BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Nguyễn Thị Viên

VỀ XOẮN ZHANG CỦA ĐẠI SỐ LEAVITT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2024

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Nguyễn Thị Viên

VỀ XOẮN ZHANG CỦA ĐẠI SỐ LEAVITT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 8 46 01 04

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS. TS. Trần Giang Nam

Hà Nội - 2024

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đề tài nghiên cứu trong luận văn này là công trình nghiên cứu của tôi dựa trên những tài liệu, số liệu do chính tôi tự tìm hiểu và nghiên cứu. Chính vì vậy, các kết quả nghiên cứu đảm bảo trung thực và khách quan nhất. Đồng thời, kết quả này chưa từng xuất hiện trong bất cứ một nghiên cứu nào. Các số liệu, kết quả nêu trong luận văn là trung thực nếu sai tôi hoàn chịu trách nhiệm trước phát luật.

Hà Nội, tháng 11 năm 2024

Học viên

Nguyễn Thị Viên

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến các thầy cô tại Viện Toán học, đặc biệt là các thầy cô của phòng Đại số và phòng Lý thuyết số, những người đã luôn tận tâm giảng dạy và hỗ trợ chúng tôi rất nhiều trong suốt chương trình Thạc sĩ khóa K2022B.

Tôi cũng chân thành cảm ơn các bạn học cùng lớp Thạc sĩ Đại số và lý thuyết số vì đã luôn đồng hành và nhiệt tình giúp đỡ tôi trong suốt hai năm học vừa qua.

Tôi xin bày tỏ sự trân trọng và lòng biết ơn đến Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, cùng Trung tâm đào tạo sau Đại học - Viện Toán học, vì đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Quỹ Đổi mới sáng tạo VINIF đã tài trợ học bổng Thạc sĩ cho tôi trong hai năm học với mã số học bổng VINIF.2022.ThS.098 và VINIF.2023.ThS.144. Sự hỗ trợ của Quỹ đã giúp tôi có điều kiện tốt nhất để tập trung vào học tập và nghiên cứu.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn và tình yêu sâu sắc đến gia đình và bạn bè của tôi. Sự quan tâm, yêu thương và ủng hộ của mọi người chính là động lực và nguồn cổ vũ lớn nhất để tôi hoàn thành chặng đường học tập và nghiên cứu này.

Hà Nội, tháng 11 năm 2024

Học viên

Nguyễn Thị Viên

MỤC LỤC

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ CÁI VIẾT TẮT

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{Z}$	Tập hợp các số nguyên
$x \in X$	Phần tử x thuộc tập hợp X
$x \notin X$	Phần tử x không thuộc tập hợp X
$X \subseteq Y$	X là một tập con của Y
$X \times Y$	Tích Đề các của hai tập hợp X và Y
$X \cap Y$	Giao của hai tập X và Y
$M \oplus N$	Tổng trực tiếp của hai môđun M và N
$\mathrm{Hom}_R(M, N)$	Nhóm các đồng cấu R-môđun đi từ M vào N
$\mathrm{Im}(f)$	Ảnh của đồng cấu f
$f\|_X$	Ánh xạ f hạn chế trên tập X
R/I	Vành thương của vành R trên iđêan I
${}_RM$	R-môđun trái M
$\mathrm{M}_n(R)$	Vành các ma trận vuông cấp n trên vành R
$\mathrm{GL}_n(R)$	Nhóm tuyến tính tổng quát bậc n trên vành R
$\mathrm{U}(R)$	Nhóm các phần tử khả nghịch của vành R
A^τ	Xoắn Zhang của đại số phân bậc A bởi hệ xoắn τ
$\mathrm{End}(A)$	Vành các tự đồng cấu đại số của A
$\mathrm{End}^{\mathrm{gr}}(A)$	Vành các tự đồng cấu đại số phân bậc của A

$\mathrm{Aut}(A)$	Nhóm các tự đẳng cấu đại số của A
$\mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(A)$	Nhóm các tự đẳng cấu đại số phân bậc của A
$\mathrm{Gr} - A$	Phạm trù các môđun phải phân bậc của đại số A
$K[x, x^{-1}]$	Vành đa thức Laurent với hệ số trên trường K
$K[x_1, \ldots x_n]$	Vành đa thức n biến với hệ số trên trường K
$K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$	K-đại số tự do sinh bởi n phần tử
$L_K(m, n)$	Đại số Leavitt loại (m, n)
IBN	Invariant Basis Number

MỞ ĐẦU

Trong chuyên ngành Đại số, một trong những phương pháp thường xuyên được sử dụng để thiết kế ra các loại đại số mới đó là phương pháp xoắn đi cấu trúc nhân của một đại số ban đầu. Một số lớp đại số quan trọng như đại số nhóm, đại số đa thức là những ví dụ điển hình mà ta có thể thu được bằng phương pháp này. Năm 1991, M. Artin, J. Tate và M. Van den Bergh với công trình [1] nổi tiếng đã lần đầu tiên đề xuất ý tưởng xoắn cấu trúc nhân của một đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc cho trước bởi một tự đẳng cấu phân bậc, từ đó thu được một loại đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc mới có phạm trù môđun phân bậc tương đương với phạm trù môđun phân bậc của đại số ban đầu. Sau đó, J. J. Zhang [2] đã mở rộng cách xây dựng của M. Artin và các cộng sự bằng việc đưa ra khái niệm hệ xoắn của một đại số phân bậc, và định nghĩa một đại số phân bậc mới trên nền không gian vectơ của đại số ban đầu cùng với một phép nhân được định nghĩa thông qua hệ xoắn. Đại số mới này được gọi là *xoắn Zhang* của đại số ban đầu. Zhang đã chỉ ra rằng, phạm trù các môđun phân bậc của xoắn Zhang và của đại số ban đầu là tương đương. Mạnh hơn nữa, trong phạm vi các đại số phân bậc liên thông thì hai đại số A và B có phạm trù các môđun phân bậc là tương đương khi và chỉ khi B đẳng cấu với một xoắn Zhang của A. Không những vậy, theo [2], trong trường hợp đại số ban đầu là phân bậc liên thông và hữu hạn sinh (hoặc Noether) thì xoắn Zhang của nó còn giữ nguyên rất nhiều tính chất quan trọng của cấu trúc vành, như tính chính quy Artin-Schelter, tính Noether, số chiều Gelfand-Kirillov, số chiều toàn cục, số chiều Krull. Bởi những kết quả nêu trên, xoắn Zhang luôn là một trong những đối tượng rất được quan tâm trong lý thuyết vành phân bậc.

Đại số Leavitt kiểu $(1, n)$ trên trường K, kí hiệu là $L_K(1, n)$, được W. G. Leavitt giới thiệu lần đầu tiên trong [3] vào năm 1962, trong mục đích xây dựng ra các cấu trúc đại số không có tính chất IBN. Sau này, đại số Leavitt $L_K(1, n)$ được tổng quát hoá lên thành các đại số đường Leavitt liên kết với các đồ thị có hướng, được giới thiệu độc lập bởi G. Abrams và G. Aranda Pino trong [4], và P. Ara, M. A. Moreno và E. Pardo trong [5]. Trong những năm gần đây, đại số đường Leavitt nói chung và đại số Leavitt kiểu $(1, n)$ nói riêng là một trong những lĩnh vực nhận được rất nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà toán học. Chúng ta có thể tham khảo thêm tài liệu [6] để hiểu sâu hơn về lịch sử phát triển, những ứng dụng và các vấn đề mở của đại số đường Leavitt. Đặc biệt, bài toán mô tả các đại số tương đương Morita phân bậc với đại số đường Leavitt vẫn còn là vấn đề mở.

Mặt khác, như đã nói ở trên, xoắn Zhang cho chúng ta một phương pháp để xây dựng các đại số tương đương Morita phân bậc với đại số đã cho. Vì thế, trong luận văn này, chúng tôi khảo sát xoắn Zhang của các đại số Leavitt $L_K(1, n)$, như một bước đầu tiên để nghiên cứu xoắn Zhang cho các đại số đường Leavitt tổng quát.

Luận văn này bao gồm hai chương:

Chương 1: "Xoắn Zhang của đại số phân bậc", được trình bày dựa theo tài liệu [2]. Trong hai mục đầu của chương này, chúng tôi trình bày định nghĩa và các tính chất cơ bản của xoắn Zhang của một đại số phân bậc. Trong mục 3, chúng tôi chứng minh sự đẳng cấu giữa phạm trù các môđun phải phân bậc của xoắn Zhang và của đại số ban đầu (Định lý 1.3.8), và sau đó chỉ ra rằng trong phạm vi của các đại số phân bậc liên thông thì hai đại số A và B có phạm trù các môđun phải phân bậc tương đương khi và chỉ khi B đẳng cấu với một xoắn Zhang của A (Định lý 1.3.19).

Chương 2: "Xoắn Zhang của đại số Leavitt" gồm 2 mục. Trong mục 1, chúng tôi trình bày xây dựng của đại số Leavitt $L_K(1, n)$ và đi mô tả nhóm các tự đẳng cấu phân bậc của đại số Leavitt $L_K(1, n)$ (Định lý 2.1.12 và Hệ quả 2.1.15). Ngoài ra, chúng tôi còn chỉ ra rằng nhóm các tự đẳng cấu phân bậc của $L_K(1, n)$ chứa một số nhóm con đặc biệt, ví dụ như là nhóm tuyến tính tổng quát bậc n trên trường K (Hệ quả 2.1.13 và 2.1.14). Trong mục 2, chúng tôi tiến hành khảo sát xoắn Zhang của đại số Leavitt $L_K(1, n)$ liên kết với tự đẳng cấu phân bậc đã xây dựng ở mục 1. Cụ thể, chúng tôi đi xây dựng một phép nhúng từ đại số $L_K(1, n)$ vào mọi xoắn Zhang của nó (Định lý 2.2.2) và thiết lập các điều kiện cần và đủ để cho phép nhúng này là đẳng cấu (Định lý 2.2.4). Sau đó, chúng tôi đưa ra một số lớp cụ thể để phép nhúng nói trên là đẳng cấu (Hệ quả 2.2.5-2.2.9). Đồng thời, chúng tôi chỉ ra rằng phép nhúng này nói chúng không phải là đẳng cấu (Ví dụ 2.2.10 (3)).

Các kết quả chính trong luận văn này được dựa theo công bố [7] của tác giả, cộng tác với T. G. Nam và Ashish. K. Srivastava.

Chương 1

XOẮN ZHANG CỦA ĐẠI SỐ PHÂN BẬC

Trong chương này, mục tiêu chính của chúng tôi là giới thiệu về xoắn Zhang của một đại số phân bậc, các tính chất cơ bản của nó và chỉ ra sự tương đương giữa phạm trù các môđun phân bậc của xoắn Zhang và của đại số phân bậc ban đầu. Tài liệu tham khảo chính của chương này là [2].

1.1 Hệ xoắn của đại số phân bậc

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày về hệ xoắn của một đại số phân bậc - công cụ nền tảng giúp ta định nghĩa xoắn Zhang của đại số phân bậc trong mục tiếp theo.

Chúng ta bắt đầu bằng việc nhắc lại các khái niệm về đại số phân bậc, môđun phân bậc và đồng cấu phân bậc.

Định nghĩa 1.1.1. [2] Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm với phần tử đơn vị e và A là một K-đại số có đơn vị 1. Đại số A được gọi là $\mathbb{G}$-*phân bậc* nếu

(1) $A = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} A_g$ trong đó mỗi A_g là một K-môđun con của A,

(2) $A_gA_h \subseteq A_{gh}$ với mọi $g, h \in \mathbb{G}$, và

(3) $1 \in A_e$.

Một phần tử của A_g được gọi là *thành phần thuần nhất bậc* g *của* A.

Ví dụ 1.1.2. (1) Một trường K là một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc với

$$K = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} K_i$$

trong đó $K_0 = K$ và $K_i = 0$ với mọi $i \neq 0$. Cấu trúc phân bậc này được gọi là *cấu trúc phân bậc tầm thường* trên K.

(2) Đại số đa thức Laurent $K[x, x^{-1}]$ là một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc với

$$K[x, x^{-1}] = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} K[x, x^{-1}]_m$$

trong đó $K[x, x^{-1}]_m := \{kx^m \mid k \in K\}$.

(3) Vành đa thức n biến $K[x_1, \dots, x_n]$ trên trường K là một K-đại số $\mathbb{N}$-phân bậc với

$$K[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} K[x_1, \dots, x_n]_m$$

trong đó $K[x_1, \dots, x_n]_m$ là K-không gian vectơ gồm các đa thức thuần nhất bậc m.

(4) Ngoài ra, $K[x_1, \dots, x_n]$ còn có cấu trúc $\mathbb{Z}^n$-phân bậc

$$K[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}^n} K[x_1, \dots, x_n]_a$$

trong đó $K[x_1, \dots, x_n]_a = \begin{cases} Kx_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} & \text{nếu } a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \\ 0 & \text{với các trường hợp khác.} \end{cases}$

Chú ý 1.1.3. Trong các nội dung tiếp theo, nếu không chú thích gì thêm ta luôn hiểu một vị nhóm $\mathbb{G}$ được xét đến là vị nhóm có đơn vị e và mọi đại số đều là đại số có đơn vị 1.

Định nghĩa 1.1.4. [2] Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm và A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. Một A-môđun phải M được gọi là $\mathbb{G}$-*phân bậc* nếu

(1) $M = \bigoplus_{g \in \mathbb{G}} M_g$ trong đó mỗi M_g là một K-môđun con của M, và

(2) $M_g A_h \subseteq M_{gh}$ với mọi $g, h \in \mathbb{G}$.

Ví dụ 1.1.5. (1) Mỗi đại số phân bậc là một môđun phải phân bậc trên chính nó.

(2) Cho K là một trường. Khi đó một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc bất kì hiển nhiên

là một K-môđun phải $\mathbb{Z}$-phân bậc (ứng với cấu trúc phân bậc tầm thường trên K).

Định nghĩa 1.1.6. [2] Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm, A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc và M, N là hai A-môđun phải $\mathbb{G}$-phân bậc. Một ánh xạ K-tuyến tính f đi từ M vào N được gọi là *phân bậc* nếu $f(M_g) \subseteq N_g$ với mọi $g \in \mathbb{G}$. Hơn nữa, nếu ánh xạ f như trên là A-tuyến tính thì f được gọi là một *đồng cấu A-môđun phân bậc*.

Sau đây ta sẽ định nghĩa hệ xoắn của một đại số phân bậc.

Định nghĩa 1.1.7. [2] Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm và $A = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} A_g$ là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. Một tập hợp $\tau = \{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ gồm các tự đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc của A được gọi là một *hệ xoắn* của A nếu

$$\tau_g\left(y\tau_h(z)\right) = \tau_g(y)\tau_{gh}(z) \tag{1.1.1}$$

với mọi $g, h, l \in \mathbb{G}$ và mọi $y \in A_h, z \in A_l$.

Ví dụ 1.1.8. [2] (1) Cho K là một trường và $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ là một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc, và f là một tự đẳng cấu đại số phân bậc của A. Khi đó, $\{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ là một hệ xoắn của A vì với mọi $n \in \mathbb{Z}$, f^n vẫn là tự đẳng cấu đại số phân bậc của A, và do đó ta cũng có

$$f^n(af^m(b)) = f^n(a)f^n(f^m(b)) = f^n(a)f^{n+m}(b)$$

với mọi $n, m, l \in \mathbb{Z}$ và $a \in A_m, b \in A_l$.

(2) Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm, và một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc $B = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} B_g$. Giả sử $a \in B_e$ là một phần tử khả nghịch. Với mọi $g \in \mathbb{G}$, ta định nghĩa ánh xạ:

$$\tau_g : B \longrightarrow B, \qquad x \mapsto ax.$$

Khi đó, với mỗi $g \in \mathbb{G}$, τ_g là một ánh xạ K-tuyến tính vì

$$\tau_g(x+y) = a(x+y) = ax + ay = \tau_g(x) + \tau_g(y),$$

$$\tau_g(kx) = a(kx) = (ak)x = (ka)x = k(ax) = k\tau_g(x)$$

với mọi $x, y \in B$, và mọi $k \in K$. Mặt khác, do $a \in B_e$ nên $ax \in B_eB_h \subseteq B_{eh} = B_h$ với mọi $x \in B_h$ nào đó, hay $\tau_g(B_h) \subseteq B_h$ với mọi $g, h \in \mathbb{G}$. Dễ thấy τ_g là toàn ánh vì với mọi $x \in B$, ta có $x = \tau_g(a^{-1}x)$. Bây giờ ta xét $y \in B$ sao cho $\tau_g(y) = 0$. Khi đó ta có $ay = 0$, suy ra $0 = a^{-1}ay = y$, do đó τ_g là đơn ánh với mọi $g \in \mathbb{G}$. Như vậy với mọi $g \in \mathbb{G}$, τ_g là các tự đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc của B (nhưng nhìn chung τ_g không phải đồng cấu đại số vì $\tau_g(xy) = axy$, còn $\tau_g(x)\tau_g(y) = axay$ với $x, y \in B$ bất kì). Cùng với đó ta có,

$$\tau_g\left(z\tau_h(t)\right) = azat = \tau_g(z)\tau_{gh}(t),$$

với mọi $g, h, l \in \mathbb{G}$ và mọi $z \in B_h, t \in B_l$. Do vậy, với τ_g định nghĩa như trên thì $\{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ là một hệ xoắn của đại số B.

Để thuận tiện cho các chứng minh sau này, chúng tôi nêu ra sau đây các đẳng thức tương đương với (1.1.1).

Bổ đề 1.1.9. [2] *Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm, $A = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} A_g$ là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc và $\tau = \{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ là một hệ xoắn của A. Khi đó, với mọi $g, h, l \in \mathbb{G}$ và mọi $y \in A_h, z \in A_l$, đẳng thức (1.1.1) tương đương với các đẳng thức sau đây:*

$$\tau_g(yz) = \tau_g(y)\tau_{gh}\tau_h^{-1}(z), \tag{1.1.2}$$

$$\tau_g^{-1}\left(y\tau_{gh}(z)\right) = \tau_g^{-1}(y)\tau_h(z), \tag{1.1.3}$$

$$\tau_g^{-1}(yz) = \tau_g^{-1}(y)\tau_h\tau_{gh}^{-1}(z). \tag{1.1.4}$$

Chứng minh. Đầu tiên cần lưu ý rằng với mọi $g \in \mathbb{G}$ và mọi $n \in \mathbb{N}$, τ_g^n và τ_g^{-n} luôn là các tự đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc của A cho nên bậc của các phần tử thuần nhất trong A luôn được bảo toàn qua các ánh xạ này. Bây giờ thay z bởi $\tau_h^{-1}(z)$ trong (1.1.1) ta thu được (1.1.2). Thay y bởi $\tau_g^{-2}(y)$ trong (1.1.1), sau đó tác động τ_g^{-1} vào hai vế của đẳng thức mới ta thu được

$$\tau_g^{-2}(y)\tau_h(z) = \tau_g^{-1}(\tau_g^{-1}(y)\tau_{gh}(z)).$$

Thay $\tau_g^{-1}(y)$ bởi y vào đẳng thức trên ta có

$$\tau_g^{-1}(y)\tau_h(z) = \tau_g^{-1}(y\tau_{gh}(z)),$$

hay chính là (1.1.3). Đẳng thức (1.1.4) thu được bằng cách thay $\tau_{gh}(z)$ bởi z trong (1.1.3). $\square$

Tiếp theo chúng tôi trình bày một số tính chất quan trọng của hệ xoắn. Để làm điều này, chúng tôi cần bổ đề kỹ thuật dưới đây.

Bổ đề 1.1.10. [2] *Cho A là một vành có đơn vị 1. Một phần tử a của vành A là khả nghịch khi và chỉ khi a là chính quy phải (tức là, $az \neq 0$ với mọi $z \neq 0$, $z \in A$), và $aA = A$.*

Chứng minh. Giả sử $a \in A$ là khả nghịch. Nếu $az = 0$ với $z \in A$ nào đó thì $z = a^{-1}az = 0$. Mặt khác, $1 = aa^{-1} \in aA$ nên $A \subseteq aA$, và hiển nhiên $aA \subseteq A$, do đó $aA = A$. Ngược lại, giả sử $a \in A$ là phần tử thoả mãn a là chính quy phải, và $aA = A$. Vì $aA = A$ nên tồn tại phần tử $b \in A$, sao cho $ab = 1$. Bây giờ ta sẽ chỉ ra $ba = 1$, và do đó suy ra a là phần tử khả nghịch. Trước hết, ta khẳng định ba là phần tử chính quy phải. Thật vậy, giả sử tồn tại $z \in A$ sao cho $baz = 0$. Khi đó $0 = a(baz) = (ab)(az) = 1.az = az$. Mà a là chính quy phải nên $z = 0$. Bên cạnh đó, ta có

$$ba = b(ab)a = (ba)(ba),$$

dẫn đến

$$ba(1 - ba) = 0.$$

Do ba là chính quy phải nên $1 - ba = 0,$ hay $ba = 1$. $\square$

Mệnh đề 1.1.11. [2] *Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm, A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc, và $\{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ là một hệ xoắn của A. Khi đó những khẳng* *định sau là đúng:*

(1) *Với mọi phần tử thuần nhất a của A và mọi $g \in \mathbb{G}$, $\tau_g(a)$ là khả nghịch khi và chỉ khi a khả nghịch.*

(2) *Với mọi $g \in \mathbb{G}$, $\tau_g^{-1}(1) = \tau_e^{-1}(1) = (\tau_e(1))^{-1}$.*

(3) *Với mọi $y \in A$, $\tau_e(y) = \tau_e(1)y$ và $y = \tau_e^{-1}(1)\tau_e(y)$. Do đó, nếu $\tau_e(1) = 1$ thì $\tau_g(1) = 1$ với mọi $g \in \mathbb{G}$, và $\tau_e(y) = y$ với mọi $y \in A$.*

Chứng minh. (1) Giả sử $\deg(a) = h$. Ta có hai khẳng định sau đây:

(i) a là chính quy phải khi và chỉ khi $\tau_g(a)$ là chính quy phải.

(ii) $aA = A$ khi và chỉ khi $\tau_g(a)A = A$.

Thật vậy, với khẳng định (i), giả sử a là chính quy phải, và $x \in A$ là phần tử thoả mãn $\tau_g(a)x = 0$. Ta viết x thành tổng các phần tử thuần nhất thuộc các thành phần phân bậc khác nhau:

$$x = x_d + \cdots + x_e, \text{ với } x_i \in A_i,\ i \in \{d, \ldots, e\}.$$

Khi đó, $\tau_g(a)(x_d + \cdots + x_e) = 0$, hay $\tau_g(a)x_d + \cdots + \tau_g(a)x_e = 0$. Vì $0 \in (0)$ và (0) là iđêan phân bậc của A nên ta phải có $\tau_g(a)x_i = 0$ với mọi $x_i \in A_i, i \in \{d, \ldots, e\}$. Từ đây, sử dụng đẳng thức (1.1.2) ta có

$$0 = \tau_g(a)x_i = \tau_g(a)\tau_{gh}\tau_h^{-1}(\tau_h\tau_{gh}^{-1}(x_i)) = \tau_g(a\tau_h\tau_{gh}^{-1}(x_i)).$$

Vì τ_g là song ánh nên $a\tau_h\tau_{gh}^{-1}(x_i) = 0$ với mọi $i \in \{d, \ldots, e\}$. Mặt khác, a là chính quy phải nên $\tau_h\tau_{gh}^{-1}(x_i) = 0$, suy ra $x_i = 0$ với mọi $x_i \in A_i$, $i \in \{d, \ldots, e\}$. Do đó $x = x_d + \cdots + x_e = 0$, kéo theo $\tau_g(a)$ là chính quy phải. Ngược lại, giả sử $\tau_g(a)$ là chính quy phải và $y \in A$ là phần tử thoả mãn $ay = 0$. Tương tự cách làm trên, ta viết y thành tổng các phần tử thuần nhất thuộc các thành phần phân bậc khác nhau: $y = y_m + \cdots + y_n$ với $y_j \in A_j, j \in \{m, \ldots, n\}$. Khi đó

$$0 = ay = a(y_m + \cdots + y_n) = ay_m + \cdots ay_n.$$

Suy ra $ay_j = 0$ với mọi $y_j \in A_j, j \in \{m, \ldots, n\}$. Đẳng thức (1.1.2) cho ta

$$0 = \tau_g(ay_j) = \tau_g(a)\tau_{gh}\tau_h^{-1}(y_j).$$

Do $\tau_g(a)$ là chính quy phải nên $\tau_{gh}\tau_h^{-1}(y_j) = 0$, dẫn đến $y_j = 0$, với mọi $y_j \in A_j, j \in \{m, \ldots, n\}$. Như vậy $y = y_m + \cdots + y_n = 0$, đồng nghĩa với việc a là chính quy phải.

Với khẳng định (ii), ta có $aA = A$ khi và chỉ khi $\tau_g(aA) = \tau_g(A)$. Mặt khác, do τ_g là tự đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc nên $\tau_g(aA) = \tau_g(a)A$ và $\tau_g(A) = A$. Điều này dẫn đến $aA = A$ khi và chỉ khi $\tau_g(a)A = A$. Lại theo Bổ đề 1.1.10, a là khả nghịch khi và chỉ khi a là chính quy phải và $aA = A$. Kết hợp với khẳng định (i) và (ii) ta suy ra a khả nghịch khi và chỉ khi $\tau_g(a)$ khả nghịch.

(2) Với mọi $g \in \mathbb{G}$ ta có

$$\begin{aligned}
1 &= \tau_g^{-1}\left(\tau_g(1)\right) = \tau_g^{-1}\left(1 \cdot \tau_g(1)\right) \\
&= \tau_g^{-1}(1)\tau_e\left(\tau_{ge}^{-1}\left(\tau_g(1)\right)\right) \text{ (theo đẳng thức } (1.1.4)) \\
&= \tau_g^{-1}(1)\tau_e(1).
\end{aligned}$$

Do đó, $\tau_g^{-1}(1) = (\tau_e(1))^{-1}$ với mọi $g \in \mathbb{G}$. Đặc biệt, với $g = e$, ta suy ra $\tau_e^{-1}(1) = (\tau_e(1))^{-1}$.

(3) Nếu y là phần tử thuần nhất của A, sử dụng đẳng thức (1.1.1) ta có

$$\tau_e(y) = \tau_e\left(1 \cdot \tau_e\tau_e^{-1}(y)\right) = \tau_e(1)\tau_{e\cdot e}\left(\tau_e^{-1}(y)\right) = \tau_e(1)y.$$

Vì τ_e là ánh xạ K-tuyến tính nên đẳng thức trên cũng đúng với mọi phần tử $y \in A$. Theo phần (2), $\tau_e^{-1}(1)$ là nghịch đảo của $\tau_e(1)$, do đó $y = \tau_e^{-1}(1)\tau_e(y)$.

Cuối cùng, giả sử $\tau_e(1) = 1$. Khi đó từ phần (2) suy ra $\tau_g^{-1}(1) = 1$, kéo theo $\tau_g(1) = \tau_g(\tau_g^{-1}(1)) = 1$ với mọi $g \in \mathbb{G}$. Kết hợp kết quả phần (3), ta suy ra $\tau_e(y) = \tau_e(1)y = 1y = y$ với mọi $y \in A$. $\square$

1.2 Xoắn Zhang của đại số phân bậc

Với các kết quả của mục trước về hệ xoắn, bây giờ chúng ta đã sẵn sàng để định nghĩa xoắn Zhang của một đại số phân bậc và tìm hiểu các tính chất quan trọng của nó.

Mệnh đề và Định nghĩa 1.2.1. [2] Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm, A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc, và $\tau = \{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ là một hệ xoắn của A. Khi đó, tồn tại một phép nhân phân bậc "$*$" trên nền K-không gian vectơ phân bậc $\bigoplus_{g\in\mathbb{G}} A_g$, định nghĩa bởi

$$y * z = y\tau_h(z)$$

với mọi $y \in A_h, z \in A_l$. Phần tử đơn vị của phép nhân "$*$" là $1_\tau := \tau_e^{-1}(1)$. Đại số phân bậc $\left(\bigoplus_{g\in\mathbb{G}} A_g, *, 1_\tau\right)$ được gọi là *xoắn Zhang* của A bởi hệ xoắn τ, và được kí hiệu là A^τ.

Chứng minh. Với mọi $y, y_1, y_2 \in A_h$ và $z, z_1, z_2 \in A_l$ ta có

$$\begin{aligned}(y_1 + y_2) * z &= (y_1 + y_2)\tau_h(z) = y_1\tau_h(z) + y_2\tau_h(z)\\ &= y_1 * z + y_2 * z,\\ y * (z_1 + z_2) &= y\tau_h(z_1 + z_2) = y\tau_h(z_1) + y\tau_h(z_2)\\ &= y * z_1 + y * z_2.\end{aligned}$$

Do đó, phép nhân "$*$" có tính chất phân phối với phép cộng của A. Mặt khác, với mọi $x \in A_g, y \in A_h$ và $z \in A_l$, ta có

$$(x * y) * z = (x\tau_g(y))\,\tau_{gh}(z) = x\,(\tau_g(y)\tau_{gh}(z)) = x\tau_g\,(y\tau_h(z)) = x * (y * z).$$

Do đó phép nhân "$*$" có tính chất kết hợp. Từ định nghĩa của "$*$" và Mệnh đề 1.1.11, ta có

$$1_\tau * y = \tau_e^{-1}(1)\tau_e(y) = y,$$

và

$$y * 1_\tau = y\tau_h\tau_e^{-1}(1) = y.1 = y.$$

Do đó 1_τ là phần tử đơn vị của phép nhân "$*$". Như vậy $\left(\bigoplus_g A_g, *, 1_\tau\right)$ là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. $\square$

Ví dụ 1.2.2. [2] Cho K là một trường và A là một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc. Giả sử x là một phần tử chuẩn tắc (tức là, $xA = Ax$), chính quy và thuần nhất bậc 1 của A. Do $xA = Ax$ nên với mọi $a \in A$, tồn tại $a' \in A$ sao cho $ax = xa'$. Định nghĩa ánh xạ

$$f : A \longrightarrow A, \quad a \mapsto a'.$$

Ta khẳng định ánh xạ f là một tự đẳng cấu đại số phân bậc của A. Thật vậy, trước hết f là định nghĩa tốt vì nếu $a_1, a_2 \in A$ và $a_1 = a_2$ thì $a_1x = a_2x$, dẫn đến $xa'_1 = xa'_2$, suy ra $x(a'_1 - a'_2) = 0$, kéo theo $a'_1 - a'_2 = 0$ (do x chính quy), hay nói cách khác $f(a_1) = f(a_2)$. Các phép kiểm tra thông thường chỉ ra rằng f là một tự đồng cấu đại số phân bậc của A. Mặt khác, hiển nhiên f là toàn ánh do tính chuẩn tắc của x. Nếu $a \in A$ sao cho $f(a) = a' = 0$ thì $ax = xa' = 0$. Do x chính quy nên suy ra $a = 0$, kéo theo f là đơn ánh. Như vậy f quả thật là một tự đẳng cấu đại số phân bậc của A như đã khẳng định. Từ định nghĩa của f ta có $xx = xf(x)$, dẫn đến $x(x - f(x)) = 0$. Vì x là chính quy nên $x - f(x) = 0$, hay $f(x) = x$. Theo Ví dụ 1.1.8 (1), $\tau = \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ là một hệ xoắn của A. Xét trong xoắn Zhang A^τ, với một phần tử thuần nhất a bậc n của A^τ ta có

$$a * x = af^n(x) = ax \quad \text{và} \quad x * a = xf(a) = ax.$$

Do đó, $a * x = x * a$ với mọi phần tử thuần nhất a của A^τ.

Cho B là một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc và σ là một tự đẳng cấu đại số phân bậc của B. Khi đó, xét A là *mở rộng Ore* $B[x, \sigma]$, tức là A là một vành không giao hoán nhận được bằng việc trang bị một phép nhân mới trên vành đa thức $B[x]$ tương ứng với đồng nhất thức $xb = \sigma(b)x$ với mọi $b \in B$. Cụ thể,

$$A = B[x, \sigma] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \mid b_i \in B, n \in \mathbb{N} \text{ và } xb_i = \sigma(b_i)x, \forall b_i \in B \right\}.$$

Khi đó A cũng là một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc và x là một phần tử chính quy, chuẩn tắc và thuần nhất bậc 1 của A. Với tự đẳng cấu đại số phân bậc f của A được định nghĩa như phía trên, ta có

$$xf(b) = bx = x\sigma^{-1}(b)$$

với mọi $b \in B$. Suy ra $x(f(b) - \sigma^{-1}(b)) = 0$. Do x chính quy nên điều này dẫn đến $f(b) = \sigma^{-1}(b)$ với mọi $b \in B$, tức là $f\mid_B = \sigma^{-1}$. Khi đó, xoắn Zhang $A^\tau = B[x, \sigma]^\tau$ của A ứng với hệ xoắn $\tau = \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ đẳng cấu với đại số $B^{\sigma^{-1}}[x]$, trong đó $B^{\sigma^{-1}}$ là xoắn Zhang của B bởi hệ xoắn $\{\sigma^{-n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Đặc biệt, nếu $B = B_0$, thì $B^{\sigma^{-1}} = B$. Trong trường hợp này, $B[x, \sigma]^\tau = B[x]$.

Ví dụ 1.2.3. [2] Cho K là một trường và $A = K[x, y]$ là vành đa thức hai biến trên K. Theo Ví dụ 1.1.2 (3), A là một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc. Ta nhắc lại sau đây *tính chất phổ dụng* của K-đại số đa thức $K[x, y]$: Cho B là một K-đại số có đơn vị và hai phần tử $b_1, b_2 \in B$. Khi đó tồn tại duy nhất một đồng cấu K-đại số bảo toàn đơn vị $\phi : K[x, y] \to B$ thoả mãn $\phi(x) = b_1$ và $\phi(y) = b_2$.

(1) Cho $q \in K$ là một phần tử khác không. Theo tính chất phổ dụng của $K[x, y]$, tồn tại duy nhất một đồng cấu K-đại số $f : K[x, y] \to K[x, y]$ thoả mãn $f(x) = x$ và $f(y) = qy$. Hiển nhiên f là một đồng cấu phân bậc. Sử dụng tính chất phổ dụng của $K[x, y]$ ta cũng thiết lập được một đồng cấu K-đại số phân bậc $f' : K[x, y] \to K[x, y]$ thoả mãn $f'(x) = x$ và $f'(y) = q^{-1}y$. Dễ dàng kiểm tra được $f \circ f' = \mathrm{id}_{K[x,y]}$ và $f' \circ f = \mathrm{id}_{K[x,y]}$. Do đó f là một tự đẳng cấu K-đại số phân bậc của $A = K[x, y]$.

Theo Ví dụ 1.1.8, $\tau = \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ là một hệ xoắn của A. Gọi "$*$" là phép nhân của xoắn Zhang A^τ. Ta có

$$\begin{aligned} x * y &= xf(y) = x(qy) = qxy = q(yx) \\ &= q(yf(x)) = q(y * x) = q * y * x. \end{aligned}$$

Khi đó

$$A^\tau = K[x, y]^\tau \cong \frac{K\langle x, y\rangle}{\langle xy - qyx\rangle}.$$

(2) Theo tính chất phổ dụng của $K[x, y]$, tồn tại duy nhất một đồng cấu K-đại số $g : K[x, y] \to K[x, y]$ thoả mãn $g(x) = x$, $g(y) = y - x$. Hiển nhiên g là một đồng cấu phân bậc. Tương tự, ta cũng thiết lập được một đồng cấu K-đại số phân bậc $g' : K[x, y] \to K[x, y]$ thoả mãn $g'(x) = x$ và $g'(y) = y + x$. Dễ dàng kiểm tra được $g \circ g' = \mathrm{id}_{K[x,y]}$ và $g' \circ g = \mathrm{id}_{K[x,y]}$. Do đó g là một tự đẳng cấu K-đại số phân bậc của $A = K[x, y]$.

Khi đó, theo Ví dụ 1.1.8, $\lambda = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ là một hệ xoắn của A. Gọi "$\star$" là phép nhân của xoắn Zhang A^λ. Trong A^λ ta cũng dễ dàng chỉ ra quan hệ

$$x \star x + x \star y - y \star x = 0,$$

và hơn nữa

$$A^\lambda = K[x, y]^\lambda \cong \frac{K \langle x, y\rangle}{\langle x^2 + xy - yx\rangle}.$$

Trong Mệnh đề và Định nghĩa 1.2.1 ta thấy rằng nếu A^τ là xoắn Zhang của K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc A bởi hệ xoắn τ, và A, A^τ có phần tử đơn vị lần lượt là $1, 1_\tau$ thì nhìn chung, $1_\tau \neq 1$ vì các tự đẳng cấu τ_g không nhất thiết biến 1 thành 1 trong A. Mệnh đề sau đây khẳng định rằng thực chất khi tìm hiểu xoắn Zhang, ta hoàn toàn có thể chuyển về nghiên cứu các xoắn Zhang A^τ mà $1_\tau = 1$.

Mệnh đề 1.2.4. [2] *Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm, và A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. Khi đó, với mọi hệ xoắn $\tau = \{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ của A, tồn tại một hệ xoắn $\tau' = \left\{\tau'_g \mid g \in \mathbb{G}\right\}$ sao cho $A^\tau \cong A^{\tau'}$ và $1_{\tau'} = 1$.*

Chứng minh. Cố định một phần tử $s \in \mathbb{G}$ và đặt $\tau'_g = \tau_{sg}\tau_s^{-1}$ với mọi $g \in \mathbb{G}$. Khi đó, τ'_g cũng là các tự đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc của A với mọi $g \in \mathbb{G}$. Ta có,

$$\tau'_e(1) = \tau_{se}\tau_s^{-1}(1) = \tau_s\tau_s^{-1}(1) = 1.$$

Ta khẳng định rằng $\tau' := \left\{\tau'_g \mid g \in \mathbb{G}\right\}$ là một hệ xoắn của A và τ_s là một đẳng cấu đại số phân bậc đi từ A^τ đến $A^{\tau'}$. Thật vậy, với mọi $y \in A_h, z \in A_l$, từ đẳng thức (1.1.1) và (1.1.3), ta có

$$\begin{aligned}\tau'_g(y\tau'_h(z)) &= \tau_{sg}\tau_s^{-1}\left(y\tau_{sh}\tau_s^{-1}(z)\right) = \tau_{sg}\left(\tau_s^{-1}(y)\tau_h\tau_s^{-1}(z)\right)\\ &= \tau_{sg}\tau_s^{-1}(y)\tau_{sgh}\tau_s^{-1}(z) = \tau'_g(y)\tau'_{gh}(z).\end{aligned}$$

Do đó, $\tau' = \left\{\tau'_g \mid g \in \mathbb{G}\right\}$ là một hệ xoắn của A. Kí hiệu "$\star$" là phép nhân của $A^{\tau'}$. Phần tử đơn vị của $A^{\tau'}$ là

$$1_{\tau'} = \tau_e^{'-1}(1) = \tau_e^{'-1}(\tau'_e(1)) = 1.$$

Với $y \in A_h, z \in A_l$, ta có

$$y \star z = y\tau'_h(z) = y\tau_{sh}\tau_s^{-1}(z).$$

Xét

$$\tau_s : A^\tau \to A^{\tau'}, \quad x \mapsto \tau_s(x).$$

Để chứng minh τ_s là một đẳng cấu đại số phân bậc, ta chỉ cần chỉ ra với mọi $y \in A_h, z \in A_l$, $\tau_s(y * z) = \tau_s(y) \star \tau_s(z)$ trong đó "$*$" là phép nhân trong A^τ. Thật vậy, ta có

$$\tau_s(y * z) = \tau_s\left(y\tau_h(z)\right) = \tau_s(y)\tau_{sh}(z) = \tau_s(y)\tau_{sh}\tau_s^{-1}\left(\tau_s(z)\right) = \tau_s(y) \star \tau_s(z).$$

Do vậy, $A^\tau \cong A^{\tau'}$. $\square$

Chú ý 1.2.5. [2] Khi xoắn Zhang A^τ của đại số A có $1_\tau = 1$ thì $\tau_e(1) = 1$. Bởi Mệnh đề 1.1.11, τ_e trong trường hợp này là ánh xạ đồng nhất của A. Khi đó, với mọi $a, b \in A_e$,

$$a * b = a\tau_e(b) = ab.$$

Do đó, vành con A_e của A cũng chính là vành con $\left(A^\tau\right)_e$ của A^τ. Nói riêng, nếu $A = A_e$ thì mọi xoắn Zhang của A là chính nó.

Theo định nghĩa, A và A^τ có cùng nền K-không gian vectơ phân bậc $\bigoplus_g A_g$. Mệnh đề sau đây cho phép chúng ta định nghĩa một loại quan hệ tương đương trên các xoắn Zhang của một đại số phân bậc.

Mệnh đề 1.2.6. [2] *Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm, và A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. Khi đó những khẳng định sau là đúng.*

(1) *(Phản xạ) A là một xoắn Zhang của chính nó.*

(2) *(Đối xứng) Nếu B là một xoắn Zhang của A, thì A là một xoắn Zhang của B.*

(3) *(Bắc cầu) Nếu B là một xoắn Zhang của A và C là một xoắn Zhang của B, thì C là một xoắn Zhang của A.*

Chứng minh. (1) Đặt $\tau = \{\tau_g := \mathrm{id}_A \mid g \in \mathbb{G}\}$, ở đó id_A là ánh xạ đồng nhất của A. Hiển nhiên τ là một hệ xoắn của A và $A = A^\tau$.

(2) Giả sử B là xoắn Zhang A^τ của A ứng với một hệ xoắn $\tau = \{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ nào đó. Định nghĩa $\tau^{-1} = \left\{\tau_g^{-1} \mid g \in \mathbb{G}\right\}$. Ta sẽ chứng minh τ^{-1} là một hệ xoắn của B (hệ xoắn này được gọi là *hệ xoắn nghịch đảo* của τ) và $A = B^{\tau^{-1}}$. Vì τ_g là các tự đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc của A nên τ_g^{-1} cũng vậy. Kí hiệu "$*$" là phép nhân của $B = A^\tau$. Với mọi $y \in A_h\,(= B_h)$, $z \in A_l\,(= B_l)$, theo đẳng thức (1.1.4), ta có

$$\tau_g^{-1}\left(y * \tau_h^{-1}(z)\right) = \tau_g^{-1}(yz) = \tau_g^{-1}(y)\tau_h\tau_{gh}^{-1}(z) = \tau_g^{-1}(y) * \tau_{gh}^{-1}(z).$$

Do đó, τ^{-1} là một hệ xoắn của B. Như vậy, đại số A và $B^{\tau^{-1}}$ có chung nền K-không gian vectơ $\bigoplus_{g\in\mathbb{G}} A_g$. Bây giờ ta chỉ cần chỉ ra chúng có cùng một phép nhân. Giả sử "$\star$" là phép nhân của $B^{\tau^{-1}}$. Với mọi $y \in A_h$, $z \in A_l$,

$$y \star z = y * \tau_h^{-1}(z) = y\tau_h\tau_h^{-1}(z) = yz.$$

Do đó A và $B^{\tau^{-1}}$ có cùng một phép nhân. Vì vậy $A = B^{\tau^{-1}}$.

(3) Giả sử B là xoắn Zhang A^τ của A ứng với một hệ xoắn $\tau = \{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ nào đó, và C là xoắn Zhang $B^{\tau'}$ của B ứng với một hệ xoắn $\tau' = \left\{\tau'_g \mid g \in \mathbb{G}\right\}$ nào đó. Kí hiệu phép nhân trong B và C lần lượt là "$*$" và "$\star$". Hiển nhiên A, B và C có chung nền K-không gian vectơ phân bậc $\bigoplus_g A_g$. Với mọi $g \in \mathbb{G}$, đặt $\tau''_g = \tau_g\tau'_g$ và $\tau'' = \left\{\tau''_g \mid g \in \mathbb{G}\right\}$. Ta sẽ chứng minh rằng τ'' là một hệ xoắn

của A và $A^{\tau''} = C$. Thật vậy, bởi cách đặt, với mọi $g \in \mathbb{G}$, τ''_g là các tự đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc của A. Hơn nữa, với mọi $y \in A_h, z \in A_l$, ta có

$$\begin{aligned}\tau''_g(y\tau''_h(z)) &= \tau_g\tau'_g\left(y\tau_h\tau'_h(z)\right) = \tau_g\tau'_g\left(y * \tau'_h(z)\right) \\ &= \tau_g\left(\tau'_g(y) * \tau'_{gh}(z)\right) = \tau_g\left(\tau'_g(y)\tau_h\tau'_{gh}(z)\right) \\ &= \tau_g\tau'_g(y)\tau_{gh}\tau'_{gh}(z) = \tau''_g(y)\tau''_{gh}(z).\end{aligned}$$

Do đó, τ'' là một hệ xoắn của A. Kí hiệu "$\circ$" là phép nhân trong $A^{\tau''}$. Với mọi $y \in A_h, z \in A_l$, ta có

$$y \circ z = y\tau''_h(z) = y\tau_h\tau'_h(z) = y * \tau'_h(z) = y \star z.$$

Từ đây suy ra $A^{\tau''}$ và C có cùng một phép nhân. Như vậy, $A^{\tau''} = C$. $\square$

Mệnh đề 1.2.7. [2] *Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm, và A, B là hai K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. Khi đó những khẳng định sau là đúng:*

(1) *Đại số B đẳng cấu với xoắn Zhang của đại số A khi và chỉ khi tồn tại một tập các đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc $\{\phi_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ đi từ B vào A thoả mãn*

$$\phi_g(ab) = \phi_g(a)\phi_{gh}(b)$$

với mọi $a \in B_h, b \in B_l$.

(2) *Đại số B đẳng cấu với một xoắn Zhang của đại số A khi và chỉ khi A đẳng cấu với một xoắn Zhang của B.*

Chứng minh. (1) Giả sử $B \cong A^\tau$, với $\tau = \{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ là một hệ xoắn nào đó của A. Gọi f là một đẳng cấu đại số phân bậc đi từ B vào A^τ. Với mọi $a \in B_h, b \in B_l$, ta có

$$\tau_g f(ab) = \tau_g(f(a) * f(b)) = \tau_g\left(f(a)\tau_h f(b)\right) = \tau_g f(a)\tau_{gh} f(b).$$

Với mỗi $g \in \mathbb{G}$, đặt $\phi_g = \tau_g f$. Khi đó, ta thu được $\phi_g(ab) = \phi_g(a)\phi_{gh}(b)$ như mong muốn. Ngược lại, giả sử tồn tại $\{\phi_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ là tập các song ánh K-tuyến tính phân bậc đi từ B vào A thoả mãn

$$\phi_g(ab) = \phi_g(a)\phi_{gh}(b) \tag{1.2.5}$$

với mọi $a \in B_h, b \in B_l$. Đặt $\tau = \left\{\tau_g := \phi_g\phi_e^{-1} \mid g \in \mathbb{G}\right\}$. Hiển nhiên τ là tập các tự đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc của A. Ta sẽ chứng minh τ là một hệ xoắn của A và ϕ_e chính là một đẳng cấu đại số phân bậc đi từ B vào A^τ. Trong đẳng thức (1.2.5), đặt $y = \phi_g(a)$ và $z = \phi_{gh}(b)$. Khi đó, $a = \phi_g^{-1}(y)$, $b = \phi_{gh}^{-1}(z)$. Tác động ϕ_g^{-1} vào hai vế của (1.2.5), và đổi sang biến y, z ta thu được đẳng thức

$$\phi_g^{-1}(y)\phi_{gh}^{-1}(z) = \phi_g^{-1}(yz). \tag{1.2.6}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\tau_g(y\tau_h(z)) &= \phi_g\phi_e^{-1}\left(y\phi_h\phi_e^{-1}(z)\right) = \phi_g\left(\phi_e^{-1}(y)\phi_{eh}^{-1}\phi_h\phi_e^{-1}(z)\right) \quad (\text{theo } (1.2.6))\\ &= \phi_g\left(\phi_e^{-1}(y)\phi_e^{-1}(z)\right) = \phi_g\phi_e^{-1}(y)\phi_{gh}\phi_e^{-1}(z) \quad (\text{theo } (1.2.5))\\ &= \tau_g(y)\tau_{gh}(z)\end{aligned}$$

với mọi $y \in A_h, z \in A_l$. Vì vậy τ là một hệ xoắn của A. Kí hiệu "$*$" là phép nhân của A^τ. Từ đẳng thức (1.2.5) ta có,

$$\phi_e(ab) = \phi_e(a)\phi_h(b) = \phi_e(a)\phi_h\phi_e^{-1}\phi_e(b) = \phi_e(a) * \phi_e(b),$$

với mọi $a \in B_h, b \in B_l$. Do đó, ϕ_e là một đẳng cấu đại số phân bậc từ B vào A^τ.

(2) Giả sử đại số phân bậc B đẳng cấu với một xoắn Zhang nào đó của A. Theo phần (1), tồn tại một tập các đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc $\{\phi_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ đi từ B vào A thoả mãn

$$\phi_g(ab) = \phi_g(a)\phi_{gh}(b) \quad \text{và} \quad \phi_g^{-1}(yz) = \phi_g^{-1}(y)\phi_{gh}^{-1}(z)$$

với mọi $a \in B_h, b \in B_l$, và mọi $y \in A_h, z \in A_l$. Với mỗi $g \in \mathbb{G}$, đặt $\lambda_g = \phi_g^{-1}\phi_e$. Khi đó, λ_g là các tự đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc của B với mọi $g \in \mathbb{G}$. Hơn nữa, $\lambda = \{\lambda_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ là một hệ xoắn của B vì với mọi

$a \in B_h, b \in B_l$ ta có

$$\lambda_g(a\lambda_h(b)) = \phi_g^{-1}\phi_e(a\phi_h^{-1}\phi_e(b)) = \phi_g^{-1}(\phi_e(a)\phi_e(b))$$
$$= \phi_g^{-1}\phi_e(a)\phi_{gh}^{-1}\phi_e(b) = \lambda_g(a)\lambda_{gh}(b).$$

Ta kí hiệu phép nhân trong xoắn Zhang B^λ là "$\star$". Xét song ánh K-tuyến tính phân bậc $\phi_e^{-1} : A \to B^\lambda$, $x \mapsto \phi_e^{-1}(x)$. Thực chất ϕ_e^{-1} là một đồng cấu đại số bởi

$$\phi_e^{-1}(yz) = \phi_e^{-1}(y)\phi_h^{-1}(z) = \phi_e^{-1}(y)\phi_h^{-1}\phi_e\phi_e^{-1}(z) = \phi_e^{-1}(y) \star \phi_e^{-1}(z).$$

Như vậy, $A \cong B^\lambda$ như các K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. Chiều ngược lại ta chứng minh hoàn toàn tương tự. $\square$

Bằng cách làm tương tự như đã định nghĩa xoắn Zhang của một đại số phân bậc, ta định nghĩa môđun xoắn Zhang của một môđun phải phân bậc như sau.

Mệnh đề và Định nghĩa 1.2.8. [2] Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm, A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc, và $\tau = \{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ là một hệ xoắn của A. Giả sử $M = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} M_g$ là một A-môđun phải phân bậc. Khi đó, tồn tại một cấu trúc A^τ-môđun phải phân bậc với phép nhân vô hướng mà ta cũng kí hiệu là "$*$", được định nghĩa trên nền K-môđun $\bigoplus_g M_g$ như sau

$$m * z = m\tau_h(z)$$

với mọi $m \in M_h, z \in A_l$. Khi đó, A^τ-môđun phải phân bậc $\left(\bigoplus_g M_g, *\right)$ được gọi là *môđun xoắn Zhang* của M bởi τ, và kí hiệu là M^τ.

Chứng minh. Với mọi $m, m_1, m_2 \in M_h$ và $z, z_1, z_2 \in A_l$ ta có

$$(m_1 + m_2) * z = (m_1 + m_2)\tau_h(z) = m_1\tau_h(z) + m_2\tau_h(z)$$
$$= m_1 * z + m_2 * z,$$
$$m * (z_1 + z_2) = m\tau_h(z_1 + z_2) = m\tau_h(z_1) + m\tau_h(z_2)$$
$$= m * z_1 + m * z_2.$$

Do đó phép nhân vô hướng "$*$" có tính chất phân phối với phép cộng trong M và phép cộng trong A. Mặt khác, với mọi $m \in M_g, y \in A_h$ và $z \in A_l$, ta có

$$(m*y)*z = (m\tau_g(y))\,\tau_{gh}(z) = m\,(\tau_g(y)\tau_{gh}(z)) = m\tau_g\,(y\tau_h(z)) = m*(y*z)$$

và $m*1_\tau = m\tau_g(1_\tau) = m\tau_g(\tau_g^{-1}(1)) = m.1 = m$. Do đó, $M^\tau = \left(\bigoplus_g M_g, *\right)$ là một A^τ-môđun phải phân bậc. □

Chú ý 1.2.9. Cách định nghĩa phép nhân vô hướng "$*$" như trên sẽ không áp dụng được với các môđun trái phân bậc của A. Thay vào đó, ta sẽ cần định nghĩa một "phiên bản bên trái" của hệ xoắn để từ đó định nghĩa môđun xoắn Zhang của một A-môđun trái phân bậc (xem mục 4 tài liệu [2]).

Một phiên bản tương tự của mệnh đề 1.2.6 cũng đúng cho các môđun xoắn Zhang của một môđun phải phân bậc.

Mệnh đề 1.2.10. [2] *Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm, A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc và M là một A-môđun phải phân bậc. Khi đó những khẳng định sau là đúng:*

(1) *(Phản xạ) M là một môđun xoắn Zhang của chính nó.*

(2) *(Đối xứng) Nếu N là một môđun xoắn Zhang của M, thì M là một môđun xoắn Zhang của N.*

(3) *(Bắc cầu) Nếu N là một môđun xoắn Zhang của M và L là một môđun xoắn Zhang của N, thì L là một môđun xoắn Zhang của M.*

Chứng minh. (1) Đặt $\tau = \{\tau_g := \mathrm{id}_A \mid g \in \mathbb{G}\}$, ở đó id_A là ánh xạ đồng nhất của A. Hiển nhiên τ là một hệ xoắn của A và $M = M^\tau$.

(2) Giả sử N là môđun xoắn Zhang M^τ của M ứng với một hệ xoắn $\tau = \{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ nào đó. Ta đã biết hệ xoắn nghịch đảo $\tau^{-1} = \{\tau_g^{-1} \mid g \in \mathbb{G}\}$ cũng là một hệ xoắn của A. Bây giờ ta sẽ chỉ ra $M = N^{\tau^{-1}}$. Thật vây, giả sử "$*$" và "$\star$" lần lượt là phép nhân vô hướng của N và $N^{\tau^{-1}}$. Với mọi $m \in M_h$, $z \in A_l$,

$$m \star z = m * \tau_h^{-1}(z) = m\tau_h\tau_h^{-1}(z) = mz.$$

Do đó M và $N^{\tau^{-1}}$ có cùng một phép nhân vô hướng. Vì vậy $M = N^{\tau^{-1}}$.

(3) Giả sử N là môđun xoắn Zhang M^τ của M ứng với một hệ xoắn $\tau = \{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ nào đó, và L là xoắn Zhang $N^{\tau'}$ của N ứng với một hệ xoắn $\tau' = \{\tau'_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ nào đó. Với mọi $g \in \mathbb{G}$, đặt $\tau''_g = \tau_g \tau'_g$ và $\tau'' = \{\tau''_g \mid g \in \mathbb{G}\}$. Ta đã biết rằng τ'' là một hệ xoắn của A. Bây ta chứng minh $M^{\tau''} = L$. Thật vậy, ta kí hiệu phép nhân vô hướng trong N, L và $M^{\tau''}$ lần lượt là "$*$", "$\star$" và "$\circ$". Với mọi $m \in M_h, z \in A_l$, ta có

$$m \circ z = m\tau''_h(z) = m\tau_h\tau'_h(z) = m * \tau'_h(z) = m \star z.$$

Do đó $M^{\tau''}$ và L có cùng một phép nhân vô hướng, kéo theo $M^{\tau''} = L$. $\square$

1.3 Sự tương đương của các phạm trù môđun phân bậc

Trong mục này, mục tiêu chính của chúng tôi là chứng minh sự đẳng cấu giữa phạm trù các môđun phải phân bậc của xoắn Zhang và của đại số ban đầu (Định lý 1.3.8), và sau đó chỉ ra rằng trong phạm vi của các đại số phân bậc liên thông thì hai đại số A và B có phạm trù các môđun phải phân bậc tương đương khi và chỉ khi B đẳng cấu với một xoắn Zhang của A (Định lý 1.3.19).

Trước hết, chúng tôi trình bày lại sau đây một số kiến thức cơ bản của lý thuyết phạm trù.

Định nghĩa 1.3.1. [8] Một *phạm trù* $\mathcal{C}$ bao gồm ba thành phần: một lớp $\mathrm{obj}(\mathcal{C})$ gồm các *vật*, một tập *cấu xạ* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ với mỗi cặp vật (A, B) (với mỗi cấu xạ $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, ta thường viết $f : A \to B$ hoặc $A \xrightarrow{f} B$), và *phép hợp thành* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$, kí hiệu bởi $(f, g) \mapsto g \circ f$, với mọi bộ ba các vật A, B, C. Những thành phần này thoả mãn các tiên đề sau đây:

(1) Các tập cấu xạ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ là đôi một rời nhau, tức là, mỗi cấu xạ $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ có duy nhất một tập nguồn A và duy nhất một tập đích B;

(2) Với mỗi vật A, tồn tại một *cấu xạ đồng nhất* $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ sao cho $f \circ \mathrm{id}_A = f$ và $\mathrm{id}_B \circ f = f$ với mọi $f : A \to B$;

(3) Phép hợp thành có tính chất kết hợp, tức là, với các cấu xạ cho trước $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, thì

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Một cấu xạ $f : A \to B$ trong $\mathcal{C}$ được gọi là *đẳng cấu* nếu tồn tại một cấu xạ $g : B \to A$ trong $\mathcal{C}$ sao cho $g \circ f = \mathrm{id}_A$ và $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Ví dụ 1.3.2. (1) *Phạm trù tập hợp*, kí hiệu là **Set**, gồm các vật là các tập hợp, các cấu xạ là các ánh xạ giữa hai tập hợp và phép hợp thành là phép hợp thành thông thường giữa hai ánh xạ.

(2) *Phạm trù nhóm*, kí hiệu là **Grp**, gồm các vật là các nhóm, các cấu xạ là các đồng cấu nhóm và phép hợp thành là phép hợp thành thông thường giữa hai đồng cấu.

(3) Cho R là một vành. Khi đó ta có *phạm trù các môđun phải* của R, kí hiệu là $\mathbf{Mod}_R$, gồm các vật là các R-môđun phải, các cấu xạ là các đồng cấu R-môđun phải và phép hợp thành là phép hợp thành thông thường giữa các đồng cấu.

(4) Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm và A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. *Phạm trù các môđun phải phân bậc* của A, kí hiệu là $\mathrm{Gr} - A$, gồm các vật là các A-môđun phải $\mathbb{G}$-phân bậc, các cấu xạ là các đồng cấu A-môđun phải phân bậc và phép hợp thành là phép hợp thành thông thường giữa các đồng cấu.

Định nghĩa 1.3.3. [8] Cho hai phạm trù $\mathcal{C}$ và $\mathcal{D}$. Một *hàm tử (hiệp biến)* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ là một phép cho tương ứng một vật $T(A) \in \mathrm{obj}(\mathcal{D})$ với mọi vật $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, và một ánh xạ

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T(A), T(A')),\ f \mapsto T(f)$$

với mọi cặp vật $A, A' \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ sao cho:

(1) Nếu $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$ trong $\mathcal{C}$, thì $T(A) \xrightarrow{T(f)} T(A') \xrightarrow{T(g)} T(A'')$ trong $\mathcal{D}$ và

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f),$$

(2) $T(1_A) = 1_{T(A)}$ với mọi vật $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$.

Đặc biệt, một *hàm tử đồng nhất* $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ được định nghĩa bởi $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(A) = A$ với mọi vật A trong $\mathcal{C}$ và $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ với mọi cấu xạ f trong $\mathcal{C}$.

Ta cũng có phép hợp thành trên các hàm tử. Cụ thể, với các hàm tử cho trước $\mathcal{C} \xrightarrow{T} \mathcal{B} \xrightarrow{S} \mathcal{A}$ giữa các phạm trù $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ thì các ánh xạ hợp thành

$$C \mapsto S(T(C)), \qquad f \mapsto S(T(f))$$

trên các vật C và các cấu xạ f của phạm trù $\mathcal{C}$ định nghĩa một hàm tử $ST : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, được gọi là *hợp thành* của S và T.

Định nghĩa 1.3.4. [9] Cho hai phạm trù $\mathcal{C}$ và $\mathcal{D}$. Khi đó

(1) Một hàm tử $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ được gọi là một *đẳng cấu* nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm tử $S : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sao cho $ST = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ và $TS = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. Khi đó, ta cũng nói hai phạm trù $\mathcal{C}$ và $\mathcal{D}$ là *đẳng cấu*.

(2) Một hàm tử $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ được gọi là *trung thành* nếu phép tương ứng

$$T_{C,C'} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T(C), T(C')), \quad f \mapsto T(f)$$

là đơn ánh với mọi $C, C' \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$.

(3) Một hàm tử $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ được gọi là *đầy đủ* nếu phép tương ứng

$$T_{C,C'} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T(C), T(C')), \quad f \mapsto T(f)$$

là toàn ánh với mọi $C, C' \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$.

Định nghĩa 1.3.5. [9] Cho trước hai phạm trù $\mathcal{C}$ và $\mathcal{D}$, và các hàm tử $S, T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Một *phép biến đổi tự nhiên* $\sigma : S \to T$ là một phép cho tương ứng mỗi vật C trong $\mathcal{C}$ một cấu xạ $\sigma_C : S(C) \to T(C)$ trong $\mathcal{D}$ sao cho với mọi cấu xạ $f : C \to C'$ trong $\mathcal{C}$ thì sơ đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} S(C) & \xrightarrow{\sigma_C} & T(C) \\ {\scriptstyle S(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T(f)} \\ S(C') & \xrightarrow{\sigma_{C'}} & T(C') \end{array}$$

Phép biến đổi tự nhiên σ như trên được gọi là *đẳng cấu tự nhiên* (hoặc *tương đương tự nhiên*) nếu với mọi vật $C \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, cấu xạ σ_C trong $\mathcal{D}$ là đẳng cấu. Khi đó, ta kí hiệu là $S \cong T$.

Định nghĩa 1.3.6. [9] Cho hai phạm trù $\mathcal{C}$ và $\mathcal{D}$. Một hàm tử $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ được gọi là một *tương đương phạm trù* (hoặc *hàm tử tương đương*) nếu tồn tại một hàm tử $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sao cho ta có các đẳng cấu tự nhiên $ST \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ và $TS \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Khi đó, ta nói hai phạm trù $\mathcal{C}$ và $\mathcal{D}$ là *tương đương*.

Hiển nhiên nếu hai phạm trù $\mathcal{C}$ và $\mathcal{D}$ là đẳng cấu thì chúng cũng tương đương với nhau. Ngoài ra, trong mục này, chúng tôi sử dụng tính chất quan trọng sau đây của một hàm tử tương đương.

Bổ đề 1.3.7. [9] *Cho hai phạm trù $\mathcal{C}$ và $\mathcal{D}$. Nếu hàm tử $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ là một tương đương phạm trù thì S là đầy đủ và trung thành.*

Chứng minh. Do $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ là một hàm tử tương đương nên tồn tại hàm tử $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sao cho $ST \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, và $TS \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Khi đó, với mỗi cấu xạ $f : C \to C'$ trong $\mathcal{C}$, đẳng cấu tự nhiên $\theta : TS \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ cho ta sơ đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccc} TS(C) & \xrightarrow{\theta_C} & C \\ {\scriptstyle TS(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ TS(C') & \xrightarrow{\theta_{C'}} & C' \end{array}$$

Do đó $f = \theta_{C'} \circ TS(f) \circ \theta_C^{-1}$, kéo theo S là trung thành. Tương tự, sử dụng $ST \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ ta suy ra T là trung thành. Để chứng minh S là đầy đủ, xét $h : S(C) \to S(C')$ bất kì, và đặt $f = \theta_{C'} \circ T(h) \circ \theta_C^{-1}$. Khi đó, nếu thay $S(f)$ bởi h thì sơ đồ trên vẫn giao hoán, và do đó $TS(f) = T(h)$. Do T trung thành nên $S(f) = h$, dẫn đến S là đầy đủ. □

Bây giờ chúng ta đã sẵn sàng để khảo sát phạm trù các môđun phải phân bậc của xoắn Zhang. Định lý sau đây chỉ ra rằng phạm trù các môđun phải phân bậc của xoắn Zhang và của đại số ban đầu là đẳng cấu.

Định lý 1.3.8. [2] *Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm, A và B là các K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. Nếu B đẳng cấu với một xoắn Zhang của A thì hai phạm trù* $\mathrm{Gr}-A$ *và* $\mathrm{Gr}-B$ *là đẳng cấu.*

Chứng minh. Nếu B đẳng cấu với xoắn Zhang A^τ của A ứng với một hệ xoắn $\tau = \{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ nào đó thì hiển nhiên hai phạm trù $\mathrm{Gr}-B$ và $\mathrm{Gr}-A^\tau$ là đẳng cấu. Do đó ta chỉ cần chứng minh $\mathrm{Gr}-A$ đẳng cấu với $\mathrm{Gr}-A^\tau$. Thật vậy, ta định nghĩa một hàm tử F đi từ $\mathrm{Gr}-A$ vào $\mathrm{Gr}-A^\tau$ như sau: với mọi A-môđun phải $\mathbb{G}$-phân bậc M thì $F(M) = M^\tau$, và với mọi đồng cấu phần bậc ψ đi từ M vào N, $F(\psi) = \psi$. Hàm tử F xác định như trên là định nghĩa tốt nếu ta có thể chỉ ra ψ cũng là một đồng cấu phân bậc đi từ M^τ vào N^τ. Thật vậy, vì M và M^τ có cùng nền K-môđun phân bậc (tương tự với N và N^τ) nên ψ cũng là một ánh xạ K-tuyến tính phân bậc từ M^τ vào N^τ. Với mọi $m \in M_h$ và $z \in A_l$ ta có

$$\psi(m * z) = \psi\left(m\tau_h(z)\right) = \psi(m)\tau_h(z) = \psi(m) * z,$$

với "$*$" được định nghĩa như trong Mệnh đề và Định nghĩa 1.2.8. Do đó ψ là một đồng cấu A^τ-môđun phân bậc từ M^τ vào N^τ nếu (và chỉ nếu) ψ là một đồng cấu A-môđun phân bậc từ M vào N. Do vậy, F là định nghĩa tốt.

Theo Mệnh đề 1.2.6 (2), A là xoắn Zhang của A^τ bởi hệ xoắn nghịch đảo τ^{-1}. Do đó, ta có thể định nghĩa một hàm tử G đi từ $\mathrm{Gr}-A^\tau$ vào $\mathrm{Gr}-A$ tương tự như cách đã định nghĩa F. Theo Mệnh đề 1.2.10, với mọi A-môđun phải phân bậc M, $GF(M) = (M^\tau)^{\tau^{-1}} = M$, và với mọi A^τ-môđun phải phân bậc M', $FG(M') = \left(M'^{\tau^{-1}}\right)^\tau = M'$. Do đó, $GF = \mathrm{id}_{\mathrm{Gr}-A}$ và $FG = \mathrm{id}_{\mathrm{Gr}-A^\tau}$, kéo theo hai phạm trù $\mathrm{Gr}-A$ và $\mathrm{Gr}-A^\tau$ là đẳng cấu. $\square$

Công việc tiếp theo của chúng tôi là tìm hiểu khi nào thì điều ngược lại của Định lý 1.3.8 xảy ra. Để làm được điều này, trước hết ta cần trang bị thêm các khái niệm về môđun chuyển bậc và toán tử chuyển bậc.

Định nghĩa 1.3.9. [2] Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm và A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc.

(1) Với một A-môđun phải $\mathbb{G}$-phân bậc $M = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} M_g$ và một phần tử $h \in \mathbb{G}$, ta định nghĩa *môđun chuyển bậc* h của M là môđun

$$M[h] = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} (M[h])_g,$$

trong đó $(M[h])_g = M_{hg}$ với mọi $g \in \mathbb{G}$. Như vậy, nếu không xét đến sự phân bậc thì $M[h]$ là một A-môđun con của M.

(2) Với $h \in \mathbb{G}$, một *hàm tử dịch chuyển* s_h đi từ $\mathrm{Gr} - A$ vào chính nó được cho như sau: với mỗi A-môđun phải $\mathbb{G}$-phân bậc M, $s_h(M) = M[h]$, và với mỗi đồng cấu A-môđun phải phân bậc ψ đi từ M, $s_h(\psi) = \psi \mid_{M[h]}$.

Từ Định nghĩa 1.3.9, ta suy ra $s_e = \mathrm{id}_{\mathrm{Gr}-A}$ và với mọi $g, h \in \mathbb{G}$ ta có, $s_g s_h = s_{hg}$. Nếu $\mathbb{G}$ là một nhóm thì khi đó tồn tại hàm tử dịch chuyển $s_{h^{-1}}$, và ta có $s_h s_{h^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Gr}-A} = s_{h^{-1}} s_h$, kéo theo s_h là một tự đẳng cấu của $\mathrm{Gr} - A$ với mọi $h \in \mathbb{G}$. Tuy nhiên, trong trường hợp $\mathbb{G}$ là một vị nhóm bất kì, một hàm tử $s_{h^{-1}}$ có thể không tồn tại. Sau đây chúng ta sẽ xét đến vị nhóm $\mathbb{G}$ với một tính chất đặc biệt và từ đó cho phép ta định nghĩa một hàm tử dịch chuyển kiểu như $s_{h^{-1}}$ trong trường hợp $\mathbb{G}$ là một nhóm.

Định nghĩa 1.3.10. [2] Một vị nhóm $\mathbb{G}$ là *triệt tiêu trái* nếu $gh_1 = gh_2$ kéo theo $h_1 = h_2$ với mọi $g, h_1, h_2 \in \mathbb{G}$.

Ví dụ 1.3.11. (1) Hiển nhiên một nhóm bất kì là một vị nhóm triệt tiêu trái vì nếu $gh_1 = gh_2$ thì $g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2$, kéo theo $h_1 = h_2$ với mọi $g, h_1, h_2 \in \mathbb{G}$.

(2) $\mathbb{N}$ là một vị nhóm triệt tiêu trái vì nếu $n + m_1 = n + m_2$ thì biến đổi đẳng thức trong $\mathbb{Z}$ cho ta $(-n)+n+m_1 = (-n)+n+m_2$, dẫn đến $m_1 = m_2$, với mọi $n, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa 1.3.12. [2] Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm triệt tiêu trái và A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc.

(1) Với một A-môđun phải $\mathbb{G}$-phân bậc $M = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} M_g$ và một phần tử $h \in \mathbb{G}$, ta định nghĩa *môđun chuyển bậc* h^{-1} của M là môđun

$$M[h^{-1}] = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} (M[h^{-1}])_g,$$

trong đó $(M[h^{-1}])_g = \begin{cases} M_l & \text{nếu } g = hl, \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases}$

Như vậy, nếu không xét đến sự phân bậc thì $M[h^{-1}] = M$ như các A-môđun phải với mọi $h \in \mathbb{G}$.

(2) Với $h \in \mathbb{G}$, một *hàm tử dịch chuyển* $s_{h^{-1}}$ đi từ $\mathrm{Gr} - A$ vào chính nó được cho như sau: với mỗi A-môđun phải $\mathbb{G}$-phân bậc M, $s_{h^{-1}}(M) = M[h^{-1}]$, và với mỗi đồng cấu A-môđun phải phân bậc ψ, $s_{h^{-1}}(\psi) = \psi$.

Lưu ý rằng trong Định nghĩa 1.3.12, h^{-1} chỉ là một kí hiệu vì phần tử h có thể không có nghịch đảo trong vị nhóm $\mathbb{G}$. Trong trường hợp h thật sự có phần tử nghịch đảo h^{-1} trong $\mathbb{G}$ thì $M[h^{-1}] = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} M_{h^{-1}g}$ chính là môđun chuyển bậc h^{-1} của M theo Định nghĩa 1.3.9.

Về sau chúng tôi sẽ thực hiện nhiều phép biến đổi phức tạp trên tập các hàm tử $\{s_{h^{-1}} \mid h \in \mathbb{G}\}$ với $s_{h^{-1}}$ được định nghĩa như trong Định nghĩa 1.3.12. Để đơn giản hoá, từ nay chúng tôi kí hiệu $S_h := s_{h^{-1}}$.

Hàm tử S_h có một số tính chất cơ bản như sau.

Bổ đề 1.3.13. [2] *Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm triệt tiêu trái và A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. Khi đó, với $h \in \mathbb{G}$, hàm tử dịch chuyển $S_h = s_{h^{-1}}$ trong Định nghĩa 1.3.12 có các tính chất sau đây:*

(1) $S_e = \mathrm{id}_{\mathrm{Gr}-A}$,

(2) $S_h S_l = S_{hl}$ *với mọi* $h, l \in \mathbb{G}$,

(3) S_h *là một hàm tử trung thành và đầy đủ với mọi* $h \in \mathbb{G}$.

Chứng minh. (1) Với mọi A-môđun phải $\mathbb{G}$-phân bậc M, ta có

$$S_e(M) = M[e^{-1}] = M.$$

Mặt khác, theo định nghĩa, với mỗi đồng cấu A-môđun phải phân bậc ψ, $S_e(\psi) = \psi$. Do đó, $S_e = \mathrm{id}_{\mathrm{Gr}-A}$.

(2) Với một A-môđun phải $\mathbb{G}$-phân bậc $M = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} M_g$ bất kì, ta có

$$S_hS_l(M) = S_h(M[l^{-1}]) = M[l^{-1}][h^{-1}] = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} (M[l^{-1}][h^{-1}])_g,$$

trong đó $(M[l^{-1}][h^{-1}])_g = \begin{cases} (M[l^{-1}])_m & \text{nếu } g = hm, \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases}$

Lại có

$$(M[l^{-1}])_m = \begin{cases} M_n & \text{nếu } m = ln, \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Do đó, ta có

$$(M[l^{-1}][h^{-1}])_g = \begin{cases} M_n & \text{nếu } g = hln, \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases} = (M[(hl)^{-1}]_g$$

với mọi $g \in \mathbb{G}$. Từ đây suy ra, $S_hS_l(M) = S_{hl}(M)$. Mặt khác, với mỗi đồng cấu A-môđun phải phân bậc ψ, ta có

$$S_hS_l(\psi) = S_h(\psi) = \psi = S_{hl}(\psi).$$

Như vậy $S_hS_l = S_{hl}$ với mọi $h, l \in \mathbb{G}$.

(3) Theo định nghĩa của S_h, hiển nhiên S_h là trung thành và đầy đủ. $\square$

Bổ đề 1.3.14. [2] *Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm triệt tiêu trái và A là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. Đặt*

$$\Gamma(A) = \bigoplus_{g\in\mathbb{G}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-A}\left(S_g(A), A\right).$$

Khi đó, $\Gamma(A)$ là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc.

Chứng minh. Theo cách đặt, rõ ràng $\Gamma(A)$ có một cấu trúc K-môđun $\mathbb{G}$-phân bậc. Với mọi $a \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-A}\left(S_g(A), A\right)$, $b \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-A}\left(S_h(A), A\right)$, ta định nghĩa phép nhân

$$ab = a \circ S_g(b).$$

Hiển nhiên phép nhân này có tính chất phân phối với phép cộng của $\Gamma(A)$. Với $a \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-A}(S_g(A), A)$, $b \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-A}(S_h(A), A)$ và $c \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-A}(S_l(A), A)$ bất kì, ta có

$$\begin{aligned}(ab)c &= (a \circ S_g(b))c = (a \circ S_g(b)) \circ S_{gh}(c) = (a \circ S_g(b)) \circ S_g S_h(c)\\ &= a \circ (S_g(b) \circ S_g S_h(c)) = a \circ S_g(b \circ S_h(c)) = a \circ S_g(bc)\\ &= a(bc).\end{aligned}$$

Do đó phép nhân định nghĩa như trên của $\Gamma(A)$ có tính chất kết hợp, kéo theo $\Gamma(A)$ là một K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. □

Định lý 1.3.15. [2] *Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm triệt tiêu trái và A, B là hai K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. Ta sử dụng kí hiệu $\{S_g := s_{g^{-1}} \mid g \in \mathbb{G}\}$ trong cả hai phạm trù $\mathrm{Gr} - A$ và $\mathrm{Gr} - B$. Khi đó, nếu tồn tại một hàm tử trung thành và đầy đủ F đi từ $\mathrm{Gr} - A$ vào $\mathrm{Gr} - B$ sao cho $F(S_g(A)) \cong S_g(B)$ với mọi $g \in \mathbb{G}$, thì $\Gamma(A)$ đẳng cấu với một xoắn Zhang của $\Gamma(B)$ như các K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc.*

Chứng minh. Áp dụng Mệnh đề 1.2.7, ta chỉ cần xây dựng một tập các đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc $\{\phi_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ đi từ $\Gamma(B)$ vào $\Gamma(A)$ thoả mãn

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi_{gh}(b)$$

với mọi $a \in \Gamma(B)_h$, $b \in \Gamma(B)_l$. Thật vậy, với mỗi $g \in \mathbb{G}$, kí hiệu t_g là đẳng cấu đi từ $F(S_g(A))$ vào $S_g(B)$. Với mỗi $g \in \mathbb{G}$, ta định nghĩa ánh xạ ϕ_g đi từ $\Gamma(B)$ vào $\Gamma(A)$ như sau: với mỗi $a \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-B}(S_h(B), B) \subseteq \Gamma(B)$,

$$\phi_g(a) = (S_g)^{-1}\left(F^{-1}\left(t_g^{-1} S_g(a) t_{gh}\right)\right).$$

Như vậy, trên $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-B}(S_h(B), B)$, ϕ_g là hợp thành của bốn ánh xạ K-tuyến tính sau:

(m1) $S_g : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-B}\left(S_h(B), B\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-B}\left(S_{gh}(B), S_g(B)\right)$,

(m2) $t_g^{-1}()t_{gh} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-B}\left(S_{gh}(B), S_g(B)\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-B}\left(F\left(S_{gh}(A)\right), F\left(S_g(A)\right)\right)$,

(m3) $F^{-1} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-B}\left(F\left(S_{gh}(A)\right), F\left(S_g(A)\right)\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-A}\left(S_{gh}(A), S_g(A)\right)$,

(m4) $S_g^{-1} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-A}\left(S_{gh}(A), S_g(A)\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-A}\left(S_h(A), A\right)$.

Vì các hàm tử S_g và F là trung thành và đầy đủ nên các ánh xạ (m1), (m3) và (m4) là song ánh. Ánh xạ (m2) cũng là song ánh vì t_g và t_{gh} là các đẳng cấu. Do đó, ϕ_g là một song ánh K-tuyến tính phân bậc đi từ $\Gamma(B)$ vào $\Gamma(A)$. Với mọi $a \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-B}\left(S_h(B), B\right), b \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-B}\left(S_l(B), B\right)$, ta có

$$\begin{aligned}
\phi_g(ab) &= \left(S_g\right)^{-1}\left(F^{-1}\left(t_g^{-1} S_g(ab) t_{ghl}\right)\right) \\
&= \left(S_g\right)^{-1}\left(F^{-1}\left(t_g^{-1} S_g\left(a S_h(b)\right) t_{ghl}\right)\right) \\
&= \left(S_g\right)^{-1}\left(F^{-1}\left(t_g^{-1} S_g(a) S_{gh}(b) t_{ghl}\right)\right) \\
&= \left[\left(S_g\right)^{-1}\left(F^{-1}\left(t_g^{-1} S_g(a) t_{gh}\right)\right)\right]\left[\left(S_g\right)^{-1}\left(F^{-1}\left(t_{gh}^{-1} S_{gh}(b) t_{ghl}\right)\right)\right] \\
&= \phi_g(a) S_g^{-1} S_{gh}\left(\phi_{gh}(b)\right) \\
&= \phi_g(a) S_h\left(\phi_{gh}(b)\right) \\
&= \phi_g(a) \phi_{gh}(b).
\end{aligned}$$

Như vậy, theo Mệnh đề 1.2.7, $\Gamma(A)$ đẳng cấu với một xoắn Zhang của $\Gamma(B)$ như các K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. □

Định lý tiếp theo cung cấp cho chúng ta điều kiện để xảy ra chiều ngược lại của Định lý 1.3.8, trong trường hợp vị nhóm $\mathbb{G}$ là triệt tiêu trái.

Định lý 1.3.16. [2] *Cho K là một trường, $\mathbb{G}$ là một vị nhóm triệt tiêu trái và A, B là hai K-đại số $\mathbb{G}$-phân bậc. Khi đó B đẳng cấu với một xoắn Zhang của A khi và chỉ khi tồn tại một hàm tử tương đương F đi từ $\mathrm{Gr} - A$ vào $\mathrm{Gr} - B$ sao cho $F(A[g^{-1}]) \cong B[g^{-1}]$ với mọi $g \in \mathbb{G}$.*

Chứng minh. ($\Longrightarrow$) Nếu B đẳng cấu với một xoắn Zhang A^τ của A thì khi đó hai phạm trù $\mathrm{Gr} - B$ và $\mathrm{Gr} - A^\tau$ là đẳng cấu. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử B là xoắn Zhang A^τ của A với một hệ xoắn $\tau = \{\tau_g \mid g \in \mathbb{G}\}$ nào đó. Theo Định lý 1.3.8, hai phạm trù $\mathrm{Gr}-A$ và $\mathrm{Gr}-A^\tau$ là tương đương. Gọi F là hàm tử tương đương đi từ $\mathrm{Gr}-A$ vào $\mathrm{Gr}-A^\tau$ được định nghĩa như trong chứng minh của Định lý 1.3.8. Bây giờ ta sẽ chỉ ra $F\left(A\left[g^{-1}\right]\right) = A\left[g^{-1}\right]^\tau$ đẳng cấu với $A^\tau\left[g^{-1}\right]$ với mọi $g \in \mathbb{G}$. Thật vậy, các A^τ-môđun phải $A\left[g^{-1}\right]^\tau$ và $A^\tau\left[g^{-1}\right]$ có cùng nền K-môđun $\bigoplus_{h\in\mathbb{G}} A\left[g^{-1}\right]_h$ trong đó $A\left[g^{-1}\right]_h = A_l$ nếu $h = gl$ và $A\left[g^{-1}\right]_h = 0$ trong các trường hợp khác. Kí hiệu "$\cdot$" và "$\circ$" lần lượt là phép nhân vô hướng trong $A^\tau\left[g^{-1}\right]$ và $A\left[g^{-1}\right]^\tau$. Vì τ_g là các tự đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc của A nên τ_g cũng là đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc đi từ $A^\tau\left[g^{-1}\right]$ vào $A\left[g^{-1}\right]^\tau$. Với mọi $y \in A_h = A^\tau\left[g^{-1}\right]_{gh}$ và $z \in A_l$, ta có

$$\tau_g(y \cdot z) = \tau_g\left(y\tau_h(z)\right) = \tau_g(y)\tau_{gh}(z) = \tau_g(y) \circ z.$$

Do đó, τ_g là một đẳng cấu A^τ-môđun phân bậc đi từ $A^\tau\left[g^{-1}\right]$ vào $A\left[g^{-1}\right]^\tau$ với mọi $g \in \mathbb{G}$, cho nên $F\left(A\left[g^{-1}\right]\right) \cong A^\tau\left[g^{-1}\right]$ với mọi $g \in \mathbb{G}$.

($\Longleftarrow$) Giả sử tồn tại một hàm tử tương đương F đi từ $\mathrm{Gr}-A$ vào $\mathrm{Gr}-B$ sao cho $F\left(A\left[g^{-1}\right]\right) \cong B\left[g^{-1}\right]$ với mọi $g \in \mathbb{G}$. Theo Bổ đề 1.3.7, F là trung thành và đầy đủ. Do đó, áp dụng Định lý 1.3.15 ta suy ra $\Gamma(B)$ đẳng cấu với một xoắn Zhang của $\Gamma(A)$. Bây giờ ta sẽ chỉ ra $\Gamma(A) \cong A$. Thật vậy, với mọi $a \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-A}\left(A\left[h^{-1}\right], A\right) = \Gamma(A)_h$, do $1 \in A_e = A[h^{-1}]_h$ nên $a(1) \in a(A[h^{-1}]_h) \subseteq A_h$. Ta định nghĩa ánh xạ f đi từ $\Gamma(A)$ vào A bởi $f(a) = a(1)$ với mọi $a \in \Gamma(A)_h$. Các phép kiểm tra thông thường cho thấy f là một đẳng cấu K-tuyến tính phân bậc. Mặt khác, f là một đồng cấu đại số vì

$$f(ab) = f\left(as_{h^{-1}}(b)\right) = as_{h^{-1}}(b)(1) = a(b(1)) = a(1)b(1) = f(a)f(b)$$

với mọi $a \in \Gamma(A)_h$, $b \in \Gamma(A)_l$. Do đó, f là một đẳng cấu đại số phân bậc đi từ $\Gamma(A)$ vào A. Chứng minh tương tự, ta cũng có $\Gamma(B) \cong B$. Từ đó suy ra B đẳng cấu với một xoắn Zhang của A. $\square$

Từ Định lý 1.3.16, ta thấy rằng nếu điều kiện $F(A[g^{-1}]) \cong B[g^{-1}]$ tự động đúng cho một lớp đại số phân bậc nào đó, thì khi đó đại số A đẳng cấu với một xoắn Zhang của đại số B khi và chỉ khi phạm trù $\mathrm{Gr}-A$ tương đương với $\mathrm{Gr}-B$. Và điều này thực sự xảy ra nếu các đại số được xét đến là *phân bậc* *liên thông* trên trường K.

Định nghĩa 1.3.17. [2] Cho K là một trường và $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ là một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc. Đại số A được gọi là *phân bậc liên thông* nếu $A_0 = K$ và $A_n = 0$ với mọi $n < 0$.

Ví dụ 1.3.18. Cho K là một trường và n là một số nguyên dương. Từ Ví dụ 1.1.2 (3), ta suy ra vành đa thức n biến $K[x_1, \ldots, x_n]$ là một K-đại số phân bậc liên thông.

Bây giờ chúng ta đã sẵn sàng đến với định lý cuối cùng của chương này.

Định lý 1.3.19. [2] *Cho K là một trường và A, B là hai K-đại số phân bậc liên thông với $A_1 \neq 0$. Khi đó, đại số B đẳng cấu với một xoắn Zhang của đại số A khi và chỉ khi phạm trù $\mathrm{Gr} - A$ tương đương với phạm trù $\mathrm{Gr} - B$.*

Chứng minh. ($\Longrightarrow$) Chiều này là kết quả của Định lý 1.3.8.

($\Longleftarrow$) Với một đại số phân bậc liên thông, ta vừa có thể xem nó như một đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc, vừa có thể xem như một đại số $\mathbb{N}$-phân bậc. Do đó, ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: Xét A như một đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc. Khi đó, các vật trong phạm trù $\mathrm{Gr} - A$ là các A-môđun phải $\mathbb{Z}$-phân bậc. Giả sử F là một hàm tử tương đương đi từ $\mathrm{Gr} - A$ vào $\mathrm{Gr} - B$. Khi đó, do A là phân bậc liên thông và F là một hàm tử tương đương nên tồn tại một song ánh $f : n \mapsto f(n)$ trong $\mathbb{Z}$ sao cho $F(A[n]) \cong B[f(n)]$. Mặt khác, trong trường hợp này, với mọi $m \in \mathbb{Z}$, hàm tử dịch chuyển s_m là một hàm tử tương đương trên $\mathrm{Gr} - B$ với nghịch đảo là hàm tử s_{-m}. Khi đó, $s_{-f(0)}F$ cũng là một hàm tử tương đương đi từ $\mathrm{Gr} - A$ vào $\mathrm{Gr} - B$, và do đó

$$s_{-f(0)}F(A) = s_{-f(0)}F(A[0]) \cong s_{-f(0)}(B[f(0)]) = B[0] = B.$$

Như vậy, bằng cách thay F bởi $s_{-f(0)}F$, ta có thể giả sử rằng $F(A) \cong B$. Hay nói cách khác, ta có thể giả sử $f(0) = 0$. Bây giờ ta chứng minh f chính là ánh xạ đồng nhất trên $\mathbb{Z}$. Thật vậy, với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, do $\Gamma(A) \cong A$ như các đại số phân bậc nên

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-A}(A[n], A[n+1]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-A}(A[-1], A) \cong A_1 \neq 0.$$

Tác động F vào $A[n]$ và $A[n+1]$, ta có

$$\begin{aligned} 0 \neq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-B}(B[f(n)], B[f(n+1)]) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}-B}(B[f(n)-f(n+1)], B) \\ &\cong B_{f(n+1)-f(n)}. \end{aligned}$$

Do B là phân bậc liên thông nên ta suy ra $f(n+1)-f(n) \geq 0$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Mặt khác, f là song ánh nên $f(n+1) \neq f(n)$. Như vậy, $f(n+1) > f(n)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$, kéo theo $f(m) > f(n)$ với mọi số nguyên $m > n$. Ta khẳng định rằng $f(n) = n$, với mọi số nguyên $n \geq 0$. Thật vậy, ta tiến hành quy nạp theo n để chứng minh khẳng định này. Với $n = 0$, ta đã có $f(0) = 0$. Với $n > 0$, giả sử $f(k) = k$ với mọi $0 \leq k \leq n$. Ta cần chỉ ra $f(n+1) = n+1$. Giả sử ngược lại $f(n+1) =: m \neq n+1$. Ta có, $n+1 > 0$ nên $m = f(n+1) > f(0) = 0$. Nếu $m < n+1$ thì theo giả thiết quy nạp ta có $m = f(m)$, dẫn đến $f(m) = m = f(n+1)$. Do f là song ánh nên $m = n+1$ (mâu thuẫn). Nếu $m > n+1$, giả sử $a \in \mathbb{Z}$ thoả mãn $n+1 = f(a)$. Khi đó ta có $f(n+1) = m > n+1 = f(a)$, dẫn đến $n+1 > a$. Mặt khác, $f(a) = n+1 > 0 = f(0)$ nên $a > 0$. Với $0 < a < n+1$, áp dụng giả thiết quy nạp ta có $a = f(a)$. Từ đây suy ra $a = n+1$ (mâu thuẫn với việc $n+1 > a$). Do vậy, $m = n+1$, hay $f(n+1) = n+1$ như mong muốn. Lập luận tương tự cũng cho ta $f(-n) = -n$ với mọi số nguyên $n \geq 0$. Từ đây suy ra $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$, dẫn đến $F(A[n]) \cong B[n]$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Áp dụng Định lý 1.3.16 ta suy ra đại số B đẳng cấu với một xoắn Zhang của đại số A.

Trường hợp 2: Xét A như một đại số $\mathbb{N}$-phân bậc. Khi đó, các vật trong phạm trù $\mathrm{Gr} - A$ là các A-môđun phải $\mathbb{N}$-phân bậc. Giả sử F là một hàm tử tương đương đi từ $\mathrm{Gr}-A$ vào $\mathrm{Gr}-B$. Khi đó với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $F(A[-n]) \cong B[-f(n)]$ với $f : n \mapsto f(n)$ là một song ánh trong $\mathbb{N}$. Lặp lại lập luận của trường hợp 1 ta suy ra song ánh f có tính chất $f(m) > f(n)$ với mọi số tự nhiên $m > n$. Khi đó, $f(0) = 0$. Thật vậy, giả sử ngược lại $f(0) > 0$. Do f là song ánh nên tồn tại một số tự nhiên a sao cho $0 = f(a)$. Do đó $f(0) > 0 = f(a)$, kéo theo $0 > a$ (vô lý). Chứng minh quy nạp theo n như trường hợp 1 cho ta $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, dẫn đến $F(A[-n]) \cong B[-n]$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ đây, theo Định lý 1.3.16, đại số B đẳng cấu với một xoắn Zhang của đại số A. $\square$

Chương 2

XOẮN ZHANG CỦA ĐẠI SỐ LEAVITT

Trong chương này, mục tiêu chính của chúng tôi là đi xây dựng một số lớp tự đẳng cấu phân bậc đặc biệt trên đại số Leavitt kiểu $(1, n)$ dựa vào các phương pháp được thiết lập bởi Cuntz [10] và Kuroda-Nam [11], và từ đó chúng tôi phân loại (sai khác đẳng cấu) các xoắn Zhang của đại số Leavitt kiểu $(1, n)$ liên kết với các tự đẳng cấu đã được xây dựng.

Các kết quả chính trong chương này được dựa theo công bố [7] của tác giả, cộng tác với T. G. Nam và Ashish. K. Srivastava.

2.1 Về đại số Leavitt kiểu $(1, n)$

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày về xây dựng của đại số Leavitt kiểu $(1, n)$ cùng các tính chất cơ bản của nó và sau đó chúng tôi đi mô tả tường minh nhóm các tự đẳng cấu phân bậc của đại số Leavitt kiểu $(1, n)$.

Trong đại số tuyến tính, chúng ta đã biết rằng hai không gian vectơ hữu hạn chiều là đẳng cấu khi (và chỉ khi) chúng có cùng số chiều. Tương tự, khi làm việc trên các vành, chúng ta cũng bắt gặp nhiều vành có tính chất sau.

Định nghĩa 2.1.1. [12] Một vành có đơn vị R được gọi là có tính chất *IBN (Invariant Basis Number)* nếu i, j là hai số nguyên dương thoả mãn $R^i \cong R^j$ như các R-môđun trái thì $i = j$.

Ví dụ 2.1.2. Một trường K bất kì luôn là một vành có tính chất IBN. Thật vậy, với một số nguyên dương m cho trước, K^m là một K-không gian vectơ chiều m. Khi đó, nếu $K^i \cong K^j$ như các K-môđun với các số nguyên dương i, j nào đó thì áp dụng định lý chiều của không gian vectơ, ta ngay lập tức có $i = j$.

Trong chương 1 của tài liệu [13], T. Y. Lam đã chỉ ra rằng lớp các vành có tính chất IBN thực tế là rất rộng, chúng bao gồm cả vành chia, vành địa phương, vành giao hoán và vành Noether. Bên cạnh đó, vẫn còn nhiều lớp vành quan trọng khác không có tính chất này, điển hình như ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.1.3. [12] Cho K là một trường, $V = K^{(\mathbb{N})}$ là một K-không gian vectơ chiều vô hạn đếm được và vành $R = \mathrm{End}_K(V)$ gồm các tự đồng cấu K-tuyến tính của V. Khi đó, R không có tính chất IBN vì ${}_RR^m \cong {}_RR^n$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$. Thật vậy, trước hết ta có thể xem R như K-đại số $\mathrm{RFM}_{\mathbb{N}}(K)$ của các ma trận M cấp $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ trên K mà ở đó mỗi hàng của M chỉ có hữu hạn các phần tử khác 0. Khi đó, một đẳng cấu R-môđun trái $\sigma : {}_RR \longrightarrow {}_RR^2$ dễ dàng được thiết lập, bằng cách gửi một ma trận $M \in R$ lên cặp ma trận $(M_1, M_2) \in R^2$, trong đó ma trận M_1 được xây dựng từ các cột lẻ của M, và ma trận M_2 được xây dựng từ các cột chẵn của M. Từ ${}_RR \cong {}_RR^2$, ta tiếp tục mở rộng lên

$$ {}_RR^3 \cong {}_RR^2 \oplus_R R \cong {}_RR \oplus_R R \cong {}_RR, $$

và do vậy dễ dàng thu được ${}_RR^m \cong {}_RR^n$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa 2.1.4. [6] Cho R là một vành không có tính chất IBN. Giả sử $m \in \mathbb{N}$ là số nhỏ nhất với tính chất $R^m \cong R^{m'}$ như các R-môđun trái với $m' > m$ nào đó. Với số m như vậy, gọi n giá trị nhỏ nhất trong các số m'. Khi đó, ta nói rằng R có *kiểu môđun* (m, n).

Ví dụ 2.1.5. Cho K là một trường, $V = K^{(\mathbb{N})}$ là một K-không gian vectơ chiều vô hạn đếm được và vành $R = \mathrm{End}_K(V)$. Từ Ví dụ 2.1.3, dễ thấy rằng R có kiểu môđun $(1, 2)$.

Vào năm 1962, trong công trình [3] nổi tiếng, W. G. Leavitt đã đưa ra kết quả quan trọng sau đây về một loại đại số có kiểu môđun (m, n).

Định lý 2.1.6. (Định lý Leavitt) [3] *Cho* $m, n \in \mathbb{N}$ *với* $n > m$ *và* K *là một trường. Khi đó, tồn tại một* K*-đại số có đơn vị* $L_K(m, n)$ *sao cho:*

(1) $L_K(m, n)$ *có kiểu môđun* (m, n).

(2) *$L_K(m,n)$ là phổ dụng, theo nghĩa nếu S là một K-đại số có đơn vị và có kiểu môđun (m,n) thì khi đó tồn tại một đồng cấu K-đại số bảo toàn đơn vị $\varphi : L_K(m,n) \longrightarrow S$.*

(3) *$L_K(m,n)$ được mô tả hoàn toàn thông qua các phần tử sinh và mối quan hệ giữa chúng.*

Một đại số $L_K(m,n)$ như vậy được gọi là *đại số Leavitt* kiểu (m,n).

Sau đây chúng tôi sẽ trình bày xây dựng của đại số Leavitt kiểu $(1,n)$. Để làm được điều này, chúng tôi cần kết quả sau.

Bổ đề 2.1.7. [12] *Cho R là một vành có đơn vị và $n \in \mathbb{N}$. Khi đó ${}_RR \cong {}_RR^n$ như các R-môđun trái khi và chỉ khi tồn tại các phần tử $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ của R sao cho*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_R \quad \textit{và} \quad y_i x_j = \delta_{i,j} 1_R \tag{2.1.1}$$

với mọi $1 \leq i, j \leq n$, trong đó δ là ký hiệu Kronecker.

Chứng minh. Ta có, ${}_RR \cong {}_RR^n$ như các R-môđun trái khi và chỉ khi tồn tại các đẳng cấu R-môđun $\phi \in \mathrm{Hom}_R\left(R^1, R^n\right)$ và $\psi \in \mathrm{Hom}_R\left(R^n, R^1\right)$ sao cho $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_R$ và $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{R^n}$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi tồn tại hai ma trận $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ với hệ số trên R sao cho

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (1_R),$$

và

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1_R & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1_R \end{pmatrix}.$$

Hay nói cách khác ${}_RR \cong {}_RR^n$ với $n > 1$ nào đó khi và chỉ khi tồn tại $2n$ phần tử $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ của R sao cho

$$y_i x_j = \delta_{i,j} 1, \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1,$$

với mọi $1 \leq i, j \leq n$. □

Từ Bổ đề 2.1.7, với một số nguyên $n > 1$ và một trường K cho trước, không khó để xây dựng được một K-đại số A có tính chất $A^1 \cong A^n$ như các A-môđun trái. Thật vậy, đặt

$$S = K \langle X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n \rangle$$

là K-đại số tự do có đơn vị được sinh bởi $2n$ biến $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$. Khi đó, đặt

$$I = \left\langle \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - 1, Y_i X_j - \delta_{i,j} 1 \mid 1 \leq i, j \leq n \right\rangle,$$

tức là I là iđêan của S sinh bởi các phần tử $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - 1$ và $Y_i X_j - \delta_{i,j} 1$, với $1 \leq i, j \leq n$. Đặt

$$A = S/I.$$

Khi đó, ta có tập $\{x_i = X_i + I, y_j = Y_j + I \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ gồm các phần tử của đại số A thoả mãn các quan hệ như trong (2.1.1), và do đó áp dụng Bổ đề 2.1.7, ta suy ra $A^1 \cong A^n$ như các A-môđun trái.

Không những vậy, Leavitt [3] đã chỉ ra rằng K-đại số A với xây dựng như trên chính là một đại số Leavitt kiểu $(1, n)$.

Định nghĩa 2.1.8. [3] Cho $n \geq 2$ là một số nguyên và K là một trường. Khi đó, *K-đại số Leavitt kiểu* $(1, n)$, kí hiệu là $L_K(1, n)$, là K-đại số có đơn vị được sinh bởi $2n$ biến $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ thoả mãn các điều kiện sau:

(1) $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1$;

(2) $y_i x_j = \delta_{i,j} 1$

với mọi $1 \le i, j \le n$ và trong đó δ là ký hiệu Kronecker.

Đặc biệt, Leavitt [3] cũng chỉ ra rằng đại số $L_K(1, n)$ có *tính chất phổ dụng* theo nghĩa: Nếu A là một K-đại số có đơn vị và có một họ các phần tử $\{a_i, b_i \mid 1 \le i \le n\}$ thoả mãn các quan hệ tương tự như (1) và (2) trong Định nghĩa 2.1.8, thì khi đó tồn tại duy nhất một đồng cấu K-đại số bảo toàn đơn vị $\varphi : L_K(1, n) \longrightarrow A$ sao cho $\varphi(x_i) = a_i$ và $\varphi(y_i) = b_i$ với mọi $1 \le i \le n$.

Dễ thấy rằng ánh xạ cho bởi $1 \mapsto 1$, $x_i \mapsto x_i^* := y_i$, $y_i \mapsto y_i^* := x_i$ mở rộng thành một phép tự đối hợp trên $L_K(1, n)$. Với một số nguyên $m \ge 1$ và một đơn thức $u = x_{i_1} \dots x_{i_m}$ bất kì (với $1 \le i_1, \dots, i_m \le n$), ta kí hiệu $u^* = x_{i_m}^* \dots x_{i_1}^* = y_{i_m} \dots y_{i_1}$, và kí hiệu $|u| = m$ là độ dài của đơn thức u. Đơn vị 1 được xem như đơn thức có độ dài 0. Ngoài ra, ta kí hiệu $\mathcal{L}_n^*$ là tập tất cả các đơn thức có dạng tích hữu hạn của các phần tử x_i với $1 \le i \le n$, tức là

$$\mathcal{L}_n^* = \{x_{i_1} \dots x_{i_m} \mid m \in \mathbb{N},\, 1 \le i_1, \dots, i_m \le n\}.$$

Bởi quan hệ $y_i x_j = \delta_{i,j} 1$ với mọi $1 \le i, j \le n$, ta suy ra mọi đơn thức của đại số Leavitt $L_K(1, n)$ đều có dạng kuv^* với $k \in K$ và $u, v \in \mathcal{L}_n^*$ nào đó. Do đó, một phần tử $a \in L_K(1, n)$ bất kì có dạng

$$a = \sum_{i=1}^{m} k_i u_i v_i^*$$

với $k_i \in K$ và $u_i, v_i \in \mathcal{L}_n^*$ với mọi $1 \le i \le m$. Hay nói cách khác, $L_K(1, n)$ là một K-không gian vectơ sinh bởi tập $\{uv^* \mid u, v \in \mathcal{L}_n^*\}$. Hơn nữa, mệnh đề sau đây chỉ ra rằng $L_K(1, n)$ còn là một đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc.

Mệnh đề 2.1.9. [6] *Cho $n \ge 2$ là một số nguyên và K là một trường. Khi đó, đại số Leavitt $L_K(1, n)$ là một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc với sự phân bậc được cảm* *sinh bởi*

$$\deg(1) = 0, \quad \deg(x_i) = 1 \quad \textit{và} \quad \deg(y_i) = -1$$

với mọi $1 \leq i \leq n$. *Tức là,* $L_K(1,n) = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} L_K(1,n)_m$, *trong đó với mỗi* $m \in \mathbb{Z}$,

$$L_K(1,n)_m = \text{span}_K\{uv^* \mid u, v \in \mathcal{L}_n^*, \ |u| - |v| = m\}.$$

Chứng minh. Gọi $S = K\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\rangle$ là K-đại số tự do có đơn vị được sinh bởi $2n$ biến $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Khi đó ta định nghĩa

$$\deg(1) = 0, \quad \deg(x_i) = 1 \quad \text{và} \quad \deg(y_i) = -1$$

với mọi $1 \leq i \leq n$. Với mọi đơn thức $ku_1 \dots u_m$ trong đó $k \in K$ và $u_j \in \{1, x_i, y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ với mọi $1 \leq j \leq m$, ta đặt

$$\deg(ku_1 \dots u_m) = \sum_{t=1}^{m} \deg(u_t).$$

Khi đó S là một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc, với thành phần thuần nhất bậc $m \in \mathbb{Z}$ là

$$S_m = \text{span}_K\{u_1 \dots u_l \mid u_j \in \{1, x_i, y_i \mid 1 \leq i \leq n\} \text{ và} \deg(u_1 \dots u_l) = m\}.$$

Gọi I là iđêan của S sinh bởi các phần tử $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - 1$ và $y_i x_j - \delta_{i,j}1$ với $1 \leq i, j \leq n$. Rõ ràng I là một iđêan thuần nhất. Do đó, $L_K(1,n) = S/I$ là $\mathbb{Z}$-phân bậc. □

Ngoài ra, chúng tôi có chú ý sau đây về một số tính chất khác của đại số Leavitt kiểu $(1,n)$ sẽ được sử dụng trong luận văn này.

Chú ý 2.1.10. Cho $n \geq 2$ là một số nguyên và K là một trường. Khi đó:

(1) Do $L_K(1,n) \cong L_K(1,n)^n$ như các $L_K(1,n)$-môđun trái nên dễ dàng suy ra $L_K(1,n) \cong \mathrm{M}_n(L_K(1,n))$ như các K-đại số. Đẳng cấu và ánh xạ ngược của nó được cho lần lượt là:

$$s \longmapsto M_s = (y_i s x_j) \quad \text{và} \quad M = (m_{ij}) \longmapsto \textstyle\sum_{1\leq i,j\leq n} x_i m_{ij} y_j.$$

(2) Theo Leavitt [14], $L_K(1,n)$ là một K-đại số đơn, tức là $L_K(1,n)$ chỉ có duy nhất hai iđêan hai phía là (0) và chính nó.

Sau đây, dựa theo các phương pháp được thiết lập bởi Cuntz [10] và Kuroda-Nam [11], chúng tôi sẽ tiến hành mô tả hoàn toàn các tự đồng cấu phân bậc và tự đẳng cấu phân bậc của $L_K(1,n)$ theo nhóm tuyến tính tổng quát bậc n trên $L_K(1,n)_0$.

Kí hiệu 2.1.11. Trong một vành R, với một tự đồng cấu $f \in \mathrm{End}(R)$ và một ma trận $X = (x_{ij}) \in \mathrm{M}_n(R)$, ta kí hiệu $f(X)$ là ma trận $(f(x_{ij})) \in \mathrm{M}_n(R)$, và kí hiệu X_m là ma trận $Xf(X)\cdots f^{m-1}(X) \in \mathrm{M}_n(R)$ với mọi $m \geq 1$, trong đó $f^0 := \mathrm{id}_R$. Kí hiệu $\mathrm{GL}_n(R)$ là nhóm các ma trận khả nghịch (hai phía) của vành ma trận $\mathrm{M}_n(R)$. Với mọi K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc A, kí hiệu $\mathrm{End}^{\mathrm{gr}}(A)$ là K-đại số của tất cả các tự đồng cấu phân bậc (bảo toàn đơn vị) của A, và kí hiệu $\mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(A)$ là nhóm các tự đẳng cấu phân bậc (bảo toàn đơn vị) của A.

Định lý 2.1.12. [7] *Cho $n \geq 2$ là một số nguyên và K là một trường. Giả sử $P = (p_{ij})$ là một ma trận của $\mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ với $P^{-1} = \left(p_{ij}^{(-1)}\right)$. Khi đó, những khẳng định sau là đúng:*

(1) *Tồn tại duy nhất một tự đồng cấu K-đại số phân bậc bảo toàn đơn vị $\varphi_P : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)$ thoả mãn*

$$\varphi_P(x_i) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_{ki} \quad \text{và} \quad \varphi_P(y_i) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(-1)} y_k$$

với mọi $1 \leq i \leq n$.

(2) *Với mọi $\lambda \in \mathrm{End}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$, tồn tại duy nhất một ma trận $P = (p_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ sao cho $p_{ij} = y_i\lambda(x_j)$ với mọi $1 \leq i,j \leq n$ và $\lambda = \varphi_P$.*

(3) *$\varphi_P \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$ khi và chỉ khi tồn tại một ma trận $Q \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ sao cho $P^{-1} = \varphi_P(Q)$. Khi đó, $\varphi_{P_m}^{-1} = \varphi_{Q_m}$, $P_m = \varphi_{P_m}(Q_m^{-1})$ và $P_m^{-1} = \varphi_{P_m}(Q_m)$ với mọi $m \geq 1$. Đặc biệt, nếu $\varphi_P(P) = P$ hoặc $\varphi_P(P^{-1}) = P^{-1}$, thì φ_P là một tự đẳng cấu phân bậc và $\varphi_P^m = \varphi_{P^m}$ với mọi số nguyên dương m.*

(4) *Ánh xạ* $\Phi : (\mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0), \star) \longrightarrow \mathrm{End}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$, $P \longmapsto \varphi_P$, *là một đẳng cấu vị nhóm, trong đó phép nhân "$\star$" được định nghĩa bởi*

$$P \star Q = P\varphi_P(Q)$$

với mọi $P, Q \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$.

Chứng minh. (1) Sự tồn tại duy nhất của một đồng cấu K-đại số bảo toàn đơn vị $\varphi_P : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)$ thoả mãn $\varphi_P(x_i) = \sum_{k=1}^n x_k p_{ki}$ và $\varphi_P(y_i) = \sum_{k=1}^n p_{ik}^{(-1)} y_k$ với mọi $1 \le i \le n$ được suy ra trực tiếp từ Hệ quả 2.3 của tài liệu [11]. Mặt khác, $p_{ij}, p_{ij}^{(-1)} \in L_K(1,n)_0$ với mọi $1 \le i, j \le n$ nên $\varphi_P(x_i)$ có bậc 1 và $\varphi_P(y_i)$ có bậc -1 với mọi $1 \le i \le n$. Do đó, φ_P là một đồng cấu $\mathbb{Z}$-phân bậc.

Dựa vào ý tưởng của Cuntz [10] và Kuroda-Nam [11], chúng tôi trình bày chứng minh các phần còn lại của định lý như sau.

(2) Gọi $\lambda : L_K(1,n) \to L_K(1,n)$ là một tự đồng cấu K-đại số phân bậc bảo toàn đơn vị của $L_K(1,n)$. Giả sử $P = (p_{ij})$ và $P' = (p'_{ij})$ là hai ma trận của $\mathrm{M}_n(L_K(1,n)_0)$ với $p_{ij} = y_i\lambda(x_j)$ và $p'_{ij} = \lambda(y_i)x_j$ với mọi $1 \le i, j \le n$. Ta khẳng định rằng $P \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ với $P^{-1} = P'$. Thật vậy, ta có

$$\sum_{k=1}^n p_{ik}p'_{kj} = \sum_{k=1}^n y_i\lambda(x_k)\lambda(y_k)x_j = y_i\lambda\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)x_j = y_i\lambda(1)x_j = \delta_{i,j}1$$

và

$$\sum_{k=1}^n p'_{ik}p_{kj} = \sum_{k=1}^n \lambda(y_i)x_k y_k\lambda(x_j) = \lambda(y_i)\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)\lambda(x_j) = \lambda(y_i x_j) = \delta_{i,j}1$$

với mọi $1 \le i, j \le n$. Từ đó suy ra $PP' = I_n = P'P$ như đã khẳng định.

Bây giờ ta chứng minh $\lambda = \varphi_P$ bằng cách chỉ ra rằng $\lambda(x_i) = \varphi_P(x_i)$ và $\lambda(y_i) = \varphi_P(y_i)$ với mọi $1 \le i \le n$. Theo cách đặt của ma trận P và định nghĩa của φ_P, ta có

$$\varphi_P(x_i) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \lambda(x_i) = \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)\lambda(x_i) = 1.\lambda(x_i) = \lambda(x_i)$$

và

$$\varphi_P(y_i) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(y_i)x_k y_k = \lambda(y_i)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) = \lambda(y_i).1 = \lambda(y_i),$$

như mong muốn.

(3) ($\Longrightarrow$) Giả sử $\varphi_P \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$. Khi đó, tồn tại một đồng cấu $\lambda \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$ sao cho $\varphi_P\lambda = \mathrm{id}_{L_K(1,n)}$. Mặt khác, theo phần (2), tồn tại một ma trận $Q \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ sao cho $\lambda = \varphi_Q$. Khi đó ta có $\varphi_P\varphi_Q = \mathrm{id}_{L_K(1,n)}$. Để chỉ ra $P^{-1} = \varphi_P(Q)$ ta cần hai khẳng định sau đây: Với hai ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ bất kì trong $\mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$, ta có:

(i) $\varphi_A = \varphi_B$ khi và chỉ khi $A = B$;

(ii) $\varphi_A\varphi_B = \varphi_{A\varphi_A(B)}$. Đặc biệt, $\varphi_A^m = \varphi_{A_m}$ với mọi số nguyên dương m.

Thật vậy, giả sử ma trận nghịch đảo của A và B tương ứng là $A^{-1} = \left(a_{ij}^{(-1)}\right)$ và $B^{-1} = \left(b_{ij}^{(-1)}\right)$. Với khẳng định (i), hiển nhiên nếu $A = B$ thì $\varphi_A = \varphi_B$. Ngược lại, giả sử ta có $\varphi_A = \varphi_B$. Khi đó,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k a_{kj} = \varphi_A(x_j) = \varphi_B(x_j) = \sum_{k=1}^{n} x_k b_{kj}$$

với mọi $1 \leq j \leq n$. Suy ra

$$a_{ij} = y_i\left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{kj}\right) = y_i\left(\sum_{k=1}^{n} x_k b_{kj}\right) = b_{ij}$$

với mọi $1 \leq i, j \leq n$. Điều này dẫn đến $A = B$.

Với khẳng định (ii), ta có

$$\begin{aligned}\varphi_A\varphi_B(x_i) = \varphi_A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k b_{ki}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \varphi_A(x_k)\varphi_A(b_{ki}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} x_l a_{lk}\varphi_A(b_{ki}) \\ &= \sum_{l=1}^{n} x_l\left(\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\varphi_A(b_{ki})\right) = \varphi_{A\varphi_A(B)}(x_i)\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\varphi_A\varphi_B(y_i) &= \varphi_A\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}^{(-1)} y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_A(b_{ik}^{(-1)})\varphi_A(y_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \varphi_A(b_{ik}^{(-1)})a_{kl}^{(-1)} y_l = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_A(b_{ik}^{(-1)})a_{kl}^{(-1)}\right) y_l\\ &= \varphi_{A\varphi_A(B)}(y_i)\end{aligned}$$

với mọi $1 \leq i \leq n$. Do đó, $\varphi_A\varphi_B = \varphi_{A\varphi_A(B)}$. Tiếp theo chúng ta cần chỉ ra $\varphi_A^m = \varphi_{A_m}$ với mọi số nguyên dương m. Trước hết, cần lưu ý rằng

$$A_m = A\varphi_A(A)\cdots\varphi_A^{m-1}(A) \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$$

với $A_m^{-1} = \varphi_A^{m-1}\left(A^{-1}\right)\cdots\varphi_A\left(A^{-1}\right)A^{-1}$. Ta sẽ quy nạp theo m để chứng minh $\varphi_A^m = \varphi_{A_m}$ với mọi $m \geq 1$. Nếu $m = 1$, hiển nhiên điều này là đúng. Với $m > 1$, theo giả thiết quy nạp $\varphi_A^{m-1} = \varphi_{A_{m-1}}$, và do đó

$$\varphi_A^m = \varphi_A\varphi_A^{m-1} = \varphi_A\varphi_{A_{m-1}} = \varphi_{A\varphi_A(A_{m-1})} = \varphi_{A_m},$$

như mong muốn.

Bây giờ, áp dụng khẳng định (ii) ta có $\varphi_{P\varphi_P(Q)} = \varphi_P\varphi_Q = \mathrm{id}_{L_K(1,n)}$. Từ đó kéo theo $\varphi_{P\varphi_P(Q)} = \varphi_{I_n}$ với I_n là ma trận đơn vị của $\mathrm{M}_n(L_K(1,n)_0)$. Bởi khẳng định (i) ta thu được $P\varphi_P(Q) = I_n$, hay $P^{-1} = \varphi_P(Q)$.

($\Longleftarrow$) Giả sử $P^{-1} = \varphi_P(Q)$ với một ma trận $Q \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ nào đó. Khi đó, theo khẳng định (ii), $\varphi_P\varphi_Q = \varphi_{P\varphi_P(Q)} = \varphi_{PP^{-1}} = \mathrm{id}_{L_K(1,n)}$, kéo theo φ_P là một toàn ánh. Mặt khác, do $L_K(1,n)$ là K-đại số đơn nên φ_P luôn là một đơn ánh. Do đó, φ_P là đẳng cấu với $\varphi_P^{-1} = \varphi_Q$. Từ đây ta cũng có

$$\mathrm{id}_{L_K(1,n)} = \varphi_P^m\varphi_Q^m = \varphi_{P_m}\varphi_{Q_m} = \varphi_{P_m\varphi_{P_m}(Q_m)},$$

dẫn đến $\varphi_{P_m}^{-1} = \varphi_{Q_m}$ và $P_m\varphi_{P_m}(Q_m) = I_n$ với mọi $m \geq 1$. Bởi vậy, $P_m = \varphi_{P_m}(Q_m^{-1})$ và $P_m^{-1} = \varphi_{P_m}(Q_m)$ với mọi $m \geq 1$.

Bây giờ nếu giả sử thêm $\varphi_P(P) = P$ thì khi đó, do φ_P là một đồng cấu K-đại số nên $P\varphi_P(P^{-1}) = \varphi_P(P)\varphi_P(P^{-1}) = \varphi_P(PP^{-1}) = \varphi_P(I_n) = I_n$, suy ra $P^{-1} = \varphi_P(P^{-1})$. Tương tự, nếu $P^{-1} = \varphi_P(P^{-1})$ thì ta thu được $P = \varphi_P(P)$. Như vậy, dù bắt đầu với giả thiết $\varphi_P(P) = P$ hay $\varphi_P(P^{-1}) = P^{-1}$ thì ta cũng đều thu được $\varphi_P(P) = P$ và $\varphi_P(P^{-1}) = P^{-1}$, và do đó φ_P là một đẳng cấu với $\varphi_P^{-1} = \varphi_{P^{-1}}$. Khi đó ta cũng có

$$P_m = P\varphi_P(P)\cdots\varphi_P^{m-1}(P) = P^m,$$

và kéo theo $\varphi_P^m = \varphi_{P_m} = \varphi_{P^m}$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$.

(4) Trước hết ta cần kiểm tra $(\mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0), \star)$ là một vị nhóm với phần tử đơn vị là I_n. Thật vậy, với mọi $P, Q \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$, theo phần (1), $\varphi_P(Q) \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ và do đó $P \star Q = P\varphi_P(Q) \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$. Với các ma trận $P, Q, M \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ bất kì, ta có

$$\begin{aligned}(P \star Q) \star M = (P\varphi_P(Q)) \star M &= P\varphi_P(Q)\varphi_{P\varphi_P(Q)}(M)\\ &= P\varphi_P(Q)\varphi_P\varphi_Q(M) = P\varphi_P(Q\varphi_Q(M))\\ &= P\varphi_P(Q \star M) = P \star (Q \star M).\end{aligned}$$

Hơn nữa, $P \star I_n = P\varphi_P(I_n) = PI_n = P$, và $I_n \star P = I_n\varphi_{I_n}(P) = I_nP = P$. Do đó $(\mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0), \star)$ là một vị nhóm với phần tử đơn vị là I_n.

Ánh xạ $\Phi : (\mathrm{GL}_n(L_K(1,n)), \star) \longrightarrow \mathrm{End}(L_K(1,n))$, $P \longmapsto \varphi_P$ là một đồng cấu vị nhóm vì

$$\Phi(P \star Q) = \varphi_{P\star Q} = \varphi_{P\varphi_P(Q)} = \varphi_P\varphi_Q = \Phi(P)\Phi(Q)$$

với mọi $P, Q \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$. Tính đơn ánh của Φ được suy ra trực tiếp từ khẳng định (i) trong phần (3) và tính toàn ánh được suy ra từ phần (2). □

Hệ quả sau đây chỉ ra rằng nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}_n(K)$ trên trường K có thể được xem như một nhóm con của nhóm các tự đẳng cấu phân bậc $\mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$ của $L_K(1,n)$.

Hệ quả 2.1.13. [7] *Cho $n \geq 2$ là một số nguyên và K là một trường. Khi đó, tồn tại một đơn cấu nhóm $\Phi : \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$ sao cho $\Phi(P) = \varphi_P$ với mọi $P \in \mathrm{GL}_n(K)$.*

Chứng minh. Bởi Định lý 2.1.12 (4), ánh xạ

$$\Phi : (\mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0), \star) \longrightarrow \mathrm{End}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$$

cho bởi $P \longmapsto \varphi_P$, là một đẳng cấu vị nhóm, với phép nhân "$\star$" được định nghĩa bởi

$$P \star Q = P\varphi_P(Q)$$

với mọi $P, Q \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$. Do $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ nên $\varphi_P(Q) = Q$, dẫn đến $P \star Q = PQ$. Do đó, $\mathrm{GL}_n(K)$ là một nhóm con của nhóm các phần tử khả nghịch trong vị nhóm $(\mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0), \star)$. Hơn nữa, vì $\varphi_P(P) = P$ với mọi $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ nên theo Định lý 2.1.12 (3), $\varphi_P \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$ với mọi $P \in \mathrm{GL}_n(K)$. Từ đó suy ra $\Phi|_{\mathrm{GL}_n(K)} : \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$ là một đơn cấu nhóm. $\square$

Các tự đẳng cấu loại Anick của $L_K(1,n)$ được Kuroda và Nam giới thiệu lần đầu tiên trong [11]. Sau đây chúng tôi sẽ thiết lập lại các tự đẳng cấu này. Cụ thể, với mọi số nguyên $n \geq 2$ và trường K bất kì, ta kí hiệu $A_{L_n}(x_2, y_1)$ là K-đại số con có đơn vị của $L_K(1,n)$ sinh bởi các biến $x_1, x_3, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n$. Theo [15] và [16], những phần tử sau đây tạo thành một cơ sở của K-đại số $A_{L_n}(x_2, y_1)$: (1) 1, (2) $p = x_{k_1} \cdots x_{k_m}$, trong đó $k_i \in \{1, 3, \ldots, n\}$, (3) $q^* = x^*_{t_1} \cdots x^*_{t_h} = y_{t_1} \cdots y_{t_h}$, trong đó $t_i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, (4) pq^*, trong đó p và q^* được định nghĩa như ở (2) và (3).

Kí hiệu $A_{L_n}(x_2, y_1) \cap L_K(1,n)_0 = A_{L_n}(x_2, y_1)_0$. Với mỗi $p \in A_{L_n}(x_2, y_1)_0$, đặt

$$U_p = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(L_K(1,n)_0).$$

Nhận thấy $U_p \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ với $U_p^{-1} = U_{-p}$ và

$$U_pU_q = U_{p+q}$$

với mọi $p, q \in A_{L_n}(x_2, y_1)_0$. Cùng với đó, với mọi $p \in A_{L_n}(x_2, y_1)_0$, theo Định lý 2.1.12 (1), ta thu được tự đồng cấu K-đại số phân bậc bảo toàn đơn vị φ_{U_p} của $L_K(1, n)$ cho bởi $x_i \longmapsto x_i$ với mọi $i \in \{1, 3, \dots, n\}$, $y_j \longmapsto y_j$ với mọi $2 \leq j \leq n$, $x_2 \longmapsto x_2 + x_1 p$ và $y_1 \longmapsto y_1 - p y_2$. Từ đây suy ra $\varphi_{U_p}(q) = q$ với mọi $q \in A_{L_n}(x_2, y_1)_0$, kéo theo $\varphi_{U_p}(U_q) = U_q$ với mọi $q \in A_{L_n}(x_2, y_1)_0$. Bởi Định lý 2.1.12 (3), ta có $\varphi_{U_p} \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1, n)$ và $\varphi_{U_p}^m = \varphi_{U_{mp}}$ với mọi $p \in A_{L_n}(x_2, y_1)_0$ và $m \in \mathbb{Z}$. Từ đó ta có kết quả thú vị sau đây.

Hệ quả 2.1.14. [7] *Cho $n \geq 2$ là một số nguyên và K là một trường. Khi đó, tồn tại một đơn cấu nhóm*

$$\Phi : (A_{L_n}(x_2, y_1)_0, +) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1, n))$$

cho bởi $p \mapsto \varphi_{U_p}$ với mọi $p \in A_{L_n}(x_2, y_1)_0$.

Chứng minh. Theo Định lý 2.1.12 (4), ánh xạ

$$\Phi : (\mathrm{GL}_n(L_K(1, n)_0), \star) \longrightarrow \mathrm{End}^{\mathrm{gr}}(L_K(1, n)),\ P \longmapsto \varphi_P$$

là một đẳng cấu vị nhóm, trong đó phép nhân "$\star$" được định nghĩa bởi

$$P \star Q = P \varphi_P(Q)$$

với mọi $P, Q \in \mathrm{GL}_n(L_K(1, n)_0)$. Vì $\varphi_{U_p}(U_q) = U_q$ với mọi $p, q \in A_{L_n}(x_2, y_1)_0$, ta có

$$U_p \star U_q = U_p \varphi_{U_p}(U_q) = U_p U_q = U_{p+q}$$

với mọi $p, q \in A_{L_n}(x_2, y_1)_0$. Do đó ánh xạ đi từ nhóm $(A_{L_n}(x_2, y_1)_0, +)$ vào nhóm các phần tử khả nghịch của vị nhóm $(\mathrm{GL}_n(L_K(1, n)_0), \star)$, biến $p \longmapsto U_p$, là một đơn cấu nhóm. Do đó, ta có thể xem nhóm $(A_{L_n}(x_2, y_1)_0, +)$ như một nhóm con của nhóm các phần tử khả nghịch trong vị nhóm $(\mathrm{GL}_n(L_K(1, n))_0, \star)$. Khi đó, $\Phi|_{A_{L_n}(x_2, y_1)_0} : (A_{L_n}(x_2, y_1)_0, +) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1, n))$, $p \mapsto \varphi_{U_p}$ là một đơn cấu nhóm như khẳng định. $\square$

Áp dụng Định lý 2.1.12 và Chú ý 2.1.10 (1), sau đây chúng tôi sẽ mô tả nhóm các tự đẳng cấu phân bậc của $L_K(1, n)$ theo nhóm các phần tử khả nghịch

$\mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$ của $L_K(1,n)_0$. Kết quả này đã được nghiên cứu bởi Cuntz trong [10].

Hệ quả 2.1.15. [7] *Cho $n \geq 2$ là một số nguyên, K là một trường, $\mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$ là nhóm các phần tử khả nghịch của $L_K(1,n)_0$, và u là một phần tử của $\mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$. Khi đó những khẳng định sau là đúng:*

(1) *Ánh xạ $f_u : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)$, cho bởi $1 \longmapsto 1$, $x_i \longmapsto ux_i$ và $y_i \longmapsto y_iu^{-1}$ với mọi $1 \leq i \leq n$, là một đơn cấu K-đại số phân bậc, và $f_u = \varphi_P$, trong đó $P = (y_iux_j) \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ và φ_P là một tự đồng cấu phân bậc của $L_K(1,n)$ như đã giới thiệu ở Định lý 2.1.12.*

(2) *Với mọi $\lambda \in \mathrm{End}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$, $\lambda = f_a$, với $a = \sum_{i=1}^n \lambda(x_i)y_i \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$.*

(3) *$f_u \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$ nếu và chỉ nếu $u^{-1} = f_u(w)$ với $w \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$ nào đó.*

(4) *Ánh xạ $\Phi : (\mathrm{U}(L_K(1,n)_0), \star) \longrightarrow \mathrm{End}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$, $u \longmapsto f_u$, là một đẳng cấu vị nhóm, ở đó phép nhân "$\star$" được định nghĩa bởi*

$$u \star w = f_u(w)u$$

với mọi $u, w \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$.

Chứng minh. (1) Với $u \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$, theo Chú ý 2.1.10 (1) ta có $P := (y_iux_j) \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ với $P^{-1} = (y_iu^{-1}x_j)$. Áp dụng Định lý 2.1.12 (1), ta thu được đơn cấu K-đại số phân bậc $\varphi_P : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)$ với $\varphi_P(1) = 1 = f_u(1)$, $\varphi_P(x_i) = \sum_{k=1}^n x_ky_kux_i = ux_i = f_u(x_i)$ và $\varphi_P(y_i) = \sum_{k=1}^n y_iu^{-1}x_ky_k = y_iu^{-1} = f_u(y_i)$ với mọi $1 \leq i \leq n$, và do đó $f_u = \varphi_P$, kéo theo $f_u : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)$ cũng là một đơn cấu K-đại số phân bậc.

(2) Lấy $\lambda \in \mathrm{End}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$ bất kì. Theo Định lý 2.1.12 (2), $\lambda = \varphi_P$, ở đó $P = (y_i\lambda(x_j)) \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$. Mặt khác, bởi phần (1) và Chú ý 2.1.10 (1), $\varphi_P = f_a$, với $a = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_iy_i\lambda(x_j)y_j = \sum_{i=1}^n \lambda(x_i)y_i \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$. Do đó, $\lambda = f_a$ như mong muốn.

(3) Ta có $f_u \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$ khi và chỉ khi $\varphi_P \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$, với $P = (y_iux_j) \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$, khi và chỉ khi $P^{-1} = (y_iu^{-1}x_j) =$

$\varphi_P(Q) = f_u(Q)$, với $Q = (q_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ nào đó, khi và chỉ khi $Q = f_u^{-1}(y_i u^{-1} x_j) = (y_i w x_j)$, trong đó $w = f_u^{-1}(u^{-1}) \in \mathrm{U}(L_K(1,n))$ (vì f_u luôn là đơn ánh). Khi đó, bởi phần (1) và Định lý 2.1.12 (3), $f_u^{-1} = \varphi_P^{-1} = \varphi_Q = f_w$. Do vậy, $f_u \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$ nếu và chỉ nếu $u^{-1} = f_u(w)$ với $w \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$ nào đó.

(4) Đầu tiên ta khẳng định rằng $f_u f_w = f_{f_u(w)u}$ với mọi $u, w \in \mathrm{U}(L_K(1,n))_0$. Thật vậy, ta có $f_u f_w = \varphi_P \varphi_Q = \varphi_{P\varphi_P(Q)}$, ở đó $P = (y_i u x_j)$ và $Q = (y_i w x_j) \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$. Cùng với đó, $P\varphi_P(Q) = Pf_u(Q) = (y_i f_u(w) u x_j)$ và $\sum_{1\le i,j\le n} x_i y_i f_u(w) u x_j y_j = f_u(w)u$. Do đó, áp dụng phần (1) và Chú ý 2.1.10 (1) ta suy ra $\varphi_{P\varphi_P(Q)} = f_{f_u(w)u}$, và như vậy dẫn đến $f_u f_w = f_{f_u(w)u}$.

Bây giờ ta kiểm tra $(\mathrm{U}(L_K(1,n)_0), \star)$ là một vị nhóm với phần tử đơn vị 1. Thật vậy, với mọi $u, w \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$, theo phần (1), $f_u(w) \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$ và do đó $u \star w = f_u(w)u \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$. Với các phần tử $u, w, v \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$ bất kì, ta có

$$\begin{aligned}(u\star w)\star v = (f_u(w)u)\star v &= f_{f_u(w)u}(v) f_u(w) u\\ &= f_u f_w(v) f_u(w) u = f_u(f_w(v) w) u\\ &= f_u(w\star v)u = u\star(w\star v).\end{aligned}$$

Hơn nữa, $u\star 1 = f_u(1)u = u$, và $1\star u = f_1(u).1 = u$. Do đó $(\mathrm{U}(L_K(1,n)_0), \star)$ là một vị nhóm với phần tử đơn vị 1.

Ánh xạ $\Phi : (\mathrm{U}(L_K(1,n)_0), \star) \longrightarrow \mathrm{End}^{\mathrm{gr}}(L_K(1,n))$, $u \longmapsto f_u$ là một đồng cấu vị nhóm vì

$$\Phi(u\star w) = f_{u\star w} = f_{f_u(w)u} = f_u f_w = \Phi(u)\Phi(w)$$

với mọi $u, w \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$. Tính toàn ánh của Φ đươc suy ra trực tiếp phần (2) và tính đơn ánh được suy ra từ phần (1) và Định lý 2.1.12 (4). □

Chú ý 2.1.16. [7] Cho $n \ge 2$ là một số nguyên và K là một trường. Với $u \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$ và $P = (y_i u x_j) \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$, giả sử f_u là tự đẳng cấu phân bậc của $L_K(1,n)$ như đã định nghĩa ở Hệ quả 2.1.15. Khi đó

$$f_u(P) = P \text{ khi và chỉ khi } f_u(u) = u.$$

Thật vậy, giả sử $f_u(P) = P$, tức là, $f_u(y_i u x_j) = y_i u x_j$ với mọi $1 \leq i, j \leq n$. Điều này kéo theo $y_i u^{-1} f_u(u) u x_j = y_i u x_j$ và $x_i y_i u^{-1} f_u(u) u x_j y_j = x_i y_i u x_j y_j$ với mọi $1 \leq i, j \leq n$. Khi đó,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_i u^{-1} f_u(u) u x_j y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_i u x_j y_j.$$

Do đó

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) u^{-1} f_u(u) u \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) u \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right),$$

nên $u^{-1} f_u(u) u = u$ và $f_u(u) = u u u^{-1} = u$. Điều ngược lại là hiển nhiên.

Chúng tôi kết thúc chương này với ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.1.17. [7] Cho K là một trường.

(1) Xét $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(L_K(1,2))$. Hiển nhiên P là ma trận khả nghịch với $P^{-1} = P$. Đặt $a = x_1 y_2 + x_2 y_1 \in L_K(1,2)_0$. Vì a là ảnh của P dưới đẳng cấu cho ở Chú ý 2.1.10 (1) nên a tự động là một phần tử khả nghịch của $L_K(1,2)_0$ với $a^{-1} = a$. Khi đó, bởi Hệ quả 2.1.15 (1), ta thu được tự đồng cấu phân bậc f_a của $L_K(1,2)$ cho bởi $f_a(1) = 1$, $f_a(x_1) = a x_1 = x_2$, $f_a(x_2) = a x_2 = x_1$, $f_a(y_1) = y_1 a^{-1} = y_2$ và $f_a(y_2) = y_2 a^{-1} = y_1$. Hiển nhiên là $f_a(P) = P$, và do đó $f_a(a) = a$ (theo Chú ý 2.1.16). Từ đó suy ra $f_a(a^{-1}) = a^{-1}$, cho nên f_a là một tự đẳng cấu phân bậc bảo toàn đơn vị của $L_K(1,2)$ theo Hệ quả 2.1.15 (3).

(2) Cho $A_{L_2}(x_2, y_1)$ là K-đại số con có đơn vị của $L_K(1,2)$ sinh bởi x_1, y_2, tức là,

$$A_{L_2}(x_2, y_1) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_1^{m_i} y_2^{l_i} \mid n \geq 1,\ r_i \in K,\ m_i, l_i \geq 0 \right\},$$

trong đó $x_1^0 = 1 = y_2^0$. Đặt $p = x_1y_2 \in A_{L_2}(x_2, y_1)_0$ và $U_p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(L_K(1,2)_0)$. Như đã chỉ ra, U_p là ma trận khả nghịch với $(U_p)^{-1} = U_{-p}$. Đặt $b = 1 + x_1^2y_2^2 \in L_K(1,2)_0$. Vì b là ảnh của U_p dưới đẳng cấu cho ở Chú ý 2.1.10 (1), b tự động là phần tử khả nghịch của $L_K(1,2)_0$ với $b^{-1} = 1 - x_1^2y_2^2$. Khi đó, bởi Hệ quả 2.1.15 (1), ta thu được tự đồng cấu f_b of $L_K(1,2)$ với $f_b(1) = 1$, $f_b(x_1) = bx_1 = x_1$, $f_b(x_2) = bx_2 = x_2 + x_1^2y_2$, $f_b(y_1) = y_1b^{-1} = y_1 - x_1y_2^2$ và $f_b(y_2) = y_2y^{-1} = y_2$. Bởi Hệ quả 2.1.15 (1), ta có $f_b = \varphi_{U_p}$, trong đó φ_{U_p} là tự đẳng cấu của $L_K(1,2)$ được giới thiệu ở Hệ quả 2.1.14. Lưu ý rằng $f_b(q) = \varphi_{U_p}(q) = q$ với mọi $q \in A_{L_2}(x_2, y_1)$, và do đó $f_b(b) = b$. Điều này kéo theo $f_b(b^{-1}) = b^{-1}$, cho nên f_b là một tự đẳng cấu phân bậc bảo toàn đơn vị của $L_K(1,2)$ bởi Hệ quả 2.1.15 (3).

(3) Xét $u = ab = (x_1y_2 + x_2y_1)(1 + x_1^2y_2^2) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1^2y_2y_1$. Khi đó, u là một phần tử khả nghịch của $L_K(1,2)_0$ với

$$u^{-1} = (1 - x_1^2y_2^2)(x_1y_2 + x_2y_1) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_2x_1y_2^2.$$

Theo Hệ quả 2.1.15 (1), ta có tự đồng cấu phân bậc f_u của $L_K(1,2)$ cho bởi $f_u(1) = 1$, $f_u(x_1) = ux_1 = x_2 + x_1^2y_2$, $f_u(x_2) = ux_2 = x_1$, $f_u(y_1) = y_1u^{-1} = y_2$ và $f_u(y_2) = y_2u^{-1} = y_1 - x_1y_2^2$. Suy ra

$$\begin{aligned} f_u(x_1y_2 + x_2y_1 - x_2^2y_1y_2) &= (x_2 + x_1^2y_2)(y_1 - x_1y_2^2) + x_1y_2 - x_1^2y_2(y_1 - x_1y_2^2) \\ &= x_2y_1 - x_2x_1y_2^2 + x_1^2y_2y_1 + x_1y_2 - x_1^2y_2y_1 \\ &= x_1y_2 + x_2y_1 - x_2x_1y_2^2 = u^{-1}. \end{aligned}$$

Theo Hệ quả 2.1.15 (3), f_u là một tự đẳng cấu phân bậc bảo toàn đơn vị của $L_K(1,2)$ với $f_u^{-1} = f_w$, trong đó $w = x_1y_2 + x_2y_1 - x_2^2y_1y_2 \in \mathrm{U}(L_K(1,2)_0)$ với $w^{-1} = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1x_2y_1^2$.

2.2 Về xoắn Zhang của đại số Leavitt kiểu $(1, n)$

Cho $n \geq 2$ là một số nguyên và K là một trường. Theo Mệnh đề 2.1.9, đại số Leavitt $L_K(1, n)$ là một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc, với $L_K(1, n) = \oplus_{m \in \mathbb{Z}} L_K(1, n)_m$, trong đó với mỗi $m \in \mathbb{Z}$,

$$L_K(1, n)_m = \mathrm{span}_K\{uv^* \mid u, v \in \mathcal{L}_n^*, |u| - |v| = m\}.$$

Với $\lambda \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(R_n))$ bất kì, theo Ví dụ 1.1.8 (1), $\{\lambda^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ là một hệ xoắn của $L_K(1, n)$. Khi đó, dựa theo Định nghĩa và Mệnh đề 1.2.1, ta có định nghĩa xoắn Zhang của đại số Leavitt $L_K(1, n)$ liên kết với tự đẳng cấu λ như sau.

Định nghĩa 2.2.1. Cho $n \geq 2$ là một số nguyên, K là một trường và $\lambda \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1, n))$. Khi đó, *xoắn Zhang* của $L_K(1, n)$ liên kết với λ, kí hiệu là $L_K(1, n)^\lambda$, là K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc $\oplus_{m \in \mathbb{Z}} L_K(1, n)_m$ với phép nhân "$*$" định nghĩa bởi

$$a * b = a\lambda^m(b)$$

với mọi $a \in L_K(1, n)_m, b \in L_K(1, n)_l, m, l \in \mathbb{Z}$. Phần tử đơn vị của $L_K(1, n)^\lambda$ là $1_\lambda = (\lambda^0)^{-1}(1) = 1$.

Với mỗi $\lambda \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}(L_K(1, n))$, theo Định lý 2.1.12, tồn tại duy nhất một cặp (P, Q) gồm các ma trận P và Q của $\mathrm{GL}_n(L_K(1, n)_0)$ sao cho $P^{-1} = \varphi_P(Q)$, $\lambda = \varphi_P$ và $\lambda^{-1} = \varphi_Q$. Do đó, để nghiên cứu xoắn Zhang của $L_K(1, n)$ bởi một tự đẳng cấu K-đại số phân bậc λ bất kì, ta chỉ cần quy về khảo sát xoắn Zhang $L_K(1, n)^{\varphi_P}$ của $L_K(1, n)$ liên kết với tự đẳng cấu phân bậc φ_P đã được định nghĩa trong Định lý 2.1.12. Để thuận tiện, với mọi cặp (P, Q) như trên, ta kí hiệu

$$L_K(1, n)^{P,Q} := L_K(1, n)^{\varphi_P} = L_K(1, n)^\lambda.$$

Một kết quả ngạc nhiên mà chúng tôi thu được đó là $L_K(1, n)$ là một K-đại số con của mọi xoắn Zhang $L_K(1, n)^{P,Q}$.

Định lý 2.2.2. [7] *Cho $n \geq 2$ là một số nguyên và K là một trường. Giả sử $P = (p_{ij})$ và $Q = (q_{ij})$ là các ma trận của $\mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ với $P\varphi_P(Q) = I_n$ và $Q^{-1} = \left(q_{ij}^{(-1)}\right)$. Khi đó, tồn tại một đơn cấu K-đại số phân bậc bảo toàn đơn vị $\theta_P : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)^{P,Q}$ thoả mãn*

$$\theta_P(x_i) = x_i \quad \text{và} \quad \theta_P(y_i) = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{(-1)} y_k$$

với mọi $1 \leq i \leq n$.

Chứng minh. Ta đã biết

$$\varphi_P(1) = 1, \quad \varphi_P(x_i) = \textstyle\sum_{k=1}^n x_k p_{ki} \quad \text{và} \quad \varphi_P(y_i) = \sum_{k=1}^n p_{ik}^{(-1)} y_k$$

với mọi $1 \leq i \leq n$, và $\varphi_P^{-1} = \varphi_Q$. Bây giờ đặt $T_{x_i} = x_i$, $T_{y_i} = \sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-1)} y_k$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Ta khẳng định rằng $T = \{T_{x_i}, T_{y_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ là một họ các phần tử của $L_K(1,n)^{P,Q}$ thoả mãn các quan hệ tương tự như (1) và (2) trong Định nghĩa 2.1.8. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
T_{x_i} * T_{y_i} &= x_i \varphi_P\left(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-1)} y_k\right) = x_i \sum_{k=1}^n \varphi_P(q_{ik}^{(-1)}) \varphi_P(y_k) \\
&= x_i \sum_{k=1}^n p_{ik} \left(\sum_{t=1}^n p_{kt}^{(-1)} y_t\right) \quad (\text{do } \varphi_P(Q^{-1} = P) \\
&= x_i \sum_{t=1}^n \left(\sum_{k=1}^n p_{ik} p_{kt}^{(-1)}\right) y_t = x_i \left(\sum_{k=1}^n p_{ik} p_{ki}^{(-1)}\right) y_i = x_i.1.y_i = x_i y_i.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^n T_{x_i} * T_{y_i} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = 1,$$

suy ra họ T thoả mãn quan hệ (1). Mặt khác, với mọi $1 \leq i, j \leq n$, ta có

$$\begin{aligned}
T_{y_i} * T_{x_j} = T_{y_i} \varphi_P^{-1}(T_{x_j}) = T_{y_i} \varphi_Q(T_{x_j}) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ik}^{(-1)} y_k x_l q_{lj} \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ik}^{(-1)} \delta_{k,l} 1 q_{lj} = \sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-1)} q_{kj} = \delta_{i,j} 1.
\end{aligned}$$

Do đó, họ T cũng thoả mãn quan hệ (2). Khi đó, theo tính chất phổ dụng của

$L_K(1,n)$, tồn tại một đồng cấu K-đại số bảo toàn đơn vị $\theta_P : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)^{P,Q}$, gửi $x_i \longmapsto T_{x_i}$ và $y_i \longmapsto T_{y_i}$. Theo cách đặt, hiển nhiên T_{x_i} và T_{y_i} có bậc lần lượt là 1 và -1 với mọi $1 \le i \le n$. Như vậy, θ_P là một đồng cấu $\mathbb{Z}$-phân bậc. Mặt khác, theo Chú ý 2.1.10 (2), $L_K(1,n)$ là một K-đại số đơn, do đó θ_P là đơn cấu. $\square$

Tiếp theo chúng tôi sẽ trình bày các tiêu chuẩn để đồng cấu θ_P trong Định lý 2.2.2 là đẳng cấu. Để làm điều này, chúng tôi cần bổ đề kỹ thuật dưới đây.

Bổ đề 2.2.3. [7] *Cho $n \ge 2$ là một số nguyên và K là một trường. Giả sử $P = (p_{ij})$ và $Q = (q_{ij})$ là các phần tử của $\mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ sao cho $P\varphi_P(Q) = I_n$. Với một số nguyên dương m, đặt $P_m = \left(p_{ij}^{(m)}\right)$, $P_m^{-1} = \left(p_{ij}^{(-m)}\right)$, $Q_m = \left(q_{ij}^{(m)}\right)$ và $Q_m^{-1} = \left(q_{ij}^{(-m)}\right)$. Khi đó, những khẳng định sau là đúng:*

(1) $x_i = \varphi_P^m\left(\sum_{k=1}^n x_k q_{ki}^{(m)}\right)$,

(2) $y_i = \varphi_P^m\left(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m)} y_k\right)$,

(3) $y_i = \varphi_P^{-m}\left(\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(-m)} y_k\right)$,

với mọi $1 \le i \le n$ và $m \ge 1$.

Chứng minh. Vì $P\varphi_P(Q) = I_n$ nên theo Định lý 2.1.12 (3), $\varphi_{P_m}^{-1} = \varphi_{Q_m}$, $P_m = \varphi_{P_m}(Q_m^{-1})$ và $P_m^{-1} = \varphi_{P_m}(Q_m)$ với mọi $m \ge 1$. Từ đó suy ra $\varphi_{Q_m}(P_m^{-1}) = \varphi_{Q_m}(\varphi_{P_m}(Q_m)) = \varphi_{P_m}^{-1}(\varphi_{P_m}(Q_m)) = Q_m$ với mọi $m \ge 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\varphi_P^m\left(\sum_{k=1}^n x_k q_{ki}^{(m)}\right) &= \varphi_{P_m}\left(\sum_{k=1}^n x_k q_{ki}^{(m)}\right) = \sum_{k=1}^n \varphi_{P_m}(x_k)\,\varphi_{P_m}\left(q_{ki}^{(m)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{t=1}^n x_t p_{tk}^{(m)}\right) p_{ki}^{(-m)} \quad (\text{do } \varphi_{P_m}(Q_m) = P_m^{-1})\\
&= \sum_{t=1}^n x_t \left(\sum_{k=1}^n p_{tk}^{(m)} p_{ki}^{(-m)}\right) = x_i\left(\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(m)} p_{ki}^{(-m)}\right)\\
&= x_i.1 = x_i,
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\varphi_P^m\left(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m)}y_k\right) &= \varphi_{P_m}\left(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m)}y_k\right) = \sum_{k=1}^n \varphi_{P_m}\left(q_{ik}^{(-m)}\right)\varphi_{P_m}(y_k)\\
&= \sum_{k=1}^n p_{ik}^{(m)}\left(\sum_{t=1}^n p_{kt}^{(-m)}y_t\right) \quad (\text{do } \varphi_{P_m}(Q_m^{-1}) = P_m)\\
&= \sum_{t=1}^n\left(\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(m)}p_{kt}^{(-m)}\right)y_t = \left(\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(m)}p_{ki}^{(-m)}\right)y_i\\
&= 1.y_i = y_i,
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\varphi_P^{-m}\left(\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(-m)}y_k\right) &= \varphi_Q^m\left(\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(-m)}y_k\right) = \varphi_{Q_m}\left(\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(-m)}y_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^n \varphi_{Q_m}\left(p_{ik}^{(-m)}\right)\varphi_{Q_m}(y_k)\\
&= \sum_{k=1}^n q_{ik}^{(m)}\left(\sum_{t=1}^n q_{kt}^{(-m)}y_t\right) \quad (\text{do } \varphi_{Q_m}(P_m^{-1}) = Q_m)\\
&= \sum_{t=1}^n\left(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(m)}q_{kt}^{(-m)}\right)y_t = \left(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(m)}q_{ki}^{(-m)}\right)y_i\\
&= 1.y_i = y_i,
\end{aligned}$$

với mọi $1 \le i \le n$ và $m \ge 1$. Do đó ta đã thu được các kết quả (1), (2) và (3). □

Bây giờ chúng tôi sẽ thiết lập các tiêu chuẩn để đồng cấu θ_P trong Định lý 2.2.2 là đẳng cấu.

Định lý 2.2.4. [7] *Cho $n \ge 2$ là một số nguyên và K là một trường. Giả sử $P = (p_{ij})$ và $Q = (q_{ij})$ là các ma trận của $\mathrm{GL}_n(L_K(1,n)_0)$ với $P\varphi_P(Q) = I_n$. Với mọi số nguyên dương m, đặt $P_m = \left(p_{ij}^{(m)}\right)$, $P_m^{-1} = \left(p_{ij}^{(-m)}\right)$, $Q_m = \left(q_{ij}^{(m)}\right)$ và $Q_m^{-1} = \left(q_{ij}^{(-m)}\right)$. Khi đó, đồng cấu K-đại số $\theta_P : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)^{P,Q}$, được định nghĩa trong Định lý 2.2.2, là một đẳng cấu khi và chỉ khi $p_{ij}^{(-m)}$, $q_{ij}^{(m)}$, $q_{ij}^{(-m)} \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ với mọi $m \ge 1$ và $1 \le i, j \le n$.*

Chứng minh. ($\Longrightarrow$) Hiển nhiên.

($\Longleftarrow$) Bởi Định lý 2.2.2, θ_P luôn là đơn ánh, do đó ta chỉ cần chứng minh θ_P là toàn ánh. Đầu tiên ta khẳng định rằng α và $\alpha^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ với mọi $\alpha \in \mathcal{L}_n^*$. Ta quy nạp theo $|\alpha|$ để chứng minh khẳng định này. Nếu $|\alpha| = 1$, thì do $x_i = \theta_P(x_i) \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ với mọi $1 \le i \le n$ nên $\alpha \in \mathrm{Im}(\theta_P)$. Mặt khác, vì $\theta_P(y_i) = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{(-1)} y_k$ với mọi $1 \le i \le n$ nên ta có

$$\begin{pmatrix} \theta_P(y_1) \\ \vdots \\ \theta_P(y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} q_{1k}^{(-1)} y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} q_{nk}^{(-1)} y_k \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

và do đó

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \theta_P(y_1) \\ \vdots \\ \theta_P(y_n) \end{pmatrix}.$$

Điều này dẫn đến

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} \theta_P(y_k) = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} * \theta_P(y_k)$$

với mọi $1 \le i \le n$ (vì $q_{ij} \in L_K(1, n)_0$ với mọi $1 \le i, j \le n$). Theo giả thiết, $q_{ij} \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ với mọi $1 \le i, j \le n$, cho nên $y_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} * \theta_P(y_k) \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ với mọi $1 \le i \le n$, tức là, $\alpha^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$. Bây giờ ta tiến hành quy nạp, tức là, giả sử α và $\alpha^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ với mọi $\alpha \in \mathcal{L}_n^*$ với $1 < |\alpha| \le m$. Với $\alpha \in \mathcal{L}_n^*$ mà $|\alpha| = m + 1$, ta viết $\alpha = \beta x_{i_0}$, với $\beta \in \mathcal{L}_n^*$ nào đó, $|\beta| = m$ và với $1 \le i_0 \le n$ nào đó. Theo giả thiết quy nạp, $\beta \in \mathrm{Im}(\theta_P)$. Áp dụng Bổ đề 2.2.3 (1), ta có

$x_{i_0} = \varphi_P^m \left(\sum_{k=1}^n x_k q_{ki_0}^{(m)} \right)$, kéo theo

$$\alpha = \beta x_{i_0} = \beta \varphi_P^m \left(\sum_{k=1}^n x_k q_{ki_0}^{(m)} \right) = \beta * \left(\sum_{k=1}^n x_k q_{ki_0}^{(m)} \right).$$

Mặt khác, vì $\varphi_Q^{-1} = \varphi_P$, nên

$$Q_m = Q\varphi_Q(Q) \cdots \varphi_Q^{m-1}(Q) = \varphi_P(\varphi_Q(Q)\varphi_Q^2(Q) \cdots \varphi_Q^m(Q)) = \varphi_P(Q^{-1}Q_{m+1}).$$

Suy ra $q_{ki_0}^{(m)} = \varphi_P \left(\sum_{t=1}^n q_{kt}^{(-1)} q_{ti_0}^{(m+1)} \right)$. Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} \alpha = \beta * \left(\sum_{k=1}^n x_k \varphi_P \left(\sum_{t=1}^n q_{kt}^{(-1)} q_{ti_0}^{(m+1)} \right) \right) &= \beta * \left(\sum_{k=1}^n \left(x_k * \sum_{t=1}^n q_{kt}^{(-1)} q_{ti_0}^{(m+1)} \right) \right) \\ = \beta * \left(\sum_{k=1}^n \left(x_k * \left(\sum_{t=1}^n q_{kt}^{(-1)} * q_{ti_0}^{(m+1)} \right) \right) \right) &\in \mathrm{Im}(\theta_P) \text{ (bởi giả thiết quy nạp).} \end{aligned}$$

Viết $\alpha^* = \gamma^* x_{t_0}^* = \gamma^* y_{t_0}$ với $1 \leq t_0 \leq n$ và $\gamma \in \mathcal{L}_n^*$, $|\gamma| = m$ nào đó. Theo giả thiết quy nạp, $\gamma^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$. Lại có, theo Bổ đề 2.2.3 (3) thì

$$y_{t_0} = \varphi_P^{-m} \left(\sum_{k=1}^n p_{t_0 k}^{(-m)} y_k \right),$$

và do đó

$$\begin{aligned} \alpha^* = \gamma^* y_{t_0} = \gamma^* \varphi_P^{-m} \left(\sum_{k=1}^n p_{t_0 k}^{(-m)} y_k \right) &= \gamma^* * \left(\sum_{k=1}^n p_{t_0 k}^{(-m)} y_k \right) \\ &= \gamma^* * \left(\sum_{k=1}^n p_{t_0 k}^{(-m)} * y_k \right) \in \mathrm{Im}(\theta_P) \text{ (bởi giả thiết quy nạp),} \end{aligned}$$

từ đó khẳng định được chứng minh.

Tiếp theo ta chỉ ra rằng $\alpha\beta^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ với mọi $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_n^*$. Giả sử $m = |\alpha| \geq 1$ và $s = |\beta| \geq 1$. Ta quy nạp theo độ dài $|\beta|$ để chứng minh điều này.

Nếu $|\beta| = 1$, do $\alpha, y_k \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ với mọi $1 \leq k \leq n$, cho nên

$$\begin{aligned}\alpha\beta^* = \alpha x_i^* = \alpha y_i = \alpha\varphi_P^m \left(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m)} y_k\right) \quad &\text{(theo Bổ đề 2.2.3 (2))}\\ = \alpha * \left(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m)} y_k\right) = \alpha * \left(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m)} * y_k\right) &\in \mathrm{Im}(\theta_P).\end{aligned}$$

Bây giờ ta tiến hành quy nạp. Ta cần chỉ ra rằng $\alpha\beta^* x_i^* = \alpha\beta^* y_i \in \mathrm{Im}(\theta_P)$, với mọi $1 \leq i \leq n$. Lưu ý rằng, theo giả thiết quy nạp, $\alpha\beta^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$. Nếu $m - s = 0$, ta có $\alpha\beta^* y_i = (\alpha\beta^*) * y_i \in \mathrm{Im}\,(\theta_P)$. Nếu $m - s > 0$, ta có

$$\begin{aligned}\alpha\beta^* y_i = \alpha\beta^*\varphi_P^{m-s}\left(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m+s)} y_k\right) &= (\alpha\beta^*) * \left(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m+s)} y_k\right)\\ = (\alpha\beta^*) * \left(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m+s)} * y_k\right) &\in \mathrm{Im}(\theta_P).\end{aligned}$$

Nếu $m - s < 0$, ta có

$$\begin{aligned}\alpha\beta^* y_i = \alpha\beta^*\varphi_P^{m-s}\left(\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(m-s)} y_k\right) &= (\alpha\beta^*) * \left(\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(m-s)} y_k\right)\\ = (\alpha\beta^*) * \left(\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(m-s)} * y_k\right) &\in \mathrm{Im}(\theta_P),\end{aligned}$$

từ đó suy ra điều cần chứng minh. Như vậy, ta đã thu được $\alpha\beta^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ với mọi $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_n^*$. Mặt khác, vì $L_K(1,n)^{P,Q}$ cũng là một K-không gian vectơ sinh bởi $\{\alpha\beta^* \mid \alpha, \beta \in \mathcal{L}_n^*\}$ nên ta suy ra $\mathrm{Im}(\theta_P) = L_K(1,n)^{P,Q}$, hay θ_P là toàn ánh, từ đó kết thúc chứng minh. □

Trong trường hợp $\varphi_P(P) = P$, chúng ta có tiêu chuẩn đơn giản sau đây để đồng cấu θ_P là một đẳng cấu.

Hệ quả 2.2.5. [7] *Cho $n \geq 2$ là một số nguyên và K là một trường. Giả sử $P = (p_{ij})$ là một ma trận của $\mathrm{GL}_n\,(L_K(1,n)_0)$ với $\varphi_P\,(P) = P$ và $P^{-1} = (p_{ij}^{(-1)})$. Khi đó, đồng cấu K-đại số bảo toàn đơn vị $\theta_P : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)^{P,P^{-1}}$ thoả mãn*

$$\theta_P(x_i) = x_i \text{ và } \theta_P(y_i) = \textstyle\sum_{k=1}^n p_{ik}y_k \quad \text{với mọi } 1 \leq i \leq n,$$

là một đẳng cấu khi và chỉ khi p_{ij}, $p_{ij}^{(-1)} \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ *với mọi* $1 \leq i, j \leq n$*.*

Chứng minh. ($\Longrightarrow$) Hiển nhiên.

($\Longleftarrow$) Vì $\varphi_P(P) = P$ và theo Định lý 2.1.12 (3), φ_P là một tự đẳng cấu phân bậc của $L_K(1,n)$ thoả mãn $\varphi_P\left(P^{-1}\right) = P^{-1}$ và $\varphi_P^m = \varphi_{P^m}$ với mọi số nguyên m. Điều này suy ra

$$\varphi_P^m(P) = P \quad \text{và} \quad \varphi_{P^{-1}}^m(P^{-1}) = P^{-1}$$

với mọi $m \geq 0$. Do đó ta có

$$P_m = P\varphi_P\left(P\right)\cdots\varphi_P^{m-1}\left(P\right) = P^m$$

và

$$P_m^{-1} = P^{-1}\varphi_{P^{-1}}\left(P^{-1}\right)\cdots\varphi_{P^{-1}}^{m-1}\left(P^{-1}\right) = P^{-m}$$

với mọi $m \geq 0$. Vì $p_{ij}, p_{ij}^{(-1)} \in L_K(1,n)_0$ nên ta có

$$P^m = \underbrace{P * P * \cdots * P}_{m \text{ lần}} \quad \text{và} \quad P^{-m} = \underbrace{P^{-1} * P^{-1} * \cdots * P^{-1}}_{m \text{ lần}}$$

là hai phần tử của $\mathrm{M}_n(L_K(1,n)^{P,P^{-1}})$, tức là, P^m và P^{-m} tương ứng là luỹ thừa bậc m của P và P^{-1} trong $\mathrm{M}_n(L_K(1,n)^{P,P^{-1}})$. Lại có, $p_{ij}, p_{ij}^{(-1)} \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ với mọi $1 \leq i, j \leq n$, do vậy tất cả các phần tử của ma trận P^m và P^{-m} đều nằm trong $\mathrm{Im}(\theta_P)$ với mọi $m \geq 1$. Từ Định lý 2.2.4, ta ngay lập tức thu được θ_P là một đẳng cấu. $\square$

Ứng dụng đầu tiên của Hệ quả 2.2.5 cho ta thấy rằng xoắn Zhang $L_K(1,n)^{P,P^{-1}}$ đẳng cấu với $L_K(1,n)$ với mọi ma trận $P \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Hệ quả 2.2.6. [7] *Cho* $n \geq 2$ *là một số nguyên và* K *là một trường. Khi đó, với mọi* $P \in \mathrm{GL}_n(K)$*, đồng cấu* K*-đại số* $\theta_P : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)^{P,P^{-1}}$*, định nghĩa trong Hệ quả 2.2.5, là một đẳng cấu.*

Chứng minh. Với một ma trận P bất kì của $\mathrm{GL}_n(K)$, theo Hệ quả 2.1.13, φ_P là một tự đẳng cấu phân bậc của $L_K(1,n)$ với $\varphi_P(P) = P$. Hơn nữa, vì tất cả các phần tử của ma trận P và P^{-1} nằm trong trường K nên hiển nhiên chúng cũng nằm trong $\mathrm{Im}(\theta_P)$. Khi đó, theo Hệ quả 2.2.5, θ_P là một đẳng cấu. $\square$

Ứng dụng thứ hai của Hệ quả 2.2.5 chỉ ra rằng xoắn Zhang của $L_K(1,n)$ bởi các tự đẳng cấu phân bậc loại Anick đề cập trong Hệ quả 2.1.14 đẳng cấu với $L_K(1,n)$.

Hệ quả 2.2.7. [7] *Cho $n \geq 2$ là một số nguyên và K là một trường. Với mọi $p \in A_{L_n}(x_2, y_1) \cap L_K(1,n)_0$, xét*

$$U_p = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n))_0.$$

Khi đó, đồng cấu K-đại số bảo toàn đơn vị

$$\theta_p : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)^{\varphi_{U_p}}$$

cho bởi

$$\theta_p(x_i) = x_i, \quad \theta_p(y_j) = y_j \quad \text{và} \quad \theta_p(y_1) = y_1 + py_2$$

với mọi $1 \leq i \leq n$ và $2 \leq j \leq n$, là một đẳng cấu.

Chứng minh. Lấy $p \in A_{L_n}(x_2, y_1) \cap L_K(1,n)_0$ bất kì. Theo Hệ quả 2.1.14, φ_{U_p} là một tự đẳng cấu phân bậc của $L_K(1,n)$ với $\varphi_{U_p}(q) = q$ với mọi $q \in A_{L_n}(x_2, y_1) \cap L_K(1,n)_0$, trong đó

$$U_p = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(L_K(1,n))_0 \quad \text{và} \quad U_p^{-1} = U_{-p}.$$

Bởi Định lý 2.2.4, $\theta_p := \theta_{U_p}$ là một đồng cấu K-đại số bảo toàn đơn vị thoả mãn $\theta_p(x_i) = x_i$, $\theta_p(y_j) = y_j$ và $\theta_p(y_1) = y_1 + py_2$ với mọi $1 \leq i \leq n$ và $2 \leq j \leq n$.

Ta khẳng định rằng $\theta_p(p) = p$. Thật vậy, viết $p = \sum \alpha\beta^*$, trong đó $|\alpha| = |\beta| = t$ và $\alpha = x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_t}$, $\beta^* = y_{s_1}y_{s_2}\cdots y_{s_t}$ với $x_{k_i} \in \{x_1, x_3, \ldots x_n\}$ và $y_{s_i} \in \{y_2, y_3, \ldots, y_n\}$. Vì $\varphi_{U_p}(q) = q$ với mọi $q \in A_{L_n}(x_2, y_1) \cap L_K(1,n)_0$, ta có $\varphi_{U_p}(x_{k_i}) = x_{k_i}$ và $\varphi_{U_p}(y_{s_i}) = y_{s_i}$ với mọi $1 \leq i \leq t$. Khi đó,

$$\begin{aligned}
\theta_p(\alpha\beta^*) &= \theta_p(\alpha) * \theta_p(\beta^*) = \theta_p\left(x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_t}\right) * \theta_p\left(y_{s_1}y_{s_2}\cdots y_{s_t}\right) \\
&= \theta_p\left(x_{k_1}\right) * \theta_p\left(x_{k_2}\right) * \cdots * \theta_p\left(x_{k_t}\right) * \theta_p\left(y_{s_1}\right) * \theta_p\left(y_{s_2}\right) * \cdots * \theta_p\left(y_{s_t}\right) \\
&= x_{k_1} * x_{k_2} * \cdots * x_{k_t} * y_{s_1} * y_{s_2} * \cdots * y_{s_t} \\
&= x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_t}y_{s_1}y_{s_2}\cdots y_{s_t} \quad (\text{vì } \varphi_{U_p}(x_{k_i}) = x_{k_i}, \varphi_{U_p}(y_{s_i}) = y_{s_i}) \\
&= \alpha\beta^*,
\end{aligned}$$

và do đó $p = \theta_p(p) \in \mathrm{Im}\,(\theta_P)$. Điều này chứng tỏ rằng tất cả các phần tử trong ma trận U_p và U_p^{-1} đều nằm trong Im(θ_P). Bởi Hệ quả 2.2.5, θ_p là một đẳng cấu. $\square$

Theo Hệ quả 2.1.15, với một phần tử $u \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$ bất kì, tồn tại duy nhất một tự đồng cấu phân bậc f_u của $L_K(1,n)$ sao cho $f_u(1) = 1$, $f_u(x_i) = ux_i$ và $f_u(y_i) = y_iu^{-1}$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Hơn nữa, f_u là một tự đẳng cấu phân bậc khi và chỉ khi $u^{-1} = f_u(w)$ với $w \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$ nào đó. Trong trường hợp này, theo Hệ quả 2.1.15 và Định lý 2.2.2, tồn tại một đơn cấu K-đại số phân bậc bảo toàn đơn vị

$$\theta_u := \theta_P : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)^{f_u}$$

thoả mãn $\theta_u(x_i) = x_i$ và $\theta_u(y_i) = y_iw^{-1}$ với mọi $1 \leq i \leq n$, trong đó $P = (y_iux_j)$. Với một số nguyên dương m, ta luôn có

$$u_m := f_u^{m-1}(u)\cdots f_u(u)\,u \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0) \text{ và } u_m^{-1} = u^{-1}f_u(u^{-1})\cdots f_u^{m-1}(u^{-1}).$$

Ngoài ra ta có kết quả sau đây.

Bổ đề 2.2.8. [7] *$P_m = (y_iu_mx_j)$ và $P_m^{-1} = (y_iu_m^{-1}x_j)$ với mọi $m \geq 1$.*

Chứng minh. Đầu tiên ta khẳng định rằng

$$f_u^m(y_iux_j) = y_iu_m^{-1}u_{m+1}x_j \text{ và } f_w^m(y_iwx_j) = y_iw_m^{-1}w_{m+1}x_j$$

với mọi $m \geq 1$ và $1 \leq i, j \leq n$. Ta quy nạp theo m để thu được khẳng định trên. Với $m = 1$, khi đó $f_u(y_iux_j) = y_iu^{-1}f_u(u)ux_j = y_iu_1^{-1}u_2x_j$ và $f_w(y_iwx_j) = y_iw^{-1}f_w(w)wx_j = y_iw_1^{-1}w_2x_j$ với mọi $1 \leq i, j \leq n$. Bây giờ, giả sử với mọi $1 \leq m \leq k$, ta có $f_u^m(y_iux_j) = y_iu_m^{-1}u_{m+1}x_j$ và $f_w^m(y_iwx_j) = y_iw_m^{-1}w_{m+1}x_j$. Với $m = k + 1$, ta có

$$\begin{aligned}
f_u^m(y_iux_j) &= f_u^{k+1}(y_iux_j) = f_u(f_u^k(y_iux_j)) \\
&= f_u(y_iu_k^{-1}u_{k+1}x_j) = y_iu^{-1}f_u(u_k^{-1})f_u(u_{k+1})ux_j \\
&= y_i\left(u^{-1}f_u(u_k^{-1})\right)\left(f_u(u_{k+1})u\right)x_j \\
&= y_iu_{k+1}^{-1}u_{k+2}x_j = y_iu_m^{-1}u_{m+1}x_j.
\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có $f_w^m(y_iwx_j) = y_iw_m^{-1}w_{m+1}x_j$, do đó khẳng định được chứng minh.

Tiếp theo chúng ta quy nạp theo m để chứng minh bổ đề. Nếu $m = 1$, kết quả hiển nhiên đúng. Giả sử $P_m = (y_iu_mx_j)$ và $P_m^{-1} = (y_iu_m^{-1}x_j)$ với mọi $1 \leq m \leq k$. Với $m = k+1$, ta có $P_m = P_{k+1} = Pf_u(P) \cdots f_u^{k-1}(P)f_u^k(P) = P_kf_u^k(P)$. Theo giả thiết quy nạp, $P_k = (y_iu_kx_j)$. Cùng với đó, khẳng định trên cho ta

$$f_u^k(P) = \left(f_u^k(y_iux_j)\right) = \left(y_iu_k^{-1}u_{k+1}x_j\right).$$

Viết $P_m = (p_{ij}^{(m)})$. Từ đây ta có

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(m)} &= \sum_{t=1}^{n}(y_iu_kx_t)\left(y_tu_k^{-1}u_{k+1}x_j\right) = y_iu_k\left(\sum_{t=1}^{n}x_ty_t\right)u_k^{-1}u_{k+1}x_j \\
&= y_iu_ku_k^{-1}u_{k+1}x_j = y_iu_{k+1}x_j = y_iu_mx_j
\end{aligned}$$

với mọi $1 \leq i, j \leq n$, do vậy $P_m = (y_iu_mx_j)$ và $P_m^{-1} = (y_iu_m^{-1}x_j)$ với mọi $m \geq 1$. $\square$

Như một hệ quả của Định lý 2.2.4, ta thu được sau đây một tiêu chuẩn để xoắn Zhang $L_K(1,n)^{f_u}$ của $L_K(1,n)$ liên kết với tự đẳng cấu phân bậc f_u đẳng cấu với $L_K(1,n)$.

Hệ quả 2.2.9. [7] *Cho $n \geq 2$ là một số nguyên và K là một trường. Giả sử u là một phần tử của $\mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$ thoả mãn $u^{-1} = f_u(w)$ với $w \in \mathrm{U}(L_K(1,n)_0)$ nào đó. Khi đó những khẳng định sau là đúng:*

(1) *Đồng cấu K-đại số phân bậc bảo toàn đơn vị $\theta_u : L_K(1,n) \longrightarrow L_K(1,n)^{f_u}$ cho bởi $x_i \longmapsto x_i$ và $y_i \longmapsto y_i w^{-1}$ với mọi $1 \leq i \leq n$, là đẳng cấu khi và chỉ khi $y_i u_m^{-1} x_j$, $y_i w_m x_j$, $y_i w_m^{-1} x_j \in \mathrm{Im}(\theta_u)$ với mọi $m \geq 1$ và $1 \leq i,j \leq n$.*

(2) *Nếu $f_u(u) = u$, thì khi đó θ_u là một đẳng cấu khi và chỉ khi $y_i u x_j, y_i u^{-1} x_j \in \mathrm{Im}(\theta_u)$ với mọi $1 \leq i,j \leq n$.*

Chứng minh. (1) Đặt $P = (y_i u x_j)$ và $Q = (y_i w x_j)$. Theo Bổ đề 2.2.8, ta có $P_m^{-1} = (y_i u_m^{-1} x_j)$, $Q_m = (y_i w_m x_j)$ và $Q_m^{-1} = (y_i w_m^{-1} x_j)$ với mọi $m \geq 1$. Khi đó, áp dụng Định lý 2.2.4, θ_u là một đẳng cấu khi và chỉ khi $y_i u_m^{-1} x_j$, $y_i w_m x_j$, $y_i w_m^{-1} x_j \in \mathrm{Im}(\theta_u)$ với mọi $m \geq 1$ và $1 \leq i,j \leq n$.

(2) Giả sử rằng $f_u(u) = u$. Theo Chú ý 2.1.16, ta có $f_u(P) = P$. Áp dụng Hệ quả 2.2.5, θ_u là đẳng cấu khi và chỉ khi $y_i u x_j, y_i u^{-1} x_j \in \mathrm{Im}(\theta_u)$ với mọi $1 \leq i,j \leq n$. □

Chúng tôi kết lại chương này bằng ví dụ sau đây để minh hoạ cho Hệ quả 2.2.9. Đặc biệt, trong ví dụ này chúng tôi chỉ ra rằng một đồng cấu θ_u nhìn chung không phải một đẳng cấu.

Ví dụ 2.2.10. [7] Cho K là một trường.

(1) Đặt $a = x_1 y_2 + x_2 y_1 \in L_K(1,2)_0$. Trong Ví dụ 2.1.17 (1), ta đã chỉ ra rằng a là một phần tử đơn vị của $L_K(1,2)_0$ với $a^{-1} = a$. Ta cũng có tự đẳng cấu phân bậc f_a của $L_K(1,2)$ thoả mãn $f_a(1) = 1$, $f_a(x_1) = x_2$, $f_a(x_2) = x_1$, $f_a(y_1) = y_2$, $f_a(y_2) = y_1$, và $f_a(a) = a$. Từ đây ta thu được đồng cấu K-đại số phân bậc bảo toàn đơn vị $\theta_a : L_K(1,2) \longrightarrow L_K(1,2)^{f_a}$ thoả mãn $\theta_a(x_1) = x_1$, $\theta_a(x_2) = x_2$, $\theta_a(y_1) = y_1 a = y_2$ và $\theta_a(y_2) = y_2 a = y_1$. Ta có

$$y_1ax_1 = y_2ax_2 = 0 \in \mathrm{Im}(\theta_a) \text{ và } y_1ax_2 = y_2ax_1 = 1 \in \mathrm{Im}(\theta_a).$$

Theo Hệ quả 2.2.9 (2), ngay lập tức ta suy ra θ_a là một đẳng cấu.

(2) Với $b = 1 + x_1^2y_2^2 \in L_K(1,2)_0$, ở Ví dụ 2.1.17 (2) ta đã có b là một phần tử đơn vị của $L_K(1,2)_0$ với $b^{-1} = 1-x_1^2y_2^2$. Cùng với đó, ta có tự đẳng cấu phân bậc f_b của $L_K(1,2)$ thoả mãn $f_b(1) = 1$, $f_b(x_1) = x_1$, $f_b(x_2) = x_2 + x_1^2y_2$, $f_b(y_1) = y_1 - x_1y_2^2$, $f_b(y_2) = y_2$ và $f_b(b) = b$. Từ đây ta thu được đồng cấu K-đại số phân bậc bảo toàn đơn vị $\theta_b : L_K(1,2) \longrightarrow L_K(1,2)^{f_b}$ cho bởi $\theta_b(x_1) = x_1$, $\theta_b(x_2) = x_2$, $\theta_b(y_1) = y_1b = y_1 + x_1y_2^2$ và $\theta_b(y_2) = y_2b = y_2$. Hơn nữa, ta có $y_1bx_1 = y_2bx_2 = y_1b^{-1}x_1 = y_2b^{-1}x_2 = 1 \in \mathrm{Im}(\theta_b)$, $y_2bx_1 = y_2b^{-1}x_1 = 0 \in \mathrm{Im}(\theta_b)$, $y_1bx_2 = x_1y_2 = \theta_b(x_1y_2) \in \mathrm{Im}(\theta_b)$ và $y_1b^{-1}x_2 = -x_1y_2 = \theta_b(-x_1y_2) \in \mathrm{Im}(\theta_b)$. Khi đó, theo Hệ quả 2.2.9 (2), θ_b là một đẳng cấu.

(3) Xét $u = ab = x_1y_2+x_2y_1+x_1^2y_2y_1 \in L_K(1,2)_0$. Trong Ví dụ 2.1.17 (3), ta đã chỉ ra u là một phần tử khả nghịch của $L_K(1,2)_0$ với $u^{-1} = x_1y_2+x_2y_1-x_2x_1y_2^2$. Ta cũng có tự đẳng cấu phân bậc f_u của $L_K(1,2)$ thoả mãn $f_u(1) = 1$, $f_u(x_1) = x_2+x_1^2y_2$, $f_u(x_2) = x_1$, $f_u(y_1) = y_2$, $f_u(y_2) = y_1-x_1y_2^2$ và $f_u(w) = u^{-1}$, trong đó $w = x_1y_2 + x_2y_1 - x_2^2y_1y_2$ và $w^{-1} = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1x_2y_1^2$. Từ đây ta thu được đồng cấu K-đại số phân bậc bảo toàn đơn vị $\theta_u : L_K(1,2) \longrightarrow L_K(1,2)^{f_u}$ cho bởi $\theta_u(x_1) = x_1$, $\theta_u(x_2) = x_2$, $\theta_u(y_1) = y_1w^{-1} = y_2 + x_2y_1^2$ và $\theta_u(y_2) = y_2w^{-1} = y_1$.

Ta khẳng định rằng θ_u trong trường hợp này không phải là đẳng cấu. Thật vậy, ta sẽ chỉ ra $y_1w_2x_2 \notin \mathrm{Im}(\theta_u)$. Lưu ý rằng $y_1w_2x_2$ chính là phần tử ở vị trí $(1,2)$ của ma trận $Q_2 = Q\varphi_w(Q)$, trong đó $Q = (y_iwx_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x_2y_1 \end{pmatrix}$. Ta có $f_w(1) = 1$, $f_w(x_1) = wx_1 = x_2$, $f_w(x_2) = wx_2 = x_1 - x_2^2y_1$, $f_w(y_1) = y_1w^{-1} = y_2 + x_2x_1^{*2}$ và $f_w(y_2) = y_2w^{-1} = y_1$. Từ đây ta thu được

$$f_w(Q) = f_w \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x_1y_2 - x_1x_2y_1^2 + x_2^2y_1y_2 \end{pmatrix},$$

cho nên

$$Q_2 = Qf_w(Q) = \begin{pmatrix} 1 & -x_1y_2 - x_1x_2y_1^2 + x_2^2y_1y_2 \\ -x_2y_1 & 1 + x_2y_2 + x_2^2y_1^2 \end{pmatrix}.$$

Điều này chỉ ra rằng

$$y_1w_2x_2 = -x_1y_2 - x_1x_2y_1^2 + x_2^2y_1y_2 \in L_K(1,2)_0.$$

Giả sử $-x_1y_2 - x_1x_2y_1^2 + x_2^2y_1y_2 \in \mathrm{Im}(\theta_u)$, tức là, $-x_1y_2 - x_1x_2y_1^2 + x_2^2y_1y_2 = \theta_u(z)$ với $z \in L_K(1,2)_0$ nào đó. Ta có thể viết z dưới dạng:

$$z = x_1t_1y_1 + x_1t_2y_2 + x_2t_3y_1 + x_2t_4y_2,$$

trong đó $t_i \in L_K(1,2)_0$ với mọi $1 \leq i \leq 4$. Để ý rằng $f_u(\theta_u(y_1)) = f_u(y_2 + x_2y_1^2) = y_1$ và $f_u(\theta_u(y_2)) = f_u(y_1) = y_2$ với mọi $1 \leq j \leq 2$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \theta_u(x_isy_j) &= \theta_u(x_i) * \theta_u(s) * \theta_u(y_j) = x_i * \theta_u(s) * \theta_u(y_j) = x_if_u(\theta_u(s)) * \theta_u(y_j) \\ &= x_if_u(\theta_u(s))f_u(\theta_u(y_j)) = x_if_u(\theta_u(s))y_j \end{aligned}$$

với mọi $s \in L_K(1,2)_0$ và $1 \leq i,j \leq 2$. Điều này dẫn đến

$$\theta_u(z) = x_1f_u(\theta_u(t_1))y_1 + x_1f_u(\theta_u(t_2))y_2 + x_2f_u(\theta_u(t_3))y_1 + x_2f_u(\theta_u(t_4))y_2,$$

và do đó

$$\begin{aligned} -x_2y_1 &= y_1(-x_1y_2 - x_1x_2y_1^2 + x_2^2y_1y_2)x_1 = y_1\theta_u(z)x_1 = f_u(\theta_u(t_1)), \\ -1 &= y_1(-x_1y_2 - x_1x_2y_1^2 + x_2^2y_1y_2)x_2 = y_1\theta_u(z)x_2 = f_u(\theta_u(t_2)), \\ 0 &= y_2(-x_1y_2 - x_1x_2y_1^2 + x_2^2y_1y_2)x_1 = y_2\theta_u(z)x_1 = f_u(\theta_u(t_3)), \\ x_2y_1 &= y_2(-x_1y_2 - x_1x_2y_1^2 + x_2^2y_1y_2)x_2 = y_2\theta_u(z)x_2 = f_u(\theta_u(t_4)). \end{aligned}$$

Như vậy, $x_2y_1 = f_u(\theta_u(-t_1)) = f_u(\theta_u(t_4))$. Vì f_u và θ_u là đơn cấu, ta suy ra

$-t_1 = t_4 =: t$, $t_2 = -1$ và $t_3 = 0$. Do đó,

$$z = -x_1y_2 - x_1ty_1 + x_2ty_2.$$

Như ở trên ta đã chỉ ra $x_2y_1 = f_u(\theta_u(t))$. Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} x_2 &= f_u(x_1) - x_1^2y_2 = f_u(x_1) - f_u(x_2^2)f_u(y_1) = f_u(x_1 - x_2^2y_1) \\ y_1 &= f_u(y_2) + x_1y_2^2 = f_u(y_2) + f_u(x_2)f_u(y_1^2) = f_u(y_2 + x_2y_1^2). \end{aligned}$$

Do đó $x_2y_1 = f_u(x_1y_2 + x_1x_2y_1^2 - x_2^2y_1y_2) = f_u(-\theta_u(z)) = f_u(\theta_u(-z))$. Điều này kéo theo $f_u(\theta_u(t)) = f_u(\theta_u(-z))$. Vì tính đơn ánh của f_u and θ_u, ta suy ra $t = -z$, hay,

$$t = x_1y_2 + x_1ty_1 - x_2ty_2.$$

Dễ dàng nhận thấy $y_1^m t x_1^m = t$ với mọi $m \geq 1$. Do $t \in L_K(1,2)_0$, ta viết $t = k + \sum_{i=1}^d k_i\alpha_i\beta_i^*$, trong đó $d \geq 0$, $k, k_i \in K$ và $\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{L}_2^*$ với $|\alpha_i| = |\beta_i| \geq 1$ với mọi $1 \leq i \leq d$. Ta có, $y_1^l x_1^l = 1$ với mọi $l \geq 1$ và

$$y_1^{|\alpha_i|}(\alpha_i\beta_i^*)x_1^{|\alpha_i|} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \alpha_i = \beta_i^* = x_1^{|\alpha_i|}, \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

với mọi $1 \leq i \leq d$. Do đó, với $m = \max\{|\alpha_i| \mid 1 \leq i \leq d\}$, ta thu được

$$t = y_1^m t x_1^m = y_1^m(k + \sum_{i=1}^{d} k_i\alpha_i\beta_i^*)x_1^m = c$$

với $c \in K$ nào đó, và do đó $y_1tx_2 = y_1cx_2 = c(y_1x_2) = 0$. Mặt khác, ta cũng có

$$y_1tx_2 = y_1(x_1y_2 + x_1ty_1 - x_2ty_2)x_2 = 1,$$

suy ra $1 = 0$ (mâu thuẫn!). Vì vậy, $-x_1y_2 - x_1x_2y_1^2 + x_2^2y_1y_2 \notin \mathrm{Im}(\theta_u)$, và do đó θ_u không phải một đẳng cấu.

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, chúng tôi đã hoàn thành các nội dung sau đây:

1. Dựa vào tài liệu [2], chúng tôi đã trình bày lại các tính chất cơ bản của xoắn Zhang và sự tương đương phạm trù các môđun phân bậc của xoắn Zhang và của đại số phân bậc ban đầu (Định lý 1.3.8 và Định lý 1.3.19).

2. Trình bày về đại số Leavitt $L_K(1, n)$ và mô tả tường minh nhóm các tự đẳng cấu phân bậc của chúng (Định lý 2.1.12 và Hệ quả 2.1.15). Ngoài ra, chúng tôi chỉ ra nhóm các tự đẳng cấu phân bậc của $L_K(1, n)$ chứa một số nhóm con đặc biệt (Hệ quả 2.1.13 và 2.1.14).

3. Xây dựng được một phép nhúng từ đại số $L_K(1, n)$ vào mọi xoắn Zhang của nó (Định lý 2.2.2) và thiết lập các điều kiện cần và đủ để cho phép nhúng này là đẳng cấu (Định lý 2.2.4). Khi đó, chúng tôi đưa ra một số lớp cụ thể để phép nhúng nói trên là đẳng cấu (Hệ quả 2.2.5-2.2.9). Đồng thời, chúng tôi chỉ ra rằng phép nhúng này nói chúng không phải là đẳng cấu (Ví dụ 2.2.10 (3)).

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Artin M., Tate J., Van den Bergh M., 1991, Modules over regular algebras of dimension 3, *Inventiones Mathematicae*, 106(2), 335-388.

[2] Zhang J. J., 1996, Twisted graded algebras and equivalences of graded categories, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 72(2), 281-311.

[3] Leavitt W. G., The module type of a ring, 1962, *Transactions of the American Mathematical Society*, 103(1), 113-130.

[4] Abrams G., Aranda Pino G., 2005, The Leavitt path algebra of a graph, *Journal of Algebra*, 293(2), 319–334.

[5] Ara P., Moreno M. A., Pardo E., 2007, Nonstable K-theory for graph algebras, *Algebras and Representation Theory*, 10(2), 165-224.

[6] Abrams G., Ara P., Siles Molina M., 2017, *Leavitt path algebras*, Lecture Notes in Mathematics series, Vol. 2191, Springer-Verlag London, Ltd., London.

[7] Nam T. G., Srivastava A. K., Vien N. T., 2024, Automorphisms of Leavitt path algebras: Zhang twist and irreducible representations, *Journal of Algebra*, 654(6), 189-234.

[8] Rotman J. J., 2009, *An Introduction to Homological Algebra (second edition)*, Universitext, Springer, New York.

[9] Mac Lane S., 1998, *Categories for the Working Mathematician (second edition)*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York.

[10] Cuntz J., 1980, Automorphisms of certain simple C^*-algebras, in: Quantum Fields - Algebras, Processes, Proc. Sympos., Univ. Bielefeld, Bielefeld, 1978, 187-196, Springer, Vienna.

[11] Kuroda S., Nam T. G., 2023, Anick type automorphisms and new irreducible representations of Leavitt path algebras, *Journal of Noncommutative Geometry*, 17(3), 811-834.

[12] Abrams G., 2015, Leavitt path algebras: the first decade, *Bulletin of Mathematical Sciences*, 5(1), 59-120.

[13] Lam T. Y., 1999, *Lectures on modules and rings*, Springer-Verlag, New York-Berlin.

[14] Leavitt W. G., 1965, The module type of homomorphic images, *Duke Mathematical Journal*, 32(2), 305–311.

[15] Alahmadi A., Alsulami H., Jain S. K., Zelmanov E., 2012, Leavitt path algebras of finite Gelfand-Kirillov dimension, *Journal of Algebra and Its Applications*, 11(6), 1250225-1250231.

[16] Lopatkin V., Nam T. G., 2017, On the homological dimensions of Leavitt path algebras with coefficients in commutative rings, *Journal of Algebra*, 481(6), 273-292.

Journal of Algebra 654 (2024) 189–234

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Algebra

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jalgebra

Research Paper

Automorphisms of Leavitt path algebras: Zhang twist and irreducible representations

Tran Giang Nam [a], Ashish K. Srivastava [b,*], Nguyen Thi Vien [a]

[a] *Institute of Mathematics, VAST, 18 Hoang Quoc Viet, Cau Giay, Hanoi, Viet Nam*
[b] *Department of Mathematics and Statistics, Saint Louis University, Saint Louis, MO-63103, USA*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 19 December 2023
Available online 21 May 2024
Communicated by Louis Rowen

Dedicated to Prof. Ngo Viet Trung on the occasion of his 70th birthday

MSC:
16D60
16D70
16S88

Keywords:
Automorphism
Leavitt path algebra
Simple module

ABSTRACT

In this article, we construct (graded) automorphisms fixing all vertices of Leavitt path algebras of arbitrary graphs in terms of general linear groups over corners of these algebras. As an application, we study Zhang twist of Leavitt path algebras and describe new classes of irreducible representations of Leavitt path algebras of rose graphs R_n with n petals.

1. Introduction

The study of automorphisms of an algebra has been an important area of research as it describes the symmetry of underlying algebraic structure. But, determining the full

* Corresponding author.
E-mail addresses: tgnam@math.ac.vn (T.G. Nam), ashish.srivastava@slu.edu (A.K. Srivastava), nguyenthivien2000@gmail.com (N.T. Vien).

https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2024.05.014

automorphism group of a noncommutative algebra is, in general, an extremely difficult problem with very little progress till date. In 1968, Dixmier [18] described the group of automorphisms of the first Weyl algebra. For higher Weyl algebras, to find the group of automorphisms is a long standing open problem. In [13], Bavula described the group of automorphisms for the Jacobson algebra $\mathbb{A}_n = K\langle x, y\rangle/(xy-1)$ as a semidirect product of the multiplicative group K^* of the field K with the general linear finitary group $GL_\infty(K)$ using some deep arguments. The same result was later obtained by Alahmedi, Alsulami, Jain and Zelmanov in a remarkable work [5] where they approach this problem from another perspective noting that the Jacobson algebra $\mathbb{A}_n$ is isomorphic to the Leavitt path algebra of Toeplitz graph and then they describe the group of automorphisms of this Leavitt path algebra.

Leavitt path algebras were introduced independently by Abrams and Aranda Pino in [3] and Ara, Moreno and Pardo in [8]. These are certain quotients of path algebras where the relations are inspired from Cuntz-Krieger relations for graph C^*-algebras (see [20,24]). For a graph E that has only one vertex and n loops, Leavitt path algebra turns out to be the algebra of type $(1, n)$ proposed by Leavitt as an example of a (universal) ring without invariant basis number (see [22]). Leavitt path algebras have deep connections with symbolic dynamics and the theory of graph C^*-algebras. For example, the notion of flow equivalence of shifts of finite type in symbolic dynamics is related to Morita theory and the Grothendieck group in the theory of Leavitt path algebras, and ring isomorphism (or Morita equivalence) between two Leavitt path algebras over the field of the complex numbers induces, for some graphs, isomorphism (or Morita equivalence) of the respective graph C^*-algebras. As remarked by Chen in [14], Leavitt path algebras capture the homological properties of both path algebras and their Koszul dual and hence they form an important class of noncommutative algebras. Moreover, by Smith's interesting result ([25, Theorem 1.3]), the Leavitt path algebra construction arises naturally in the context of noncommutative algebraic geometry. We refer the reader to [1,2] for a detailed history and overview of these algebras.

Unfortunately, there are not many constructions known yet for automorphisms of Leavitt path algebras. In [12,19], motivated by Cuntz's idea [17], Szymański et al. gave a method to construct automorphisms of Leavitt path algebras $L_K(E)$ of finite graphs E without sinks or sources in which every cycle has an exit over integral domains K of characteristic 0. In [21, Section 2], Kuroda and the first author gave construction of automorphisms fixing all vertices of Leavitt path algebras $L_K(E)$ of arbitrary graphs E over an arbitrary field K, and gave construction of Anick type automorphisms of Leavitt path algebras. Anick automorphisms have an interesting history. For a free associative algebra $F < x, y, z >$ over a field F of characteristic zero, the question about the existence of a wild automorphism was open for a long time. Anick provided a candidate for a wild automorphism in the case of free associative algebra on three generators (cf. [15, p. 343]). In [27], Umirbaev proved that the Anick automorphism $\delta = (x+z(xz-zy), y+(xz-zy)z, z)$ of the algebra $F\langle x, y, z\rangle$ over a field F of characteristic zero is wild. In this paper, based on Kuroda and the first author's work [21, Section 2] and Cuntz's beautiful paper [17], we give a construction for graded automorphisms of Leavitt path algebras. We describe (graded) automorphisms fixing all vertices of Leavitt path algebras of arbitrary graphs in terms of general linear groups over corners of these algebras (Theorem 2.2 and Corollary 2.3). Consequently, this yields a complete description of all (graded) automorphisms of the Leavitt path algebra $L_K(R_n)$ of the rose graph R_n with n petals in term of general linear group of degree n over $L_K(R_n)$ (Propositions 2.6 and 2.7). Moreover, we show that the group of all graded automorphisms of $L_K(R_n)$ contains some special subgroups, for example, the general linear group of degree n over K (Corollaries 2.8 and 2.9). We also provide a complete description of all (graded) automorphisms of $L_K(R_n)$ via the group of units $U(L_K(R_n))$ of $L_K(R_n)$ (Corollary 2.11).

As the first application of these constructions for graded automorphisms, we study twists of Leavitt path algebras. One of the most frequently used tools to construct new examples of algebras and coalgebras is twisting the multiplicative structure of original algebra. Classic examples of algebras constructed by twisting multiplicative structure include skew polynomial rings and skew group rings. The twist of Leavitt path algebras that we study here is a twist in the sense of Artin, Tate and Van den Bergh. A notion of twist of a graded algebra A was introduced by Artin, Tate, and Van den Bergh in [10] as a deformation of the original graded product of A with the help of a graded automorphism of A. Let σ be an automorphism of the graded algebra $A = \oplus A_n$. Define a new multiplication $\star$ on the underlying graded K-module $\oplus A_n$ by $a \star b = a\sigma^n(b)$ where a and b are homogeneous elements in $A = \oplus A_n$ and $deg(a) = n$. The new graded algebra with the same underlying graded K-module $\oplus A_n$ and the new graded product $\star$ is called the twist of A and is denoted as A^σ.

This notion of twist of a graded algebra was later generalized by Zhang in [28], where he introduced the concept of twisting of graded product with the help of a twisting system. Let $\tau = \{\tau_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ be a set of graded K-linear automorphisms of $A = \oplus A_n$. Then τ is called a twisting system if $\tau_n(y\tau_m(z)) = \tau_n(y)\tau_{n+m}(z)$ for all $n, m, l \in \mathbb{Z}$ and $y \in A_m$, $z \in A_l$. For example, if σ is a graded algebra automorphism of A, then $\tau = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ is a twisting system. Thus, the twist of a graded algebra in the sense of Artin-Tate-Van den Bergh can be viewed as a special case of the twist introduced by Zhang. Such a twist of a graded algebra is now known as Zhang twist.

Zhang twist of a graded algebra has played a vital role in the interaction of noncommutative algebra with noncommutative projective geometry. The fundamental idea behind the noncommutative projective scheme defined by Artin and Zhang [11] is to give up on the actual geometric space and instead generalize only the category of coherent sheaves to the noncommutative case. In the case of commutative algebras, Serre's theorem established that studying the category of quasi-coherent sheaves on a projective variety is essentially the same as studying the quotient category of graded modules. The definition of noncommutative projective space is motivated by Serre's result.

Let A be a right noetherian graded algebra. We denote by $\mathrm{Gr}-A$ the category of graded right A-modules with morphisms being graded homomorphisms of degree zero. An element x of a graded right A-module M is called torsion if $xA_{\geq s} = 0$ for some

s. The torsion elements in M form a graded A-submodule which is called the torsion submodule of M. The torsion modules form a subcategory for which we use the notation $\mathrm{Tors}(A) :=$ the full subcategory of $\mathrm{Gr}-A$ of torsion modules. We denote $\mathrm{QGr}-A :=$ the quotient category $\mathrm{Gr}-A/\mathrm{Tors}(A)$. We will use the lower case notations $\mathrm{gr}-A$, $\mathrm{qgr}-A$ to indicate that we are working with finitely generated A-modules. Since $\mathrm{qgr}-A$ is a quotient category of $\mathrm{gr}-A$, it inherits two structures: the object $\mathcal{A}$ which is the image in $\mathrm{qgr}-A$ of A_A, and the shift operator s on $\mathrm{qgr}-A$, which is the automorphism of the category $\mathrm{qgr}-A$ determined by the shift on $\mathrm{gr}-A$. The triple $(\mathrm{qgr}-A, \mathcal{A}, s)$ is called the noncommutative projective scheme associated to A, denoted as $\mathrm{proj}-A$. We refer the reader to [11] for more details on noncommutative projective scheme.

One of the main features of the study of Zhang twist of a graded algebra is that if an algebra B is isomorphic to the Zhang twist of an algebra A, then their graded module categories $\mathrm{Gr}-A$ and $\mathrm{Gr}-B$ are equivalent. If the algebra A is noetherian, then this equivalence restricts to the subcategories of finitely generated modules to give an equivalence $\mathrm{gr}-A \cong \mathrm{gr}-B$. Moreover, the subcategories of modules which are torsion (that is, finite-dimensional over K) also correspond, and so we have an equivalence between the quotient categories $\mathrm{qgr}-A$ and $\mathrm{qgr}-B$. As a consequence it follows that their noncommutative projective schemes $\mathrm{proj}-A$ and $\mathrm{proj}-B$ are equivalent. Since Zhang twist of a commutative graded algebra by a non-identity automorphism yields a noncommutative graded algebra, this gives us a tool to construct examples of noncommutative graded algebras whose noncommutative projective schemes are isomorphic to commutative projective schemes. It is known that many fundamental properties like Gelfand-Kirillov dimension and Artin-Schelter regularity are preserved under Zhang twist whereas some ring-theoretic properties such as being a prime ring or being a PI ring are not preserved under Zhang twist.

In this paper we initiate the study of Zhang twist of Leavitt path algebras with a larger goal to develop the geometric theory of Leavitt path algebras. In Section 3, we twist the multiplicative structure of Leavitt path algebras with the help of graded automorphisms constructed in Section 2. In a rather surprising result we show that the Leavitt path algebra $L_K(E)$ of an arbitrary graph E may be embedded into the Zhang twist $L_K(E)^{\varphi_P}$ by any graded automorphism φ_P introduced in Corollary 2.3 (Proposition 3.2), and the embedding is not an isomorphism in general (Examples 3.11 (3)). Geometrically, this means that any noetherian Leavitt path algebra always embeds in another algebra with the same projective scheme. We also characterize Leavitt path algebras $L_K(R_n)$ of the rose graph R_n with n petals that are rigid to Zhang twist in the sense that $L_K(R_n)$ turns out to be isomorphic to its Zhang twist with respect to graded automorphisms constructed in Section 2 (Theorem 3.5 and Corollary 3.10).

Automorphism of an algebra helps in constructing new twisted irreducible representations. It is not difficult to see that if M is an irreducible representation of an algebra A and σ is an automorphism of A then M^σ is also an irreducible representation where M^σ is the same vector space as M with the module operation given as $a.m = \sigma(a)m$ for any $a \in A$. This new irreducible representation M^σ of A is called a twisted representation.

In another application to our constructions of automorphisms, we study the irreducible representations of the Leavitt path algebra of rose graph R_n with n petals in the last section of this paper.

In a seminal work [14], Chen constructed irreducible representations of Leavitt path algebras using infinite paths. For an infinite path p in E, Chen constructed a simple module $V_{[p]}$ for the Leavitt path algebra $L_K(E)$ of an arbitrary graph E where $[p]$ is the equivalence class of infinite paths tail-equivalent to p. Later, in [9], Ara and Rangaswamy characterized Leavitt path algebras which admit only finitely presented irreducible representations. In [7], Ánh and the first author constructed a new class of simple $L_K(E)$-modules, S_c^f associated to pairs (f, c) consisting of simple closed paths c together with irreducible polynomials $f \in K[x]$. We should note that Ara and Rangaswamy [9] classified all simple modules over the Leavitt path algebra of a finite graph in which every vertex is in at most one cycle. Their result induces our investigation of simple modules for Leavitt path algebras of graphs having a vertex that is in at least two cycles. The most important case of this class is the Leavitt path algebra of a rose graph with $n \geq 2$ petals.

For Leavitt path algebra $L_K(R_n)$ of the rose graph R_n with n petals, in [21] Kuroda and the first author constructed additional classes of simple $L_K(R_n)$-modules by studying the twisted modules of the simple modules S_c^f under Anick type automorphisms of $L_K(R_n)$ mentioned in Corollary 2.9. In Section 4, we define a new simple left $L_K(R_n)$-module $V_{[\alpha]}^P := (V_{[\alpha]})^{\varphi_P^{-1}}$ which is a twist of the simple $L_K(R_n)$-module $V_{[\alpha]}$ by the graded automorphism φ_P^{-1} mentioned in Proposition 2.7, where α is an infinite path in R_n and $P \in GL_n(K)$, and classify completely these simple modules (Theorems 4.2 and 4.5). Also, in Theorem 4.2, we show that $V_{[\alpha]}^P \cong L_K(R_n)/\bigoplus_{m=0}^{\infty} L_K(R_n)(\varphi_P(\epsilon_m) - \varphi_P(\epsilon_{m+1}))$ for all irrational path $\alpha = e_{i_1} \cdots e_{i_m} \cdots$, where $\epsilon_0 := v$, $\epsilon_m = e_{i_1} \cdots e_{i_m} e_{i_m}^* \cdots e_{i_1}^*$ for all $m \geq 1$, and the graded automorphism φ_P is defined in Proposition 2.7. Consequently, $V_{[\alpha]}^P$ is not finitely presented. Moreover, we show that there are infinitely many isomorphic classes of these simple modules (Corollaries 4.3 and 4.4). For a simple closed path c in R_n, we show in Theorem 4.5 that the twisted module $V_{[c^\infty]}^P$ is finitely presented for all $P \in GL_n(K)$ and $V_{[c^\infty]}^P \cong L_K(R_n)/L_K(R_n)(v - \varphi_P(c))$. Furthermore, we obtain that there are infinitely many isomorphic classes of these simple modules (Corollary 4.6). We conclude this paper by giving a list of some classes of pairwise non-isomorphic simple modules over $L_K(R_n)$ in Theorem 4.7.

Throughout the paper, all *algebras* are associative over a field, not necessary with identity but having local units. *Modules* are considered with respect to algebras, that means, they are also at the same time vector spaces over a field. Modules are *unitary* in the sense that each of their elements is fixed by an appropriate idempotent. *Algebra homomorphisms* are defined in the standard manner. Homomorphisms between algebras with identity are algebra homomorphisms having the identity-preserving property.

2. On graded automorphisms of Leavitt path algebras

Cuntz [17] showed that there is a one-to-one correspondence between unitary elements of the Cuntz algebra $\mathcal{O}_n$ and endomorphisms of $\mathcal{O}_n$ via $u \longmapsto \lambda_u$ where $\lambda_u(S_i) = uS_i$, and provided criteria for these endomorphisms to be automorphisms. In [16], motivated by Cuntz's results, Conti, Hong and Szymański introduced a class of endomorphisms fixing all vertex projections λ_u of $C^*(E)$ corresponding to unitaries in the multiplier algebra $M(C^*(E))$ which commute with all vertex projections. Then, they studied localized automorphisms of the graph algebra $C^*(E)$ of a finite graph without sink (i.e., automorphisms λ_u corresponding to unitaries u from the algebraic part of the core AF-subalgebra which commute with the vertex projections), and gave combinatorial criteria for localized endomorphisms corresponding to permutation unitaries to be automorphisms.

Szymański et al. [12,19] studied permutative automorphisms and polynomial endomorphisms of graph C^*-algebras $C^*(E)$ and Leavitt path algebras $L_K(E)$, where E is a finite graph without sinks or sources in which every cycle has an exit, and K is an integral domain of characteristic 0. Kuroda and the first author [21, Section 2] gave a method to construct endomorphisms and automorphisms fixing all vertices of Leavitt path algebras $L_K(E)$ of arbitrary graphs E over an arbitrary field K, by using special pairs (P, Q) consisting of matrices in $M_n(L_K(E))$ which commute with all vertices in E, where n is an arbitrary positive integer.

The first aim of this section is to completely describe endomorphisms introduced in [21], and give criteria for these endomorphisms to be automorphisms. Before giving these constructions for automorphisms of Leavitt path algebras, we begin this section by recalling some useful notions of graph theory.

A (*directed*) *graph* is a quadruplet $E = (E^0, E^1, s, r)$ which consists of two disjoint sets E^0 and E^1, called the set of *vertices* and the set of *edges* respectively, together with two maps $s, r : E^1 \longrightarrow E^0$. The vertices $s(e)$ and $r(e)$ are referred to as the *source* and the *range* of the edge e, respectively. A vertex v for which $s^{-1}(v)$ is empty is called a *sink*; a vertex v is *regular* if $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$; a vertex v is an *infinite emitter* if $|s^{-1}(v)| = \infty$; and a vertex is *singular* if it is either a sink or an infinite emitter.

A *finite path of length* n in a graph E is a sequence $p = e_1 \cdots e_n$ of edges $e_1, \ldots, e_n$ such that $r(e_i) = s(e_{i+1})$ for $i = 1, \ldots, n-1$. In this case, we say that the path p starts at the vertex $s(p) := s(e_1)$ and ends at the vertex $r(p) := r(e_n)$, we write $|p| = n$ for the length of p. We consider the elements of E^0 to be paths of length 0. We denote by E^* the set of all finite paths in E. An edge f is an *exit* for a path $p = e_1 \cdots e_n$ if $s(f) = s(e_i)$ but $f \neq e_i$ for some $1 \leq i \leq n$. A finite path p of positive length is called a *closed path based at* v if $v = s(p) = r(p)$. A *cycle* is a closed path $p = e_1 \cdots e_n$, and for which the vertices $s(e_1), s(e_2), \ldots, s(e_n)$ are distinct. A closed path c in E is called *simple* if $c \neq d^n$ for any closed path d and integer $n \geq 2$. We denoted by $SCP(E)$ the set of all simple closed paths in E.

Definition 2.1. For an arbitrary graph $E = (E^0, E^1, s, r)$ and any field K, the *Leavitt path algebra $L_K(E)$ of the graph E with coefficients in K* is the K-algebra generated by the union of the set E^0 and two disjoint copies of E^1, say E^1 and $\{e^* \mid e \in E^1\}$, satisfying the following relations for all $v, w \in E^0$ and $e, f \in E^1$:

(1) $vw = \delta_{v,w} w$;
(2) $s(e)e = e = er(e)$ and $e^* s(e) = e^* = r(e)e^*$;
(3) $e^* f = \delta_{e,f} r(e)$;
(4) $v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*$ for any regular vertex v;

where δ is the Kronecker delta.

If E^0 is finite, then $L_K(E)$ is a unital ring having identity $1 = \sum_{v \in E^0} v$ (see, e.g. [3, Lemma 1.6]). It is easy to see that the mapping given by $v \longmapsto v$ for all $v \in E^0$, and $e \longmapsto e^*$, $e^* \longmapsto e$ for all $e \in E^1$, produces an involution on the algebra $L_K(E)$, and for any path $p = e_1 e_2 \cdots e_n$, the element $e_n^* \cdots e_2^* e_1^*$ of $L_K(E)$ is denoted by p^*. It can be shown ([3, Lemma 1.7]) that $L_K(E)$ is spanned as a K-vector space by $\{pq^* \mid p, q \in E^*, r(p) = r(q)\}$. Indeed, $L_K(E)$ is a $\mathbb{Z}$-graded K-algebra: $L_K(E) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} L_K(E)_n$, where for each $n \in \mathbb{Z}$, the degree n component $L_K(E)_n$ is the set $\text{span}_K\{pq^* \mid p, q \in E^*, r(p) = r(q), |p| - |q| = n\}$.

The Leavitt path algebra $L_K(E)$ of a graph E over field K has the following universal property: if $\mathcal{A}$ is a K-algebra generated by a family of elements $\{a_v, b_e, c_{e^*} \mid v \in E^0, e \in E^1\}$ satisfying the relations analogous to (1) - (4) in Definition 2.1, then there exists a unique K-algebra homomorphism $\varphi : L_K(E) \longrightarrow \mathcal{A}$ given by $\varphi(v) = a_v$, $\varphi(e) = b_e$ and $\varphi(e^*) = c_{e^*}$. We will refer to this property as the Universal Property of $L_K(E)$.

As usual, for any ring R, for any endomorphism $f \in End(R)$ and for any $A \in M_n(R)$, we denote by $f(A)$ the matrix $(f(a_{i,j})) \in M_n(R)$, and denote by A_m the matrix $Af(A) \cdots f^{m-1}(A) \in M_n(R)$ for every $m \geq 1$, where $f^0 := id_R$. For any $\mathbb{Z}$-graded algebra A over a field K, we denote by $End^{gr}(A)$ the K-algebra of all graded endomorphisms of A, and denote by $Aut^{gr}(A)$ the group of all graded automorphisms of A.

We are now in a position to establish the main result of this section providing a method to construct endomorphisms and automorphisms fixing all vertices of Leavitt path algebras of arbitrary graphs over an arbitrary field in terms of general linear groups over corners of these algebras.

Theorem 2.2. *Let K be a field, n a positive integer, E a graph, and v and w vertices in E (they may be the same). Let $e_1, e_2, \ldots, e_n$ be distinct edges in E with $s(e_i) = v$ and $r(e_i) = w$ for all $1 \leq i \leq n$. Let P be an element of $GL_n(wL_K(E)w)$ with $P = (p_{i,j})$ and $P^{-1} = (p'_{i,j})$. Then the following statements hold:*

(1) *There exists a unique injective homomorphism $\varphi_P : L_K(E) \longrightarrow L_K(E)$ of K-algebras satisfying*

$$\varphi_P(u) = u, \quad \varphi_P(e) = e \quad \textit{and} \quad \varphi_P(e^*) = e^*$$

for all $u \in E^0$ *and* $e \in E^1 \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}$, *and*

$$\varphi_P(e_i) = \sum_{k=1}^{n} e_k p_{k,i} \quad \textit{and} \quad \varphi_P(e_i^*) = \sum_{k=1}^{n} p'_{i,k} e_k^*$$

for all $1 \le i \le n$.

(2) *For every* $Q \in GL_n(wL_K(E)w)$, $\varphi_P = \varphi_Q$ *if and only if* $P = Q$. *Consequently,* $\varphi_P = id_{L_K(E)}$ *if and only if* P *is the identity matrix of* $M_n(wL_K(E)w)$.

(3) $\varphi_P\varphi_Q = \varphi_{P\varphi_P(Q)}$ *for all* $Q \in GL_n(wL_K(E)w)$. *In particular,* $\varphi_P^m = \varphi_{P_m}$ *for all positive integer* m.

(4) φ_P *is an isomorphism if and only if* $P^{-1} = \varphi_P(Q)$ *for some* $Q \in GL_n(wL_K(E)w)$. *In this case,* $\varphi_{P_m}^{-1} = \varphi_{Q_m}$, $P_m = \varphi_{P_m}(Q_m^{-1})$ *and* $P_m^{-1} = \varphi_{P_m}(Q_m)$ *for all* $m \ge 1$. *In particular, if* $\varphi_P(P) = P$ *or* $\varphi_P(P^{-1}) = P^{-1}$, *then* φ_P *is an isomorphism and* $\varphi_P^m = \varphi_{P^m}$ *for all integer* m.

If, in addition, $|s^{-1}(v)| = n$, *then we have the following:*

(5) *For every* K*-algebra homomorphism* $\lambda : L_K(E) \longrightarrow L_K(E)$ *with* $\lambda(u) = u$, $\lambda(e) = e$ *and* $\lambda(e^*) = e^*$ *for all* $u \in E^0$ *and* $e \in E^1 \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}$, *there exists a unique matrix* $P = (p_{i,j}) \in GL_n(wL_K(E)w)$ *such that* $p_{i,j} = e_i^*\lambda(e_j)$ *for all* $1 \le i, j \le n$ *and* $\lambda = \varphi_P$.

(6) *We denote by* $End_{v,w}(L_K(E))$ *the set of all endomorphisms* λ *of* $L_K(E)$ *with* $\lambda(u) = u$, $\lambda(e) = e$ *and* $\lambda(e^*) = e^*$ *for all* $u \in E^0$ *and* $e \in E^1 \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}$. *Then, the map* $\Phi : (GL_n(wL_K(E)w), \star) \longrightarrow End_{v,w}(L_K(E))$, $P \longmapsto \varphi_P$, *is a monoid isomorphism, where the multiplication law "*$\star$*" is defined by*

$$P \star Q = P\varphi_P(Q)$$

for all $P, Q \in GL_n(wL_K(E)w)$.

Proof. (1) The existence of a unique homomorphism $\varphi_P : L_K(E) \longrightarrow L_K(E)$ of K-algebras with the desired property follows from [21, Theorem 2.2 (i)]. For the sake of completeness, we give a sketch of the proof. We define the elements $\{Q_u : u \in E^0\}$ and $\{T_e, T_{e^*} : e \in E^1\}$ by setting $Q_u = u$,

$$T_e = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} e_k p_{k,i} & \text{if } e = e_i \text{ for some } 1 \le i \le n \\ e & \text{otherwise.} \end{cases}$$

and

$$T_{e^*} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} p'_{i,k} e_k^* & \text{if } e = e_i \text{ for some } 1 \le i \le n \\ e^* & \text{otherwise.} \end{cases}$$

and show that these elements form a generating set for $L_K(E)$ with the same relations as defining relations for Leavitt path algebra (see [21, Theorem 2.2 (i)] for details).

Therefore, by the Universal Property of Leavitt path algebras, there exists a unique homomorphism $\varphi_P : L_K(E) \longrightarrow L_K(E)$ of K-algebras satisfying $\varphi_P(u) = Q_u$, $\varphi_P(e) = T_e$, $\varphi_P(e^*) = T_{e^*}$ for all $u \in E^0$ and $e \in E^1$. Consequently, we have $\varphi_P(u) = u, \varphi_P(e) = e$ and $\varphi_P(e^*) = e^*$ for all $u \in E^0$ and $e \in E^1 \setminus \{e_1, \dots, e_n\}$, and

$$\varphi_P(e_i) = \sum_{k=1}^{n} e_k p_{k,i} \quad \text{and} \quad \varphi_P(e_i^*) = \sum_{k=1}^{n} p'_{i,k} e_k^*$$

for all $1 \le i \le n$.

We next prove that φ_P is injective by following the proof of [21, Theorem 2.2 (ii)]. To the contrary, suppose there exists a nonzero element $x \in \ker(\varphi_P)$. Then, by the Reduction Theorem (see, e.g., [2, Theorem 2.2.11]), there exist $a, b \in L_K(E)$ such that either $axb = u \neq 0$ for some $u \in E^0$, or $axb = p(c) \neq 0$, where c is a cycle in E without exits and $p(x)$ is a nonzero polynomial in $K[x, x^{-1}]$.

In the first case, since $axb \in \ker(\varphi_P)$, this would imply that $u = \varphi_P(u) = 0$ in $L_K(E)$; but each vertex is well-known to be a nonzero element inside the Leavitt path algebra, which is a contradiction.

So we are in the second case: there exists a cycle c in E without exits such that $axb = \sum_{i=-l}^{m} k_i c^i \neq 0$, where $k_i \in K$, l and m are nonnegative integers, and we interpret c^i as $(c^*)^{-i}$ for negative i, and we interpret c^0 as $u := s(c)$. Write $c = g_1 g_2 \cdots g_t$, where $g_i \in E^1$ and t is a positive integer. If $g_i \in E^1 \setminus \{e_1, \dots, e_n\}$ for all $1 \le i \le t$, then $\varphi_P(c) = c$ and $\varphi_P(c^*) = c^*$, so $0 \neq \sum_{i=-l}^{m} k_i c^i = \sum_{i=-l}^{m} k_i \varphi_P(c^i) = \varphi_P(axb) = 0$ in $L_K(E)$, a contradiction. Consider the case that there exists a $1 \le k \le t$ such that $g_k = e_i$ for some i. Then, since c is a cycle without exits, we must have $n = 1$ and k is a unique element such that $g_k = e_1$. Let $\alpha := g_{k+1} \cdots g_t g_1 \cdots g_{k-1} e_1$. We have that α is a cycle in E without exits and $s(\alpha) = w$. Since $n = 1$, $P = p_{1,1}$ and $P^{-1} = p'_{1,1}$ are two elements of $wL_K(E)w$ with $p_{1,1}p'_{1,1} = w = p'_{1,1}p_{1,1}$, so $p_{1,1}$ is a unit of $wL_K(E)w$ with $p_{1,1}^{-1} = p'_{1,1}$. By [2, Lemma 2.2.7], we have

$$wL_K(E)w = \{\sum_{i=l}^{h} k_i \alpha^i \mid k_i \in K, l \le h, h, l \in \mathbb{Z}\} \cong K[x, x^{-1}]$$

via an isomorphism that sends v to 1, α to x and α^* to x^{-1}, and so $p_{1,1} = a\alpha^s$ and $p'_{1,1} = a^{-1}\alpha^{-s}$ for some $a \in K \setminus \{0\}$ and $s \in \mathbb{Z}$. If $s \ge 0$, then

$$\begin{aligned}\varphi_P(c) &= \varphi_P(g_1 \cdots g_{k-1} e_1 g_{k+1} \cdots g_t) = (g_1 \cdots g_{k-1}) e_1 p_{1,1} (g_{k+1} \cdots g_t) = \\ &= (g_1 \cdots g_{k-1} e_1) a\alpha^s (g_{k+1} \cdots g_t) = a(g_1 \cdots g_{k-1} e_1)\alpha^s (g_{k+1} \cdots g_t) = ac^{s+1},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\varphi_P(c^*) &= \varphi_P(g_t^* \cdots g_{k+1}^* e_1^* g_{k-1}^* \cdots g_1^*) = (g_t^* \cdots g_{k+1}^*) p'_{1,1} e_1^* (g_{k-1}^* \cdots g_1^*) = \\ &= a^{-1}(g_t^* \cdots g_{k+1}^*)\alpha^{-s}(e_1^* g_{k-1}^* \cdots g_1^*) = (g_t^* \cdots g_{k+1}^*)(\alpha^*)^s (e_1^* g_{k-1}^* \cdots g_1^*) =\end{aligned}$$

$$= a^{-1}(c^*)^{s+1}.$$

If $s < 0$, then

$$\begin{aligned}\varphi_P(c) &= \varphi_P(g_1 \cdots g_{k-1} e_1 g_{k+1} \cdots g_t) = (g_1 \cdots g_{k-1}) e_1 p_{1,1} (g_{k+1} \cdots g_t) = \\ &= (g_1 \cdots g_{k-1} e_1) a\alpha^s (g_{k+1} \cdots g_t) = a(g_1 \cdots g_{k-1} e_1)(\alpha^*)^{-s}(g_{k+1} \cdots g_t) = \\ &= a(c^*)^{-s-1} = a(c^*)^{-s-1} = ac^{s+1},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\varphi_P(c^*) &= \varphi_P(g_t^* \cdots g_{k+1}^* e_1^* g_{k-1}^* \cdots g_1^*) = (g_t^* \cdots g_{k+1}^*) p'_{1,1} e_1^* (g_{k-1}^* \cdots g_1^*) = \\ &= a^{-1}(g_t^* \cdots g_{k+1}^*)\alpha^{-s}(e_1^* g_{k-1}^* \cdots g_1^*) = (g_t^* \cdots g_{k+1}^*)(\alpha^*)^{-s}(e_1^* g_{k-1}^* \cdots g_1^*) = \\ &= a^{-1}(c^*)^{-s-1} = a^{-1}c^{s+1}.\end{aligned}$$

Therefore, we obtain that $\varphi_P(c^l) = a^l c^{l(s+1)}$ for all $l \in \mathbb{Z}$, and

$$0 \neq \sum_{i=-l}^{m} k_i a^i c^{i(s+1)} = \sum_{i=-l}^{m} k_i \varphi_P(c^i) = \varphi_P(axb) = 0$$

in $L_K(E)$, which is a contradiction.

In any case, we arrive at a contradiction, and so we infer that φ_P is injective, as desired.

(2) Assume that $Q = (q_{i,j}) \in GL_n(wL_K(E)w)$ and $\varphi_P = \varphi_Q$. We then have $\sum_{k=1}^n e_k p_{k,j} = \varphi_P(e_j) = \varphi_Q(e_j) = \sum_{k=1}^n e_k q_{k,j}$ for all $1 \leq j \leq n$, and so

$$p_{i,j} = wp_{i,j} = e_i^*(\sum_{k=1}^n e_k p_{k,j}) = e_i^*(\sum_{k=1}^n e_k q_{k,j}) = wq_{i,j} = q_{i,j}$$

for all $1 \leq i, j \leq n$. This implies that $P = Q$. The converse is obvious.

(3) Suppose Q is an element of $GL_n(wL_K(E)w)$ with $Q = (q_{i,j})$ and $Q^{-1} = (q'_{i,j})$. We then have $P\varphi_P(Q) \in GL_n(wL_K(E)w)$ and $(P\varphi_P(Q))^{-1} = \varphi_P(Q^{-1})P^{-1}$.

We claim that $\varphi_P\varphi_Q = \varphi_{P\varphi_P(Q)}$. It suffices to check that

$$\varphi_P\varphi_Q(e_i) = \varphi_{P\varphi_P(Q)}(e_i) \text{ and } \varphi_P\varphi_Q(e_i^*) = \varphi_{P\varphi_P(Q)}(e_i^*) \text{ for all } 1 \leq i \leq n.$$

For each $1 \leq i \leq n$, by definition of φ_Q, $\varphi_Q(e_i) = \sum_{k=1}^n e_k q_{k,i}$ and $\varphi_Q(e_i^*) = \sum_{k=1}^n q'_{i,k} e_k^*$, so

$$\begin{aligned}\varphi_P\varphi_Q(e_i) &= \varphi_P(\sum_{k=1}^n e_k q_{k,i}) = \sum_{k=1}^n \varphi_P(e_k)\varphi_P(q_{k,i}) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n e_l p_{l,k} \varphi_P(q_{k,i}) \\ &= \sum_{l=1}^n e_l (\sum_{k=1}^n p_{l,k}\varphi_P(q_{k,i})) = \varphi_{P\varphi_P(Q)}(e_i)\end{aligned}$$

and

$$\varphi_P\varphi_Q(e_i^*) = \varphi_P(\sum_{k=1}^n q'_{i,k}e_k^*) = \sum_{k=1}^n \varphi_P(q'_{i,k})\varphi_P(e_k^*) = \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \varphi_P(q'_{i,k})p'_{k,l}e_l^*$$
$$= \sum_{l=1}^n(\sum_{k=1}^n \varphi_P(q'_{i,k})p'_{k,l})e_l^* = \varphi_{P\varphi_P(Q)}(e_i^*),$$

proving the claim.

We show that $\varphi_P^m = \varphi_{P_m}$ for all positive integer m. First, note that $P_m \in GL_n(wL_K(E)w)$ with $P_m^{-1} = \varphi_P^{m-1}\left(P^{-1}\right)\cdots\varphi_P\left(P^{-1}\right)P^{-1}$. We use induction on m to establish the fact $\varphi_P^m = \varphi_{P_m}$ for all $m \geq 1$. If $m = 1$, then the fact is obvious. Now we proceed inductively. For $m > 1$, by the induction hypothesis, $\varphi_P^{m-1} = \varphi_{P_{m-1}}$, and so

$$\varphi_P^m = \varphi_P\varphi_P^{m-1} = \varphi_P\varphi_{P_{m-1}} = \varphi_{P\varphi_P(P_{m-1})} = \varphi_{P_m},$$

as desired.

(4) ($\Rightarrow$) Assume that φ_P is an isomorphism, that means, there exists a matrix $Q \in GL_n(wL_K(E)w)$ such that $\varphi_P\varphi_Q = id_{L_K(E)}$. Then, by item (3), $\varphi_{P\varphi_P(Q)} = id_{L_K(E)}$, and so $P\varphi_P(Q)$ is the identity of $M_n(wL_K(E)w)$ by item (2). This shows that $P^{-1} = \varphi_P(Q)$.

($\Leftarrow$) Assume that $P^{-1} = \varphi_P(Q)$ for some $Q \in GL_n(wL_K(E)w)$. Then, by item (3), $\varphi_P\varphi_Q = \varphi_{P\varphi_P(Q)} = \varphi_{PP^{-1}} = id_{L_K(E)}$, and so φ_P is surjective. By item (1), φ_P is always injective, and hence φ_P is an isomorphism with $\varphi_P^{-1} = \varphi_Q$. This implies that $id_{L_K(E)} = \varphi_P^m\varphi_Q^m = \varphi_{P_m}\varphi_{Q_m} = \varphi_{P_m\varphi_{P_m}(Q_m)}$, so $\varphi_{P_m}^{-1} = \varphi_{Q_m}$ and $P_m\varphi_{P_m}(Q_m) = wI_n$ for all $m \geq 1$. Consequently, $P_m = \varphi_{P_m}(Q_m^{-1})$ and $P_m^{-1} = \varphi_{P_m}(Q_m)$ for all $m \geq 1$.

In particular, suppose $\varphi_P(P) = P$. Since φ_P is a K-algebra homomorphism, $P\varphi_P(P^{-1}) = \varphi_P(P)\varphi_P(P^{-1}) = \varphi_P(PP^{-1}) = \varphi_P(wI_n) = wI_n$, so $P^{-1} = \varphi_P(P^{-1})$. Similarly, we obtain that if $P^{-1} = \varphi_P(P^{-1})$, then $P = \varphi_P(P)$. Hence, in any case, we have that $P = \varphi_P(P)$ and $P^{-1} = \varphi_P(P^{-1})$. We then have $P^m\varphi_P(P^m) = wI_n$ for all $m \in \mathbb{Z}$, so φ_P is an isomorphism and $\varphi_P^m = \varphi_{P^m}$ for all $m \in \mathbb{Z}$.

(5) Assume that $|s^{-1}(v)| = n$ and let $\lambda : L_K(E) \to L_K(E)$ be a K-algebra homomorphism with $\lambda(u) = u, \lambda(e) = e$ and $\lambda(e^*) = e^*$ for all $u \in E^0$ and $e \in E^1 \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}$. We then have

$$\lambda(e_i) = \lambda(e_iw) = \lambda(e_i)\lambda(w) = \lambda(e_i)w$$

and

$$\lambda(e_i^*) = \lambda(we_i^*) = \lambda(w)\lambda(e_i^*) = w\lambda(e_i^*)$$

for all $1 \leq i \leq n$, so $e_i^*\lambda(e_j)$ and $\lambda(e_i^*)e_j \in wL_K(E)w$ for all $1 \leq i \leq n$.

Let $P = (p_{i,j})$ and $P' = (p'_{i,j}) \in M_n(wL_K(E)w)$ with $p_{i,j} = e_i^*\lambda(e_j)$ and $p'_{i,j} = \lambda(e_i^*)e_j$ for all $1 \leq i, j \leq n$. We claim that $P \in GL_n(wL_K(E)w)$ with $P^{-1} = P'$. Indeed, since $|s^{-1}(v)| = n$, we must have $s^{-1}(v) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ and $v = \sum_{i=1}^n e_ie_i^*$, and so

$$\sum_{k=1}^{n} p_{i,k}p'_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} e_i^*\lambda(e_k)\lambda(e_k^*)e_j = e_i^*\lambda(\sum_{k=1}^{n} e_k e_k^*)e_j = e_i^*\lambda(v)e_j = \delta_{i,j}w$$

and

$$\sum_{k=1}^{n} p'_{i,k}p_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda(e_i^*)e_k e_k^*\lambda(e_j) = \lambda(e_i^*)(\sum_{k=1}^{n} e_k e_k^*)\lambda(e_j) = \lambda(e_i^* e_j) = \delta_{i,j}w$$

for all $1 \le i, j \le n$, where δ is the Kronecker delta. This implies that $PP' = wI_n = P'P$, showing the claim.

We show that $\lambda = \varphi_P$. It suffices to check that $\lambda(e_i) = \varphi_P(e_i)$ and $\lambda(e_i^*) = \varphi_P(e_i^*)$ for all $1 \le i \le n$. For each $1 \le i \le n$, by definition of φ_P, we have

$$\varphi(e_i) = \sum_{k=1}^{n} e_k e_k^*\lambda(e_i) = (\sum_{k=1}^{n} e_k e_k^*)\lambda(e_i) = v\lambda(e_i) = \lambda(ve_i) = \lambda(e_i)$$

and

$$\varphi(e_i^*) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(e_i^*)e_k e_k^* = \lambda(e_i^*)(\sum_{k=1}^{n} e_k e_k^*) = \lambda(e_i)v = \lambda(e_i^* v) = \lambda(e_i^*),$$

as desired.

(6) We always have that $(GL_n(wL_K(E)w), \star)$ is a monoid with identity element wI_n. Then, the statement immediately follows from items (1), (2), (3) and (5), thus finishing the proof. $\square$

Consequently, we obtain a method to construct graded endomorphisms and graded automorphisms of Leavitt path algebras of arbitrary graphs over an arbitrary field in terms of general linear groups over corners of these algebras.

Corollary 2.3. *Let K be a field, n a positive integer, E a graph, and v and w vertices in E (they may be the same). Let $e_1, e_2, \ldots, e_n$ be distinct edges in E with $s(e_i) = v$ and $r(e_i) = w$ for all $1 \le i \le n$. Let P be an element of $GL_n(wL_K(E)_0w)$ with $P = (p_{i,j})$ and $P^{-1} = (p'_{i,j})$. Then the following statements hold:*

(1) There exists a unique graded homomorphism $\varphi_P : L_K(E) \longrightarrow L_K(E)$ of K-algebras satisfying

$$\varphi_P(u) = u, \quad \varphi_P(e) = e \quad \textit{and} \quad \varphi_P(e^*) = e^*$$

for all $u \in E^0$ and $e \in E^1 \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}$, and

$$\varphi_P(e_i) = \sum_{k=1}^{n} e_k p_{k,i} \quad \textit{and} \quad \varphi_P(e_i^*) = \sum_{k=1}^{n} p'_{i,k} e_k^*$$

for all $1 \leq i \leq n$.

(2) φ_P *is a graded isomorphism if and only if* $P^{-1} = \varphi_P(Q)$ *for some* $Q \in GL_n(wL_K(E)_0w)$. *In this case,* $\varphi_{P_m}^{-1} = \varphi_{Q_m}$, $P_m = \varphi_{P_m}(Q_m^{-1})$ *and* $P_m^{-1} = \varphi_{P_m}(Q_m)$ *for all* $m \geq 1$. *In particular, if* $\varphi_P(P) = P$ *or* $\varphi_P(P^{-1}) = P^{-1}$, *then* φ_P *is a graded isomorphism and* $\varphi_P^m = \varphi_{P^m}$ *for all integer* m.

(3) *Assume that* $|s^{-1}(v)| = n$ *and we denote by* $End_{v,w}^{gr}(L_K(E))$ *the set of all graded endomorphisms* λ *of* $L_K(E)$ *with* $\lambda(u) = u,\ \lambda(e) = e$ *and* $\lambda(e^*) = e^*$ *for all* $u \in E^0$ *and* $e \in E^1 \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}$. *Then, the map* $\Phi : (GL_n(wL_K(E)_0w), \star) \longrightarrow End_{v,w}^{gr}(L_K(E))$, $P \longmapsto \varphi_P$, *is a monoid isomorphism, where the multiplication law "*$\star$*" is defined by*

$$P \star Q = P\varphi_P(Q)$$

for all $P, Q \in GL_n(wL_K(E)_0w)$.

Proof. (1) By Theorem 2.2, there exists a unique homomorphism $\varphi_P : L_K(E) \longrightarrow L_K(E)$ of K-algebras satisfying $\varphi_P(u) = u, \varphi_P(e) = e$ and $\varphi_P(e^*) = e^*$ for all $u \in E^0$ and $e \in E^1 \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}$, and

$$\varphi_P(e_i) = \sum_{k=1}^{n} e_k p_{k,i} \quad \text{and} \quad \varphi_P(e_i^*) = \sum_{k=1}^{n} p'_{i,k} e_k^*$$

for all $1 \leq i \leq n$. It is obvious that $\varphi_P(u)$ has degree 0 for all $u \in E^0$. Since $p_{i,j}$ and $p'_{i,j} \in L_K(E)_0$ for all $1 \leq i, j \leq n$, $\varphi_P(e)$ has degree 1 and $\varphi_P(e^*)$ has degree -1 for all $e \in E^1$. Therefore, φ_P is a $\mathbb{Z}$-graded homomorphism.

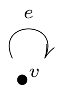
(2) It immediately follows from Theorem 2.2 (4).

(3) We note that for all $P, Q \in GL_n(wL_K(E)_0w)$, we obtain that $\varphi_P(Q) \in GL_n(wL_K(E)_0w)$ (by item (1)) and $P \star Q = P\varphi_P(Q) \in GL_n(wL_K(E)_0w)$, and so $GL_n(wL_K(E)_0w)$ is a submonoid of the monoid $(GL_n(wL_K(E)w), \star)$. Then, by Theorem 2.2 (6), the map $\Phi : (GL_n(wL_K(E)_0w), \star) \longrightarrow End_{v,w}^{gr}(L_K(E))$, $P \longmapsto \varphi_P$, is a monoid injection.

We claim that Φ is surjective. Indeed, let $\lambda \in End_{v,w}^{gr}(L_K(E))$. Then, by Theorem 2.2 (5), there exists a unique matrix $P = (p_{i,j}) \in GL_n(wL_K(E)w)$ such that $p_{i,j} = e_i^*\lambda(e_j)$ for all $1 \leq i, j \leq n$ and $\lambda = \varphi_P$. Since λ is a graded homomorphism, $\lambda(e_j)$ has degree 1 for all $1 \leq j \leq n$, and so $p_{i,j} = e_i^*\lambda(e_j) \in L_K(E)_0$ for all $1 \leq i, j \leq n$. This implies that $P \in GL_n(wL_K(E)_0w)$ and $\Phi(P) = \varphi_P = \lambda$, showing the claim. Therefore, we have that Φ is a monoid isomorphism, thus finishing the proof. □

For clarification, we illustrate Theorem 2.2 and Corollary 2.3 by presenting the following example, which describes completely all (graded) endomorphisms and (graded) automorphism of the Levitt path algebra of the rose graph R_1 with one petal.

Examples 2.4. Let K be a field and R_1 be the following graph.

$R_1 =$ 

Then $L_K(R_1) \cong K[x, x^{-1}]$ via an isomorphism that sends v to 1, e to x and e^* to x^{-1}. We then have that the group $U(L_K(R_1))$ of units of $L_K(R_1)$ is exactly the set $\{ae^m \mid a \in K \setminus \{0\}, m \in \mathbb{Z}\}$. For any $P = ae^m \in U(L_K(R_1))$, by Theorem 2.2 (1), we have the endomorphism φ_P defined by: $v \longmapsto v$, $e \longmapsto ae^{m+1}$ and $e^* \longmapsto a^{-1}e^{-m-1}$. By Theorem 2.2 (6), $End(L_K(R_1))$ is exactly the set $\{\varphi_P \mid P \in U(L_K(R_1))\}$. We note that $a^{-1}e^{-m} = P^{-1} = \varphi_P(be^l)$ if and only if $m = l = 0$ and $b = a^{-1}$, or $m = l = -2$ and $b = a$. By Theorem 2.2 (4), the automorphism group $Aut(L_K(R_1))$ of $L_K(R_1)$ is exactly the set $\{\varphi_a, \varphi_{be^{-2}} \mid a, b \in K \setminus \{0\}\}$.

We have that $L_K(R_1)_0 = K$, and so $End^{gr}(L_K(R_1))$ is exactly the set $\{\varphi_a \mid a \in K \setminus \{0\}\}$ (by Corollary 2.3 (1)), which is isomorphic to the group $K \setminus \{0\}$. We also have that $Aut^{gr}(L_K(R_1))$ is equal to $End^{gr}(L_K(R_1))$.

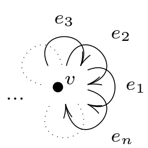
The next aim of this section is to completely describe (graded) endomorphisms and (graded) automorphisms of the Leavitt algebra of type $(1; n)$ in terms of the general linear group of degree n over this algebra.

Let K be a field and $n \geq 2$ any integer. Then the *Leavitt K-algebra of type* $(1; n)$, denoted by $L_K(1, n)$, is the K-algebra

$$K\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\rangle / \langle \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - 1, y_i x_j - \delta_{i,j}1 \mid 1 \leq i, j \leq n\rangle.$$

Notationally, it is often more convenient to view $L_K(1, n)$ as the free associative K-algebra on the $2n$ variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ subject to the relations $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1$ and $y_i x_j = \delta_{i,j}1$ $(1 \leq i, j \leq n)$; see [22] for more details.

For any integer $n \geq 2$, we let R_n denote the *rose graph with n petals* having one vertex and n loops:

$R_n =$ 

Then $L_K(R_n)$ is defined to be the K-algebra generated by v, $e_1, \dots, e_n$, $e_1^*, \dots, e_n^*$, satisfying the following relations

$$v^2 = v, ve_i = e_i = e_i v, ve_i^* = e_i^* = e_i^* v, e_i^* e_j = \delta_{i,j} v \text{ and } \sum_{i=1}^{n} e_i e_i^* = v$$

for all $1 \le i, j \le n$. In particular $v = 1_{L_K(R_n)}$.

Remark 2.5. By [2, Proposition 1.3.2] (see, also [21, Proposition 2.6]), $L_K(1, n) \cong L_K(R_n)$ as K-algebras, by the mapping: $1 \longmapsto v$, $x_i \longmapsto e_i$ and $y_i \longmapsto e_i^*$ for all $1 \le i \le n$. *With this fact in mind, for the remainder of this article we investigate (graded) automorphisms of the Leavitt algebra $L_K(1, n)$ by equivalently investigating (graded) automorphisms of the Leavitt path algebra $L_K(R_n)$.*

The following proposition describes completely endomorphisms and automorphisms of $L_K(R_n)$ in terms of the general linear group of degree n over $L_K(R_n)$.

Proposition 2.6. *Let $n \ge 2$ be a positive integer, K a field and R_n the rose graph with n petals. Let P be an element of $GL_n(L_K(R_n))$ with $P = (p_{i,j})$ and $P^{-1} = (p'_{i,j})$. Then the following statements hold:*

(1) There exists a unique injective homomorphism $\varphi_P : L_K(R_n) \longrightarrow L_K(R_n)$ of K-algebras satisfying $\varphi_P(v) = v$, $\varphi_P(e_i) = \sum_{k=1}^n e_k p_{k,i}$ and $\varphi_P(e_i^*) = \sum_{k=1}^n p'_{i,k} e_k^*$ for all $1 \le i \le n$.

(2) $\varphi_P \varphi_Q = \varphi_{P\varphi_P(Q)}$ for all $Q \in GL_n(L_K(R_n))$. In particular, $\varphi_P^m = \varphi_{P_m}$ for all positive integer m.

(3) $\varphi_P \in Aut(L_K(R_n))$ if and only if $P^{-1} = \varphi_P(Q)$ for some $Q \in GL_n(L_K(R_n))$. In this case, $\varphi_{P_m}^{-1} = \varphi_{Q_m}$, $P_m = \varphi_{P_m}(Q_m^{-1})$ and $P_m^{-1} = \varphi_{P_m}(Q_m)$ for all $m \ge 1$. In particular, if $\varphi_P(P) = P$ or $\varphi_P(P^{-1}) = P^{-1}$, then φ_P is an isomorphism and $\varphi_P^m = \varphi_{P^m}$ for all integer m.

(4) The map $\Phi : (GL_n(L_K(R_n)), \star) \longrightarrow End(L_K(R_n))$, $P \longmapsto \varphi_P$, is a monoid isomorphism, where the multiplication law "$\star$" is defined by

$$P \star Q = P\varphi_P(Q)$$

for all $P, Q \in GL_n(L_K(R_n))$.

Proof. It immediately follows from Theorem 2.2. □

The following proposition describes completely graded endomorphisms and graded automorphisms of $L_K(R_n)$ in terms of the general linear group of degree n over $L_K(R_n)_0$.

Proposition 2.7. *Let $n \ge 2$ be a positive integer, K a field and R_n the rose graph with n petals. Let P be an element of $GL_n(L_K(R_n)_0)$ with $P = (p_{i,j})$ and $P^{-1} = (p'_{i,j})$. Then the following statements hold:*

(1) There exists a unique graded homomorphism $\varphi_P : L_K(R_n) \longrightarrow L_K(R_n)$ of K-algebras satisfying $\varphi_P(v) = v$, $\varphi_P(e_i) = \sum_{k=1}^n e_k p_{k,i}$ and $\varphi_P(e_i^*) = \sum_{k=1}^n p'_{i,k} e_k^*$ for all $1 \le i \le n$.

(2) $\varphi_P \in Aut^{gr}(L_K(R_n))$ if and only if there exists a matrix $Q \in GL_n(L_K(R_n)_0)$ such that $P^{-1} = \varphi_P(Q)$. In this case, $\varphi_{P_m}^{-1} = \varphi_{Q_m}$, $P_m = \varphi_{P_m}(Q_m^{-1})$ and $P_m^{-1} = \varphi_{P_m}(Q_m)$

for all $m \geq 1$. In particular, if $\varphi_P(P) = P$ or $\varphi_P(P^{-1}) = P^{-1}$, then φ_P is a graded isomorphism and $\varphi_P^m = \varphi_{P^m}$ for all integer m.

(3) *The map $\Phi : (GL_n(L_K(R_n)_0), \star) \longrightarrow End^{gr}(L_K(R_n))$, $P \longmapsto \varphi_P$, is a monoid isomorphism, where the multiplication law "$\star$" is defined by*

$$P \star Q = P\varphi_P(Q)$$

for all $P, Q \in GL_n(L_K(R_n)_0)$.

Proof. It immediately follows from Corollary 2.3. □

The following corollary gives that the general linear group $GL_n(K)$ of degree n over a field K may be considered as a subgroup of the graded automorphism group $Aut^{gr}(L_K(R_n))$ of $L_K(R_n)$.

Corollary 2.8. *Let $n \geq 2$ be a positive integer, K a field and R_n the rose graph with n petals. Then, there exists an injective homomorphism $\Phi : GL_n(K) \longrightarrow Aut^{gr}(L_K(R_n))$ of groups such that $\Phi(P) = \varphi_P$ for all $P \in GL_n(K)$.*

Proof. By Proposition 2.7 (3), the map $\Phi : (GL_n(L_K(R_n)_0), \star) \longrightarrow End^{gr}(L_K(R_n))$, defined by $P \longmapsto \varphi_P$, is a monoid isomorphism, where the multiplication law "$\star$" is defined by

$$P \star Q = P\varphi_P(Q)$$

for all $P, Q \in GL_n(L_K(R_n)_0)$. For all P and $Q \in GL_n(K)$, since $\varphi_P(Q) = Q$, we must have $P \star Q = PQ$, so $GL_n(K)$ is a subgroup of the group of units of the monoid $(GL_n(L_K(R_n)_0), \star)$. Moreover, since $\varphi_P(P) = P$ for all $P \in GL_n(K)$, and by Proposition 2.7, $\varphi_P \in Aut^{gr}(L_K(R_n))$ for all $P \in GL_n(K)$. From these observations, we obtain that $\Phi|_{GL_n(K)} : GL_n(K) \longrightarrow Aut^{gr}(L_K(R_n))$ is an injective homomorphism of groups, thus finishing the proof. □

In [21, Corollary 2.8] Kuroda and the first author introduced Anick type automorphisms of $L_K(R_n)$. We reproduce here these automorphisms. Namely, for any integer $n \geq 2$ and any field K, we denote by $A_{R_n}(e_1, e_2)$ the K-subalgebra of $L_K(R_n)$ generated by

$$v, e_1, e_3, \ldots, e_n, e_2^*, \ldots, e_n^*.$$

We should note that by [6, Theorem 1] (see, also [23, Theorem 3.7]), the following elements form a basis of the K-algebra $A_{R_n}(e_1, e_2)$: (1) v, (2) $p = e_{k_1} \cdots e_{k_m}$, where $k_i \in \{1, 3, \ldots, n\}$, (3) $q^* = e_{t_1}^* \cdots e_{t_h}^*$, where $t_i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, (4) pq^*, where p and q^* are defined as in items (2) and (3), respectively.

For any $p \in A_{R_n}(e_1, e_2)$, let

$$U_p = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

We then have $U_p \in GL_n(L_K(R_n))$ with $U_p^{-1} = U_{-p}$ and

$$U_pU_q = U_{p+q}$$

for all $p, q \in A_{R_n}(e_1, e_2)$. Also, for any $p \in A_{R_n}(e_1, e_2)$, by Theorem 2.2, we obtain the endomorphism φ_{U_p} of $L_K(R_n)$ defined by: $v \longmapsto v$, $e_i \longmapsto e_i$ for all $i \in \{1, 3, \dots, n\}$, $e_j^* \longmapsto e_j^*$ for all $2 \leq j \leq n$, $e_2 \longmapsto e_2 + e_1p$ and $e_1^* \longmapsto e_1^* - pe_2^*$. We note that $\varphi_{U_p}(q) = q$ for all $q \in A_{R_n}(e_1, e_2)$, and so $\varphi_{U_p}(U_q) = U_q$ for all $q \in A_{R_n}(e_1, e_2)$. By Theorem 2.2, φ_{U_p} is an automorphism and $\varphi_{U_p}^m = \varphi_{U_{p_m}}$ for all $p \in A_{R_n}(e_1, e_2)$ and $m \in \mathbb{Z}$. Moreover, if $p \in A_{R_n}(e_1, e_2) \cap L_K(R_n)_0$, then φ_{U_p} is a graded automorphism by Proposition 2.7. From these observations, we have the following interesting note.

Corollary 2.9. *Let $n \geq 2$ be a positive integer, K a field and R_n the rose graph with n petals. Then, there is an injective homomorphism $\Phi : (A_{R_n}(e_1, e_2), +) \longrightarrow Aut(L_K(R_n))$ of groups such that $\Phi(p) = \varphi_{U_p}$ for all $p \in A_{R_n}(e_1, e_2)$, and*

$$\Phi|_{A_{R_n}(e_1,e_2)\cap L_K(R_n)_0} : (A_{R_n}(e_1, e_2) \cap L_K(R_n)_0, +) \longrightarrow Aut^{gr}(L_K(R_n))$$

is an injective homomorphism of groups

Proof. By Proposition 2.6 (4), the map $\Phi : (GL_n(L_K(R_n)), \star) \longrightarrow End(L_K(R_n))$, defined by $P \longmapsto \varphi_P$, is a monoid isomorphism, where the multiplication law "$\star$" is defined by

$$P \star Q = P\varphi_P(Q)$$

for all $P, Q \in GL_n(L_K(R_n))$. Since $\varphi_{U_p}(U_q) = U_q$ for all $p, q \in A_{R_n}(e_1, e_2)$, we have

$$U_p \star U_q = U_p\varphi_{U_p}(U_q) = U_pU_q = U_{p+q}$$

for all $p, q \in A_{R_n}(e_1, e_2)$. This implies that the map from $(A_{R_n}(e_1, e_2), +)$ to the group of units of the monoid $(GL_n(L_K(R_n)), \star)$, defined by $p \longmapsto U_p$, is an injective homomorphism of groups. Hence, the group $(A_{R_n}(e_1, e_2), +)$ may be viewed as a subgroup of the group of units of the monoid $(GL_n(L_K(R_n)), \star)$, and so

$$\Phi|_{A_{R_n}(e_1,e_2)} : (A_{R_n}(e_1, e_2), +) \longrightarrow Aut(L_K(R_n))$$

is an injective homomorphism of groups satisfying the desired statements, thus finishing the proof. □

Next, we give a complete description of all automorphisms of $L_K(R_n)$ via the group of units $U(L_K(R_n))$ of $L_K(R_n)$. To do so, we need the following useful remark.

Remark 2.10. Let $n \geq 2$ be a positive integer, K a field and R_n the rose graph with n petals. Then, since $L_K(R_n) \cong L_K(R_n)^n$ as left $L_K(R_n)$-modules, we immediately obtain that $L_K(R_n) \cong M_n(L_K(R_n))$ as K-algebras. The isomorphism and its inverse are, respectively, easy to write down explicitly:

$$s \longmapsto (e_i^* s e_j) \quad \text{and} \quad M = (m_{i,j}) \longmapsto \sum_{1\leq i,j\leq n} e_i m_{i,j} e_j^*.$$

Using Theorem 2.2, Proposition 2.6 and Remark 2.10, we obtain the following interesting corollary, which was studied by Cuntz in [17].

Corollary 2.11. *Let $n \geq 2$ be a positive integer, K a field, R_n the rose graph with n petals, $U(L_K(R_n))$ the group of units of $L_K(R_n)$, and u an element of $U(L_K(R_n))$. Then the following statements hold:*

(1) *The map $f_u : L_K(R_n) \longrightarrow L_K(R_n)$, defined by $v \longmapsto v$, $e_i \longmapsto ue_i$ and $e_i^* \longmapsto e_i^* u^{-1}$ for all $1 \leq i \leq n$, is an injective homomorphism of K-algebras, and $f_u = \varphi_P$, where $P = (e_i^* u e_j) \in GL_n(L_K(R_n))$ and φ_P is the endomorphism of $L_K(R_n)$ introduced in Proposition 2.6.*

(2) *For every $\lambda \in End(L_K(R_n))$, $\lambda = f_x$, where $x = \sum_{i=1}^n \lambda(e_i)e_i^* \in U(L_K(R_n))$. In particular, if τ_u is the inner automorphism of $L_K(R_n)$ generated by u, then $\tau_u = f_x$, where $x = u^{-1}(\sum_{i=1}^n e_i u e_i^*)$.*

(3) *$f_u f_w = f_{f_u(w)u}$ for all $w \in U(L_K(R_n))$.*

(4) *$f_u \in Aut(L_K(R_n))$ if and only if $u^{-1} = f_u(w)$ for some $w \in U(L_K(R_n))$. In this case, $f_u^{-1} = f_w$. Consequently,*

$$Aut^{gr}(L_K(R_n)) = \{f_u \in Aut(L_K(R_n)) \mid u \in U(L_K(R_n)_0)\}.$$

(5) *The map $\Phi : (U(L_K(R_n)), \star) \longrightarrow End(L_K(R_n))$, $u \longmapsto f_u$, is a monoid isomorphism, where the multiplication law "$\star$" is defined by*

$$u \star w = f_u(w)u$$

for all $u, w \in U(L_K(R_n))$.

(6) *Let $Inn(L_K(R_n))$ be the inner automorphism group of $L_K(R_n)$. Then the canonical homomorphism $\mathcal{T} : U(L_K(R_n)) \longrightarrow Inn(L_K(R_n))$, $u \longmapsto \tau_u$, is surjective with $\ker(\mathcal{T}) = K \cdot 1_{L_K(R_n)}$. Consequently, $Z(U(L_K(R_n))) = K \cdot 1_{L_K(R_n)}$.*

Proof. (1) Since $u \in U(L_K(R_n))$ and by Remark 2.10, $P := (e_i^* u e_j) \in GL_n(L_K(R_n))$ with $P^{-1} = (e_i^* u^{-1} e_j)$. By Proposition 2.6 (1), φ_P is an injective K-algebra endomorphism of $L_K(R_n)$. Also, we have $\varphi_P(e_i) = \sum_{k=1}^n e_k e_k^* u e_i = u e_i = f_u(e_i)$ and $\varphi_P(e_i^*) = \sum_{k=1}^n e_i^* u^{-1} e_k e_k^* = e_i^* u^{-1} = f_u(e_i^*)$ for all $1 \le i \le n$, and so $f_u = \varphi_P$ and consequently, f_u is an injective K-algebra endomorphism of $L_K(R_n)$.

(2) Let $\lambda \in End(L_K(R_n))$. By Theorem 2.2 (5), $\lambda = \varphi_P$, where $P = (e_i^* \lambda(e_j)) \in GL_n(L_K(R_n))$. On the other hand, by Item (1) and Remark 2.10, $\varphi_P = f_x$, where $x = \sum_{1\le i,j\le n} e_i e_i^* \lambda(e_j) e_j^* = \sum_{i=1}^n \lambda(e_i) e_i^* \in U(L_K(R_n))$. Therefore, $\lambda = f_x$, as desired.

(3) Let $w \in U(L_K(R_n))$. We then have $f_u f_w = \varphi_P \varphi_Q = \varphi_{P\varphi_P(Q)}$, where $P = (e_i^* u e_j)$ and $Q = (e_i^* w e_j) \in GL_n(L_K(R_n))$. Also, $P\varphi_P(Q) = P f_u(Q) = (e_i^* f_u(w) u e_j)$ and $\sum_{1\le i,j\le n} e_i e_i^* f_u(w) u e_j e_j^* = f_u(w) u$. By Item (1) and Remark 2.10, $\varphi_{P\varphi_P(Q)} = f_{f_u(w)u}$, and so $f_u f_w = f_{f_u(w)u}$, as desired.

(4) We have that $f_u \in Aut(L_K(R_n))$ if and only if $\varphi_P \in Aut(L_K(R_n))$, where $P = (e_i^* u e_j) \in GL_n(L_K(R_n))$, if and only if $P^{-1} = (e_i^* u^{-1} e_j) = \varphi_P(Q) = f_u(Q)$ for some $Q = (q_{i,j}) \in GL_n(L_K(R_n))$, if and only if $Q = (f_u^{-1}(e_i^* u^{-1} e_j)) = (e_i^* w e_j)$, where $w = f_u^{-1}(u^{-1}) \in U(L_K(R_n))$ (since f_u is always injective). In this case, by Proposition 2.6 (3) and Item (1), $f_u^{-1} = \varphi_P^{-1} = \varphi_Q = f_w$. From these observations, we immediately obtain that $f_u \in Aut(L_K(R_n))$ if and only if $u^{-1} = f_u(w)$ for some $w \in U(L_K(R_n))$.

(5) It immediately follows from Items (1), (2), (3) and Proposition 2.6 (4).

(6) Let τ_u be the inner automorphism of $L_K(R_n)$ generated by u, for which $\tau_u = id_{L_K(R_n)}$. We then have $u^{-1} e_i u = e_i$ for all $1 \le i \le n$. Equivalently, $u = e_i^* u e_i$ for all $1 \le i \le n$. This implies that $u = (e_i^*)^m u e_i^m$ for all $1 \le i \le n$ and for all $m \ge 1$. Since $L_K(R_n)$ is a $\mathbb{Z}$-graded algebra, u may be written in the form: $u = \sum_{j=-l}^t u_j$, where $l, t \ge 0$ and $u_j \in L_K(R_n)_j$ for all $-l \le j \le t$. We then have

$$\sum_{j=-l}^{t} u_j = u = \sum_{j=-l}^{t} (e_i^*)^m u_j e_i^m$$

for all $1 \le i \le n$ and $m \ge 0$. By $\mathbb{Z}$-grading in $L_K(R_n)$, we must have $u_j = (e_i^*)^m u_j e_i^m$ for all $-l \le j \le t$, $1 \le i \le n$ and $m \ge 1$. For every $-l \le j \le t$, we write $u_j = \sum_{k=1}^h a_k \alpha_k \beta_k^*$, where $h \ge 0$, $a_k \in K$ and $\alpha_k, \beta_k \in (R_n)^*$ with $|\alpha_k| - |\beta_k| = j$. Let $m := \max\{|\alpha_k| \mid 1 \le k \le h\}$. For each $1 \le i \le n$, we obtain that

$$u_j = (e_i^*)^m u_j e_i^m = (e_i^*)^m (\sum_{k=1}^{h} a_k \alpha_k \beta_k^*) e_i^m = \sum_{k=1}^{h} a_k (e_i^*)^m \alpha_k \beta_k^* e_i^m = b_i e_i^j$$

for some $b_i \in K$, where $e_i^0 = v$ and $e_i^j = (e_i^*)^{-j}$ if $j < 0$. By $\mathbb{Z}$-grading in $L_K(R_n)$, $u_j = 0$ for all $j \neq 0$, and so $u = kv$ for some $k \in K \setminus \{0\}$. Therefore, we have $\ker(\mathcal{T}) = K \cdot 1_{L_K(R_n)}$ and $Z(U(L_K(R_n))) = K \cdot 1_{L_K(R_n)}$, thus finishing the proof. $\square$

It is worth mentioning the following note.

Remark 2.12. (1) We should note that Propositions 2.6 and 2.7 immediately follow as a consequence of Corollary 2.11 and Remark 2.10.

(2) Let K be an arbitrary field, $n \geq 2$ a positive integer, and R_n the rose with n petals. Let $u \in U(L_K(R_n))$ and $P = (e_i^* u e_j) \in GL_n(L_K(R_n))$. Let f_u be the automorphism of $L_K(R_n)$ introduced in Corollary 2.11. Then

$$f_u(P) = P \text{ if and only if } f_u(u) = u.$$

Indeed, assume that $f_u(P) = P$, i.e., $f_u(e_i^* u e_j) = e_i^* u e_j$ for all $1 \leq i, j \leq n$. This follows that $e_i^* u^{-1} f_u(u) u e_j = e_i^* u e_j$ and $e_i e_i^* u^{-1} f_u(u) u e_j e_j^* = e_i e_i^* u e_j e_j^*$ for all $1 \leq i, j \leq n$. Hence,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_i e_i^* u^{-1} f_u(u) u e_j e_j^* = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_i e_i^* u e_j e_j^*.$$

Equivalently,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} e_i e_i^* \right) u^{-1} f_u(u) u \left(\sum_{j=1}^{n} e_j e_j^* \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i e_i^* \right) u \left(\sum_{j=1}^{n} e_j e_j^* \right),$$

so $u^{-1} f_u(u) u = u$ and $f_u(u) = u u u^{-1} = u$. The converse is obvious.

We close this section with the following example.

Examples 2.13. Let K be a field and R_2 the rose graph with 2 petals.

(1) $P = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v & 0 \end{pmatrix} \in M_2(L_K(R_2))$. It is obvious that P is an invertible matrix with $P^{-1} = P$. Let $x = e_1 e_2^* + e_2 e_1^* \in L_K(R_n)_0$. Since x is the image of P under the displayed isomorphism given in Remark 2.10, x is automatically a unit of $L_K(R_2)_0$ with $x^{-1} = x$. Then, by Corollary 2.11 (1), we have the graded endomorphism f_x of $L_K(R_2)$ such that $f_x(v) = v$, $f_x(e_1) = x e_1 = e_2$, $f_x(e_2) = x e_2 = e_1$, $f_x(e_1^*) = e_1^* x^{-1} = e_2^*$ and $f_x(e_2^*) = e_2^* x^{-1} = e_1^*$. It is obvious that $f_x(P) = P$, and so $f_x(x) = x$ (by Remark 2.12 (2)). This implies that $f_x(x^{-1}) = x^{-1}$, and so f_x is an automorphism of $L_K(R_2)$ by Corollary 2.11 (4).

(2) Let $A_{R_2}(e_1, e_2)$ be the K-subalgebra of $L_K(R_2)$ generated by v, e_1, e_2^*, that means,

$$A_{R_2}(e_1, e_2) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i e_1^{m_i} (e_2^*)^{l_i} \mid n \geq 1,\, r_i \in K,\, m_i, l_i \geq 0\},$$

where $e_1^0 = v = (e_2^*)^0$. Let $p := e_1 e_2^* \in A_{R_2}(e_1, e_2)$ and $U_p = \begin{pmatrix} v & p \\ 0 & v \end{pmatrix} \in M_2(L_K(R_2))$. As introduced prior to Corollary 2.9, U_p is invertible with $(U_p)^{-1} = U_{-p}$. Let $y =$

$v + e_1^2(e_2^*)^2 \in L_K(R_2)_0$. Since y is the image of U_p under the displayed isomorphism given in Remark 2.10, y is automatically a unit of $L_K(R_2)_0$ with $y^{-1} = v - e_1^2(e_2^*)^2$. Then, by Corollary 2.11 (1), we have the graded endomorphism f_y of $L_K(R_2)$ such that $f_y(v) = v$, $f_y(e_1) = ye_1 = e_1$, $f_y(e_2) = ye_2 = e_2 + e_1^2 e_2^*$, $f_y(e_1^*) = e_1^* y^{-1} = e_1^* - e_1(e_2^*)^2$ and $f_y(e_2^*) = e_2^* y^{-1} = e_2^*$. By Corollary 2.11 (1), we have $f_y = \varphi_{U_p}$, where φ_{U_p} is the automorphism of $L_K(R_2)$ introduced prior to Corollary 2.9. We note that $f_y(q) = \varphi_{U_p}(q) = q$ for all $q \in A_{R_2}(e_1, e_2)$, and so $f_y(y) = y$. This implies that $f_y(y^{-1}) = y^{-1}$, and so f_y is an automorphism of $L_K(R_2)$ by Corollary 2.11 (4).

(3) Let $u := (e_1e_2^* + e_2e_1^*)(v + e_1^2(e_2^*)^2) = e_1e_2^* + e_2e_1^* + e_1^2e_2^*e_1^*$. We have that u is a unit of $L_K(R_2)_0$ with $u^{-1} = (v - e_1^2(e_2^*)^2)(e_1e_2^* + e_2e_1^*) = e_1e_2^* + e_2e_1^* - e_2e_1(e_2^*)^2$. By Corollary 2.11 (1), we have the graded endomorphism f_u of $L_K(R_2)$ such that $f_u(v) = v$, $f_u(e_1) = ue_1 = e_2 + e_1^2e_2^*$, $f_u(e_2) = ue_2 = e_1$, $f_u(e_1^*) = e_1^*u^{-1} = e_2^*$ and $f_u(e_2^*) = e_2^*u^{-1} = e_1^* - e_1(e_2^*)^2$. We then obtain that

$$\begin{aligned} f_u(e_1e_2^* + e_2e_1^* - e_2^2e_1^*e_2^*) &= (e_2 + e_1^2e_2^*)(e_1^* - e_1(e_2^*)^2) + e_1e_2^* - e_1^2e_2^*(e_1^* - e_1(e_2^*)^2) \\ &= e_2e_1^* - e_2e_1(e_2^*)^2 + e_1^2e_2^*e_1^* + e_1e_2^* - e_1^2e_2^*e_1^* \\ &= e_1e_2^* + e_2e_1^* - e_2e_1(e_2^*)^2 = u^{-1}. \end{aligned}$$

By Corollary 2.11 (4), f_u is a graded automorphism of $L_K(R_2)$ with $f_u^{-1} = f_w$, where $w = e_1e_2^* + e_2e_1^* - e_2^2e_1^*e_2^* \in U(L_K(R_2))$ with $w^{-1} = e_1e_2^* + e_2e_1^* + e_1e_2(e_1^*)^2$.

We note that $f_u(u) = f_u(e_1e_2^* + e_2e_1^* + e_1^2e_2^*e_1^*) = (e_2 + e_1^2e_2^*)(e_1^* - e_1(e_2^*)^2) + e_1e_2^* + (e_2 + e_1^2e_2^*)^2(e_1^* - e_1(e_2^*)^2)e_2^* = e_1e_2^* + e_2e_1^* + e_1^2e_2^*e_1^* + e_1^2e_1^*e_2^* - e_2e_1(e_2^*)^2 + e_2^2e_1^*e_2^* - e_2^2e_1(e_2^*)^3 + e_2e_1^2e_2^*e_1^*e_2^* - e_1^3(e_2^*)^3$. Therefore, by the $\mathbb{Z}$-grading in $L_K(R_2)$, we must have $f_u(u) \neq u$.

The above examples show that the set

$$\{u \in U(L_K(R_2)) \mid f_u(u) = u\}$$

is not a subgroup of $U(L_K(R_2))$.

3. Application: Zhang twist of Leavitt path algebras

In this section we study Zhang twist of Leavitt path algebras. More precisely, we twist the multiplicative structure of Leavitt path algebras $L_K(E)$ over any graph E with the help of graded automorphisms constructed in the previous section.

Definition 3.1. Let σ be a graded automorphism of Leavitt path algebra $L_K(E)$ over any arbitrary graph E. We know that $L_K(E)$ has a $\mathbb{Z}$-graded structure as $L_K(E) = \oplus_n L_n$. We twist the multiplicative structure of $\oplus_n L_n$ as $a \star b = a\sigma^n(b)$ for any $a \in L_n, b \in L_m$. The same underlying graded vector space $\oplus L_n$ with this new graded product $\star$ is called the Zhang twist of $L_K(E)$ and denoted as $L_K(E)^\sigma$.

In a rather surprising result we note that the Leavitt path algebra $L_K(E)$ of an arbitrary graph E is always a subalgebra of the Zhang twist $L_K(E)^{\varphi_P}$ by any graded automorphism φ_P introduced in Corollary 2.3.

Proposition 3.2. *Let K be a field, n a positive integer, E a graph, and v and w vertices in E (they may be the same). Let $e_1, e_2, \ldots, e_n$ be distinct edges in E with $s(e_i) = v$ and $r(e_i) = w$ for all $1 \le i \le n$. Let $P = (p_{ij})$ and $Q = (q_{ij})$ be elements of $GL_n(wL_K(E)_0w)$ with $P\varphi_P(Q) = I_n$, $P^{-1} = (p_{ij}^{(-1)})$ and $Q^{-1} = (q_{ij}^{(-1)})$. Then, there exists a graded injective homomorphism $\theta_P : L_K(E) \longrightarrow L_K(E)^{\varphi_P}$ of K-algebras satisfying*

$$\theta_P(u) = u, \quad \theta_P(e) = e \quad \text{and} \quad \theta_P(f^*) = f^*$$

for all $u \in E^0$, $e \in E^1$ and $f \in E^1 \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}$, and

$$\theta_P(e_i^*) = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{(-1)} e_k^*$$

for all $1 \le i \le n$, where the graded automorphism φ_P is defined in Corollary 2.3.

Proof. We first note that $\varphi_P(u) = u, \varphi_P(e) = e$ and $\varphi_P(e^*) = e^*$ for all $u \in E^0$ and $e \in E^1 \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}$, and

$$\varphi_P(e_i) = \sum_{k=1}^{n} e_k p_{ki} \quad \text{and} \quad \varphi_P(e_i^*) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(-1)} e_k^*$$

for all $1 \le i \le n$, and $\varphi_P^{-1} = \varphi_Q$.

We define the elements $\{Q_u \mid u \in E^0\}$ and $\{T_e, T_{e^*} \mid e \in E^1\}$ of $L_K(E)^{\varphi_P}$ by setting $Q_u = u$, $T_e = e$ and

$$T_{e^*} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{(-1)} e_k^* & \text{if } e = e_i \text{ for some } 1 \le i \le n \\ e^* & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We claim that $\{Q_u, T_e, T_{e^*} \mid u \in E^0, e \in E^1\}$ is a family in $L_K(E)^{\varphi_P}$ satisfying the relations analogous to (1) - (4) in Definition 2.1. Indeed, we have $Q_u * Q_{u'} = Q_u Q_{u'} = uu' = \delta_{u,u'} u = \delta_{u,u'} Q_u$ for all $u, u' \in E^0$, showing relation (1).

For (2), we always have $Q_{s(e)} * T_e = Q_{s(e)} T_e = T_e = T_e Q_{r(e)} = T_e * Q_{r(e)}$ for all $e \in E^1$ and $T_{f^*} * Q_{s(f)} = T_{f^*} \varphi_P^{-1}(Q_{s(f)}) = T_{f^*} Q_{s(f)} = T_{f^*} = Q_{r(f)} T_{f^*} = Q_{r(f)} * T_{f^*}$ for all $f \in E^1 \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}$. For each $1 \le i \le n$, since

$$ve_k = e_k w = e_k, \quad we_k^* = e_k^* v = e_k^*, \quad \text{and} \quad wq_{ik}^{(-1)} = q_{ik}^{(-1)}$$

for all k, we have

$$Q_w * T_{e_i^*} = Q_w T_{e_i^*} = w\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-1)} e_k^* = \sum_{k=1}^n w q_{ik}^{(-1)} e_k^* = \sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-1)} e_k^* = T_{e_i^*},$$

$$T_{e_i^*} * Q_v = T_{e_i^*}\varphi_P^{-1}(Q_v) = T_{e_i^*} Q_v = \sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-1)} e_k^* v = \sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-1)} e_k^* = T_{e_i^*}.$$

For (3), we obtain that $T_{e^*} * T_f = e^*\varphi_P^{-1}(f) = e^*\varphi_Q(f) = e^*f = \delta_{e,f} r(e)$ for all $e, f \in E^1 \setminus \{e_1, \dots, e_n\}$. For each $f \in E^1 \setminus \{e_1, \dots, e_n\}$ and $1 \le i \le n$, we have

$$T_{e_i^*} * T_f = T_{e_i^*}\varphi_P^{-1}(T_f) = T_{e_i^*}\varphi_Q(T_f) = \sum_{k=1}^n q_{ik} e_k^* f = 0$$

and

$$T_{f^*} * T_{e_i} = T_{f^*}\varphi_P^{-1}(T_{e_i}) = T_{f^*}\varphi_Q(T_{e_i}) = \sum_{k=1}^n f^* e_k p_{ki} = 0,$$

since $e_k^* f = f^* e_k = 0$. For $i, j \in \{1, \dots, n\}$, we have

$$\begin{aligned} T_{e_i^*} * T_{e_j} &= T_{e_i^*}\varphi_P^{-1}(T_{e_j}) = T_{e_i^*}\varphi_Q(T_{e_j}) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ik}^{(-1)} e_k^* e_l q_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ik}^{(-1)} \delta_{k,l} w p_{lj} = \sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-1)} p_{kj} = \delta_{i,j} w = \delta_{i,j} Q_w, \end{aligned}$$

since $e_k^* e_l = \delta_{k,l} w$ and $w p_{lj} = p_{lj}$.

For (4), let u be a regular vertex in E. If $u \ne v$, then $\sum_{e\in s^{-1}(u)} T_e * T_{e^*} = \sum_{e\in s^{-1}(u)} T_e \varphi_P(T_{e^*}) = \sum_{e\in s^{-1}(u)} ee^* = u = Q_u$. Consider the case when $u = v$, that is, v is a regular vertex. Write

$$s^{-1}(v) = \{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m\}$$

for some distinct $e_{n+1}, \dots, e_m \in E^1$ with $n \le m < \infty$. We note that $T_{e_k} * T_{e_k^*} = T_{e_k}\varphi_P(T_{e_k^*}) = e_k e_k^*$ for all $n+1 \le k \le m$, and

$$\begin{aligned} T_{e_i} * T_{e_i^*} &= e_i \varphi_P(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-1)} e_k^*) = e_i \sum_{k=1}^n \varphi_P(q_{ik}^{(-1)})\varphi_P(e_k^*) \\ &= e_i \sum_{k=1}^n p_{ik}(\sum_{t=1}^n p_{kt}^{(-1)} e_t^*) \quad \text{(since } \varphi_P(Q^{-1}) = P) \\ &= e_i \sum_{t=1}^n (\sum_{k=1}^n p_{ik} p_{kt}^{(-1)}) e_t^* = e_i(\sum_{k=1}^n p_{ik} p_{ki}^{(-1)}) e_i^* = e_i w e_i^* \\ &= e_i e_i^* \quad \text{(since } e_i = e_i w) \end{aligned}$$

for all $1 \le i \le n$, and so, we have

$$\sum_{e\in s^{-1}(v)} T_e * T_{e^*} = \sum_{i=1}^{m} T_{e_i} * T_{e_i^*} = \sum_{i=1}^{m} e_i e_i^* = v = Q_v,$$

thus showing the claim. Then, by the Universal Property of $L_K(E)$, there exists a K-algebra homomorphism $\theta_P : L_K(E) \longrightarrow L_K(E)^{\varphi_P}$, which maps $u \longmapsto Q_u$, $e \longmapsto T_e$ and $e^* \longmapsto T_{e^*}$. It is obvious that Q_u and T_e have degree 0 and 1 respectively for all $u \in E^0$ and $e \in E^1$. Since $q_{ij}^{(-1)} \in L_K(E)_0$ for all $1 \le i, j \le n$, T_{e^*} has degree -1 for all $e \in E^1$. This implies that φ_P is a $\mathbb{Z}$-graded homomorphism, whence the injectivity of θ_P is guaranteed by [26, Theorem 4.8], thus finishing the proof. □

The remainder of this section is to investigate Zhang twists $L_K(R_n)^\lambda$ of Leavitt path algebras $L_K(R_n)$ by their graded automorphisms λ where R_n is the rose graph with n petals. We first note that for any $\lambda \in Aut^{gr}(L_K(R_n))$, by Proposition 2.7, there exists a unique pair (P, Q) consisting of elements P and Q of $GL_n(L_K(R_n)_0)$ such that $P^{-1} = \varphi_P(Q)$, $\lambda = \varphi_P$ and $\lambda^{-1} = \varphi_Q$. In light of this note and for convenience, we denote

$$L_K(R_n)^{P,Q} := L_K(R_n)^{\varphi_P} = L_K(R_n)^\lambda$$

for any such pair (P, Q). As a corollary of Proposition 3.2, we obtain that $L_K(R_n)$ is a K-subalgebra of all Zhang's twists $L_K(R_n)^{P,Q}$.

Corollary 3.3. *Let $n \ge 2$ be a positive integer, K a field and R_n the rose graph with n petals. Let $P = (p_{ij})$ and $Q = (q_{ij})$ be elements of $GL_n(L_K(R_n)_0)$ with $P\varphi_P(Q) = I_n$ and $Q^{-1} = \left(q_{ij}^{(-1)}\right)$. Then, there exists a graded injective homomorphism $\theta_P : L_K(R_n) \longrightarrow L_K(R_n)^{P,Q}$ of K-algebras satisfying*

$$\theta_P(v) = v, \quad \theta_P(e_i) = e_i \quad \textit{and} \quad \theta_P(e_i^*) = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{(-1)} e_k^*$$

for all $1 \le i \le n$.

Proof. It immediately follows from Proposition 3.2. □

Next we give criteria for the homomorphism θ_P in Corollary 3.3 to be an isomorphism. In order to do so, we need the following useful fact.

Lemma 3.4. *Let $n \ge 2$ be a positive integer, K a field and R_n the rose graph with n petals. Let $P = (p_{ij})$ and $Q = (q_{ij})$ be elements of $GL_n(L_K(R_n)_0)$ with $P\varphi_P(Q) = I_n$. For a positive integer m, let $P_m = \left(p_{ij}^{(m)}\right)$, $P_m^{-1} = \left(p_{ij}^{(-m)}\right)$, $Q_m = \left(q_{ij}^{(m)}\right)$ and $Q_m^{-1} = \left(q_{ij}^{(-m)}\right)$. Then, the following statements hold:*

(1) $e_i = \varphi_P^m\left(\sum_{k=1}^{n} e_k q_{ki}^{(m)}\right)$,

(2) $e_i^* = \varphi_P^m\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{(-m)} e_k^*\right)$,

(3) $e_i^* = \varphi_P^{-m}\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(-m)} e_k^*\right)$,

for all $1 \leq i \leq n$ *and* $m \geq 1$.

Proof. We first note that since $P\varphi_P(Q) = I_n$ and by Proposition 2.7 (2), we obtain that $\varphi_{P_m}^{-1} = \varphi_{Q_m}$, $P_m = \varphi_{P_m}(Q_m^{-1})$ and $P_m^{-1} = \varphi_{P_m}(Q_m)$ for all $m \geq 1$. Consequently, $\varphi_{Q_m}(P_m^{-1}) = \varphi_{Q_m}(\varphi_{P_m}(Q_m)) = \varphi_{P_m}^{-1}(\varphi_{P_m}(Q_m)) = Q_m$ for all $m \geq 1$. Then, for all $1 \leq i \leq n$ and $m \geq 1$, we have

$$\begin{aligned}
\varphi_P^m\left(\sum_{k=1}^{n} e_k q_{ki}^{(m)}\right) &= \varphi_{P_m}\left(\sum_{k=1}^{n} e_k q_{ki}^{(m)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{P_m}(e_k)\,\varphi_{P_m}\left(q_{ki}^{(m)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{n} e_t p_{tk}^{(m)}\right) p_{ki}^{(-m)} \quad (\text{since } \varphi_{P_m}(Q_m) = P_m^{-1}) \\
&= \sum_{t=1}^{n} e_t\left(\sum_{k=1}^{n} p_{tk}^{(m)} p_{ki}^{(-m)}\right) = e_i\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(m)} p_{ki}^{(-m)}\right) \\
&= e_i v = e_i,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\varphi_P^m\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{(-m)} e_k^*\right) &= \varphi_{P_m}\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{(-m)} e_k^*\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{P_m}\left(q_{ik}^{(-m)}\right)\varphi_{P_m}(e_k^*) \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(m)}\left(\sum_{t=1}^{n} p_{kt}^{(-m)} e_t^*\right) \quad (\text{since } \varphi_{P_m}(Q_m^{-1}) = P_m) \\
&= \sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(m)} p_{kt}^{(-m)}\right) e_t^* = \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(m)} p_{ki}^{(-m)}\right) e_i^* \\
&= v e_i^* = e_i^*,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\varphi_P^{-m}\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(-m)} e_k^*\right) &= \varphi_Q^m\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(-m)} e_k^*\right) = \varphi_{Q_m}\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(-m)} e_k^*\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varphi_{Q_m}\left(p_{ik}^{(-m)}\right)\varphi_{Q_m}(e_k^*)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{(m)} \left(\sum_{t=1}^{n} q_{kt}^{(-m)} e_t^* \right) \quad (\text{since } \varphi_{Q_m}(P_m^{-1}) = Q_m)$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{(m)} q_{kt}^{(-m)} \right) e_t^* = \left(\sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{(m)} q_{ki}^{(-m)} \right) e_i^*$$

$$= v e_i^* = e_i^*,$$

thus proving items (1), (2) and (3). This completes the proof of the lemma. □

We are now in a position to characterize when is $L_K(R_n)$ rigid to Zhang twist in the sense that its twist by graded automorphism developed in the previous section turns out to be isomorphic to $L_K(R_n)$.

Theorem 3.5. *Let $n \geq 2$ be a positive integer, K a field and R_n the rose graph with n petals. Let $P = (p_{ij})$ and $Q = (q_{ij})$ be elements of $GL_n(L_K(R_n)_0)$ with $P\varphi_P(Q) = I_n$. For a positive integer m, let $P_m = \left(p_{ij}^{(m)}\right)$, $P_m^{-1} = \left(p_{ij}^{(-m)}\right)$, $Q_m = \left(q_{ij}^{(m)}\right)$ and $Q_m^{-1} = \left(q_{ij}^{(-m)}\right)$. Then, the K-algebra homomorphism $\theta_P : L_K(R_n) \longrightarrow L_K(R_n)^{P,Q}$, defined in Corollary 3.3, is an isomorphism if and only if $p_{ij}^{(-m)}$, $q_{ij}^{(m)}$, $q_{ij}^{(-m)} \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ for all $m \geq 1$ and $1 \leq i, j \leq n$.*

Proof. ($\Longrightarrow$) It is obvious.

($\Longleftarrow$) By Corollary 3.3, θ_P is always injective, and so it suffices to show that θ_P is surjective. We first claim that α and $\alpha^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ for all $\alpha \in (R_n)^*$. We use induction on $|\alpha|$ to establish the claim. If $|\alpha| = 1$, then since $e_i = \theta_P(e_i) \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ for all $1 \leq i \leq n$, $\alpha \in \mathrm{Im}(\theta_P)$. Since $\theta_P(e_i^*) = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}^{(-1)} e_k^*$ for all $1 \leq i \leq n$, we have

$$\begin{pmatrix} \theta_P(e_1^*) \\ \vdots \\ \theta_P(e_n^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} q_{1k}^{(-1)} e_k^* \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} q_{nk}^{(-1)} e_k^* \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{pmatrix},$$

and so

$$\begin{pmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \theta_P(e_1^*) \\ \vdots \\ \theta_P(e_n^*) \end{pmatrix}.$$

This follows that $e_i^* = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}\theta_P(e_k^*) = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} * \theta_P(e_k^*)$ for all $1 \le i \le n$ (since $q_{ij} \in L_K(R_n)_0$ for all $1 \le i, j \le n$). By our hypothesis, $q_{ij} \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ for all $1 \le i, j \le n$, and so $e_i^* = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} * \theta_P(e_k^*) \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ for all $1 \le i \le n$, that means, $\alpha^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$.

Now we proceed inductively, that means, we have α and $\alpha^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ for all $\alpha \in (R_n)^*$ with $1 < |\alpha| \le m$. For $\alpha \in (R_n)^*$ with $|\alpha| \ge m+1$, we write $\alpha = \beta e_{i_0}$ for some $\beta \in (R_n)^*$ with $|\beta| = m$ and for some $1 \le i_0 \le n$. By the induction hypothesis, $\beta \in \mathrm{Im}(\theta_P)$. By Lemma 3.4 (1), we have $e_{i_0} = \varphi_P^m\left(\sum_{k=1}^{n} e_k q_{ki_0}^{(m)}\right)$, and so

$$\alpha = \beta e_{i_0} = \beta\varphi_P^m(\sum_{k=1}^{n} e_k q_{ki_0}^{(m)}) = \beta * (\sum_{k=1}^{n} e_k q_{ki_0}^{(m)}).$$

On the other hand, since $\varphi_Q^{-1} = \varphi_P$, we have

$$Q_m = Q\varphi_Q(Q)\cdots\varphi_Q^{m-1}(Q) = \varphi_P(\varphi_Q(Q)\varphi_Q^2(Q)\cdots\varphi_Q^m(Q)) = \varphi_P(Q^{-1}Q_{m+1}),$$

so $q_{ki_0}^{(m)} = \varphi_P(\sum_{t=1}^{n} q_{kt}^{(-1)} q_{ti_0}^{(m+1)})$. This shows that

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta * (\sum_{k=1}^{n} e_k\varphi_P(\sum_{t=1}^{n} q_{kt}^{(-1)} q_{ti_0}^{(m+1)})) = \beta * (\sum_{k=1}^{n}(e_k * \sum_{t=1}^{n} q_{kt}^{(-1)} q_{ti_0}^{(m+1)})) \\ &= \beta * (\sum_{k=1}^{n}(e_k * (\sum_{t=1}^{n} q_{kt}^{(-1)} * q_{ti_0}^{(m+1)}))) \in \mathrm{Im}(\theta_P) \text{ (by our hypothesis).}\end{aligned}$$

Write $\alpha^* = \gamma^* e_{t_0}^*$ for some $1 \le t_0 \le n$ and $\gamma \in (R_n)^*$ with $|\gamma| = m$. By the induction hypothesis, $\gamma^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$. By Lemma 3.4 (3), we have that $e_{t_0}^* = \varphi_P^{-m}\left(\sum_{k=1}^{n} p_{t_0k}^{(-m)} e_k^*\right)$, and hence

$$\begin{aligned}\alpha^* = \gamma^* e_{t_0}^* = \gamma^*\varphi_P^{-m}(\sum_{k=1}^{n} p_{t_0k}^{(-m)} e_k^*) &= \gamma^* * (\sum_{k=1}^{n} p_{t_0k}^{(-m)} e_k^*) \\ &= \gamma^* * (\sum_{k=1}^{n} p_{t_0k}^{(-m)} * e_k^*) \in \mathrm{Im}(\theta_P) \text{ (by our hypothesis),}\end{aligned}$$

thus showing the claim.

We next prove that $\alpha\beta^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ for all α and $\beta \in (R_n)^*$ with $m := |\alpha| \ge 1$ and $s := |\beta| \ge 1$. We use induction on $|\beta|$ to establish the fact. If $|\beta| = 1$, then by the above claim, α and $e_k^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ for all $1 \le k \le n$, and so

$$\alpha\beta^* = \alpha e_i^* = \alpha\varphi_P^m(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m)} e_k^*) \quad \text{(by Lemma 3.4 (2))}$$
$$= \alpha * (\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m)} e_k^*) = \alpha * (\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m)} * e_k^*) \in \mathrm{Im}(\theta_P) \text{ (by our hypothesis).}$$

Now we proceed inductively. We need to show that $\alpha\beta^* e_i^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ for all $1 \le i \le n$. We should note that by the induction hypothesis, $\alpha\beta^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$. If $m - s = 0$, we have

$$\alpha\beta^* e_i^* = \alpha\beta^* * e_i^* \in \mathrm{Im}\,(\theta_P)\,.$$

If $m - s > 0$, then we obtain that

$$\alpha\beta^* e_i^* = \alpha\beta^*\varphi_P^{m-s}(\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m+s)} e_k^*) = \alpha\beta^* * (\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m+s)} e_k^*)$$
$$= \alpha\beta^* * (\sum_{k=1}^n q_{ik}^{(-m+s)} * e_k^*) \in \mathrm{Im}(\theta_P).$$

If $m - s < 0$, then we receive that

$$\alpha\beta^* e_i^* = \alpha\beta^*\varphi_P^{m-s}(\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(m-s)} e_k^*) = \alpha\beta^* * (\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(m-s)} e_k^*$$
$$= \alpha\beta^* * (\sum_{k=1}^n p_{ik}^{(m-s)} * e_k^*) \in \mathrm{Im}(\theta_P),$$

proving the fact. From these observations, we immediately get that $\alpha\beta^* \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ for all α and $\beta \in (R_n)^*$. It is obvious that $L_K(R_n)^{P,Q}$ is spanned as a K-vector space by $\{\alpha\beta^* \mid \alpha, \beta \in (R_n)^*\}$. This implies that $\mathrm{Im}(\theta_P) = L_K(R_n)^{P,Q}$, that means, θ_P is surjective, thus finishing the proof. $\square$

Consequently, we provide a simpler criterion for the homomorphism θ_P be to an isomorphism in the case when $\varphi_P(P) = P$.

Corollary 3.6. *Let $n \ge 2$ be a positive integer, K a field and R_n the rose graph with n petals. Let $P = (p_{i,j})$ be an element of $GL_n(L_K(R_n)_0)$ with $\varphi_P(P) = P$ and $P^{-1} = (p_{ij}^{(-1)})$. Then, the K-algebra homomorphism $\theta_P : L_K(R_n) \longrightarrow L_K(R_n)^{P,P^{-1}}$, defined by*

$$\theta_P(v) = v,\ \theta_P(e_i) = e_i \quad \textit{and} \quad \theta_P(e_i^*) = \sum_{k=1}^n p_{ik} e_k^* \quad \textit{for all } 1 \le i \le n,$$

is an isomorphism if and only if p_{ij}, $p_{ij}^{(-1)} \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ for all $1 \le i, j \le n$.

Proof. ($\Longrightarrow$) It is obvious.

($\Longleftarrow$) Since $\varphi_P(P) = P$ and by Proposition 2.7 (2), φ_P is a graded automorphism of $L_K(R_n)$ such that $\varphi_P\left(P^{-1}\right) = P^{-1}$ and $\varphi_P^m = \varphi_{P^m}$ for all integer m. This implies that

$$\varphi_P^m(P) = P \quad \text{and} \quad \varphi_{P^{-1}}^m(P^{-1}) = P^{-1}$$

for all $m \geq 0$, and so

$$P_m = P\varphi_P\left(P\right)\cdots\varphi_P^{m-1}\left(P\right) = P^m$$

and

$$P_m^{-1} = P^{-1}\varphi_{P^{-1}}\left(P^{-1}\right)\cdots\varphi_{P^{-1}}^{m-1}\left(P^{-1}\right) = P^{-m}$$

for all $m \geq 0$. Since $p_{ij}, p_{ij}^{(-1)} \in L_K(R_n)_0$, we must have

$$P^m = \underbrace{P * P * \cdots * P}_{m \text{ times}} \quad \text{and} \quad P^{-m} = \underbrace{P^{-1} * P^{-1} * \cdots * P^{-1}}_{m \text{ times}}$$

in $M_n(L_K(R_n)^P)$, that means, P^m and P^{-m} are exactly the mth powers of P and P^{-1} in $M_n(L_K(R_n)^P)$, respectively. Then, since $p_{ij}, p_{ij}^{(-1)} \in \mathrm{Im}(\theta_P)$ for all $1 \leq i, j \leq n$, all entries of both P^m and P^{-m} lie in $\mathrm{Im}(\theta_P)$ for all $m \geq 1$. By Theorem 3.5, we immediately obtain that θ_P is an isomorphism, thus finishing the proof. $\square$

The first consequence of Corollary 3.6 is to show that the Zhang twist $L_K(R_n)^P$ is isomorphic to $L_K(R_n)$ for all $P \in GL_n(K)$.

Corollary 3.7. *Let $n \geq 2$ be a positive integer, K a field and R_n the rose graph with n petals. Then, for every $P \in GL_n(K)$, the K-algebra homomorphism $\theta_P : L_K(R_n) \longrightarrow L_K(R_n)^{P,P^{-1}}$, defined in Corollary 3.6, is an isomorphism.*

Proof. Let P be an arbitrary element of $GL_n(K)$. By Corollary 2.8, φ_P is a graded automorphism of $L_K(R_n)$ with $\varphi_P(P) = P$. Moreover, it is obvious that all entries of both P and P^{-1} lie in $\mathrm{Im}(\theta_P)$. Then, by Corollary 3.6, θ_P is an isomorphism, thus finishing the proof. $\square$

The second consequence of Corollary 3.6 is to show that the Zhang twist of $L_K(R_n)$ by Anick type graded automorphisms mentioned in Corollary 2.9 are isomorphic to $L_K(R_n)$.

Corollary 3.8. *Let $n \geq 2$ be a positive integer, K a field and R_n the rose graph with n petals. For every $p \in A_{R_n}(e_1, e_2) \cap L_K(R_n)_0$, consider $U_p = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(L_K(R_n))_0$. Then the K-algebra homomorphism*

$$\theta_p : L_K(R_n) \longrightarrow L_K(R_n)^{\varphi_{U_p}}$$

defined by

$$\theta_p(v) = v, \quad \theta_p(e_i) = e_i, \quad \theta_p(e_j^*) = e_j^* \quad \textit{and} \quad \theta_p(e_1^*) = e_1^* + pe_2^*$$

for all $1 \le i \le n$ *and* $2 \le j \le n$*, is an isomorphism.*

Proof. Let p be an arbitrary element of $A_{R_n}(e_1, e_2) \cap L_K(R_n)_0$. By Corollary 2.9, φ_{U_p} is a graded automorphism of $L_K(R_n)$ with $\varphi_{U_p}(q) = q$ for all $q \in A_{R_n}(e_1, e_2) \cap L_K(R_n)_0$, where

$$U_p = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(L_K(R_n))_0 \quad \text{and} \quad U_p^{-1} = U_{-p}.$$

By Theorem 3.5, $\theta_p := \theta_{U_p}$ is a K-algebra homomorphism satisfying $\theta_p(v) = v$, $\theta_p(e_i) = e_i$, $\theta_p(e_j^*) = e_j^*$ and $\theta_p(e_1^*) = e_1^* + pe_2^*$ for all $1 \le i \le n$ and $2 \le j \le n$.

We claim that $\theta_p(p) = p$. Indeed, write $p = \sum \alpha\beta^*$ where $|\alpha| = |\beta| = t$ and $\alpha = e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_t}$, $\beta^* = e_{s_1}^* e_{s_2}^* \cdots e_{s_t}^*$ with $e_{k_i} \in \{e_1, e_3, \dots e_n\}$ and $e_{s_i}^* \in \{e_2^*, e_3^*, \dots, e_n^*\}$. Since $\varphi_{U_p}(q) = q$ for all $q \in A_{R_n}(e_1, e_2) \cap L_K(R_n)_0$, we must have $\varphi_{U_p}(e_{k_i}) = e_{k_i}$ and $\varphi_{U_p}(e_{s_i}^*) = e_{s_i}^*$ for all $1 \le i \le t$. Then, we have that

$$\begin{aligned}
\theta_p(\alpha\beta^*) &= \theta_p(\alpha) * \theta_p(\beta^*) = \theta_p\left(e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_t}\right) * \theta_p\left(e_{s_1}^* e_{s_2}^* \cdots e_{s_t}^*\right) \\
&= \theta_p\left(e_{k_1}\right) * \theta_p\left(e_{k_2}\right) * \cdots * \theta_p\left(e_{k_t}\right) * \theta_p\left(e_{s_1}^*\right) * \theta_p\left(e_{s_2}^*\right) * \cdots * \theta_p\left(e_{s_t}^*\right) \\
&= e_{k_1} * e_{k_2} * \cdots * e_{k_t} * e_{s_1}^* * e_{s_2}^* * \cdots * e_{s_t}^* \\
&= e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_t}e_{s_1}^* e_{s_2}^* \cdots e_{s_t}^* \quad (\text{since } \varphi_{U_p}(e_{k_i}) = e_{k_i}, \varphi_{U_p}(e_{s_i}^*) = e_{s_i}^*) \\
&= \alpha\beta^*,
\end{aligned}$$

and so $p = \theta_p(p) \in \mathrm{Im}\,(\theta_P)$. This shows that all entries of both U_p and U_p^{-1} lie in $\mathrm{Im}(\theta_P)$. By Corollary 3.6, θ_p is an isomorphism, thus finishing the proof. □

By Corollary 2.11, for any $u \in U(L_K(R_n)_0)$, there exists a unique graded endomorphism f_u of $L_K(R_n)$ such that $f_u(v) = v$, $f_u(e_i) = ue_i$ and $f_u(e_i^*) = e_i^* u^{-1}$ for all $1 \le i \le n$. Moreover, f_u is a graded automorphism if and only if $u^{-1} = f_u(w)$ for some $w \in U(L_K(R_n)_0)$. In this case, by Corollary 2.11 and Theorem 3.5, there exists a graded injective homomorphism

$$\theta_u := \theta_P : L_K(R_n) \longrightarrow L_K(R_n)^{f_u}$$

of K-algebras satisfying $\theta_u(v) = v$, $\theta_u(e_i) = e_i$ and $\theta_u(e_i^*) = e_i^* w^{-1}$ for all $1 \le i \le n$, where $P = (e_i^* u e_j)$. For a positive integer m, we always have

$$u_m := \varphi_u^{m-1}(u) \cdots f_u(u)\, u \in U(L_K(R_n)_0) \text{ and } u_m^{-1} = u^{-1} f_u(u^{-1}) \cdots f_u^{m-1}(u^{-1}).$$

We denote

$$P_m := P\varphi_P(P) \cdots \varphi_P^{m-1}(P) = P f_u(P) \cdots f_u^{m-1}(P).$$

Moreover, we have the following useful fact.

Lemma 3.9. *$P_m = (e_i^* u_m e_j)_{1\le i,j\le n}$ and $P_m^{-1} = (e_i^* u_m^{-1} e_j)_{1\le i,j\le n}$ for all $m \ge 1$.*

Proof. We first claim that

$$f_u^m(e_i^* u e_j) = e_i^* u_m^{-1} u_{m+1} e_j \text{ and } f_w^m(e_i^* w e_j) = e_i^* w_m^{-1} w_{m+1} e_j$$

for all $m \ge 1$ and $1 \le i, j \le n$. We use induction on m to establish the claim. If $m = 1$, then $f_u(e_i^* u e_j) = e_i^* u^{-1} f_u(u) u e_j = e_i^* u_1^{-1} u_2 e_j$ and $f_w(e_i^* w e_j) = e_i^* w^{-1} f_w(w) w e_j = e_i^* w_1^{-1} w_2 e_j$ for all $1 \le i, j \le n$.

Now we proceed inductively, that means, we have $f_u^m(e_i^* u e_j) = e_i^* u_m^{-1} u_{m+1} e_j$ and $f_w^m(e_i^* w e_j) = e_i^* w_m^{-1} w_{m+1} e_j$ for all $1 \le m \le k$. For $m = k+1$, we have

$$\begin{aligned} f_u^m(e_i^* u e_j) &= f_u^{k+1}(e_i^* u e_j) = f_u(f_u^k(e_i^* u e_j)) \\ &= f_u(e_i^* u_k^{-1} u_{k+1} e_j) = e_i^* u^{-1} f_u(u_k^{-1}) f_u(u_{k+1}) u e_j \\ &= e_i^* \left(u^{-1} f_u(u_k^{-1})\right) \left(f_u(u_{k+1}) u\right) e_j \\ &= e_i^* u_{k+1}^{-1} u_{k+2} e_j = e_i^* u_m^{-1} u_{m+1} e_j. \end{aligned}$$

Similarly, we also have $f_w^m(e_i^* w e_j) = e_i^* w_m^{-1} w_{m+1} e_j$, showing the claim.

We next show the lemma by using induction on m. If $m = 1$, the statement is obvious. Now we proceed inductively, that means, we have $P_m = (e_i^* u_m e_j)_{1\le i,j\le n}$ and $P_m^{-1} = (e_i^* u_m^{-1} e_j)_{1\le i,j\le n}$ for all $1 \le m \le k$. For $m = k+1$, we obtain that $P_m = P_{k+1} = P f_u(P) \cdots f_u^{k-1}(P) f_u^k(P) = P_k f_u^k(P)$. By the induction hypothesis, $P_k = (e_i^* u_k e_j)_{1\le i,j\le n}$. By the above claim, we have

$$f_u^k(P) = \left(f_u^k(e_i^* u e_j)\right)_{1\le i,j\le n} = \left(e_i^* u_k^{-1} u_{k+1} e_j\right)_{1\le i,j\le n}.$$

Write $P_m = (p_{i,j}^{(m)})_{1\le i,j\le n}$. We then have

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(m)} &= \sum_{t=1}^n (e_i^* u_k e_t)\left(e_t^* u_k^{-1} u_{k+1} e_j\right) = e_i^* u_k \left(\sum_{t=1}^n e_t e_t^*\right) u_k^{-1} u_{k+1} e_j \\ &= e_i^* u_k u_k^{-1} u_{k+1} e_j = e_i^* u_{k+1} e_j = e_i^* u_m e_j \end{aligned}$$

for all $1 \le i, j \le n$, and so $P_m = (e_i^* u_m e_j)_{1\le i,j\le n}$ and $P_m^{-1} = (e_i^* u_m^{-1} e_j)_{1\le i,j\le n}$ for all $m \ge 1$, thus finishing the proof. □

As a corollary of Theorem 3.5, we obtain a criterion for the Zhang twist $L_K(R_n)^{f_u}$ of $L_K(R_n)$ by a graded automorphism f_u to be isomorphic to $L_K(R_n)$.

Corollary 3.10. *Let $n \geq 2$ be a positive integer, K a field and R_n the rose with n petals. Let u be an element of $U(L_K(R_n)_0)$ such that $u^{-1} = f_u(w)$ for some $w \in U(L_K(R_n)_0)$. Then the following statements hold:*

(1) The K-algebra homomorphism $\theta_u : L_K(R_n) \longrightarrow L_K(R_n)^{f_u}$, defined by $v \longmapsto v$, $e_i \longmapsto e_i$ and $e_i^* \longmapsto e_i^* w^{-1}$ for all $1 \leq i \leq n$, is an isomorphism if and only if $e_i^* u_m^{-1} e_j$, $e_i^* w_m e_j$, $e_i^* w_m^{-1} e_j \in \mathrm{Im}(\theta_u)$ for all $m \geq 1$ and $1 \leq i, j \leq n$.

(2) If, in addition, $f_u(u) = u$, then θ_u is an isomorphism if and only if $e_i^* u e_j, e_i^* u^{-1} e_j \in \mathrm{Im}(\theta_u)$ for all $1 \leq i, j \leq n$.

Proof. (1) Let $P = (e_i^* u e_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ and $Q = (e_i^* w e_j)_{1 \leq i,j \leq n}$. By Lemma 3.9, we have $P_m^{-1} = (e_i^* u_m^{-1} e_j)_{1 \leq i,j \leq n}$, $Q_m = (e_i^* w_m e_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ and $Q_m^{-1} = (e_i^* w_m^{-1} e_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ for all $m \geq 1$. Then, by Theorem 3.5, θ_u is an isomorphism if and only if $e_i^* u_m^{-1} e_j$, $e_i^* w_m e_j$, $e_i^* w_m^{-1} e_j \in \mathrm{Im}(\theta_u)$ for all $m \geq 1$ and $1 \leq i, j \leq n$.

(2) Assume that $f_u(u) = u$. We have $f_u(e_i^* u e_j) = e_i^* u^{-1} u u e_j = e_i^* u e_j$ for all $1 \leq i, j \leq n$, and so $f_u(P) = P$. By Corollary 3.6, θ_u is an isomorphism if and only if $e_i^* u e_j, e_i^* u^{-1} e_j \in \mathrm{Im}(\theta_u)$ for all $1 \leq i, j \leq n$, thus finishing the proof. $\square$

We end this section by presenting the following example which illustrates Corollary 3.10. Particularly, we show that homomorphisms θ_u are not an isomorphism in general.

Examples 3.11. Let K be a field and R_2, the rose graph with 2 petals.

(1) Let $x = e_1 e_2^* + e_2 e_1^* \in L_K(R_n)_0$. It is shown in Examples 2.13 (1) that x is a unit of $L_K(R_2)_0$ with $x^{-1} = x$. We also have the graded automorphism f_x of $L_K(R_2)$ such that $f_x(v) = v$, $f_x(e_1) = e_2$, $f_x(e_2) = e_1$, $f_x(e_1^*) = e_2^*$ and $f_x(x) = x$, which yields a graded K-algebra homomorphism $\theta_x : L_K(R_2) \longrightarrow L_K(R_2)^{f_x}$ such that $\theta_x(v) = v$, $\theta_x(e_1) = e_1$, $\theta_x(e_2) = e_2$, $\theta_x(e_1^*) = e_1^* x = e_2^*$ and $\theta_x(e_2^*) = e_2^* x = e_1^*$. We then have

$$e_1^* x e_1 = e_2^* x e_2 = 0 \in \mathrm{Im}(\theta_x) \text{ and } e_1^* x e_2 = e_2^* x e_1 = v \in \mathrm{Im}(\theta_x).$$

By Corollary 3.10 (2), we immediately obtain that θ_x is an isomorphism.

(2) Let $y = v + e_1^2 (e_2^*)^2 \in L_K(R_2)_0$. It is shown in Examples 2.13 (2) that y is a unit of $L_K(R_2)_0$ with $y^{-1} = v - e_1^2 (e_2^*)^2$. We also have the graded automorphism f_y of $L_K(R_2)$ such that $f_y(v) = v$, $f_y(e_1) = e_1$, $f_y(e_2) = e_2 + e_1^2 e_2^*$, $f_y(e_1^*) = e_1^* - e_1 (e_2^*)^2$, $f_y(e_2^*) = e_2^*$ and $f_y(y) = y$, which yields a graded K-algebra homomorphism $\theta_y : L_K(R_2) \longrightarrow L_K(R_2)^{f_y}$ such that $\theta_y(v) = v$, $\theta_y(e_1) = e_1$, $\theta_y(e_2) = e_2$, $\theta_y(e_1^*) = e_1^* y = e_1^* + e_1 (e_2^*)^2$ and $\theta_y(e_2^*) = e_2^* y = e_2^*$. Moreover, we have $e_1^* y e_1 = e_2^* y e_2 = e_1^* y^{-1} e_1 = e_2^* y^{-1} e_2 = v \in \mathrm{Im}(\theta_y)$, $e_2^* y e_1 = e_2^* y^{-1} e_1 = 0 \in \mathrm{Im}(\theta_y)$, $e_1^* y e_2 = e_1 e_2^* = \theta_y(e_1 e_2^*) \in \mathrm{Im}(\theta_y)$ and $e_1^* y^{-1} e_2 = -e_1 e_2^* = \theta_y(-e_1 e_2^*) \in \mathrm{Im}(\theta_y)$. Then, by Corollary 3.10 (2), we immediately obtain that θ_y is an isomorphism.

We should note that θ_y is exactly the automorphism $\theta_{e_1e_2^*}$ of $L_K(R_2)$ introduced in Corollary 3.8.

(3) Let $u = e_1e_2^* + e_2e_1^* + e_1^2e_2^*e_1^* \in L_K(R_2)_0$. It is shown in Examples 2.13 (3) that u is a unit of $L_K(R_2)_0$ with $u^{-1} = e_1e_2^* + e_2e_1^* - e_2e_1(e_2^*)^2$. We also have the graded automorphism f_u of $L_K(R_2)$ such that $f_u(v) = v$, $f_u(e_1) = e_2 + e_1^2e_2^*$, $f_u(e_2) = e_1$ $f_u(e_1^*) = e_2^*$, $f_u(e_2^*) = e_1^* - e_1(e_2^*)^2$ and $f_u(w) = u^{-1}$, where $w = e_1e_2^* + e_2e_1^* - e_2^2e_1^*e_2^*$ and $w^{-1} = e_1e_2^* + e_2e_1^* + e_1e_2(e_1^*)^2$. This yields a graded K-algebra homomorphism $\theta_u : L_K(R_2) \longrightarrow L_K(R_2)^{f_u}$ such that $\theta_u(v) = v$, $\theta_u(e_1) = e_1$, $\theta_u(e_2) = e_2$, $\theta_u(e_1^*) = e_1^*w^{-1} = e_2^* + e_2(e_1^*)^2$ and $\theta_u(e_2^*) = e_2^*w^{-1} = e_1^*$.

We claim that θ_u is not an isomorphism. Indeed, it suffices to show that $e_1^*w_2e_2 \notin \mathrm{Im}(\theta_u)$. We note that $e_1^*w_2e_2$ is exactly the $(1,2)$-entry of $Q_2 = Q\varphi_w(Q)$, where $Q = (e_i^*we_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -e_2e_1^* \end{pmatrix}$.

We have $f_w(v) = v$, $f_w(e_1) = we_1 = e_2$, $f_w(e_2) = we_2 = e_1 - e_2^2e_1^*$, $f_w(e_1^*) = e_1^*w^{-1} = e_2^* + e_2e_1^{*2}$ and $f_w(e_2^*) = e_2^*w^{-1} = e_1^*$. We then obtain that

$$f_w(Q) = f_w\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -e_2e_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -e_1e_2^* - e_1e_2(e_1^*)^2 + e_2^2e_1^*e_2^* \end{pmatrix},$$

and so

$$Q_2 = Qf_w(Q) = \begin{pmatrix} 1 & -e_1e_2^* - e_1e_2(e_1^*)^2 + e_2^2e_1^*e_2^* \\ -e_2e_1^* & 1 + e_2e_2^* + e_2^2(e_1^*)^2 \end{pmatrix}.$$

This implies that

$$e_1^*w_2e_2 = -e_1e_2^* - e_1e_2(e_1^*)^2 + e_2^2e_1^*e_2^* \in L_K(R_2)_0.$$

Assume that $-e_1e_2^* - e_1e_2(e_1^*)^2 + e_2^2e_1^*e_2^* \in \mathrm{Im}(\theta_u)$, that means, $-e_1e_2^* - e_1e_2(e_1^*)^2 + e_2^2e_1^*e_2^* = \theta_u(a)$ for some $a \in L_K(R_2)_0$. Then, a may be written of the form:

$$a = e_1t_1e_1^* + e_1t_2e_2^* + e_2t_3e_1^* + e_2t_4e_2^*,$$

where $t_i \in L_K(R_2)_0$ for all $1 \le i \le 4$. We note that $f_u(\theta_u(e_1^*)) = f_u(e_2^* + e_2(e_1^*)^2) = e_1^*$ and $f_u(\theta_u(e_2^*)) = f_u(e_1^*) = e_2^*$ for all $1 \le j \le 2$. Therefore, we have

$$\begin{aligned}\theta_u(e_ise_j^*) &= \theta_u(e_i) * \theta_u(s) * \theta_u(e_j^*) = e_i * \theta_u(s) * \theta_u(e_j^*) = e_i\varphi_u(\theta_u(s)) * \theta_u(e_j^*) \\ &= e_if_u(\theta_u(s))f_u(\theta_u(e_j^*)) = e_if_u(\theta_u(s))e_j^*\end{aligned}$$

for all $s \in L_K(R_2)_0$ and $1 \le i, j \le 2$. This implies that

$$\theta_u(a) = e_1f_u(\theta_u(t_1))e_1^* + e_1f_u(\theta_u(t_2))e_2^* + e_2f_u(\theta_u(t_3))e_1^* + e_2f_u(\theta_u(t_4))e_2^*,$$

and so

$$\begin{aligned}
-e_2e_1^* &= e_1^*(-e_1e_2^* - e_1e_2e_1^{*2} + e_2^2e_1^*e_2^*)e_1 = e_1^*\theta_u(a)e_1 = f_u(\theta_u(t_1)),\\
-v &= e_1^*(-e_1e_2^* - e_1e_2e_1^{*2} + e_2^2e_1^*e_2^*)e_2 = e_1^*\theta_u(a)e_2 = f_u(\theta_u(t_2)),\\
0 &= e_2^*(-e_1e_2^* - e_1e_2e_1^{*2} + e_2^2e_1^*e_2^*)e_1 = e_2^*\theta_u(a)e_1 = f_u(\theta_u(t_3)),\\
e_2e_1^* &= e_2^*(-e_1e_2^* - e_1e_2e_1^{*2} + e_2^2e_1^*e_2^*)e_2 = e_2^*\theta_u(a)e_2 = f_u(\theta_u(t_4)).
\end{aligned}$$

Hence, $e_2e_1^* = f_u(\theta_u(-t_1)) = f_u(\theta_u(t_4))$. Since f_u and θ_u are injective, we must have $-t_1 = t_4 =: t$, $t_2 = -v$ and $t_3 = 0$. Therefore,

$$a = -e_1e_2^* - e_1te_1^* + e_2te_2^*.$$

As above we have shown $e_2e_1^* = f_u(\theta_u(t))$. On the other hand,

$$\begin{aligned}
e_2 &= f_u(e_1) - e_1^2e_2^* = f_u(e_1) - f_u(e_2^2)f_u(e_1^*) = f_u(e_1 - e_2^2e_1^*)\\
e_1^* &= f_u(e_2^*) + e_1e_2^{*2} = f_u(e_2^*) + f_u(e_2)f_u(e_1^{*2}) = f_u(e_2^* + e_2e_1^{*2}).
\end{aligned}$$

So $e_2e_1^* = f_u(e_1e_2^* + e_1e_2e_1^{*2} - e_2^2e_1^*e_2^*) = f_u(-\theta_u(a)) = f_u(\theta_u(-a))$. It follows that $f_u(\theta_u(t)) = f_u(\theta_u(-a))$. By the injectivity of f_u and θ_u, $t = -a$, i.e.,

$$t = e_1e_2^* + e_1te_1^* - e_2te_2^*,$$

which yields that $(e_1^*)^m te_1^m = t$ for all $m \geq 1$. Since $t \in L_K(R_2)_0$, we write $t = kv + \sum_{i=1}^d k_i\alpha_i\beta_i^*$, where $d \geq 0$, $k, k_i \in K$ and $\alpha_i, \beta_i \in (R_2)^*$ with $|\alpha_i| = |\beta_i| \geq 1$ for all $1 \leq i \leq p$. We have $(e_1^*)^l e_1^l = v$ for all $l \geq 1$ and

$$(e_1^*)^{|\alpha_i|}(\alpha_i\beta_i^*)e_1^{|\alpha_i|} = \begin{cases} v & \text{if } \alpha_i = \beta_i^* = e_1^{|\alpha_i|}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for all $1 \leq i \leq d$. Hence, for $m = \max\{|\alpha_i| \mid 1 \leq i \leq d\}$, we obtain that

$$t = (e_1^*)^m te_1^m = (e_1^*)^m(kv + \sum_{i=1}^d k_i\alpha_i\beta_i^*)e_1^m = cv$$

for some $c \in K$, and so $e_1^*te_2 = e_1^*(cv)e_2 = c(e_1^*e_2) = 0$.

On the other hand, we have

$$e_1^*te_2 = e_1^*(e_1e_2^* + e_1te_1^* - e_2te_2^*)e_2 = v,$$

and so $v = 0$, a contradiction. Therefore, we must have $-e_1e_2^* - e_1e_2e_1^{*2} + e_2^2e_1^*e_2^* \notin \mathrm{Im}(\theta_u)$, thus θ_u is not an isomorphism.

4. Application: irreducible representations of $L_K(R_n)$

The study of irreducible representations of Leavitt path algebras is still in its early stage. Chen in his remarkable paper [14] initiated the study of simple modules over Leavitt path algebras. To understand his construction of simple modules, let us first recall some terminologies. Let E be an arbitrary graph. An *infinite path* $p := e_1 \cdots e_n \cdots$ in a graph E is a sequence of edges $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ such that $r(e_i) = s(e_{i+1})$ for all i. We denote by E^∞ the set of all infinite paths in E. For $p := e_1 \cdots e_n \cdots \in E^\infty$ and $n \geq 1$, Chen ([14]) defines $\tau_{>n}(p) = e_{n+1}e_{n+2}\cdots$, and $\tau_{\leq n}(p) = e_1e_2\cdots e_n$. Two infinite paths p, q are said to be *tail-equivalent* (written $p \sim q$) if there exist positive integers m, n such that $\tau_{>n}(p) = \tau_{>m}(q)$. Clearly $\sim$ is an equivalence relation on E^∞, and we let $[p]$ denote the $\sim$ equivalence class of the infinite path p.

Let c be a closed path in E. Then the path $ccc\cdots$ is an infinite path in E, which we denote by c^∞. Note that if c and d are closed paths in E such that $c = d^n$, then $c^\infty = d^\infty$ as elements of E^∞. The infinite path p is called *rational* in case $p \sim c^\infty$ for some closed path c. If $p \in E^\infty$ is not rational we say p is *irrational*. We denote by E^∞_{irr} the set of irrational paths in E.

Given a field K and an infinite path p, Chen ([14]) defines $V_{[p]}$ to be the K-vector space having $\{q \in E^\infty \mid q \in [p]\}$ as a basis, that is, having basis consisting of distinct elements of E^∞ which are tail-equivalent to p. $V_{[p]}$ is made a left $L_K(E)$-module by defining, for all $q \in [p]$ and all $v \in E^0$, $e \in E^1$,

1) $v \cdot q = q$ or 0 according as $v = s(q)$ or not;
2) $e \cdot q = eq$ or 0 according as $r(e) = s(q)$ or not;
3) $e^* \cdot q = \tau_1(q)$ or 0 according as $q = e\tau_1(q)$ or not.

In [14, Theorem 3.3] Chen showed that $V_{[p]}$ is a simple left $L_K(E)$-module; and $V_{[p]} \cong V_{[q]}$ if and only if $p \sim q$, which happens precisely when $V_{[p]} = V_{[q]}$.

Let $c = e_1 \cdots e_t$ be a closed path in E based at v and $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ a polynomial in $K[x]$. We denote by $f(c)$ the element

$$f(c) := a_0v + a_1c + \cdots + a_nc^n \in L_K(E).$$

We denote by $\mathrm{Irr}(K[x])$ the set of all irreducible polynomials in $K[x]$ written in the form $1 - a_1x - \cdots - a_nx^n$ and by Π_c the set of all the following closed paths $c_1 := c$, $c_2 := e_2\cdots e_te_1, \ldots, c_n := e_ne_1\cdots e_{n-1}$. In [7, Theorems 4.3 and 4.7] Ánh and the first author proved that for any irreducible polynomial $f \in \mathrm{Irr}(K[x])$, the all cyclic left $L_K(E)$-modules $S^f_{c_i}$ generated by z subject to $z = (a_1c_i + \cdots + a_nc_i^n)z$ $(1 \leq i \leq n)$, are both simple and isomorphic to each other, and define a simple $L_K(E)$-module $S^f_{\Pi_c}$.

In [21] Kuroda and the first author constructed additional classes of simple $L_K(R_n)$-modules by studying the twisted modules of the simple modules S^f_c under Anick type automorphisms of $L_K(R_n)$ mentioned in Corollary 2.9, where R_n is the rose graph with n petals.

For any integer $n \geq 2$, we denote by $C_s(R_n)$ the set of simple closed paths of the form $c = e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_m}$, where $k_i \in \{1, 3, \dots, n\}$ for all $1 \leq i \leq m-1$ and $k_m = 2$, in R_n. For any $c \in C_s(R_n)$, $p \in A_{R_n}(e_1, e_2)$ and $f \in \mathrm{Irr}(K[x])$, we have a left $L_K(R_n)$-module $S_c^{f,\,p}$, which is the twisted module $(S_c^f)^{\varphi_p}$, where φ_p is the automorphism of $L_K(R_n)$ defined in Corollary 2.9. By [21, Theorem 3.6], the $L_K(R_n)$-module $S_c^{f,\,p}$ is always simple.

For each pair $(f, c) \in \mathrm{Irr}(K[x]) \times C_s(R_n)$, we define an equivalence relation $\equiv_{f,c}$ on $A_{R_n}(e_1, e_n)$ as follows. For all $p, q \in A_{R_n}(e_1, e_n)$, $p \equiv_{f,c} q$ if and only if $p - q = rf(c)$ for some $r \in L_K(R_n)$. We denote by $[p]$ the $\equiv_{f,c}$ equivalence class of p. The following theorem provides us with a list of some classes of pairwise non-isomorphic simple $L_K(R_n)$-modules.

Theorem 4.1 *([21, Theorem 3.8]). Let K be a field, $n \geq 2$ a positive integer, and R_n the rose graph with n petals. Then, the following set*

$$\{V_{[\alpha]} \mid \alpha \in (R_n)^{\infty}_{irr}\} \sqcup \{S^f_{\Pi_c} \mid c \in SCP(R_n),\ f \in \mathrm{Irr}(K[x])\} \sqcup$$
$$\sqcup \{S_d^{f,\,p} \mid d \in C_s(R_n),\ f \in \mathrm{Irr}(K[x]),\ [0] \neq [p] \in A_{R_n}(e_1, e_2)/\equiv_{f,d}\}$$

consists of pairwise non-isomorphic simple left $L_K(R_n)$-modules.

The remainder of this section is to investigate the twisted modules $(V_{[\alpha]})^{\varphi_P}$ of the simple $L_K(R_n)$-modules $V_{[\alpha]}$ by graded automorphisms φ_P mentioned in Proposition 2.7, where p is an infinite path in R_n and $P \in GL_n(K)$. For convenience, we denote

$$V_{[\alpha]}^P := (V_{[\alpha]})^{\varphi_P^{-1}} = (V_{[\alpha]})^{\varphi_{P^{-1}}}$$

for any $\alpha \in (R_n)^{\infty}$ and $P \in GL_n(K)$. Denoting by $\cdot$ the module operation in $V_{[\alpha]}^P$, we have $v \cdot \beta = \varphi_P^{-1}(v)\beta = v\beta = \beta$,

$$e_i \cdot \beta = \varphi_P^{-1}(e_i)\beta = \varphi_{P^{-1}}(e_i)\beta = (\sum_{t=1}^{n} p'_{ti}e_t)\beta$$

and

$$e_i^* \cdot \beta = \varphi_P^{-1}(e_i^*)\beta = \varphi_{P^{-1}}(e_i^*)\beta = (\sum_{t=1}^{n} p_{it}e_t^*)\beta \ \text{ in } V_{[\alpha]}$$

for all $\beta \in [\alpha]$ and $1 \leq i \leq n$, where $P = (p_{ij})$ and $P^{-1} = (p'_{ij}) \in GL_n(K)$.

We note that the symmetric group S_n acts on the set $(R_n)^{\infty}$ by setting:

$$(\sigma, p = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m}\cdots) \longmapsto \sigma \cdot p = e_{\sigma(i_1)}e_{\sigma(i_2)}\cdots e_{\sigma(i_m)}\cdots$$

for all $\sigma \in S_n$ and $p = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m}\cdots \in (R_n)^{\infty}$. The orbit of p is the set $\{\sigma \cdot p \mid \sigma \in S_n\}$ and denoted by $S_n \cdot p$. The set of orbits of points p in $(R_n)^{\infty}$ under the action of S_n form a partition of $(R_n)^\infty$. The associated equivalence relation is defined by saying $p \sim q$ if and only if there exists an element $\sigma \in S_n$ such that $q = \sigma \cdot p$. Moreover, we have that $(R_n)^\infty_{irr}$ is an invariant subset of $(R_n)^\infty$, that means,

$$S_n \cdot (R_n)^\infty_{irr} := \{\sigma \cdot p \mid p \in (R_n)^\infty_{irr}\} = (R_n)^\infty_{irr}.$$

We denote by $(R_n)^\infty_{irr-eeri}$ the set of all irrational paths $p = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m}\cdots$ such that each edge is repeated infinitely many times in the path, that is,

$$|\{m \in \mathbb{N} \mid e_{i_m} = e_j\}| = \infty$$

for all $1 \leq j \leq n$. It is not hard to see that $(R_n)^\infty_{irr-eeri}$ is an invariant subset of $(R_n)^\infty$, and $(R_2)^\infty_{irr-eeri} = (R_2)^\infty_{irr}$.

We also have a group action of S_n on the general linear group $GL_n(K)$ defined by:

$$(\sigma, A = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]) \longmapsto \sigma \cdot A := [a_{\sigma(1)}\ a_{\sigma(2)}\ \cdots\ a_{\sigma(n)}]$$

for all $\sigma \in S_n$ and $A = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n] \in GL_n(K)$, where a_j is the j^{th} column of A. In the following theorem, we describe simple $L_K(R_n)$-modules $V^P_{[\alpha]}$ associated to pairs $(\alpha, P) \in (R_n)^\infty_{irr-eeri} \times GL_n(K)$.

Theorem 4.2. *Let K be a field, $n \geq 2$ a positive integer, and R_n be the rose graph with n petals. Let $P = (p_{ij}) \in GL_n(K)$ be an arbitrary element and $\alpha = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m}\cdots \in (R_n)^\infty_{irr-eeri}$. Then, the following statements hold:*

(1) *$V^P_{[\alpha]}$ is a simple left $L_K(R_n)$-module;*

(2) *$End_{L_K(R_n)}(V^P_{[\alpha]}) \cong K$;*

(3) *$V^P_{[\alpha]} \cong L_K(R_n)/\bigoplus_{m=0}^\infty L_K(R_n)(\varphi_P(\epsilon_m) - \varphi_P(\epsilon_{m+1}))$, where $\epsilon_0 := v$, $\epsilon_m = e_{i_1}\cdots e_{i_m}e^*_{i_m}\cdots e^*_{i_1}$ for all $m \geq 1$, and the graded automorphism φ_P is defined in Proposition 2.7. Consequently, $V^P_{[\alpha]}$ is not finitely presented.*

(4) *For any $\beta \in (R_n)^\infty_{irr-eeri}$, $V_{[\beta]} \cong V^P_{[\alpha]}$ if and only if there exist an element $\sigma \in S_n$ and a diagonal matrix $D \in GL_n(K)$ such that $P = \sigma \cdot D$ and $\sigma \cdot \beta \sim \alpha$.*

(5) *For any $\beta \in (R_n)^\infty_{irr-eeri}$ and any $Q \in GL_n(K)$, $V^Q_{[\beta]} \cong V^P_{[\alpha]}$ if and only if there exist an element $\sigma \in S_n$ and a diagonal matrix $D \in GL_n(K)$ such that $Q^{-1}P = \sigma \cdot D$ and $\sigma \cdot \beta \sim \alpha$.*

Proof. (1) It follows from the fact that $V_{[\alpha]}$ is a simple left $L_K(R_n)$-module (by [14, Theorem 3.3 (1)]) and $\varphi_{P^{-1}}$ is an automorphism of $L_K(R_n)$ (by Proposition 2.7).

(2) By [14, Theorem 3.3 (1)], we have $End_{L_K(R_n)}(V_{[\alpha]}) \cong K$, which yields that $End_{L_K(R_n)}(V^P_{[\alpha]}) \cong K$.

(3) Since $V_{[\alpha]}$ is a simple left $L_K(R_n)$-module, $V_{[\alpha]} = L_K(R_n)\alpha$. By [7, Theorem 3.4], we obtain that

$$\{r \in L_K(R_n) \mid r\alpha = 0 \text{ in } V_{[\alpha]}\} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} L_K(R_n)(\epsilon_m - \epsilon_{m+1}),$$

where $\epsilon_0 := v$ and $\epsilon_m = e_{i_1} \cdots e_{i_m} e^*_{i_m} \cdots e^*_{i_1} \in L_K(R_n)$ for all $m \geq 1$. By item (1), $V^P_{[\alpha]}$ is a simple left $L_K(R_n)$-module, and so $V^P_{[\alpha]} = L_K(R_n) \cdot \alpha$, that means, every element of $V^P_{[\alpha]}$ is of the form $r \cdot \alpha = \varphi_{P^{-1}}(r)\alpha$, where $r \in L_K(R_n)$. We next compute $\mathrm{ann}_{L_K(R_n)}(\alpha) := \{r \in L_K(R_n) \mid r \cdot \alpha = 0\}$. Indeed, let $r \in \mathrm{ann}_{L_K(R_n)}(\alpha)$. We then have $\varphi_{P^{-1}}(r)\alpha = r \cdot \alpha = 0$ in $V_{[\alpha]}$, which gives that $\varphi_{P^{-1}}(r) = \sum_{i=1}^k r_i(\epsilon_{m_i} - \epsilon_{m_i+1})$, where $k \geq 1$ and $r_i \in L_K(R_n)$ for all $1 \leq i \leq k$, and so

$$r = \varphi_P(\varphi_{P^{-1}}(r)) = \sum_{i=1}^k \varphi_P(r_i)\left(\varphi_P(\epsilon_{m_i}) - \varphi_P(\epsilon_{m_i+1})\right).$$

This implies that

$$\mathrm{ann}_{L_K(R_n)}(\alpha) \subseteq \bigoplus_{m=0}^{\infty} L_K(R_n)(\varphi_P(\epsilon_m) - \varphi_P(\epsilon_{m+1})).$$

Conversely, assume that $r \in \bigoplus_{m=0}^{\infty} L_K(R_n)(\varphi_P(\epsilon_m) - \varphi_P(\epsilon_{m+1}))$; i.e., $r = \sum_{i=1}^k r_i(\varphi_P(\epsilon_{m_i}) - \varphi_P(\epsilon_{m_i+1}))$, where $k \geq 1$ and $r_i \in L_K(R_n)$ for all $1 \leq i \leq k$. We then have

$$r \cdot \alpha = \varphi_{P^{-1}}(r)\alpha = \Big(\sum_{i=1}^k \varphi_{P^{-1}}(r_i)\left(\epsilon_{m_i} - \epsilon_{m_i+1}\right)\Big)\alpha = 0$$

in $V_{[\alpha]}$, and so $r \in \mathrm{ann}_{L_K(R_n)}(\alpha)$, showing that

$$\bigoplus_{m=0}^{\infty} L_K(R_n)(\varphi_P(\epsilon_m) - \varphi_P(\epsilon_{m+1})) \subseteq \mathrm{ann}_{L_K(R_n)}(\alpha).$$

Hence $\bigoplus_{m=0}^{\infty} L_K(R_n)(\varphi_P(\epsilon_m) - \varphi_P(\epsilon_{m+1})) = \mathrm{ann}_{L_K(R_n)}(\alpha)$. This implies that

$$V^P_{[\alpha]} \cong L_K(R_n)/\bigoplus_{m=0}^{\infty} L_K(R_n)(\varphi_P(\epsilon_m) - \varphi_P(\epsilon_{m+1})).$$

Assume that $V^P_{[\alpha]}$ is finitely presented. This shows that $\bigoplus_{m=0}^{\infty} L_K(R_n)(\varphi_P(\epsilon_m) - \varphi_P(\epsilon_{m+1}))$ is finitely generated, whence there exists an integer $k \geq 1$ such that $\varphi_P(\epsilon_m) = \varphi_P(\epsilon_{m+k})$ for all $m \geq 0$; equivalently, $\epsilon_m = \epsilon_{m+k}$ for all $m \geq 0$ (since φ_P is an automorphism), but this cannot happen in $L_K(R_n)$. Therefore, $V^P_{[\alpha]}$ is not finitely presented.

(4) ($\Leftarrow$) Assume that there exist an element $\sigma \in S_n$ and a diagonal matrix $D \in GL_n(K)$ such that $P = \sigma \cdot D$ and $\sigma \cdot \alpha \sim \beta$. We then have $\sigma \cdot \alpha = e_{\sigma(i_1)} e_{\sigma(i_2)} \cdots e_{\sigma(i_m)} \cdots \in (R_n)^\infty$ and $V_{[\beta]} \cong V_{[\sigma\cdot\alpha]}$ (by Theorem 4.1). By [7, Theorem 3.4], $V_{[\sigma\cdot\alpha]} \cong L_K(R_n)/\bigoplus_{m=0}^{\infty} L_K(R_n)(\lambda_m - \lambda_{m+1})$, where $\lambda_0 = v$ and $\lambda_m = e_{\sigma(i_1)} \cdots e_{\sigma(i_m)} e^*_{\sigma(i_m)} \cdots e^*_{\sigma(i_1)}$ for all $m \geq 1$.

On the other hand, by Item (3), $V^P_{[\alpha]} \cong L_K(R_n)/\bigoplus_{m=0}^{\infty} L_K(R_n)(\varphi_P(\epsilon_m)-\varphi_P(\epsilon_{m+1}))$, where $\epsilon_0 := v$, $\epsilon_m = e_{i_1}\cdots e_{i_m}e^*_{i_m}\cdots e^*_{i_1}$ for all $m \geq 1$. Write $P = (p_{ij})$ and $P^{-1} = (q_{ij})$. Then, since $P = \sigma \cdot D$, we have $p_{i\sigma(i)} \neq 0$ and $p_{ij} = 0$ for all $1 \leq i, j \leq n$ and $j \neq \sigma(i)$. This implies that $q_{\sigma(i)i} = p^{-1}_{i\sigma(i)}$ and $q_{ki} = 0$ for all $1 \leq i, k \leq n$ and $k \neq \sigma(i)$, and so

$$\varphi_P(e_i) = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}e_k = p_{k\sigma(k)}e_k \text{ and } \varphi_P(e^*_i) = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}e^*_k = q_{\sigma(k)k}e^*_k$$

for all $1 \leq i \leq n$, where $i = \sigma(k)$. This shows that

$$\begin{aligned}\varphi_P(\epsilon_m) &= \varphi_P\left(e_{i_1}\cdots e_{i_m}e^*_{i_m}\cdots e^*_{i_1}\right) = \varphi_P\left(e_{i_1}\right)\cdots\varphi_P\left(e_{i_m}\right)\varphi_P\left(e^*_{i_m}\right)\cdots\varphi_P\left(e^*_{i_1}\right)\\ &= p_{i_1\sigma(i_1)}e_{\sigma(i_1)}\cdots p_{i_m\sigma(i_m)}e_{\sigma(i_m)}q_{\sigma(i_m)i_m}e^*_{\sigma(i_m)}\cdots q_{\sigma(i_1)i_1}e^*_{\sigma(i_1)}\\ &= e_{\sigma(i_1)}\cdots e_{\sigma(i_m)}e^*_{\sigma(i_m)}\cdots e^*_{\sigma(i_1)} = \lambda_m\end{aligned}$$

for all $m \geq 1$, and so

$$V^P_{[\alpha]} \cong L_K(R_n)/\bigoplus_{m=0}^{\infty} L_K(R_n)(\lambda_m - \lambda_{m+1}) \cong V_{[\sigma\cdot\alpha]} \cong V_{[\beta]},$$

as desired.

($\Rightarrow$) Assume that $\theta : V_{[\beta]} \longrightarrow V^P_{[\alpha]}$ is an isomorphism of left $L_K(R_n)$-modules. Let $q \in [\beta]$ be an element such that $\theta(q) = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i$, where m is minimal such that $k_i \in K\setminus\{0\}$ and all the α_i are pairwise distinct in $[\alpha]$. Write $q = e_{t_1}e_{t_2}\cdots e_{t_k}\cdots \in (R_n)^{\infty}_{irr-eeri}$ and $\alpha_i = e_{j_{i1}}e_{j_{i2}}\cdots e_{j_{ik}}\cdots \in (R_n)^{\infty}_{irr-eeri}$, where $1 \leq t_i, j_{ik} \leq n$. By the minimality of m, we have

$$0 \neq \theta(\tau_{>1}(q)) = \theta(e^*_{t_1}q) = e^*_{t_1}\cdot\theta(q) = (\sum_{j=1}^{n} p_{t_1j}e^*_j)(\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{m} k^{(1)}_i\tau_{>1}(\alpha_i),$$

where $k^{(1)}_i = k_ip_{t_1j_{i1}} \in K\setminus\{0\}$ for all $1 \leq i \leq m$, and all the $\tau_{>1}(\alpha_i)$ are pairwise distinct in $[\alpha]$. For all $s \neq t_1$, we have

$$0 = \theta(e^*_sq) = e^*_s\cdot\theta(q) = (\sum_{j=1}^{n} p_{sj}e^*_j)(\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{m} k_ip_{sj_{i1}}\tau_{>1}(\alpha_i).$$

Since all the $\tau_{>1}(\alpha_i)$ are pairwise distinct, they are linearly independent in $V^P_{[\alpha]}$, and so $k_ip_{sj_{i1}} = 0$ for all $1 \leq i \leq m$, this yields $p_{sj_{i1}} = 0$ for all $1 \leq i \leq m$ and $s \neq t_1$; that means, for each $1 \leq i \leq n$, the j^{th}_{i1}-column of P has only the (t_1, j_{i1})-entry is nonzero. Assume that there exist two numbers $1 \leq i \neq k \leq m$ such that $\tau_{\leq 1}(\alpha_i) \neq \tau_{\leq 1}(\alpha_k)$, i.e., $e_{j_{i1}} \neq e_{j_{k1}}$. We then have $p_{t_1j_{i1}} \neq 0$, $p_{t_1j_{k1}} \neq 0$ and $p_{sj_{i1}} = 0 = p_{sj_{k1}}$ for all $s \neq t_1$, and so A is not invertible, a contradiction. This implies that $\tau_{\leq 1}(\alpha_i) = \tau_{\leq 1}(\alpha_j)$ for all $1 \leq i, j \leq m$, and the t^{th}_1-row of P has only the (t_1, j_{i1})-entry is nonzero.

If $e_{t_2} = e_{t_1}$, we then have

$$0 \neq \theta(\tau_{>2}(q)) = \theta(e_{t_2}^* \tau_{>1}(q)) = e_{t_2}^* \cdot \theta(\tau_{>1}(q)) = \sum_{i=1}^{m} k_i^{(2)} \tau_{>2}(\alpha_i),$$

where $k_i^{(2)} = k_i^{(1)} p_{t_1 j_{i1}} \in K \setminus \{0\}$ for all $1 \leq i \leq m$. By the minimality of m, all the $\tau_{>2}(\alpha_i)$ are pairwise distinct in $[\alpha]$ and $\tau_{\leq 1}(\tau_{>2}(\alpha_i)) = \tau_{\leq 1}(\tau_{>2}(\alpha_k))$ for all $1 \leq i, k \leq m$.

If $e_{t_2} \neq e_{t_1}$, then by using the quality

$$0 \neq \theta(\tau_{>1}(q)) = \sum_{i=1}^{m} k_i^{(1)} \tau_{>1}(\alpha_i)$$

and repeating the above same argument which was done for e_{t_1}, we obtain that the j_{i1}^{th}-column and t_2^{th}-row of P have only that the (t_2, j_{i2})-entry is nonzero, all the $\tau_{>2}(\alpha_i)$ are pairwise distinct in $[\alpha]$ and $\tau_{\leq 1}(\tau_{>2}(\alpha_i)) = \tau_{\leq 1}(\tau_{>2}(\alpha_k))$ for all $1 \leq i, k \leq m$. Therefore, in any case, we have that all the $\tau_{>2}(\alpha_i)$ are pairwise distinct in $[\alpha]$ and $\tau_{\leq 2}(\alpha_i) = \tau_{\leq 2}(\alpha_k)$ for all $1 \leq i, k \leq m$.

By repeating this process, we obtain that $\tau_{\leq l}(\alpha_i) = \tau_{\leq l}(\alpha_j)$ for all $l \geq 1$ and $1 \leq i, j \leq m$, and every row and every column of P has only a nonzero entry (since $q \in (R_n)^{\infty}_{irr-eeri}$). Then, since all the $\tau_{\leq l}(\alpha_i)$ are the same for all $l \geq 1$, and all the α_i are pairwise distinct, we must have $m = 1$. Since every row and every column of P has only a nonzero entry, there exists an element $\sigma \in S_n$ such that $p_{i\sigma(i)} \neq 0$ for all $1 \leq i \leq n$. This implies that $P = \sigma \cdot D$ for some diagonal matrix $D \in GL_n(K)$ and $\sigma \cdot q = e_{\sigma(t_1)} e_{\sigma(t_2)} \cdots e_{\sigma(t_k)} \cdots = \alpha_1$, this yields $\sigma \cdot q \sim \alpha$. Since $q \sim \beta$, there exist natural numbers s and l such that $\tau_{>s}(q) = \tau_{>l}(\beta)$, and so

$$\sigma \cdot \beta \sim \sigma \cdot \tau_{>l}(\beta) = \sigma \cdot \tau_{>s}(q) \sim \sigma \cdot q \sim \alpha,$$

as desired.

(5) We note that

$$\begin{aligned} V_{[\beta]}^{Q} \cong V_{[\alpha]}^{P} &\Longleftrightarrow (V_{[\alpha]})^{\varphi_{P^{-1}}} \cong (V_{[\beta]})^{\varphi_{Q^{-1}}} \Longleftrightarrow ((V_{[\beta]})^{\varphi_{Q^{-1}}})^{\varphi_Q} \cong ((V_{[\alpha]})^{\varphi_{P^{-1}}})^{\varphi_Q} \\ &\Longleftrightarrow V_{[\beta]} \cong (V_{[\alpha]})^{\varphi_{P^{-1}Q}} = V_{[\alpha]}^{Q^{-1}P}. \end{aligned}$$

Using this note and Item (4), we immediately get the statement, thus finishing the proof. $\square$

For any integer $n \geq 2$, we define an equivalence relation $\equiv$ on $(R_n)^{\infty}_{irr-eeri}$ as follows. For all $\alpha, \beta \in (R_n)^{\infty}_{irr-eeri}$, $\alpha \equiv \beta$ if and only if $\sigma \cdot \alpha \sim \beta$ for some $\sigma \in S_n$. We denote by $[\alpha]_{\equiv}$ the $\equiv$ equivalence class of α. The following corollary shows that all simple $L_K(R_n)$-modules $V_{[\alpha]}^{P}$ associated to pairs $(\alpha, P) \in (R_n)^{\infty}_{irr-eeri} \times GL_n(K)$ may be parameterized by the set $((R_n)^{\infty}_{irr-eeri}/\equiv) \times\ GL_n(K)$.

Corollary 4.3. *Let K be a field, $n \geq 2$ a positive integer and R_n be the rose graph with n petals. Then, the set*

$$\{V_{[\alpha]}^P \mid [\alpha]_\equiv \in (R_n)^\infty_{irr-eeri}/\equiv \ \text{ and } P \in GL_n(K)\}$$

consists of pairwise non-isomorphic simple left $L_K(R_n)$-modules.

Proof. Let α and β be elements of $(R_n)^\infty_{irr-eeri}$ such that $[\alpha]_\equiv \neq [\beta]_\equiv$. We then have that $\sigma \cdot \alpha$ is not tail-equivalent to β for all $\sigma \in S_n$. By Theorem 4.2 (5), $V_{[\alpha]}^P \ncong V_{[\beta]}^Q$ as left $L_K(R_n)$-modules for all $P, Q \in GL_n(K)$, which yields the statement, thus finishing the proof. $\square$

For any integer $n \geq 2$ and any field K, we denote by $\mathbb{U}_n(K)$ the subgroup of $GL_n(K)$ consisting all upper-triangle matrices with 1's along the diagonal. As the second corollary of Theorem 4.2, we obtain that all simple $L_K(R_n)$-modules $V_{[\alpha]}^P$ associated to pairs $(\alpha, P) \in (R_n)^\infty_{irr-eeri} \times \mathbb{U}_n(K)$ may be parameterized by the set $((R_n)^\infty_{irr-eeri}/\sim) \times \mathbb{U}_n(K)$.

Corollary 4.4. *Let K be a field, $n \geq 2$ a positive integer, R_n the rose graph with n petals and $\mathbb{U}_n(K)$ the subgroup of $GL_n(K)$ consisting all upper-triangle matrices with 1's along the diagonal. Let α and β be elements of $(R_n)^\infty_{irr-eeri}$ and let P and Q be elements of $\mathbb{U}_n(K)$. Then, $V_{[\alpha]}^P \cong V_{[\beta]}^Q$ if and only if $\alpha \sim \beta$ and $P = Q$. Consequently, the set*

$$\{V_{[\alpha]}^P \mid \alpha \in (R_n)^\infty_{irr-eeri} \text{ and } P \in \mathbb{U}_n(K)\}$$

consists of pairwise non-isomorphic simple left $L_K(R_n)$-modules.

Proof. ($\Rightarrow$) Assume that $V_{[\alpha]}^P \cong V_{[\beta]}^Q$. Then, by Theorem 4.2 (5), there exist an element $\sigma \in S_n$ and a diagonal matrix $D \in GL_n(K)$ such that $Q^{-1}P = \sigma \cdot D$ and $\sigma \cdot \beta \sim \alpha$. Since $P, Q \in \mathbb{U}_n(K)$, we have $\sigma \cdot D = Q^{-1}P \in \mathbb{U}_n(K)$, and so $\sigma = 1_{S_n}$ and $D = I_n$. This implies that $P = Q$ and $\alpha \sim \beta$.

($\Leftarrow$) It immediately follows from Theorem 4.2 (5), thus finishing the proof. $\square$

In the following theorem, we describe simple $L_K(R_n)$-modules $V_{[c^\infty]}^P$ associated to pairs $(c, P) \in SCP(R_n) \times GL_n(K)$.

Theorem 4.5. *Let K be a field, $n \geq 2$ a positive integer, and R_n be the rose graph with n petals. Let $P = (p_{ij}) \in GL_n(K)$ be an arbitrary element and $c \in SCP(R_n)$. Then, the following statements hold:*

(1) *$V_{[c^\infty]}^P$ is a simple left $L_K(R_n)$-module;*

(2) *$End_{L_K(R_n)}(V_{[c^\infty]}^P) \cong K$;*

(3) *$V_{[c^\infty]}^P \cong L_K(R_n)/L_K(R_n)(v - \varphi_P(c))$, where the graded automorphism φ_P is defined in Proposition 2.7.*

(4) *For any* $d \in SCP(R_n)$, $V_{[d^\infty]} \cong V^P_{[c^\infty]}$ *if and only if* $d = \varphi_P(\beta)$ *for some* $\beta \in \Pi_c$.

(5) *For any* $d \in SCP(R_n)$ *and any* $Q \in GL_n(K)$, $V^Q_{[d^\infty]} \cong V^P_{[c^\infty]}$ *if and only if* $\varphi_Q(d) = \varphi_P(\beta)$ *for some* $\beta \in \Pi_c$.

Proof. (1) It follows from the fact that $V_{[c^\infty]}$ is a simple left $L_K(R_n)$-module (by [14, Theorem 3.3 (1)]) and $\varphi_{P^{-1}}$ is an automorphism of $L_K(R_n)$ (by Proposition 2.7).

(2) By [14, Theorem 3.3 (1)], we have $End_{L_K(R_n)}(V_{[c^\infty]}) \cong K$, which yields that $End_{L_K(R_n)}(V^P_{[c^\infty]}) \cong K$.

(3) Since $V_{[c^\infty]}$ is a simple left $L_K(R_n)$-module, $V_{[c^\infty]} = L_K(R_n)c^\infty$. By [7, Theorem 4.3] (see also [4, Theorem 2.8]), we obtain that

$$\{r \in L_K(R_n) \mid rc^\infty = 0 \text{ in } V_{[c^\infty]}\} = L_K(R_n)(v - c).$$

By item (1), $V^P_{[c^\infty]}$ is a simple left $L_K(R_n)$-module, and so $V^P_{[c^\infty]} = L_K(R_n) \cdot c^\infty$, that means, every element of $V^P_{[c^\infty]}$ is of the form $r \cdot c^\infty = \varphi_{P^{-1}}(r)c^\infty$, where $r \in L_K(R_n)$. We next compute $\mathrm{ann}_{L_K(R_n)}(c^\infty) := \{r \in L_K(R_n) \mid r \cdot c^\infty = 0\}$. Indeed, let $r \in \mathrm{ann}_{L_K(R_n)}(c^\infty)$. We then have $\varphi_{P^{-1}}(r)c^\infty = r \cdot c^\infty = 0$ in $V_{[c^\infty]}$, which gives that $\varphi_{P^{-1}}(r) = s(v - c)$ for some $s \in L_K(R_n)$, and so

$$r = \varphi_P(\varphi_{P^{-1}}(r)) = \varphi_P(s)\,(v - \varphi_P(c))\,.$$

This implies that

$$\mathrm{ann}_{L_K(R_n)}(c^\infty) \subseteq L_K(R_n)(v - \varphi_P(c)).$$

Conversely, assume that $r \in L_K(R_n)(v - \varphi_P(c))$; i.e., $r = x(v - \varphi_P(c))$ for some $x \in L_K(R_n)$. We then have

$$r \cdot c^\infty = \varphi_{P^{-1}}(r)c^\infty = \varphi_{P^{-1}}(x(v - \varphi_P(c)))c^\infty = \varphi_{P^{-1}}(x)\,(v - c)\,c^\infty = 0$$

in $V_{[\alpha]}$, and so $r \in \mathrm{ann}_{L_K(R_n)}(c^\infty)$, showing that

$$L_K(R_n)(v - \varphi_P(c)) \subseteq \mathrm{ann}_{L_K(R_n)}(c^\infty).$$

Hence $L_K(R_n)(v - \varphi_P(c)) = \mathrm{ann}_{L_K(R_n)}(c^\infty)$. This implies that

$$V^P_{[c^\infty]} \cong L_K(R_n)/L_K(R_n)(v - \varphi_P(c)),$$

as desired.

(4) ($\Leftarrow$) Assume that $d = \varphi_P(\beta)$ for some $\beta \in \Pi_c$. Then, by [7, Theorem 4.3] (see also [4, Theorem 2.8]), $V_{[d^\infty]} \cong L_K(R_n)/L_K(R_n)(v - d)$. Since $\beta \in \Pi_c$ and by Theorem 4.1, $V_{[c^\infty]} \cong V_{[\beta^\infty]}$, and so

$$V^P_{[c^\infty]} = (V_{[c^\infty]})^{\varphi_{P^{-1}}} \cong (V_{[\beta^\infty]})^{\varphi_{P^{-1}}} = V^P_{[\beta^\infty]}.$$

By Item (3), we have

$$V^P_{[\beta^\infty]} \cong L_K(R_n)/L_K(R_n)/L_K(R_n)(v - \varphi_P(\beta)) = L_K(R_n)/L_K(R_n)(v-d) \cong V_{[d^\infty]},$$

and so $V_{[d^\infty]} \cong V^P_{[c^\infty]}$, as desired.

($\Rightarrow$) Assume that $\theta : V_{[d^\infty]} \longrightarrow V^P_{[c^\infty]}$ is an isomorphism of left $L_K(R_n)$-modules. Let $q \in [d^\infty]$ be an element such that $\theta(q) = \sum_{i=1}^m k_i\alpha_i$, where m is minimal such that $k_i \in K \setminus \{0\}$ and all the α_i are pairwise distinct in $[c^\infty]$. By repeating the method done in the proof of the direction ($\Rightarrow$) of Theorem 4.2 (4), we obtain that $\tau_{\le l}(\alpha_i) = \tau_{\le l}(\alpha_j)$ for all $l \ge 1$ and $1 \le i, j \le m$. Since all the α_i are pairwise distinct, we must have $m = 1$. Since $q \in [d^\infty]$, $\tau_{>l}(p) = d^\infty$ for some $l \ge 0$, and so

$$\theta(d^\infty) = \theta(\tau_{\le l}(q)^*q) = \tau_{\le l}(q)^* \cdot \theta(q) = k_1\varphi_{P^{-1}}(\tau_{\le l}(q)^*)\alpha_1 = k\alpha,$$

where $k \in K \setminus \{0\}$ and $\alpha = \tau_{>l}(\alpha_1)$. This implies that

$$k\alpha = \theta(d^\infty) = \theta(d^t d^\infty) = d^t \cdot \theta(d^\infty) = k\varphi_{P^{-1}}(d^t)\alpha$$

for all $t \ge 1$, and so $\alpha = \beta^\infty$ for some $\beta \in SCP(R_n)$ and $\varphi_{P^{-1}}(d) = \beta$. This shows that $d = \varphi_P(\varphi_{P^{-1}}(d)) = \varphi_P(\beta)$. Since $\alpha \in [c^\infty]$, we have $[\beta^\infty] = [c^\infty]$, and so $\beta \in \Pi_c$, as desired.

(5) We note that

$$\begin{aligned} V^Q_{[d^\infty]} \cong V^P_{[c^\infty]} &\iff (V_{[d^\infty]})^{\varphi_{Q^{-1}}} \cong (V_{[c^\infty]})^{\varphi_{P^{-1}}} \iff ((V_{[d^\infty]})^{\varphi_{Q^{-1}}})^{\varphi_Q} \cong ((V_{[c^\infty]})^{\varphi_{P^{-1}}})^{\varphi_Q} \\ &\iff V_{[d^\infty]} \cong (V_{[c^\infty]})^{\varphi_{P^{-1}Q}} = V^{Q^{-1}P}_{[c^\infty]}. \end{aligned}$$

Using this note and Item (4), we immediately get the statement, thus finishing the proof. □

In light of Theorem 4.5, we define an equivalence relation $\equiv$ on $SCP(R_n) \times GL_n(K)$ as follows: For all (c, P) and $(d, Q) \in SCP(R_n) \times GL_n(K)$, $(c, P) \equiv (d, Q)$ if and only if $\varphi_Q(d) = \varphi_P(\beta)$ for some $\beta \in \Pi_c$. We denote by $[(c, P)]$ the $\equiv$-equivalence class of (c, P). As a corollary of Theorem 4.5, we obtain that all simple $L_K(R_n)$-modules $V^P_{[c^\infty]}$ associated to pairs $(\alpha, P) \in SCP(R_n) \times GL_n(K)$ may be parameterized by the set $(SCP(R_n) \times GL_n(K))/\equiv$.

Corollary 4.6. *Let K be a field, $n \ge 2$ a positive integer and R_n the rose graph with n petals. Then, the set*

$$\{V^P_{[c^\infty]} \mid [(c, P)] \in (SCP(R_n) \times GL_n(K))/\equiv\}$$

consists of pairwise non-isomorphic simple left $L_K(R_n)$-modules.

Proof. It immediately follows from Theorem 4.5 (5). □

We should note that for all $(P, Q) \in GL_n(K) \times GL_n(K)$ and $(c, d) \in SCP(R_n) \times SCP(R_n)$ with $|c| \neq |d|$, we always have $\deg(\varphi_Q(d)) = |d| \neq |c| = \deg(\varphi_P(\beta))$ for all $\beta \in \Pi_c$, and so $\varphi_Q(d) \neq \varphi_P(\beta)$ for all $\beta \in \Pi_c$. Consequently, we obtain that $[(c, P)] \neq [(d, Q)]$. This shows that there are infinitely many isomorphic classes of simple modules described in Corollary 4.6.

Using Theorems 4.1, 4.2 and 4.5, we obtain a list of some classes of pairwise non-isomorphic simple modules for the Leavitt path algebra $L_K(R_n)$.

Theorem 4.7. *Let K be a field, $n \geq 2$ a positive integer and R_n be the rose graph with n petals. Then, the following simple left $L_K(R_n)$-modules*

(1) $V_{[\alpha]}$, *where* $\alpha \in (R_n)^{\infty}_{irr}$;
(2) $S^f_{\Pi_c}$, *where* $c \in SCP(R_n)$ *and* $f \in \mathrm{Irr}(K[x])$;
(3) $S^{f,p}_d$, *where* $d \in C_s(R_n)$, $f \in \mathrm{Irr}(K[x])$ *with* $\deg(f) \geq 2$, $[0] \neq [p] \in A_{R_n}(e_1, e_2)/\equiv_{f,d}$;
(4) $V^P_{[\alpha]}$, *where* $[\alpha]_\equiv \in (R_n)^{\infty}_{irr-eeri}/\equiv$ *and* $I_n \neq P \in GL_n(K)$;
(5) $V^P_{[c^\infty]}$, *where* $[(c, P)] \in (SCP(R_n) \times GL_n(K))/\equiv$ *and* $P \neq I_n$

are pairwise non-isomorphic.

Proof. By Theorem 4.1, all the simple modules $V_{[\alpha]}$, $S^f_{\Pi_c}$ and $S^{f,p}_d$ are pairwise non-isomorphic. By Corollary 4.3, all $V^P_{[\alpha]}$ ($[\alpha]_\equiv \in (R_n)^{\infty}_{irr-eeri}/\equiv$ and $P \in GL_n(K)$) are pairwise non-isomorphic. By Corollary 4.6, all $V^P_{[c^\infty]}$ ($[(c, P)] \in (SCP(R_n) \times GL_n(K))/\equiv$) are pairwise non-isomorphic. By Theorem 4.2 (3), $V^P_{[\alpha]}$ is not finitely presented for all $\alpha \in (R_n)^{\infty}_{irr-eeri}$ and $P \in GL_n(K)$. While by Theorem 4.5 (3), $V^P_{[c^\infty]}$ is finitely presented for all $c \in SCP(R_n)$ and $P \in GL_n(K)$. By [21, Theorem 3.6 (5)], all $S^{f,p}_d$ are finitely presented. By [7, Theorem 4.3] (see also [21, Theorem 3.2]), all $S^f_{\Pi_c}$ are finitely presented. Therefore, each $V^P_{[\alpha]}$ is neither isomorphic to any $S^f_{\Pi_c}$ nor any $V^P_{[c^\infty]}$. By Theorem 4.5 (2), $End_{L_K(R_n)}(V^P_{[c^\infty]}) \cong K$ for all $c \in SCP(R_n)$ and $P \in GL_n(K)$. While by [21, Theorem 3.6 (4)], $End_{L_K(R_n)}(S^{f,p}_d) \cong K[x]/K[x]f(x)$ for all $d \in C_s(R_n)$, $f \in \mathrm{Irr}(K[x])$ and $p \in A_{R_n}(e_1, e_2)$. Therefore, each $V^P_{[c^\infty]}$ is not isomorphic to any $S^{f,p}_d$ with $\deg(f) \geq 2$, thus finishing the proof. □

We end this article by presenting the following example which illustrates Theorem 4.7.

Examples 4.8. Let $\mathbb{R}$ be the field of real numbers and R_2 be the rose with 2 petals. We then have $(R_2)^{\infty}_{irr-eeri} = (R_2)^{\infty}_{irr}$, and $C_s(R_2) = \{e_1^m e_2 \mid m \in \mathbb{Z}, m \geq 0\}$ and $A_{R_2}(e_1, e_2)$ is the $\mathbb{R}$-subalgebra of $L_{\mathbb{R}}(R_2)$ generated by v, e_1, e_2^*, that means,

$$A_{R_2}(e_1, e_2) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i e_1^{m_i}(e_2^*)^{l_i} \mid n \geq 1,\, r_i \in \mathbb{R},\, m_i, l_i \geq 0\},$$

where $e_1^0 = v = (e_2^*)^0$, and $\mathbb{R}[e_1] \subseteq A_{R_2}(e_1, e_2)$. By Corollary 4.7, the following simple left $L_{\mathbb{R}}(R_2)$-modules

(1) $V_{[\alpha]}$, where $\alpha \in (R_2)^{\infty}_{irr}$;
(2) $S^f_{\Pi_c}$, where $c \in SCP(R_2)$ and $f \in \mathrm{Irr}(\mathbb{R}[x])$;
(3) $S^{f,p}_{e_1^m e_2}$, where $m \geq 0$, $f = 1 - bx - ax^2 \in \mathbb{R}[x]$ with $a \neq 0$ and $b^2 + 4a < 0$, and $0 \neq p \in \mathbb{R}[e_1]$;
(4) $V^P_{[\alpha]}$, where $[\alpha]_\equiv \in (R_2)^{\infty}_{irr}/\equiv$ and $I_2 \neq P \in GL_2(\mathbb{R})$;
(5) $V^P_{[c^\infty]}$, where $[(c, P)] \in (SCP(R_2) \times GL_2(\mathbb{R}))/\equiv$ and $P \neq I_2$

are pairwise non-isomorphic.

Data availability

No data was used for the research described in the article.

Acknowledgments

The authors take an opportunity to express their deep gratitude to the anonymous referee for extremely careful reading, highly professional working with our manuscript, and valuable suggestions. The first author was supported by the Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics (VIASM) and by the Vietnam Academy of Science and Technology under grant CTTH00.01/24-25.

References

[1] G. Abrams, Leavitt path algebras: the first decade, Bull. Math. Sci. 5 (2015) 59–120.
[2] G. Abrams, P. Ara, M. Siles Molina, Leavitt Path Algebras, Lecture Notes in Mathematics Series, vol. 2191, Springer-Verlag Inc., 2017.
[3] G. Abrams, G. Aranda Pino, The Leavitt path algebra of a graph, J. Algebra 293 (2005) 319–334.
[4] G. Abrams, F. Mantese, A. Tonolo, Extensions of simple modules over Leavitt path algebras, J. Algebra 431 (2015) 78–106.
[5] A. Alahmedi, H. Alsulami, S. Jain, Efim I. Zelmanov, Structure of Leavitt path algebras of polynomial growth, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 110 (2013) 15222–15224.
[6] A. Alahmadi, H. Alsulami, S.K. Jain, E. Zelmanov, Leavitt path algebras of finite Gelfand-Kirillov dimension, J. Algebra Appl. 11 (6) (2012) 1250225, 6 pp.
[7] P.N. Ánh, T.G. Nam, Special irreducible representations of Leavitt path algebras, Adv. Math. 377 (2021) 107483.
[8] P. Ara, M.A. Moreno, E. Pardo, Nonstable K-theory for graph algebras, Algebr. Represent. Theory 10 (2007) 165–224.
[9] P. Ara, K.M. Rangaswamy, Finitely presented simple modules over Leavitt path algebras, J. Algebra 417 (2014) 333–352.
[10] M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh, Modules over regular algebras of dimension 3, Invent. Math. 106 (2) (1991) 335–388.

[11] M. Artin, J. Zhang, Noncommutative projective schemes, Adv. Math. 109 (2) (1994) 228–287.
[12] J.E. Avery, R. Johansen, W. Szymański, Visualizing automorphisms of graph algebras, Proc. Edinb. Math. Soc. 61 (1) (2018) 215–249.
[13] V. Bavula, The group of automorphisms of the Jacobian algebra $\mathbb{A}_n$, J. Pure Appl. Algebra 216 (3) (2012) 535–564.
[14] X.W. Chen, Irreducible representations of Leavitt path algebras, Forum Math. 27 (2015) 549–574.
[15] P.M. Cohn, Free Rings and Their Relations, 2nd ed, Academic Press, London, 1985.
[16] R. Conti, J.H. Hong, W. Szymański, Endomorphisms of graph algebras, J. Funct. Anal. 263 (2012) 2529–2554.
[17] J. Cuntz, Automorphisms of certain simple C^*-algebras, in: Quantum Fields - Algebras, Processes, Proc. Sympos., Univ. Bielefeld, Bielefeld, 1978, Springer, Vienna, 1980, pp. 187–196.
[18] J. Dixmier, Sur les algebres de Weyl, Bull. Soc. Math. Fr. 96 (1968) 209–242.
[19] R. Johansen, A.P.W. Sørensen, W. Szymański, The polynomial endomorphisms of graph algebras, Groups Geom. Dyn. 14 (2020) 1043–1075.
[20] A. Kumjian, D. Pask, I. Raeburn, Cuntz-Krieger algebras of directed graphs, Pac. J. Math. 184 (1998) 161–174.
[21] S. Kuroda, T.G. Nam, Anick type automorphisms and new irreducible representations of Leavitt path algebras, J. Noncommut. Geom. 17 (2023) 811–834.
[22] W. Leavitt, The module type of a ring, Trans. Am. Math. Soc. 42 (1962) 113–130.
[23] V. Lopatkin, T.G. Nam, On the homological dimensions of Leavitt path algebras with coefficients in commutative rings, J. Algebra 812 (2017) 273–292.
[24] I. Raeburn, Graph Algebras, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 103, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005, vi+113 pp. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC.
[25] S.P. Smith, Category equivalences involving graded modules over path algebras of quivers, Adv. Math. 230 (2012) 1780–1810.
[26] M. Tomforde, Uniqueness theorems and ideal structure for Leavitt path algebras, J. Algebra 318 (2007) 270–299.
[27] U.U. Umirbaev, The Anick automorphism of free associative algebras, J. Reine Angew. Math. 605 (2007) 165–178.
[28] J.J. Zhang, Twisted graded algebras and equivalences of graded categories, Proc. Lond. Math. Soc. 72 (2) (1996) 281–311.