BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Trần Thị Thanh Tươi

THUẬT TOÁN ĐẠO HÀM GẦN KỀ VÀ CÁC DẠNG TĂNG TỐC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội – 2024

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Trần Thị Thanh Tươi

THUẬT TOÁN ĐẠO HÀM GẦN KỀ VÀ CÁC DẠNG TĂNG TỐC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 8 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. Lê Hải Yến

Hà Nội – 2024

Lời cam đoan

Luận văn này được thực hiện dựa trên sự tìm tòi, học hỏi của cá nhân tôi dưới sự hướng dẫn của TS. Lê Hải Yến. Mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đều được ghi rõ nguồn gốc. Tôi xin chịu trách nhiện về lời cam đoan.

Hà Nội, tháng 10 năm 2024

Học viên

Trần Thị Thanh Tươi

Lời cảm ơn

Đầu tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới Trung tâm đào tạo sau Đại học, Viện Toán học và Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã tạo điều kiện cho tôi được tham gia các hoạt động nghiên cứu và được hướng dẫn nghiên cứu ngay cả khi chưa tốt nghiệp bậc cử nhân và sau khi tốt nghiệp cử nhân. Em xin gửi lời tri ân sâu sắc tới các thầy cô đã chỉ dạy, hướng dẫn em cũng như các học viên khác của lớp Toán Ứng dụng 2022B.

Đặc biệt, em xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới TS. Lê Hải Yến, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Em cảm ơn cô đã luôn bao dung, nhẫn nại để đồng hành và chỉ dạy em mọi lúc. Em cũng xin gửi lời cảm ơn tới TS. Nguyễn Hoàng Thạch, GS. TSKH. Đoàn Thái Sơn đã hướng dẫn, chỉ bảo và truyền động lực cho em trong suốt quá trình em học tập tại Viện Toán học.

Tôi xin cảm ơn Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VINIF) đã tài trợ học bổng Chương trình học bổng đào tạo Thạc sĩ, Tiến sĩ trong nước. Đây là sự hỗ trợ và động lực to lớn, cho phép tôi tập trung học tập, nghiên cứu và sáng tạo.

Do thời gian có hạn và kiến thức còn hạn chế nên luận văn này không tránh

khỏi còn sai sót. Tác giả rất mong nhận được góp ý, nhận xét của các thầy cô để hoàn thiện luận văn tốt hơn nữa. Tác giả xin chân thành cảm ơn.

Hà Nội, tháng 10 năm 2024

Tác giả luận văn

Trần Thị Thanh Tươi

Mục lục

Danh mục một số ký hiệu

$\nabla f(\mathbf{x})$ Gradient của hàm f tại $\mathbf{x}$.

$\mathrm{dom}(f)$ Miền xác định của hàm f.

$\mathrm{epi}(f)$ Epigraph của f.

prox_f Ánh xạ gần kề của f.

$\partial f(\mathbf{x})$ Dưới vi phân của hàm f tại $\mathbf{x}$.

$G_L^{f,g}$ Ánh xạ đạo hàm đối với hàm f, g và hệ số L.

$T_L^{f,g}$ Toán tử đạo hàm gần kề đối với hàm f, g và hệ số L.

Danh sách hình vẽ

Mở đầu

Từ thế kỉ XVIII, Cauchy đã đề xuất thuật toán hướng giảm gradient để giải bài toán tối ưu không ràng buộc. Từ đó đến nay, thuật toán này đã được nghiên cứu và mở rộng bởi nhiều nhà toán học. Thuật toán đạo hàm gần kề có thể được coi là dạng mở rộng của thuật toán hướng giảm gradient cho bài toán tối ưu với hàm mục tiêu có dạng tổng. Ý tưởng của thuật toán này đã xuất hiện từ những năm 1970 và được gọi là thuật toán forward-backward.

Thuật toán đạo hàm gần kề có ưu điểm về tính đơn giản và do đó phù hợp với việc giải các bài toán với số chiều lớn nhưng tốc độ hội tụ của thuật toán chậm. Năm 2009, Beck và Teboulle ([1]) đã đề xuất dạng tăng tốc cho thuật toán đạo hàm gần kề dựa trên ý tưởng của Nesterov ([2]) và họ đã chứng minh được rằng tốc độ của thuật toán được cải thiện đáng kể cả về mặt lý thuyết và thực hành. Trong đề tài này, chúng tôi nghiên cứu thuật toán đạo hàm gần kề và các phiên bản tăng tốc của nó.

Tổng quan tình hình nghiên cứu

Trong lĩnh vực tối ưu, thuật toán hướng giảm gradient (Gradient Descent) là một trong những thuật toán cơ bản và lâu đời nhất. Từ những năm 1950, với sự phát triển của máy tính và nhu cầu giải quyết các bài toán tối ưu hóa phức tạp trong kỹ thuật và khoa học, thuật toán hướng giảm gradient và các biến thể của nó đã trở nên cực kỳ quan trọng. Phương pháp này đặc biệt quan trọng trong lĩnh vực lý thuyết thông tin và học máy, nơi mà kích thước và độ phức tạp của mô hình làm cho việc tìm kiếm không gian tham số trở nên khó khăn. Tuy vậy, thuật toán này tồn tại một nhược điểm là nó chỉ áp dụng được cho các hàm khả vi.

Thuật toán đạo hàm gần kề mà chúng tôi nghiên cứu trong đề tài này có thể được coi là dạng mở rộng của thuật toán hướng giảm gradient áp dụng cho bài toán tối ưu dạng tổng mà ở đó hàm mục tiêu của bài toán có thể không khả vi.

Bài toán tối ưu với hàm mục tiêu dạng tổng có dạng như sau:

$$\min_{x\in\mathbb{E}}\{F(x) = f(x) + g(x)\}, \tag{1}$$

trong đó,

- $\mathbb{E}$ là không gian Euclid,
- $g : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ là hàm lồi, chính thường và đóng,
- $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ đóng và chính thường, $\mathrm{dom}(f)$ là tập lồi, $\mathrm{dom}(g) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$, và f là L_f-trơn trên $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

Thuật toán đạo hàm gần kề (ISTA) đã xuất hiện từ những năm 1970 trong các công trình của Bruck, Pastry, Lions và Mercier ([3, 4, 5]) với tên gọi thuật toán forward-backward. Thuật toán này có ưu điểm về tính đơn giản, do đó được áp dụng cho nhiều bài toán thực tế với dữ liệu có số chiều lớn. Tuy nhiên, thuật toán này có tốc độ hội tụ chậm. Các biến thể của phương pháp này thường tập trung vào việc tăng tốc độ hội tụ của thuật toán.

Năm 2009, một phiên bản tăng tốc cho thuật toán đạo hàm gần kề (viết tắt là FISTA) được đưa ra bởi Beck và Teboulle ([1]) đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới. Trong công trình này, dựa trên ý tưởng của Nesterov, các tác giả đã cải tiến tốc độ hội tụ của thuật toán đạo hàm gần kề cổ điển dựa trên việc tính toán bước đi tối ưu hơn và thử nghiệm nó trong bài toán khử nhiễu ảnh.

FISTA không phải là thuật toán đơn điệu, tức là thuật toán không đảm bảo rằng hàm mục tiêu không tăng sau mỗi bước lặp. Thuật toán MFISTA (Monotone-FISTA) được nghiên cứu để giải quyết vấn đề này ([6]). Thuật toán vừa đảm bảo tính đơn điệu, vừa giữ được tốc độ hội tụ như thuật toán FISTA.

Một phiên bản cải tiến khác của thuật toán đạo hàm gần kề là thuật toán Restarted-FISTA ([7]). Thuật toán này dựa trên ý tưởng khởi động lại thuật toán sau một số bước lặp nhất định (Nesterov, [8]) để tăng tốc độ hội tụ trong trường hợp hàm f là hàm lồi mạnh.

Sự cần thiết tiến hành nghiên cứu

Trong lĩnh vực tối ưu hóa và học máy, thuật toán đạo hàm gần kề và các dạng tăng tốc của nó đóng một vai trò quan trọng trong việc giải quyết một loạt các bài toán phức tạp, đặc biệt là những bài toán có cấu trúc không trơn hoặc lồi. Sự cần thiết của các thuật toán này nằm ở khả năng xử lý hiệu quả các hàm mục tiêu khó khăn, giúp việc tối ưu hóa trở nên khả thi ngay cả trong những trường hợp mà các phương pháp truyền thống không thể áp dụng được.

Thuật toán đạo hàm gần kề xuất phát từ nhu cầu giải quyết các bài toán tối ưu hóa có sự hiện diện của hàm mục tiêu không khả vi, ví dụ như hàm chỉ (hàm đặc trưng) của một tập lồi hoặc hàm chuẩn l_1 trong các phương pháp chỉnh hóa. Các bài toán này thường xuất hiện trong xử lý tín hiệu, tối ưu hóa thống kê, và học sâu, nơi mà việc tính toán đạo hàm không luôn luôn khả thi hoặc hiệu quả. Thuật toán đạo hàm gần kề giải quyết vấn đề này bằng cách sử dụng toán tử đạo hàm gần kề - một công cụ mạnh mẽ cho phép tối ưu hóa một cách gián tiếp qua việc cực tiểu hóa một hàm mục tiêu tương đương nhưng dễ xử lý hơn.

Các ứng dụng thực tế của thuật toán đạo hàm gần kề và các dạng tăng tốc của nó xuất hiện nhiều trong lĩnh vực xử lý tín hiệu và học máy, đặc biệt với dữ liệu có số chiều lớn, cụ thể có thể kể đến các bài toán xử lý nhiễu ảnh, xử lý ảnh chụp cộng hưởng từ (MRI). Nhiều công trình nghiên cứu áp dụng các thuật toán này trong xử lý tín hiệu cho hiệu quả cao ([9, 10, 11]).

Mục tiêu của đề tài

Trong đề tài này, tôi nghiên cứu về thuật toán đạo hàm gần kề cho bài toán tối ưu dạng tổng trong trường hợp không lồi, lồi, lồi mạnh và các dạng tăng tốc đã có của thuật toán. Bên cạnh đó, các phương pháp cũng được áp dụng trong ứng dụng cụ thể để so sánh hiệu quả thuật toán.

Đóng góp của luận văn

Luận văn trình bày thuật toán đạo hàm gần kề và sự hội tụ của thuật toán trong trường hợp tổng quát, trường hợp lồi và trường hợp lồi mạnh. Bên cạnh đó, luận văn cũng xem xét một số dạng tăng tốc của thuật toán đạo hàm gần kề như FISTA, MFISTA và Restarted-FISTA. Thuật toán và sự hội tụ của các thuật toán này được trình bày dựa trên các tài liệu nghiên cứu trước đó [1, 6, 7].

Bên cạnh đó, luận văn trình bày một số bài toán áp dụng như bài toán bình phương tối thiểu chỉnh hóa l_1, bài toán khử nhiễu ảnh sử dụng phương pháp LASSO và thực hiện lập trình để thử nghiệm thực tế các thuật toán này.

Bố cục luận văn

Nội dung chính của luận văn gồm 4 chương:

- Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Chương này trình bày các khái niệm cơ bản của lý thuyết tối ưu như dưới vi phân của hàm lồi, toán tử gần kề, lớp hàm khả vi với đạo hàm Lipschitz, ...

- Chương 2: Thuật toán đạo hàm gần kề cho bài toán tối ưu dạng tổng. Ở chương này trình bày thuật toán đạo hàm gần kề cho bài toán tối ưu dạng tổng và xem xét sự hội tụ của thuật toán trong các trường hợp không lồi, lồi và lồi mạnh.

- Chương 3: Các dạng tăng tốc của thuật toán đạo hàm gần kề. Ở chương này, ta xem xét một số dạng tăng tốc của ISTA như: FISTA, MFISTA, Restarted-FISTA.

- Chương 4: Thử nghiệm số. Phần này sẽ thực hiện thử nghiệm và so sánh thuật toán đạo hàm gần kề và các dạng tăng tốc cho các bài toán tối ưu dạng tổng trong các ví dụ cụ thể.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong luận văn này, không gian cơ bản (thường ký hiệu là $\mathbb{E}$) là không gian Euclid - không gian véc tơ hữu hạn chiều được trang bị tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$. Chuẩn đối ngẫu trên $\mathbb{E}$ được xác định như sau

$$\|\mathbf{y}\|_* = \max_{\mathbf{x}} \{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{E}.$$

Hàm thực mở rộng là một hàm được xác định trên toàn bộ không gian cơ bản và có thể nhận bất cứ giá trị thực nào, kể cả $-\infty$ và ∞. Với một hàm thực mở rộng $f : \mathbb{E} \to [-\infty, \infty]$, miền hữu hiệu được định nghĩa là

$$\mathrm{dom}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E} : f(\mathbf{x}) < \infty\}.$$

Hàm $f : \mathbb{E} \to [-\infty, \infty]$ được gọi là hàm chính thường nếu nó không nhận giá trị $-\infty$ và tồn tại $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ sao cho $f(\mathbf{x}) < \infty$, tức là $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$.

1.1 Dưới vi phân

Trong phần này, khái niệm và một số tính chất của dưới vi phân, dưới đạo hàm được trình bày. Các định nghĩa, kết quả ở phần này đều là các kết quả cơ bản và được trình bày dựa theo Amir Beck ([7], chương 3).

Định nghĩa 1.1 ([7])**.** Cho $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ là hàm chính thường và gọi $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(f)$. Véc tơ $\mathbf{g} \in \mathbb{E}$ được gọi là dưới đạo hàm của f tại $\mathbf{x}$ nếu

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \text{ với mọi } \mathbf{y} \in \mathbb{E}. \tag{1.1}$$

Bất đẳng thức (1.1) còn được gọi là bất đẳng thức dưới đạo hàm.

Ví dụ 1.2. Xét $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x+1|$. Ta có f không khả vi tại $x = -1$. Xét dưới đạo hàm của f, theo định nghĩa, ta có $g \in \mathbb{R}$ là dưới đạo hàm của f tại $x = -1$ nếu

$$|y + 1| \geq |0| + \langle g, y - (-1) \rangle \text{ với mọi } y \in \mathbb{R},$$

hay

$$|y + 1| \geq g(y + 1) \text{ với mọi } y \in \mathbb{R}.$$

Xét dấu của $y + 1$ ta có

- Nếu $y + 1 = 0$, điều kiện này đúng với mọi g.
- Nếu $y + 1 > 0$, điều kiện này là $y + 1 \geq g(y + 1)$, suy ra $g \leq 1$.
- Nếu $y + 1 < 0$, điều kiện này là $-(y + 1) \geq g(y + 1)$, suy ra $g \geq -1$.

Do đó, mọi $g \in [-1, 1]$ đều là một dưới đạo hàm của f tại $x = -1$.

Định nghĩa 1.3 ([7])**.** Tập hợp tất cả các dưới đạo hàm của f tại $\mathbf{x}$ được gọi là dưới vi phân của f tại $\mathbf{x}$, ký hiệu là $\partial f(\mathbf{x})$:

$$\partial f(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{g} \in \mathbb{E} : f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \text{ với mọi } \mathbf{y} \in \mathbb{E}\}.$$

Nếu $\mathbf{x} \notin \mathrm{dom}(f)$, ta quy ước $\partial f(\mathbf{x}) = \emptyset$.

Dưới đây là ví dụ tổng quát hơn Ví dụ 1.2 , ví dụ về dưới vi phân của chuẩn tại 0.

Ví dụ 1.4. Cho $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$. Ta sẽ chứng minh dưới vi phân của f tại $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ là quả cầu đơn vị của chuẩn đối ngẫu.

$$\partial f(\mathbf{0}) = B_{\|\cdot\|_*}[\mathbf{0}, 1] = \{\mathbf{g} \in \mathbb{E} : \|\mathbf{g}\|_* \leq 1\}. \tag{1.2}$$

Để chứng minh (1.2), lưu ý rằng $\mathbf{g} \in \partial f(\mathbf{0})$ khi và chỉ khi

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{0}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{y} - \mathbf{0} \rangle \text{ với mọi } \mathbf{y} \in \mathbb{E},$$

tương đương với

$$\|\mathbf{y}\| \geq \langle \mathbf{g}, \mathbf{y} \rangle \text{ với mọi } \mathbf{y} \in \mathbb{E}. \tag{1.3}$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng điều này đúng khi và chỉ khi $\|\mathbf{g}\|_* \leq 1$. Thật vậy, nếu $\|\mathbf{g}\|_* \leq 1$, thì theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz tổng quát, ta có

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{g}\|_* \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{y}\| \text{ với mọi } \mathbf{y} \in \mathbb{E},$$

suy ra (1.3). Ngược lại, giả sử (1.3) đúng. Lấy cực đại cả hai vế của (1.3) với tất cả $\mathbf{y}$ thỏa mãn $\|\mathbf{y}\| \leq 1$, ta được

$$\|\mathbf{g}\|_* = \max_{\mathbf{y}:\|\mathbf{y}\| \leq 1} \langle \mathbf{g}, \mathbf{y} \rangle \leq \max_{\mathbf{y}:\|\mathbf{y}\| \leq 1} \|\mathbf{y}\| = 1.$$

Do đó, chúng ta đã thiết lập được sự tương đương giữa (1.3) và bất đẳng thức $\|\mathbf{g}\|_* \leq 1$, từ đó thu được (1.2).

Tiếp theo, ta xem xét một số tính chất của tập dưới vi phân, đầu tiên là tính lồi, đóng.

Định lí 1.5 ([7])**.** *Cho $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ là hàm chính thường. Dưới vi phân $\partial f(\mathbf{x})$ là tập lồi đóng với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$.*

Chứng minh. Với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$, tập dưới vi phân có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\partial f(\mathbf{x}) = \bigcap_{\mathbf{y} \in \mathbb{E}} H_{\mathbf{y}},$$

trong đó $H_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{g} \in \mathbb{E} : f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle\}$. Vì các tập $H_{\mathbf{y}}$ là các nửa không gian đóng và lồi, nên $\partial f(\mathbf{x})$ là đóng và lồi. $\square$

Tập dưới vi phân của một hàm tại một điểm có thể là tập rỗng. Từ đó, ta có khái niệm dưới khả vi dưới đây.

Định nghĩa 1.6 ([7])**.** Hàm chính thường $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ được gọi là dưới khả vi tại $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(f)$ nếu $\partial f(\mathbf{x}) \neq \emptyset$.

Tập hợp các điểm dưới khả vi được biểu thị bằng $\mathrm{dom}(\partial f)$:

$$\mathrm{dom}(\partial f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E} : \partial f(\mathbf{x}) \neq \emptyset\}.$$

Ở bổ đề tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng nếu một hàm dưới khả vi tại mọi điểm trong miền xác định với giả thiết miền xác định là lồi thì hàm đó là hàm lồi.

Bổ đề 1.7 ([7])**.** *Cho $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ là hàm chính thường và giả sử $\mathrm{dom}(f)$ là tập lồi. Nếu $\partial f(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ với mọi $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(f)$ thì f là hàm lồi.*

Chứng minh. Lấy $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{dom}(f)$ và $\alpha \in [0, 1]$. Xét $\mathbf{z}_\alpha = (1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$. Do tính lồi của $\mathrm{dom}(f), \mathbf{z}_\alpha \in \mathrm{dom}(f)$, nên tồn tại $\mathbf{g} \in \partial f(\mathbf{z}_\alpha)$, suy ra hai bất đẳng thức sau:

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{z}_\alpha) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{y} - \mathbf{z}_\alpha \rangle = f(\mathbf{z}_\alpha) + (1-\alpha)\langle \mathbf{g}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle,$$
$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{z}_\alpha) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{x} - \mathbf{z}_\alpha \rangle = f(\mathbf{z}_\alpha) - \alpha\langle \mathbf{g}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle.$$

Nhân bất đẳng thức thứ nhất với α, bất đẳng thức thứ hai với $1 - \alpha$ và tính tổng chúng ta được kết quả

$$f((1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) = f(\mathbf{z}_\alpha) \leq (1-\alpha)f(\mathbf{x}) + \alpha f(\mathbf{y}).$$

Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{dom}(f)$, kết hợp với $\mathrm{dom}(f)$ là tập lồi, nên ta có f là hàm lồi. $\square$

Tiếp theo, ta xem xét một số kết quả để chỉ ra sự tồn tại điểm thuộc $\mathrm{dom}(f)$ mà tại đó dưới vi phân khác rỗng.

Định lí 1.8 ([12]). *Cho $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{E}$ là tập lồi và $\mathbf{y} \notin \mathrm{int}(C)$. Khi đó, tồn tại $\mathbf{0} \neq \mathbf{p} \in \mathbb{E}$ sao cho*

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle \text{ với mọi } \mathbf{x} \in C.$$

Định lí 1.9 ([7]). *Cho $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ là hàm chính thường lồi và gọi $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$. Khi đó, $\partial f(\tilde{\mathbf{x}})$ đóng và khác rỗng.*

Chứng minh. Nhắc lại rằng tích vô hướng trong không gian $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$ được định nghĩa là

$$\langle (\mathbf{y}_1, \beta_1), (\mathbf{y}_2, \beta_2) \rangle \equiv \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle + \beta_1 \beta_2, \quad (\mathbf{y}_1, \beta_1), (\mathbf{y}_2, \beta_2) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R}.$$

Vì $(\tilde{\mathbf{x}}, f(\tilde{\mathbf{x}}))$ nằm trên biên của $\mathrm{epi}(f) \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{R}$, theo Định lý 1.8 thì tồn tại một siêu phẳng phân cách giữa $(\tilde{\mathbf{x}}, f(\tilde{\mathbf{x}}))$ và $\mathrm{epi}(f)$, nghĩa là tồn tại một véc tơ $(\mathbf{p}, -\alpha) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R}$ khác không mà

$$\langle \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle - \alpha f(\tilde{\mathbf{x}}) \geq \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle - \alpha t \text{ với mọi } (\mathbf{x}, t) \in \mathrm{epi}(f). \tag{1.4}$$

Lưu ý rằng $\alpha \geq 0$ vì $(\tilde{\mathbf{x}}, f(\tilde{\mathbf{x}}) + 1) \in \mathrm{epi}(f)$, và do đó thay $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$ và $t = f(\tilde{\mathbf{x}}) + 1$ vào (1.4) ta có

$$\langle \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle - \alpha f(\tilde{\mathbf{x}}) \geq \langle \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle - \alpha(f(\tilde{\mathbf{x}}) + 1),$$

suy ra rằng $\alpha \geq 0$. Vì $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$, nên theo tính chất liên tục Lipschitz địa phương của các hàm lồi, tồn tại $\varepsilon > 0$ và $L > 0$ sao cho $B_{\|\cdot\|}[\tilde{\mathbf{x}}, \varepsilon] \subseteq \mathrm{dom}(f)$ và

$$|f(\mathbf{x}) - f(\tilde{\mathbf{x}})| \leq L\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \text{ với mọi } \mathbf{x} \in B_{\|\cdot\|}[\tilde{\mathbf{x}}, \varepsilon]. \tag{1.5}$$

Vì $B_{\|\cdot\|}[\tilde{\mathbf{x}}, \varepsilon] \subseteq \operatorname{dom}(f)$, nên $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \operatorname{epi}(f)$ với mọi $\mathbf{x} \in B_{\|\cdot\|}[\tilde{\mathbf{x}}, \varepsilon]$. Do đó, thay $t = f(\mathbf{x})$ vào (1.4), ta được

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \rangle \leq \alpha(f(\mathbf{x}) - f(\tilde{\mathbf{x}})) \text{ với mọi } \mathbf{x} \in B_{\|\cdot\|}[\tilde{\mathbf{x}}, \varepsilon]. \tag{1.6}$$

Kết hợp (1.5) và (1.6), ta thấy rằng với mọi $\mathbf{x} \in B_{\|\cdot\|}[\tilde{\mathbf{x}}, \varepsilon]$,

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \rangle \leq \alpha(f(\mathbf{x}) - f(\tilde{\mathbf{x}})) \leq \alpha L \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|. \tag{1.7}$$

Lấy $\mathbf{p}^\dagger \in \mathbb{E}$ thỏa mãn $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p}^\dagger \rangle = \|\mathbf{p}\|_*$ và $\|\mathbf{p}^\dagger\| = 1$. Vì $\tilde{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{p}^\dagger \in B_{\|\cdot\|}[\tilde{\mathbf{x}}, \varepsilon]$, chúng ta có thể thay $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{p}^\dagger$ vào (1.7) và thu được

$$\varepsilon \|\mathbf{p}\|_* = \varepsilon \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}^\dagger \rangle \leq \alpha L \varepsilon \|\mathbf{p}^\dagger\| = \alpha L \varepsilon.$$

Do đó, $\alpha > 0$, vì nếu không thì ta sẽ có $\alpha = 0$ và $\mathbf{p} = 0$, điều này là không thể bởi véc tơ $(\mathbf{p}, \alpha)$ không phải là véc tơ 0. Lấy $t = f(\mathbf{x})$ trong (1.4) và chia cho α thu được kết quả sau

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\tilde{\mathbf{x}}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \rangle \text{ với mọi } \mathbf{x} \in \operatorname{dom}(f), \tag{1.8}$$

trong đó $\mathbf{g} = \mathbf{p}/\alpha$. Do đó, $\mathbf{g} \in \partial f(\tilde{\mathbf{x}})$, đảm bảo tính khác rỗng của $\partial f(\tilde{\mathbf{x}})$. Để chứng minh tính bị chặn của $\partial f(\tilde{\mathbf{x}})$, đặt $\mathbf{g} \in \partial f(\tilde{\mathbf{x}})$, nghĩa là (1.8) đúng. Đặt $\mathbf{g}^\dagger \in \mathbb{E}$ mà $\|\mathbf{g}\|_* = \langle \mathbf{g}, \mathbf{g}^\dagger \rangle$ và $\|\mathbf{g}^\dagger\| = 1$. Sau đó thay $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{g}^\dagger$ vào (1.8) ta thu được

$$\varepsilon \|\mathbf{g}\|_* = \varepsilon \langle \mathbf{g}, \mathbf{g}^\dagger \rangle = \langle \mathbf{g}, \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \rangle \leq f(\mathbf{x}) - f(\tilde{\mathbf{x}}) \overset{(1.5)}{\leq} L \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| = L\varepsilon,$$

suy ra rằng $\partial f(\tilde{\mathbf{x}}) \subseteq B_{\|\cdot\|_*}[0, L]$, và từ đó chứng minh được tính bị chặn của $\partial f(\tilde{\mathbf{x}})$. $\square$

Kết quả của Định lý 1.9 có thể được phát biểu dưới dạng quan hệ bao hàm sau:

$$\operatorname{int}(\operatorname{dom}(f)) \subseteq \operatorname{dom}(\partial f).$$

Hệ quả 1.10 ([7]). *Cho* $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *là hàm lồi. Khi đó* f *dưới khả vi trên* $\mathbb{E}$.

Tính dưới khả vi có thể được đảm bảo cho các điểm không nhất thiết phải nằm trong miền trong của tập xác định mà nằm trong miền trong tương đối, tức là miền trong của tập xác định ứng với bao affine của nó.

Vì phần trong tương đối của $\mathrm{dom}(f)$ luôn khác rỗng nên ta có thể kết luận rằng luôn tồn tại một điểm trong miền mà tại đó tập dưới vi phân khác rỗng.

Hệ quả 1.11 ([7]). *Giả sử* $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *là một hàm chính thường lồi. Khi đó tồn tại* $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(f)$ *mà* $\partial f(\mathbf{x})$ *khác rỗng.*

Định lí 1.12 (Dưới vi phân tại điểm khả vi, [7]). *Cho* $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *là một hàm chính thường lồi và gọi* $\mathbf{x} \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$. *Nếu* f *khả vi tại* $\mathbf{x}$ *thì* $\partial f(\mathbf{x}) = \{\nabla f(\mathbf{x})\}$. *Ngược lại, nếu* f *có một dưới đạo hàm duy nhất tại* $\mathbf{x}$ *thì nó khả vi tại* $\mathbf{x}$ *và* $\partial f(\mathbf{x}) = \{\nabla f(\mathbf{x})\}$.

Từ các định nghĩa và kết quả trên, ta có thể phát biểu một số điều kiện tối ưu như sau.

Định lí 1.13 (Điều kiện tối ưu Fermat, [7]). *Cho* $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *là một hàm chính thường lồi. Khi đó,*

$$\mathbf{x}^* \in \arg\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{E}\},$$

khi và chỉ khi $\mathbf{0} \in \partial f(\mathbf{x}^*)$.

Chứng minh. Ta có $\mathbf{x}^* \in \arg\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{E}\}$ khi và chỉ khi

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \langle 0, \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \quad \text{với mọi } \mathbf{x} \in \mathrm{dom}(f).$$

Điều này tương đương với điều kiện $0 \in \partial f(\mathbf{x}^*)$. $\square$

Định lí 1.14 (Điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu hàm tổng, [7]). *Cho* $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *là một hàm chính thường, và* $g : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *là một hàm chính thường lồi sao cho* $\operatorname{dom}(g) \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$. *Xét bài toán sau:*

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{E}} \{f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\}. \tag{P}$$

(a) (Điều kiện cần) Nếu $x^* \in \operatorname{dom}(g)$ *là nghiệm tối ưu địa phương của* (P) *và* f *khả vi tại* $\mathbf{x}^*$ *thì*

$$-\nabla f(\mathbf{x}^*) \in \partial g(\mathbf{x}^*). \tag{1.9}$$

(b) (Điều kiện cần và đủ cho bài toán lồi) Giả sử f *là hàm lồi. Nếu* f *khả vi tại* $\mathbf{x}^* \in \operatorname{dom}(g)$ *thì* $\mathbf{x}^*$ *là nghiệm tối ưu toàn cục của* (P) *khi và chỉ khi*

$$-\nabla f(\mathbf{x}^*) \in \partial g(\mathbf{x}^*).$$

Định nghĩa 1.15 (Điểm dừng, [7]). Cho $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ là hàm chính thường và $g : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ là một hàm chính thường lồi sao cho $\operatorname{dom}(g) \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$. Một điểm $\mathbf{x}^*$ mà tại đó f khả vi được gọi là một điểm dừng của (P) nếu

$$-\nabla f(\mathbf{x}^*) \in \partial g(\mathbf{x}^*).$$

Ta cũng nhắc lại một định lý quan trọng về sự tồn tại duy nhất điểm cực tiểu cho hàm đóng lồi mạnh. Trước tiên, ta nhắc lại một số kiến thức cơ bản về hàm lồi mạnh.

Định nghĩa 1.16 ([7]). Hàm $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ được gọi là σ-lồi mạnh với $\sigma > 0$ nếu $\operatorname{dom}(f)$ là tập lồi và bất đẳng thức sau đúng với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \operatorname{dom}(f)$ và $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}) - \frac{\sigma}{2}\lambda(1-\lambda)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

Định lí 1.17 ([7]). *Hàm $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ là hàm σ-lồi mạnh ($\sigma > 0$) khi và chỉ khi $f(\mathbf{x}) - \frac{\sigma}{2}\|\mathbf{x}\|^2$ là hàm lồi.*

Định lí 1.18 ([7]). *Giả sử $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ là hàm chính thường đóng và σ-lồi mạnh (với $\sigma > 0$). Khi đó:*

(a) f có duy nhất một điểm cực tiểu;

(b) $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \frac{\sigma}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2$ với mọi $\mathbf{x} \in dom(f)$, trong đó $\mathbf{x}^*$ là điểm cực tiểu duy nhất của f.

1.2 Lớp hàm khả vi với đạo hàm Lipchitz

Ở phần này, ta xem xét lớp hàm khả vi với đạo hàm Lipschitz với hệ số L_f, hay còn gọi là L_f-trơn. Các kết quả hầu hết được trình bày theo Amir Beck ([7], chương 5).

Định nghĩa 1.19 ([7]). Hàm $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ được gọi là L_f-trơn trên một tập $D \subseteq \mathbb{E}$ với $L_f > 0$ nếu nó khả vi trên D và thỏa mãn

$$\|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\|_* \leq L_f\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \text{với mọi } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D.$$

Hệ số L_f được gọi là *hệ số trơn*. Theo cách khác, hàm f còn được gọi là có đạo hàm Lipschitz với hệ số L_f.

Ta xét một ví dụ đơn giản như sau.

Ví dụ 1.20. Xét $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = x^2 - 1$. Khi đó, điều kiện ở định nghĩa trở thành

$$|2x - 2y| \leq L_f|x - y| \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, f là hàm L_f-trơn với $L_f \geq 2$.

Một kết quả quan trọng có được từ tính chất L_f-trơn được trình bày dưới đây. Bổ đề này được gọi là bổ đề giảm, chỉ ra một chặn trên cho f bằng một hàm toàn phương.

Bổ đề 1.21 (Bổ đề giảm, [7])**.** *Cho $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ là một hàm L_f-trơn trên một tập lồi D cho trước. Khi đó, với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$,*

$$f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{L_f}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2. \tag{1.10}$$

Chứng minh. Theo định lý cơ bản của vi tích phân ta có

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \langle \nabla f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle dt.$$

Do đó:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \int_0^1 \langle \nabla f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle dt.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle| \\
=& \left| \int_0^1 \langle \nabla f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle dt \right| \\
\leq& \int_0^1 |\langle \nabla f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle| dt \\
\leq^{(*)}& \int_0^1 \|\nabla f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - \nabla f(\mathbf{x})\|_* \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| dt \\
\leq& \int_0^1 t L_f \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 dt \\
=& \frac{1}{2} L_f \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2,
\end{aligned}$$

trong đó (*) ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz tổng quát. □

Tiếp theo, ta có một số tính chất của hàm L_f-trơn.

Định lí 1.22 ([7]). *Cho $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi, khả vi trên $\mathbb{E}$ và $L_f > 0$. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) f *là* L_f*-trơn.*

(ii) $f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{L_f}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ *với mọi* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$.

(iii) $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2L_f}\|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\|_*^2$ *với mọi* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$.

(iv) $\langle \nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq \frac{1}{L_f}\|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\|_*^2$ *với mọi* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$.

(v) $f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \geq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}) - \frac{L_f}{2}\lambda(1-\lambda)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ *với mọi* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ *và* $\lambda \in [0, 1]$.

1.3 Ánh xạ gần kề

Các khái niệm và kết quả về ánh xạ gần kề trong mục này được trình bày theo Moreau ([13]).

Định nghĩa 1.23 ([13]). Cho hàm $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$, ánh xạ gần kề của f là toán tử được định nghĩa bởi

$$\operatorname{prox}_f(\mathbf{x}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u} \in \mathbb{E}} \left\{ f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2 \right\} \text{ với mọi } \mathbf{x} \in \mathbb{E}.$$

Với mỗi véc tơ $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$, ánh xạ gần kề xác định tương ứng với $\mathbf{x}$ một tập con của $\mathbb{E}$. Tập này có thể rỗng, có thể là tập đơn (có một phần tử duy nhất) hoặc gồm nhiều véc tơ. Tiếp theo, ta xét một số ví dụ cụ thể về ánh xạ gần kề.

Ví dụ 1.24. Xét hàm $f(x) = \lambda|x|$ với $x \in \mathbb{R}$ và $\lambda > 0$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ánh xạ gần kề của f được xác định là

$$\operatorname{prox}_f(x) = \operatorname{argmin}_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda|u| + \frac{1}{2}|u - x|^2 \right\} \equiv \operatorname{argmin}_{u \in \mathbb{R}} h(u).$$

Xét dấu của u, ta có

$$h(u) = \begin{cases} h_1(u) \equiv \lambda u + \frac{1}{2}(u - x)^2, & u > 0, \\ h_2(u) \equiv -\lambda u + \frac{1}{2}(u - x)^2, & u \leq 0. \end{cases}$$

Nếu giá trị cực tiểu đạt được tại $u > 0$, thì $0 = h_1'(u) = \lambda + u - x$, suy ra $u = x - \lambda$. Do đó, nếu $x > \lambda$ thì $\operatorname{prox}_\lambda(x) = x - \lambda$. Tương tự, nếu $x < -\lambda$ thì $\operatorname{prox}_f(x) = x + \lambda$. Nếu $|x| \leq \lambda$, $\operatorname{prox}_f(x)$ phải là điểm duy nhất không khả vi của h, chính là 0.

Ví dụ 1.25. Xét $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $g(\mathbf{x}) = \lambda\|\mathbf{x}\|_1$, với $\lambda > 0$. Khi đó:

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\mathbf{x}_i),$$

trong đó $\varphi(t) = \lambda|t|$. Theo Ví dụ 1.24, ta có $\operatorname{prox}_\varphi(y) = \mathcal{T}_\lambda(y)$, trong đó $\mathcal{T}_\lambda$ được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{T}_\lambda(y) \equiv [|y| - \lambda]_+ \operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} y - \lambda, & y \geq \lambda, \\ 0, & |y| < \lambda, \\ y + \lambda, & y \leq -\lambda. \end{cases}$$

Hàm $\mathcal{T}_\lambda$ còn được gọi là hàm ngưỡng mềm.

Theo định lý về ánh xạ gần kề của hàm tách (Định lý 6.6, [7]), ta có:

$$\operatorname{prox}_g(\mathbf{x}) = (\operatorname{prox}_\varphi(x_i))_{i=1}^n = (\mathcal{T}_\lambda(x_i))_{i=1}^n.$$

Định lý tiếp theo được gọi là định lý đầu tiên về ánh xạ gần kề, chỉ ra rằng nếu f là hàm chính thường, đóng và lồi thì ánh xạ gần kề tồn tại và duy nhất.

Định lí 1.26 ([13]). *Cho $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ là một hàm chính thường, đóng và lồi. Khi đó $\operatorname{prox}_f(\mathbf{x})$ có duy nhất một phần tử với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$.*

Chứng minh. Với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$,

$$\mathrm{prox}_f(\mathbf{x}) = \mathrm{argmin}_{\mathbf{u}\in\mathbb{E}} \tilde{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}), \tag{1.11}$$

trong đó $\tilde{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2$. Hàm $\tilde{f}(\cdot, \mathbf{x})$ là một hàm đóng và lồi mạnh. Tính chính thường của $\tilde{f}(\cdot, \mathbf{x})$ trực tiếp suy ra từ tính chính thường của f. Do đó, theo Định lý 1.18(a), tồn tại một và chỉ một điểm cực tiểu cho bài toán trong (1.11). □

Khi f là hàm chính thường, đóng và lồi, kết quả trên cho thấy rằng $\mathrm{prox}_f(\mathbf{x})$ là một tập đơn với mọi $x \in \mathbb{E}$. Trong các trường hợp này, chúng ta sẽ coi prox_f như một ánh xạ đơn trị từ $\mathbb{E}$ đến $\mathbb{E}$, do đó ta có thể viết $\mathrm{prox}_f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ thay vì $\mathrm{prox}_f(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}\}$.

Định lý tiếp theo, ta nới lỏng các giả thiết trong Định lý 1.26 mà vẫn đảm bảo $\mathrm{prox}_f(\mathbf{x})$ khác rỗng. Trước tiên, ta nhắc lại định nghĩa về điều kiện bức.

Định nghĩa 1.27 ([13])**.** Một hàm chính thường $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ được gọi là thỏa mãn điều kiện bức nếu

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} f(\mathbf{x}) = \infty.$$

Định lí 1.28 ([13])**.** *Cho* $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *là một hàm chính thường đóng, và giả sử hàm* $\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2$ *thỏa mãn điều kiện bức với mọi* $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$*. Khi đó* $\mathrm{prox}_f(\mathbf{x})$ *là khác rỗng với mọi* $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$*.*

Chứng minh. Với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$, hàm chính thường $h(\mathbf{u}) \equiv f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2$ là đóng do là tổng của hai hàm đóng. Theo giả thiết của định lý, nó cũng thỏa mãn điều kiện bức, suy ra $\mathrm{prox}_f(\mathbf{x})$ bao gồm các điểm cực tiểu của h và do đó khác rỗng. □

Định lí 1.29 ([13]). *Giả sử* $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *là hàm chính thường, lồi và đóng. Khi đó, với mọi* $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{E}$*, ba mệnh đề sau là tương đương:*

(i) $\mathbf{u} = \operatorname{prox}_f(\mathbf{x})$.

(ii) $\mathbf{x} - \mathbf{u} \in \partial f(\mathbf{u})$.

(iii) $\langle \mathbf{x} - \mathbf{u}, \mathbf{y} - \mathbf{u} \rangle \leq f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{u})$ *với mọi* $\mathbf{y} \in E$.

Hệ quả 1.30 ([13]). *Cho* $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *là hàm chính thường, lồi và đóng. Khi đó,* $\mathbf{x}$ *là điểm cực tiểu của* f *khi và chỉ khi* $\mathbf{x} = \operatorname{prox}_f(\mathbf{x})$.

Định lí 1.31 ([7]). *Cho* $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *là hàm chính thường, lồi và đóng. Khi đó, với mọi* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$*, ta có*

(a) $\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \operatorname{prox}_f(\mathbf{x}) - \operatorname{prox}_f(\mathbf{y}) \rangle \geq \| \operatorname{prox}_f(\mathbf{x}) - \operatorname{prox}_f(\mathbf{y})\|^2$.

(b) $\| \operatorname{prox}_f(\mathbf{x}) - \operatorname{prox}_f(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Chương 2

Thuật toán đạo hàm gần kề cho bài toán tối ưu dạng tổng

Trong chương này, ta sẽ xem xét bài toán tối ưu dạng tổng và thuật toán gần kề để giải bài toán này. Đồng thời, ta cũng xem xét sự hội tụ của thuật toán đạo hàm gần kề với các giả thiết khác nhau về tính lồi và lồi mạnh của hàm mục tiêu.

2.1 Bài toán tối ưu dạng tổng

Xét bài toán tối ưu dạng tổng:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{E}}\{F(\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\}, \tag{2.1}$$

với các giả thiết dưới đây.

Giả thiết 2.1 ([7]).

(A) $g : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *là hàm chính thường, đóng và lồi.*

(B) $f : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *chính thường đóng,* $\mathrm{dom}(f)$ *là tập lồi,* $\mathrm{dom}(g) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ *và* f *là hàm* L_f*-trơn trên* $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

(C) Tập nghiệm tối ưu của Bài toán (2.1) khác rỗng và được ký hiệu là X^*. Giá trị tối ưu của bài toán được ký hiệu là F_{opt}.

Ví dụ 2.2 (Ba trường hợp đặc biệt của Bài toán (2.1))**.**

- Bài toán tối ưu trơn không ràng buộc. Nếu $g \equiv 0$ và $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{E}$, thì (2.1) trở thành bài toán cực tiểu hóa hàm trơn không ràng buộc:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}} f(\mathbf{x}),$$

trong đó $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ là hàm L_f-trơn.

- Bài toán cực tiểu hóa với ràng buộc lồi. Nếu $g = \delta_C$, với C là tập lồi đóng khác rỗng thì (2.1) trở thành bài toán cực tiểu hóa một hàm khả vi trên một tập lồi đóng khác rỗng:

$$\min_{\mathbf{x} \in C} f(\mathbf{x}),$$

trong đó f là hàm L_f-trơn trên $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ và $C \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

- Bài toán chuẩn hóa l_1. Chọn $g(\mathbf{x}) = \lambda \|\mathbf{x}\|_1$ với $\lambda > 0$, (2.1) trở thành bài toán chuẩn hóa l_1:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{E}} \left\{ f(\mathbf{x}) + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \right\},$$

với f là hàm L_f-trơn trên $\mathbb{E}$.

2.2 Thuật toán đạo hàm gần kề

Để tìm hiểu ý tưởng thuật toán đạo hàm gần kề giải Bài toán (2.1), ta nhìn lại thuật toán chiếu gradient giải Bài toán (2.1) trong trường hợp $g = \delta_C$ với

C là tập lồi đóng khác rỗng. Khi đó, ta có bài toán sau:

$$\min_{\mathbf{x}\in C} f(\mathbf{x}). \tag{2.2}$$

Công thức tổng quát tại bước cập nhật thứ k của thuật toán gradient chiếu để giải (2.2) như sau

$$\mathbf{x}^{k+1} = P_C\left(\mathbf{x}^k - t_k \nabla f\left(\mathbf{x}^k\right)\right),$$

trong đó t_k là độ dài bước tại vòng lặp thứ k.

Công thức tại bước cập nhật này còn có thể được viết lại thành

$$\mathbf{x}^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}\in C}\left\{f\left(\mathbf{x}^k\right) + \left\langle \nabla f\left(\mathbf{x}^k\right), \mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\rangle + \frac{1}{2t_k}\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|^2\right\}.$$

Trở lại với bài toán tổng quát hơn là Bài toán (2.1), một cách tự nhiên ta cũng có thể nghĩ tới việc áp dụng ý tưởng trên để xác định giá trị ở vòng lặp tiếp theo như sau:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}\in \mathrm{E}}\left\{f\left(\mathbf{x}^k\right) + \left\langle \nabla f\left(\mathbf{x}^k\right), \mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\rangle + g(\mathbf{x}) + \frac{1}{2t_k}\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right\|^2\right\}. \tag{2.3}$$

Biểu thức (2.3) có thể được viết lại thành:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}\in \mathrm{E}}\left\{t_k g(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\left\|\mathbf{x} - \left(\mathbf{x}^k - t_k \nabla f\left(\mathbf{x}^k\right)\right)\right\|^2\right\}.$$

Và với định nghĩa ánh xạ gần kề, ta có

$$\mathbf{x}^{k+1} = \operatorname{prox}_{t_k g}\left(\mathbf{x}^k - t_k \nabla f\left(\mathbf{x}^k\right)\right).$$

Thuật toán trên được gọi là thuật toán đạo hàm gần kề (ISTA).

Đặt $t_k = \frac{1}{L_k}$ là các độ dài bước trong mỗi vòng lặp, ta có thuật toán đạo hàm gần kề.

Thuật toán 2.2.1 (Thuật toán đạo hàm gần kề (ISTA), [7])**.**
Khởi tạo: Chọn $\mathbf{x}^0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$.
Với $k = 0, 1, 2, \ldots$, thực hiện các bước sau:

(a) Chọn $L_k > 0$;

(b) Tính $\mathbf{x}^{k+1} = \operatorname{prox}_{\frac{1}{L_k} g}\left(\mathbf{x}^k - \frac{1}{L_k}\nabla f\left(\mathbf{x}^k\right)\right)$.

Công thức cập nhật của thuật toán đạo hàm gần kề có thể được viết lại thành

$$\mathbf{x}^{k+1} = T_{L_k}^{f,g}\left(\mathbf{x}^k\right),$$

trong đó $T_L^{f,g} : \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f)) \to \mathbb{E}(L > 0)$ còn được gọi là toán tử đạo hàm gần kề, được xác định bởi

$$T_L^{f,g}(\mathbf{x}) \equiv \operatorname{prox}_{\frac{1}{L} g}\left(\mathbf{x} - \frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{x})\right).$$

Trong trường hợp đã xác định rõ f và g, ta có thể sử dụng ký hiệu $T_L(\cdot)$ để thay thế cho $T_L^{f,g}(\cdot)$.

2.3 Ánh xạ đạo hàm và tính giảm của thuật toán

2.3.1. Tính giảm của thuật toán

Để phân tích sự hội tụ của thuật toán đạo hàm gần kề, ta sẽ chứng minh một kết quả sau với hàm dạng tổng, được gọi là bổ đề giảm đủ.

Bổ đề 2.3 (Bổ đề giảm đủ, [7])**.** *Giả sử rằng f và g thỏa mãn điều kiện (A) và (B) của Giả thiết 2.1. Đặt $F = f + g$ và $T_L \equiv T_L^{f,g}$. Khi đó, với bất kỳ $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$ và $L \in \left(\frac{L_f}{2}, \infty\right)$ ta có bất đẳng thức sau:*

$$F(\mathbf{x}) - F\left(T_L(\mathbf{x})\right) \geq \frac{L - \frac{L_f}{2}}{L^2}\left\|G_L^{f,g}(\mathbf{x})\right\|^2, \tag{2.4}$$

trong đó $G_L^{f,g} : \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f)) \to \mathbb{E}$ *là toán tử được xác định bởi* $G_L^{f,g}(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x} - T_L(\mathbf{x}))$ *với mọi* $\mathbf{x} \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

Chứng minh. Để đơn giản, ta ký hiệu $\mathbf{x}^\dagger = T_L(\mathbf{x})$.

Theo Bổ đề 1.21, ta có

$$f\left(\mathbf{x}^\dagger\right) \leq f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{x}^\dagger - \mathbf{x} \rangle + \frac{L_f}{2} \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\dagger\right\|^2. \tag{2.5}$$

Chú ý rằng ta có $\mathbf{x}^\dagger = \mathrm{prox}_{\frac{1}{L}g}\left(\mathbf{x} - \frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{x})\right)$. Sử dụng định lý thứ hai về ánh xạ gần kề, thay $\mathbf{x} := \mathbf{x} - \frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{y} := \mathbf{x}$, $\mathbf{u} := \mathbf{x}^\dagger$ vào biểu thức ở Định lý 1.29(iii), ta được

$$\left\langle \mathbf{x} - \frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^\dagger, \mathbf{x} - \mathbf{x}^\dagger \right\rangle \leq \frac{1}{L} g(\mathbf{x}) - \frac{1}{L} g\left(\mathbf{x}^\dagger\right),$$

tương đương với

$$L\left\langle \mathbf{x} - \frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^\dagger, \mathbf{x} - \mathbf{x}^\dagger \right\rangle \leq g(\mathbf{x}) - g\left(\mathbf{x}^\dagger\right).$$

Từ đó suy ra

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{x}^\dagger - \mathbf{x} \rangle + g\left(\mathbf{x}^\dagger\right) \leq -L\left\|\mathbf{x}^\dagger - \mathbf{x}\right\|^2 + g(\mathbf{x}).$$

Cộng vế với vế bất đẳng thức trên với (2.5) ta được

$$f\left(\mathbf{x}^\dagger\right) + g\left(\mathbf{x}^\dagger\right) \leq f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) + \left(-L + \frac{L_f}{2}\right)\left\|\mathbf{x}^\dagger - \mathbf{x}\right\|^2.$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

2.3.2. Ánh xạ đạo hàm

Toán tử $G_L^{f,g}$ xuất hiện trong vế phải của biểu thức (2.4) là một ánh xạ quan trọng, có thể được coi là sự khái quát hóa khái niệm đạo hàm.

Định nghĩa 2.4 (Ánh xạ đạo hàm, [7])**.** Giả sử f và g thỏa mãn điều kiện (A) và (B) của Giả thiết 2.1. Ánh xạ đạo hàm là toán tử $G_L^{f,g} : \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f)) \to \mathbb{E}$ định nghĩa bởi

$$G_L^{f,g}(\mathbf{x}) \equiv L\left(\mathbf{x} - T_L^{f,g}(\mathbf{x})\right),$$

với mọi $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$.

Trong ngữ cảnh đã xác định rõ ràng f và g, ta sẽ dùng ký hiệu G_L thay thế cho $G_L^{f,g}$. Khi đó, bước cập nhật của thuật toán đạo hàm gần kề có thể được viết lại thành

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \frac{1}{L_k} G_{L_k}\left(\mathbf{x}^k\right).$$

Đặc biệt, trong trường hợp $L = L_f$, bất đẳng thức (2.4) có một dạng đơn giản hơn được trình bày trong hệ quả dưới đây.

Hệ quả 2.5 ([7])**.** *Với các điều kiện của Bổ đề 2.3, với mỗi* $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$ *ta có:*

$$F(\mathbf{x}) - F\left(T_{L_f}(\mathbf{x})\right) \geq \frac{1}{2L_f}\left\|G_{L_f}(\mathbf{x})\right\|^2.$$

Kết quả tiếp theo cho thấy ánh xạ đạo hàm là dạng tổng quát của toán tử đạo hàm thông thường $\mathbf{x} \mapsto \nabla f(\mathbf{x})$ theo nghĩa là chúng trùng nhau khi $g \equiv 0$ và đối với g tổng quát, điểm mà tại đó ánh xạ đạo hàm bằng không chính là các điểm dừng của bài toán cực tiểu hóa $f + g$. Nhắc lại rằng một điểm $\mathbf{x}^* \in \operatorname{dom}(g)$ là điểm dừng của Bài toán (2.1) khi và chỉ khi $-\nabla f\left(\mathbf{x}^*\right) \in \partial g\left(\mathbf{x}^*\right)$ và đây là điều kiện cần cho các nghiệm tối ưu địa phương.

Định lí 2.6 ([7])**.** *Cho f và g thỏa mãn điều kiện (A) và (B) của Giả thiết 2.1 và $L > 0$. Khi đó:*

(a) $G_L^{f,g_0}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$ *với* $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$ *bất kỳ và* $g_0(\mathbf{x}) \equiv 0$*;*

(b) Với $\mathbf{x}^* \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$*, ta có* $G_L^{f,g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ *khi và chỉ khi* $\mathbf{x}^*$ *là một điểm dừng của Bài toán* (2.1).

Chứng minh.

(a) Vì $\operatorname{prox}_{\frac{1}{L}g_0}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ với mọi $\mathbf{y} \in \mathbb{E}$, suy ra

$$T_L^{f,g_0}(\mathbf{x}) = \operatorname{prox}_{\frac{1}{L}g_0}\left(\mathbf{x} - \frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{x})\right) = \mathbf{x} - \frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{x}).$$

Từ đó ta có

$$G_L^{f,g_0}(\mathbf{x}) = L\left(\mathbf{x} - T_L^{f,g_0}(\mathbf{x})\right) = L\left(\mathbf{x} - \left(\mathbf{x} - \frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{x})\right)\right) = \nabla f(\mathbf{x}).$$

(b) Ta có $G_L^{f,g}(\mathbf{x}^*) = 0$ khi và chỉ khi $\mathbf{x}^* = \operatorname{prox}_{\frac{1}{L}g}\left(\mathbf{x}^* - \frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{x}^*)\right)$. Theo Định lý 1.29, điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\mathbf{x}^* - \frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{x}^*) - \mathbf{x}^* \in \frac{1}{L}\partial g(\mathbf{x}^*),$$

tương đương với

$$-\nabla f(\mathbf{x}^*) \in \partial g(\mathbf{x}^*),$$

hay $\mathbf{x}^*$ là một điểm dừng của Bài toán (2.1). □

Nếu có thêm f là hàm lồi, điều kiện diểm dừng là điều kiện cần và đủ của nghiệm tối ưu.

Hệ quả 2.7 ([7])**.** *Cho* f *và* g *thỏa mãn điều kiện (A) và (B) của Giả thiết 2.1 và* $L > 0$*. Giả thiết thêm rằng* f *là hàm lồi. Khi đó, với* $\mathbf{x}^* \in \operatorname{dom}(g)$*, ta có* $G_L^{f,g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ *khi và chỉ khi* $\mathbf{x}^*$ *là một nghiệm tối ưu của Bài toán* (2.1).

Ta có thể coi đại lượng $\|G_L(\mathbf{x})\|$ như một "độ đo tối ưu" khi nó luôn không âm và bằng không khi và chỉ khi $\mathbf{x}$ là một điểm dừng. Kết quả dưới đây thiết lập tính chất đơn điệu quan trọng của ánh xạ đạo hàm $\|G_L(\mathbf{x})\|$ theo L.

Định lí 2.8 ([7]). *Giả sử rằng f và g thoả mãn điều kiện (A) và (B) của Giả thiết 2.1 và đặt $G_L \equiv G_L^{f,g}$. Cho $L_1 \geq L_2 > 0$. Khi đó ta có*

$$\|G_{L_1}(\mathbf{x})\| \geq \|G_{L_2}(\mathbf{x})\|, \tag{2.6}$$

và

$$\frac{\|G_{L_1}(\mathbf{x})\|}{L_1} \leq \frac{\|G_{L_2}(\mathbf{x})\|}{L_2}, \tag{2.7}$$

với mọi $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$.

Chứng minh. Theo Định lý 1.29, với mọi $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$ và $L > 0$, ta có bất đẳng thức sau

$$\left\langle \mathbf{v} - \operatorname{prox}_{\frac{1}{L}g}(\mathbf{v}), \operatorname{prox}_{\frac{1}{L}g}(\mathbf{v}) - \mathbf{w} \right\rangle \geq \frac{1}{L} g\left(\operatorname{prox}_{\frac{1}{L}g}(\mathbf{v})\right) - \frac{1}{L} g(\mathbf{w}).$$

Thay $L = L_1, \mathbf{v} = \mathbf{x} - \frac{1}{L_1}\nabla f(\mathbf{x})$ và $\mathbf{w} = T_{L_2}(\mathbf{x})$, ta có

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathbf{x} - \frac{1}{L_1}\nabla f(\mathbf{x}) - T_{L_1}(\mathbf{x}), T_{L_1}(\mathbf{x}) - T_{L_2}(\mathbf{x}) \right\rangle \\ &\geq \frac{1}{L_1} g\left(T_{L_1}(\mathbf{x})\right) - \frac{1}{L_1} g\left(T_{L_2}(\mathbf{x})\right), \end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{1}{L_1} G_{L_1}(\mathbf{x}) - \frac{1}{L_1}\nabla f(\mathbf{x}), \frac{1}{L_2} G_{L_2}(\mathbf{x}) - \frac{1}{L_1} G_{L_1}(\mathbf{x}) \right\rangle \\ &\geq \frac{1}{L_1} g\left(T_{L_1}(\mathbf{x})\right) - \frac{1}{L_1} g\left(T_{L_2}(\mathbf{x})\right). \end{aligned}$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức trên với $L_1 > 0$ ta được

$$\left\langle G_{L_1}(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x}), \frac{L_1}{L_2} G_{L_2}(\mathbf{x}) - G_{L_1}(\mathbf{x}) \right\rangle \geq g\left(T_{L_1}(\mathbf{x})\right) - g\left(T_{L_2}(\mathbf{x})\right).$$

Hoán đổi vai trò của L_1 và L_2 ta có bất đẳng thức sau

$$\left\langle G_{L_2}(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x}), \frac{L_2}{L_1} G_{L_1}(\mathbf{x}) - G_{L_2}(\mathbf{x}) \right\rangle \geq g\left(T_{L_2}(\mathbf{x})\right) - g\left(T_{L_1}(\mathbf{x})\right).$$

Cộng vế với vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\left\langle G_{L_1}(\mathbf{x}) - G_{L_2}(\mathbf{x}), \frac{1}{L_2} G_{L_2}(\mathbf{x}) - \frac{1}{L_1} G_{L_1}(\mathbf{x}) \right\rangle \geq 0.$$

Điều này tương đương với

$$\frac{1}{L_1} \|G_{L_1}(\mathbf{x})\|^2 + \frac{1}{L_2} \|G_{L_2}(\mathbf{x})\|^2 \leq \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \langle G_{L_1}(\mathbf{x}), G_{L_2}(\mathbf{x}) \rangle .$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{1}{L_1} \|G_{L_1}(\mathbf{x})\|^2 + \frac{1}{L_2} \|G_{L_2}(\mathbf{x})\|^2 \leq \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \|G_{L_1}(\mathbf{x})\| \, \|G_{L_2}(\mathbf{x})\| . \quad (2.8)$$

Chú ý rằng nếu $G_{L_2}(\mathbf{x}) = 0$ thì từ đây ta suy ra $G_{L_1}(\mathbf{x}) = 0$, khi đó dấu bằng ở cả (2.6) và (2.7) đều xảy ra. Giả sử rằng $G_{L_2}(\mathbf{x}) \neq 0$ và đặt $t = \dfrac{\|G_{L_1}(\mathbf{x})\|}{\|G_{L_2}(\mathbf{x})\|}$. Từ (2.8), ta có

$$\frac{1}{L_1} t^2 - \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) t + \frac{1}{L_2} \leq 0.$$

Do nghiệm của vế trái là 1 và $\frac{L_1}{L_2}$ nên ta có

$$1 \leq t \leq \frac{L_1}{L_2},$$

từ đó suy ra

$$\|G_{L_2}(\mathbf{x})\| \leq \|G_{L_1}(\mathbf{x})\| \leq \frac{L_1}{L_2} \|G_{L_2}(\mathbf{x})\| ,$$

ta có điều phải chứng minh. □

Một hệ quả của Định lý 1.31 và tính L_f-trơn của f trên $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ là $G_L(\cdot)$ liên tục Lipschitz với hệ số $2L + L_f$. Thật vậy, với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$, ta có

$$\begin{aligned} &\|G_L(\mathbf{x}) - G_L(\mathbf{y})\| \\ =&L \left\| \mathbf{x} - \mathrm{prox}_{\frac{1}{L}g} \left(\mathbf{x} - \frac{1}{L} \nabla f(\mathbf{x}) \right) - \mathbf{y} + \mathrm{prox}_{\frac{1}{L}g} \left(\mathbf{y} - \frac{1}{L} \nabla f(\mathbf{y}) \right) \right\| \end{aligned}$$

$$\leq L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + L\left\|\operatorname{prox}_{\frac{1}{L}g}\left(\mathbf{x}-\frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{x})\right) - \operatorname{prox}_{\frac{1}{L}g}\left(\mathbf{y}-\frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{y})\right)\right\|$$
$$\leq L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + L\left\|\left(\mathbf{x}-\frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{x})\right) - \left(\mathbf{y}-\frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{y})\right)\right\|$$
$$\leq 2L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\|$$
$$\leq (2L+L_f)\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

Đặc biệt, khi $L = L_f$, ta có bất đẳng thức sau

$$\left\|G_{L_f}(\mathbf{x}) - G_{L_f}(\mathbf{y})\right\| \leq 3L_f\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

Các kết quả trên được tổng hợp lại trong bổ đề về tính liên tục Lipschitz của ánh xạ đạo hàm dưới đây.

Bổ đề 2.9 ([7]). *Cho f và g thoả mãn điều kiện (A) và (B) của Giả thiết 2.1. Đặt $G_L = G_L^{f,g}$. Khi đó ta có*

(a) $\|G_L(\mathbf{x}) - G_L(\mathbf{y})\| \leq (2L+L_f)\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ *với mọi* $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$*;*

(b) $\left\|G_{L_f}(\mathbf{x}) - G_{L_f}(\mathbf{y})\right\| \leq 3L_f\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ *với mọi* $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$.

Kết quả tiếp theo cho thấy một tính chất đơn điệu khác của chuẩn ánh xạ đạo hàm.

Bổ đề 2.10 ([7]). *Cho f là hàm lồi và L_f-trơn $(L_f > 0)$, $g : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ là hàm lồi, đóng và chính thường. Khi đó với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$,*

$$\left\|G_{L_f}\left(T_{L_f}(\mathbf{x})\right)\right\| \leq \left\|G_{L_f}(\mathbf{x})\right\|,$$

trong đó $G_{L_f} \equiv G_{L_f}^{f,g}$ và $T_{L_f} \equiv T_{L_f}^{f,g}$.

Chứng minh. Xét $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ và đặt $\mathbf{x}^\dagger = T_{L_f}(\mathbf{x})$. Theo Định lý 1.22, ta có

$$\left\|\nabla f\left(\mathbf{x}^\dagger\right) - \nabla f(\mathbf{x})\right\|^2 \leq L_f\left\langle \nabla f\left(\mathbf{x}^\dagger\right) - \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{x}^\dagger - \mathbf{x}\right\rangle. \tag{2.9}$$

Đặt $\mathbf{a} = \nabla f\left(\mathbf{x}^{\dagger}\right) - \nabla f(\mathbf{x})$ và $\mathbf{b} = \mathbf{x}^{\dagger} - \mathbf{x}$, bất đẳng thức (2.9) có thể được viết lại thành $\|\mathbf{a}\|^2 \leq L_f\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$, tương đương với

$$\left\|\mathbf{a} - \frac{L_f}{2}\mathbf{b}\right\|^2 \leq \frac{L_f^2}{4}\|\mathbf{b}\|^2,$$

hay

$$\left\|\frac{1}{L_f}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}\right\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{b}\|.$$

Sử dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\left\|\frac{1}{L_f}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right\| \leq \left\|\frac{1}{L_f}\mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{b}\right\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{b}\|.$$

Thay các biểu thức của $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ vào bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\left\|\mathbf{x} - \frac{1}{L_f}\nabla f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^{\dagger} + \frac{1}{L_f}\nabla f\left(\mathbf{x}^{\dagger}\right)\right\| \leq \left\|\mathbf{x}^{\dagger} - \mathbf{x}\right\|.$$

Kết hợp bất đẳng thức trên với Định lý 1.31(b), ta được

$$\begin{aligned}
&\left\|G_{L_f}\left(T_{L_f}(\mathbf{x})\right)\right\| \\
=&\left\|G_{L_f}\left(\mathbf{x}^{\dagger}\right)\right\| = L_f\left\|\mathbf{x}^{\dagger} - T_{L_f}\left(\mathbf{x}^{\dagger}\right)\right\| = L_f\left\|T_{L_f}(\mathbf{x}) - T_{L_f}\left(\mathbf{x}^{\dagger}\right)\right\| \\
=&L_f\left\|\operatorname{prox}_{\frac{1}{L_f}g}\left(\mathbf{x} - \frac{1}{L_f}\nabla f(\mathbf{x})\right) - \operatorname{prox}_{\frac{1}{L_f}g}\left(\mathbf{x}^{\dagger} - \frac{1}{L_f}\nabla f\left(\mathbf{x}^{\dagger}\right)\right)\right\| \\
\leq&L_f\left\|\mathbf{x} - \frac{1}{L_f}\nabla f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^{\dagger} + \frac{1}{L_f}\nabla f\left(\mathbf{x}^{\dagger}\right)\right\| \\
\leq&L_f\left\|\mathbf{x}^{\dagger} - \mathbf{x}\right\| = L_f\left\|T_{L_f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\right\| = \left\|G_{L_f}(\mathbf{x})\right\|.
\end{aligned}$$

Đây là điều cần chứng minh. □

2.4 Sự hội tụ của thuật toán

2.4.1. Trường hợp không lồi

Chúng ta sẽ phân tích sự hội tụ của thuật toán đạo hàm gần kề dưới điều kiện của Giả thiết 2.1. Lưu ý rằng ở phần này, chúng ta không giả định rằng f

là lồi. Hai chiến lược chọn độ dài bước sẽ được xem xét là độ dài bước không đổi và độ dài bước được chọn bằng phương pháp quay lui.

- **Độ dài bước không đổi:** $L_k = \bar{L} \in \left(\frac{L_f}{2}, \infty\right)$ với mọi k.
- **Quy trình quay lui B1:** Quy trình này yêu cầu ba tham số (s, γ, η), với $s > 0$, $\gamma \in (0, 1)$ và $\eta > 1$. Cách chọn L_k như sau: đầu tiên, L_k được đặt bằng giá trị ban đầu s. Sau đó, nếu

  $$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F\left(T_{L_k}\left(\mathbf{x}^k\right)\right) < \frac{\gamma}{L_k}\left\|G_{L_k}\left(\mathbf{x}^k\right)\right\|^2,$$

  ta cập nhật $L_k := \eta L_k$. Nói cách khác, giá trị L_k được chọn là $L_k = s\eta^{i_k}$, trong đó i_k là số nguyên không âm nhỏ nhất sao cho

  $$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F\left(T_{s\eta^{i_k}}\left(\mathbf{x}^k\right)\right) \geq \frac{\gamma}{s\eta^{i_k}}\left\|G_{s\eta^{i_k}}\left(\mathbf{x}^k\right)\right\|^2.$$

Nhận xét 2.11. Quy trình quay lui là hữu hạn theo Giả thiết 2.1. Thật vậy, thay $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$ vào (2.4), ta có

$$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F\left(T_L\left(\mathbf{x}^k\right)\right) \geq \frac{L - \frac{L_f}{2}}{L^2}\left\|G_L\left(\mathbf{x}^k\right)\right\|^2. \tag{2.10}$$

Nếu $L \geq \frac{L_f}{2(1-\gamma)}$ thì $\frac{L - \frac{L_f}{2}}{L} \geq \gamma$. Do đó, theo (2.10), ta có bất đẳng thức

$$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F\left(T_L\left(\mathbf{x}^k\right)\right) \geq \frac{\gamma}{L}\left\|G_L\left(\mathbf{x}^k\right)\right\|^2,$$

điều này chỉ ra rằng quy trình quay lui phải kết thúc khi $L_k \geq \frac{L_f}{2(1-\gamma)}$.

Chúng ta cũng có thể tính một chặn trên cho L_k: hoặc L_k bằng s, hoặc quy trình quay lui được thực hiện, có nghĩa là $\frac{L_k}{\eta}$ không thỏa mãn điều kiện quay lui. Điều này theo phân tích trên dẫn đến $\frac{L_k}{\eta} < \frac{L_f}{2(1-\gamma)}$, do đó $L_k < \frac{\eta L_f}{2(1-\gamma)}$. Tóm lại, trong quy trình quay lui B1, tham số L_k thỏa mãn

$$L_k \leq \max\left\{s, \frac{\eta L_f}{2(1-\gamma)}\right\}. \tag{2.11}$$

Sự hội tụ của phương pháp đạo hàm gần kề trong trường hợp không lồi chủ yếu dựa vào bổ đề giảm (Bổ đề 2.12). Chúng ta bắt đầu với bổ đề sau đây, chỉ ra rằng các giá trị hàm mục tiêu liên tiếp của dãy được tạo ra bằng phương pháp đạo hàm gần kề giảm ít nhất một hằng số nhân với bình phương của chuẩn ánh xạ đạo hàm.

Bổ đề 2.12 ([7])**.** *Giả sử Giả thiết 2.1 được thoả mãn. Xét thuật toán đạo hàm gần kề với độ dài bước không đổi được xác định bởi* $L_k = \bar{L} \in \left(\frac{L_f}{2}, \infty\right)$ *hoặc là độ dài bước được chọn bởi quy trình quay lui B1 với các tham số* (s, γ, η)*, với* $s > 0$*,* $\gamma \in (0, 1)$ *và* $\eta > 1$*. Khi đó đối với mọi* $k \geq 0$*,*

$$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \geq M \left\|G_d\left(\mathbf{x}^k\right)\right\|^2, \tag{2.12}$$

trong đó

$$M = \begin{cases} \frac{\bar{L} - \frac{L_f}{2}}{\bar{L}^2}, & \text{độ dài bước không đổi,} \\ \frac{\gamma}{\max\left\{s, \frac{\eta L_f}{2(1-\gamma)}\right\}}, & \text{quy trình quay lui,} \end{cases} \tag{2.13}$$

và

$$d = \begin{cases} \bar{L}, & \text{độ dài bước không đổi,} \\ s, & \text{quy trình quay lui.} \end{cases} \tag{2.14}$$

Chứng minh. Kết quả đối với độ dài bước không đổi được suy ra bằng cách thay $L = \bar{L}$ và $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$ vào Bổ đề 2.3. Đối với trường hợp quy trình quay lui, ta có

$$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \geq \frac{\gamma}{L_k} \left\|G_{L_k}\left(\mathbf{x}^k\right)\right\|^2 \geq \frac{\gamma}{\max\left\{s, \frac{\eta L_f}{2(1-\gamma)}\right\}} \left\|G_{L_k}\left(\mathbf{x}^k\right)\right\|^2.$$

Bất đẳng thức cuối cùng được suy ra từ chặn trên của L_k đã nêu ở (2.11). Kết quả đối với trường hợp quy trình quay lui được suy ra từ tính chất đơn điệu của ánh xạ đạo hàm (Định lý 2.8) cùng với chặn dưới $L_k \geq s$, điều này dẫn đến bất đẳng thức $\left\|G_{L_k}\left(\mathbf{x}^k\right)\right\| \geq \left\|G_s\left(\mathbf{x}^k\right)\right\|$. □

Định lí 2.13 (Sự hội tụ của thuật toán đạo hàm gần kề trong trường hợp không lồi, [7])**.** *Giả sử Giả thiết 2.1 được thoả mãn và cho $\{\mathbf{x}^k\}_{k\geq 0}$ là dãy được sinh ra bởi thuật toán đạo hàm gần kề để giải Bài toán (2.1) với hoặc là độ dài bước không đổi được xác định bởi $L_k = \bar{L} \in \left(\frac{L_f}{2}, \infty\right)$ hoặc là độ dài bước được chọn bởi quy trình quay lui B1 với các tham số (s, γ, η), với $s > 0$, $\gamma \in (0, 1)$ và $\eta > 1$. Khi đó:*

(a) Dãy $\{F(\mathbf{x}^k)\}_{k\geq 0}$ là không tăng. Thêm vào đó, $F(\mathbf{x}^{k+1}) < F(\mathbf{x}^k)$ nếu và chỉ nếu $\mathbf{x}^k$ không phải là điểm dừng của Bài toán (2.1).

(b) $\|G_d(\mathbf{x}^k)\| \to 0$ khi $k \to \infty$, trong đó d được định nghĩa ở (2.14).

(c)

$$\min_{n=0,1,\ldots,k} \|G_d\left(\mathbf{x}^n\right)\| \leq \frac{\sqrt{F\left(\mathbf{x}^0\right) - F_{opt}}}{\sqrt{M(k+1)}}, \tag{2.15}$$

với M được định nghĩa trong (2.13).

(d) Tất cả các điểm giới hạn của dãy $\{\mathbf{x}^k\}_{k\geq 0}$ đều là điểm dừng của Bài toán (2.1).

Chứng minh.

(a) Theo Bổ đề 2.12, ta có

$$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \geq M \left\|G_d\left(\mathbf{x}^k\right)\right\|^2. \tag{2.16}$$

Do đó, $\{F(\mathbf{x}^k)\}_{k\geq 0}$ là không tăng. Nếu $\mathbf{x}^k$ không phải là điểm dừng của Bài toán (2.1), thì $G_d(\mathbf{x}^k) \neq 0$ và do đó, từ (2.16), $F(\mathbf{x}^k) > F(\mathbf{x}^{k+1})$. Nếu $\mathbf{x}^k$ là điểm dừng của Bài toán (2.1), thì $G_{L_k}(\mathbf{x}^k) = 0$, dẫn đến $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k -$

$\frac{1}{L_k} G_{L_k}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{x}^k$ và do đó $F(\mathbf{x}^k) = F(\mathbf{x}^{k+1})$.

(b) Vì dãy $\{F(\mathbf{x}^k)\}_{k\geq 0}$ là không tăng và có chặn dưới. Nên nó hội tụ. Do đó, $F(\mathbf{x}^k) - F(\mathbf{x}^{k+1}) \to 0$ khi $k \to \infty$, điều này kết hợp với (2.16) chỉ ra rằng $\|G_d(\mathbf{x}^k)\| \to 0$ khi $k \to \infty$.

(c) Cộng bất đẳng thức

$$F\left(\mathbf{x}^n\right) - F\left(\mathbf{x}^{n+1}\right) \geq M \left\|G_d\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2,$$

với $n = 0, 1, \ldots, k$, ta được

$$F\left(\mathbf{x}^0\right) - F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \geq M \sum_{n=0}^{k} \left\|G_d\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2 \geq M(k+1) \min_{n=0,1,\ldots,k} \left\|G_d\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2.$$

Kết hợp với $F(\mathbf{x}^{k+1}) \geq F_{\text{opt}}$, bất đẳng thức (2.15) được chứng minh.

(d) Gọi $\overline{\mathbf{x}}$ là một điểm giới hạn của $\{\mathbf{x}^k\}_{k\geq 0}$. Thì tồn tại một dãy con $\{\mathbf{x}^{k_j}\}_{j\geq 0}$ hội tụ tới $\overline{\mathbf{x}}$. Đối với bất kỳ $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|G_d(\overline{\mathbf{x}})\| &\leq \left\|G_d\left(\mathbf{x}^{k_j}\right) - G_d(\overline{\mathbf{x}})\right\| + \left\|G_d\left(\mathbf{x}^{k_j}\right)\right\| \\ &\leq (2d + L_f) \left\|\mathbf{x}^{k_j} - \overline{\mathbf{x}}\right\| + \left\|G_d\left(\mathbf{x}^{k_j}\right)\right\|, \end{aligned} \tag{2.17}$$

trong đó Bổ đề 2.9(a) được sử dụng trong bất đẳng thức thứ hai. Vì vế phải của (2.17) tiến tới 0 khi $j \to \infty$, điều này cho thấy $G_d(\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Theo Định lý 2.6(b), ta có $\overline{\mathbf{x}}$ là điểm dừng của Bài toán (2.1). □

2.4.2. Trường hợp lồi

Để phân tích thuật toán đạo hàm gần kề trong trường hợp f lồi, ta dựa trên bất đẳng thức đạo hàm gần kề. Ở bất đẳng thức này ta không cần giả sử rằng f là lồi.

Định lí 2.14 ([7]). *Giả sử f và g thỏa mãn các điều kiện (A) và (B) của Giả thiết 2.1. Với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$, $\mathbf{y} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$ và $L > 0$ thỏa mãn*

$$f\left(T_L(\mathbf{y})\right) \leq f(\mathbf{y}) + \langle \nabla f(\mathbf{y}), T_L(\mathbf{y}) - \mathbf{y} \rangle + \frac{L}{2} \left\| T_L(\mathbf{y}) - \mathbf{y} \right\|^2 . \qquad (2.18)$$

Khi đó

$$F(\mathbf{x}) - F\left(T_L(\mathbf{y})\right) \geq \frac{L}{2} \left\| \mathbf{x} - T_L(\mathbf{y}) \right\|^2 - \frac{L}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \ell_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad (2.19)$$

với

$$\ell_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) - \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle.$$

Chứng minh. Xét hàm số

$$\varphi(\mathbf{u}) = f(\mathbf{y}) + \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{u} - \mathbf{y} \rangle + g(\mathbf{u}) + \frac{L}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{y}\|^2.$$

Vì φ là hàm lồi mạnh với hệ số L và $T_L(\mathbf{y}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u} \in \mathbb{E}} \varphi(\mathbf{u})$, từ Định lý 1.18(b) suy ra

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi\left(T_L(\mathbf{y})\right) \geq \frac{L}{2} \left\| \mathbf{x} - T_L(\mathbf{y}) \right\|^2 . \qquad (2.20)$$

Chú ý rằng theo (2.18), ta có:

$$\begin{aligned} \varphi\left(T_L(\mathbf{y})\right) &= f(\mathbf{y}) + \langle \nabla f(\mathbf{y}), T_L(\mathbf{y}) - \mathbf{y} \rangle + \frac{L}{2} \left\| T_L(\mathbf{y}) - \mathbf{y} \right\|^2 + g\left(T_L(\mathbf{y})\right) \\ &\geq f\left(T_L(\mathbf{y})\right) + g\left(T_L(\mathbf{y})\right) = F\left(T_L(\mathbf{y})\right) . \end{aligned}$$

Kết hợp với (2.20), ta suy ra rằng đối với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$,

$$\varphi(\mathbf{x}) - F\left(T_L(\mathbf{y})\right) \geq \frac{L}{2} \left\| \mathbf{x} - T_L(\mathbf{y}) \right\|^2 .$$

Thay biểu thức của $\varphi(\mathbf{x})$ vào bất đẳng thức trên, ta có

$$f(\mathbf{y}) + \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle + g(\mathbf{x}) + \frac{L}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - F\left(T_L(\mathbf{y})\right) \geq \frac{L}{2} \left\| \mathbf{x} - T_L(\mathbf{y}) \right\|^2 .$$

Điều này tương đương với kết quả mong muốn:

$$F(\mathbf{x}) - F\left(T_L(\mathbf{y})\right) \geq \frac{L}{2}\left\|\mathbf{x} - T_L(\mathbf{y})\right\|^2 - \frac{L}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) - \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle.$$

□

Nhận xét 2.15. Theo Bổ đề 1.21, bất đẳng thức (2.18) được thỏa mãn khi $L = L_f$. Do đó, với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ và $\mathbf{y} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$, bất đẳng thức

$$F(\mathbf{x}) - F\left(T_{L_f}(\mathbf{y})\right) \geq \frac{L_f}{2}\left\|\mathbf{x} - T_{L_f}(\mathbf{y})\right\|^2 - \frac{L_f}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \ell_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

được thỏa mãn.

Một hệ quả trực tiếp của Định lý 2.14 là một phiên bản khác của Bổ đề 2.3. Điều này có được bằng cách thay $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ vào bất đẳng thức đạo hàm gần kề.

Hệ quả 2.16 ([7]). *Giả sử f và g thỏa mãn các điều kiện (A) và (B) của Giả thiết 2.1. Với mọi $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$ thỏa mãn*

$$f\left(T_L(\mathbf{x})\right) \leq f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}), T_L(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\rangle + \frac{L}{2}\left\|T_L(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\right\|^2,$$

thì

$$F(\mathbf{x}) - F\left(T_L(\mathbf{x})\right) \geq \frac{1}{2L}\left\|G_L(\mathbf{x})\right\|^2.$$

Về việc chọn độ dài bước, ta sẽ xem xét giống như trong trường hợp không lồi, cả hai chiến lược độ dài bước cố định và quay lui . Quy trình quay lui, gọi là "quy trình quay lui B2", sẽ khác một chút so với quy trình đã xem xét trong trường hợp không lồi. Quy trình này tìm một hằng số L_k thỏa mãn

$$f\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \leq f\left(\mathbf{x}^k\right) + \left\langle \nabla f\left(\mathbf{x}^k\right), \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right\rangle + \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right\|^2. \quad (2.21)$$

Trong trường hợp đặc biệt khi $g \equiv 0$, thuật toán đạo hàm gần kề chính là thuật toán gradient $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \frac{1}{L_k}\nabla f\left(\mathbf{x}^k\right)$ và điều kiện (2.21) trở thành

$$f\left(\mathbf{x}^k\right) - f\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \geq \frac{1}{2L_k}\left\|\nabla f\left(\mathbf{x}^k\right)\right\|^2,$$

điều này tương tự như điều kiện giảm đủ được trình bày trong Bổ đề 2.3 và đây là lý do tại sao điều kiện (2.21) cũng có thể được xem như một "điều kiện giảm đủ".

- **Độ dài bước không đổi:** $L_k = L_f$ cho tất cả k.
- **Quy trình quay lui B2:** Quy trình yêu cầu hai tham số (s, η), với $s > 0$ và $\eta > 1$. Đặt $L_{-1} = s$. Tại vòng lặp $k (k \geq 0)$, việc chọn L_k được thực hiện như sau. Trước tiên, L_k được đặt bằng L_{k-1}. Sau đó, nếu

  $$\begin{aligned} & f\left(T_{L_k}\left(\mathbf{x}^k\right)\right) \\ & > f\left(\mathbf{x}^k\right) + \left\langle \nabla f\left(\mathbf{x}^k\right), T_{L_k}\left(\mathbf{x}^k\right) - \mathbf{x}^k\right\rangle + \frac{L_k}{2}\left\|T_{L_k}\left(\mathbf{x}^k\right) - \mathbf{x}^k\right\|^2, \end{aligned}$$

  ta cập nhật $L_k := \eta L_k$. Nói cách khác, L_k được chọn theo công thức $L_k = L_{k-1}\eta^{i_k}$, trong đó i_k là số nguyên không âm nhỏ nhất thỏa mãn

  $$\begin{aligned} f\left(T_{L_{k-1}\eta^{i_k}}\left(\mathbf{x}^k\right)\right) \leq f\left(\mathbf{x}^k\right) + \left\langle \nabla f\left(\mathbf{x}^k\right), T_{L_{k-1}\eta^{i_k}}\left(\mathbf{x}^k\right) - \mathbf{x}^k\right\rangle + \\ \frac{L_k}{2}\left\|T_{L_{k-1}\eta^{i_k}}\left(\mathbf{x}^k\right) - \mathbf{x}^k\right\|^2. \end{aligned}$$

Ta có nhận xét sau về chặn trên và chặn dưới của L_k.

Nhận xét 2.17. Theo Giả thiết 2.1 và Bổ đề 1.21, ta thấy rằng cả hai phương pháp chọn độ dài bước đều đảm bảo điều kiện giảm đủ (2.21) được thỏa mãn tại mỗi vòng lặp. Thêm vào đó, các hằng số L_k mà quy trình quay lui B2 tạo ra thỏa mãn các giới hạn sau cho tất cả $k \geq 0$:

$$s \leq L_k \leq \max\left\{\eta L_f, s\right\}. \tag{2.22}$$

Hiển nhiên ta có $s \leq L_k$. Xét bất đẳng thức $L_k \leq \max\{\eta L_f, s\}$. Lưu ý rằng có hai lựa chọn: $L_k = s$ hoặc $L_k > s$ và trong trường hợp thứ hai, tồn tại một chỉ số $0 \leq k' \leq k$ sao cho bất đẳng thức (2.21) không được thỏa mãn với $k = k'$ và $\frac{L_k}{\eta}$ thay thế cho L_k. Theo định lý giảm đủ, ta có thể suy ra rằng $\frac{L_k}{\eta} < L_f$, từ đó chứng minh được $L_k \leq \max\{\eta L_f, s\}$. Ta có thể viết lại chặn trên và chặn dưới cho L_k dưới dạng

$$\beta L_f \leq L_k \leq \alpha L_f,$$

trong đó

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{cố định,} \\ \max\left\{\eta, \frac{s}{L_f}\right\}, & \text{quay lui,} \end{cases} \quad \text{và} \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{cố định,} \\ \frac{s}{L_f}, & \text{quay lui.} \end{cases} \tag{2.23}$$

Tiếp theo, ta có nhận xét sau về tính đơn điệu của thuật toán đạo hàm gần kề.

Nhận xét 2.18. Vì điều kiện (2.21) được thỏa mãn cho cả hai phương pháp chọn độ dài bước, với mọi $k \geq 0$, chúng ta có thể áp dụng bất đẳng thức đạo hàm gần kề (2.19) với $\mathbf{y} = \mathbf{x} = \mathbf{x}^k$, $L = L_k$ và nhận được bất đẳng thức

$$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \geq \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\right\|^2.$$

Từ đó suy ra $F\left(\mathbf{x}^k\right) \geq F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right)$, có nghĩa là phương pháp đạo hàm gần kề cho ta một dãy giá trị hàm mục tiêu đơn điệu không tăng.

Tiếp đến, ta sẽ xem xét sự hội tụ của thuật toán đạo hàm gần kề trong trường hợp giả thiết thêm rằng f là hàm lồi. Ta bắt đầu bằng việc thiết lập tốc độ hội tụ $O(1/k)$ của dãy các giá trị hàm mục tiêu được sinh ra đến giá trị tối ưu. Tốc độ hội tụ này được gọi là tốc độ hội tụ dưới tuyến tính.

Định lí 2.19 ([7]). *Giả sử rằng Giả thiết 2.1 được thỏa mãn và f là hàm lồi. Cho $\{\mathbf{x}^k\}_{k\geq 0}$ là dãy sinh ra bởi thuật toán đạo hàm gần kề để giải bài toán (2.1) với độ dài bước cố định $L_k \equiv L_f$ với mọi $k \geq 0$ hoặc độ dài bước được chọn bởi quy trình quay lui B2. Khi đó với bất kỳ $\mathbf{x}^* \in X^*$ và $k \geq 0$ thì*

$$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F_{\text{opt}} \leq \frac{\alpha L_f \left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2}{2k}, \tag{2.24}$$

ở đó $\alpha = 1$ trong trường hợp độ dài bước cố định và $\alpha = \max\left\{\eta, \frac{s}{L_f}\right\}$ nếu quy trình quay lui được sử dụng.

Chứng minh. Với $n \geq 0$ bất kỳ, thay $L = L_n, \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ và $\mathbf{y} = \mathbf{x}^n$ vào bất đẳng thức đạo hàm gần kề trong Định lý 2.19 và kết hợp với (2.18). Trong cả hai chiến lược chọn độ dài bước, ta có

$$\begin{aligned}\frac{2}{L_n}\left(F\left(\mathbf{x}^*\right) - F\left(\mathbf{x}^{n+1}\right)\right) &\geq \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{n+1}\right\|^2 - \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^n\right\|^2 + \frac{2}{L_n}\ell_f\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^n\right)\\ &\geq \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{n+1}\right\|^2 - \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^n\right\|^2,\end{aligned}$$

ở đó tính lồi của f được sử dụng ở bất đẳng thức cuối. Cộng bất đẳng thức trên với $n = 0, 1, \ldots, k-1$ và sử dụng chặn trên $L_n \leq \alpha L_f$ với mọi $n \geq 0$, ta có

$$\frac{2}{\alpha L_f}\sum_{n=0}^{k-1}\left(F\left(\mathbf{x}^*\right) - F\left(\mathbf{x}^{n+1}\right)\right) \geq \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\right\|^2 - \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\right\|^2.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k-1}\left(F\left(\mathbf{x}^{n+1}\right) - F_{\text{opt}}\right) &\leq \frac{\alpha L_f}{2}\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\right\|^2 - \frac{\alpha L_f}{2}\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\right\|^2\\ &\leq \frac{\alpha L_f}{2}\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\right\|^2.\end{aligned}$$

Ta lại có dãy $\{F\left(\mathbf{x}^n\right)\}_{n\geq 0}$ là dãy đơn điệu không tăng, từ đó suy ra

$$k\left(F\left(\mathbf{x}^k\right) - F_{\text{opt}}\right) \leq \sum_{n=0}^{k-1}\left(F\left(\mathbf{x}^{n+1}\right) - F_{\text{opt}}\right) \leq \frac{\alpha L_f}{2}\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\right\|^2.$$

Do đó ta có

$$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F_{\text{opt}} \leq \frac{\alpha L_f \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\right\|^2}{2k}.$$

□

Nhận xét 2.20. Trong chứng minh của Định lý 2.19, ta không sử dụng dữ kiện rằng dãy độ dài bước $\{L_k\}_{k\geq 0}$ được tạo ra bởi quy trình quay lui B2 là dãy không giảm. Điều này cho thấy tính đơn điệu của dãy này không phải là điều kiện thiết yếu và ta có thể chứng minh tốc độ hội tụ như nhau cho bất kỳ quy trình quay lui nào đảm bảo thỏa mãn điều kiện (2.21) và $L_k \leq \alpha L_f$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng dãy $\left\{\mathbf{x}^k\right\}_{k\geq 0}$ được tạo ra bởi thuật toán đạo hàm gần kề sẽ hội tụ đến một nghiệm tối ưu.

Định lí 2.21 ([7]). *Giả sử rằng Giả thiết 2.1 được thỏa mãn và f là hàm lồi. Cho $\left\{\mathbf{x}^k\right\}_{k\geq 0}$ là dãy được tạo ra bởi thuật toán đạo hàm gần kề để giải Bài toán (2.1) với độ dài bước cố định trong đó $L_k \equiv L_f$ với mọi $k \geq 0$ hoặc quy trình quay lui B2. Khi đó với mọi $\mathbf{x}^* \in X^*$ và $k \geq 0$,*

$$\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right\| \leq \left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\right\|. \tag{2.25}$$

Chứng minh. Chúng ta sẽ lặp lại một số lập luận đã sử dụng trong chứng minh của Định lý 2.19. Thay thế $L = L_k, \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ và $\mathbf{y} = \mathbf{x}^k$ vào bất đẳng thức đạo hàm gần kề (2.19) và xét đến việc trong cả hai quy tắc chọn độ dài bước, điều kiện (2.18) được thỏa mãn, chúng ta có:

$$\begin{aligned}\frac{2}{L_k}\left(F\left(\mathbf{x}^*\right) - F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right)\right) &\geq \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right\|^2 - \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\right\|^2 + \frac{2}{L_k}\ell_f\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^k\right)\\ &\geq \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right\|^2 - \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\right\|^2,\end{aligned}$$

trong đó tính lồi của f được sử dụng trong bất đẳng thức cuối cùng.

Mặt khác, ta có $F\left(\mathbf{x}^*\right) - F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \leq 0$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

$\square$

Định lí 2.22 ([7]). *Giả sử rằng Giả thiết 2.1 được thỏa mãn và f là hàm lồi. Gọi $\left\{\mathbf{x}^k\right\}_{k\geq 0}$ là dãy được tạo ra bởi thuật toán đạo hàm gần kề để giải Bài toán* (2.1) *với độ dài bước cố định $L_k \equiv L_f$ với mọi $k \geq 0$ hoặc quy trình quay lui B2. Khi đó dãy $\left\{\mathbf{x}^k\right\}_{k\geq 0}$ hội tụ đến một nghiệm tối ưu của Bài toán* (2.1).

Chứng minh. Từ Định lý 2.21, để chỉ ra sự hội tụ đến một điểm trong X^*, chỉ cần chứng minh rằng bất kỳ điểm giới hạn nào của dãy $\left\{\mathbf{x}^k\right\}_{k\geq 0}$ đều phải nằm trong X^*.

Giả sử $\tilde{\mathbf{x}}$ là một điểm giới hạn của dãy. Khi đó tồn tại một dãy con $\left\{\mathbf{x}^{k_j}\right\}_{j\geq 0}$ hội tụ đến $\tilde{\mathbf{x}}$. Theo Định lý 2.19, ta có $F\left(\mathbf{x}^{k_j}\right) \to F_{\text{opt}}$ khi $j \to \infty$.

Vì F là hàm đóng nên nó cũng là hàm nửa liên tục dưới, do đó

$$F(\tilde{\mathbf{x}}) \leq \lim_{j\to\infty} F\left(\mathbf{x}^{k_j}\right) = F_{\text{opt}}\,,$$

suy ra $\tilde{\mathbf{x}} \in X^*$. $\square$

Xét độ phức tạp của thuật toán đạo hàm gần kề, ta giả sử $\left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\| \leq R$ với một vài $\mathbf{x}^* \in X^*$ và một hằng số $R > 0$. Theo bất đẳng thức (2.24), để có được nghiệm ε-tối ưu của Bài toán (2.1), ta cần có

$$\frac{\alpha L_f R^2}{2k} \leq \varepsilon,$$

điều này tương đương với

$$k \geq \frac{\alpha L_f R^2}{2\varepsilon}.$$

Do đó, để có được nghiệm ε-tối ưu, cần một số bậc $\frac{1}{\varepsilon}$ vòng lặp. Tóm tắt lại, ta có định lý sau.

Định lí 2.23 ([7]). *Dưới điều kiện giả thiết của Định lý 2.19, với mọi k thỏa mãn*

$$k \geq \left\lceil \frac{\alpha L_f R^2}{2\varepsilon} \right\rceil,$$

ta có $F\left(\mathbf{x}^k\right) - F_{opt} \leq \varepsilon$, trong đó R là chặn trên của $\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\right\|$ với một vài $\mathbf{x}^* \in X^*$.

Trong trường hợp không lồi (nghĩa là khi f không nhất thiết phải lồi), tốc độ hội tụ $O(1/\sqrt{k})$ của chuẩn ánh xạ đạo hàm đã được phát biểu trong Định lý 2.13(c). Chúng ta sẽ chứng minh rằng với giả thiết bổ sung về tính lồi của f, tốc độ này có thể được cải thiện thành $O(1/k)$.

Định lí 2.24 ([7]). *Giả sử rằng Giả thiết 2.1 được thỏa mãn và f là hàm lồi. Gọi $\left\{\mathbf{x}^k\right\}_{k\geq 0}$ là dãy được tạo ra bởi thuật toán đạo hàm gần kề để giải Bài toán (2.1) với độ dài bước cố định $L_k \equiv L_f$ với mọi $k \geq 0$ hoặc quy trình quay lui B2. Khi đó với mọi $\mathbf{x}^* \in X^*$ và $k \geq 1$,*

$$\min_{n=0,1,\ldots,k} \left\|G_{\alpha L_f}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\| \leq \frac{2\alpha^{1.5} L_f \left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|}{\sqrt{\beta} k}. \tag{2.26}$$

Ở đây, nếu độ dài bước cố định thì $\alpha = \beta = 1$ và nếu quy trình quay lui được áp dụng thì $\alpha = \max\left\{\eta, \frac{s}{L_f}\right\}, \beta = \frac{s}{L_f}$.

Chứng minh. Theo Hệ quả 2.16, với mọi $n \geq 0$, ta có

$$F\left(\mathbf{x}^n\right) - F\left(\mathbf{x}^{n+1}\right) = F\left(\mathbf{x}^n\right) - F\left(T_{L_n}\left(\mathbf{x}^n\right)\right) \geq \frac{1}{2L_n}\left\|G_{L_n}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2. \tag{2.27}$$

Theo Định lý 2.8, kết hợp với $\beta L_f \leq L_n \leq \alpha L_f$, ta suy ra

$$\begin{aligned}\frac{1}{2L_n}\left\|G_{L_n}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2=\frac{L_n}{2}\frac{\left\|G_{L_n}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2}{L_n^2}&\geq\frac{\beta L_f}{2}\frac{\left\|G_{\alpha L_f}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2}{\alpha^2L_f^2}\\&=\frac{\beta}{2\alpha^2L_f}\left\|G_{\alpha L_f}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Kết hợp (2.27) và (2.28) ta có

$$F\left(\mathbf{x}^n\right)-F_{\text{opt}}\geq F\left(\mathbf{x}^{n+1}\right)-F_{\text{opt}}+\frac{\beta}{2\alpha^2L_f}\left\|G_{\alpha L_f}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2.\tag{2.29}$$

Gọi p là một số nguyên dương bất kỳ. Tính tổng (2.29) với $n=p,p+1,\ldots,2p-1$ ta được

$$F\left(\mathbf{x}^p\right)-F_{\text{opt}}\geq F\left(\mathbf{x}^{2p}\right)-F_{\text{opt}}+\frac{\beta}{2\alpha^2L_f}\sum_{n=p}^{2p-1}\left\|G_{\alpha L_f}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2.\tag{2.30}$$

Theo Định lý 2.19, ta có $F\left(\mathbf{x}^p\right)-F_{\text{opt}}\leq\frac{\alpha L_f\left\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\right\|^2}{2p}$. Mặt khác ta có $F\left(\mathbf{x}^{2p}\right)-F_{\text{opt}}\geq 0$, kết hợp với (2.30), suy ra

$$\begin{aligned}\frac{\beta p}{2\alpha^2L_f}\min_{n=0,1,\ldots,2p-1}\left\|G_{\alpha L_f}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2&\leq\frac{\beta}{2\alpha^2L_f}\sum_{n=p}^{2p-1}\left\|G_{\alpha L_f}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2\\&\leq\frac{\alpha L_f\left\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\right\|^2}{2p}.\end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\min_{n=0,1,\ldots,2p-1}\left\|G_{\alpha L_f}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2\leq\frac{\alpha^3L_f^2\left\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\right\|^2}{\beta p^2}\tag{2.31}$$

và

$$\min_{n=0,1,\ldots,2p}\left\|G_{\alpha L_f}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2\leq\frac{\alpha^3L_f^2\left\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\right\|^2}{\beta p^2}.\tag{2.32}$$

Ta kết luận rằng với mọi $k\geq 1$ thì

$$\begin{aligned}\min_{n=0,1,\ldots,k}\left\|G_{\alpha L_f}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|^2&\leq\frac{\alpha^3L_f^2\left\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\right\|^2}{\beta\min\left\{(k/2)^2,((k+1)/2)^2\right\}}\\&=\frac{4\alpha^3L_f^2\left\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\right\|^2}{\beta k^2}.\end{aligned}$$

□

Khi giả sử thêm rằng f là L_f-trơn trên $\mathbb{E}$, ta có thể sử dụng Bổ đề 2.10 để thu được kết quả cải thiện hơn trong trường hợp độ dài bước cố định.

Định lí 2.25 ([7]). *Giả sử rằng Giả thiết 2.1 được thỏa mãn và f là hàm lồi và L_f-trơn trên $\mathbb{E}$. Gọi $\left\{\mathbf{x}^k\right\}_{k\geq 0}$ là dãy được tạo ra bởi thuật toán đạo hàm gần kề để giải Bài toán (2.1) với độ dài bước cố định trong đó $L_k \equiv L_f$ với mọi $k \geq 0$. Khi đó với mọi $\mathbf{x}^* \in X^*$ và $k \geq 0$, ta có*

(a) $\left\|G_{L_f}\left(\mathbf{x}^{k+1}\right)\right\| \leq \left\|G_{L_f}\left(\mathbf{x}^k\right)\right\|$;

(b) $\left\|G_{L_f}\left(\mathbf{x}^k\right)\right\| \leq \frac{2L_f\left\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\right\|}{k+1}$.

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 2.10 với $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$, chúng ta thu được (a). Phần (b) suy ra từ việc thay $\alpha = \beta = 1$ trong kết quả của Định lý 2.24 và lưu ý rằng theo phần (a), $\left\|G_{L_f}\left(\mathbf{x}^k\right)\right\| = \min_{n=0,1,\ldots,k}\left\|G_{L_f}\left(\mathbf{x}^n\right)\right\|$. □

2.4.3. Trường hợp lồi mạnh

Trong trường hợp f được giả thiết là σ-lồi mạnh với $\sigma > 0$, tốc độ hội tụ dưới tuyến tính có thể được cải thiện thành tốc độ hội tụ tuyến tính, nghĩa là tốc độ $O\left(q^k\right)$ với $q \in (0, 1)$. Trong mục này, chúng ta ký hiệu nghiệm tối ưu duy nhất của Bài toán (2.1) là $\mathbf{x}^*$.

Định lí 2.26 ([7]). *Giả sử rằng Giả thiết 2.1 được thỏa mãn và f là hàm σ-lồi mạnh $(\sigma > 0)$. Gọi $\left\{\mathbf{x}^k\right\}_{k\geq 0}$ là dãy được tạo ra bởi thuật toán đạo hàm gần kề để giải Bài toán (2.1) với độ dài bước cố định trong đó $L_k \equiv L_f$ với mọi*

$k \geq 0$ hoặc quy trình quay lui B2. Đặt

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \textit{độ dài bước cố định,} \\ \max\left\{\eta, \frac{s}{L_f}\right\}, & \textit{quay lui .} \end{cases}$$

Khi đó với mọi $k \geq 0$, ta có

(a) $\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right\|^2 \leq \left(1 - \frac{\sigma}{\alpha L_f}\right)\left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\right\|^2$*;*

(b) $\left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\right\|^2 \leq \left(1 - \frac{\sigma}{\alpha L_f}\right)^k \left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2$*;*

(c) $F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) - F_{opt} \leq \frac{\alpha L_f}{2}\left(1 - \frac{\sigma}{\alpha L_f}\right)^{k+1}\left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2.$

Chứng minh.

(a) Thay $L = L_k, \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ và $\mathbf{y} = \mathbf{x}^k$ vào bất đẳng thức đạo hàm gần kề (2.19) và xét đến việc trong cả hai phương pháp chọn độ dài bước, điều kiện (2.18) được thỏa mãn, ta có

$$F\left(\mathbf{x}^*\right) - F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \geq \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right\|^2 - \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\right\|^2 + \ell_f\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^k\right).$$

Vì f là σ-lồi mạnh, ta có

$$\ell_f\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^k\right) = f\left(\mathbf{x}^*\right) - f\left(\mathbf{x}^k\right) - \left\langle \nabla f\left(\mathbf{x}^k\right), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\right\rangle \geq \frac{\sigma}{2}\left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\right\|^2.$$

Do đó,

$$F\left(\mathbf{x}^*\right) - F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \geq \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right\|^2 - \frac{L_k - \sigma}{2}\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k\right\|^2. \tag{2.33}$$

Vì $\mathbf{x}^*$ là một điểm cực tiểu của F nên $F\left(\mathbf{x}^*\right) - F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \leq 0$. Từ (2.33) và kết hợp với $L_k \leq \alpha L_f$, ta có

$$\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right\|^2 \leq \left(1 - \frac{\sigma}{L_k}\right)\left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\right\|^2 \leq \left(1 - \frac{\sigma}{\alpha L_f}\right)\left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\right\|^2.$$

(b) suy ra ngay từ (a).

(c) Từ (2.33), ta có

$$\begin{aligned} F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) - F_{\text{opt}} &\le \frac{L_k - \sigma}{2}\left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\right\|^2 - \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right\|^2 \\ &\le \frac{\alpha L_f - \sigma}{2}\left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\right\|^2 \\ &= \frac{\alpha L_f}{2}\left(1 - \frac{\sigma}{\alpha L_f}\right)\left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\right\|^2 \\ &\le \frac{\alpha L_f}{2}\left(1 - \frac{\sigma}{\alpha L_f}\right)^{k+1}\left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2 \text{ (theo (b)).} \end{aligned}$$

□

Định lý 2.26 cho thấy rằng trong trường hợp lồi mạnh, thuật toán đạo hàm gần kề yêu cầu một số bậc $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ vòng lặp để đạt được nghiệm ε-tối ưu.

Định lí 2.27 ([7]). *Dưới điều kiện của Định lý 2.26, với mọi $k \ge 1$ thỏa mãn*

$$k \ge \alpha\kappa \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \alpha\kappa \log\left(\frac{\alpha L_f R^2}{2}\right),$$

ta có $F\left(\mathbf{x}^k\right) - F_{opt} \le \varepsilon$, trong đó R là chặn trên của $\left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|$ và $\kappa = \frac{L_f}{\sigma}$.

Chứng minh. Cho $k \ge 1$. Theo Định lý 2.26 và định nghĩa của κ, điều kiện đủ để bất đẳng thức $F\left(\mathbf{x}^k\right) - F_{\text{opt}} \le \varepsilon$ được thỏa mãn là

$$\frac{\alpha L_f}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha\kappa}\right)^k R^2 \le \varepsilon,$$

điều này tương đương với

$$k \log\left(1 - \frac{1}{\alpha\kappa}\right) \le \log\left(\frac{2\varepsilon}{\alpha L_f R^2}\right). \tag{2.34}$$

Vì $\log(1-x) \le -x$ với mọi $x \le 1$, suy ra rằng điều kiện đủ để (2.34) được thỏa mãn là

$$-\frac{1}{\alpha\kappa}k \le \log\left(\frac{2\varepsilon}{\alpha L_f R^2}\right),$$

tức là

$$k \geq \alpha\kappa \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \alpha\kappa \log\left(\frac{\alpha L_f R^2}{2}\right).$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chương 3

Các dạng tăng tốc của thuật toán đạo hàm gần kề

3.1 FISTA

3.1.1. Phương pháp

Thuật toán đạo hàm gần kề đạt được tốc độ hội tụ $O(1/k)$ đối với giá trị hàm mục tiêu tới giá trị tối ưu. Trong phần này, chúng ta sẽ trình bày cách tăng tốc phương pháp này để đạt được tốc độ hội tụ $O\left(1/k^2\right)$. Phương pháp này được gọi là "thuật toán đạo hàm gần kề dạng tăng tốc", hay còn được gọi là "FISTA", viết tắt của "fast iterative shrinkage-thresholding algorithm". Phương pháp này được phát triển và phân tích bởi Beck và Teboulle trong [1].

Chúng ta sẽ giả sử rằng f là hàm lồi và L_f-trơn trên $\mathbb{E}$. Ta tập hợp tất cả các tính chất cần thiết trong giả thiết sau.

Giả thiết 3.1 ([1]).

(A) $g : \mathbb{E} \to (-\infty, \infty]$ *là hàm đóng, lồi và chính thường.*

(B) $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *là hàm* L_f*-trơn và lồi.*

(C) Tập nghiệm tối ưu của Bài toán (2.1) khác rỗng và được ký hiệu là X^*. Giá trị tối ưu của bài toán được ký hiệu là F_{opt}.

Dưới đây là mô tả của thuật toán FISTA.

Thuật toán 3.1.1 (Thuật toán FISTA, [1])**.**
Đầu vào: $(f, g, \mathbf{x}^0)$, trong đó f và g thỏa mãn các điều kiện (A) và (B) trong Giả thiết 3.1 và $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{E}$.
Khởi tạo: Đặt $\mathbf{y}^0 = \mathbf{x}^0$ và $t_0 = 1$.
Bước tổng quát: Với mọi $k = 0, 1, 2, \ldots$, ta thực hiện các bước sau:

- Chọn $L_k > 0$;
- Cập nhật $\mathbf{x}^{k+1} = \text{prox}_{\frac{1}{L_k} g}\left(\mathbf{y}^k - \frac{1}{L_k}\nabla f\left(\mathbf{y}^k\right)\right)$;
- Tính $t_{k+1} = \frac{1+\sqrt{1+4t_k^2}}{2}$;
- Tính $\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{x}^{k+1} + \left(\frac{t_k - 1}{t_{k+1}}\right)\left(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right)$.

Như với thuật toán đạo hàm gần kề ISTA, chúng ta sẽ xem xét hai phương pháp chọn độ dài bước L_k: cố định và quay lui . Quy trình quay lui để chọn độ dài bước được gọi là "quy trình quay lui B3". Quy trình này tương tự như quy trình B2 với sự khác biệt duy nhất là nó được áp dụng cho $\mathbf{y}^k$ thay vì với $\mathbf{x}^k$.

- **Độ dài bước cố định:** $L_k = L_f$ với mọi k.
- **Quy trình quay lui B3:** Quy trình này yêu cầu hai tham số (s, η), trong đó $s > 0$ và $\eta > 1$. Đặt $L_{-1} = s$. Tại lần lặp k, việc chọn L_k được thực hiện như sau:

Đầu tiên, L_k được đặt bằng L_{k-1}.

Sau đó, nếu

$$f\left(T_{L_k}\left(\mathbf{y}^k\right)\right) > f\left(\mathbf{y}^k\right) + \left\langle \nabla f\left(\mathbf{y}^k\right), T_{L_k}\left(\mathbf{y}^k\right) - \mathbf{y}^k \right\rangle + \frac{L_k}{2}\left\|T_{L_k}\left(\mathbf{y}^k\right) - \mathbf{y}^k\right\|^2,$$

ta cập nhật $L_k := \eta L_k$.

Nói cách khác, độ dài bước được chọn là $L_k = L_{k-1}\eta^{i_k}$, trong đó i_k là số nguyên không âm nhỏ nhất sao cho

$$f\left(T_{L_{k-1}\eta^{i_k}}\left(\mathbf{y}^k\right)\right) \leq f\left(\mathbf{y}^k\right) + \left\langle \nabla f\left(\mathbf{y}^k\right), T_{L_{k-1}\eta^{i_k}}\left(\mathbf{y}^k\right) - \mathbf{y}^k \right\rangle + \frac{L_k}{2}\left\|T_{L_{k-1}\eta^{i_k}}\left(\mathbf{y}^k\right) - \mathbf{y}^k\right\|^2.$$

Trong cả hai quy tắc chọn độ dài bước, bất đẳng thức sau đây được thỏa mãn với mọi $k \geq 0$:

$$f\left(T_{L_k}\left(\mathbf{y}^k\right)\right) \leq f\left(\mathbf{y}^k\right) + \left\langle \nabla f\left(\mathbf{y}^k\right), T_{L_k}\left(\mathbf{y}^k\right) - \mathbf{y}^k \right\rangle + \frac{L_k}{2}\left\|T_{L_k}\left(\mathbf{y}^k\right) - \mathbf{y}^k\right\|^2. \tag{3.1}$$

Nhận xét 3.2. Vì quy trình quay lui B3 giống hệt quy trình B2 (chỉ khác là được áp dụng trên $\mathbf{y}^k$), các lập luận của Nhận xét 2.17 vẫn đúng và ta có

$$\alpha L_f \geq L_k \geq \beta L_f,$$

trong đó α và β được định nghĩa trong (2.23).

Bổ đề tiếp theo chỉ ra chặn dưới của dãy $\{t_k\}_{k\geq 0}$. Kết quả này sẽ được sử dụng để chứng minh sự hội tụ thuật toán.

Bổ đề 3.3 ([1]). *Gọi $\{t_k\}_{k\geq 0}$ là dãy được định nghĩa bởi*

$$t_0 = 1, \quad t_{k+1} = \frac{1+\sqrt{1+4t_k^2}}{2}, \quad k \geq 0.$$

Khi đó $t_k \geq \frac{k+2}{2}$ với mọi $k \geq 0$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo k.

Rõ ràng, với $k = 0$, ta có $t_0 = 1 \geq \frac{0+2}{2}$. Giả sử rằng mệnh đề đúng với k, nghĩa là $t_k \geq \frac{k+2}{2}$. Ta sẽ chứng minh rằng $t_{k+1} \geq \frac{k+3}{2}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$t_{k+1} = \frac{1+\sqrt{1+4t_k^2}}{2} \geq \frac{1+\sqrt{1+(k+2)^2}}{2} \geq \frac{1+\sqrt{(k+2)^2}}{2} = \frac{k+3}{2}.$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh. □

3.1.2. Sự hội tụ của FISTA

Định lí 3.4 ([1]). *Giả sử rằng Giả thiết 3.1 được thỏa mãn. Gọi $\left\{\mathbf{x}^k\right\}_{k\geq 0}$ là dãy được tạo ra bởi FISTA để giải Bài toán (2.1) với độ dài bước cố định trong đó $L_k \equiv L_f$ với mọi $k \geq 0$ hoặc quy trình quay lui B3. Khi đó, với mọi $\mathbf{x}^* \in X^*$ và $k \geq 1$,*

$$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F_{\text{opt}} \leq \frac{2\alpha L_f \left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2}{(k+1)^2},$$

trong đó $\alpha = 1$ với độ dài bước cố định và $\alpha = \max\left\{\eta, \frac{s}{L_f}\right\}$ với quy trình quay lui.

Chứng minh. Cho $k \geq 1$. Thay $\mathbf{x} = t_k^{-1}\mathbf{x}^* + \left(1 - t_k^{-1}\right)\mathbf{x}^k$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}^k$ và $L = L_k$ vào bất đẳng thức đạo hàm gần kề (2.19), kết hợp với bất đẳng thức (3.1) được thỏa mãn và f là hàm lồi, ta có

$$\begin{aligned}
&F\left(t_k^{-1}\mathbf{x}^* + \left(1-t_k^{-1}\right)\mathbf{x}^k\right) - F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right)\\
&\geq \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \left(t_k^{-1}\mathbf{x}^* + \left(1-t_k^{-1}\right)\mathbf{x}^k\right)\right\|^2 - \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{y}^k - \left(t_k^{-1}\mathbf{x}^* + \left(1-t_k^{-1}\right)\mathbf{x}^k\right)\right\|^2\\
&= \frac{L_k}{2t_k^2}\left\|t_k\mathbf{x}^{k+1} - \left(\mathbf{x}^* + (t_k-1)\mathbf{x}^k\right)\right\|^2 - \frac{L_k}{2t_k^2}\left\|t_k\mathbf{y}^k - \left(\mathbf{x}^* + (t_k-1)\mathbf{x}^k\right)\right\|^2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Do tính lồi của F, ta có

$$F\left(t_k^{-1}\mathbf{x}^* + \left(1-t_k^{-1}\right)\mathbf{x}^k\right) \le t_k^{-1}F\left(\mathbf{x}^*\right) + \left(1-t_k^{-1}\right)F\left(\mathbf{x}^k\right).$$

Do đó, đặt $v_n \equiv F\left(\mathbf{x}^n\right) - F_{\text{opt}}$ với mọi $n \ge 0$, ta có

$$\begin{aligned}
&F\left(t_k^{-1}\mathbf{x}^* + \left(1-t_k^{-1}\right)\mathbf{x}^k\right) - F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right)\\
&\le \left(1-t_k^{-1}\right)\left(F\left(\mathbf{x}^k\right) - F\left(\mathbf{x}^*\right)\right) - \left(F\left(\mathbf{x}_{k+1}\right) - F\left(\mathbf{x}^*\right)\right)\\
&= \left(1-t_k^{-1}\right)v_k - v_{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Mặt khác, ta có $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k + \left(\frac{t_{k-1}-1}{t_k}\right)\left(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\right)$, suy ra

$$\begin{aligned}
&\left\|t_k\mathbf{y}^k - \left(\mathbf{x}^* + \left(t_k-1\right)\mathbf{x}^k\right)\right\|^2\\
&= \left\|t_k\mathbf{x}^k + \left(t_{k-1}-1\right)\left(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\right) - \left(\mathbf{x}^* + \left(t_k-1\right)\mathbf{x}^k\right)\right\|^2\\
&= \left\|t_{k-1}\mathbf{x}^k - \left(\mathbf{x}^* + \left(t_{k-1}-1\right)\mathbf{x}^{k-1}\right)\right\|^2.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Kết hợp (3.2), (3.3) và (3.4), ta có

$$\left(t_k^2 - t_k\right)v_k - t_k^2 v_{k+1} \ge \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{u}^{k+1}\right\|^2 - \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{u}^k\right\|^2,$$

trong đó $\mathbf{u}^n = t_{n-1}\mathbf{x}^n - \left(\mathbf{x}^* + \left(t_{n-1}-1\right)\mathbf{x}^{n-1}\right)$ với mọi $n \ge 0$. Theo quy tắc cập nhật t_{k+1}, ta có $t_k^2 - t_k = t_{k-1}^2$, do đó

$$\frac{2}{L_k}t_{k-1}^2 v_k - \frac{2}{L_k}t_k^2 v_{k+1} \ge \left\|\mathbf{u}^{k+1}\right\|^2 - \left\|\mathbf{u}^k\right\|^2.$$

Vì $L_k \ge L_{k-1}$, ta có suy ra

$$\frac{2}{L_{k-1}}t_{k-1}^2 v_k - \frac{2}{L_k}t_k^2 v_{k+1} \ge \left\|\mathbf{u}^{k+1}\right\|^2 - \left\|\mathbf{u}^k\right\|^2.$$

Do đó,

$$\left\|\mathbf{u}^{k+1}\right\|^2 + \frac{2}{L_k}t_k^2 v_{k+1} \le \left\|\mathbf{u}^k\right\|^2 + \frac{2}{L_{k-1}}t_{k-1}^2 v_k.$$

Từ đó, với mọi $k \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{u}^k\right\|^2 + \frac{2}{L_{k-1}} t_{k-1}^2 v_k &\leq \left\|\mathbf{u}^1\right\|^2 + \frac{2}{L_0} t_0^2 v_1 \\ &= \left\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*\right\|^2 + \frac{2}{L_0}\left(F\left(\mathbf{x}^1\right) - F_{\text{opt}}\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Thay $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*, \mathbf{y} = \mathbf{y}^0$ và $L = L_0$ vào bất đẳng thức đạo hàm gần kề (2.19), kết hợp với tính lồi của f, ta có

$$\frac{2}{L_0}\left(F\left(\mathbf{x}^*\right) - F\left(\mathbf{x}^1\right)\right) \geq \left\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*\right\|^2 - \left\|\mathbf{y}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2.$$

Vì $y^0 = x^0$, suy ra

$$\left\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*\right\|^2 + \frac{2}{L_0}\left(F\left(\mathbf{x}^1\right) - F_{\text{opt}}\right) \leq \left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2.$$

Kết hợp bất đẳng thức cuối cùng với (3.5), ta có

$$\frac{2}{L_{k-1}} t_{k-1}^2 v_k \leq \left\|\mathbf{u}^k\right\|^2 + \frac{2}{L_{k-1}} t_{k-1}^2 v_k \leq \left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2.$$

Do đó, từ $L_{k-1} \leq \alpha L_f$, định nghĩa của v_k và Bổ đề 3.3,

$$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F_{\text{opt}} \leq \frac{L_{k-1}\left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2}{2t_{k-1}^2} \leq \frac{2\alpha L_f\left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2}{(k+1)^2}.$$

□

Nhìn vào thuật toán FISTA, công thức cập nhật t_k khá đặc biệt. Câu hỏi đặt ra là ngoài công thức đó, có thể có công thức cập nhật khác cho t_k mà vẫn đảm bảo tốc độ hội tụ của thuật toán hay không.

Nhận xét 3.5. Từ chứng minh của Định lý 3.4 cho thấy rằng kết quả là đúng nếu $\{t_k\}_{k\geq 0}$ là bất kỳ dãy nào thỏa mãn hai tính chất sau với mọi $k \geq 0$:

(a) $t_k \geq \frac{k+2}{2}$;

(b) $t_{k+1}^2 - t_{k+1} \leq t_k^2$.

Dãy $t_k = \frac{k+2}{2}$ thỏa mãn hai tính chất này. Tính đúng đắn của (a) là hiển nhiên; để chứng minh (b), ta có

$$\begin{aligned} t_{k+1}^2 - t_{k+1} = t_{k+1}\left(t_{k+1}-1\right) &= \frac{k+3}{2} \cdot \frac{k+1}{2} = \frac{k^2+4k+3}{4} \\ &\leq \frac{k^2+4k+4}{4} = \frac{(k+2)^2}{4} = t_k^2. \end{aligned}$$

Nhận xét 3.6. FISTA có tốc độ hội tụ $O\left(1/k^2\right)$ đối với giá trị hàm mục tiêu, trong khi ISTA có tốc độ hội tụ $O(1/k)$. Sự cải thiện này đạt được mặc dù các bước tính toán tại mỗi lần lặp của cả hai phương pháp về cơ bản là giống nhau: một lần tính đạo hàm và một lần tính toán tử đạo hàm gần kề.

3.2 MFISTA

FISTA không phải là một phương pháp đơn điệu, có nghĩa là dãy các giá trị hàm mà nó tạo ra không nhất thiết là dãy không tăng. Trong phần này, ta xem xét phiên bản đơn điệu của FISTA, gọi là MFISTA, đây là một phương pháp giảm và đồng thời giữ nguyên tốc độ hội tụ như FISTA.

Thuật toán 3.2.1 (MFISTA, [6])**.**

Đầu vào: $\left(f, g, \mathbf{x}^0\right)$, trong đó f và g thỏa mãn các điều kiện (A) và (B) trong Giả thiết 3.1 và $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{E}$.

Khởi tạo: Đặt $\mathbf{y}^0 = \mathbf{x}^0$ và $t_0 = 1$.

Bước tổng quát: Với mọi $k = 0, 1, 2, \ldots$, thực hiện các bước sau:

- Chọn $L_k > 0$;
- Tính $\mathbf{z}^k = \operatorname{prox}_{\frac{1}{L_k} g}\left(\mathbf{y}^k - \frac{1}{L_k}\nabla f\left(\mathbf{y}^k\right)\right)$;
- Chọn $\mathbf{x}^{k+1} \in \mathbb{E}$ sao cho $F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \leq \min\left\{F\left(\mathbf{z}^k\right), F\left(\mathbf{x}^k\right)\right\}$;

- Đặt $t_{k+1} = \frac{1+\sqrt{1+4t_k^2}}{2}$;
- Tính $\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{x}^{k+1} + \frac{t_k}{t_{k+1}} \left(\mathrm{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\right) + \left(\frac{t_k - 1}{t_{k+1}}\right) \left(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right)$.

Nhận xét 3.7. Lựa chọn $\mathbf{x}^{k+1} \in \operatorname{argmin}\left\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} = \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k\right\}$ là một phương pháp rất đơn giản đảm bảo điều kiện $F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \leq \min\left\{F\left(\mathbf{z}^k\right), F\left(\mathbf{x}^k\right)\right\}$. Chúng ta cũng lưu ý rằng sự hội tụ được thiết lập trong Định lý 3.2 chỉ yêu cầu điều kiện $F\left(x^{k+1}\right) \leq F\left(\mathbf{z}^k\right)$.

Sự hội tụ của MFISTA được chứng minh bằng việc điều chỉnh một chút chứng minh của Định lý 3.4.

Định lí 3.8 ([6]). *Giả sử rằng Giả thiết 3.1 được thỏa mãn. Cho $\left\{\mathbf{x}^k\right\}_{k\geq 0}$ là dãy được tạo ra bởi MFISTA để giải Bài toán (2.1) với độ dài bước cố định trong đó $L_k \equiv L_f$ với mọi $k \geq 0$ hoặc quy trình quay lui B3. Khi đó, với mọi $\mathbf{x}^* \in X^*$ và $k \geq 1$,*

$$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F_{opt} \leq \frac{2\alpha L_f \left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2}{(k+1)^2},$$

trong đó $\alpha = 1$ trong trường hợp độ dài bước cố định và $\alpha = \max\left\{\eta, \frac{s}{L_f}\right\}$ với quy trình quay lui.

Chứng minh. Cho $k \geq 1$. Thay $\mathbf{x} = t_k^{-1}\mathbf{x}^* + \left(1 - t_k^{-1}\right)\mathbf{x}^k$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}^k$ và $L = L_k$ vào bất đẳng thức đạo hàm gần kề (2.19), bất đẳng thức (3.1) được thỏa mãn và f là hàm lồi, ta có

$$\begin{aligned} F\left(t_k^{-1}\mathbf{x}^* + \left(1 - t_k^{-1}\right)\mathbf{x}^k\right) - F\left(\mathbf{z}^k\right) &\geq \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{z}^k - \left(t_k^{-1}\mathbf{x}^* + \left(1 - t_k^{-1}\right)\mathbf{x}^k\right)\right\|^2 \\ &\quad - \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{y}^k - \left(t_k^{-1}\mathbf{x}^* + \left(1 - t_k^{-1}\right)\mathbf{x}^k\right)\right\|^2 \\ = \frac{L_k}{2t_k^2}\left\|t_k\mathbf{z}^k - \left(\mathbf{x}^* + (t_k - 1)\mathbf{x}^k\right)\right\|^2 &- \frac{L_k}{2t_k^2}\left\|t_k\mathbf{y}^k - \left(\mathbf{x}^* + (t_k - 1)\mathbf{x}^k\right)\right\|^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Do tính lồi của F, ta có

$$F\left(t_k^{-1}\mathbf{x}^* + \left(1 - t_k^{-1}\right)\mathbf{x}^k\right) \leq t_k^{-1}F\left(\mathbf{x}^*\right) + \left(1 - t_k^{-1}\right)F\left(\mathbf{x}^k\right).$$

Do đó, đặt $v_n \equiv F\left(\mathbf{x}^n\right) - F_{\text{opt}}$ với mọi $n \geq 0$ và kết hợp với $F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \leq F\left(\mathrm{z}^k\right)$, suy ra rằng

$$\begin{aligned} &F\left(t_k^{-1}\mathbf{x}^* + \left(1 - t_k^{-1}\right)\mathbf{x}^k\right) - F\left(\mathbf{z}^k\right) \leq \\ &\leq \left(1 - t_k^{-1}\right)\left(F\left(\mathbf{x}^k\right) - F\left(\mathbf{x}^*\right)\right) - \left(F\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) - F\left(\mathbf{x}^*\right)\right) \\ &= \left(1 - t_k^{-1}\right)v_k - v_{k+1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Mặt khác, từ $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k + \frac{t_{k-1}}{t_k}\left(\mathrm{z}^{k-1} - \mathbf{x}^k\right) + \left(\frac{t_{k-1}-1}{t_k}\right)\left(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\right)$, ta có

$$t_k\mathbf{y}^k - \left(\mathbf{x}^* + \left(t_k - 1\right)\mathbf{x}^k\right) = t_{k-1}\mathbf{z}^{k-1} - \left(\mathbf{x}^* + \left(t_{k-1} - 1\right)\mathbf{x}^{k-1}\right). \tag{3.8}$$

Kết hợp (3.6), (3.7) và (3.8), ta có

$$\left(t_k^2 - t_k\right)v_k - t_k^2 v_{k+1} \geq \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{u}^{k+1}\right\|^2 - \frac{L_k}{2}\left\|\mathbf{u}^k\right\|^2,$$

trong đó $\mathbf{u}^n = t_{n-1}\mathbf{z}^{n-1} - \left(\mathbf{x}^* + \left(t_{n-1} - 1\right)\mathbf{x}^{n-1}\right)$ với mọi $n \geq 0$. Theo quy tắc cập nhật của t_{k+1}, ta có $t_k^2 - t_k = t_{k-1}^2$, do đó

$$\frac{2}{L_k}t_{k-1}^2 v_k - \frac{2}{L_k}t_k^2 v_{k+1} \geq \left\|\mathbf{u}^{k+1}\right\|^2 - \left\|\mathbf{u}^k\right\|^2.$$

Vì $L_k \geq L_{k-1}$, ta có thể suy ra rằng

$$\frac{2}{L_{k-1}}t_{k-1}^2 v_k - \frac{2}{L_k}t_k^2 v_{k+1} \geq \left\|\mathbf{u}^{k+1}\right\|^2 - \left\|\mathbf{u}^k\right\|^2$$

Do đó,

$$\left\|\mathbf{u}^{k+1}\right\|^2 + \frac{2}{L_k}t_k^2 v_{k+1} \leq \left\|\mathbf{u}^k\right\|^2 + \frac{2}{L_{k-1}}t_{k-1}^2 v_k,$$

suy ra với mọi $k \geq 1$,

$$\left\|\mathbf{u}^k\right\|^2 + \frac{2}{L_{k-1}}t_{k-1}^2 v_k \leq \left\|\mathbf{u}^1\right\|^2 + \frac{2}{L_0}t_0^2 v_1 = \left\|\mathbf{z}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2 + \frac{2}{L_0}\left(F\left(\mathbf{x}^1\right) - F_{\text{opt}}\right). \tag{3.9}$$

Thay $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}^0$ và $L = L_0$ vào bất đẳng thức đạo hàm gần kề (2.19), vì tính lồi của f, ta có

$$\frac{2}{L_0}\left(F\left(\mathbf{x}^*\right) - F\left(\mathrm{z}^0\right)\right) \geq \left\|\mathrm{z}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2 - \left\|\mathbf{y}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2,$$

Thêm vào đó $\mathbf{y}^0 = \mathbf{x}^0$ và $F\left(\mathbf{x}^1\right) \leq F\left(\mathbf{z}^0\right)$, suy ra

$$\left\|\mathrm{z}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2 + \frac{2}{L_0}\left(F\left(\mathbf{x}^1\right) - F_{\text{opt}}\right) \leq \left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2.$$

Kết hợp với (3.9), ta có

$$\frac{2}{L_{k-1}} t_{k-1}^2 v_k \leq \left\|\mathbf{u}^k\right\|^2 + \frac{2}{L_{k-1}} t_{k-1}^2 v_k \leq \left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2.$$

Do đó, từ $L_{k-1} \leq \alpha L_f$, định nghĩa của v_k và Bổ đề 3.3, ta có

$$F\left(\mathbf{x}^k\right) - F_{\text{opt}} \leq \frac{L_{k-1}\left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2}{2t_{k-1}^2} \leq \frac{2\alpha L_f\left\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\right\|^2}{(k+1)^2}.$$

□

3.3 Restarted FISTA

Giả sử ngoài Giả thiết 3.1, f còn là hàm σ-lồi mạnh với $\sigma > 0$. Nhớ lại rằng theo Định lý 2.27, thuật toán đạo hàm gần kề đạt được nghiệm ε-tối ưu sau số vòng lặp có bậc $O\left(\kappa \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ với $\kappa = \frac{L_f}{\sigma}$. Câu hỏi đặt ra là kết quả độ phức tạp này có được cải thiện không nếu ta sử dụng FISTA thay vì ISTA. Ở phần này, ta sẽ xem xét một phiên bản FISTA cho kết quả độ phức tạp cải thiện hơn nhờ tích hợp việc khởi động lại sau một số vòng lặp nhất định, gọi là Restarted-FISTA.

Thuật toán 3.3.1 (Restarted FISTA, [7])**.**

Khởi tạo: chọn $\mathbf{z}^{-1} \in \mathbb{E}$ và một số nguyên dương N.

Đặt $\mathbf{z}^0 = T_{L_f}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$.

Bước tổng quát $(k \geq 0)$:

- Thực hiện N vòng lặp của FISTA với kích thước bước cố định $(L_k \equiv L_f)$ và đầu vào $\left(f, g, \mathbf{z}^k\right)$ và thu được dãy $\{\mathbf{x}^n\}_{n=0}^N$;
- Đặt $\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{x}^N$.

Thuật toán này về cơ bản bao gồm các vòng lặp ngoài và mỗi vòng sử dụng N vòng lặp của FISTA. Để tránh nhầm lẫn, các vòng lặp ngoài sẽ được gọi là các chu kỳ. Định lý 3.9 dưới đây cho thấy rằng một số bậc $O\left(\sqrt{\kappa}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ vòng lặp FISTA là đủ để đảm bảo đạt được một nghiệm ε-tối ưu.

Định lí 3.9 ([7]). *Giả sử rằng Giả thiết 3.1 được thỏa mãn và f là hàm σ-lồi mạnh với $(\sigma > 0)$. Gọi $\left\{\mathbf{z}^k\right\}_{k\geq 0}$ là dãy được tạo ra bởi thuật toán Restared-FISTA với $N = \lceil\sqrt{8\kappa} - 1\rceil$, trong đó $\kappa = \frac{L_f}{\sigma}$. Cho R là chặn trên của $\left\|\mathbf{z}^{-1} - \mathbf{x}^*\right\|$, trong đó $\mathbf{x}^*$ là nghiệm tối ưu duy nhất của Bài toán (2.1). Khi đó:*

(a) Với mọi $k \geq 0$,

$$F\left(\mathbf{z}^k\right) - F_{opt} \leq \frac{L_f R^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(b) Sau k vòng lặp của FISTA với k thỏa mãn

$$k \geq \sqrt{8\kappa}\left(\frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log(2)} + \frac{\log\left(L_f R^2\right)}{\log(2)}\right),$$

ta được một nghiệm ε-tối ưu ở cuối chu kỳ cuối cùng, tức là,

$$F\left(\mathbf{z}^{\left\lfloor\frac{k}{N}\right\rfloor}\right) - F_{opt} \leq \varepsilon.$$

Chứng minh.

(a) Theo Định lý 3.4, với mọi $n \geq 0$,

$$F\left(\mathbf{z}^{n+1}\right) - F_{\text{opt}} \leq \frac{2L_f \left\|\mathbf{z}^n - \mathbf{x}^*\right\|^2}{(N+1)^2}. \tag{3.10}$$

Vì f là hàm σ-lồi mạnh, ta có

$$F\left(\mathbf{z}^n\right) - F_{\text{opt}} \geq \frac{\sigma}{2}\left\|\mathbf{z}^n - \mathbf{x}^*\right\|^2.$$

Kết hợp với (3.10) và $\kappa = L_f/\sigma$, suy ra

$$F\left(\mathbf{z}^{n+1}\right) - F_{\text{opt}} \leq \frac{4\kappa\left(F\left(\mathbf{z}^n\right) - F_{\text{opt}}\right)}{(N+1)^2}. \tag{3.11}$$

Vì $N \geq \sqrt{8\kappa} - 1$, suy ra $\frac{4\kappa}{(N+1)^2} \leq \frac{1}{2}$ và do đó theo (3.11) ta có

$$F\left(\mathbf{z}^{n+1}\right) - F_{\text{opt}} \leq \frac{1}{2}\left(F\left(\mathbf{z}^n\right) - F_{\text{opt}}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức trên cho $n = 0, 1, \ldots, k-1$, ta suy ra

$$F\left(\mathbf{z}^k\right) - F_{\text{opt}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(F\left(\mathbf{z}^0\right) - F_{\text{opt}}\right). \tag{3.12}$$

Mặt khác ta có $\mathbf{z}^0 = T_{L_f}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức đạo hàm gần kề (2.19) với $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*, \mathbf{y} = \mathrm{z}^{-1}, L = L_f$ và f là hàm lồi, ta có

$$F\left(\mathbf{x}^*\right) - F\left(\mathbf{z}^0\right) \geq \frac{L_f}{2}\left\|\mathbf{x}^* - \mathrm{z}^0\right\|^2 - \frac{L_f}{2}\left\|\mathbf{x}^* - \mathrm{z}^{-1}\right\|^2,$$

do đó

$$F\left(\mathbf{z}^0\right) - F_{\text{opt}} \leq \frac{L_f}{2}\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{z}^{-1}\right\|^2 \leq \frac{L_f R^2}{2}. \tag{3.13}$$

Kết hợp (3.12) và (3.13), ta có

$$F\left(\mathbf{z}^k\right) - F_{\text{opt}} \leq \frac{L_f R^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(b) Nếu k vòng lặp của FISTA được thực hiện, thì $\left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor$ chu kỳ đã hoàn thành. Theo phần (a), ta có

$$F\left(\mathbf{z}^{\left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor}\right) - F_{\text{opt}} \leq \frac{L_f R^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor} \leq L_f R^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{N}}.$$

Do đó, điều kiện đủ để bất đẳng thức $F\left(\mathbf{z}^{\left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor}\right) - F_{\text{opt}} \leq \varepsilon$ được thỏa mãn là

$$L_f R^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{N}} \leq \varepsilon,$$

điều này tương đương với bất đẳng thức

$$k \geq N\left(\frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log(2)} + \frac{\log\left(L_f R^2\right)}{\log(2)}\right),$$

do $N = \lceil \sqrt{8\kappa} - 1 \rceil \leq \sqrt{8\kappa}$.

$\square$

Chương 4

Một số ứng dụng và thử nghiệm số

Trong chương này, ta thử nghiệm và so sánh tốc độ hội tụ của thuật toán đạo hàm gần kề và các dạng tăng tốc của nó trong bài toán và ứng dụng cụ thể.

4.1 Bài toán bình phương tối thiểu chỉnh hóa l_1

Xét bài toán:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1, \tag{4.1}$$

trong đó $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, và $\lambda > 0$.

Bài toán này chính là bài toán tối ưu hàm tổng với

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2^2 \quad \text{và} \quad g(\mathbf{x}) = \lambda\|\mathbf{x}\|_1.$$

Hàm f là L_f-trơn với

$$L_f = \lambda_{\max}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}).$$

Công thức tại bước cập nhật của phương pháp đạo hàm gần kề như sau:

$$\mathbf{x}^{k+1} = T_{\frac{\lambda}{L_k}}\left(\mathbf{x}^k - \frac{1}{L_k}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b})\right).$$

Bước cập nhật của phương pháp FISTA có dạng như sau:

(a) Tính
$$\mathbf{y}^{k+1} = T_{\frac{\lambda}{L_k}}\left(\mathbf{x}^k - \frac{1}{L_k}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b})\right);$$

(b) Tính
$$t_{k+1} = \frac{1+\sqrt{1+4t_k^2}}{2};$$

(c) Cập nhật
$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{y}^{k+1} + \left(\frac{t_k - 1}{t_{k+1}}\right)(\mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{y}^k).$$

Bước cập nhật đối với thuật toán MFISTA như sau:

(a) Tính
$$\mathbf{z}^k = T_{\frac{\lambda}{L_k}}\left(\mathbf{y}^k - \frac{1}{L_k}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{y}^k - \mathbf{b})\right);$$

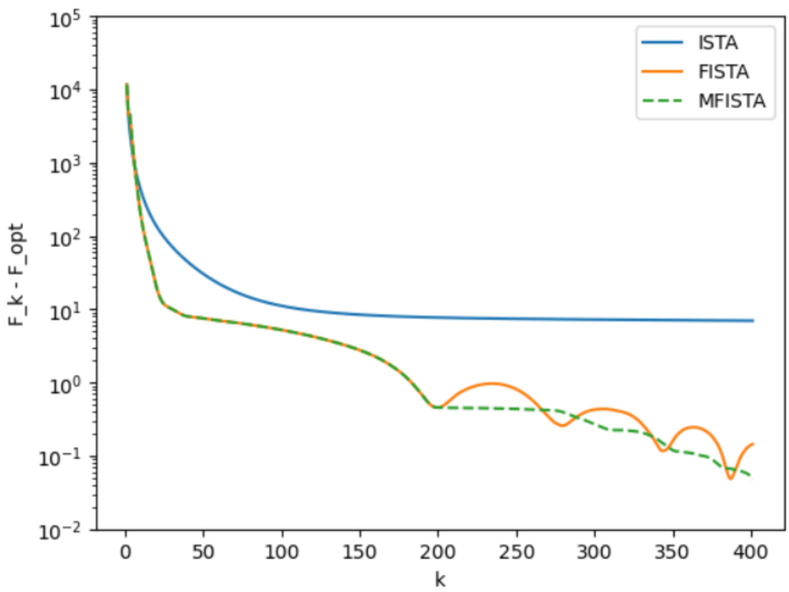
(b) Cập nhật $\mathbf{x}^{k+1} = \mathrm{argmin}\{F(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \{\mathbf{z}^k, \mathbf{x}^k\}\}$;

(c) Tính $t_{k+1} = \frac{1+\sqrt{1+4t_k^2}}{2}$;

(d) Tính
$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{x}^{k+1} + \frac{t_k}{t_{k+1}}\left(\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\right) + \left(\frac{t_k - 1}{t_{k+1}}\right)\left(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right).$$

Ví dụ 4.1. Để minh họa sự khác biệt về hiệu suất của các thuật toán, ta xét một ví dụ của bài toán (4.1) với $\lambda = 0.1$. Ma trận **A** có kích thước 150×200 với các phần tử được chọn ngẫu nhiên theo phân phối chuẩn. Ta giả sử $\mathbf{x_{true}} = \mathbf{e_{13}} - \mathbf{e_4}$ và chọn $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x_{true}}$. Ta lần lượt thử các thuật toán đạo hàm gần kề ISTA và hai dạng tăng tốc là FISTA và MFISTA cho bài toán này. Ta kỳ vọng rằng các thuật toán này sẽ dẫn tới nghiệm tối ưu gần với $\mathbf{x_{true}}$ mà ta xét.

Hình 4.1 là kết quả chạy các thuật toán trong 400 vòng lặp đầu tiên, trong đó ta đặt $F_{opt} = F(\mathbf{x_{true}})$. Ta có thể nhận thấy sự khác biệt rõ ràng về tốc



Hình 4.1: Kết quả thực nghiệm với bài toán bình phương tối thiểu chỉnh hóa l_1

độ hội tụ giữa FISTA và MFISTA so với thuật toán đạo hàm gần kề (ISTA). Đồng thời, ở ví dụ này, ta cũng có thể thấy được sự khác biệt giữa FISTA và MFISTA về sự đơn điệu không tăng của giá trị hàm mục tiêu qua các vòng lặp.

4.2 Khử nhiễu ảnh

Khử nhiễu ảnh là quá trình loại bỏ nhiễu khỏi hình ảnh mà vẫn giữ lại được các đặc trưng của ảnh gốc càng nhiều càng tốt. Nhiễu trong hình ảnh có thể do nhiều nguyên nhân gây ra, bao gồm nhiễu nhiệt trong cảm biến máy ảnh, lỗi truyền dữ liệu hoặc các tác động khác.

Một số phương pháp khử nhiễu ảnh:

1. Khử nhiễu bằng bộ lọc trung bình: Bộ lọc trung bình thay thế mỗi pixel trong ảnh bằng giá trị trung bình của các pixel xung quanh nó.

- Ưu điểm: Đơn giản và nhanh chóng.
- Nhược điểm: Làm mờ các chi tiết và cạnh trong ảnh.

2. Khử nhiễu bằng bộ lọc trung vị: Bộ lọc trung vị thay thế mỗi pixel với giá trị trung vị của các pixel xung quanh nó. Bộ lọc này hiệu quả với nhiễu đốm (salt-and-pepper noise).
   - Ưu điểm: Hiệu quả với nhiễu đốm mà không làm mờ cạnh.
   - Nhược điểm: Hiệu quả giảm khi gặp nhiễu gauss hoặc nhiễu phức tạp.
3. Bộ lọc Gauss: Bộ lọc Gauss sử dụng hàm phân phối Gauss để làm mờ ảnh. Nó giúp làm mịn ảnh và loại bỏ nhiễu nhưng giữ lại nhiều chi tiết hơn so với bộ lọc trung bình.
   - Ưu điểm: Giữ lại được nhiều chi tiết hơn, làm mịn ảnh một cách tự nhiên.
   - Nhược điểm: Vẫn có thể làm mờ các cạnh.
4. Biến đổi sóng nhỏ: Biến đổi sóng nhỏ phân tích ảnh thành các thành phần tần số thấp và cao. Nhiễu thường xuất hiện trong thành phần tần số cao, do đó, có thể loại bỏ hoặc giảm cường độ của chúng trước khi tái tạo lại ảnh.
   - Ưu điểm: Hiệu quả trong việc giảm nhiễu và giữ lại chi tiết.
5. Phương pháp LASSO: LASSO có thể được sử dụng để khử nhiễu bằng cách sử dụng hàm phạt l_1 để giảm thiểu các hệ số sóng nhỏ tương ứng với nhiễu.

Trong phần này, ta sẽ xử lý khử nhiễu ảnh bằng Phương pháp LASSO dựa trên biến đổi sóng nhỏ.

Các bước khử nhiễu ảnh bằng phương pháp LASSO:

1. Biến đổi sóng nhỏ. Ảnh bị nhiễu được biến đổi sóng nhỏ rời rạc để biểu diễn ảnh theo các thành phần tần số khác nhau.

    - Biến đổi sóng nhỏ sẽ phân tích ảnh thành các thành phần tần số thấp và cao.
    - Các thành phần tương ứng với tần số thấp chứa thông tin chính của ảnh, trong khi các thành phần tần số cao thường chứa nhiễu.

2. Xây dựng mô hình LASSO. Sau khi có biến đổi sóng nhỏ, ta sẽ áp dụng LASSO để giảm thiểu nhiễu ảnh. Mô hình LASSO được định nghĩa như sau:

$$\min_{\mathbf{x}}\{F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1\}, \tag{4.2}$$

   trong đó, $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{W}$, với $\mathbf{R}$ là ma trận làm mờ, $\mathbf{W}$ chứa cơ sở sóng nhỏ (việc nhân với $\mathbf{W}$ cho kết quả biến đổi sóng nhỏ ngược). Véc tơ $\mathbf{x}$ chứa hệ số biểu diễn cho ảnh chưa biết và véc tơ $\mathbf{b}$ biểu diễn ảnh cần khử nhiễu.

Bài toán 4.2 là một bài toán tối ưu lồi, đặc biệt hơn, đây là bài toán quy hoạch nón bậc hai và có thể được giải bằng các phương pháp điểm trong. Tuy nhiên, trong hầu hết các ứng dụng, cụ thể ở đây là khử nhiễu ảnh, thì vấn đề gặp phải không chỉ là dữ liệu đầu vào lớn (các ảnh có thể có kích thước rất lớn, lên tới hàng triệu điểm ảnh) mà còn liên quan tới dữ liệu ma trận dày đặc và do đó khó có thể sử dụng các phương pháp điểm trong. Khi đó, ưu điểm về tính đơn giản của thuật toán đạo hàm gần kề ISTA cũng như các dạng tăng tốc của nó có thể được phát huy tác dụng.

Ví dụ 4.2. Ảnh gốc được quan sát là ảnh xám với kích thước 64×64. Đầu tiên, ta sẽ thực hiện làm mờ ảnh gốc và sau đó sẽ khử nhiễu ở ảnh mờ để thu được ảnh rõ và càng giống với ảnh gốc nhất càng tốt.

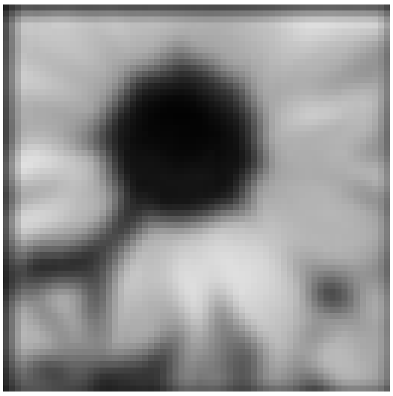
Các bước làm mờ ảnh gốc được thực hiện như sau:

- Scale các điểm ảnh của ảnh gốc về $[0, 1]$.
- Ảnh sau đó được biến đổi qua một kernel Gauss có kích thước 3×3 và độ lệch chuẩn 2 và cộng thêm nhiễu trắng với độ lệch chuẩn 10^{-3}.

Tiếp theo, ta sẽ áp dụng thuật toán FISTA để tìm nghiệm của bài toán LASSO.

Kết quả thu được như sau:

(a) Ảnh gốc



(b) Ảnh làm mờ

(c) Ảnh sau xử lý

Hình 4.2: Thực nghiệm khử nhiễu ảnh bằng FISTA

Kết luận và kiến nghị

Kết luận

Các kết quả nghiên cứu chính của luận văn bao gồm:

- Trình bày một số kiến thức cơ bản của lý thuyết tối ưu như dưới vi phân, toán tử gần kề, lớp hàm khả vi với đạo hàm Lipschitz.
- Tìm hiểu về thuật toán đạo hàm gần kề cho bài toán tối ưu dạng tổng và sự hội tụ của thuật toán với các giả thiết khác nhau về tính lồi của hàm mục tiêu.
- Xem xét một số dạng tăng tốc của thuật toán đạo hàm gần kề.
- Thử nghiệm các thuật toán cho ví dụ cụ thể và so sánh hiệu quả của các thuật toán, đồng thời thử nghiệm áp dụng một dạng tăng tốc của thuật toán đạo hàm gần kề là FISTA cho ứng dụng khử nhiễu ảnh bằng phương pháp LASSO.

Kiến nghị

Một số hướng phát triển của luận văn như sau:

- Xem xét thuật toán đạo hàm gần kề cho bài toán tối ưu dạng tổng với các giả thiết nới lỏng hơn.
- Tiếp tục nghiên cứu các phương pháp cải tiến thuật toán.

Danh mục tài liệu tham khảo

[1] A. Beck and M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2(1):183–202, 2009.

[2] A. Ben-Tal and A. S. Nemirovskiaei. *Lectures on Modern Convex Optimization - Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. 2001.

[3] R. E. Bruck. On the weak convergence of an ergodic iteration for the solution of variational inequalities for monotone operators in Hilbert space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 61(1):159–164, 1977.

[4] G. B. Passty. Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 72(2):383–390, 1979.

[5] P. L. Lions and B. Mercier. Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 16(6):964–979, 1979.

[6] A. Beck and M. Teboulle. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems. *IEEE*

Transactions on Image Processing, 18(11):2419–2434, 2009.

[7] A. Beck. *First-Order Methods in Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2017.

[8] Y. Nesterov. Gradient methods for minimizing composite functions. *Universit catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE), CORE Discussion Papers*, 140, 01 2007.

[9] A. Beck. *Introduction to Nonlinear Optimization: Theory, Algorithms, and Applications with Python and MATLAB, Second Edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2023.

[10] G. Lauga, E. Riccietti, N. Pustelnik, and P. Gonçalves. Multilevel fista for image restoration. *ICASSP 2023 - 2023 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2022.

[11] A. Ang, H. D. Sterck, and S. Vavasis. Mgprox: A nonsmooth multigrid proximal gradient method with adaptive restriction for strongly convex optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 34(3):2788–2820, 2024.

[12] D. P. Bertsekas. *Convex Analysis and Optimization*. Athena Scientific, Belmont, MA, 2003.

[13] J. J. Moreau. Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 93:273–299, 1965.

[14] A. Chambolle and T. Pock. An introduction to continuous optimization for imaging. *Acta Numerica*, 25:161–319, 2016.

[15] A. Beck and M. Teboulle. A conditional gradient method with linear rate of convergence for solving convex linear systems. *Mathematical Methods of Operations Research*, 59:235–247, 01 2004.