BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Trương Thị Hải Duyên

VỀ BIỂU DIỄN BẤT KHẢ QUY CỦA ĐẠI SỐ LIÊN KẾT VỚI KHÔNG GIAN DỊCH CHUYỂN CON TRÊN BẢNG CHỮ CÁI TÙY Ý

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2024

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Trương Thị Hải Duyên

VỀ BIỂU DIỄN BẤT KHẢ QUY CỦA ĐẠI SỐ LIÊN KẾT VỚI KHÔNG GIAN DỊCH CHUYỂN CON TRÊN BẢNG CHỮ CÁI TÙY Ý

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 8460104

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC :

Gnam

PGS. TS. Trần Giang Nam

Hà Nội – 2024

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những gì viết trong luận văn là do sự tìm tòi, học hỏi của bản thân và sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS. Trần Giang Nam. Mọi kết quả nghiên cứu cũng như ý tưởng của tác giả khác, nếu có đều được trích dẫn cụ thể. Đề tài luận văn này cho đến nay chưa được bảo vệ tại bất kì một hội đồng bảo vệ luận văn thạc sĩ nào và cũng chưa hề được công bố trên bất kì một phương tiện nào. Tôi xin chịu trách nhiệm về những lời cam đoan.

Hà Nội, tháng 11 năm 2024

Học viên

Duyen

Trương Thị Hải Duyên

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, tôi xin được tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất của mình tới PGS. TS. Trần Giang Nam, người trực tiếp hướng dẫn tôi tìm ra hướng nghiên cứu. Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy trong một thời gian dài. Thầy đã luôn quan tâm, giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin trân trọng cảm ơn sự giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi của cơ sở đào tạo là Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam trong quá trình thực hiện luận văn. Đồng thời, tôi cũng xin cảm ơn quỹ VinIf đã tài trợ học bổng với mã số VINIF.2023.ThS.028 và đề tài của Viện Hàn lâm khoa học và Công nghệ Việt Nam với mã số CTTH00.01/24-25 đã hỗ trợ, tạo điều kiện thuận lợi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô, anh chị, bạn bè của Viện Toán học vì sự giúp đỡ, góp ý và tạo điều kiện trong quá trình học tập, nghiên cứu để tôi thực hiện tốt luận văn của mình.

Đặc biệt, tôi xin cảm ơn gia đình, người thân và bạn bè đã luôn sát cánh, động viên và khích lệ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Hà Nội, tháng 11 năm 2024

Học viên

Duyen

Trương Thị Hải Duyên

Mục lục

MỞ ĐẦU

Trong lý thuyết hệ động lực hình thức (Symbolics Dynamics), việc nghiên cứu các không gian dịch chuyển trên các bảng chữ cái vô hạn là chủ đề nghiên cứu thời sự, khá khó và thu hút được nhiều nhà toán học quan tâm. Chúng ta có thể tham khảo tài liệu [1] để hiểu sâu hơn về những ứng dụng của các không gian dịch chuyển này. Một trong những khó khăn trong việc nghiên cứu đối tượng này là không gian dịch chuyển trên các bảng chữ cái vô hạn không compact (thậm chí không compact địa phương). Năm 2022, Boava, Castro, Goncalves và Wyk [2] đã giới thiệu đại số $\mathcal{A}_R(X)$ liên kết với một không gian dịch chuyển con bất kì X trên bảng chữ cái tùy ý với hệ số trên một vành giao hoán có đơn vị không phân tích được R và sử dụng nó để phân loại các không gian dịch chuyển OTW-không gian dịch chuyển trên bảng chữ cái vô hạn được giới thiệu bởi Ott, Tomforde và Willis [3]. Đồng thời, họ đã chứng minh được rằng lớp đại số này chứa nhiều lớp đại số quan trọng, như đại số đường Leavitt của đồ thị, đại số đường Leavitt của siêu đồ thị.

Một trong những bước quan trọng trong việc nghiên cứu lý thuyết môđun trên một vành kết hợp là nghiên cứu biểu diễn bất khả quy của nó. Biểu diễn bất khả quy của đại số $\mathcal{A}_R(X)$ đã được nghiên cứu cho nhiều trường hợp đặc biệt. Chúng tôi xin nêu một số kết quả quan trọng về hướng này. Chen [4] đã xây dựng biểu diễn bất khả quy cho đại số $\mathcal{A}_K(X_E)$ của không gian dịch chuyển X_E liên kết với đồ thị có hướng E bằng cách sử dụng các lớp tương đương đuôi của các đường vô hạn trong đồ thị E, trong đó K là trường tùy ý và $\mathcal{A}_K(X_E)$ đẳng cấu với đại số đường Leavitt của E. Ara-Rangaswamy [5] xây dựng thêm biểu diễn bất khả quy của $\mathcal{A}_K(X_E)$ sử dụng các cặp (c, f) của các chu trình độc chiếm c trong E và các đa thức bất khả quy trong vành đa thức $K[x]$. Ánh-Nam [6] đã xây dựng các biểu diễn bất khả quy của $\mathcal{A}_K(X_E)$ liên kết với các cặp (c, f) của các chu trình tùy ý c trong E và các đa thức bất khả quy trong vành đa thức $K[x]$. Cách biểu diễn bất khả quy của Chen [4] và Ánh-Nam [6] đã được mở rộng lên cho đại số $\mathcal{A}_K(X_\mathcal{G})$ của không gian dịch chuyển $X_\mathcal{G}$ liên kết với siêu đồ thị có hướng $\mathcal{G}$ bởi Nam và cộng sự [6]. Năm 2023, Goncalves-Royer [7] đã mở rộng biểu diễn bất khả quy Chen nói ở trên lên cho đại số $\mathcal{A}_K(X)$ liên kết với không gian dịch chuyển con tùy ý trên bảng chữ cái bất kỳ. Tính đến thời điểm hiện tại, chưa có nhiều hiểu biết về biểu diễn bất khả quy của đại số $\mathcal{A}_K(X)$ liên kết với không gian dịch chuyển tùy ý. Vì thế, nghiên cứu biểu diễn bất khả quy của đại số $\mathcal{A}_K(X)$ liên kết với không gian dịch chuyển tùy ý là mối quan tâm chính của chúng tôi trong đề luận văn này.

Như đã nói ở trên, lớp đại số $\mathcal{A}_K(X)$ liên kết với không gian dịch chuyển con tùy ý chứa nhiều lớp đại số quan trọng, như đại số đường Leavitt của đồ thị, đại số đường Leavitt của siêu đồ thị, đại số liên kết với đồ thị gắn nhãn. Do đó, việc nghiên cứu biểu diễn bất khả quy của đại số này sẽ giúp chúng ta tìm được những phương pháp tổng quát để thiết kế biểu diễn bất khả quy của nhiều lớp đại số khác nhau. Qua đó, chúng ta có thể hiểu biết sâu sắc hơn về biểu diễn bất khả quy của đại số đường Leavittt.

Trong luận văn này, chúng tôi sẽ khảo sát phạm trù môđun của đại số liên kết với không gian dịch chuyển con trên bảng chữ cái tùy ý, thông qua việc nghiên cứu các biểu diễn bất khả quy của nó. Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, cấu trúc của khóa luận gồm có hai chương chính.

Chương 1: Trong chương này chúng tôi trình bày lại một số kiến thức cơ bản về đồ thị, siêu đồ thị và đại số liên kết với không gian dịch chuyển con trên bảng chữ cái tùy ý dựa trên bài báo của Boava-Castro-Goncalves-Wyk [2] nhằm mục đích cung cấp những kiến thức cơ bản phục vụ cho chương sau.

Chương 2: Trong chương này chúng tôi trình bày lại các biểu diễn bất khả quy đã biết của đại số liên kết với không gian dịch chuyển con trên bảng chữ cái tùy ý dựa trên bài báo của của Goncalves-Royer [7]. Từ đó nghiên cứu tính biểu diễn hữu hạn cho các biểu diễn bất khả quy này.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này tôi trình bày lại một số kiến thức cơ bản về đồ thị, siêu đồ thị và đại số liên kết với không gian dịch chuyển con trên bảng chữ cái tùy ý.

1.1 Đồ thị và siêu đồ thị

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cơ bản về lý thuyết siêu đồ thị, được Tomforde giới thiệu trong [8] và [9].

Chúng ta bắt đầu phần này bằng cách nhắc lại khái niệm về đồ thị có hướng.

Định nghĩa 1.1.1 ([10])**.** Một *đồ thị (có hướng)* là bộ $E = (E^0, E^1, r, s)$ gồm tập đỉnh E^0, tập cạnh E^1 và hai ánh xạ $r, s\colon E^1 \longrightarrow E^0$.

Một đỉnh $v \in G^0$ được gọi là *đỉnh dìm* nếu $s^{-1}(v) = \varnothing$, được gọi là *đỉnh phát ra vô hạn* nếu $|s^{-1}(v)| = \infty$ và là *đỉnh nguồn* nếu $r^{-1} = \varnothing$. Một *đỉnh cô lập* là một đỉnh dìm hoặc phát ra vô hạn. Đỉnh $v \in G^0$ được gọi là *đỉnh chính quy* nếu $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$.

Đường có độ dài hữu hạn α trong đồ thị E là một dãy các cạnh $\alpha = e_1e_2 \dots e_n$ sao cho $r\left(e_j\right) = s\left(e_{j+1}\right)$ với $j = 1, \dots, n-1$. Đường α được gọi là một *chu trình* nếu $r(e_n) = s(e_1)$ và $r(e_j) \neq s(e_i), i \neq j+1$.

Định nghĩa 1.1.2 ([10]). *Đồ thị E mở rộng* là bộ $\widehat{E} = (E^0, E^1, \left(E^1\right)^*, r, s)$ trong đó $\left(E^1\right)^*$ là tập các *cạnh ảo*. Nếu $\alpha = e_1 e_2 \cdots e_n$ là một đường trong E, thì phần tử $e_n^* \cdots e_2^* e_1^*$ được ký hiệu là α^*.

Siêu đồ thị được Mark Tomforde định nghĩa trong [8] như một cách tiếp cận thống nhất cho Exel-Laca và đồ thị C^*-đại số. Tác giả đã chứng minh đây là một đối tượng quan trọng trong nghiên cứu về tương đương Morita của Exel-Laca và đồ thị C^*-đại số [11].

Định nghĩa 1.1.3 ([9]). *Siêu đồ thị* $\mathcal{G} = (G^0, \mathcal{G}^1, r, s)$ bao gồm tập hợp đếm được các đỉnh G^0, một tập hợp đếm được các cạnh $\mathcal{G}^1$, và các ánh xạ $s : \mathcal{G}^1 \longrightarrow G^0$, $r : \mathcal{G}^1 \longrightarrow \mathcal{P}(G^0) \setminus \{\varnothing\}$, trong đó $\mathcal{P}(G^0)$ là tập hợp tất cả các tập con của G^0.

Một *đường đi hữu hạn* trong siêu đồ thị $\mathcal{G}$ là một phần tử của $\mathcal{G}^0$, hoặc một dãy $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ các cạnh có $s(\alpha_{i+1}) \in r(\alpha_i)$ với mọi $1 \le i \le n-1$. Ta nói rằng đường đi α có *độ dài* $|\alpha| := n$, coi các phần tử của $\mathcal{G}^0$ là các đường đi có độ dài 0, và ký hiệu $\mathcal{G}^*$ là tập hợp tất cả các đường đi hữu hạn trong $\mathcal{G}$. Các ánh xạ r và s mở rộng tự nhiên đến $\mathcal{G}^*$. Lưu ý rằng khi $A \in \mathcal{G}^0$, chúng ta định nghĩa $s(A) = r(A) = A$.

Nếu $\mathcal{G}$ là một siêu đồ thị, thì một *đường đóng* trong $\mathcal{G}$ là một đường có dạng $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{|\alpha|} \in \mathcal{G}^*$ với $|\alpha| \ge 1$ và $s(\alpha) \in r(\alpha)$. Chúng ta cũng nói rằng đường đóng α dựa trên $v = s(\alpha)$. Một *chu trình* (dựa trên v) là một đường đi đóng (dựa trên v) sao cho $s(\alpha_i) \ne s(\alpha_j)$ với mọi $1 \le i \ne j \le |\alpha|$.

Một *lối thoát* cho một chu trình α là một trong những đối tượng sau:

(1) Cạnh $e \in \mathcal{G}^1$ sao cho tồn tại một i mà $s(e) \in r(\alpha_i)$ nhưng $e \ne \alpha_{i+1}$.

(2) Đỉnh dìm w sao cho $w \in r(\alpha_i)$ với i nào đó.

Với siêu đồ thị $\mathcal{G} = (G^0, \mathcal{G}^1, r, s)$ ta kí hiệu $\mathcal{G}^0$ là tập con nhỏ nhất của $\mathcal{P}(G^0)$ chứa $\{v\}$ với mọi $v \in G^0$, chứa $r(e)$ với mọi $e \in \mathcal{G}^1$, và đóng với phép hợp hữu hạn, giao hữu hạn và phép lấy phần bù. Các phần tử của $\mathcal{G}^0$ được gọi là *các đỉnh sinh.*

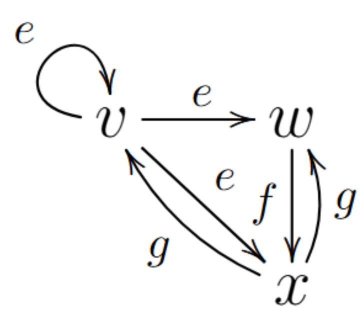
Hệ quả 1.1.4 ([2]). *Cho $\mathcal{G}$ là một siêu đồ thị. Khi đó,*

$$\mathcal{G}^0 = \{ \bigcap_{e\in X_1} r(e) \cup \ldots \cup \bigcap_{e\in X_n} r(e) \cup F : X_1, \ldots, X_n \textit{ là các tập con hữu hạn của } \mathcal{G}^1 \textit{ và } F \textit{ là một tập con hữu hạn của } G^0\}.$$

Để làm rõ hơn định nghĩa trên, chúng tôi minh họa các khái niệm về siêu đồ thị bằng các ví dụ sau.

Ví dụ 1.1.5. Cho $E = \big(E^0, E^1, r_E, s_E\big)$ là một đồ thị hữu hạn. Ta định nghĩa siêu đồ thị $\mathcal{G}_E = (G^0_E, \mathcal{G}^1_E, r_{\mathcal{G}_E}, s_{\mathcal{G}_E})$ liên kết với đồ thị E như sau: $G^0_E = E^0$, $\mathcal{G}^1_E = E^1$, $s_{\mathcal{G}_E}(e) = s_E(e)$, và $r_{\mathcal{G}_E}(e) = \{r_E(e)\}$ đối với mọi $e \in E^1$. Khi đó, ta có $\mathcal{G}^0_E$ là tập hợp tất cả các tập con hữu hạn của G^0_E.

Ví dụ 1.1.6. Cho $\mathcal{G}$ là siêu đồ thị như Hình 1.1.



Hình 1.1:

Khi đó $G^0 = \{v, w, x\}, \mathcal{G}^1 = \{e, f, g\}$, $s_{\mathcal{G}}(e) = v, s_{\mathcal{G}}(f) = w, s_{\mathcal{G}}(g) = x$ và $r_{\mathcal{G}}(e) = \{v, w, x\}, r_{\mathcal{G}}(f) = \{x\}, r_{\mathcal{G}}(g) = \{v, w\}$. Khi đó, ta có $\mathcal{G}^0 = P(G^0)$.

1.2 Không gian dịch chuyển con

Ở phần này, tôi trình bày lại một số khái niệm cơ bản của không gian dịch chuyển con. Trước tiên, tôi sẽ trình bày lại một số kiến thức cơ bản về hệ động lực hình thức.

Trong luận văn này, chúng tôi mặc định R là một vành giao hoán có đơn vị.

Định nghĩa 1.2.1 ([1]). (1) Cho $\mathcal{A}$ là một tập khác rỗng. $\mathcal{A}$ được gọi là một *bảng chữ cái*. Một *từ* trên $\mathcal{A}$ là một chuỗi hữu hạn các chữ cái trong $\mathcal{A}$, và ta kí hiệu $\mathcal{A}^0 = \omega$ là *từ trống*. Tập các từ có độ dài k trên $\mathcal{A}$ được kí hiệu là $\mathcal{A}^k$. Ta định nghĩa $\mathcal{A}$-*không gian dịch chuyển đầy đủ* là

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \left\{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathcal{A}\ \forall\ i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Ta định nghĩa $\mathcal{A}^* := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k$.

(2) Cho $\alpha \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, ta kí hiệu $|\alpha|$ là *độ dài* của α.

Với $1 \leq i, j \leq |\alpha|$, ta định nghĩa $\alpha_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i \cdots \alpha_j & \text{nếu } i \leq j \\ \omega & \text{nếu } i > j. \end{cases}$

(3) Nếu $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^*$, thì $\beta\alpha$ là phép nối thông thường.

Ta quy ước $\omega\beta = \beta\omega = \beta$.

Nếu $n \geqslant 1$ thì β^n được biểu diễn bởi n từ β viết nối tiếp nhau. Ta quy ước $u^0 = \omega$. Khi đó, ta có $u^m u^n = u^{m+n}$ với mọi $m, n \geqslant 0$. Ta gọi β^∞ là từ vô hạn $\beta.\beta....$

Định nghĩa 1.2.2 ([1]). *Ánh xạ dịch chuyển* (shift map) σ trên $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} &\to \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Một tập con $\mathrm{X} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ được gọi là *bất biến* với σ nếu $\sigma(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{X}$.

Định nghĩa 1.2.3 ([2]). Cho tập con bất biến $\mathrm{X} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, ta định nghĩa

(1) $\mathcal{L}_n(\mathrm{X})$ là tập các từ có độ dài n xuất hiện trong một phần tử nào đó của X. Nghĩa là,

$$\mathcal{L}_n(\mathrm{X}) := \{(a_0 \dots a_{n-1}) \in \mathcal{A}^n : \ \exists\, x \in \mathrm{X} \text{ sao cho } (x_0 \dots x_{n-1}) = (a_0 \dots a_{n-1})\}.$$

Khi đó, $\mathcal{L}_n\left(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}\right) = \mathcal{A}^n$, $\mathcal{L}_0(\mathrm{X}) = \{\omega\}$.

(2) *Ngôn ngữ của* X là tập $\mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ gồm tất cả các từ hữu hạn xuất hiện trong một từ nào đó của X. Khi đó,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{X}} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n(\mathrm{X}).$$

Ta sẽ minh họa định nghĩa trên bằng ví dụ sau.

Ví dụ 1.2.4. Giả sử $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ và $\mathrm{X} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Khi đó $\mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ gồm tất cả các từ hữu hạn xuất hiện trong một từ nào đó của X. Ta có thể liệt kê một số từ trong $\mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ như sau

$$\mathcal{L}_{\mathrm{X}} = \{\omega, 0, 1, 00, 11, 01, 10, 000, 111, 001, 010, 100, ...\}$$

Bây giờ, tôi sẽ trình bày lại một số khái niệm cơ bản về không gian dịch chuyển.

Định nghĩa 1.2.5 ([1]). Cho $\mathcal{F}$ là tập con của $\mathcal{A}^*$ được gọi là *tập tránh*. Ta định nghĩa $\mathrm{X}_{\mathcal{F}}$ là tập các phần tử trong $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ không chứa các từ thuộc vào F. Một tập con X của $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ được gọi là *không gian dịch chuyển* nếu tồn tại $\mathcal{F}$ là tập tránh trên $\mathcal{A}$ sao cho $\mathrm{X}_{\mathcal{F}} = \mathrm{X}$.

Khi một không gian dịch chuyển X được chứa trong một không gian dịch chuyển Y, chúng ta nói rằng X là một *không gian dịch chuyển con* của Y.

Tôi sẽ minh họa định nghĩa trên qua ví dụ sau.

Ví dụ 1.2.6. Cho bảng chữ cái $\mathcal{A}$. Khi đó,

(1) $\mathrm{X} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ là một không gian dịch chuyển do ta có thể chọn $F = \varnothing$. Như vậy, $\mathrm{X}_{\mathcal{F}} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \mathrm{X}$.

(2) $\mathrm{X} = \varnothing$ là một không gian dịch chuyển do ta có thể chọn $\mathcal{F} = \mathcal{A}$. Như vậy, $\mathrm{X}_{\mathcal{F}} = \varnothing = \mathrm{X}$.

(3) Gọi X là tập hợp tất cả các chuỗi nhị phân không có hai số 1 nào nằm cạnh nhau. Khi đó X là một không gian dịch chuyển với $\mathcal{A} = \{0; 1\}$, tập tránh $\mathcal{F} = \{11\}$ và $\mathrm{X} = \mathrm{X}_{\mathcal{F}}$.
Không gian dịch chuyển này được gọi là *dịch chuyển trung bình vàng* (golden mean shift).

(4) Xét X là tập hợp tất cả các chuỗi nhị phân sao cho giữa bất kỳ hai số 1 nào cũng có một số chẵn các số 0. Khi đó X là một không gian dịch chuyển với $\mathcal{A} = \{0; 1\}$, tập tránh $\mathcal{F} = \{1\underbrace{00\ldots0}_{2n+1 \text{ số } 0}1 : n \geqslant 0\}$ và $\mathrm{X} = \mathrm{X}_{\mathcal{F}}$.
Không gian dịch chuyển này thường được gọi là *dịch chuyển chẵn* (even shift).

Trong định nghĩa trên, tập $\mathcal{F}$ có thể có hữu hạn hoặc vô hạn phần tử. Tuy nhiên, trong hầu hết các trường hợp ta có thể đếm được số phần tử của $\mathcal{F}$ do các phần tử của nó có thể được liệt kê theo thứ tự (chỉ cần viết ra các từ có độ dài 1 trước, sau đó là các từ có độ dài 2, ...). Đối với một không gian dịch chuyển cho trước, có thể có nhiều tập tránh $\mathcal{F}$.

Định nghĩa 1.2.7 ([1])**.** *Không gian dịch chuyển con hữu hạn* là không gian dịch chuyển có thể được mô tả bằng một tập hợp tránh hữu hạn, tức là không gian dịch chuyển X có dạng $X_{\mathcal{F}}$ với một tập tránh hữu hạn $\mathcal{F}$.

Định nghĩa 1.2.8 ([1])**.** Một không gian dịch chuyển con hữu hạn là *M-bước* nếu nó có thể được mô tả bằng một tập tránh trong đó các từ tránh đều có độ dài $M+1$.

Để làm rõ hơn định nghĩa trên, ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 1.2.9. (1) Không gian dịch chuyển $X = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ là một không gian dịch chuyển con hữu hạn. Trong đó, tập tránh $\mathcal{F} = \varnothing$ và $X = X_{\mathcal{F}} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

(2) Dịch chuyển trung bình vàng X trong Ví dụ 1.2.6 là không gian dịch chuyển con hữu hạn vì ta có tập tránh $\mathcal{F} = \{11\}$ là hữu hạn và $X = X_{\mathcal{F}}$.

(3) Dịch chuyển chẵn X trong Ví dụ 1.2.6 không phải là không gian dịch chuyển con hữu hạn. Thật vậy, gọi $\mathcal{L}_N(X)$ là tập các từ có độ dài N trong X. Nếu X là không gian dịch chuyển con hữu hạn, khi đó tồn tại $m \geqslant 1$ và tập $\mathcal{F}$ gồm các từ có độ dài m sao cho $X = X_{\mathcal{F}}$. Xét từ $x = 0^{\infty}10^{2m+1}10^{\infty}$. Mọi từ có độ dài m xuất hiện trong x đều nằm trong $\mathcal{L}_m(X)$, do đó chúng ta sẽ có $x \in X_{\mathcal{F}} = X$, mâu thuẫn với định nghĩa của dịch chuyển chẵn.

Ví dụ 1.2.10. Cho $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ là một dịch chuyển hữu hạn và $X = X_{\mathcal{F}}$ với tập tránh hữu hạn $\mathcal{F}$. Giả sử N là độ dài của từ dài nhất trong $\mathcal{F}$. Ta gọi $\mathcal{F}_N$ là tập tất cả các từ có độ dài N, chứa một số từ trong $\mathcal{F}$, thì khi đó $X_{\mathcal{F}_N} = X_{\mathcal{F}}$, và các từ trong $\mathcal{F}_N$ đều có cùng độ dài N.

Ví dụ, nếu $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ và $\mathcal{F} = \{11, 000\}$, thì $\mathcal{F}_3 = \{110, 111, 011, 000\}$. Để thuận tiện ta coi như trong không gian dịch chuyển hữu hạn, tất cả các từ tránh đều có cùng độ dài.

Một phương pháp cơ bản để xây dựng các không gian dịch chuyển con hữu hạn là sử dụng đồ thị hữu hạn, có hướng và tạo ra tập hợp các đường đi vô hạn trên đồ thị. Trong [1] các tác giả đã chỉ ra rằng không gian dịch chuyển con hữu hạn có thể được biểu diễn như một dịch chuyển cạnh được định nghĩa trong các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1.2.11 (Không gian dịch chuyển cạnh của đồ thị)**.** Cho đồ thị E. Ta định nghĩa *dịch chuyển cạnh một phía* X_E *liên kết với* E là tập hợp tất cả các đường vô hạn. Nó là một không gian dịch chuyển con trên $\mathcal{A} = E^1$ với tập tránh $\mathcal{F} = \left\{ef \in \mathcal{A}^2 : r(e) \neq s(f)\right\}$. Khi đó,

$$\mathrm{X}_E = \{e = (e_i)_{i\in\mathbb{N}} : r(e_i) = s(e_{i+1})\}.$$

Ánh xạ dịch chuyển trên X_E được gọi là ánh xạ dịch chuyển cạnh liên kết với đồ thị E, và được kí hiệu là σ_E.

X_E là một không gian dịch chuyển con hữu hạn 1-bước do mọi từ trong $\mathcal{F}$ đều có độ dài là 2.

Ví dụ 1.2.12 (Không gian dịch chuyển cạnh của siêu đồ thị)**.** Cho siêu đồ thị $\mathcal{G}$. Ta định nghĩa *dịch chuyển cạnh một phía* $\mathrm{X}_\mathcal{G}$ *liên kết với* $\mathcal{G}$ là tập hợp tất cả các đường đi vô hạn. Nó là không gian dịch chuyển con trên $\mathcal{A} = \mathcal{G}^1$ với tập tránh $\mathcal{F} = \left\{ef \in \mathcal{A}^2 : s(f) \notin r(e)\right\}$. Khi đó,

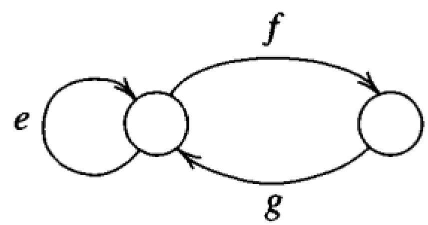
$$\mathrm{X}_\mathcal{G} = \{e = (e_i)_{i\in\mathbb{N}} : s(e_{i+1}) \in r(e_i)\}.$$

Ánh xạ dịch chuyển trên $\mathrm{X}_\mathcal{G}$ được gọi là ánh xạ dịch chuyển cạnh liên kết với siêu đồ thị $\mathcal{G}$, và được kí hiệu là $\sigma_\mathcal{G}$.

$\mathrm{X}_\mathcal{G}$ là không gian dịch chuyển con hữu hạn 1-bước do mọi từ trong $\mathcal{F}$ đều có độ dài là 2.

Ví dụ 1.2.13. (1) Cho đồ thị E như Hình 1.2. Khi đó ta có một dịch chuyển cạnh trên $\mathcal{A} = E^1 = \{e, f, g\}$ với tập tránh $\mathcal{F} = \{eg, fe, ff, gg\}$ là

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_E = \mathrm{X}_F &= \{e = (e_i)_{i\in\mathbb{N}} : r(e_i) = s(e_{i+1})\} \\ &= \{(e)^n, (fg)^n, (gf)^n, g(e)^n, (e)^n f, ... : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$



Hình 1.2:

(2) Cho siêu đồ thị $\mathcal{G}$ như trong Ví dụ 1.1.6. Khi đó ta có một dịch chuyển cạnh liên kết với $\mathcal{G}$ trên $\mathcal{A} = \mathcal{G}^1 = \{e, f, g\}$ với tập tránh $\mathcal{F} = \{ef \in \mathcal{A}^2 : s(f) \notin r(e)\} = \{fe, ff, gg\}$ là

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_{\mathcal{G}} &= \{e = (e_i)_{i\in\mathbb{N}} : s(e_{i+1}) \in r(e_i)\} \\ &= \{(e)^n, (e)^n g, (e)^n f, g(e)^n, (fg)^n, ... : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, không phải mọi không gian dịch chuyển con hữu hạn (thực tế, không phải mọi không gian dịch chuyển con hữu hạn 1-bước) đều là dịch chuyển cạnh.

Ví dụ 1.2.14. Giả sử $\mathcal{A} = \{0, 1\}, \mathcal{F} = \{11\}$, khi đó $X_{\mathcal{F}}$ là dịch chuyển trung bình vàng (golden mean shift). Ta chỉ ra được rằng không có đồ thị G sao cho $X_{\mathcal{F}} = X_G$. Thật vậy, nếu tồn tại đồ thị G thỏa mãn, G sẽ có đúng hai cạnh, được đặt tên là 0 và 1. Giả sử G chỉ có một đỉnh, trong trường hợp đó X_G là dịch chuyển $\mathcal{A}$-đầy đủ. Nếu G có hai đỉnh thì X_G gồm các từ $(01)^\infty$ và $(10)^\infty$. Trong cả hai trường hợp, X_G đều không giống với $X_{\mathcal{F}}$.

Mặc dù có ví dụ này, kết quả sau đây cho thấy bất kỳ dịch chuyển hữu hạn nào đều có thể được mã hóa lại thành dịch chuyển cạnh. Trước tiên, ta nhắc lại định nghĩa về dịch chuyển khối cao. Đây là một trong những cấu trúc cơ bản trong lí thuyết hệ động lực hình thức liên quan đến việc mở rộng một ký hiệu đơn lẻ sang một khối các ký hiệu liên tiếp và coi các khối đó là các chữ cái từ một bảng chữ cái mới, phức tạp hơn.

Định nghĩa 1.2.15 ([1])**.** Giả sử X là một không gian dịch chuyển con trên bảng chữ cái $\mathcal{A}$ và $\mathcal{A}_X^{[N]} = \mathcal{L}_N(X)$ là tập hợp của tất cả các từ có độ dài N trong X. Chúng ta có thể coi $\mathcal{A}_X^{[N]}$ là một bảng chữ cái và tạo thành phép dịch chuyển đầy đủ $\left(\mathcal{A}_X^{[N]}\right)^{\mathbb{N}}$. Ta định nghĩa ánh xạ $\beta_N : X \to \left(\mathcal{A}_X^{[N]}\right)^{\mathbb{N}}$ như sau

$$(\beta_N(x))_{[i]} = x_{[i,i+N-1]}.$$

Khi đó, *dịch chuyển khối cao thứ N* $X^{[N]}$ là ảnh $X^{[N]} = \beta_N(X)$ trong dịch chuyển đầy đủ trên $\mathcal{A}_X^{[N]}$.

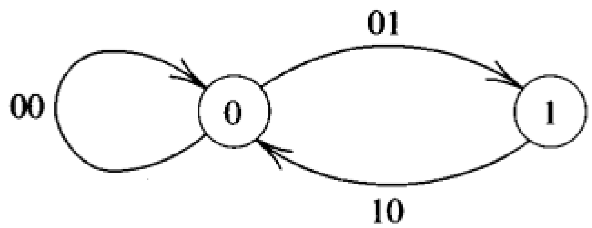
Ta minh họa định nghĩa trên bởi ví dụ sau.

Ví dụ 1.2.16. Giả sử X là dịch chuyển trung bình vàng. Khi đó,

$$\mathcal{A}_X^{[2]} = \{a = 00, b = 01, c = 10\}$$

và $X^{[2]}$ được mô tả bằng tập tránh $\mathcal{F} = \{ac, ba, bb, cc\}$ vì mỗi từ trong $\mathcal{F}$ không là đường đi trong đồ thị Hình 1.3. Ví dụ, ký hiệu thứ hai của $a = 00$ không khớp với ký hiệu đầu tiên của $c = 10$, do đó ac bị cấm. Đương nhiên, từ 11 cũng bị cấm vì nó bị cấm trong dịch chuyển ban đầu. Do đó nó không xuất hiện trong $\mathcal{A}_X^{[2]}$.

Định lý 1.2.17 ([1])**.** *Nếu X là dịch chuyển M-bước có kiểu hữu hạn, thì tồn tại một đồ thị G sao cho $X^{[M+1]} = X_G$.*



Hình 1.3:

Chứng minh. Trước tiên, ta lưu ý rằng nếu $M = 0$, thì X là một phép dịch chuyển đầy đủ và ta có thể lấy G để có một đỉnh và một cạnh cho mỗi ký hiệu xuất hiện trong X. Do đó, ta giả sử rằng $M \geqslant 1$.

Ta định nghĩa *tập đỉnh của* G là $\mathcal{V} = \mathcal{L}_M(X)$, là các từ có độ dài M xuất hiện trong X. Ta định nghĩa *tập cạnh* $\mathcal{E}$ như sau. Giả sử rằng $I = a_1a_2 \dots a_M$ và $J = b_1b_2 \dots b_M$ là hai đỉnh trong G. Nếu $a_2a_3 \dots a_M = b_1b_2 \dots b_{M-1}$, và nếu $a_1 \dots a_M b_M$ $(= a_1b_1 \dots b_M)$ nằm trong $\mathcal{L}(X)$, thì ta vẽ chính xác một cạnh trong G từ I đến J, được đặt tên là $a_1a_2 \dots a_M b_M = a_1b_1b_2 \dots b_M$. Nếu không, sẽ không có cạnh nào từ I đến J.

Từ đó ta thấy rằng một đường đi vô hạn trên G là một chuỗi các từ có độ dài $(M+1)$ trong $\mathcal{L}_{M+1}(X)$ nối tiếp nhau. Do đó, $X_G = X^{[M+1]}$. $\square$

Ví dụ 1.2.18. Dịch chuyển trung bình vàng X trong Ví dụ 1.1.6 là 1-bước, nhưng bản thân nó không phải là một dịch chuyển cạnh. Thực hiện quy trình được mô tả trong chứng minh trên cho thấy $X^{[2]} = X_G$ (đã được mô tả trong ví dụ 1.2.16).

Sau đây, chúng tôi sẽ nhắc lại định nghĩa và tính chất một số tập hợp quan trọng sẽ được sử dụng trong định nghĩa của đại số liên kết với không gian dịch chuyển con.

Định nghĩa 1.2.19 ([2])**.** Cho X là không gian dịch chuyển con của bảng chữ cái $\mathcal{A}$. Giả sử $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$, ta định nghĩa

$$C(\alpha, \beta) := \{\beta x \in \mathrm{X} : \alpha x \in \mathrm{X}\}.$$

Khi đó, tập $C(\omega, \beta) = \{\beta x \in \mathrm{X} : x \in \mathrm{X}\}$ được ký hiệu là Z_β và được gọi là *tập trụ* (cyclider set). Tập $C(\alpha, \omega) = \{x \in \mathrm{X} : \alpha x \in \mathrm{X}\}$ được ký hiệu là F_α và được gọi là *tập theo sau* (follower set).

Lưu ý rằng $\mathrm{X} = C(\omega, \omega)$.

Ta minh họa định nghĩa trên bởi ví dụ sau.

Ví dụ 1.2.20. Cho đồ thị E như trong Ví dụ 1.2.13 (1). Khi đó ta có một dịch chuyển cạnh X_E trên $\mathcal{A} = E^1 = \{e, f, g\}$ với tập tránh $\mathcal{F} = \{eg, fe, ff, gg\}$. Giả sử $\alpha = ef, \beta = gf$, ta có

$$C(\alpha, \beta) = \{\beta x \in \mathrm{X}_E : \alpha x \in \mathrm{X}_E\} = \{gf, gfg, (gf)^n, gfg(e)^n, (gf)^n g(e)^n, ...\}.$$

Chương 2

Biểu diễn bất khả quy của đại số liên kết với không gian dịch chuyển con

Trong chương này, chúng tôi trình bày các biểu diễn bất khả quy đã biết trên đại số liên kết với không gian dịch chuyển con trên bảng chữ cái tùy ý dựa trên bài báo của Goncalves-Royer[7].

2.1 Đại số liên kết với không gian dịch chuyển con

Trong bài báo [2], Boava, de Castro, Goncalves và van Wyk đã định nghĩa một R-đại số $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ liên kết với một không gian dịch chuyển con X có thể không có đơn vị. Chúng tôi bắt đầu bằng định nghĩa của đại số Boole liên kết với các tập hợp có dạng $C(\alpha, \beta)$ với $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ không đồng thời bằng ω.

Định nghĩa 2.1.1 ([2])**.** Cho X là một không gian dịch chuyển con. Ta định nghĩa $\mathcal{B}$ là đại số Boolean của tập con của X sinh bởi mọi tập $C(\alpha, \beta)$ trong đó $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ không đồng thời bằng ω. Như vậy, $\mathcal{B}$ chứa các tập hợp nhận được từ các phép hợp hữu hạn, giao hữu hạn và phép lấy phần bù tập $C(\alpha, \beta)$.

Định nghĩa 2.1.2 ([2])**.** Cho X là không gian dịch chuyển con, R là một vành giao hoán có đơn vị. Khi đó, *Đại số dịch chuyển con* $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ của X trên R là đại số sinh bởi các phần tử $\{p_A : A \in \mathcal{B}\}$ và $\{s_a, s_a^* : a \in \mathcal{A}\}$, thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $p_{A\cap B} = p_A p_B, p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$ và $p_\emptyset = 0$, với mọi $A, B \in \mathcal{B}$;

(2) $s_a s_a^* s_a = s_a$ và $s_a^* s_a s_a^* = s_a^*$ với mọi $a \in \mathcal{A}$;

(3) $s_\beta s_\alpha^* s_\alpha s_\beta^* = p_{C(\alpha,\beta)}$ với mọi $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \backslash \{\omega\}$, trong đó với $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}} \backslash \{\omega\}$ ta có $s_\alpha := s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$ và $s_\alpha^* := s_{\alpha_n}^* \cdots s_{\alpha_1}^*$

(4) $s_\alpha^* s_\alpha = p_{C(\alpha,\omega)} = p_{F_\alpha}$ với mọi $\alpha \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}} \backslash \{\omega\}$;

(5) $s_\beta s_\beta^* = p_{C(\omega,\beta)} = p_{Z_\beta}$ với mọi $\beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \backslash \{\omega\}$.

Theo đó ta có $s_\alpha = s_\alpha s_\alpha^* s_\alpha = p_{Z_\alpha} s_\alpha$ và $s_\alpha^* = s_\alpha^* s_\alpha s_\alpha^* = s_\alpha^* p_{Z_\alpha}$.

Lưu ý rằng s_ω không xuất hiện trong định nghĩa của $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$. Tuy nhiên, để thuận tiện trong việc tính toán ta mặc $s_\alpha p_A s_\omega^*, s_\omega p_A s_\beta^*$ và $s_\omega p_A s_\omega^*$, tương ứng là $s_\alpha p_A, p_A s_\beta^*$ và p_A.

Các phần tử thuộc $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ có một số tính chất như sau.

Mệnh đề 2.1.3 ([2])**.** *Cho* X *là không gian dịch chuyển con,* R *là một vành giao hoán có đơn vị. Khi đó:*

(1) $s_a^* s_b = \delta_{a,b} p_{F_a}$*, với mọi* $a, b \in \mathcal{A}$*;*

(2) $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ *sinh bởi* $\{s_a, s_a^* : a \in \mathcal{A}\}$*.*

Chứng minh. (1) Theo Định nghĩa 2.1.2, với mọi $a, b \in \mathcal{A}$, ta có thể viết

$$s_a^* s_b = s_a^* p_{Z_a} p_{Z_b} s_b = s_a^* p_{Z_a \cap Z_b} s_b.$$

Nếu $a \neq b$, ta có $Z_a \cap Z_b = \emptyset$ và $s_a^* s_b = 0$. Nếu $a = b$, ta có $s_a^* s_b = s_a^* p_{Z_a} s_a = s_a^* s_a = p_{F_a}$. Ta có điều cần chứng minh.

(2) Phép chiếu trên các phần tử sinh của đại số Boolean $\mathcal{B}$ có thể viết dưới dạng $p_{C(\alpha,\beta)} = s_\beta s_\alpha^* s_\alpha s_\beta^*$ với mọi $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \backslash \{\omega\}$. Khi đó, ta thấy rằng nó thuộc về R-đại số sinh bởi $\{s_a, s_a^* : a \in \mathcal{A}\}$. □

Mệnh đề 2.1.4 ([2])**.** *Cho X là một không gian dịch chuyển con, R là vành giao hoán có đơn vị. Đại số dịch chuyển con $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ là R-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc, với thành phần thuần nhất bậc n là*

$$\mathcal{A}_R(\mathrm{X})_n = \operatorname{span}_R \left\{ s_\alpha p_A s_\beta^* : \alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}, A \in \mathcal{B} \text{ và } |\alpha| - |\beta| = n \right\}.$$

Chứng minh. Gọi R_X là R-đại số tự do sinh bởi $\{p_A \mid A \in \mathcal{B}\} \cup \{s_a, s_a^* \mid a \in \mathcal{A}\}$. Với mỗi $a \in \mathcal{A}$ và $A \in \mathcal{B}$, ta định nghĩa $deg(p_A) = 0, deg(s_a) = 1$ và $deg(s_a^*) = -1$. Với mọi đơn thức $rx_1 \dots x_n$ trong đó $r \in R$ và $x_i \in \{p_A \mid A \in \mathcal{B}\} \cup \{s_a, s_a^* \mid a \in \mathcal{A}\}$, ta đặt $deg\,(rx_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n deg\,(x_i)$. Khi đó R_X là R-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc với phần tử thuần nhất bậc n với $n \in \mathbb{Z}$ là:

$$\begin{aligned} R_{X_n} = \operatorname{span}_R \{ x_1 \dots x_n \mid x_i \in \{p_A \mid A \in \mathcal{B}\} \cup \{s_a, s_a^* \mid a \in \mathcal{A}\} \\ \text{và } deg\,(x_1 \dots x_n) = n \}. \end{aligned}$$

Gọi I là iđêan của R_X sinh bởi tất cả các phần tử cảm sinh từ các đồng nhất (1) - (5) trong Định nghĩa 2.1.2. Rõ ràng, I là iđêan thuần nhất. Do đó, $A_R(X) = R_X/I$ là $\mathbb{Z}$-phân bậc. □

Mệnh đề 2.1.5 ([2], (Định lý phân bậc duy nhất))**.** *Cho X là một không gian dịch chuyển con. Nếu T là vành $\mathbb{Z}$-phân bậc và $\phi : \mathcal{A}_R(\mathrm{X}) \to T$ là một đồng cấu vành phân bậc với $\phi\,(rp_A) \neq 0$ với mọi $A \in \mathcal{B} \backslash \{\emptyset\}$ và $r \in R \backslash \{0\}$, thì ϕ là đơn cấu.*

Sau đây, chúng tôi xây dựng đơn vị hóa của R-đại số không có đơn vị $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$. Để làm điều đó, chúng tôi trình bày lại định nghĩa của R-đại số có đơn vị $\tilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$

liên kết với một không gian dịch chuyển con X, đã được xây dựng trong [2]. Để định nghĩa $\tilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$, chúng ta cho $\mathcal{U}$ là đại số Boole của các tập con của X được tạo bởi tất cả $C(\alpha, \beta)$, với $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$. Điểm khác biệt duy nhất giữa $\mathcal{B}$ và $\mathcal{U}$ là X không là phần tử sinh của $\mathcal{B}$.

Định nghĩa 2.1.6 ([2])**.** Cho R là vành giao hoán có đơn vị, X là một không gian dịch chuyển con. Ta định nghĩa *đại số có đơn vị liên kết với không gian dịch chuyển con* $\tilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$ là đại số có đơn vị trên R với các phần tử sinh $\{p_A : A \in \mathcal{U}\}$ và $\{s_a, s_a^* : a \in \mathcal{A}\}$ thỏa các điều kiện sau:

(1) $p_{\mathrm{X}} = 1$, $p_{A\cap B} = p_A p_B$, $p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$ và $p_\emptyset = 0$, với mọi $A, B \in \mathcal{U}$;

(2) $s_a s_a^* s_a = s_a$ và $s_a^* s_a s_a^* = s_a^*$ với mọi $a \in \mathcal{A}$;

(3) $s_\beta s_\alpha^* s_\alpha s_\beta^* = p_{C(\alpha,\beta)}$ với mọi $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$, trong đó $s_\omega := 1$ và nếu $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ thì $s_\alpha := s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$ and $s_\alpha^* := s_{\alpha_n}^* \cdots s_{\alpha_1}^*$.

Từ (3), nếu $\beta = \omega$, ta nhận được $s_\omega s_\alpha^* s_\alpha s_\omega^* = s_\alpha^* s_\alpha = p_{C(\alpha,\omega)} = p_{F_\alpha}$ với mọi $\alpha \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}$. Nếu $\alpha = \omega$, ta có $s_\beta s_\omega^* s_\omega s_\beta^* = s_\beta s_\beta^* = p_{C(\omega,\beta)} = p_{Z_\beta}$ với mọi $\beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$. Theo đó ta có $s_\alpha = s_\alpha s_\alpha^* s_\alpha = p_{Z_\alpha} s_\alpha$ và $s_\alpha^* = s_\alpha^* s_\alpha s_\alpha^* = s_\alpha^* p_{Z_\alpha}$.

Ngọn tương đối của (A, α), trong đó $\alpha \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ và $A \in \mathcal{U}$, được định nghĩa bởi

$$r(A, \alpha) = \{x \in \mathrm{X} : \alpha x \in A\}.$$

Bổ đề 2.1.7 ([12])**.** *Cho X là một không gian dịch chuyển con, $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$ là đại số có đơn vị liên kết với X, $a, b \in \mathcal{A}$, và $\gamma, \alpha \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$.*

(1) Nếu $\beta := b\gamma \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$, thì $s_\beta^* s_a = \delta_{b,a} s_\gamma^* p_{F_a}$;

(2) Nếu $A \in \mathcal{U}$, thì $p_A s_\alpha = s_\alpha p_{r(A,\alpha)}$ và $s_\alpha^* p_A = p_{r(A,\alpha)} s_\alpha^*$.

Các phần tử thuộc $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$ có một số tính chất như sau.

Mệnh đề 2.1.8 ([2])**.** *Cho X là một không gian dịch chuyển con, R là vành giao hoán có đơn vị và* $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$ *là đại số có đơn vị liên kết với X. Khi đó,*

(1) $s_a^* s_b = \delta_{a,b} p_{F_a}$ *với mọi* $a, b \in \mathcal{A}$*;*

(2) $s_\alpha^* s_\alpha$ *và* $s_\beta^* s_\beta$ *giao hoán với mọi* $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$*;*

(3) $s_\alpha^* s_\alpha$ *và* $s_\beta s_\beta^*$ *giao hoán với mọi* $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$*;*

(4) $s_\alpha s_\beta = 0$ *với mọi* $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ *sao cho* $\alpha\beta \notin \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$*;*

(5) $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$ *là R-đại số sinh bởi tập* $\{s_a, s_a^* : a \in \mathcal{A}\} \cup \{1\}$.

Chứng minh. (1) Theo Định nghĩa 2.1.6, ta có thể viết

$$s_a^* s_b = s_a^* p_{Z_a} p_{Z_b} s_b = s_a^* p_{Z_a \cap Z_b} s_b.$$

Nếu $a \neq b$, ta có $Z_a \cap Z_b = \emptyset$ và $s_a^* s_b = 0$. Nếu $a = b$, ta có $s_a^* s_b = s_a^* p_{Z_a} s_a = s_a^* s_a = p_{F_a}$. Ta có điều cần chứng minh.

(2; 3) Theo Định nghĩa 2.1.6, ta dễ dàng chỉ ra được $s_\alpha^* s_\alpha s_\beta^* s_\beta = p_{F_\alpha \cap F_\beta} = s_\beta^* s_\beta s_\alpha^* s_\alpha$ và $s_\alpha^* s_\alpha s_\beta s_\beta^* = p_{F_\alpha \cap Z_\beta} = s_\beta s_\beta^* s_\alpha^* s_\alpha$.

(4) Xét $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ sao cho $\alpha\beta \notin \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$. Trong trường hợp này

$$F_\alpha \cap Z_\beta = \{x \in \mathrm{X} : \alpha x \in \mathrm{X}\} \cap \{\beta x \in \mathrm{X} : x \in \mathrm{X}\} = \{\beta x \in \mathrm{X} : \alpha\beta x \in \mathrm{X}\} = \emptyset.$$

Khi đó ta có $s_\alpha s_\beta = s_\alpha s_\alpha^* s_\alpha s_\beta s_\beta^* s_\beta = s_\alpha p_{F_\alpha} p_{Z_\beta} s_\beta = s_\alpha p_{F_\alpha \cap Z_\beta} s_\beta = 0$.

(5) Phép chiếu trên các phần tử sinh của đại số Boolean $\mathcal{U}$ có thể viết dưới dạng $p_{C(\alpha,\beta)} = s_\beta s_\alpha^* s_\alpha s_\beta^*$. Khi đó, ta thấy rằng nó thuộc về R-đại số sinh bởi $\{s_a, s_a^* : a \in \mathcal{A}\}$. Nếu $\alpha = \beta = \omega$, ta có $p_{C(\alpha,\beta)} = p_X = 1$. Do đó $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$ là R-đại số sinh bởi tập $\{s_a, s_a^* : a \in \mathcal{A}\} \cup \{1\}$.

□

Mệnh đề 2.1.9 ([2])**.** *Cho X là một không gian dịch chuyển con, R là vành giao hoán có đơn vị. Đại số liên kết với không gian dịch chuyển con có đơn vị $\widetilde{\mathcal{A}}_R(X)$ là đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc với các phần tử thuần nhất bậc n như sau*

$$\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})_n = \operatorname{span}_R \left\{ s_\alpha p_A s_\beta^* : \alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}, A \in \mathcal{U} \text{ và } |\alpha| - |\beta| = n \right\}.$$

Cho A là R-đại số không có đơn vị. Ta định nghĩa *đơn vị hóa của A* là R-đại số $A \oplus R$ với phép cộng và phép nhân được định nghĩa như sau

$$(a, r) + (b, s) = (a + b, r + s),$$

$$(a, r)(b, s) = (ab + sa + rb, rs).$$

Mệnh đề 2.1.10 ([2])**.** *Cho R là vành giao hoán có đơn vị, X là không gian dịch chuyển con. Khi đó, các phát biểu sau đúng.*

(1) Nếu $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ là đại số có đơn vị, thì nó đẳng cấu với $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$.

(2) Nếu $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ không có đơn vị, thì đơn vị hóa của nó đẳng cấu với $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$.

Chứng minh. Theo định nghĩa của đại số, Mệnh đề 2.1.3, Mệnh đề 2.1.5 và phép bao hàm $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, ta có $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ đẳng cấu với đại số con của $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$ sinh bởi $\{s_a, s_a^* : a \in \mathcal{A}\}$. Do đó, ta xét $\mathcal{A}_R(\mathrm{X}) \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$. Hơn nữa, phép bao hàm này bảo toàn tính phân bậc.

(1) Giả sử $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ là đại số có đơn vị. Theo [2, Theorem 4.5] và [16, Corolary 6.5], $\mathcal{B}$ có phần tử đỉnh I. Giả sử rằng $I \neq \mathrm{X}$. Khi đó tồn tại $x = (x_0 x_1 \cdots) \in \mathrm{X} \backslash I$, do đó $C(\omega, x_0) \nsubseteq I$ (mâu thuẫn). Do đó, $I = \mathrm{X}$ và $\mathcal{B} = \mathcal{U}$. Từ đó suy ra $\mathcal{A}_R(\mathrm{X}) = \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$.

(2) Nếu $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ là đại số không có đơn vị. Theo tính chất phổ dụng của $\mathcal{A}_R(\mathrm{X}) \oplus R$ như một R-môđun, tồn tại một ánh xạ tuyến tính $\Phi : \mathcal{A}_R(\mathrm{X}) \oplus R \to \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$ được cho bởi $\Phi(a, r) = a + r1$, là ánh xạ toàn ánh theo Mệnh đề 2.1.8.

Ta có thể dễ dàng kiểm tra xem Φ có tính nhân hay không. Để chứng minh tính đơn ánh, giả sử rằng $\Phi(a,r)=0$ đối với một số $(a,r)\in\mathcal{A}_R(\mathrm{X})\oplus R$. Khi đó $r1=-a\in\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$. Vì $r1$ có bậc 0 trong phép phân loại $\mathbb{Z}$ của $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$, $-a$ cũng có bậc 0 Do đó, chúng ta có thể viết

$$-a=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j p_{B_j}+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i s_{\alpha_i}p_{A_i}s_{\beta_i}^*$$

trong đó $|\alpha_i|=|\beta_i|>0, \lambda_j,\gamma_i\in R\backslash\{0\}$ và $B_j, A_i\in\mathcal{B}$ cho mỗi i,j. Đặt $A=\mathrm{X}\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n}C\left(\omega,\beta_i\right)\cup\bigcup_{j=1}^{m}B_j\right)$, ta thấy rằng $A\neq\emptyset$, vì $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ không có đơn vị. Theo Định nghĩa 2.1.2, mục (4) và (5), ta có

$$-ap_A=\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j p_{B_j}+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i s_{\alpha_i}p_{A_i}s_{\beta_i}^*\right)p_A=0$$

Khi đó $rp_A=-ap_A=0$ và theo [2, Theorem 4.5], ta kết luận rằng $r=0$. Vì $a=-r1$, ta có $a=0$, do đó Φ là đơn ánh, ta có điều cần chứng minh. $\square$

Trong [2], các tác giả đã chỉ ra rằng lớp đại số liên kết với không gian dịch chuyển con tùy ý chứa nhiều lớp đại số quan trọng, như đại số đường Leavitt của đồ thị, đại số đường Leavitt của siêu đồ thị. Sau đây, chúng tôi sẽ trình bày lại các ví dụ này.

2.1.1 Đại số đường Leavitt của đồ thị

Chúng tôi nhắc lại định nghĩa của đại số đường Leavitt liên kết với đồ thị.

Định nghĩa 2.1.11 ([10])**.** Cho $E=\left(E^0,E^1,r,s\right)$ là một đồ thị có hướng, R là một vành giao hoán có đơn vị. *Đại số đường Leavitt $L_R(E)$ liên kết với E* với các hệ số trong R là R-đại số sinh bởi các tập $\left\{v:v\in E^0\right\}$ và $\left\{e,e^*:e\in E^1\right\}$ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $e,e'\in E^1$ và $v,v'\in E^0$:

(1) $vv' = \delta_{v,v'}v$,

(2) $s(e)e = er(e) = e$,

(3) $r(e)e^* = e^*s(e) = e^*$,

(4) $e^*e' = \delta_{e,e'}r(e)$,

(5) $v = \sum_{e:s(e)=v} ee^*$ với mọi đỉnh v chính quy.

trong đó δ là ký hiệu Kronecker.

Mệnh đề 2.1.12. (Tính chất phổ dụng của $L_R(E)$**)** ([10]) Giả sử E là một đồ thị, R là vành giao hoán có đơn vị và A là một R-đại số chứa một tập các phần tử lũy đẳng đôi một trực giao $\{a_v \mid v \in E^0\}$, và hai tập hợp $\{a_e \mid e \in E^1\}$, $\{b_e \mid e \in E^1\}$ sao cho

(1) $a_{s(e)}a_e = a_e a_{r(e)} = a_e$ và $a_{r(e)}b_e = b_e a_{s(e)} = b_e$ với mọi $e \in E^1$,

(2) $b_f a_e = \delta_{e,f} a_{r(e)}$ với mọi $e, f \in E^1$,

(3) $a_v = \sum_{\{e \in E^1 | s(e)=v\}} a_e b_e$ với mọi đỉnh chính quy $v \in E^0$.

Theo các điều kiện trong định nghĩa đại số đường đi Leavitt, tồn tại một đồng cấu R-đại số duy nhất $\varphi : L_R(E) \to A$ sao cho $\varphi(v) = a_v, \varphi(e) = a_e$, và $\varphi(e^*) = b_e$ với mọi $v \in E^0$ và $e \in E^1$.

Mệnh đề 2.1.13 ([10])**.** *Cho E là một đồ thị, R là vành giao hoán có đơn vị. Đại số đường Leavitt $L_R(E)$ là $\mathbb{Z}$-phân bậc, với thành phần thuần nhất bậc n là*

$$L_R(E)_n = \operatorname{span}_R \left\{ \alpha\beta^* : \alpha, \beta \in E^* \text{ và } |\alpha| - |\beta| = n \right\}.$$

Chứng minh. Gọi A là R-đại số tự do sinh bởi $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$. Với mỗi $v \in E^0$ và $e \in E^1$, ta định nghĩa $deg(v) = 0, deg(e) = 1$ và $deg(e^*) = -1$. Với mọi đơn thức $rx_1 \dots x_n$ trong đó $r \in R$ và $x_i \in \left\{v \in E^0\right\} \cup \left\{e, e^* \mid e \in E^1\right\}$, ta đặt $deg\,(rx_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} deg\,(x_i)$. Khi đó A là R-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc với phần tử thuần nhất bậc n với $n \in \mathbb{Z}$ là:

$$A_n = \mathrm{span}_R\{x_1 \dots x_n \mid x_i \in \left\{v \in E^0\right\} \cup \left\{e, e^* \mid e \in E^1\right\} \cup \left\{e, e^* \mid e \in E^1\right\} \\ \text{và } deg\,(x_1 \dots x_n) = n\}.$$

Gọi I là iđêan của A sinh bởi tất cả các phần tử cảm sinh từ các đồng nhất (1) - (5) trong Định nghĩa 2.1.11. Rõ ràng, I là iđêan thuần nhất. Do đó, $L_R(E) = A/I$ là $\mathbb{Z}$-phân bậc. □

Định lý 2.1.14. (Định lý phân bậc duy nhất) ([13]) Cho E là một đồ thị và R là một vành giao hoán có đơn vị. Nếu T là một vành phân bậc và $\phi : L_R(E) \to T$ là một đồng cấu vành phân bậc sao cho $\phi(rv) \neq 0$ với mọi $v \in E^0$ và $r \in R\backslash\{0\}$, thì ϕ là đơn ánh.

Mệnh đề 2.1.15 ([2])**.** *Cho E là đồ thị không có đỉnh dìm và không có đỉnh nào vừa là đỉnh nguồn vừa phát ra vô hạn. Giả sử* X *là dịch chuyển cạnh một phía của E. Khi đó, $\mathcal{A}_R(\mathrm{X}) \cong L_R(E)$.*

Chứng minh. Ta xây dựng một ánh xạ từ $L_R(E)$ đến $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ như sau. Với $e \in E$, đặt $t_e := s_e$ và $t_{e^*} := s_e^*$. Nếu $v \in E^0$ không phải đỉnh nguồn, tồn tại $e \in r^{-1}(v)$, ta đặt $q_v := p_{C(e,\omega)}$. Trong trường hợp này

$$C(e, \omega) = \{x \in X : ex \in X\} = \{x \in X : s(x) = r(e)\} = \{x \in X : s(x) = v\}.$$

Nếu $v \in E^0$ là đỉnh nguồn, thì v không phát ra vô hạn (theo giả thuyết) và ta định nghĩa $q_v := \sum_{e \in s^{-1}(v)} s_e s_e^*$. Xét $e, f \in s^{-1}(v)$ và $e \neq f$, ta có

$C(\omega, e) \cap C(\omega, f) = \emptyset$. Theo Định nghĩa 2.1.2, ta có thể viết

$$q_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} p_{C(\omega,e)} = p_{\cup_{e\in s-1}(v) C(\omega,e)}.$$

Ta cần chứng minh rằng $\left\{t_e, t_{e^*} : e \in E^1\right\}$ và $\left\{q_v : v \in E^0\right\}$ thỏa mãn các điều kiện của $L_R(E)$ trong Định nghĩa 2.1.11. Thật vậy,

(1) $q_{v_1} q_{v_2} = \delta_{v_1, v_2} q_{v_1}$ với mọi $v_1, v_2 \in E^0$.

Ta có $p_A p_A = p_A$ nên p_A là phần tử lũy đẳng với mọi $A \in \mathcal{B}$. Do đó với $v \in E^0$, ta có $q_v q_v = q_v$. Giả sử $v_1, v_2 \in E^0$ sao cho $v_1 \neq v_2$ và $r^{-1}(v_1) \cap r^{-1}(v_2) = \emptyset$. Ta xét các trường hợp sau.

- Nếu v_1 và v_2 không là đỉnh nguồn, thì với $e \in r^{-1}(v_1)$ và $e' \in r^{-1}(v_2)$, ta có $C(e, \omega) \cap C(e', \omega) = \{x \in X : s(x) = v_1\} \cap \{x \in X : s(x) = v_2\} = \emptyset$. Khi đó ta có $q_{v_1} q_{v_2} = p_{C(e,\omega)} p_{C(e',\omega)} = 0$.

- Nếu v_1 là đỉnh nguồn và v_2 không là đỉnh nguồn. Giả sử $e' \in r^{-1}(v_2)$. Khi đó $C(\omega, e) \cap C(e', \omega) = \{ex \in X : x \in X\} \cap \{x \in X : s(x) = v_2\} = \emptyset$. Thật vậy, nếu $e \in s^{-1}(v_1)$ thì $C(e', \omega) \cap C(\omega, e) = \{ex \in X : x \in X, s(ex) = v_2\} = \emptyset$ do $s(ex) = v_1 \neq v_2$. Do đó, $q_{v_1} q_{v_2} = \sum_{e \in s^{-1}(v_1)} p_{C(\omega,e)} p_{C(e',\omega)} = 0$

- Nếu v_1 và v_2 đều là đỉnh nguồn. Vì $v_1 \neq v_2$, giả sử $e \in s^{-1}(v_1)$ và $e' \in s^{-1}(v_1)$ ta có $C(\omega, e) \cap C(\omega, e') = \{ex \in X : x \in X\} \cap \{e'x \in X : x \in X\} = \emptyset$. Do đó, theo Định nghĩa 2.1.2 ta có $q_{v_1} q_{v_2} = 0$.

(2) $q_{s(e)} t_e = t_e q_{r(e)} = t_e$ với mọi $e \in E^1$.

Giả sử $e \in E^1$. Nếu $s(e)$ là đỉnh nguồn, thì theo Định nghĩa 2.1.2 ta nhận được

$$q_{s(e)} t_e = \sum_{e' \in s^{-1}(s(e))} s_{e'} s_{e'}^* s_e = s_e s_e^* s_e = s_e = t_e.$$

Nếu $s(e)$ không là đỉnh nguồn, ta lấy $f \in E^1$ sao cho $r(f) = s(e)$. Lưu ý rằng $C(e,\omega) = \{x \in \mathbf{X} : s(x) = r(e)\} = \{x \in \mathbf{X} : s(x) = r(fe)\} = C(fe,\omega)$ và $p_{C(f,\omega)}s_e = s_f^* s_f s_e = s_f^* s_f s_e s_e^* s_e = s_e s_e^* s_f^* s_f s_e = s_e p_{C(fe,\omega)}$ do $s_f^* s_f$ và $s_e s_e^*$ giao hoán theo Mệnh đề 2.1.8. Khi đó, ta có

$$q_{s(e)}t_e = p_{C(f,\omega)}s_e = s_e p_{C(fe,\omega)} = s_e p_{C(e,\omega)} = s_e s_e^* s_e = s_e = t_e.$$

Do $r(e)$ không là đỉnh nguồn nên $q_{r(e)} = p_{C(e,\omega)}$. Dễ thấy, từ công thức của hai trường hợp trên ta thu được $t_e q_{r(e)} = t_e$.

(3) $q_{r(e)}t_e^* = t_e^* q_{s(e)} = t_e^*$ với mọi $e \in E^1$.

Giả sử $e \in E^1$. Nếu $s(e)$ là đỉnh nguồn, thì theo Định nghĩa 2.1.2 ta nhận được

$$t_e^* q_{s(e)} = \sum_{e' \in s^{-1}(s(e))} s_e^* s_{e'} s_{e'}^* = s_e^* s_e s_e^* = s_e^* = t_e^*.$$

Nếu $s(e)$ không là đỉnh nguồn. Lấy $f \in E^1$ sao cho $r(f) = s(e)$. Lưu ý rằng $C(e,\omega) = \{x \in \mathbf{X} : s(x) = r(e)\} = \{x \in \mathbf{X} : s(x) = r(fe)\} = C(fe,\omega)$ và $s_e^* p_{C(f,\omega)} = s_e^* s_f^* s_f = s_e^* s_e s_e^* s_f^* s_f = s_e^* s_f^* s_f s_e s_e^* = p_{C(fe,\omega)} s_e^*$ do $s_f^* s_f$ và $s_e s_e^*$ giao hoán theo Mệnh đề 2.1.8. Khi đó, ta có

$$t_e^* q_{s(e)} = s_e^* p_{C(f,\omega)} = p_{C(fe,\omega)} s_e^* = p_{C(e,\omega)} s_e^* = s_e^* s_e s_e^* = s_e^* = t_e^*.$$

Do $r(e)$ không là đỉnh nguồn nên $q_{r(e)} = p_{C(e,\omega)}$. Dễ thấy, từ công thức của hai trường hợp trên ta thu được $q_{r(e)} t_e^* = t_e^*$.

(4) $t_e^* t'_e = \delta_{e,e'} q_{r(e)}$ với mọi $e, e' \in E^1$.

Với $e, e' \in E^1$, theo Mệnh đề 2.1.3, ta có

$$t_e^* t_{e'} = s_e^* s_{e'} = \delta_{e,e'} p_{C(e,\omega)} = \delta_{e,e'} q_{r(e)}.$$

(5) $q_v = \sum_{e:s(e)=v} t_e t_e^*$ với mọi đỉnh v chính quy.

Nếu $v \in E^0_{\text{reg}}$ là đỉnh nguồn thì ta có điều cần chứng minh. Nếu $v \in E^0_{\text{reg}}$ không là đỉnh nguồn và $e \in r^{-1}(v)$. Khi đó, $C(e,\omega) = \{x \in \mathbf{X} : s(x) = v\}$ có thể được viết dưới dạng hợp hữu hạn không giao nhau là $C(e,\omega) = \bigsqcup_{f\in s^{-1}(v)} C(\omega, f)$. Do đó

$$q_v = p_{C(e,\omega)} = \sum_{f\in s^{-1}(v)} p_{C(\omega,f)} = \sum_{f\in s^{-1}(v)} s_f s_f^* = \sum_{f\in s^{-1}(v)} t_f t_f^*.$$

Theo tính chất phổ dụng của $L_R(E)$, ta thu được một đồng cấu R-đại số $\Phi : L_R(E) \to \mathcal{A}_R(\mathrm{X})$. Khi đó, Φ là toàn ánh vì $\left\{s_e, s_e^* : e \in E^1\right\}$ là tập sinh của $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ theo Mệnh đề 2.1.3. Ta dễ dàng thấy rằng phép đồng cấu này phân bậc trên $\mathbb{Z}$. Hơn nữa, nếu $r \in R\backslash\{0\}$ và $v \in E^0$ không phải là nguồn, thì $rq_v = rp_{C(e,\omega)}$ với một số $e \in r^{-1}(v)$. Vì đồ thị không có đỉnh dìm, $C(e,\omega) \neq \emptyset$, nói cách khác $rq_v \neq 0$. Theo Định lý phân bậc duy nhất của đại số đường đi Leavitt ta có Φ là ánh xạ đẳng cấu. $\square$

Mệnh đề trên có thể không đúng nếu trong đồ thị có một đỉnh vừa là nguồn vừa là phát vô hạn.

Ví dụ 2.1.16. Cho đồ thị E với $E^0 = \{v, w\}, E^1 = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{f\}, s\left(e_n\right) = v$ và $r\left(e_n\right) = w = s(f) = r(f)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Theo [13, Section 4.2] ta có $L_R(E)$ là đại số có đơn vị do E^0 là tập hữu hạn. Mặt khác, ta lưu ý rằng với mọi $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ không đồng thời là từ trống, thì tập $C(\alpha, \beta)$ là rỗng hoặc chỉ có một phần tử. Khi đó, ta có $\mathcal{B}$ là họ các tập con hữu hạn của X, do đó $X \notin \mathcal{B}$. Theo Mệnh đề 2.1.10, ta có $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$ không có đơn vị. Do đó, $L_R(E)$ không đẳng cấu với $\mathcal{A}_R(\mathrm{X})$.

2.1.2 Đại số đường Leavitt của siêu đồ thị

Trong phần này, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng, với một siêu đồ thị chỉ có các đỉnh chính quy, đại số dịch chuyển con liên kết với dịch chuyển cạnh một phía của nó đẳng cấu với đại số đường đi Leavitt liên kết với siêu đồ thị. Bây giờ, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm, tính chất cơ bản của đại số đường Leavitt của siêu đồ thị.

Định nghĩa 2.1.17 ([2])**.** Cho $\mathcal{G}$ là một siêu đồ thị, R là một vành giao hoán có đơn vị. Đại số đường Leavitt của $\mathcal{G}$, được ký hiệu là $L_R(\mathcal{G})$, là R-đại số sinh bởi $\left\{s_e, s_e^* : e \in \mathcal{G}^1\right\} \cup \left\{p_A : A \in \mathcal{G}^0\right\}$ thỏa mãn các điều kiện sau

(1) $p_\emptyset = 0, p_A p_B = p_{A\cap B}, p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$, với mọi $A, B \in \mathcal{G}^0$;

(2) $p_{s(e)} s_e = s_e p_{r(e)} = s_e$ và $p_{r(e)} s_e^* = s_e^* p_{s(e)} = s_e^*$ với mọi $e \in \mathcal{G}^1$;

(3) $s_e^* s_f = \delta_{e,f} p_{r(e)}$ với mọi $e, f \in \mathcal{G}$;

(4) $p_v = \sum_{s(e)=v} s_e s_e^*$ với $0 < \left|s^{-1}(v)\right| < \infty$.

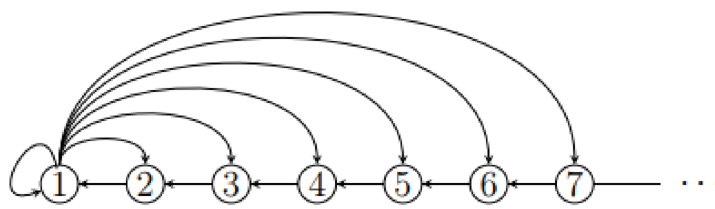
trong đó δ là Kronecker delta.

Mệnh đề 2.1.18 ([14])**.** *Cho $\mathcal{G}$ là một siêu đồ thị, R là một vành giao hoán có đơn vị. Đại số đường Leavitt $L_R(\mathcal{G})$ của $\mathcal{G}$ là $\mathbb{Z}$-phân bậc, với thành phần thuần nhất bậc n là*

$$\mathcal{A}_R(\mathrm{X})_n = \operatorname{span}_R \left\{ s_\alpha p_A s_\beta^* \mid \alpha, \beta \in \mathcal{G}^*, A \in \mathcal{G}^0 \text{ và } |\alpha| - |\beta| = n \right\}.$$

Định lý 2.1.19. (Định lý phân bậc duy nhất của $L_R(\mathcal{G})$) ([14]) Cho $\mathcal{G}$ là một siêu đồ thị, R là một vành giao hoán có đơn vị và T là một vành $\mathbb{Z}$-phân bậc. Nếu $\pi : L_R(\mathcal{G}) \to T$ là một đồng cấu vành phân bậc sao cho $\pi(rp_A) \neq 0$ với mọi $A \in \mathcal{G}^0$ khác rỗng và $r \in R$ khác không, thì π là đơn ánh.

Ví dụ 2.1.20. Cho $\mathcal{G}$ là siêu đồ thị có tập hợp các đỉnh đếm được $G^0 = \{1, 2, \ldots\}$, và tập hợp các cạnh đếm được $\{e_1, e_2, \ldots\}$, sao cho $s(e_i) = i$, với mọi $i, r(e_1) = G^0$ và $r(e_j) = j - 1$ với $j > 1$. Siêu đồ thị này được mô tả như hình dưới đây. Cho $\mathrm{X}_{\mathcal{G}}$ là không gian dịch chuyển con liên kết với nó và lưu ý rằng $\mathcal{U} = \mathcal{B}$ vì $C(e_1, \omega) = \mathrm{X}_{\mathcal{G}}$. Do đó $\mathcal{A}_R(\mathrm{X}_{\mathcal{G}}) = \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X}_{\mathcal{G}})$ theo Mệnh đề 2.1.10.



Mệnh đề 2.1.21 ([2])**.** *Cho $\mathcal{G}$ là một siêu đồ thị sao cho mọi đỉnh đều là đỉnh chính quy và $\mathrm{X}_{\mathcal{G}}$ là dịch chuyển cạnh một phía của $\mathcal{G}$. Khi đó, $\mathcal{A}_R(\mathrm{X}_{\mathcal{G}}) \cong L_R(\mathcal{G})$.*

Chứng minh. Lưu ý rằng với $e \in \mathcal{G}^1$, ta có $F_e = C(e, \omega) = \{x \in \mathbf{X}_{\mathcal{G}} : s(x) \in r(e)\}$.

Với mỗi $A \in P(G^0)$, đặt $A' = \{x \in \mathrm{X}_{\mathcal{G}} : s(x) \in A\}$. Khi đó, với $A, B \in P(G^0)$, ta có $(A \cup B)' = A' \cup B'$ và $(A \cap B)' = A' \cap B'$. Ngoài ra, với $v \in G^0$ là đỉnh chính quy, ta có $\{v\}' = \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} C(\omega, e) \in \mathcal{B}$. Với $e \in \mathcal{G}^1$, chúng ta có $r(e)' = C(e, \omega) \in \mathcal{B}$. Theo Hệ quả 1.1.4, ta có $A' \in \mathcal{B}$ với mọi $A \in \mathcal{G}^0$.

Theo đó, ta xây dựng một ánh xạ từ $L_R(\mathcal{G})$ đến $\mathcal{A}_R(\mathrm{X}_{\mathcal{G}})$ như sau. Với $e \in \mathcal{G}^1$, ta đặt $t_e := s_e$ và $t_e^* := s_e^*$. Với mỗi $A \in \mathcal{G}^0$, ta đặt $q_A := p_{A'}$. Ta cần chứng minh rằng $\{t_e, t_e^* : e \in \mathcal{G}^1\}$ và $\{q_A : A \in \mathcal{G}^0\}$ thỏa mãn các điều kiện trong định nghĩa của $L_R(\mathcal{G})$. Thật vậy,

(1) Đối với tập rỗng, ta có $q_\emptyset = p_{\emptyset'} = p_\emptyset = 0$.

Với $A, B \in \mathcal{G}^0$, ta có $q_A q_B = p_{A'} p_{B'} = p_{A' \cap B'} = p_{(A \cap B)'} = q_{A \cap B}$.

Tương tự, ta thấy rằng $q_{A \cup B} = q_A + q_B - q_{A \cap B}$.

(2) Cho $e \in \mathcal{G}^1$ và đặt $v = s(e)$. Khi đó,

$$q_{s(e)}t_e = \sum_{f \in s^{-1}(v)} p_{C(\omega,f)} s_e = \sum_{f \in s^{-1}(v)} s_f s_f^* s_e = s_e = t_e,$$

$$t_e q_{r(e)} = s_e p_{C(e,\omega)} = s_e s_e^* s_e = s_e = t_e.$$

Các mối quan hệ liên quan đến t_{e^*} được chứng minh tương tự như vậy.

(3) Giả sử $e, f \in \mathcal{G}_1$, theo Mệnh đề 2.1.3, ta có

$$t_e^* t_f = s_e^* s_f = \delta_{e,f} p_{C(e,\omega)} = \delta_{e,f} q_{r(e)}.$$

(4) Nếu v là một đỉnh chính quy, thì

$$q_v = \sum_{f \in s^{-1}(v)} p_{C(\omega,f)} = \sum_{f \in s^{-1}(v)} s_f s_f^* = \sum_{f \in s^{-1}(v)} t_f t_f^*.$$

Theo tính chất phổ dụng của $L_R(\mathcal{G})$, ta thu được một đồng cấu R-đại số $\Phi \colon L_R(\mathcal{G}) \to \mathcal{A}_R(\mathrm{X}_\mathcal{G})$ là toàn ánh vì $\left\{s_e, s_e^* : e \in \mathcal{G}^1\right\}$ là tập sinh của $\mathcal{A}_R(\mathrm{X}_\mathcal{G})$ theo Mệnh đề 2.1.3. Dễ thấy rằng đồng cấu này là đồng cấu $\mathbb{Z}$-phân bậc. Hơn nữa, nếu $r \in R\backslash\{0\}$ và $A \in \mathcal{G}^0$ khác rỗng, thì $rq_A \neq 0$ theo [2, Theorem 4.5]. Áp dụng Định lý phân bậc duy nhất của siêu đồ thị ta nhận được Φ là đẳng cấu. □

2.2 Biểu diễn bất khả quy của đại số liên kết với không gian dịch chuyển con

Trong phần này, chúng tôi trình bày các biểu diễn bất khả quy đã biết trên đại số liên kết với không gian dịch chuyển con trên bảng chữ cái tùy ý dựa trên bài báo [7].

Định nghĩa 2.2.1 ([7])**.** Cho X là một không gian dịch chuyển con và R là một vành giao hoán có đơn vị. Ta kí hiệu $\mathbb{P}$ là R-môđun tự do với cơ sở $\{\delta_x : x \in \mathrm{X}\}$.

Ký hiệu $[p]$ có nghĩa là $[p] = 1$ nếu p đúng và $[p] = 0$ nếu ngược lại.

Với mọi $A \in \mathcal{U}$, ta định nghĩa R-tự đồng cấu $P_A : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ trên một phần tử cơ sở $\delta_x, x \in X$ như sau

$$P_A\left(\delta_x\right) = [x \in \mathrm{X}]\delta_x.$$

Với mỗi $a \in \mathcal{A}$, ta định nghĩa R-tự đồng cấu $S_a, S_a^* : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ trên một phần tử cơ sở δ_x, $x = x_1x_2x_3\ldots \in \mathbf{X}$ như sau

$$S_a\left(\delta_x\right) = [ax \in \mathrm{X}]\delta_{ax},$$

$$S_a^*\left(\delta_x\right) = \left[x_1 = a\right]\delta_{\sigma(x)}.$$

Ta ký hiệu R-đại số của tất cả R-tự đồng cấu của $\mathbb{P}$ bởi $\mathrm{End}_R(\mathbb{P})$. Rõ ràng, $P_A, S_a, S_a^* \in \mathrm{End}_R(\mathbb{P})$, với $A \in \mathcal{U}$ và $a \in \mathcal{A}$.

Tiếp theo chúng tôi sẽ chứng minh rằng các phép tự đồng cấu được định nghĩa ở trên là một biểu diễn của $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$.

Mệnh đề 2.2.2 ([7])**.** *Cho X là một không gian dịch chuyển con và R là một vành giao hoán có đơn vị. Khi đó tồn tại một R-đồng cấu đại số* $\phi : \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}_R(\mathbb{P})$ *sao cho*

$$\phi\left(p_A\right) = P_A, \phi\left(s_a\right) = S_A \text{ và } \phi\left(s_a^*\right) = S_a^*$$

trong đó $A \in \mathcal{U}$ *và* $a \in \mathcal{A}$*.*

Chứng minh. Vì $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$ là một đại số phổ dụng, nên ta chỉ cần kiểm tra rằng các phần tử P_A, S_a, S_a^*, với $A \in \mathcal{U}$ và $a \in \mathcal{A}$, thỏa mãn ba điều kiện của Định nghĩa 2.1.6.

(1) Dễ dàng chứng minh được $P_{\mathrm{X}} = 1,\ P_{A\cap B} = P_A P_B,\ P_{A\cup B} = P_A + P_B - P_{A\cap B}$ và $P_\emptyset = 0$, với mọi $A, B \in \mathcal{U}$.

(2) Xét $a \in \mathcal{A}$ và $x \in \mathrm{X}$. Nếu $ax \in X$ thì ta có

$$S_a S_a^* S_a(\delta_x) = S_a S_a^*(\delta_{ax}) = S_a(\delta_x)$$

và nếu $ax \notin \mathrm{X}$ thì $S_a(\delta_x) = 0$. Do đó, $S_a S_a^* S_a(\delta_x) = S_a(\delta_x)$ với mọi $x \in \mathrm{X}$ và khi đó, $S_a S_a^* S_a = S_a$ với mọi $a \in \mathcal{A}$. Tương tự, ta có $S_a^* S_a S_a^* = S_a^*$ vói mọi $a \in \mathcal{A}$.

(3) Xét $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ và $x \in \mathbf{X}$. Nếu $x \in C(\alpha, \beta)$, thì $x = \beta y$ và $\alpha y \in \mathbf{X}$. Do đó, trong trường hợp này, chúng ta có

$$\begin{aligned} S_\beta S_\alpha^* S_\alpha S_\beta^*(\delta_x) &= S_\beta S_\alpha^* S_\alpha S_\beta^*(\delta_{\beta y}) = S_\beta S_\alpha^* S_\alpha(\delta_y) = \\ &= S_\beta S_\alpha^*(\delta_{\alpha y}) = S_\beta(\delta_{\alpha y}) = S_\beta(\delta_y) = \delta_{\beta y} = \delta_x = P_{C(\alpha,\beta)}(\delta_x) \end{aligned}$$

Giả sử $x = x_1 x_2 x_3 \ldots \notin C(\alpha, \beta)$. Khi đó $x_1 \ldots x_{|\beta|} \neq \beta$, hoặc $x = \beta y$ và $\alpha y \notin \mathrm{X}$. Nếu $x_1 \ldots x_{|\beta|} \neq \beta$ thì $S_\beta^*(\delta_x) = 0$. Nếu $x = \beta y$ và $\alpha y \notin \mathrm{X}$ thì

$$S_\alpha S_\beta^*(\delta_x) = S_\alpha S_\beta^*(\delta_{\beta y}) = S_\alpha(\delta_y) = 0$$

Do đó, khi $x \notin C(\alpha, \beta)$, ta có

$$S_\beta S_\alpha^* S_\alpha S_\beta^*(\delta_x) = 0 = p_{C(\alpha,\beta)}(\delta_x)$$

Vì vậy, ta có với mọi $x \in \mathrm{X}$ thì $S_\beta S_\alpha^* S_\alpha S_\beta^*(\delta_x) = P_{C(\alpha,\beta)}(\delta_x)$ là đúng, và do đó

$$S_\beta S_\alpha^* S_\alpha S_\beta^* = P_{C(\alpha,\beta)}.$$

$\square$

Đồng cấu π trong Mệnh đề 2.2.2 không phải lúc nào cũng trung thành. Ví dụ, cho $\mathcal{A} = \{a\}$ và $\mathrm{X} = \{a^\infty\}$. Khi đó $S_a(\delta_{a^\infty}) = \delta_{a^\infty} = P_X(\delta_{a^\infty})$ và do đó $S_a = P_{\mathrm{X}}$ (trong $\mathrm{End}_R(\mathbb{P})$). Tuy nhiên, theo [7, Theorem 2.4], ta thu được $s_a \neq p_{\mathrm{X}}$ và do đó phép đồng cấu π trong Mệnh đề 2.2.2 là không trung thành.

Sau đây ta đưa ra điều kiện để phép đồng cấu π của trong Mệnh đề 2.2.2 là trung thành. Ta nhắc lại khái niệm về chu trình không lối thoát.

Định nghĩa 2.2.3 ([7])**.** Cho X là một không gian dịch chuyển con, $c \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$, và $\emptyset \neq A \in \mathcal{U}$. Cặp (A, c) là một *chu trình* nếu $A \subseteq r(A, c)$. Chu trình (A, c) *không có lối thoát* nếu $A = \{c^\infty\}$.

Định lý 2.2.4 ([7])**.** *Cho X là một không gian dịch chuyển con và R là một vành. Khi đó, đồng cấu $\pi : \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}_R(\mathbb{P})$ được xác định như trên là trung thành nếu và chỉ nếu X không có chu trình nào không có lối thoát.*

Chứng minh. Giả sử rằng không có chu trình nào không có lối thoát. Khi đó, vì $\pi(\gamma p_A) = \gamma P_A \neq 0$ với mỗi $0 \neq \gamma \in R$, nên theo Định lý duy nhất Cuntz-Krieger cho đại số dịch chuyển con (xem [6]) thì π là trung thành.

Ngược lại, giả sử rằng tồn tại một chu trình không có lối thoát (A, c) trong X. Khi đó, với mỗi $x \in \mathrm{X}$, ta có

$$S_c P_A(\delta_x) = [x \in A] S_c(\delta_x) = [x \in A] S_c(\delta_{c^\infty}) = [x \in A]\delta_{c^\infty} = [x \in A] p_A(\delta_x)$$

và do đó $S_c P_A = P_A$. Vì vậy, $\pi(s_c p_A) = \pi(p_A)$. Tuy nhiên, theo tính phân bậc của [7, Theorem 2.4], ta thu được $s_c p_A \neq p_A$, và do đó π không trung thành. $\square$

Nhận xét 2.2.5 ([7])**.** Đồng cấu π của Mệnh đề 2.2.2 thường không phải là bất khả quy. Chẳng hạn cho X là một không gian dịch chuyển con chứa phần tử y và phần tử z sao cho $\sigma^n(y) \neq \sigma^m(z)$ với mọi $n, m \in \mathbb{N}$. Giả sử $Y \subseteq \mathrm{X}$ là tập hợp

$$Y = \left\{x \in \mathrm{X} : \sigma^n(x) = \sigma^m(z) \text{ với một số } n, m \in \mathbb{N}\right\}$$

và M là R-môđun con của $\mathbb{P}$ sinh bởi $\{\delta_x : x \in Y\}$. Từ định nghĩa của P_A, S_a và S_a^* ta có $P_A(M) \subseteq M, S_A(M) \subseteq M$ và $S_a^*(M) \subseteq M$ với mỗi $A \in \mathcal{U}$ và $a \in \mathcal{A}$. Do đó, M là một môđun con bất biến của π (theo nghĩa là $\pi\left(\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})\right)(M) \subseteq M\Big)$.

Tập Y gợi ý cho ta cách xây dựng các thành phần bất khả quy của biểu diễn π.

Định nghĩa 2.2.6 ([7])**.** Cho X là một không gian dịch chuyển con. Ta nói rằng hai phần tử $x, y \in \mathrm{X}$ là *tương đương*, và viết $x \sim y$, nếu $\exists\, n, m \in \mathbb{N}$ sao cho $\sigma^n(x) = \sigma^m(y)$.

Lưu ý rằng $x \sim y$ nếu và chỉ nếu tồn tại $c, d \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ và $\xi \in \mathrm{X}$ sao cho $x = c\xi$ và $y = d\xi$.

Quan hệ $\sim$ của Định nghĩa 2.2.6 là một quan hệ tương đương. Đối với một phần tử $x \in \mathbf{X}$, ta biểu thị lớp tương đương của nó bằng $[x]$ và định nghĩa $\mathbb{P}_{[x]}$ là R-môđun con của $\mathbb{P}$ sinh bởi $\{\delta_y : y \in [x]\}$. Cho $\widetilde{\mathrm{X}} = \{[x] : x \in X\}$ và ta nhận được

$$\mathbb{P} = \bigoplus_{[x] \in \widetilde{\mathrm{X}}} \mathbb{P}_{[x]}.$$

Sau đây, chúng tôi chỉ ra rằng mỗi môđun con $\mathbb{P}_{[x]}$ là một thành phần bất khả quy của biểu diễn π.

Định lý 2.2.7 ([7])**.** *Cho X là một không gian dịch chuyển con, R là một vành và cho $\pi : \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}_R(\mathbb{P})$ là đồng cấu theo Mệnh đề 2.2.2*

(1) Với mọi $x \in \mathrm{X}$, môđun con $\mathbb{P}_{[x]}$ là π-bất biến, tức là $\pi\left(\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})\right)\left(\mathbb{P}_{[x]}\right) \subseteq \mathbb{P}_{[x]}$;

(2) Nếu R là một trường thì với mỗi $x \in \mathrm{X}$, môđun con $\mathbb{P}_{[x]}$ là bất khả quy, nghĩa là không có môđun con $0 \neq Y \subsetneq \mathbb{P}_{[x]}$ sao cho $\pi\left(\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})\right)(Y) \subseteq Y$.

Chứng minh. (1) Chọn $x \in X$ và cho $y \in X$ sao cho $y \sim x$. Khi đó, với $a \in \mathcal{A}$, ta có $S_a(\delta_y) = [ay \in \mathrm{X}]\delta_{ay}$. Vậy, $S_a(\delta_y) = 0$ ngoại trừ trường hợp $ay \in \mathrm{X}$, nói cách khác $ay \sim x$ (vì $ay \sim y$ và $y \sim x$). Do đó, $\pi(s_a)\left(\mathbb{P}_{[x]}\right) \subseteq \mathbb{P}_{[x]}$.
Tương tự, $\pi(s_a^*)\left(\mathbb{P}_{[x]}\right) \subseteq \mathbb{P}_{[x]}$ và $\pi(p_A)\left(\mathbb{P}_{[x]}\right) \subseteq \mathbb{P}_{[x]}$ với mỗi $a \in \mathcal{A}$ và $A \in \mathcal{U}$. Vì π là một phép đồng cấu, ta có điều cần chứng minh.

(2) Cho $x \in \mathrm{X}$ và $0 \neq Y \subseteq \mathbb{P}_{[x]}$ là một môđun con bất biến π. Ta cần chứng minh rằng $Y = \mathbb{P}_{[x]}$.

Xét $0 \neq y \in Y$. Khi đó $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x^i}$, trong đó $0 \neq \lambda_i \in R$ và $x^i \sim x$ với mọi i, và $x^i \neq x^j$ với mọi $i \neq j$. T có thể viết lại x^i thành $x^i = x_1^i x_2^i x_3^i \ldots, i \in \{1, \ldots, n\}$. Lưu ý rằng, vì $x^i \neq x^j$ với mọi $i \neq j$, tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho

$$x_1^i x_2^i \ldots x_m^i \neq x_1^j x_2^j \ldots x_m^j$$

với mọi $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ và $i \neq j$. Giả sử $\mu = x_1^1 x_2^1 \ldots x_m^1$. Khi đó,

$$\pi\left(\lambda_1^{-1} p_{Z_\mu}\right)(y) = \delta_{x^1}$$

và vì Y là π-bất biến, ta nhận được $\delta_{x^1} \in Y$.

Cuối cùng, chúng ta chứng minh rằng $\delta_z \in Y$ cho mỗi $z \in [x]$. Cho $z \in [x]$. Khi đó $z \sim x^1$, tồn tại $c, d \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ và $\xi \in \mathrm{X}$ sao cho $x^1 = c\xi$ và $z = d\xi$. Do đó,

$$\pi(s_d s_c^*)(\delta_{x^1}) = S_d S_c^*(\delta_{x^1}) = S_d S_c^*(\delta_{c\xi}) = S_d(\delta_{c\xi}) = S_d(\delta_\xi) = \delta_{d\xi} = \delta_z.$$

Do $\delta_{x^1} \in Y$ và Y là π-bất biến, ta nhận được $\delta_z \in Y$. Do đó, $\mathbb{P}_{[x]} \subseteq Y$, ta có điều cần chứng minh. □

Như vậy ta đã chứng minh được rằng, với mọi $x \in \mathrm{X}$, R-môđun con $\mathbb{P}_{[x]}$ là π-bất biến. Do đó, $\mathbb{P}_{[x]}$ là một $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$-môđun trái, với tích trái được xác định bởi $\mu.z = \pi(\mu)(z)$, với mọi $\mu \in \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$ và $z \in \mathbb{P}_{[x]}$.

Giả sử $\mathrm{End}_{\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})}\left(\mathbb{P}_{[x]}\right)$ là tập hợp tất cả các $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$-đồng cấu của $\mathbb{P}_{[x]}$. Sau đây, chúng ta mô tả tập hợp này.

Mệnh đề 2.2.8. *Cho X là một không gian dịch chuyển con và R là một vành. Khi đó,* $\mathrm{End}_{\tilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})}\left(\mathbb{P}_{[x]}\right)$ *đẳng cấu với R.*

Chứng minh. Cho $\varphi \in \mathrm{End}_{\tilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})}\left(\mathbb{P}_{[x]}\right)$. Với $y, z \in [x]$, lấy $c, d \in \mathcal{L}_\mathrm{X}$ và $\xi \in \mathrm{X}$ sao cho $y = c\xi$ và $z = d\xi$. Khi đó, vì φ là một đồng cấu $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$, ta có

$$\varphi\left(\delta_y\right) = \varphi\left(\delta_{c\xi}\right) = \varphi\left(S_c S_d^*\left(\delta_{d\xi}\right)\right) = \varphi\left(S_c S_d^*\left(\delta_z\right)\right) = S_c S_d^* \varphi\left(\delta_z\right).$$

Do đó, $\varphi = 0$ nếu $\varphi\left(\delta_z\right) = 0$ với một số $z \in [x]$.

Giả sử rằng $\varphi\left(\delta_z\right) \neq 0$ với mọi $z \in [x]$. Với $z \in [x]$ ta viết lại $\varphi\left(\delta_z\right) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_{x^i}$, trong đó $x^i \in [x], 0 \neq \gamma_i \in R$, và $x^i \neq x^j$ với mọi $i \neq j$. Giả sử rằng $x^k \neq z$ với một số k. Xét $m \in \mathbb{N}$ sao cho $x_1^k x_2^k \ldots x_m^k \neq z_1 z_2 \ldots z_m$ và $x_1^k x_2^k \ldots x_m^k \neq x_1^i x_2^i \ldots x_m^i$, với mọi $i \neq k$. Cho $\alpha = x_1^k x_2^k \ldots x_m^k$. Do đó,

$$\gamma_k \delta_{x^k} = P_{Z_\alpha}\left(\gamma_k \delta_{x^k}\right) = P_{Z_\alpha}\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \delta_{x^i}\right) = P_{Z_\alpha}\left(\varphi\left(\delta_z\right)\right) = \varphi\left(P_{Z_\alpha}\left(\delta_z\right)\right) = 0$$

trong đó đẳng thức thứ hai từ cuối là đúng vì φ là $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$-bất biến. Ta kết luận rằng $\delta_{x^k} = 0$, mâu thuẫn. Do đó, với mọi $z \in [x]$, ta có $\varphi\left(\delta_z\right) = \gamma_z \delta_z$ với một số $\gamma_z \in R$.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng ánh xạ $z \to \gamma_z$ là hằng số. Giả sử $z \in [x]$. Ta viết $x = c\xi$ và $z = d\xi$, trong đó $c, d \in \mathcal{L}_\mathrm{X}$ và $\xi \in \mathrm{X}$ (xem Nhận xét (3.8)). Khi đó,

$$\gamma_x \delta_x = \varphi\left(\delta_x\right) = \varphi\left(S_c S_d^*\left(\delta_z\right)\right) = S_c S_d^*\left(\varphi\left(\delta_z\right)\right) = \gamma_z S_c S_d^*\left(\delta_z\right) = \gamma_z \delta_x.$$

Do đó $\gamma_z = \gamma_x$ với mọi $z \in [x]$. Ta nhận được $\varphi(\mu) = \gamma_x \mu$ với mọi $\mu \in \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$.

Ta kí hiệu γ_x bởi γ_φ. Khi đó, $\mathrm{End}_{\tilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})}\left(\mathbb{P}_{[x]}\right)$ và R là đẳng cấu bởi ánh xạ

$$\mathrm{End}_{\tilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})}\left(\mathbb{P}_{[x]}\right) \ni \varphi \mapsto \lambda_\varphi \in R,$$

và chứng minh hoàn tất. □

Tiếp theo, chúng ta sẽ đưa ra điều kiện để các biểu diễn bất khả quy của $\widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$ cảm sinh bởi các môđun $\mathbb{P}_{[x]}, x \in \mathrm{X}$, là tương đương. Trước đó, chúng ta nhắc lại định nghĩa của các phép đồng cấu tương đương.

Định nghĩa 2.2.9. Cho X là một không gian dịch chuyển con, R là một vành, và M, N là hai R-môđun. Ta nói rằng các R-đồng cấu $\varphi : \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}_R(M)$ và $\phi : \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}_R(N)$ là *tương đương* nếu tồn tại một đẳng cấu R-môđun $U : M \to N$ sao cho, với mỗi $\mu \in \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$, sơ đồ bên dưới giao hoán.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi(\mu)"] \arrow[d, "U"'] & M \arrow[d, "U"] \\ N \arrow[r, "\phi(\mu)"'] & N \end{tikzcd}$$

Hình 2.1:

Cho $\pi : \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}_R(\mathbb{P})$ là phép đồng cấu của Mệnh đề 2.2.2, Theo Định lý 2.2.7, với mỗi $x \in \mathrm{X}$, môđun con $\mathbb{P}_{[x]}$ là π-bất biến và do đó hạn chế của π đối với $\mathbb{P}_{[x]}$ là một phép đồng cấu, mà chúng ta vẫn ký hiệu là π. Theo cách này, chúng ta thu được một phép đồng cấu mới $\pi : \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}_R\left(\mathbb{P}_{[x]}\right)$, là phép đồng cấu không thể giản lược.

Dưới đây chúng tôi mô tả khi nào các phép đồng cấu như vậy là tương đương.

Mệnh đề 2.2.10. *Cho X là một không gian dịch chuyển con, R là một vành và $x, y \in \mathrm{X}$. Khi đó, các phép đồng cấu $\pi : \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}_R\left(\mathbb{P}_{[x]}\right)$ và $\pi : \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}_R\left(\mathbb{P}_{[y]}\right)$ tương đương nếu và chỉ nếu $[x] = [y]$.*

Chứng minh. Cho $x, y \in \mathbf{X}$. Rõ ràng, hai phép đồng cấu tương đương nếu $[x] = [y]$.

Giả sử rằng $[x] \neq [y]$. Ta chứng minh rằng hai phép đồng cấu không tương đương. Giả sử ngược lại, tức là giả sử tồn tại một phép đồng cấu $U : \mathbb{P}_{[x]} \to \mathbb{P}_{[y]}$ sao cho $U \circ \pi(\mu) = \pi(\mu) \circ U$ với mỗi $\mu \in \widetilde{\mathcal{A}}_R(\mathrm{X})$. Lưu ý rằng $U\left(\delta_x\right) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \delta_{y^i}$. Viết $x = x_1 x_2 x_3 \ldots$ và $y^i = y_1^i y_2^i y_3^i \ldots$, trong đó $x_j, y_j^i \in \mathcal{A}$. Vì $[x] \neq [y]$ và $y^i \in [y]$ cho mỗi i, ta có $y^i \neq x$ cho mỗi $i \in \{1, \ldots, n\}$. Do đó, tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $x_1 x_2 \ldots x_m \neq y_1^i y_2^i \ldots y_m^i$ với mọi $i \in \{1, \ldots, n\}$. Giả sử $\alpha = x_1 x_2 \ldots x_m$. Sau đó,

$$
\begin{aligned}
U\left(\delta_x\right) = & U\left(P_{Z_\alpha}\left(\delta_x\right)\right) = U\left(\pi\left(p_{Z_\alpha}\right)\left(\delta_x\right)\right) = \pi\left(p_{Z_\alpha}\right)\left(U\left(\delta_x\right)\right) = \\
& = \pi\left(p_{Z_\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \delta_{y^i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i P_{Z_\alpha}\left(\delta_{y^i}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Do đó, $U\left(\delta_x\right) = 0$, mâu thuẫn (vì U là một phép đồng cấu). Do đó, nếu $[x] \neq [y]$ thì hai phép đồng cấu của mệnh đề này không tương đương, ta có điều cần chứng minh. □

2.3 Tính biểu diễn hữu hạn

Trong phần này, chúng tôi mở rộng [15, Proposition 4.9] lên cho trường hợp đại số liên kết với không gian dịch chuyển con, từ đó xây dựng các môđun $\mathbb{P}_{[p]}$ trong đó p là một đường vô tỷ.

Định nghĩa 2.3.1 ([12])**.** Cho X là một không gian dịch chuyển con. Ta định nghĩa một từ $p = x_0x_1x_2x_3\ldots \in \mathrm{X}$ là một *đường thẳng* nếu $Z_{x_0} = \{p\}$ và, với mọi $\beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$ và $k \in \mathbb{N}$, ta có $\beta^\infty \neq x_kx_{k+1}x_{k+2}\ldots$.

Ta ký hiệu $\mathcal{P}_{\mathbf{X}}$ là tập hợp tất cả các phần tử $A \in \mathcal{U}$ sao cho $A = \{p\}$, với đường $p \in X$.

Cho X là không gian dịch chuyển con. Một đường vô hạn trong X là một dãy $e_1e_2\cdots e_n\cdots$ các từ trong $\mathcal{A}$. Ta ký hiệu $\mathfrak{p}^\infty$ là tập hợp tất cả các đường vô hạn trong X. Với $p = e_1e_2\cdots e_n\cdots \in \mathfrak{p}^\infty$ và $n \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu $\tau_{\leq n}(p)$ là đường đi hữu hạn $e_1e_2\cdots e_n$, và ta ký hiệu $\tau_{>n}(p)$ là đường đi vô hạn $e_{n+1}e_{n+2}\cdots$. Nếu p và q là các đường vô hạn trong X, thì ta nói rằng p và q là tương đương (ký hiệu là $p \sim q$) trong trường hợp tồn tại các số nguyên không âm m, n sao cho $\tau_{>m}(p) = \tau_{>n}(q)$. Rõ ràng $\sim$ là phép tương đương trên $\mathfrak{p}^\infty$, và $[p]$ là lớp tương đương của đường vô hạn p.

Định nghĩa 2.3.2 ([12])**.** Cho X là một không gian dịch chuyển con. Ký hiệu $\mathcal{Q}_{\mathrm{X}}$ là tập hợp các $\{p\} \in \mathcal{U}$ sao cho $p \neq \alpha\beta^\infty$ với mỗi $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathrm{X}}$. Chúng ta gọi một phần tử của $\mathcal{Q}_{\mathrm{X}}$ là một *đường vô tỷ* và các phần tử không thuộc $\mathcal{Q}_{\mathrm{X}}$ là *đường hữu tỷ*.

Ví dụ 2.3.3. Cho $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ là một bảng chữ cái có 3 chữ cái, và cho $x \in \mathcal{A}^\infty$ là phần tử

$$x = bcb^2cb^3cb^4c\ldots$$

Ta định nghĩa

$$X = \{a^\infty, b^\infty, ax, cx\} \cup \{\sigma^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

là một không gian dịch chuyển con. Khi đó, $\mathcal{Q}_X \neq \emptyset$ vì có chứa $\{ax\}$ là một đường vô tỷ.

Mệnh đề 2.3.4. *Cho K là một trường, X là một không gian dịch chuyển con, và $p = e_1\cdots e_n\cdots$ là một đường vô tỷ trong X. Cho $\epsilon_0 = p_{Z_p}$ và $\epsilon_i =$*

$s_{e_1}\cdots s_{e_i}s^*_{e_i}\cdots s^*_{e_1}$ *với mọi* $i\geq 1$. *Khi đó, môđun trái* S_p *trên* $\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})$*, sinh bởi* x *với* $x=\epsilon_i x$ *với mọi* $i\geq 0$ *là đơn và đẳng cấu với* $\mathbb{P}_{[p]}$. *Do đó, ta có*

$$\mathrm{Ann}_{\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})}(x)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})\left(\epsilon_i-\epsilon_{i+1}\right)\oplus\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})\left(1-\epsilon_0\right)$$

trong đó $\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})\left(1-\epsilon_0\right):=\left\{r-r\epsilon_0\mid r\in\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})\right\}$.

Chứng minh. Ta lưu ý rằng $\epsilon_i\cdot p=p$ là các phần tử trong $\mathbb{P}_{[p]}$, với mọi $i\geq 0$. Vì $\mathbb{P}_{[p]}$ là một môđun đơn trên $\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})$, $\mathbb{P}_{[p]}$ là một ảnh của S_p dưới phép ánh xạ gửi $x\in S_p$ tới $p\in\mathbb{P}_{[p]}$, và do đó S_p khác không.

Giả sử $x_0=p_0x=x$ và $x_i=s^*_{e_i}\cdots s^*_{e_1}x$ với mọi $i\geq 1$. Ta có $x=s_{e_1}\cdots s_{e_i}x_i$ với mọi $i\geq 1$. Giả sử y là một phần tử khác không trong S_p. Vì $S_p=\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})x$, y có thể được viết dưới dạng $y=rx$ và $0\neq r=\sum_{i=1}^m k_is_{\alpha_i}p_{A_i}s^*_{\beta_i}\in\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})$, trong đó m là tối tiểu sao cho $k_i\in K\backslash\{0\}$, $\alpha_i,\beta_i\in\mathcal{L}_X, A_i\in\mathcal{U}$ với mọi $1\leq i\leq m$. Xét $n\geq\max\{|\beta_i|\mid 1\leq i\leq m\}+1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}y&=\left(\sum_{i=1}^m k_is_{\alpha_i}p_{A_i}s^*_{\beta_i}\right)x=\left(\sum_{i=1}^m k_is_{\alpha_i}p_{A_i}s^*_{\beta_i}\right)\epsilon_nx\\&=\left(\sum_{i=1}^m k_is_{\alpha_i}p_{A_i}s^*_{\beta_i}s_{\tau_{\leq n}}(p)s^*_{\tau_{\leq n}(p)}\right)x.\end{aligned}$$

Theo tính tối tiểu của m, ta có $s_{\alpha_i}p_{A_i}s^*_{\beta_i}s_{\tau_{\leq n}(p)}s^*_{\tau_{\leq n}(p)}\neq 0$ với mọi $1\leq i\leq m$. Đặc biệt, ta có $s^*_{\beta_i}s_{\tau_{\leq n}(p)}\neq 0$ với mọi $1\leq i\leq m$. Khi đó, với mỗi i, tồn tại một đường $\delta_i\in\mathrm{X}$ sao cho $|\delta_i|\geq 1, \tau_{\leq n}(p)=\beta_i\delta_i$. Ta suy ra

$$y=\left(\sum_{i=1}^m k_is_{\alpha_i}p_{A_i}s^*_{\beta_i}s_{\tau_{\leq n}(p)}s^*_{\tau_{\leq n}(p)}\right)x=\left(\sum_{i=1}^m k_is_{\alpha_i\delta_i}s^*_{\tau_{\leq n}(p)}\right)x=\sum_{i=1}^m k_is_{\alpha_i\delta_i}x_n.$$

Theo tính tối tiểu của m, $s_{\alpha_i\delta_i}x_n$ là các phần tử khác không, đôi một khác nhau S_p, và do đó $\alpha_i\delta_i$ là các đường đôi một khác nhau có độ dài dương trong X.

Bằng cách đánh số lại các đường $\alpha_i\delta_i$, không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng $p_{C(\omega,\alpha_1\delta_1)}y = p_{C(\omega,\alpha_1\delta_1)}\left(\sum k_i s_{\alpha_i\delta_i}x_n\right) = \sum_{i=1}^{d} k_i s_{\alpha_i\delta_i}x_n$, trong đó $1 \le d \le m$. Chúng tôi lưu ý rằng $s^*_{\alpha_1\delta_1}s_{\alpha_1\delta_1} = p_{C(\alpha_1\delta_1,\omega)} = p_{C(\tau_{\le n}(p),\omega)}$ và $s^*_{\alpha_1\delta_1}s_{\alpha_i\delta_i} = 0$ đối với mọi $2 \le i \le d$, và do đó

$$k_1^{-1}s_{\tau_{\le n}(p)}s^*_{\alpha_1\delta_1}p_{C(\omega,\alpha_1\delta_1)}y = k_1^{-1}s_{\tau_{\le n}(p)}s^*_{\alpha_1\delta_1}\left(\sum_{i=1}^{d} k_i s_{\alpha_i\delta_i}x_n\right) = s_{\tau_{\le n}(p)}x_n = x.$$

Vậy $x \in L_K(\mathcal{G})y$, và do đó $S_p = L_K(\mathcal{G})x = L_K(\mathcal{G})y$. Khi đó, S_p đơn và đẳng cấu với $\mathbb{P}_{[p]}$, ta có điều cần chứng minh. □

Hệ quả 2.3.5. *Cho K là một trường, X là không gian dịch chuyển con và $p = e_1 \cdots e_n \cdots$ là một đường vô tỷ trong X. Khi đó, $\mathcal{A}_K(\mathrm{X})$-môđun $\mathbb{P}_{[p]}$ lbiểu diễn hữu hạn khi và chỉ khi tồn tại m sao cho $\sigma^m(p)$ là đường thẳng.*

Chứng minh. ($\Longrightarrow$) Giả sử $\mathbb{P}_{[p]}$ là biểu diễn hữu hạn. Theo Mệnh đề 2.3.4, $\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathcal{A}_K(\mathrm{X}\,(\epsilon_i - \epsilon_{i+1})$ là tổng trực tiếp hữu hạn, trong đó $\epsilon_0 = p_{Z_p}$ và $\epsilon_i = s_{e_1}\cdots s_{e_i}s^*_{e_i}\cdots s^*_{e_1}$ với mọi $i \ge 1$, và do đó tồn tại m sao cho $\epsilon_m = \epsilon_{m+i}$ với mọi $i \ge 0$. Khi đó ta có

$$p_{C(e_m,\omega)} = s^*_{e_m}\cdots s^*_{e_1}\epsilon_m s_{e_1}\cdots s_{e_m} = s^*_{e_m}\cdots s^*_{e_1}\epsilon_{m+1}s_{e_1}\cdots s_{e_m} = s_{e_{m+1}}s^*_{e_{m+1}}$$

và

$$p_{C(\omega,e_{m+1})} = p_{C(\omega,e_{m+1})}p_{C(e_m,\omega)} = p_{C(e_{m+1},\omega)}s_{e_{m+1}}s^*_{e_{m+1}} = s_{e_{m+1}}s^*_{e_{m+1}} = p_{C(e_m,\omega)}.$$

Như vậy, $C\,(e_m,\omega) = \{C\,(\omega,e_{m+1})\}$. Tương tự, vì $\epsilon_{m+i} = \epsilon_{m+i+1}$ với mọi $i \ge 0$, ta thu được $C\,(e_{m+i},\omega) = \{C\,(\omega,e_{m+i+1})\}$ với mọi i, nói cách khác, tất cả các $C\,(\omega,e_i) = \sigma^i(p)(i \ge m)$ đều là đường thẳng.

($\Longleftarrow$). Giả sử tồn tại m sao cho $\sigma^m(p)$ là đường thẳng. Khi đó ta có $\epsilon_m = \epsilon_{m+i}$ với mọi $i \geq 0$. Theo Mệnh đề 2.3.4, $\mathbb{P}_{[p]}$ biểu diễn hữu hạn, ta có điều cần chứng minh. $\square$

Kết quả sau đây mở rộng [15, Proposition 4.9] lên cho đại số liên kết với không gian dịch chuyển con, cho thấy rằng $\mathbb{P}_{[p]}$ được biểu diễn hữu hạn cho mọi đường hữu tỉ p.

Mệnh đề 2.3.6. *Cho K là một trường, X là không gian dịch chuyển con và $p = \pi^\infty \in \mathcal{L}_X$ là một đường hữu tỉ trong X. Khi đó $\mathbb{P}_{[p]} = \mathbb{P}_{[\pi^\infty]}$ đẳng cấu với $\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})$-môđun S_π sinh bởi $x \in S_\pi$ sao cho $s_\pi x = x$, do đó nó đẳng cấu với $\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})p_{C(\omega,\pi)}/\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})\left(p_{C(\omega,\pi)} - s_\pi\right)$ và biểu diễn hữu hạn.*

Chứng minh. Ta có $s_\pi \cdot p = p$ là các phần tử trong $\mathbb{P}_{[p]}$. Vì $\mathbb{P}_{[p]}$ là $\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})$-môđun đơn, $\mathbb{P}_{[p]}$ là ảnh của S_π dưới ánh xạ gửi $x \in S_\pi$ đến $p \in \mathbb{P}_{[p]}$, và do đó S_π khác không.

Ta lưu ý rằng $x = s_\pi^n x$ là các phần tử trong S_π đối với mọi $n \geq 0$, trong đó $\pi^0 := p_{C(\omega,\pi)}$. Giả sử y là một phần tử khác không trong S_π. Vì $S_\pi = \widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})x$, nên y có thể viết dưới dạng $y = rx$ và $0 \neq r = \sum_{i=1}^m k_i s_{\alpha_i} p_{A_i} s_{\beta_i}^* \in \widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})$, trong đó m là tối tiểu sao cho $k_i \in K\backslash\{0\}, \alpha_i, \beta_i \in \mathcal{L}_X, A_i \in \mathcal{U}$ với mọi $1 \leq i \leq m$.

Cho n là số nguyên dương sao cho $|\beta_i| < n|\pi|$ với mọi $1 \leq i \leq m$. Sau đó, chúng ta có

$$y = \left(\sum_{i=1}^m k_i s_{\alpha_i} p_{A_i} s_{\beta_i}^*\right) x = \left(\sum_{i=1}^m k_i s_{\alpha_i} p_{A_i} s_{\beta_i}^*\right) s_\pi^n x = \left(\sum_{i=1}^m k_i s_{\alpha_i} p_{A_i} s_{\beta_i}^* s_\pi^n\right) x$$

Theo tính tối tiểu của m, ta có $s_{\alpha_i} p_{A_i} s_{\beta_i}^* s_\pi^n \neq 0$ với mọi $1 \leq i \leq m$. Khi đó, với mỗi i, tồn tại $\delta_i \in \mathcal{G}^*$ sao cho $|\delta_i| \geq 1, \pi^n = \beta_i \delta_i$ Như vậy ta có

$$y = \left(\sum_{i=1}^m k_i s_{\alpha_i} p_{A_i} s_{\beta_i}^* s_\pi^n\right) x = \left(\sum_{i=1}^m k_i s_{\alpha_i \delta_i}\right) x$$

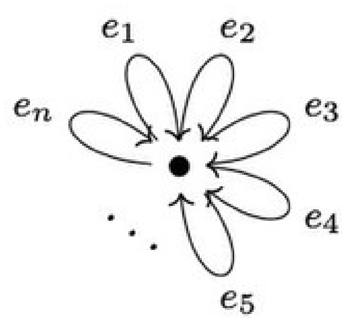
Theo tính tối thiểu của m, $s_{\alpha_i\delta_i}x$ là các phần tử khác không, đôi một khác nhau trong S_π, và do đó $\alpha_i\delta_i$ là các đường đôi một khác nhau có độ dài dương trong $\mathcal{L}_X$.

Bằng cách đánh số lại các đường $\alpha_i\delta_i$, mà không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $p_{C(\omega,\alpha_1\delta_1)}y = p_{C(\omega,\alpha_1\delta_1)}\left(\sum k_i s_{\alpha_i\delta_i}x\right) = \sum_{i=1}^{d} k_i s_{\alpha_i\delta_i}x$, trong đó $1 \le d \le m$. Chúng ta lưu ý rằng $s^*_{\alpha_1\delta_1}s_{\alpha_1\delta_1} = p_{C(\alpha_1\delta_1,\omega)} = p_{C(\pi,\omega)}$ và $s^*_{\alpha_1\delta_1}s_{\alpha_i\delta_i} = 0$ đối với mọi $2 \le i \le d$, và do đó

$$k_1^{-1}s^*_{\alpha_1\delta_1}p_{C_{(\omega,\alpha_1\delta_1)}}y = k_1^{-1}s^*_{\alpha_1\delta_1}\left(\sum_{i=1}^{d} k_i s_{\alpha_i\delta_i}x\right) = p_{C_{(\pi,\omega)}}x = p_{C_{(\pi,\omega)}}(s_\pi x) = s_\pi x = x$$

Khi đó ta có $x \in \widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})y$, và $S_\pi = \widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})x = \widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})y$. Do đó, S_π đơn và đồng cấu với $\mathbb{P}_{[p]}$, ta có điều cần chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.3.7. Cho E là đồ thị như hình sau, X là không gian dịch chuyển cạnh một phía của E.



Với $\pi = e_1 \cdots e_n$, ta có $\alpha = (e_1 \cdots e_n)^\infty$ là một đường hữu tỷ trong $\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})$ với $n > 0$. Ta có, $\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})$-môđun $\mathbb{P}_{[\alpha]}$ là đơn, biểu diễn hữu hạn và đẳng cấu với $\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})$-môđun S_π sinh bởi $x \in S_\pi$ sao cho $s_\pi x = x$, do đó nó đẳng cấu với $\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})p_{C(\omega,\pi)}/\widetilde{\mathcal{A}}_K(\mathrm{X})\left(p_{C(\omega,\pi)} - s_\pi\right)$.

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, chúng tôi đã trình bày một số vấn đề sau.

(1) Trình bày lại một số kiến thức cơ bản về đồ thị, siêu đồ thị và đại số liên kết với không gian dịch chuyển con trên bảng chữ cái tùy ý dựa trên bài báo của Boava-Castro-Goncalves-Wyk [2].

(2) Trình bày lại các biểu diễn bất khả quy đã biết của đại số liên kết với không gian dịch chuyển con trên bảng chữ cái tùy ý dựa trên bài báo của của Goncalves-Royer [7].

(3) Khảo sát tính biểu diễn hữu hạn của các môđun đơn được giới thiệu bởi Goncalves-Royer đã nói ở trên.

Tài liệu tham khảo

[1] D. Lind and B. Marcus, An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding. *Cambridge University Press*, 1995.

[2] G. Boava, G. G. de Castro, D. Goncalves, and D. van Wyk. Algebras of one-sided subshifts over arbitrary alphabets, to appear in *Revista Matemática Iberoamericana* (see, also arXiv:2211.02148).

[3] W. Ott, M. Tomforde, and P. N. Willis. One-sided shift spaces over infinite alphabets, *volume 5 of New York Journal of Mathematics. NYJM Monographs*. State University of New York, University at Albany, Albany, NY, 2014.

[4] X. W. Chen. Irreducible representations of Leavitt path algebras, *Forum Math.* 27 (2015), 549–574.

[5] P. Ara and K. M. Rangaswamy, Finitely presented simple modules over Leavitt path algebras, *J. Algebras 417* (2014), 333 – 352.

[6] P. N. Ánh and T. G. Nam, Special irreducible representation of Leavitt path algebras, *Adv. Math. 377* (2021), 107483.

[7] D. Goncalves and D. Royer, Irreducible representations of one-side subshift algebras, *ArXiv:2306.16179*.

[8] M. Tomforde, A unified approach to Exel-Laca algebras and C*-algebras associated to graphs, *J. Operator Theory* **50** (2003), 345–368.

[9] M. Tomforde, Simplicity of ultragraph algebras, *Indiana Univ. Math. J.* **52** (2003), 901–925.

[10] G. Abrams, P. Ara, and M. Siles Molina, *Leavitt path algebras*. Lecture Notes in Mathematics series, Vol. 2191, Springer-Verlag Inc., 2017.

[11] T. Katsura, P. S. Muhly, A. Sims and M. Tomforde, Graph algebras, Exel-Laca algebras, and ultragraph algebras coincide up to Morita equivalence, *J. Reine Angew. Math.* **640** (2010), 135-165.

[12] D. Gonçalves and D. Royer, The socle of subshift algebras, with applications to subshift conjugacy, *arXiv:2403.18806v1*.

[13] M. Tomforde. Leavitt path algebras with coefficients in a commutative ring. *J. Pure Appl. Algebra*, **215**(4):471–484, 2011.

[14] G. G. de Castro, D. Gon¸calves, and D. W. van Wyk. Ultragraph algebras via labelled graph groupoids, with applications to generalized uniqueness theorems. *J. Algebra*, 579:456–495, 2021.

[15] N. D. Nam and T. G. Nam, On ultragraph Leavitt path algebras with finite Gelfand-Kirillov dimension, *Communications in Algebra,* 1-23, 2023.

[16] G. Boava, G. G. de Castro, D. Gon¸calves, and van Wyk Daniel W. Leavitt path algebras of labelled graphs, *arxiv:2106.06036*, 2021.

[17] R. Hazrat and T.G.Nam, Realizing ultragraph Leavitt path algebras as Steinberg algebras, *J. Pure Appl. Algebra* 227 (2023), no. 5, Paper No. 107275, 20pp.