb{R}$) sao cho có $b \geq a$ để $g(x) > 0$ với mọi $x > b$. Ta nói $f(t)$ là vô cùng bé so với $g(t)$ khi $t \to +\infty$, kí hiệu $f(t) = \mathbf{o}(g(t))$ khi $t \to +\infty$ nếu $\dfrac{f(t)}{g(t)} \to 0$ khi $t \to +\infty$.*

Nói cách khác, $f(t) = \mathbf{o}(g(t))$ khi $t \to +\infty$ nếu với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại số thực t_0 để với mọi $t \geq t_0$, ta có $|f(t)| \leq \epsilon g(t)$.

Định lí 10 cho ta hệ quả sau về bậc hội tụ về trạng thái cân bằng của nghiệm của hệ (0.0.1) khi hàm chặn $B(t)$ không tăng:

Hệ quả 1. *Với hệ* **N** *có ít nhất một hệ số khuếch tán d_i dương và*

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq B(t) \text{ với mỗi } i, j \in \{1, \ldots, N\} \text{ và mỗi } t > 0,$$

với $B(t)$ không âm, liên tục, không tăng trên $[0, +\infty)$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} B(t) = 0$ thì tồn tại hằng số $\theta = \theta(A_\infty, D, \Omega) > 0$ để với mỗi $l \in (0, 1)$, ta có :
Mỗi nghiệm $X = (u_1, \ldots, u_N)$ của hệ tổng quát (0.0.1) đều hội tụ đến trạng thái cân bằng $X_\infty = (u_{1,\infty}, \ldots, u_{N,\infty})$ theo cấp vô cùng bé so với $B(lt) + e^{-\theta(1-l)t}$ theo nghĩa là:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{|u_i - u_{i,\infty}|^2}{u_{i,\infty}} dx = E(W|X_\infty)(t) = \mathbf{o}(B(lt) + e^{-\theta(1-l)t}) \text{ khi } t \to +\infty,$$

cụ thể là với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại hằng số $t^0 \geq 0$ chỉ phụ thuộc vào hàm $A(t)$, D, Ω, X_0, M, hàm $B(t)$, θ và ϵ (và không phụ thuộc vào l) sao cho với mọi $t \geq \frac{t^0}{l}$, ta có bất đẳng thức sau:

$$E(W|X_\infty)(t) \leq \epsilon(B(lt) + e^{-\theta(1-l)t}).$$

Hơn nữa, ta có thể lấy $0 < \theta < \lambda'$ bất kì với λ' như trong định lí 6.

Chứng minh hệ quả. Với $0 < \theta < \lambda'$ và $\epsilon > 0$ bất kì, lấy $\epsilon' = \epsilon$ thì theo định lí 10, tồn tại hằng số $t^0 = t^0(A, D, \Omega, X_0, M, B, \theta, \epsilon) \geq 0$ sao cho với mọi $t \geq t_1 \geq t^0 \geq 0$, ta có:

$$E(W|X_\infty)(t) \leq \epsilon(\max_{s\in[t_1,t]}\{B(s)\})(1-e^{-\theta(t-t_1)}) + \epsilon e^{-\theta(t-t_1)}. \qquad (3.3.25)$$

Bây giờ, xét mỗi $0 < l < 1$. Khi đó, với mỗi $t \geq \frac{t^0}{l}$ và lấy $t_1 = lt$ thì ta được $t \geq lt = t_1 \geq t^0$ và do hàm $B(t)$ không tăng trên $[0,+\infty)$ nên $\max_{s\in[t_1,t]}\{B(s)\} = B(t_1) = B(lt)$. Vì vậy, áp dụng (3.3.25), ta được:

$$\begin{aligned}|E(W|X_\infty)(t)| &= E(W|X_\infty)(t) \leq \epsilon B(lt)(1-e^{-\theta(t-lt)}) + \epsilon e^{-\theta(t-lt)}\\ &\leq \epsilon(B(lt) + e^{-\theta(1-l)t}),\end{aligned}$$

do đó $E(W|X_\infty)(t) = \mathbf{o}(B(lt) + e^{-\theta(1-l)t})$ khi $t \to +\infty$, kết thúc chứng minh. $\square$

Đặc biệt, khi các hàm hệ số phản ứng $a_{ij}(t)$ **liên tục** trên $[0,+\infty)$ với mỗi $1 \leq i,j \leq N$ thì với $B(t) = \max_{1\leq i,j\leq N}\{|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}|\}$, ta có ngay: $B(t)$ không âm, liên tục trên $[0,+\infty)$, $\lim_{t\to+\infty} B(t) = 0$ và:

$$|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}| \leq B(t), \text{ với mọi } i,j \in \{1,\dots,N\} \text{ và mọi } t > 0.$$

Vì vậy, áp dụng định lí 10, ta có ngay kết quả sau:

Định lí 11 (Định lí hội tụ đến trạng thái cân bằng khi hàm hệ số phản ứng liên tục). *Với hệ* $\mathbf{N}$ *có ít nhất một hệ số khuếch tán* d_i *dương và các hàm hệ số phản ứng* $a_{ij}(t)$ *liên tục trên* $[0,+\infty)$ *với mỗi* $i,j \in \{1,\dots,N\}$ *thì mỗi nghiệm* $X = (u_1,\dots,u_N)$ *của hệ (0.0.1) đều hội tụ đến trạng thái cân bằng* $X_\infty = (u_{1,\infty},\dots,u_{N,\infty})$ *theo nghĩa là:*

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{|u_i - u_{i,\infty}|^2}{u_{i,\infty}}dx = E(W|X_\infty)(t) \to 0 \textit{ khi } t \to +\infty.$$

Hơn nữa, với $\lambda' > 0$ *ở định lí 6 thì với* $\theta \in (0,\lambda')$ *và* $\epsilon,\epsilon' > 0$ *bất kì, tồn tại hằng số* $t^0 = t^0(A,\Omega,D,X_0,M,\theta,\epsilon,\epsilon') \geq 0$ *sao cho mỗi nghiệm* $X = (u_1,\dots,u_N)$ *của hệ (0.0.1) đều thỏa mãn các tính chất sau:*

- *Với mọi $t > t_1 \geq t^0$, ta có:*

$$-\frac{d}{dt}E(W|X_\infty)(t) \geq \theta E(W|X_\infty)(t) - \epsilon\theta \max_{1\leq i,j\leq N}\{|a_{ij}(t) - a_{ij,\infty}|\}.$$

- *Với mọi $t \geq t^0$, ta có $E(W|X_\infty)(t) \leq \epsilon'$.*

- *Với mọi $t \geq t_1 \geq t^0$, ta có:*

$$E(W|X_\infty)(t) \leq \epsilon \max_{1\leq i,j\leq N}\{\max_{s\in[t_1,t]}\{|a_{ij}(s) - a_{ij,\infty}|\}\} + \epsilon' e^{-\theta(t-t_1)}.$$

PHỤ LỤC

Trước khi chứng minh định lí 1 ta định nghĩa hàm $B_i(u_1, \ldots, u_N, \phi, t)$ sau đây:

- Với i sao cho $d_i > 0$ (chất có khuếch tán không suy biến), định nghĩa:

$$B_i(u_1, \ldots, u_N, \phi, t) = -d_i \int_\Omega \nabla u_i \nabla \phi dx + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \phi dx,$$

  với mỗi $u_1, \ldots, u_N : [0, T] \to L^2(\Omega)$ sao cho $u_j : [0, T] \to H^1(\Omega)$ với mỗi $j \in \{1, \ldots, N\}$ thỏa mãn $d_j > 0$, mỗi $\phi \in H^1(\Omega)$ và $t \in [0, T]$.

- Với i sao cho $d_i = 0$ (chất có khuếch tán suy biến), định nghĩa:

$$B_i(u_1, \ldots, u_N, \phi, t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \phi dx,$$

  với mỗi $u_1, \ldots, u_N : [0, T] \to L^2(\Omega)$, mỗi $\phi \in L^2(\Omega)$ và $t \in [0, T]$.

Khi đó, hệ các phương trình (2.2.3) và (2.2.4) có thể viết lại là:
Với mọi $i \in \{1, \ldots, N\}$:

$$\begin{aligned}
&\text{Khi } d_i > 0 \text{ và } \omega \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) : \\
&\int_0^T \langle \partial_t u_i, \omega \rangle \, dt = \int_0^T B_i(u_1, \ldots, u_N, \omega(\cdot, t), t) dt. \\
&\text{Khi } d_i = 0 \text{ và } \omega \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) : \\
&\int_0^T \int_\Omega \partial_t u_i \omega dx dt = \int_0^T B_i(u_1, \ldots, u_N, \omega(\cdot, t), t) dt. \qquad (3.3.26)
\end{aligned}$$

Bổ đề sau cho ta đánh giá năng lượng của hàm B_i trên:

Bổ đề 18. *Tồn tại các hằng số $\alpha, \gamma > 0$ chỉ phụ thuộc vào hàm $A(t)$ sao cho với mọi $i \in \{1, \ldots, N\}$ và mọi $u_1, \ldots, u_N : [0, T] \to L^2(\Omega)$ thỏa mãn:*

$u_j : [0,T] \to H^1(\Omega)$ với mỗi $j \in \{1,\dots,N\}$ thỏa mãn $d_j > 0$ nếu $d_i > 0$, ta có các bất đẳng thức đúng trên $[0,T]$:

- $B_i(u_1,\dots,u_N,u_i(\cdot,t),t) \leq \gamma||u_i||^2 + \alpha \sum_{j=1}^{N} ||u_j||^2,$

- $\left| d_i||\nabla u_i||^2_{(L^2(\Omega))^N} + B_i(u_1,\dots,u_N,u_i(\cdot,t),t)\right| \leq \gamma||u_i||^2 + \alpha \sum_{j=1}^{N} ||u_j||^2,$

  mỗi khi $d_i > 0$.

  Cụ thể, ta có thể lấy $\alpha = \alpha_A = \frac{1}{2}H_A$ và $\gamma = \gamma_A = \frac{1}{2}NH_A$ và tổng quát hơn là với mỗi $\epsilon > 0$, ta có thể lấy $\alpha = \alpha_\epsilon = \epsilon\alpha_A$ và $\gamma = \gamma_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\gamma_A$.

- *Kí hiệu u_i^- là hàm phần âm của hàm u_i, tức là $u_i^-(\cdot,t) = (u_i(\cdot,t))^-$ với mỗi $t \in [0,T]$. Khi đó, với mỗi $t \in [0,T]$, ta có:*

$$B_i(u_1,\dots,u_N,-u_i^-(\cdot,t),t) \leq B_i(-u_1^-,\dots,-u_N^-,-u_i^-(\cdot,t),t).$$

Chứng minh bổ đề 18.

- Khi $d_i > 0$, định nghĩa B_i cho ta:

$$B_i(u_1,\dots,u_N,u_i(\cdot,t),t) = -d_i||\nabla u_i||^2_{(L^2(\Omega))^N} + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)\int_\Omega u_j u_i dx.$$

Do đó, với mỗi $\epsilon > 0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức Young, ta được:

$$\left| d_i||\nabla u_i||^2_{(L^2(\Omega))^N} + B_i(u_1,\dots,u_N,u_i(\cdot,t),t)\right| = \left|\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)\int_\Omega u_j u_i dx\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}(t)| \left|\int_\Omega u_j u_i dx\right| \leq H_A \sum_{j=1}^{N} (||u_j(\cdot,t)||||u_i(\cdot,t)||)$$

$$\leq \frac{1}{2}\epsilon H_A \sum_{j=1}^{N} ||u_j(\cdot,t)||^2 + \frac{1}{2\epsilon}NH_A||u_i(\cdot,t)||^2.$$

Do đó, với $\alpha = \frac{1}{2}\epsilon H_A = \epsilon\alpha_A = \alpha_\epsilon$ và $\gamma = \frac{1}{2\epsilon}NH_A = \frac{1}{\epsilon}\gamma_A = \gamma_\epsilon$, ta có:

$$\left| d_i||\nabla u_i||^2_{(L^2(\Omega))^N} + B_i(u_1, \ldots, u_N, u_i(\cdot, t), t) \right| \leq \alpha \sum_{j=1}^{N} ||u_j||^2 + \gamma||u_i||^2,$$

và:

$$B_i(u_1, \ldots, u_N, u_i(\cdot, t), t) \leq \alpha \sum_{j=1}^{N} ||u_j||^2 + \gamma||u_i||^2 - d_i||\nabla u_i||^2_{(L^2(\Omega))^N}$$
$$\leq \alpha \sum_{j=1}^{N} ||u_j||^2 + \gamma||u_i||^2.$$

Để chứng minh phần thứ ba, theo tính chất của hàm phần âm, với mỗi $t \in [0, T]$, ta có $\nabla u_i^-(\cdot, t) = -\nabla u_i(\cdot, t)\boldsymbol{1}_{\{x\in\Omega|u_i(x,t)<0\}}$ nên:

$$\nabla(-u_i^-)(\cdot, t) = \nabla u_i(\cdot, t)\boldsymbol{1}_{\{x\in\Omega|u_i(x,t)<0\}}.$$

Ta có $(\boldsymbol{1}_{\{x\in\Omega|u_i(x,t)<0\}})^2 = \boldsymbol{1}_{\{x\in\Omega|u_i(x,t)<0\}}$ (do $\boldsymbol{1}_{\{x\in\Omega|u_i(x,t)<0\}}(y) \in \{0, 1\}$) nên $\nabla u_i \nabla u_i \boldsymbol{1}_{\{x\in\Omega|u_i(x,t)<0\}} = \nabla u_i \nabla u_i(\boldsymbol{1}_{\{x\in\Omega|u_i(x,t)<0\}})^2$ hay:

$$\nabla u_i \nabla(-u_i^-) = \nabla(-u_i^-)\nabla(-u_i^-). \tag{3.3.27}$$

Đồng thời, với mọi $j \in \{1, \ldots, N\}$, ta có:

– Hoặc $j \neq i$: Khi đó $a_{ij}(t) \geq 0$ và $u_j(x, t) \geq \min\{u_j(x, t), 0\} = -u_j^-(x, t)$ cùng với $-u_i^-(x, t) = \min\{u_j(x, t), 0\} \leq 0$ cho nên $u_j(-u_i^-) \leq (-u_j^-)(-u_i^-)$ trên $\Omega \times [0, T]$ và:

$$a_{ij}(t)\int_\Omega u_j(-u_i^-)dx \leq a_{ij}(t)\int_\Omega (-u_j^-)(-u_i^-)dx \text{ trên } [0, T].$$

– Hoặc $j = i$: Khi đó $u_i(-u_i^-) = u_i u_i \boldsymbol{1}_{\{x\in\Omega|u_i(x,t)<0\}}$ và

$$u_i u_i \boldsymbol{1}_{\{x\in\Omega|u_i(x,t)<0\}} = u_i u_i(\boldsymbol{1}_{\{x\in\Omega|u_i(x,t)<0\}})^2 = (-u_i^-)(-u_i^-).$$

Do đó $a_{ii}(t)\displaystyle\int_\Omega u_i(-u_i^-)dx = a_{ii}(t)\int_\Omega (-u_i^-)(-u_i^-)dx.$

Vậy $a_{ij}(t)\displaystyle\int_\Omega u_j(-u_i^-)dx \leq a_{ij}(t)\int_\Omega (-u_j^-)(-u_i^-)dx$ trên $[0,T]$ với mỗi $1 \leq j \leq N$. Kết hợp với (3.3.27), ta được:

$$
\begin{aligned}
&-d_i\int_\Omega \nabla u_i \nabla(-u_i^-)dx + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t)\int_\Omega u_j(-u_i^-)dx \\
&\leq -d_i\int_\Omega \nabla(-u_i^-)\nabla(-u_i^-)dx + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t)\int_\Omega (-u_j^-)(-u_i^-)dx,
\end{aligned}
$$

tức là $B_i(u_1,\ldots,u_N,-u_i^-(\cdot,t),t) \leq B_i(-u_1^-,\ldots,-u_N^-,-u_i^-(\cdot,t),t)$.

- Khi $d_i = 0$: Khi đó $B_i(u_1,\ldots,u_N,u_i(\cdot,t),t) = \displaystyle\sum_{j=1}^N a_{ij}(t)\int_\Omega u_j u_i dx.$

  Do đó, lập luận tương tự như trên, ta được bất đẳng ở phần thứ nhất với $\alpha = \frac{1}{2}\epsilon H_A$ và $\gamma = \frac{1}{2\epsilon}NH_A$ và bất đẳng thức ở phần thứ ba.

Chứng minh hoàn tất. □

Chứng minh định lí 1:

Chứng minh. **Tồn tại:**
Cụ thể, theo phần 2.2 "Một số kiến thức cơ bản", $S_\Omega : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ là một toán tử compact tự liên hợp. Kết hợp với $H^1(\Omega)$ là một không gian Hilbert tách được, định lí phổ cho ta dãy giá trị riêng $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ của S_Ω và dãy hàm $g_k \in H^1(\Omega)$ sao cho:

$$\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ là một cơ sở trực chuẩn của } H^1(\Omega),$$

và với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, $g_k \neq 0$ và $S_\Omega(g_k) = \eta_k g_k$.

Với mọi $h, k \in \mathbb{N}^*$, $\int_\Omega g_h g_k dx = (S_\Omega(g_h), g_k)_{H^1(\Omega)} = (\eta_h g_h, g_k)_{H^1(\Omega)}$ nên

$$(g_h, g_k)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega g_h g_k dx = \eta_h (g_h, g_k)_{H^1(\Omega)} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } h \neq k, \\ \eta_k \text{ nếu } h = k, \end{cases} \tag{3.3.28}$$

$$\int_\Omega \nabla g_h \nabla g_k dx = (g_h, g_k)_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega g_h g_k dx = \begin{cases} 0 \text{ nếu } h \neq k, \\ 1 - \eta_k \text{ nếu } h = k, \end{cases} \tag{3.3.29}$$

nên $\eta_k = ||g_k||^2 > 0$ với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$. Đồng thời không gian $span(\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}^*})$ sinh bởi $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ trù mật trong $H^1(\Omega)$. Hơn nữa $C_c^\infty(\Omega)$ trù mật trong $L^2(\Omega)$ và $C_c^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ nên $H^1(\Omega)$ trù mật trong $L^2(\Omega)$. Vì vậy, với mỗi $\epsilon > 0$ và $u \in L^2(\Omega)$, tồn tại $v \in H^1(\Omega)$ và $w \in span(\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}^*})$ sao cho $||u - v|| < \frac{\epsilon}{2}$ và $||v - w||_{H^1(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2}$, dẫn đến

$$||u - w|| \leq ||u - v|| + ||v - w|| \leq ||u - v|| + ||v - w||_{H^1(\Omega)} < \epsilon,$$

nên $span(\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}^*})$ sinh bởi $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ trù mật trong $L^2(\Omega)$. Vậy

$$\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ là một cơ sở trực giao của } L^2(\Omega).$$

Đồng thời, với mỗi $m \in \mathbb{N}^*$, đặt $E_m = span(g_1, \ldots, g_m)$ là không gian con sinh bởi $g_1, \ldots, g_m$ trong $H^1(\Omega)$. Do $S_\Omega(g_k) = \eta_k g_k$ với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$ nên:

$$S_\Omega(E_m) \subset E_m \text{ với mỗi } m \in \mathbb{N}^*. \tag{3.3.30}$$

Bước 1: Xây dựng nghiệm xấp xỉ:

Với mỗi $m \in \mathbb{N}^*$, ta xây dựng nghiệm xấp xỉ $X_m = (u_1^m, \ldots, u_N^m)$ với $u_i^m(\cdot, t) \in E_m, t \in [0, T]$ dưới dạng:

$$u_i^m(x, t) = \sum_{k=1}^m f_{i,m}^k(t) g_k(x) \text{ với mỗi } i \in \{1, \ldots, N\},$$

với $f_{i,m}^k(t) \in AC([0,T])$ là các hàm liên tục tuyệt đối trên $[0,T]$.

Ta muốn $u_i^m : [0,T] \to H^1(\Omega)$ dạng như trên thỏa mãn xấp xỉ hệ (0.0.1) trên E_m, cụ thể là ta muốn $X_m = (u_1^m, \ldots, u_N^m)$ thỏa mãn điều kiện mạnh là tồn tại tập $T_m \subset [0,T]$ sao cho $\mu_1([0,T] - T_m) = 0$ và với mỗi $1 \le i \le N$, mỗi $t \in T_m$ và mỗi $\phi \in E_m$, ta luôn có:

$$\int_\Omega v_i^m \phi dx = \int_\Omega (u_i^m)'(t)\phi dx = -d_i \int_\Omega \nabla u_i^m \nabla \phi dx \; + \; \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j^m \phi dx, \tag{3.3.31}$$

và $u_i^m(\cdot, 0) = \sum_{k=1}^m (u_{i,0}, g_k)_{H^1(\Omega)} g_k$, trong đó

$$v_i^m(x,t) = (u_i^m(x,t))'(t) = \sum_{k=1}^m (f_{i,m}^k)'(t) g_k(x).$$

Tính tuyến tính theo ϕ của (3.3.31) và E_m sinh bởi $g_1, \ldots, g_m$ trong $H^1(\Omega)$ cho thấy ta chỉ cần sự tồn tại của các tập $T_{i,k}^m \subset [0,T], 1 \le i \le N, 1 \le k \le m$ sao cho với mỗi $1 \le i \le N$ và mỗi $1 \le k \le m$, ta đều có $\mu_1([0,T] - T_{i,k}^m) = 0$ và với mọi $t \in T_{i,k}^m$, ta có

$$\int_\Omega (u_i^m)'(t) g_k dx = -d_i \int_\Omega \nabla u_i^m \nabla g_k dx \; + \; \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j^m g_k dx, \tag{3.3.32}$$

thì $T_m = \cap_{i=1}^N \cap_{k=1}^m T_{i,k}^m$ là tập cần tìm thỏa mãn (3.3.31). Mà dãy tập $T_{i,k}^m$ như thế tồn tại khi và chỉ khi với mỗi $1 \le k \le m$ và mỗi $1 \le i \le N$, ta có các đẳng thức tương đương sau xảy ra hầu khắp nơi trên $[0,T]$:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (u_i^m)'(t) g_k dx = -d_i \int_\Omega \nabla u_i^m \nabla g_k dx \; + \; \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j^m g_k dx \\
&\iff \sum_{h=1}^m (f_{i,m}^h)'(t) \int_\Omega g_h g_k dx \\
&= -d_i \sum_{h=1}^m f_{i,m}^h(t) \int_\Omega \nabla g_h \nabla g_k dx \; + \; \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \sum_{h=1}^m f_{j,m}^h(t) \int_\Omega g_h g_k dx
\end{aligned}$$

$$\iff [(f^k_{i,m})'(t) - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t) f^k_{j,m}(t)]\eta_k = -d_i(1-\eta_k) f^k_{i,m}(t)$$

$$\iff (f^k_{i,m})'(t) = d_i(1 - \frac{1}{\eta_k}) f^k_{i,m}(t) + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t) f^k_{j,m}(t),$$

và ta cũng muốn $\sum_{k=1}^{m} f^k_{i,m}(0) g_k = \sum_{k=1}^{m} (u_{i,0}, g_k)_{H^1(\Omega)} g_k$ với mọi $1 \le i \le N$.

Đặt $B_m = diag(1 - \frac{1}{\eta_1}, \ldots, 1 - \frac{1}{\eta_m})$ và hàm $F(t) = (f^k_{i,m}(t))_{N\times m} \in M_{N\times m}(AC([0,T]))$ thì điều kiện trên tương đương với:

$$F'(t) = DF(t)B_m + A(t)F(t) \text{ h.k.n trên } [0,T], \tag{3.3.33}$$

và $f^k_{i,m}(0) = (u_{i,0}, g_k)_{H^1(\Omega)}$ với mỗi $1 \le i \le N$ và mỗi $1 \le k \le m$, tức là $F(0) = G$ trong đó $G = ((u_{i,0}, g_k)_{H^1(\Omega)})_{N\times m}$.

Điều kiện trên sẽ được thỏa mãn nếu với mỗi $t \in [0,T]$, ta có:

$$F(t) = G + \int_0^t [DF(s)B_m + A(s)F(s)]ds = (\Phi(F))(t). \tag{3.3.34}$$

Để xây dựng hàm F thỏa mãn (3.3.34), ta làm như sau: Với $0 < T^* \le T$, giả thiết $a_{ij}(t) \in L^\infty([0,+\infty))$ dẫn đến $A\Big|_{[0,T]} \in L^\infty([0,T], M_{N\times N}(\mathbb{R}))$ nên ta được $\Phi : M_{N\times m}(AC([0,T^*])) \to M_{N\times m}(AC([0,T^*]))$ và với mọi $F_1, F_2 \in M_{N\times m}(AC([0,T^*]))$, ta có:

$$\begin{aligned}
&||\Phi(F_1) - \Phi(F_2)||_{M_{N\times m}(AC([0,T^*]))} \\
&= ||\int_0^t [D(F_1 - F_2)(s)B_m + A(s)(F_1 - F_2)(s)]ds||_{M_{N\times m}(AC([0,T^*]))} \\
&\le KT^*||F_1 - F_2||_{M_{N\times m}(AC([0,T^*]))},
\end{aligned}$$

trong đó $K \ge 0$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào D, hàm $A(t)$, B_m, T, N và m, cụ thể $K = mN||D||_{M_{N\times N}(\mathbb{R})}||B_m||_{M_{m\times m}(\mathbb{R})} + N||A\Big|_{[0,T]}||_{L^\infty([0,T],M_{N\times N}(\mathbb{R}))}$.

Do đó, chọn $0 < T^* \le T$ đủ nhỏ để $KT^* < 1$ ($T^* = \min\{\frac{1}{K+1}, T\}$

chẳng hạn) thì Φ là ánh xạ co từ $M_{N\times m}(AC([0,T^*]))$ vào chính nó với $M_{N\times m}(AC([0,T^*]))$ là một không gian mêtric đủ nên định lí điểm bất động Banach cho ta hàm $F_1(t)$ duy nhất trong $M_{N\times m}(AC([0,T^*]))$ thỏa mãn $\Phi(F_1) = F_1$ trong $M_{N\times m}(AC([0,T^*]))$ và do đó:

$$F_1(t) = G + \int_0^t [DF_1(s)B_m + A(s)F_1(s)]ds \text{ với mọi } t \in [0,T^*].$$

Lập luận tương tự như trên cho đoạn $[T^*, 2T^*]$, ta thu được hàm duy nhất $F_2(t) \in M_{N\times m}(AC([T^*,2T^*]))$ thỏa mãn:

$$F_2(t) = F_1(T^*) + \int_{T^*}^t [DF_2(s)B_m + A(s)F_2(s)]ds \text{ với mọi } t \in [T^*, 2T^*].$$

Khi đó hàm ma trận $F_{12}(t)$ trên $[0, 2T^*]$ định nghĩa bởi:

$$F_{12}(t) = F_1(t) \text{ nếu } 0 \le t \le T^*, F_{12}(t) = F_2(t) \text{ nếu } T^* < t \le 2T^*,$$

thỏa mãn $F_{12}(t) \in M_{N\times m}(AC([0,2T^*]))$ và:

$$F_{12}(t) = G + \int_0^t [DF_{12}(s)B_m + A(s)F_{12}(s)]ds \text{ với mọi } t \in [0,2T^*].$$

Cứ tiếp tục mở rộng như vậy, sau một số hữu hạn bước ta thu được hàm ma trận $F(t) \in M_{N\times m}(AC([0,T]))$ thỏa mãn:

$$F(t) = G + \int_0^t [DF(s)B_m + A(s)F(s)]ds = \Phi(F)(t) \text{ với mọi } t \in [0,T],$$

tức là điều kiện (3.3.34) được thỏa mãn, vì vậy điều kiện (3.3.33) cũng được thỏa mãn và do đó $F(t) = (f^k_{i,m}(t))_{1\le i\le N, 1\le k\le m}$ trong đó hàm $f^k_{i,m}(t) \in AC([0,T])$ và dãy $X_m = (u^m_1, \dots, u^m_N)$ với

$$u^m_i(\cdot, t) = \sum_{k=1}^m f^k_{i,m}(t) g_k \in E_m, \text{ với mọi } i \in \{1, \dots, N\},$$

thỏa mãn: Tồn tại tập con $T_m \subset [0,T]$ sao cho $\mu_1([0,T] - T_m) = 0$ và với mỗi $t \in T_m$, mỗi $i \in \{1, \dots, N\}$ và mỗi $\phi \in E_m$, ta có:

$$\int_\Omega v_i^m \phi dx = \int_\Omega (u_i^m)'(t)\phi dx$$
$$= -d_i \int_\Omega \nabla u_i^m \nabla \phi dx \ + \ \sum_{j=1}^N a_{ij}(t)\int_\Omega u_j^m \phi dx = B_i(u_1^m, \dots, u_i^m, \phi, t), \tag{3.3.35}$$

và $u_i^m(\cdot, 0) = \sum_{k=1}^m (u_{i,0}, g_k)_{H^1(\Omega)} g_k$. Hơn nữa, với mỗi $1 \le i \le N$, do với mỗi $1 \le k \le m$ thì $f_{i,m}^k(t)$ liên tục tuyệt đối trên $[0, T]$ nên sử dụng tích phân từng phần, ta được đẳng thức sau với mỗi $\psi \in C_c^\infty(0, T)$:

$$-\int_0^T u_i^m(x,t)\psi'(t)dt = -\int_0^T \sum_{k=1}^m f_{i,m}^k(t) g_k(x)\psi'(t)dt$$

$$= \int_0^T \sum_{k=1}^m (f_{i,m}^k)'(t) g_k(x)\psi(t)dt = \int_0^T v_i^m(x,t)\psi(t)dt \text{ trong } L^2(\Omega),$$

nên $-\displaystyle\int_0^T u_i^m \psi'(t)dt = \int_0^T v_i^m \psi(t)dt$ trong $(H^1(\Omega))^*$ với mọi $\psi \in C_c^\infty(0, T)$. Vậy v_i^m là đạo hàm yếu theo t của u_i^m.

Bước 2: Đánh giá năng lượng cho nghiệm xấp xỉ:
Ta đưa ra đánh giá năng lượng cho $X_m = (u_1^m, \dots, u_N^m)$ như sau:
Xét mỗi $\delta > 0$: Với mỗi $1 \le i \le N$, $u_i^m(\cdot, 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^m (u_{i,0}, g_k)_{H^1(\Omega)} g_k \to u_{i,0}$ trong $H^1(\Omega)$ nên ta có $||u_i^m(\cdot, 0) - u_{i,0}|| \le ||u_i^m(\cdot, 0) - u_{i,0}||_{H^1(\Omega)} \to 0$ khi $m \to \infty$, tức là $u_i^m(\cdot, 0)$ hội tụ mạnh đến $u_{i,0}$ trong $L^2(\Omega)$ dẫn đến $||u_i^m(\cdot, 0)||^2 \to ||u_{i,0}||^2$ khi $m \to \infty$. Vì vậy, tồn tại hằng số $m_\delta \in \mathbb{N}^*$ chỉ phụ thuộc vào δ và X_0 để với mọi $1 \le i \le N$ và mọi $m \ge m_\delta$, ta có:

$$||u_{i,0}||^2 - \delta < ||u_i^m(\cdot, 0)||^2 < ||u_{i,0}||^2 + \delta. \tag{3.3.36}$$

Bây giờ, ta xét mỗi $m \ge m_\delta$:

Trước hết ta để ý rằng $u_i^m(\cdot, t) = \sum_{k=1}^m f_{i,m}^k(t) g_k$ với $f_i^k(t)$ liên tục trên

$[0,T]$ nên $u_i^m \in C([0,T], L^2(\Omega))$. Mà ta có $u_i^m(\cdot,t) = \sum_{k=1}^{m} f_{i,m}^k(t) g_k \in E_m$ nên với mỗi $1 \le i \le N$ và $t \in T_m$, dùng $\phi = u_m^i(\cdot,t)$ trong (3.3.35) cho ta:

$$\int_\Omega (u_i^m)'(t) u_i^m dx = B_i(u_1^m, \ldots, u_N^m, u_i^m(\cdot,t), t).$$

Kết hợp với $\mu_1([0,T] - T_m) = 0$, ta được:

$$\int_\Omega (u_i^m)'(t) u_i^m dx = B_i(u_1^m, \ldots, u_N^m, u_i^m(\cdot,t), t) \text{ h.k.n trên } [0,T].$$

Lấy tích phân trên $[0,t]$ ($t \in [0,T]$) hai vế của đẳng thức trên, ta được đẳng thức sau với mỗi $i \in \{1,\ldots,N\}$ và $t \in [0,T]$:

$$\frac{1}{2}||u_i^m||^2 - \frac{1}{2}||u_i^m(\cdot,0)||^2 = \int_0^t B_i(u_1^m, \ldots, u_N^m, u_i^m(\cdot,s), s) ds. \quad (3.3.37)$$

Mà với $\alpha_A = \frac{1}{2}H_A$, $\gamma_A = \frac{1}{2}NH_A$, với mỗi $i \in \{1,\ldots,N\}$, bổ đề 18 cho ta:

$$B_i(u_1^m, \ldots, u_N^m, u_i^m(\cdot,t), t) \le \gamma_A ||u_i^m||^2 + \alpha_A \sum_{j=1}^{N} ||u_j^m||^2, \quad (3.3.38)$$

và nếu $d_i > 0$ thì:

$$\left| d_i ||\nabla u_i^m||^2_{(L^2(\Omega))^N} + B_i(u_1^m, \ldots, u_N^m, u_i^m(\cdot,t), t) \right| \le \gamma_A ||u_i^m||^2 + \alpha_A \sum_{j=1}^{N} ||u_j^m||^2. \quad (3.3.39)$$

Do đó, áp dụng (3.3.37) và (3.3.38), ta được:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} ||u_i^m||^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} ||u_i^m(\cdot,0)||^2 \le \int_0^t \sum_{i=1}^{N} (\gamma_A ||u_i^m||^2 + \alpha_A \sum_{j=1}^{N} ||u_j^m||^2) ds,$$

nên kết hợp với (3.3.36), với chú ý rằng $\gamma_A + N\alpha_A = NH_A$, ta được:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} ||u_i^m||^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} ||u_{i,0}||^2 - \frac{1}{2}N\delta \le (\gamma_A + N\alpha_A) \int_0^t \sum_{i=1}^{N} ||u_i^m||^2 ds,$$

hay $k_m'(t) \leq 2NH_A k_m(t) + (K_{X_0} + N\delta)$ trên $[0,T]$, trong đó hàm số $k_m(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t ||u_i^m||^2 ds$ và $K_{X_0} = \sum_{i=1}^N ||u_{i,0}||^2$. Vậy, áp dụng bổ đề 3 với $t^* = 0$, $a(t) = 2NH_A$ và $b(t) = K_{X_0} + N\delta$, với chú ý rằng $k_m(0) = 0$, với mỗi $t \in [0,T]$, ta được:

$$k_m(t) \leq \int_0^t e^{2NH_A(t-s)}(K_{X_0} + N\delta)ds = \frac{K_{X_0} + N\delta}{2NH_A}(e^{2NH_A t} - 1),$$

và $\displaystyle\sum_{i=1}^N ||u_i^m||^2 = k_m'(t) \leq 2NH_A k_m(t) + (K_{X_0} + N\delta) \leq (K_{X_0} + N\delta)e^{2NH_A t}$.

Vậy với mỗi $t \in [0,T]$ và $m \geq m_\delta$, $\displaystyle\sum_{i=1}^N ||u_i^m||^2 \leq (K_{X_0} + N\delta)e^{2NH_A t}$ và

$$\sum_{i=1}^N \int_0^t ||u_i^m||^2 ds = k_m(t) \leq \frac{K_{X_0} + N\delta}{2NH_A}(e^{2NH_A t} - 1) \leq \frac{K_{X_0} + N\delta}{2NH_A} e^{2NH_A t}. \tag{3.3.40}$$

Đồng thời, với mỗi $i \in \{1, \ldots, N\}$ và mỗi $m \in \mathbb{N}^*$, ta đã có được $u_i^m \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ nên $u_i^m \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ và từ (3.3.40) ta có đánh giá sau với mỗi $i \in \{1, \ldots, N\}$ và mỗi $m \geq m_\delta$:

$$||u_i^m||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \sqrt{\int_0^T ||u_i^m||^2 dt} \leq \sqrt{\frac{K_{X_0} + N\delta}{2NH_A}} e^{NH_A T}. \tag{3.3.41}$$

Mà từ (3.3.37), (3.3.39) và (3.3.40), với mỗi $t \in [0,T]$ và $1 \leq i \leq N$ sao cho $d_i > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}||u_i^m(\cdot,0)||^2 \leq \frac{1}{2}||u_i^m||^2 - \frac{1}{2}||u_i^m(\cdot,0)||^2 \\
&= \int_0^t B_i(u_1^m, \ldots, u_N^m, u_i^m(\cdot,s), s)ds \\
&\leq \int_0^t (\gamma_A ||u_i^m||^2 + \alpha_A \sum_{j=1}^N ||u_j^m||^2 - d_i ||\nabla u_i^m||^2_{(L^2(\Omega))^N})ds \\
&\leq (\gamma_A + \alpha_A)\frac{K_{X_0} + N\delta}{2NH_A}(e^{2NH_A t} - 1) - d_i \int_0^t ||\nabla u_i^m||^2_{(L^2(\Omega))^N} ds,
\end{aligned}$$

và (3.3.36) cho ta $||u_i^m(\cdot,0)||^2 \leq ||u_{i,0}||^2 + \delta \leq K_{X_0} + \delta$.

Do đó, với mọi $t \in [0,T]$ và mỗi $i \in \{1,\ldots,N\}$ sao cho $d_i > 0$, ta có: (chú ý rằng $\gamma_A + \alpha_A = \frac{1}{2}(N+1)H_A \le \frac{2N}{2}H_A = NH_A$)

$$d_i \int_0^t ||\nabla u_i^m||^2_{(L^2(\Omega))^N} ds \le \frac{K_{X_0} + N\delta}{2}(e^{2NH_At} - 1) + \frac{1}{2}||u_i^m(\cdot,0)||^2$$
$$\le \frac{K_{X_0} + N\delta}{2}(e^{2NH_At} - 1) + \frac{1}{2}K_{X_0} + \frac{1}{2}\delta \le \frac{K_{X_0}}{2}e^{2NH_At} + Ne^{2NH_At}\delta.$$

Vậy với mỗi $m \ge m_\delta$, mỗi $1 \le i \le N$ để $d_i > 0$ và mọi $t \in [0,T]$, ta có:

$$\int_0^t ||\nabla u_i^m||^2_{(L^2(\Omega))^N} ds \le \frac{K_{X_0}}{2d_i}e^{2NH_At} + \frac{Ne^{2NH_At}}{d_i}\delta, \tag{3.3.42}$$

và theo (3.3.40) thì $\int_0^t ||u_i^m||^2 ds \le \sum_{i=1}^N \int_0^t ||u_i^m||^2 ds \le \frac{K_{X_0} + N\delta}{2NH_A}e^{2NH_At}$ nên với mọi $m \ge m_\delta$ và $1 \le i \le N$ sao cho $d_i > 0$, ta có:

$$\int_0^T ||u_i^m||^2_{H^1(\Omega)} ds \le \frac{K_{X_0}}{2d_i}e^{2NH_AT} + \frac{Ne^{2NH_AT}}{d_i}\delta + \frac{K_{X_0} + N\delta}{2NH_A}e^{2NH_AT}$$
$$\le \frac{K_{X_0}}{2}(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{NH_A})e^{2NH_AT} + C_1(A,D,i,T)\delta < +\infty,$$

với $C_1(A,D,i,T) = (\frac{N}{d_i} + \frac{1}{2H_A})e^{2NH_AT} > 0$.
Vậy với mọi $m \ge m_\delta$ và i để $d_i > 0$, ta có $u_i^m \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ và

$$||u_i^m||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le \sqrt{\frac{K_{X_0}}{2}(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{NH_A})e^{2NH_AT} + C_1(A,D,i,T)\delta}. \tag{3.3.43}$$

Đối với $v_i^m = (u_i^m)'(t)$, cách xây dựng u_i^m cho ta tập $T_m \subset [0,T]$ sao cho $\mu_1([0,T] - T_m) = 0$ và với mỗi $1 \le i \le N$, $t \in T_m$ và $\phi \in E_m$, ta có:

$$\int_\Omega v_i^m \phi dx = \int_\Omega (u_i^m)'(t)\phi dx = -d_i \int_\Omega \nabla u_i^m \nabla \phi dx + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j^m \phi dx.$$

Bây giờ, ta xét mỗi $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m \ge m_\delta$:

- Khi $d_i > 0$: Với mỗi $t \in T_m$, xét mỗi $\phi \in H^1(\Omega)$ sao cho $||\phi||_{H^1(\Omega)} \le 1$

thì chiếu vuông góc ϕ lên không gian con hữu hạn chiều E_m trong $H^1(\Omega)$ cho ta $\phi_1 \in E_m$ và $\phi_2 \in H^1(\Omega)$ sao cho $\phi = \phi_1 + \phi_2$ và $(w, \phi_2)_{H^1(\Omega)} = 0$ với mỗi $w \in E_m$. Khi đó:

$$||\phi_1||_{H^1(\Omega)} \leq ||\phi||_{H^1(\Omega)} \leq 1.$$

Đồng thời $v_i^m(\cdot, t) \in E_m$ và theo (3.3.30), ta có $S_\Omega(E_m) \subset E_m$ nên $S_\Omega(v_i^m(\cdot, t)) \in E_m$, vì vậy $(S_\Omega(v_i^m(\cdot, t)), \phi_2)_{H^1(\Omega)} = 0$. Kết hợp với định nghĩa S_Ω, $\phi_1 \in E_m$ và $t \in T_m$ ta được:

$$\begin{aligned}
&\left\langle v_i^m(\cdot, t), \phi \right\rangle = (v_i^m(\cdot, t), \phi)_{L^2(\Omega)} = (S_\Omega(v_i^m(\cdot, t)), \phi)_{H^1(\Omega)} \\
&(S_\Omega(v_i^m(\cdot, t)), \phi_1)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega v_i^m \phi_1 dx \\
&= \int_\Omega (u_i^m)'(t) \phi_1 dx = -d_i \int_\Omega \nabla u_i^m \nabla \phi_1 dx + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j^m \phi_1 dx.
\end{aligned}$$

Do đó, kết hợp với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta thu được đánh giá sau: (chú ý rằng $||\nabla \phi_1||^2_{(L^2(\Omega))^N} + ||\phi_1||^2 = ||\phi_1||^2_{H^1(\Omega)} \leq 1$)

$$\begin{aligned}
|\left\langle v_i^m(\cdot, t), \phi \right\rangle| &\leq d_i \left| \int_\Omega \nabla u_i^m \nabla \phi_1 dx \right| + \sum_{j=1}^N |a_{ij}(t)| \left| \int_\Omega u_j^m \phi_1 dx \right| \\
&\leq d_i ||\nabla u_i^m||_{(L^2(\Omega))^N} ||\nabla \phi_1||_{(L^2(\Omega))^N} + H_A \sum_{j=1}^N ||u_j^m|| ||\phi_1|| \\
&\leq d_i ||\nabla u_i^m||_{(L^2(\Omega))^N} + H_A \sum_{j=1}^N ||u_j^m||.
\end{aligned}$$

Vậy $||v_i^m||_{(H^1(\Omega))^*} \leq d_i ||\nabla u_i^m||_{(L^2(\Omega))^N} + H_A \sum_{j=1}^N ||u_j^m||$ với mỗi $t \in T_m$.

Do đó $||v_i^m||^2_{(H^1(\Omega))^*} \leq 2d_i^2 ||\nabla u_i^m||^2_{(L^2(\Omega))^N} + 2H_A^2 (\sum_{j=1}^N ||u_j^m||)^2$, dẫn đến:

$$||v_i^m||^2_{(H^1(\Omega))^*} \leq 2d_i^2 ||\nabla u_i^m||^2_{(L^2(\Omega))^N} + 2H_A^2 N \sum_{j=1}^N ||u_j^m||^2 \text{ trên } T_m.$$

Do $\mu_1([0,T]-T_m)=0$ nên đẳng thức sau đúng h.k.n trên $[0,T]$:

$$||v_i^m||^2_{(H^1(\Omega))^*} \le 2d_i^2||\nabla u_i^m||^2_{(L^2(\Omega))^N} + 2H_A^2 N\sum_{j=1}^N ||u_j^m||^2. \quad (3.3.44)$$

Lấy tích phân trên $[0,T]$ hai vế của bất đẳng thức (3.3.44) và sử dụng (3.3.40), (3.3.42), ta được:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T ||v_i^m||^2_{(H^1(\Omega))^*}dt\\
&\le 2d_i^2\int_0^T ||\nabla u_i^m||^2_{(L^2(\Omega))^N}dt + 2H_A^2N\sum_{j=1}^N\int_0^T ||u_j^m||^2dt\\
&\le 2d_i^2[\frac{K_{X_0}}{2d_i}e^{2NH_AT} + \frac{Ne^{2NH_AT}}{d_i}\delta] + 2H_A^2N\frac{K_{X_0}+N\delta}{2NH_A}e^{2NH_AT}\\
&= K_{X_0}(d_i+H_A)e^{2NH_AT} + C_2(A,D,i,T)\delta < +\infty,
\end{aligned}$$

với $C_2(A,D,i,T)=(2d_i+H_A)Ne^{2NH_AT}>0$.
Như vậy $v_i^m \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)$ và:

$$||v_i^m||_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)} \le \sqrt{K_{X_0}(d_i+H_A)e^{2NH_AT}+C_2(A,D,i,T)\delta}. \quad (3.3.45)$$

- Khi $d_i=0$: Với mỗi $t\in T_m$, ta có $v_i^m(\cdot,t)\in E_m$ nên:

$$||v_i^m||^2 = \int_\Omega v_i^m v_i^m dx = \sum_{j=1}^N a_{ij}(t)\int_\Omega u_j^m v_i^m dx \le H_A\sum_{j=1}^N ||u_j^m||||v_i^m||,$$

nên $||v_i^m|| \le H_A\sum_{j=1}^N ||u_j^m||$, dẫn đến $||v_i^m||^2 \le H_A^2(\sum_{j=1}^N ||u_j^m||)^2 \le H_A^2N\sum_{j=1}^N ||u_j^m||^2$. Do $\mu_1([0,T]-T_m)=0$ nên $||v_i^m||^2 \le H_A^2N\sum_{j=1}^N ||u_j^m||^2$ h.k.n trên $[0,T]$. Lấy tích phân trên $[0,T]$ hai vế bất đẳng thức trên và sử dụng (3.3.40) ta được:

$$\int_0^T ||v_i^m||^2 dt \leq H_A^2 N \sum_{j=1}^N \int_0^T ||u_j^m||^2 dt \leq H_A^2 N \frac{K_{X_0} + N\delta}{2NH_A} e^{2NH_AT}$$
$$= \frac{H_A(K_{X_0} + N\delta)}{2} e^{2NH_AT} < +\infty.$$

Như vậy $v_i^m \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ và:

$$||v_i^m||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \left(\sqrt{H_A(\frac{K_{X_0}}{2} + \frac{N}{2}\delta)}\right) e^{NH_AT}. \quad (3.3.46)$$

Bước 3: Lấy giới hạn của nghiệm xấp xỉ để được nghiệm yếu:

Theo các chứng minh trên, với mỗi $\delta > 0$ và m_δ ở (3.3.36), với mọi $m \geq m_\delta$, dãy hàm vectơ $X_m = \{(u_1^m, \ldots, u_N^m)\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ và $Y_m = \{(v_1^m, \ldots, v_N^m)\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ xây dựng như trên thỏa mãn:

- Khi $d_i > 0$ thì ta có dãy hàm $\{u_i^m\} \subset L^2(0,T;H^1(\Omega))$ cùng với $\{v_i^m\} \subset L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)$ đều bị chặn.
- Tương tự, khi $d_i = 0$, ta có dãy hàm $\{u_i^m\} \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$ và $\{v_i^m\} \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$ đều bị chặn.

Vì vậy, lần lượt tồn tại các dãy con là $\{X_{m_k}\} = \{(u_1^{m_k}, \ldots, u_N^{m_k})\}$ và $\{Y_{m_k}\} = \{(v_1^{m_k}, \ldots, v_N^{m_k})\}$, trong đó $m_1 < m_2 < \ldots$ và $\lim_{k\to\infty} m_k = +\infty$ cùng với $X = (u_1, \ldots, u_N)$ và $Y = (v_1, \ldots, v_N)$ sao cho với mỗi $1 \leq i \leq N$, ta có $u_i \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ và $v_i \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)$ khi $d_i > 0$ cùng với u_i và $v_i \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ khi $d_i = 0$ và:

- Khi $d_i > 0$: $u_i^{m_k} \rightharpoonup u_i$ trong $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ và $v_i^{m_k} \rightharpoonup v_i$ trong $L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)$,
- Khi $d_i = 0$: $u_i^{m_k} \rightharpoonup u_i$ và $v_i^{m_k} \rightharpoonup v_i$ trong $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Tiếp theo:

Với mỗi $1 \leq i \leq N$: Xét mỗi $N_0 \in \mathbb{N}^*$ và hàm $\omega \in C^1([0,T], H^1(\Omega))$ có dạng:

$$\omega(\cdot,t) = \sum_{k=1}^{N_0} f^k(t) g_k,$$

với các hàm $\{f^k(t)\}_{1\leq k\leq N_0}$ trơn. Khi đó, với mỗi $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m \geq N_0$ thì mỗi $t \in T_m$ thỏa mãn $\omega(\cdot,t) = \sum_{k=1}^{N_0} f^k(t) g_k \in E_m$ nên:

$$\int_\Omega v_i^m \omega dx = -d_i \int_\Omega \nabla u_i^m \nabla \omega dx + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j^m \omega dx,$$

nên $\displaystyle\int_\Omega v_i^m \omega dx = -d_i \int_\Omega \nabla u_i^m \nabla \omega dx + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j^m \omega dx$ h.k.n trên $[0,T]$ (do $\mu_1([0,T] - T_m) = 0$).

Để tiếp tục, ta trước hết xét trường hợp $d_i > 0$. Khi đó:

$$\int_0^T \langle v_i^m, \omega\rangle\, dt = -d_i \int_0^T \int_\Omega \nabla u_i^m \nabla \omega dx dt + \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j^m \omega dx dt, \tag{3.3.47}$$

và ta đã chứng minh ở trên rằng với mỗi $\psi \in C_c^\infty(0,T)$, ta có:

$$-\int_0^T u_i^m \psi'(t) dt = \int_0^T v_i^m \psi(t) dt \text{ trong } (H^1(\Omega))^*.$$

Do $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = +\infty$ nên có $k_0 \in \mathbb{N}^*$ để $m_l \geq N_0$ với mọi $l \geq k_0$. Vì vậy, với mỗi $l \geq k_0$, ta có $-\displaystyle\int_0^T u_i^{m_l} \psi'(t) dt = \int_0^T v_i^{m_l} \psi(t) dt$ trong $(H^1(\Omega))^*$ với mỗi $\psi \in C_c^\infty(0,T)$ và:

$$\int_0^T \left\langle v_i^{m_l}, \omega\right\rangle dt = -d_i \int_0^T \int_\Omega \nabla u_i^{m_l} \nabla \omega dx dt + \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j^{m_l} \omega dx dt.$$

Vì vậy, cho $l \to \infty$ trong các đẳng thức trên, ta được:

$$\int_0^T \langle v_i, \omega\rangle\, dt = -d_i \int_0^T \int_\Omega \nabla u_i \nabla \omega dx dt + \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dx dt,$$

và $-\int_0^T u_i\psi'(t)dt = \int_0^T v_i\psi(t)dt$ trong $(H^1(\Omega))^*$ với mỗi $\psi \in C_c^\infty(0,T)$. Mà theo bổ đề 10, tập các hàm có dạng như ω ở trên trù mật trong cả $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ nên với mỗi $\omega \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, ta được:

$$\int_0^T \langle v_i, \omega\rangle\, dt = -d_i \int_0^T \int_\Omega \nabla u_i \nabla \omega dxdt + \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dxdt, \tag{3.3.48}$$

và v_i là đạo hàm yếu theo t của u_i, tức là $\partial_t u_i = v_i$ h.k.n trên $[0,T]$.

Lập luận tương tự như trên trong trường hợp $d_i = 0$, chỉ thay "$\omega \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$" bởi "$\omega \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$", ta được $\partial_t u_i = v_i$ h.k.n trên $[0,T]$ và đẳng thức sau với mỗi $\omega \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$:

$$\int_0^T \langle v_i, \omega\rangle\, dt = \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dxdt.$$

Như vậy $u_i \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ cùng $\partial_t u_i = v_i \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)$ khi $d_i > 0$ cũng như u_i và $\partial_t u_i = v_i \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, tức là ta có hàm số $u_i \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) = H^1(0,T;L^2(\Omega))$ khi $d_i = 0$ nên theo lần lượt bổ đề 6 (khi $d_i > 0$) và bổ đề 5 (khi $d_i = 0$), ta được:

$$u_i \in C([0,T];L^2(\Omega)) \text{ với mỗi } i \in \{1,\dots,N\}.$$

Vậy ta được $u_i \in C([0,T];L^2(\Omega))$, hơn nữa $u_i \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ và $\partial_t u_i \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)$ khi $d_i > 0$, đồng thời $u_i \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$ khi $d_i = 0$ và kết hợp với (3.3.48), ta được:
Khi $d_i > 0$ thì với mọi $\omega \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \partial_t u_i, \omega\rangle\, dt &= -d_i \int_0^T \int_\Omega \nabla u_i \nabla \omega dxdt + \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dxdt \\ &= B_i(u_1,\dots,u_N,\omega(\cdot,t),t),\end{aligned} \tag{3.3.49}$$

còn khi $d_i = 0$ thì với mọi $\omega \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, ta có

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u_i \omega dxdt = \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dxdt = B_i(u_1, \ldots, u_N, \omega(\cdot, t), t). \tag{3.3.50}$$

Hơn nữa, với mỗi $1 \le i \le N$, ta chứng minh $u_i(\cdot .0) = u_{i,0}$ như sau: (tương tự như trong [4, trang 357])

Đầu tiên, ta xét $d_i > 0$. Khi đó, với mỗi $\omega \in C^1([0, T]; H^1(\Omega))$ sao cho $\omega(\cdot, T) = 0$, theo (3.3.49) ta có $\int_0^T \langle \partial_t u_i, \omega \rangle \, dt = B_i(u_1, \ldots, u_N, \omega(\cdot, t), t)$. Do đó, với chú ý rằng $\omega(\cdot, T) = 0$, ta có:

$$-\int_0^T \langle \partial_t \omega, u_i \rangle \, dt = B_i(u_1, \ldots, u_N, \omega(\cdot, t), t) + (u_i(\cdot, 0), \omega(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)}, \tag{3.3.51}$$

và tương tự, kết hợp (3.3.47) với $\partial_t u_i^m = v_i^m$, với mỗi $m \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\int_0^T \langle \partial_t u_i^m, \omega \rangle \, dt = -d_i \int_0^T \int_\Omega \nabla u_i^m \nabla \omega dxdt + \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j^m \omega dxdt,$$

nên $-\int_0^T \langle \partial_t \omega, u_i^m \rangle \, dt = -d_i \int_0^T \int_\Omega \nabla u_i^m \nabla \omega dxdt$

$$+ \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j^m \omega dxdt + (u_i^m(\cdot, 0), \omega(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)}.$$

Thay m bởi m_k trong đẳng thức trên rồi cho $k \to \infty$ với chú ý rằng

$$\begin{aligned} ||u_i^{m_k}(\cdot, 0) - u_{i,0}|| &\le ||u_i^{m_k}(\cdot, 0) - u_{i,0}||_{H^1(\Omega)} \\ &= ||\sum_{h=1}^{m_k} (u_{i,0}, g_h)_{H^1(\Omega)} g_h - u_{i,0}||_{H^1(\Omega)} \to 0 \text{ khi } k \to \infty, \end{aligned}$$

tức là $u_i^{m_k}(\cdot, 0) \to u_{i,0}$ trong $L^2(\Omega)$ và $u_i^{m_k} \overset{L^2(0,T;H^1(\Omega))}{\rightharpoonup} u_i$, ta được:

$$-\int_0^T \langle \partial_t \omega, u_i \rangle \, dt = -d_i \int_0^T \int_\Omega \nabla u_i \nabla \omega dxdt + \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \omega dxdt$$

$$+ (u_{i,0}, \omega(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)} = B_i(u_1, \ldots, u_N, \omega(\cdot, t), t) + (u_{i,0}, \omega(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)}. \tag{3.3.52}$$

Từ (3.3.51) và (3.3.52), ta được $(u_i(\cdot, 0), \omega(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)} = (u_{i,0}, \omega(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)}$ hay $\langle u_i(\cdot, 0), \omega(\cdot, 0)\rangle = \langle u_{i,0}, \omega(\cdot, 0)\rangle$ với mọi $\omega \in C^1([0, T]; H^1(\Omega))$ sao cho $\omega(\cdot, T) = 0$. Do $\omega(\cdot, 0)$ là tùy ý trong $H^1(\Omega)$ nên ta được $u_i(\cdot, 0) = u_{i,0}$.

Lập luận tương tự khi $d_i = 0$, chỉ thay "$\omega \in C^1([0, T]; H^1(\Omega))$" bởi "$\omega \in C^1([0, T]; L^2(\Omega))$", thay "$u_i^{m_k} \overset{L^2(0,T;H^1(\Omega))}{\rightharpoonup} u_i$" bởi "$u_i^{m_k} \overset{L^2(0,T;L^2(\Omega))}{\rightharpoonup} u_i$", ta được $u_i(\cdot, 0) = u_{i,0}$ khi $d_i = 0$.

Vậy $X = (u_1, \ldots, u_m)$ là nghiệm yếu của hệ (0.0.1) ứng với X_0.

Ngoài ra:

- Với $d_i > 0$ và mọi $\phi \in H^1(\Omega)$: Khi đó, với mỗi $\psi \in C_c^\infty(0, T)$, thế $\omega = \phi\psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ vào đẳng thức (3.3.49), ta được:

$$\int_0^T \langle \partial_t u_i, \phi\rangle \psi dt = \int_0^T (-d_i \int_\Omega \nabla u_i \nabla \phi dx + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \phi dx) \psi dt,$$

  nên $\langle \partial_t u_i, \phi\rangle = -d_i \int_\Omega \nabla u_i \nabla \phi dx + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j \phi dx$ h.k.n trên $[0, T]$, tức là (2.2.5) được chứng minh.

- Khi $d_i = 0$: Với mọi $\phi \in L^2(\Omega)$, lập luận tương tự ta được (2.2.6).

Đồng thời, với nghiệm yếu $Z = (z_1, \ldots, z_N)$ bất kì của hệ (0.0.1) ứng với điều kiện ban đầu $X_0 = (u_{1,0}, \ldots, u_{N,0})$, từ đẳng thức định nghĩa nghiệm yếu (3.3.26), ta có, với mọi $i \in \{1, \ldots, N\}$ sao cho $d_i > 0$ và $\omega \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ hoặc $d_i = 0$ và $\omega \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$:

$$\int_0^T B_i(z_1, \ldots, z_N, \omega(\cdot, t), t) dt = \begin{cases} \int_0^T \langle \partial_t z_i, \omega\rangle dt \text{ khi } d_i > 0, \\ \int_0^T \int_\Omega \partial_t z_i \omega dx dt \text{ khi } d_i = 0, \end{cases}$$

Đặc biệt, với mỗi $t_0 \in [0, T]$, sử dụng hàm ω như sau:

$$\omega(\cdot, t) = z_i(\cdot, t) \text{ nếu } t \leq t_0,\ \omega(\cdot, t) = 0 \text{ nếu } t > t_0,$$

ta được, với mọi $i \in \{1, \ldots, N\}$ và mọi $t_0 \in [0, T]$:

$$\int_0^{t_0} B_i(z_1, \ldots, z_N, z_i(\cdot, s), s) ds = \frac{1}{2}||z_i(\cdot, t_0)||^2 - \frac{1}{2}||u_{i,0}||^2,$$

và kết hợp với bổ đề 18, với mỗi $t \in [0, T]$, ta được:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N ||z_i(\cdot, t)||^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N ||u_{i,0}||^2 &= \int_0^t \sum_{i=1}^N B_i(z_1, \ldots, z_N, z_i(\cdot, s), s) ds \\ \leq \int_0^t \sum_{i=1}^N (\gamma_A ||z_i||^2 + \alpha_A \sum_{j=1}^N ||z_j||^2) ds &= (\gamma_A + N\alpha_A) \int_0^t \sum_{i=1}^N ||z_j||^2 ds,\end{aligned}$$

hay $k'(t) \leq 2(\gamma_A + N\alpha_A)k(t) + K_{X_0} = 2NH_A k(t) + K_{X_0}$ trong đó hàm $k(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^N ||z_i||^2 ds$. Từ đây, lập luận tương tự như đối với hàm $k_m(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^N ||u_i^m||^2 ds$ ở **Bước 2**, chỉ thay hàm u_i^m bởi z_i và thay $K_{X_0} + N\delta$ bởi K_{X_0} , ta được đánh giá sau:

$$\sum_{i=1}^N ||z_i(\cdot, t)||^2 = k'(t) \leq K_{X_0} e^{2NH_A t} = \sum_{i=1}^N ||u_{i,0}||^2 e^{2NH_A t}. \tag{3.3.53}$$

Duy nhất:

Giả sử $Z = (z_1, \ldots, z_N)$ cũng là nghiệm yếu của hệ (0.0.1) ứng với $X_0 = (u_{1,0}, \ldots, u_{N,0})$. Khi đó $S = X - Z = (u_1 - z_1, \ldots, u_N - z_N) = (s_1, \ldots, s_N)$ là một nghiệm yếu của hệ (0.0.1) ứng với $S_0 = (0, \ldots, 0)$. Do đó, áp dụng đánh giá (3.3.53) cho S, với mỗi $t \in [0, T]$, ta được:

$$\sum_{i=1}^N ||u_i(\cdot, t) - z_i(\cdot, t)||^2 = \sum_{i=1}^N ||s_i(\cdot, t)||^2 \leq \sum_{i=1}^N ||0||^2 e^{2NH_A t} = 0.$$

Vậy $u_i(x, t) = z_i(x, t)$ h.k.n trên Ω với mỗi $1 \leq i \leq N$ và mỗi $t \in [0, T]$.

Các đánh giá định lượng cho nghiệm yếu:

Với mỗi $\delta > 0$ và m_δ ở (3.3.36), theo chứng minh trên ta được:

- Khi $d_i > 0$: $u_i^{m_k} \overset{L^2(0,T;H^1(\Omega))}{\rightharpoonup} u_i$, $v_i^{m_k} \overset{L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)}{\rightharpoonup} v_i$, $\partial_t u_i = v_i$ h.k.n trên $[0,T]$ và với mọi $m \geq m_\delta$, ta có:

$$||u_i^m||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \sqrt{\frac{K_{X_0}}{2}(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{NH_A})e^{2NH_AT} + C_1(A,D,i,T)\delta},$$

$$||v_i^m||_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)} \leq \sqrt{K_{X_0}(d_i + H_A)e^{2NH_AT} + C_2(A,D,i,T)\delta}.$$

- Khi $d_i = 0$: $u_i^{m_k} \overset{L^2(0,T;L^2(\Omega))}{\rightharpoonup} u_i$, $v_i^{m_k} \overset{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^*)}{\rightharpoonup} v_i$ và với mọi $m \geq m_\delta$, ta có:

$$||u_i^m||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \sqrt{\frac{K_{X_0} + N\delta}{2NH_A}}e^{NH_AT},$$

$$||v_i^m||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \left(\sqrt{\frac{K_{X_0}H_A}{2}} + H_AN\delta\right)e^{NH_AT}.$$

Thay m bởi m_k rồi cho $k \to \infty$ và $\delta \to 0^+$ ở các bất đẳng thức trên, kết hợp với (3.3.53), ta được các đánh giá sau:

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |u_i(x,t)|^2dx = \sum_{i=1}^{N}||u_i(\cdot,t)||^2 \leq K_{X_0}e^{2NH_At}$ với mỗi $t \in [0,T]$.
- Với mỗi $1 \leq i \leq N$, ta có $||u_i||_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq \sqrt{K_{X_0}}e^{NH_AT}$.
- Khi $d_i > 0$, ta có $||u_i||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \sqrt{\frac{K_{X_0}}{2}(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{NH_A})}e^{NH_AT}$ và $||\partial_t u_i||_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)} = ||v_i||_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)} \leq \sqrt{K_{X_0}(d_i + H_A)}e^{NH_AT}$.
- Khi $d_i = 0$, ta có các bất đẳng thức là $||u_i||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \sqrt{\frac{K_{X_0}}{2NH_A}}e^{NH_AT}$ và $||\partial_t u_i||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = ||v_i||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \left(\sqrt{\frac{K_{X_0}H_A}{2}}\right)e^{NH_AT}$ nên $||u_i||_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq (\sqrt{\frac{1}{2NH_A} + \frac{H_A}{2}})\sqrt{K_{X_0}}e^{NH_AT}$.
- Tổng khối lượng: Thế $\phi_0 = 1_\Omega \in H^1(\Omega)$ vào định nghĩa nghiệm yếu thì do $\nabla\phi_0 \equiv 0$ nên với mỗi $i \in \{1,\ldots,N\}$, ta được đẳng thức

$\int_\Omega \partial_t u_i dx = \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j dx$ h.k.n trên $[0,T]$. Lấy tổng theo i với chú ý rằng $\sum_{i=1}^N a_{ij}(t) = 0$ trên $[0,+\infty)$ cho ta

$$\partial_t(\sum_{i=1}^N \int_\Omega u_i dx) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \int_\Omega u_j dx = \sum_{j=1}^N (\sum_{i=1}^N a_{ij}(t)) \int_\Omega u_j dx = 0$$

h.k.n trên $[0,T]$ nên với mỗi $t \in [0,T]$, ta có

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega u_i dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega u_{i,0} dx = \int_0^t \partial_t(\sum_{i=1}^N \int_\Omega u_i dx) ds = 0.$$

Vậy với mỗi $t \in [0,T]$, ta có $\displaystyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega u_i dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega u_{i,0} dx = M.$

Nghiệm yếu không âm với điều kiện ban đầu không âm:
Ở đây, ta sẽ chỉ ra rằng, với mỗi $T > 0$ và điều kiện đầu $X_0 \geq 0$, nghiệm yếu $X = (u_1, \ldots, u_N)$ của hệ (0.0.1) không âm hầu khắp nơi, cụ thể là:

$$u_i(x,t) \geq 0 \text{ h.k.n trên } \Omega \text{ với mỗi } 1 \leq i \leq N \text{ và mỗi } t \in [0,T].$$

Thật vậy, do $X = (u_1, \ldots, u_N)$ là nghiệm yếu của hệ (0.0.1) nên $u_i \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\partial_t u_i \in L^2(0,T; (H^1(\Omega))^*)$ và $u_i \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ khi $d_i > 0$ cũng như $u_i \in H^1(0,T; L^2(\Omega))$ khi $d_i = 0$. Tiếp theo, với hàm phần âm $u_i^-(x,t) = -\min\{u_i(x,t), 0\}$ tức là $u_i^- = -u_i \boldsymbol{1}_{\{u_i<0\}}$ trong đó

$$\boldsymbol{1}_{\{u_i<0\}}(\cdot,t) = \boldsymbol{1}_{\{x\in\Omega | u_i(x,t)<0\}}(\cdot) \text{ với mỗi } t \in [0,T],$$

thì $u_i^- : [0,T] \to L^2(\Omega)$ với:

$$|u_i^-| = |u_i| \boldsymbol{1}_{\{u_i<0\}} \leq |u_i| \text{ h.k.n trên } \Omega \text{ với mọi } t \in [0,T],$$

và khi $d_i > 0$ thì với mỗi $t \in [0,T]$, ta có $\nabla u_i^- = \nabla u_i \boldsymbol{1}_{\{u_i<0\}}$ cùng với

$$||\nabla u_i^-||^2_{(L^2(\Omega))^N} = ||\nabla u_i||^2_{(L^2(\Omega))^N} \boldsymbol{1}_{\{u_i<0\}} \leq ||\nabla u_i^-||^2_{(L^2(\Omega))^N} \text{ h.k.n trên } \Omega,$$

(đây là tính chất sơ cấp của không gian $W^{1,p}$, xem chẳng hạn bài tập 17 trong [4]) và:

$$u_i^-(\cdot, t) = \min\{u_i(\cdot, t), 0\} = \frac{|u_i| - u_i}{2},$$

nên kết hợp với $u_i \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ với mọi $1 \leq i \leq N$ và $u_i \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ khi $d_i > 0$, ta thu được $u_i^- \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ với mọi $1 \leq i \leq N$ và $u_i^- \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ khi $d_i > 0$.

Tiếp theo, với mỗi $1 \leq i \leq N$, theo định nghĩa nghiệm yếu, với mỗi $\omega \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ khi $d_i > 0$ và mọi $\omega \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ khi $d_i = 0$, ta có:

$$\int_0^T B_i(u_1, \ldots, u_N, \omega(\cdot, t), t)dt = \begin{cases} \int_0^T \langle \partial_t u_i, \omega \rangle \, dt \text{ khi } d_i > 0, \\ \int_0^T \int_\Omega \partial_t u_i \omega dt \text{ khi } d_i = 0, \end{cases}$$

nên với mỗi $s \in [0,T]$, do $u_i^- \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ và $u_i^- \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ khi $d_i > 0$ nên trong đẳng thức trên, sử dụng hàm ω định nghĩa như sau:

$$\omega(\cdot, t) = u_i^-(\cdot, t) \text{ nếu } t \leq s, \; \omega(\cdot, t) = 0 \text{ nếu } t > s,$$

thì với mỗi $s \in [0,T]$, ta được:

$$\int_0^s B_i(u_1, \ldots, u_N, -u_i^-(\cdot, t), t)dt = \begin{cases} \int_0^s \left\langle \partial_t u_i, -u_i^- \right\rangle dt \text{ khi } d_i > 0, \\ \int_0^s \int_\Omega \partial_t u_i (-u_i^-) dt \text{ khi } d_i = 0, \end{cases}$$

trong đó:

- Khi $d_i > 0$, do $u_i = u_i^+ - u_i^-$ và $\left\langle \partial_t u_i^+, -u_i^- \right\rangle \equiv 0$ nên với mỗi $t \in [0,T]$, ta có:

$$\left\langle \partial_t u_i, -u_i^- \right\rangle = \left\langle \partial_t u_i^+, -u_i^- \right\rangle + \left\langle \partial_t (-u_i^-), -u_i^- \right\rangle = \left\langle \partial_t (-u_i^-), -u_i^- \right\rangle.$$

- Tương tự, khi $d_i = 0$ thì do $\partial_t u_i^+ (-u_i^-) \equiv 0$ nên với mỗi $t \in [0,T]$, ta có:

$$\int_\Omega \partial_t u_i(-u_i^-)dx = \int_\Omega (\partial_t(-u_i^-))(-u_i^-)dx.$$

Do đó: (chú ý $-u_i^-(\cdot,0) = \min\{u_i(\cdot,0),0\} = 0$ do $u_i(\cdot,0) = u_{i,0} \geq 0$)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}||u_i^-(\cdot,s)||^2 = \frac{1}{2}||-u_i^-(\cdot,s)||^2 - \frac{1}{2}||-u_i^-(\cdot,0)||^2 \\
&= \begin{cases} \int_0^s \left\langle \partial_t(-u_i^-), -u_i^- \right\rangle dt = \int_0^s \left\langle \partial_t u_i, -u_i^- \right\rangle dt \text{ khi } d_i > 0 \\ \int_0^s \int_\Omega (\partial_t(-u_i^-))(-u_i^-)dxdt = \int_0^s \int_\Omega \partial_t u_i(-u_i^-)dxdt \text{ khi } d_i = 0 \end{cases} \\
&= \int_0^s B_i(u_1,\dots,u_N,-u_i^-(\cdot,t),t)dt,
\end{aligned}$$

và theo bổ đề 18, với $\alpha_A = \frac{1}{2}H_A$ và $\gamma_A = \frac{1}{2}NH_A$, trên $[0,T]$, ta có:

$$\begin{aligned}
&B_i(u_1,\dots,u_N,-u_i^-(\cdot,t),t) \leq B_i(-u_1^-,\dots,-u_N^-,-u_i^-(\cdot,t),t) \\
&\leq \alpha_A \sum_{j=1}^N ||-u_j^-||^2 + \gamma_A||-u_i^-||^2 \leq (\alpha_A+\gamma_A)\sum_{j=1}^N ||u_j^-||^2,
\end{aligned}$$

nên với mỗi $s \in [0,T]$, ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}||u_i^-(\cdot,s)||^2 = \int_0^s B_i(u_1,\dots,u_N,-u_i^-(\cdot,t),t)dt \\
&\leq \int_0^s B_i(-u_1^-,\dots,-u_N^-,-u_i^-(\cdot,t),t)dt \leq (\alpha_A+\gamma_A)\int_0^s \sum_{j=1}^N ||u_j^-||^2 dt,
\end{aligned}$$

tức là ta có $\displaystyle\frac{1}{2}||u_i^-(\cdot,s)||^2 \leq (\alpha_A+\gamma_A)\int_0^s \sum_{j=1}^N ||u_j^-||^2 dt$ với mỗi $1 \leq i \leq N$ và mỗi $s \in [0,T]$. Cộng vế với vế theo i các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N ||u_i^-(\cdot,s)||^2 \leq N(\alpha_A+\gamma_A)\int_0^s \sum_{i=1}^N ||u_i^-||^2 dt,$$

tức là $h'(s) \leq 2N(\alpha_A+\gamma_A)h(s)$ trên $[0,T]$ với $h(s) = \int_0^s \sum_{i=1}^N ||u_i^-||^2 dt$.

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall dạng đạo hàm và $h(0) = 0$, ta thu được $0 \leq h(s) \leq h(0)e^{2N(\alpha_A+\gamma_A)s} = 0$ nên $h(s) = 0$ với mỗi $s \in [0,T]$, vì vậy $0 \leq \sum_{i=1}^{N} ||u_i^-(\cdot, s)||^2 = h'(s) \leq 2N(\alpha_A + \gamma_A)h(s) = 0$ tức là $\sum_{i=1}^{N} ||u_i^-(\cdot, s)||^2 = 0$ trên $[0, T]$. Vậy $\min\{u_i(x, t), 0\} = -u_i^-(x, t) = 0$ h.k.n trên Ω với mọi $i \in \{1, \ldots, N\}$ và mọi $t \in [0, T]$, tức là:

Với mọi $1 \leq i \leq N$ và $t \in [0, T]$, ta có $u_i(x, t) \geq 0$ h.k.n trên Ω. $\square$

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, dựa trên phương pháp entropy và kết quả đã thu được từ [3] của nhóm thầy Tăng Quốc Bảo, chúng tôi đã thực hiện được những nội dung sau:

- Đưa ra công thức độ mất mát của entropy khi hệ số phản ứng là hàm số phụ thuộc thời gian và hội tụ khi thời gian tiến đến vô cùng.
- Đưa ra chặn dưới cụ thể cho độ mất mát của entropy theo tốc độ hội tụ của hệ số phản ứng.
- Áp dụng phương pháp entropy để chứng minh sự hội tụ về trạng thái cân bằng của hệ và đưa ra một số đánh giá định lượng về bậc hội tụ theo thời gian của hệ về trạng thái cân bằng theo tốc độ hội tụ của hệ số phản ứng.
- Chứng minh sự hội tụ về trạng thái cân bằng theo cấp lũy thừa của hệ khi hệ số phản ứng hội tụ theo cấp lũy thừa, mở rộng kết quả tương tự trong [3].

Tài liệu tham khảo

[1] F. J. M. Horn, R. Jackson, (1972), "General mass action kinetics", *Arch. Rational Mech. Anal.*, 47 , 81-116.

[2] M. Feinberg, (1987), "Chemical reaction network structure and the stability of complex isothermal reactors, I. The deficiency zero and deficiency one theorems", *Chem. Eng. Sci.*, 42 , 2229-2268.

[3] Klemens Fellner, Wolfang Prager, Bao Q. Tang, (2017), "The entropy method for reaction-diffusion systems without detailed balance: First order chemical reaction networks", *Kinetic and Related Models*, 10(4).

[4] Evans, Lawrence C., (1998), "Partial differential equations", 1st edition, *Graduate Studies in Mathematics*, 19, American Mathematical Society, Providence, RI.

[5] Jonathan L. Gross, Jay Yellen (2004), "Handbook of graph theory", *CRC Press*, 9-13.

[6] Walter Rudin, (1987), "Real and Complex Analysis", *McGraw-Hill.*

[7] J. B. Conway, (1985), "A Course in Functional Analysis", *Graduate Texts in Mathematics* 96, Springer-Verlag.

[8] Landau Edmund, (1909), "Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen" (Handbook on the theory of the distribution of the primes), *Leipzig: B.G. Teubner*, p.31.