

**BỘ GIÁO DỤC  
VÀ ĐÀO TẠO**

**VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC  
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM**

**HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ**

-----



**BÙI THỊ THU HOÀI**

**MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN TRONG  
PHÂN TÍCH PHI TUYẾN HÌNH HỌC  
KẾT CẤU DẦM FGM VÀ CNTRC**

**TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ  
KỸ THUẬT CƠ KHÍ VÀ CƠ KỸ THUẬT**

Ngành : Cơ kỹ thuật

Mã số : 9 52 01 01

**Hà Nội – 2024**

Công trình được hoàn thành tại: Học viện Khoa học và Công nghệ - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Người hướng dẫn khoa học 1: GS. TS. Nguyễn Đình Kiên

Người hướng dẫn khoa học 2: PGS. TS. Trần Thị Thu Hương

Phản biện 1: GS. TS. Trần Văn Liên

Phản biện 2: PGS. TS. Phan Bùi Khôi

Phản biện 3: PGS. TS. Lê Khả Hòa

Luận án đã được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ cấp Học viện, họp tại Học viện Khoa học và Công nghệ - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi , ngày tháng năm

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Học viện Khoa học và Công nghệ
- Thư viện Quốc gia Việt Nam

# MỞ ĐẦU

## 1. Tính cấp thiết của đề tài

Cùng với sự phát triển của khoa học công nghệ và các vật liệu mới có độ bền cơ học cao hơn, kết cấu được thiết kế cho phép có chuyển vị lớn trong quá trình làm việc. Phân tích phi tuyến kết cấu có chuyển vị lớn là đề tài quan trọng trong lĩnh vực cơ học, có ý nghĩa thực tiễn, thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong nước và trên thế giới.

Phân tích ứng xử phi tuyến của kết cấu và vật rắn liên quan tới hai bài toán chính: (1) Bài toán phi tuyến hình học, trong đó kết cấu có chuyển vị tương đối lớn (moderate displacements) hoặc chuyển vị lớn (large displacements); (2) Bài toán phi tuyến vật liệu, trong đó ứng suất tại một hoặc một số vùng của kết cấu vượt qua giới hạn đàn hồi (kết cấu đàn-dẻo). Các kết quả phân tích chuyển vị lớn của kết cấu nói chung, khung, dầm làm từ các vật liệu mới nói riêng còn rất hạn chế. Vì lí do đó, luận án tập trung nghiên cứu ứng xử chuyển vị lớn của kết cấu khung, dầm làm từ hai loại vật liệu mới là vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Material - FGM) và vật liệu composite gia cường bằng các ống nano carbon (Carbon Nanotube Reinforced Composite - CNTRC). Do các phương pháp giải tích thường gặp khó khăn trong phân tích chuyển vị lớn của kết cấu, luận án sử dụng cách tiếp cận số, cụ thể là phương pháp phần tử hữu hạn, để tính toán các đặc trưng cơ học như trường chuyển vị và trường ứng suất của kết cấu khung, dầm FGM và CNTRC có chuyển vị lớn. Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu, cấu hình hình học như các tham số nội tại của kết cấu (độ mảnh kết cấu, tham số tỷ lệ kích thước) tới chuyển vị lớn của kết cấu khung, dầm nêu trên được nghiên cứu chi tiết.

## 2. Mục tiêu của Luận án

Luận án nhằm phát triển một số mô hình phần tử dầm phi tuyến và chương trình tính toán số dùng trong phân tích ứng xử chuyển vị lớn của kết cấu khung, dầm làm từ một số loại vật liệu mới. Với chương trình tính toán số xây dựng được, luận án sẽ tiến hành phân tích một số bài toán cụ thể và đánh giá ảnh hưởng của một số tham số hình học, vật liệu tới ứng xử phi tuyến của kết cấu khung, dầm làm từ các vật liệu mới nêu trên.

## 3. Nội dung chính của Luận án

Luận án gồm 3 chương, trong đó chương 1 trình bày tổng quan tình hình nghiên cứu trong phân tích kết cấu FGM và CNTRC với chú trọng thảo luận

các kết quả trong phân tích phi tuyến. Chương 2 phân tích chuyển vị lớn của dầm sandwich FGM và CNTRC trên cơ sở công thức Lagrange toàn phần. Chương 3 sử dụng phương pháp hệ tọa độ đồng hành để xây dựng phần tử dầm phi tuyến cho phân tích chuyển vị lớn của kết cấu khung, dầm FGM có xét tới ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro. Một số kết luận của luận án được tóm lược trong phần kết luận.

#### **4. Phương pháp nghiên cứu**

Luận án sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết với cách tiếp cận số dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Các phương trình cơ bản cho kết cấu được thiết lập trên cơ sở một số lý thuyết dầm khác nhau, trong khi phương pháp phần tử hữu hạn được sử dụng để xây dựng các phương trình cân bằng phi tuyến rời rạc và tính toán các đặc trưng cơ học của kết cấu.

### **Chương 1. TỔNG QUAN**

Chương này trình bày tổng quan tình hình nghiên cứu trong phân tích kết cấu FGM và CNTRC trên thế giới và trong nước, trong đó chú trọng tới các kết quả trong phân tích phi tuyến. Các kết quả phân tích sử dụng phương pháp số, đặc biệt là phương pháp PTHH được thảo luận chi tiết. Phân tích tổng quan cho thấy phương pháp PTHH là lựa chọn hợp lý để thay thế các phương pháp giải tích truyền thống trong phân tích phi tuyến kết cấu FGM nói chung và chuyển vị lớn của khung, dầm FGM nói riêng. Trên cơ sở đánh giá tổng quan, Luận án đã đưa ra hướng nghiên cứu và đề ra các vấn đề nghiên cứu cụ thể.

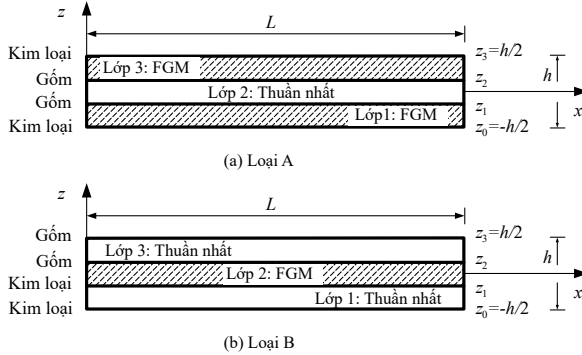
### **Chương 2. CHUYỂN VỊ LỚN CỦA DẦM SANDWICH FGM VÀ CNTRC**

#### **2.1. Mở đầu**

Sử dụng công thức Lagrange toàn phần, chương 2 xây dựng phần tử dầm phi tuyến cho phân tích chuyển vị lớn của dầm sandwich FGM và dầm sandwich CNTRC. Phần tử dầm được xây dựng trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất với phép cầu phương giảm bậc để tránh hiện tượng nghẽn trượt (shear locking). Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu, cấu hình sandwich tới chuyển vị lớn tuyến của dầm được khảo sát chi tiết. Đặc biệt, ảnh hưởng của các mô hình đồng nhất hóa vật liệu và sự kết tụ của các ống nano carbon tới chuyển vị lớn của dầm được quan tâm nghiên cứu.

## 2.2. Dầm sandwich FGM

Hình 2.1 minh họa dầm sandwich FGM (viết tắt là dầm FGSW) có chiều dài  $L$ , thiết diện hình chữ nhật ( $b \times h$ ) trong hệ tọa độ Đề-các  $(x, z)$ . Hai mô hình dầm được xét đến trong Chương này là dầm có hai lớp ngoài được làm từ vật liệu FGM, lớp lõi là vật liệu thuần gốm (gọi là dầm loại A, Hình 2.1a) và dầm có hai lớp ngoài được làm từ vật liệu thuần nhất, lớp lõi là vật liệu FGM (gọi là dầm loại B, Hình 2.1b).



**Hình 2.1.** Mô hình dầm FGSW.

Dầm FGSW được giả định được làm từ hai pha vật liệu, pha gốm và pha kim loại với tỷ phần thể tích của các pha thành phần thay đổi theo chiều cao dầm theo quy luật lũy thừa. Với dầm Loại A như chỉ ra trong Hình 2.1a, tỉ phần thể tích của pha gốm ( $V_c$ ) và pha kim loại ( $V_m$ ) cho bởi

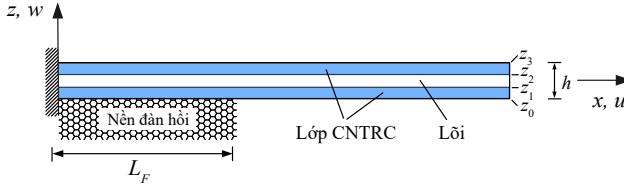
$$V_c = \begin{cases} \left( \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n, & z \in [z_0, z_1] \\ 1, & z \in [z_1, z_2] \\ \left( \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \right)^n, & z \in [z_2, z_3] \end{cases} \quad \text{và} \quad V_m = 1 - V_c \quad (2.1)$$

Với dầm Loại B trên Hình 2.1b, tỉ phần thể tích của các pha vật liệu thành phần thay đổi theo chiều cao dầm như sau

$$V_c = \begin{cases} 0, & z \in [z_0, z_1] \\ \left( \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^n, & z \in [z_1, z_2] \\ 1, & z \in [z_2, z_3] \end{cases} \quad \text{và} \quad V_m = 1 - V_c \quad (2.2)$$

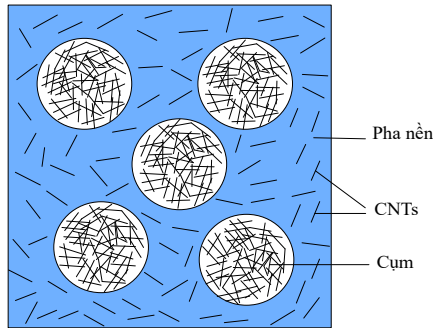
## 2.3. Dầm sandwich CNTRC

Hình 2.2 minh họa dầm công-xôn dạng sandwich gia cường bởi các ống nano carbon. Dầm có chiều dài  $L$ , diện tích thiết diện ngang hình chữ nhật với kích thước  $(b \times h)$ . Dầm được đặt một phần trên nền đàn hồi Pasternak với phần dầm tựa lên có chiều dài  $L_F$ , tính từ đầu ngàm của dầm.



**Hình 2.2.** Mô hình dầm FGSW-CNTRC nằm một phần trên nền đàn hồi.

Do tỉ số độ mảnh lớn và độ cứng chống uốn thấp, CNTs có xu hướng kết tụ (agglomeration) trong pha nền polymer, tạo ra các cụm (inclusions) dạng hình cầu, như minh họa trên Hình 2.3 cho một phần tử đại diện (Representative Volume Element, RVE). CNTs trong RVE được tìm thấy ở cả dạng bó (bundle) hoặc dạng bó cụm (cluster) bên trong các hình cầu và rải rác trong pha nền. Sự phân bố cụ thể này được mô tả bởi Shi và các cộng sự [7] bằng cách sử dụng mô hình hai tham số được tóm tắt dưới đây.



**Hình 2.3.** Phần tử đại diện với các hình cầu kết tụ CNTs.

Tổng thể tích ( $V_r$ ) của CNTs bên trong phần tử đại diện RVE có thể tích ( $V$ ) được chia thành hai phần

$$V_r = V_r^{\text{inclusion}} + V_r^m \quad (2.3)$$

với  $V_r^{\text{inclusion}}$  và  $V_r^m$  tương ứng là thể tích của CNTs bên trong các cụm hình cầu (vùng tập trung CNTs) và bên trong pha nền.

Sự kết tụ của CNTs được mô tả thông qua hai tham số dưới đây

$$\xi = \frac{V_{\text{inclusion}}}{V}, \quad \zeta = \frac{V_r^{\text{inclusion}}}{V_r} \quad \text{với } (\xi, \zeta) \in [0, 1] \quad (2.4)$$

Trong biểu thức (2.4),  $V_{\text{inclusion}}$  là thể tích của các cụm hình cầu bên trong RVE. tham số  $\xi$  được định nghĩa là tỉ phần thể tích của các cụm hình cầu so với tổng thể tích của phần tử đại diện ( $V$ );  $\zeta$  là tỉ phần thể tích của CNTs bên trong các cụm hình cầu ( $V_r^{\text{inclusion}}$ ) so với tổng thể tích của CNTs. Trong trường hợp,  $\xi < 1$ , sự kết tụ là từng phần, các ống nano carbon phân bố cả trong các cụm hình cầu và nằm rải rác trong pha nền. Trường hợp  $\xi = 1$  có nghĩa là CNTs phân bố đều trong pha nền và  $\zeta = 1$  tương ứng với trường hợp CNTs nằm hoàn toàn trong các cụm hình cầu.

## 2.4. Các tính chất hiệu dụng

### 2.4.1 Hệ số đàn hồi của dầm FGSW

Trong chương này, bốn mô hình đồng nhất hóa vật liệu, cụ thể là các mô hình của Voigt (V), Mori-Tanaka (MT), Hashin-Strickman (HS) và Tamura-Tomota-Ozawa (TTO) được áp dụng để tính toán các tính chất đàn hồi hiệu dụng của dầm FGM hai pha.

Theo mô hình Voigt, tính chất đàn hồi hiệu dụng ( $\mathcal{P}_f$ ) của vật liệu FGM hai pha được giả định tỉ lệ thuận với tỉ phần thể tích của vật liệu thành phần như sau [133]

$$\mathcal{P}_f(z) = \mathcal{P}_c V_c(z) + \mathcal{P}_m V_m(z) \quad (2.5)$$

trong đó  $\mathcal{P}_c$  và  $\mathcal{P}_m$  tương ứng là tính chất đàn hồi của gốm và kim loại.

Theo mô hình Mori-Tanaka [132], mô-đun đàn hồi hiệu dụng ( $E_f$ ) và hệ số Poisson hiệu dụng ( $\nu_f$ ) được biểu diễn như sau

$$E_f = \frac{9K_f G_f}{3K_f + G_f}, \quad \nu_f = \frac{3K_f - 2G_f}{6K_f + 2G_f} \quad (2.6)$$

trong đó  $K_f$  và  $G_f$  tương ứng là mô-đun khối hiệu dụng và mô-đun trượt hiệu dụng, các mô-đun này có thể được tính từ mô-đun đàn hồi của các vật liệu thành phần

Các giới hạn Hashin và Shtrikman [134] cho mô-đun đàn hồi của composite hai pha thu được bằng cách xét đến ảnh hưởng của hệ số Poisson của cả hai pha. Các giới hạn dưới cho mô-đun đàn hồi ( $E_f$ ), hệ số Poisson hiệu dụng ( $\nu_f$ ) và mô-đun trượt hiệu dụng ( $G_f$ ) như sau

$$E_f = \frac{9KG}{3K+G}, \quad \nu_f = \frac{3K-2G}{2(3K+G)}, \quad G_f = \frac{E_f}{2(1-\nu_f)} \quad (2.9)$$

Mô hình thứ tư được xét đến ở đây là mô hình Tamura-Tomota-Ozawa [135]. Theo mô hình TTO, mô-đun đàn hồi hiệu dụng ( $E_f$ ) có dạng

$$E_f = \frac{E_c V_c + E_m V_m \frac{q + E_c}{q + E_m}}{V_c + V_m \frac{q + E_c}{q + E_m}} \quad (2.13)$$

với  $q$  là tham số thử nghiệm đại diện cho tỉ số giữa ứng suất và biến dạng truyền.

Mô-đun trượt hiệu dụng ( $G_f$ ) trong mô hình TTO được đánh giá thông qua mô-đun đàn hồi hiệu dụng ( $E_f$ ) trong phương trình (2.13) và hệ số Poisson hiệu dụng ( $\nu_f$ ), trong đó hệ số Poisson hiệu dụng được tính toán qua biểu thức  $\nu_f = \nu_c V_c + \nu_m V_m$ . Phương trình (2.13) sẽ đưa được về dạng biểu diễn cho mô-đun đàn hồi hiệu dụng theo mô hình Voigt trong trường hợp  $q = \pm\infty$ .

#### 2.4.2 Tính chất hiệu dụng của dầm CNTRC

Mô-đun khối và mô-đun trượt hiệu dụng của composite thu được bằng cách sử dụng mô hình đồng nhất hóa vật liệu Mori-Tanaka như sau

$$K = K_{\text{out}} + \left[ 1 + \frac{\xi \left( \frac{K_{\text{in}}}{K_{\text{out}}} - 1 \right)}{1 + \alpha(1 - \xi) \left( \frac{K_{\text{in}}}{K_{\text{out}}} - 1 \right)} \right], \quad (2.17)$$

$$G = G_{\text{out}} + \left[ 1 + \frac{\xi \left( \frac{G_{\text{in}}}{G_{\text{out}}} - 1 \right)}{1 + \beta(1 - \xi) \left( \frac{G_{\text{in}}}{G_{\text{out}}} - 1 \right)} \right]$$

trong đó ( $K_{\text{in}}$ ) và ( $G_{\text{in}}$ ) là mô-đun khối hiệu dụng và mô-đun trượt hiệu dụng bên trong các cụm hình cầu; ( $K_{\text{out}}$ ) và ( $G_{\text{out}}$ ) là các mô-đun khối hiệu dụng và mô-đun trượt hiệu dụng bên ngoài các cụm hình cầu;  $\alpha$  và  $\beta$  được xác định như sau

$$\alpha = \frac{1 + \nu_{\text{out}}}{3(1 - \nu_{\text{out}})}, \quad \beta = \frac{2(4 - 5\nu_{\text{out}})}{15(1 - \nu_{\text{out}})} \quad (2.18)$$

với  $\nu_{\text{out}} = (3K_{\text{out}} - 2G_{\text{out}})/2(3K_{\text{out}} + G_{\text{out}})$ . Mô-đun Young ( $E$ ) và tỷ số Poisson ( $\nu$ ) của dầm CNTRC được tính như sau



$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad (2.19)$$

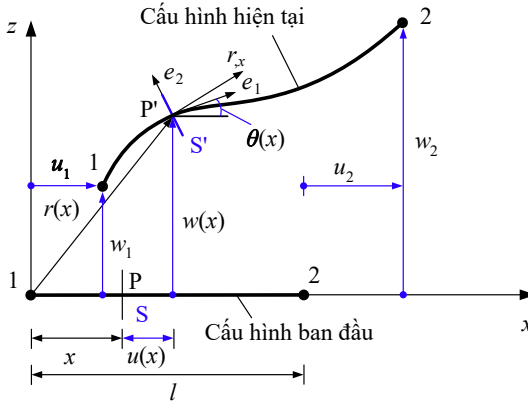
## 2.5. Phần tử dầm Lagrange toàn phần

### 2.5.1 Véc-tơ chuyển vị nút

Véc-tơ chuyển vị nút của phần tử dầm hai nút, minh họa trên Hình 2.4, bao gồm sáu bậc tự do

$$\mathbf{d} = \{u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T \quad (2.20)$$

trong đó  $u_i$ ,  $w_i$ ,  $\theta_i$ , ( $i = 1, 2$ ) tương ứng là chuyển vị theo phương  $x$ , chuyển vị theo phương  $z$  và góc quay tại nút thứ  $i$ .



**Hình 2.4.** Cấu hình và các chuyển vị nút của phần tử dầm.

Giả sử trong cấu hình ban đầu phần tử dầm là thẳng, có chiều dài ban đầu  $l$  nằm trên trục  $x$  của hệ tọa độ Đề-các  $(x, z)$ . Điểm  $P$  trong cấu hình ban đầu ứng với hoành độ  $x$  và thiết diện ngang  $S$ , sau quá trình biến dạng trở thành điểm  $P'$  và thiết diện  $S'$ . Biến dạng tại điểm  $P$  có thể được xác định qua góc  $\theta(x)$  - góc quay của thiết diện  $S$  và véc-tơ vị trí hiện tại  $\mathbf{r}(x)$  của điểm  $P'$  như sau [137]

$$\mathbf{r}(x) = [x + u(x)]\mathbf{i} + w(x)\mathbf{j} \quad (2.21)$$

trong đó  $\mathbf{i}$  và  $\mathbf{j}$  tương ứng là các véc-tơ đơn vị trên các trục  $x$  và  $z$ ;  $0 \leq x \leq l$ , xác định trong cấu hình ban đầu;  $u(x)$  và  $w(x)$  tương ứng là các chuyển vị dọc trục và chuyển vị theo phương ngang của điểm  $P$ . Thiết diện  $S$  tương ứng với điểm  $P$  có thể trải qua chuyển vị và góc quay lớn theo các chuyển vị  $u(x)$ ,  $w(x)$  và góc quay  $\theta(x)$ , như được minh họa trên Hình 2.4. Véc-tơ  $\mathbf{r}_{,x}(x)$  tại

điểm  $P'$ , tiếp tuyến với cầu hình biến dạng hiện tại của phần tử có thể được biểu diễn theo các biến dạng dọc trục và biến dạng trượt,  $\varepsilon(x)$  và  $\gamma(x)$  như sau

$$\mathbf{r}_{,x}(x) = \frac{d\mathbf{r}(x)}{dx} = [1 + \varepsilon(x)]\mathbf{e}_1 + \gamma(x)\mathbf{e}_2 \quad (2.22)$$

trong đó  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  tương ứng là các véc-tơ đơn vị, vuông góc và song song với thiết diện hiện tại  $S'$ . Độ cong của dầm,  $\kappa(x)$ , tại điểm  $P$  cho bởi

$$\kappa(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (2.24)$$

Từ phương trình (2.21), ta có thể viết lại các biểu thức cho biến dạng dọc trục và biến dạng trượt dưới dạng

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \cos \theta + \frac{dw}{dx} \sin \theta - 1 \\ \gamma(x) &= \frac{dw}{dx} \cos \theta - \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \sin \theta \end{aligned} \quad (2.25)$$

### 2.5.2 Năng lượng biến dạng và phép nội suy

Năng lượng biến dạng cho phần tử dầm  $U$  được xác định từ năng lượng biến dạng đàn hồi của dầm ( $U_B$ ) và năng lượng sinh ra do biến dạng của nền đàn hồi ( $U_F$ ),  $U = U_B + U_F$ , trong đó

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ A_{11}\varepsilon(x)^2 + 2A_{12}\varepsilon(x)\kappa(x) + A_{22}\kappa(x)^2 + \psi A_{33}\gamma(x)^2 \right] dx \quad (2.26)$$

với  $\psi$  là hệ số hiệu chỉnh trượt, được chọn bằng 5/6 cho dầm với thiết diện ngang hình chữ nhật xét đến trong Luận án này;  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  và  $A_{33}$  là các độ cứng của dầm.

Năng lượng biến dạng đàn hồi sinh ra do nền đàn hồi Pasternak dùng cho phân tích chuyển vị lớn có dạng

$$U_F = \frac{k_W}{2} \int_0^{L_F} (u^2 + w^2) dx + \frac{k_G}{2} \int_0^{L_F} (\theta - \gamma)^2 dx \quad (2.28)$$

trong đó  $k_W$  và  $k_G$  tương ứng là độ cứng của nền đàn hồi Winkler và độ cứng chống trượt của nền đàn hồi Pasternak;  $L_F$  là chiều dài nền đàn hồi.

Các chuyển vị và góc quay trong phần tử của phần tử dầm biến dạng trượt bậc nhất có thể được nội suy tuyến tính qua các giá trị nút như sau

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 \end{bmatrix} \{ u_1 \quad u_2 \quad w_1 \quad w_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \}^T \quad (2.29)$$

với

$$N_1 = \frac{l-x}{l}, \quad N_2 = \frac{x}{l} \quad (2.30)$$

Tuy nhiên, phép nội suy tuyến tính ở trên dẫn tới phần tử gặp phải hiện tượng nghẽn trượt [139]. Để giải quyết vấn đề này, phương pháp cầu phương một điểm Gauss được áp dụng để đánh giá năng lượng biến dạng của phần tử. Như vậy chúng ta có thể biểu diễn năng lượng biến dạng (2.26) và (2.28) dưới dạng sau

$$\begin{aligned} U_B &= \frac{l}{2} (A_{11} \hat{\varepsilon}^2 + 2A_{12} \hat{\varepsilon} \hat{\kappa} + A_{22} \hat{\chi}^2 + \psi A_{33} \hat{\gamma}^2) \\ U_F &= \frac{l k_W}{6} (u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2 + w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) + \frac{l k_G}{2} (\hat{\theta} - \hat{\gamma})^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{l}\right) \cos \hat{\theta} + \frac{w_2 - w_1}{l} \sin \hat{\theta} - 1 \\ \hat{\gamma} &= -\left(1 + \frac{u_2 - u_1}{l}\right) \sin \hat{\theta} + \frac{w_2 - w_1}{l} \cos \hat{\theta} \\ \hat{\chi} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{l} \quad \text{với} \quad \hat{\theta} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

### 2.5.3 Véc-tơ nội lực

Véc-tơ nội lực tại nút  $\mathbf{f}_{in}$  cho phần tử được chia thành hai phần,  $\mathbf{f}_{in}^B$  sinh ra do biến dạng của dầm và  $\mathbf{f}_{in}^F$  sinh ra do biến dạng của nền đàn hồi

$$\mathbf{f}_{in} = \mathbf{f}_{in}^B + \mathbf{f}_{in}^F \quad (2.34)$$

Các véc-tơ nội lực tại nút này thu được bằng cách vi phân biểu thức năng lượng biến dạng trong (2.31) theo véc-tơ chuyển vị nút

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{in}^B &= \frac{\partial U_B}{\partial \mathbf{d}} = \left\{ f_{u_1}^B \quad f_{w_1}^B \quad f_{\theta_1}^B \quad f_{u_2}^B \quad f_{w_2}^B \quad f_{\theta_2}^B \right\}^T, \\ \mathbf{f}_{in}^F &= \frac{\partial U_F}{\partial \mathbf{d}} = \left\{ f_{u_1}^F \quad f_{w_1}^F \quad f_{\theta_1}^F \quad f_{u_2}^F \quad f_{w_2}^F \quad f_{\theta_2}^F \right\}^T \end{aligned} \quad (2.35)$$

### 2.5.4 Ma trận độ cứng tiếp tuyến

Ma trận độ cứng tiếp tuyến phần tử  $\mathbf{k}_t$  cũng được viết dưới dạng

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_t^B + \mathbf{k}_t^F \quad (2.38)$$

trong đó  $\mathbf{k}_i^B$  và  $\mathbf{k}_i^F$  tương ứng là các ma trận độ cứng tiếp tuyến phần tử sinh ra từ biến dạng của dầm và biến dạng của nền đàn hồi thu được bằng cách vi phân hai lần năng lượng biến dạng đàn hồi (2.31) theo véc-tơ chuyển vị nút

$$\mathbf{k}_i^B = \frac{\partial^2 U_B}{\partial \mathbf{d}^2} = \begin{bmatrix} k_{u_1 u_1}^B & k_{u_1 w_1}^B & k_{u_1 \theta_1}^B & k_{u_1 u_2}^B & k_{u_1 w_2}^B & k_{u_1 \theta_2}^B \\ & k_{w_1 w_1}^B & k_{w_1 \theta_1}^B & k_{w_1 u_2}^B & k_{w_1 w_2}^B & k_{w_1 \theta_2}^B \\ & & k_{\theta_1 \theta_1}^B & k_{\theta_1 u_2}^B & k_{\theta_1 w_2}^B & k_{\theta_1 \theta_2}^B \\ & & & k_{u_2 u_2}^B & k_{u_2 w_2}^B & k_{u_2 \theta_2}^B \\ \text{syms.} & & & & k_{w_2 w_2}^B & k_{w_2 \theta_2}^B \\ & & & & & k_{\theta_2 \theta_2}^B \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

và

$$\mathbf{k}_i^F = \frac{\partial^2 U_F}{\partial \mathbf{d}^2} = \begin{bmatrix} k_{u_1 u_1}^F & k_{u_1 w_1}^F & k_{u_1 \theta_1}^F & k_{u_1 u_2}^F & k_{u_1 w_2}^F & k_{u_1 \theta_2}^F \\ & k_{w_1 w_1}^F & k_{w_1 \theta_1}^F & k_{w_1 u_2}^F & k_{w_1 w_2}^F & k_{w_1 \theta_2}^F \\ & & k_{\theta_1 \theta_1}^F & k_{\theta_1 u_2}^F & k_{\theta_1 w_2}^F & k_{\theta_1 \theta_2}^F \\ & & & k_{u_2 u_2}^F & k_{u_2 w_2}^F & k_{u_2 \theta_2}^F \\ \text{syms.} & & & & k_{w_2 w_2}^F & k_{w_2 \theta_2}^F \\ & & & & & k_{\theta_2 \theta_2}^F \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

## 2.6. Phương trình cân bằng

Phương trình cân bằng dùng cho phân tích chuyển vị lớn của dầm theo ngôn ngữ PTHH có thể viết dưới dạng sau [140]

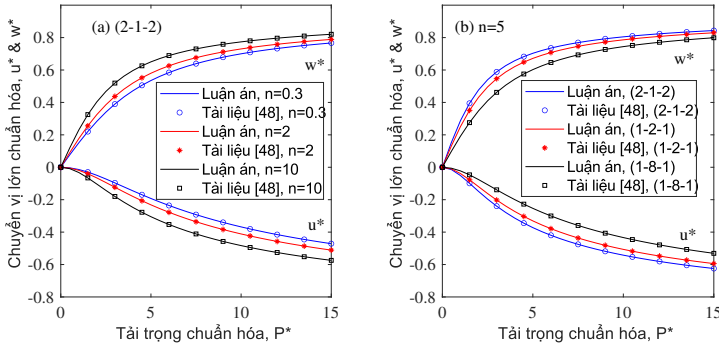
$$\mathbf{g}(\mathbf{p}, \lambda) = \mathbf{q}_{\text{in}}(\mathbf{p}) - \lambda \mathbf{f}_{\text{ef}} = \mathbf{0} \quad (2.44)$$

trong đó véc-tơ lực dư  $\mathbf{g}$  là hàm của chuyển vị nút hiện tại của kết cấu  $\mathbf{p}$  và tham số lực ngoài  $\lambda$ ;  $\mathbf{q}_{\text{in}}$  là véc-tơ lực nút của kết cấu, được ghép nối từ véc-tơ nội lực  $\mathbf{f}_{\text{in}}$ , và  $\mathbf{f}_{\text{ef}}$  là véc-tơ lực ngoài cố định. Hệ phương trình (2.44) gồm  $n$  phương trình với  $m$  ẩn số là các chuyển vị và góc xoay tại các nút  $\mathbf{p}$ . Nghiệm của phương trình (2.44) tương ứng với một giá trị nào đó của tham số  $\lambda$  cho điểm cân bằng trong không gian lực-chuyển vị nút. Tập hợp các điểm cân bằng tạo thành đường cân bằng (equilibrium path).

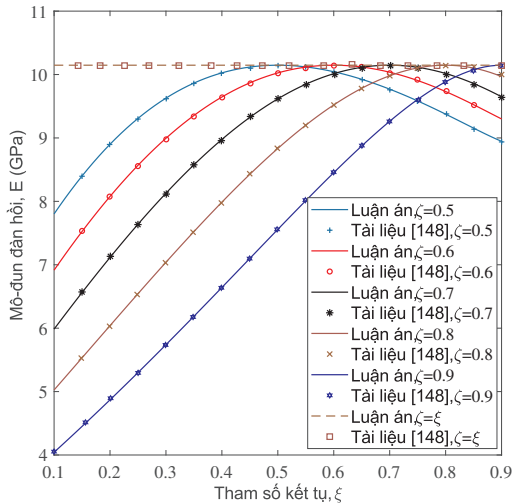
Hệ phương trình cân bằng (2.44) có thể giải bằng thuật toán tăng dần/lặp (incremental/iterative method) trên cơ sở phương pháp Newton-Raphson.

## 2.7. Nghiên cứu kiểm chứng

Hình 2.6 so sánh đáp ứng chuyển vị lớn của dầm thu được trong Luận án với kết quả của nhóm tác giả Nguyễn Đình Kiên và Trần Thị Thơm trong [48] cho các giá trị khác nhau của tham số vật liệu và tỉ số chiều dày giữa các lớp. Hình 2.6 cho thấy kết quả của Luận án tương đồng với kết quả thu được từ bài toán phần tử dầm Euler-Bernoulli sử dụng phương pháp hệ tọa độ đồng hành trong [48]. Lưu ý rằng kết quả so sánh trong Hình 2.6 minh họa cho mô hình Voigt do Tài liệu [48] chỉ sử dụng mô hình này.



**Hình 2.6.** So sánh chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGSW chịu tải ngang.



**Hình 2.7.** Ảnh hưởng của sự kết tụ CNT tới mô-đun đàn hồi Young của dầm CNTRC với  $V_{CNT} = 0.1$

Mô-đun đàn hồi Young của kết cấu composite gia cường các ống nano

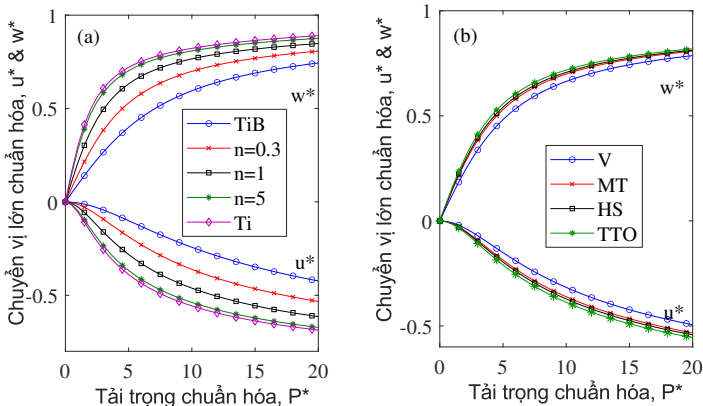
carbon thu được trong Luận án được so sánh với kết quả của Daghigh và cộng sự [101] như minh họa trên Hình 2.7, trong đó tỷ phần thể tích ống nano carbon gia cường là  $V_{CNT} = 0.1$ . Hình 2.7 cho thấy sự tương đồng cao giữa kết quả thu được trong Luận án và tài liệu tham khảo. Hình 2.7 cũng chỉ ra rằng trong trường hợp  $\zeta > \xi$ , khi tăng giá trị của  $\xi$ , mô-đun đàn hồi Young cũng tăng tới khi đạt giá trị lớn nhất tại  $\xi = \zeta$  (ứng với trường hợp CNT phân tán đều). Ngược lại, trong trường hợp  $\zeta < \xi$ , sự tăng giá trị của  $\xi$  làm giảm mô-đun đàn hồi Young.

## 2.8. Kết quả số và thảo luận

### 2.8.1. Chuyển vị lớn của dầm FGSW

#### 2.8.1.1. Dầm công-xôn FGSW chịu tải trọng ngang

Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu và mô hình đồng nhất hóa lên ứng xử chuyển vị lớn của dầm FGSW có thể thấy rõ từ Hình 2.8, trong đó các đường cong tải-chuyển vị của dầm đối xứng loại A (2-1-2) được minh họa cho các giá trị khác nhau của tham số vật liệu và mô hình đồng nhất hóa vật liệu khác nhau. Hình 2.8a cho thấy ảnh hưởng của tham số vật liệu đến đáp ứng chuyển vị lớn của dầm. Đáp ứng chuyển vị lớn thu được bằng các mô hình MT, HS và TTO, như ta thấy từ các Hình 2.8b là khá gần nhau, trong khi sử dụng mô hình Voigt cho sự khác nhau đáng kể so với các mô hình còn lại. Trong bốn mô hình được xét đến trong Luận án thì mô hình Voigt cứng hơn so với các mô hình còn lại. Kết quả này cho thấy, mặc dù mô hình Voigt đơn giản về mặt toán học, nhưng cần cẩn trọng trong đánh giá đáp ứng chuyển vị lớn của dầm FGSW thu được khi sử dụng mô hình Voigt.

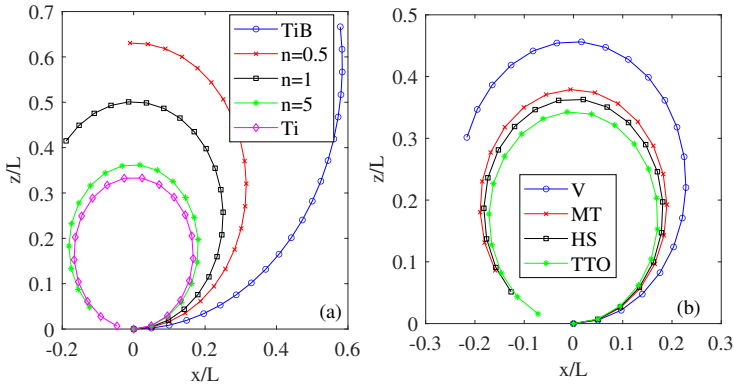


**Hình 2.8.** Đường cong tải-chuyển vị của dầm (2-1-2) loại A :

(a) Mô hình MT và  $n$  thay đổi; (b)  $n = 0.3$  và các mô hình đồng nhất hóa khác nhau.

### 2.8.1.2. Dầm công-xôn FGSW chịu mô-men

Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu, mô hình đồng nhất hóa vật liệu và cấu hình sandwich tới ứng xử của dầm được nhìn rõ qua Hình 2.15, trên đó cấu hình biến dạng của dầm sandwich loại A tương ứng với hai giá trị của mô-men,  $M^* = 6$  và  $M^* = 10$ , được minh họa cho các giá trị khác nhau của tham số vật liệu, các mô hình đồng nhất hóa và tỷ số độ dày giữa các lớp. Hình 2.15 cũng chỉ rõ ảnh hưởng của mô hình đồng nhất hóa vật liệu lên ứng xử chuyển vị lớn của dầm, trong đó mô hình Voigt lại một lần nữa được thấy là cứng nhất trong khi mô hình TTO là mềm nhất. Cả dầm loại A và loại B đều uốn cong theo cung tròn theo thứ tự TTO, HS, MT và V.

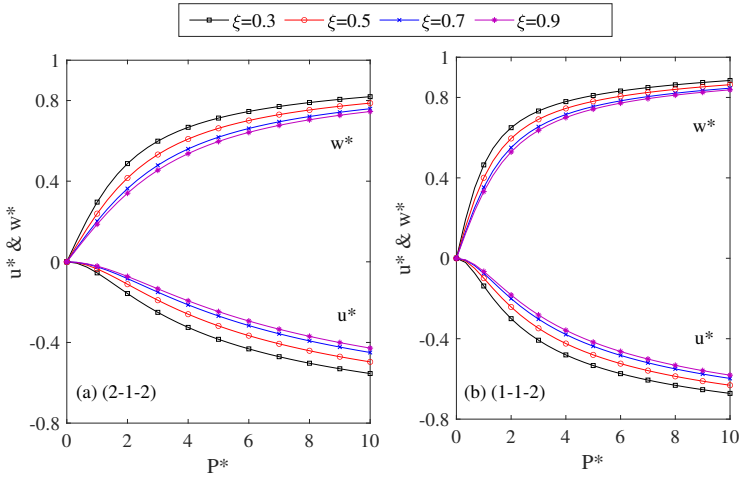


**Hình 2.15.** Cấu hình biến dạng của dầm (2-1-2) loại A: (a) Mô hình MT,  $M^* = 6$  và  $n$  thay đổi; (b)  $n = 0.5$ ,  $M^* = 10$  và các mô hình đồng nhất hóa khác nhau.

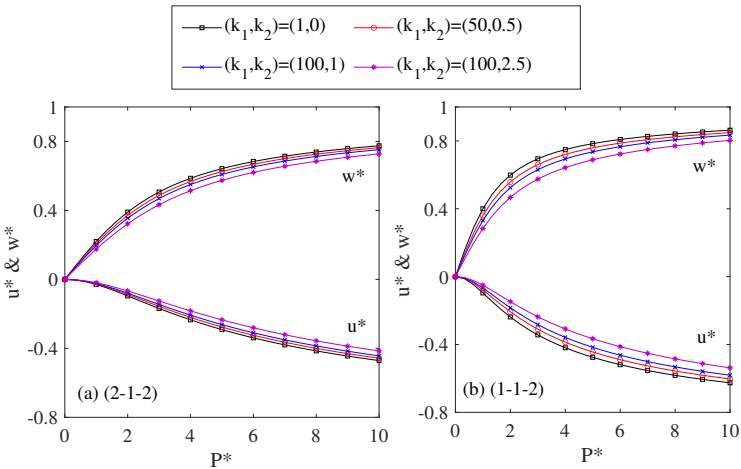
### 2.8.1. Chuyển vị lớn của dầm sandwich CNTRC

Ảnh hưởng của độ kết tụ CNTs được minh họa trên các Hình 2.21, trong đó đáp ứng phi tuyến của dầm đối xứng (2-1-2) và không đối xứng (1-1-2) của dầm chịu tải trọng ngang và mô-men tại đầu cuối của dầm công-xôn được minh họa cho  $L/h = 10$ ,  $V_{CNT} = 0.1$ ,  $\alpha_F = 0.4$ ,  $\zeta = 0.9$ ,  $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$  và các giá trị khác nhau của tham số kết tụ  $\xi$ . Hình 2.21 cho thấy chuyển vị tại đầu tự do của dầm giảm đi khi tăng tỷ phần thể tích CNTs, và sự suy giảm này không phụ thuộc vào giá trị của tải trọng cũng như cấu hình sandwich của dầm.

Hình 2.25 minh họa đường cong tải-chuyển vị của dầm sandwich CNTRC đối xứng (2-1-2) và không đối xứng (1-1-2) chịu tải trọng ngang với  $L/h = 10$ ,  $V_{CNT} = 0.1$ ,  $\alpha_F = 0.4$ ,  $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.7)$  và các giá trị khác nhau của tham số độ cứng nền đàn hồi. Kết quả thu được như mong đợi, trong đó



**Hình 2.21.** Đường cong tải-chuyển vị của dầm công-xôn CNTRC chịu tải ngang với các giá trị khác nhau của tham số kết tụ  $\xi$  ( $L/h = 10$ ,  $V_{CNT} = 0.1$ ,  $\alpha_F = 0.4$ ,  $\zeta = 0.9$ ,



**Hình 2.25.** Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi tới chuyển vị lớn của dầm CNTRC chịu tải ngang ( $L/h = 10$ ,  $V_{CNT} = 0.1$ ,  $\alpha_F = 0.4$ ,  $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.7)$ ).

chuyển vị lớn của dầm giảm khi tăng độ cứng của nền đàn hồi, và điều này không phụ thuộc vào tải trọng và cấu hình dầm.

## Kết luận Chương 2

Chương hai đã xây dựng phần tử dầm phi tuyến cho nghiên cứu chuyển vị lớn của dầm sandwich làm từ vật liệu có cơ tính biến thiên và vật liệu



composite gia cường bằng các ống nano carbon. Phần tử được xây dựng trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất và các hàm nội suy tuyến tính. Kỹ thuật tích phân giảm bậc được sử dụng để tránh hiện tượng nghẽn trượt. Phần tử xây dựng trong chương được sử dụng cùng với các thuật toán lặp và phương pháp độ dài cung để phát triển chương trình tính toán. Hai bài toán cụ thể đã được phân tích và khảo sát trong chương. Kết quả của chương 2 đã công bố trên các bài báo từ số 1 đến số 7 trong "Danh mục công trình liên quan tới Luận án".

### Chương 3. CHUYỂN VỊ LỚN CỦA KHUNG, DẦM FGM

#### 3.1. Mở đầu

Chương này tiến hành nghiên cứu chuyển vị lớn của khung, dầm FGM có xét tới ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro. Phần tử dầm phi tuyến được xây dựng trên cơ sở công thức hệ tọa độ đồng hành, trong đó công thức phần tử được xây dựng trong hệ tọa độ địa phương sau đó chuyển về hệ tọa độ tổng quát nhờ các ma trận chuyển đổi. Phần tử dầm trong chương được xây dựng trên cơ sở lý thuyết dầm Euler- Bernoulli, có xét tới ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro nhờ lý thuyết cặp ứng suất sửa đổi (Modify Couple Stress Theory - MCST). Để tăng tốc độ hội tụ của phần tử, các đa thức nhận được từ lời giải phương trình vi phân cân bằng phi tuyến của phần tử được sử dụng để nội suy trường chuyển vị. Nghiên cứu số được thực hiện để minh họa ảnh hưởng của của sự phân bố vật liệu, tham số kích thước tới ứng xử phi tuyến của kết cấu khung, dầm.

#### 3.2. Dầm FGM

Xét dầm phẳng FGM có thiết diện ngang hình chữ nhật ( $b \times h$ ). Dầm được làm từ vật liệu phối trộn giữa gốm và kim loại, với tỷ phần thể tích của vật liệu thành phần biến thiên theo chiều cao dầm theo quy luật hàm lũy thừa

$$V_c = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n, \quad V_m = 1 - V_c \quad (3.1)$$

Hai mô hình đồng nhất hóa vật liệu được sử dụng trong chương này để tính toán các tính chất đàn hồi hiệu dụng của vật liệu FGM là mô hình Voigt và mô hình Mori-Tanaka. Theo mô hình Voigt, tính chất vật liệu hiệu dụng ( $\mathcal{P}_f$ ), được tính theo quy luật phối trộn như sau

$$\mathcal{P}_f(z) = \mathcal{P}_c V_c(z) + \mathcal{P}_m V_m(z) \quad (3.2)$$

với  $\mathcal{P}_c$ ,  $\mathcal{P}_m$  tương ứng là tính chất vật liệu của gốm và kim loại.

Sử dụng mô hình Mori-Tanaka [132], mô-đun hiệu dụng Young ( $E_f$ ) và hệ số Poisson ( $\nu_f$ ) liên hệ với các mô-đun khối hiệu dụng ( $K_f$ ) và mô-đun trượt hiệu dụng ( $G_f$ ) theo phương trình

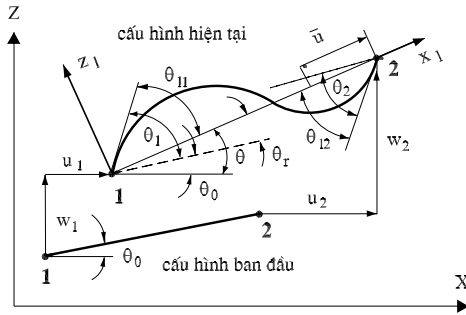
$$E_f = \frac{9K_f G_f}{3K_f + G_f}, \quad \nu_f = \frac{3K_f - 2G_f}{6K_f + 2G_f} \quad (3.4)$$

### 3.3. Hệ tọa độ đồng hành và véc-tơ chuyển vị nút

Hình 3.1 minh họa phần tử dầm phẳng hai nút trong hệ tọa độ tổng quát  $(x, z)$  và hệ tọa độ đồng hành  $(x_l, z_l)$ . Theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, chuyển vị theo hướng các trục tọa độ địa phương  $x_l$  và  $z_l$  của một điểm bên trong phần tử dầm,  $\bar{u}(\bar{x}, \bar{z})$  và  $\bar{w}(\bar{x}, \bar{z})$ , cho bởi

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{u}_0(\bar{x}) - \bar{z} \bar{w}_{0,\bar{x}}(\bar{x}), \quad \bar{w}(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{w}_0(\bar{x}) \quad (3.6)$$

trong đó  $\bar{u}_0(\bar{x})$  và  $\bar{w}_0(\bar{x})$  tương ứng là chuyển vị dọc trục và chuyển vị ngang của một điểm trên trục  $x_l$  xét theo hệ tọa độ địa phương;  $\bar{x}$  và  $\bar{z}$  là hoành độ và tọa độ theo chiều cao của điểm đang xét trong hệ tọa độ  $(x_l, z_l)$ .



**Hình 3.1.** Hệ tọa độ đồng hành, các bậc tự do địa phương và tổng quát của phần tử dầm hai nút.

Véc-tơ chuyển vị nút, bao gồm chuyển vị và góc quay tại nút, ( $\mathbf{d}$ ), của phần tử trong hệ tọa độ tổng quát  $(x, z)$  gồm 6 thành phần

$$\mathbf{d} = \{u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2\}^T \quad (3.7)$$

trong đó  $u_i$ ,  $w_i$  và  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) tương ứng là chuyển vị dọc trục, chuyển vị ngang và góc quay lại nút  $i$  xét trong hệ tọa độ tổng quát  $(x, z)$ .

Hệ tọa độ đồng hành (còn gọi là hệ tọa độ địa phương)  $(x_l, z_l)$  được chọn sao cho gốc tọa độ luôn nằm ở nút **1**, trục  $x$  hướng từ nút **1** sang nút **2**. Với lựa chọn này, chuyển vị dọc trục theo phương  $x_l$  tại nút **1** và chuyển vị ngang

theo phương  $z_l$  ở cả hai nút của phần tử luôn bằng không,  $\bar{u}_1 = \bar{w}_1 = \bar{w}_2 = 0$ . Véc-tơ chuyển vị nút của phần tử trong hệ tọa độ địa phương ( $\bar{\mathbf{d}}$ ), vì thế, chỉ còn 3 thành phần khác không

$$\bar{\mathbf{d}} = \{\bar{u} \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{\theta}_2\}^T, \quad \bar{u} = \bar{u}_2 \quad (3.8)$$

với  $\bar{u}$  là chuyển vị của  $\bar{u}_0$  tại nút 2;  $\bar{\theta}_1$  và  $\bar{\theta}_2$  là góc quay tại các nút **1** và **2** xét trong hệ tọa độ địa phương  $(x_l, z_l)$ . Trong phương trình (3.8) và ở dưới đây, thanh ngang trên một đại lượng nào đó được sử dụng để chỉ đại lượng đó được định nghĩa trong hệ tọa độ địa phương  $(x_l, z_l)$ .

Mối liên hệ giữa các chuyển vị nút trong hai hệ tọa độ để dàng nhận được từ xem xét hình học Hình 3.1

$$\bar{u} = l_n - l_o; \quad \bar{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_r; \quad \bar{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_r \quad (3.11)$$

với  $l_o$  và  $l_n$  là độ dài phần tử trước và sau biến dạng,  $\theta_r$  là góc quay của phần tử như là vật thể cứng.

### 3.4. Ma trận chuyển đổi

Với vật liệu đàn hồi, véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến có thể nhận được bằng cách vi phân năng lượng biến dạng đàn hồi theo các chuyển vị nút. Năng lượng biến dạng đàn hồi là đại lượng vô hướng, bất biến với hệ tọa độ nên ta có thể tính véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng quát như sau

$$\mathbf{f}_{\text{in}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{f}}_{\text{in}}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{k}_t = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{d}^2} = \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{k}}_t \mathbf{T}_1 + \bar{N}_2 \mathbf{T}_2 + (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \mathbf{T}_3$$

trong đó

$$\bar{\mathbf{f}}_{\text{in}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{d}}}, \quad \text{và} \quad \bar{\mathbf{k}}_t = \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{\mathbf{d}}^2} \quad (3.18)$$

tương ứng là véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến địa phương;  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$  là các ma trận chuyển đổi, được xác định từ quan hệ giữa các chuyển vị và góc quay trong hệ tọa độ địa phương với các đại lượng trong hệ tổng quát (3.11)

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial \mathbf{d}}, \quad \mathbf{T}_2 = \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \mathbf{d}^2}, \quad \mathbf{T}_3 = -\frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \mathbf{d}^2} \quad (3.19)$$

### 3.5. Năng lượng biến dạng đàn hồi

### 3.5.1. Dầm Euler-Bernoulli kích thước macro

Năng lượng biến dạng đàn hồi của một phần tử dầm với độ dài ban đầu  $l_0$  cho bởi

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \int_A \bar{\sigma}_{\bar{x}} \bar{\epsilon}_{\bar{x}} dA d\bar{x} = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \left[ A_{11} \left( \bar{u}_{0,\bar{x}} + \frac{1}{2} \bar{w}_{0,\bar{x}}^2 \right)^2 - 2A_{12} \left( \bar{u}_{0,\bar{x}} + \frac{1}{2} \bar{w}_{0,\bar{x}}^2 \right) \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}} + A_{22} \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}}^2 \right] d\bar{x} \quad (3.22)$$

trong đó  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  và  $A_{22}$  là các độ cứng của dầm.

### 3.5.3. Dầm Euler-Bernoulli có kích thước micro

Biểu thức năng lượng biến dạng đàn hồi cho dầm có kích thước micro có dạng

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \left[ A_{11} \left( \bar{u}_{0,\bar{x}} + \frac{1}{2} \bar{w}_{0,\bar{x}}^2 \right)^2 - 2A_{12} \left( \bar{u}_{0,\bar{x}} + \frac{1}{2} \bar{w}_{0,\bar{x}}^2 \right) \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}} + A_{22} \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}}^2 + A_{33} \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}}^2 \right] dx \quad (3.38)$$

trong đó  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  và  $A_{33}$  là các độ cứng của dầm

$$(A_{11}, A_{12}, A_{22}) = b \int_{-h/2}^{h/2} \hat{E}_f(\bar{z}) (1, z, z^2) d\bar{z} \quad (3.39)$$

$$A_{33} = b l_m^2 \int_{-h/2}^{h/2} \mu_f(\bar{z}) d\bar{z}$$

với mô-đun đàn hồi Young  $\hat{E}_f$  xác định như sau

$$\hat{E}_f = \begin{cases} \lambda_f + 2\mu_f & \text{nếu có tính đến hệ số Poisson} \\ E_f & \text{nếu bỏ qua hệ số Poisson} \end{cases} \quad (3.40)$$

Cần nhấn mạnh rằng, do tính không thuần nhất của vật liệu FGM, độ cứng tương hỗ giữa dọc trục và chống uốn  $A_{12}$  không bị triệt tiêu trong mô hình dầm FGM. Hơn nữa, bởi vì ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro, độ cứng chống trượt  $A_{33}$ , có chứa tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu  $l_m$ , vẫn xuất hiện trong biểu thức năng lượng biến dạng đàn hồi, thậm chí ngay cả khi lý thuyết dầm Euler-Bernoulli được dùng để mô hình hóa khung, dầm có kích thước micro.

## 3.6. Công thức phần tử trong hệ tọa độ địa phương

### 3.6.1. Nội suy

Hàm nội suy cho các chuyển vị dọc trục và chuyển vị ngang trong hệ tọa độ địa phương như sau

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_0(\bar{x}) &= \frac{\bar{x}}{l_0} \bar{u}_2 + \left( \frac{3A_{12}\bar{x}^2}{A_{11}l_0^2} - \frac{3A_{12}\bar{x}}{A_{11}l_0} \right) (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \\
 &+ \left( \frac{2\bar{x}^2}{l_0} - \frac{13\bar{x}}{30} - \frac{11\bar{x}^3}{3l_0^2} + \frac{3\bar{x}^4}{l_0^3} - \frac{9\bar{x}^5}{10l_0^4} \right) \bar{\theta}_1^2 \\
 &+ \left( \frac{\bar{x}^2}{l_0} - \frac{\bar{x}}{30} - \frac{11\bar{x}^3}{3l_0^2} + \frac{9\bar{x}^4}{2l_0^3} - \frac{9\bar{x}^5}{5l_0^4} \right) \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 \\
 &+ \left( \frac{\bar{x}}{15} - \frac{2\bar{x}^3}{3l_0^2} + \frac{3\bar{x}^4}{2l_0^3} - \frac{9\bar{x}^5}{10l_0^4} \right) \bar{\theta}_2^2 \\
 \bar{w}_0(\bar{x}) &= \left( \bar{x} - \frac{2\bar{x}^2}{l_0} + \frac{\bar{x}^3}{l_0^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( -\frac{\bar{x}^2}{l_0} + \frac{\bar{x}^3}{l_0^2} \right) \bar{\theta}_2
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Các thành phần chuyển vị trong (3.44) được sử dụng để xây dựng véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử dầm trong hệ tọa độ địa phương.

### 3.6.2. Véc-tơ nội lực và ma trận độ cứng tiếp tuyến địa phương

Với phép nội suy (3.44), ta có thể biểu diễn năng lượng biến dạng đàn hồi (3.38) theo các chuyển vị nút trong hệ tọa độ địa phương. Véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử dầm trong hệ tọa độ địa phương, như đã đề cập ở trên, thu được bằng cách đạo hàm một lần và hai lần biểu thức năng lượng biến dạng đàn hồi (3.17).

## 3.7. Phương trình cân bằng và thuật toán số

Phương trình cân bằng (2.44), Mục 2.6, vẫn sử dụng cho phân tích chuyển vị lớn của khung, dầm FGM trong chương này. Tuy nhiên ứng xử phi tuyến của khung phức tạp hơn nhiều so với ứng xử của dầm. Đặc biệt, trong một số trường hợp khung có ứng xử ‘snap-through’ hay ‘snap-back’, trong đó ma trận độ cứng tiếp tuyến của khung không còn xác định dương, thậm chí xác định âm. Trong trường hợp này ta không thể giải trực tiếp phương trình (2.44) để nhận được gia số chuyển vị cho quá trình lặp. Phương pháp độ dài cung được sử dụng ở đây để giải quyết vấn đề này.

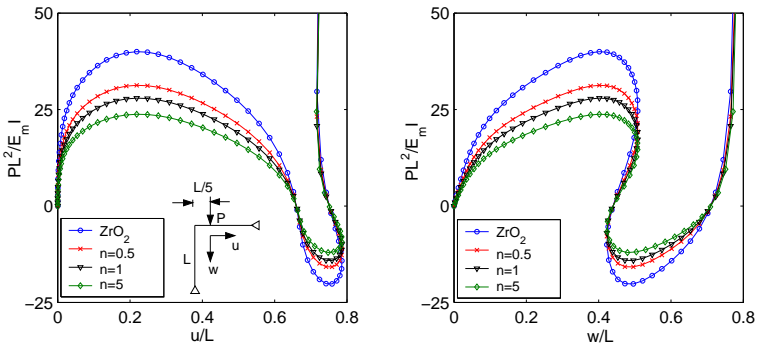
## 3.8. Kết quả số và thảo luận

### 3.8.1. Khung, dầm FGM kích thước macro

Bảng 3.1 liệt kê các chuyển vị chuẩn hóa theo phương các trục  $x$  và  $z$  của dầm  $\text{Si}_3\text{Ni}_4/\text{Al}$  chịu mô-men  $M = 5E_m I/L$  (với  $E_m$  là mô-đun Young của Al) với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu  $n$ . Để so sánh, các giá trị tương ứng của chuyển vị tính bởi biểu thức (3.51) bằng phương pháp giải tích trong Tài liệu [141] cũng được liệt kê trong Bảng 3.1. Có thể thấy rằng, kết quả sử dụng công thức phần tử trong nghiên cứu này hội tụ rất nhanh, cả chuyển vị theo phương trục  $x$  và trục  $z$  hội tụ tới kết quả của nghiệm giải tích chỉ với 6 phần tử, không phụ thuộc giá trị của tham số vật liệu  $n$ . Do phần tử dầm được nghiên cứu trong bài toán này sử dụng các hàm nội suy chính xác, nên nó có khả năng xác định chuyển vị chính xác tại các điểm nút [157]. Lưu ý rằng, mô hình dầm xét đến trong cả nghiên cứu này và Tài liệu [141] được tính toán với tỷ số độ mảnh cao,  $L/h = 50$ .

Bảng 1: Sự hội tụ của phần tử dầm trong đánh giá chuyển vị lớn của dầm công-xôn  $\text{Si}_3\text{Ni}_4/\text{Al}$  mô-men  $M = 5E_m I/L$  (nELE: số phần tử)

Đáp ứng	$n$	nELE				
		1	2	4	6	PT (3.51)
$\frac{ u_0(L) }{L}$	0.3	0.3063	0.3048	0.3047	0.3047	0.3047
	1	0.5805	0.5760	0.5758	0.5757	0.5757
	5	0.9451	0.9419	0.9418	0.9417	0.9418
	10	1.0310	1.0339	1.0340	1.0340	1.0340
$\frac{w_0(L)}{L}$	0.3	0.5978	0.5990	0.5991	0.5991	0.5991
	1	0.7063	0.7139	0.7143	0.7143	0.7143
	5	0.6306	0.6670	0.6687	0.6688	0.6688
	10	0.5583	0.6106	0.6129	0.6130	0.6130

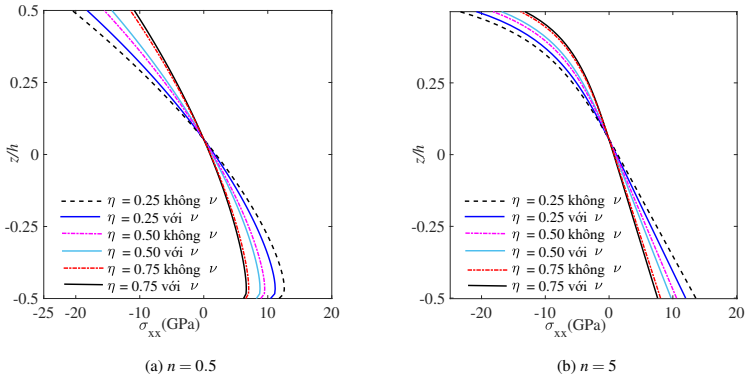


Hình 3.7. Đường cong tải-chuyển vị của khung không đối xứng  $\text{ZrO}_2/\text{Al}$ .

Đường cong tải-chuyển vị của khung không đối xứng làm từ Zirconia và Nhôm được minh họa trên Hình 3.7 với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu  $n$ . Trong hình, các chuyển vị theo phương trục  $x$  và trục  $z$  được tính toán tại điểm chịu tải với lưới mười phần tử, năm phần tử cho mỗi dầm. Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu đến ứng xử của khung được thấy rõ từ Hình 3.7, trong đó tải trọng giới hạn của khung giảm dần khi tăng tham số vật liệu  $n$ .

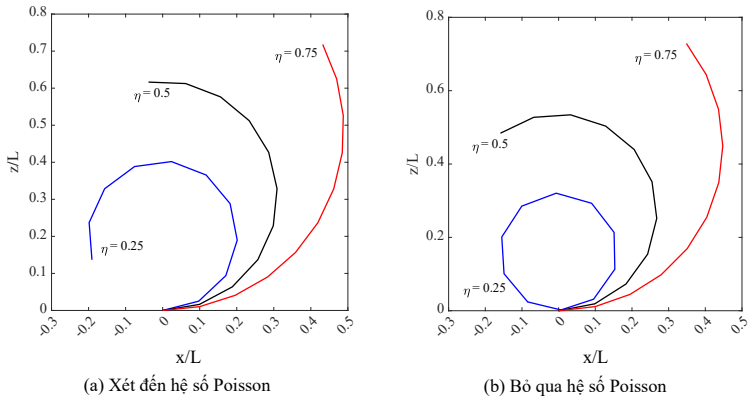
### 3.8.2. Khung, dầm FGM kích thước micro

Ảnh hưởng của tham số kích thước micro và hệ số Poisson có thể được thấy từ Hình 3.12, trong đó phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tại thiết diện ngang ứng với  $P^* = 10$  được minh họa với các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ không thứ nguyên và hai giá trị của tham số vật liệu,  $n = 0.5$  và  $n = 5$ . Ta có thể thấy rằng biên độ của ứng suất dọc trục giảm đi khi tăng tham số tỷ lệ không thứ nguyên và khi tính đến ảnh hưởng của hệ số Poisson. Nhận xét này không phụ thuộc vào giá trị của tham số vật liệu.

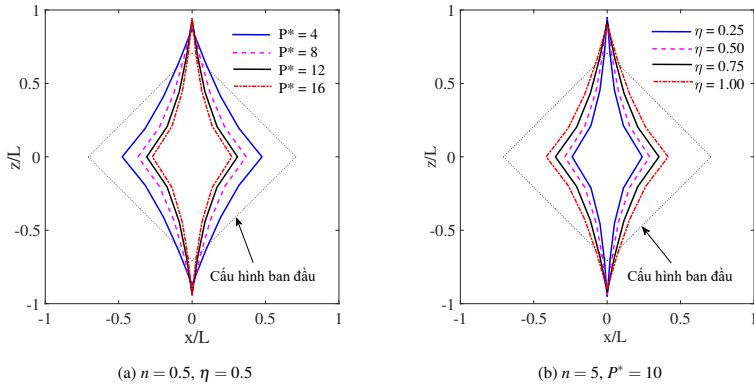


**Hình 3.12.** Phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục của dầm công-xôn FGM có kích thước micro với  $P^* = 10$ .

Các cấu hình biến dạng của dầm micro ứng với giá trị của tham số vật liệu  $n = 1$  và giá trị mô-men  $M^* = 5.6$  như minh họa trên Hình 3.14 cũng thể hiện rõ vai trò quan trọng của hệ số Poisson đối với ứng xử phi tuyến của dầm micro. Tại giá trị của mô-men  $M^* = 5.6$ , dầm micro ứng với  $\eta = 0.25$  đã uốn thành một vòng tròn đối với trường hợp bỏ qua ảnh hưởng của hệ số Poisson, trong khi điều này không xảy ra khi tính đến ảnh hưởng của hệ số Poisson. Lưu ý rằng sự hội tụ của chuyển vị lớn của dầm micro dưới tác động của mô-men cũng đạt được với lưới sáu phần tử, nhưng mười phần tử đã được sử dụng để có được cấu hình trong Hình 3.14. Việc sử dụng lưới nhiều phần tử để đảm bảo độ mịn của các đường cong.



**Hình 3.14.** Cấu hình biến dạng của dầm FGM micro ứng với  $M^* = 5.6$ ,  $n = 1$  và các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ không thứ nguyên.



**Hình 3.18.** Cấu hình biến dạng của khung FGM hình vuông kích thước micro chịu tải trọng kéo với các giá trị khác nhau của lực kéo và tham số tỷ lệ.

Ảnh hưởng của hệ số Poisson và tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu đối với ứng xử chuyển vị lớn của khung FGM hình vuông có kích thước micro cũng có thể được thấy từ các đường cong lực-chuyển vị và các cấu hình biến dạng của khung như được minh họa trên các Hình 3.18a và 3.18b cho trường hợp  $n = 0.5$  và  $n = 5$ . Khung hình vuông FGM có kích thước micro biến dạng đáng kể khi tăng tải trọng kéo (Hình 3.18a) và nó ít biến dạng hơn khi giá trị tham số tỷ lệ không thứ nguyên lớn hơn (Hình 3.18b).

### Kết luận chương 3

Chương 3 đã xây dựng phần tử dầm phi tuyến và thuật toán số cho phân tích khung, dầm FGM có kích thước micro dùng trong phân tích kết cấu



khung, dầm có chuyển vị lớn. Phần tử dầm được xây dựng trên cơ sở công thức hệ tọa độ đồng hành trong đó lý thuyết dầm Euler-Bernoulli được sử dụng kết hợp với MCST để mô tả biến dạng của dầm và hiệu ứng kích thước. Để tăng sự hội tụ của phần tử, các đa thức nhận được từ lời giải hệ phương trình vi phân cân bằng phi tuyến của phần tử được sử dụng để nội suy trường chuyển vị. Biểu thức cho ma trận độ cứng tiếp tuyến và véc-tơ nội lực của phần tử được thu nhận dưới dạng hiện. Phần tử dầm cho kết cấu FGM có kích thước macro được thu nhận như là trường hợp riêng của phần tử xây dựng trong chương với việc loại bỏ các số hạng có chứa tham số tỷ lệ kích thước. Kết quả của chương 3 đã được công bố trong bài báo các bài báo từ số 8 đến số 10 trong "Danh mục công trình liên quan tới Luận án".

## **KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ**

Một số kết quả và nhận xét chính của Luận án có thể tóm lược như sau:

### **Các kết quả và nhận xét chính**

- Luận án đã xây dựng được hai phần tử dầm phi tuyến và chương trình tính toán số dùng trong phân tích chuyển vị lớn của khung, dầm FGM và CNTRC. Các phần tử dầm và chương trình tính toán số xây dựng được có khả năng tốt trong mô phỏng ứng xử phi tuyến phức tạp của kết cấu khung, dầm FGM và CNTRC. Đặc biệt, phần tử dầm xây dựng trên cơ sở phương pháp hệ tọa độ đồng hành có biểu thức toán học đơn giản nhưng có tốc độ hội tụ nhanh. Chuyển vị lớn của khung, dầm FGM có kích thước macro và micro có thể được mô phỏng chính xác bởi lưới chỉ gồm 6 phần tử.
- Sự phân bố vật liệu cũng như các yếu tố thực tế như sự kết tụ của CNTs trong vật liệu composite gia cường bằng CNTs có vai trò quan trọng tới ứng xử phi tuyến của khung, dầm FGM và CNTRC. Chuyển vị lớn của dầm sandwich CNTRC phụ thuộc rõ nét vào mức độ kết tụ của CNTs và sự kết tụ này không thể bỏ qua trong nghiên cứu ứng xử phi tuyến của kết cấu CNTRC. Sự kết tụ của CNTs, như thấy từ chương 2 của Luận án, không chỉ làm cho dầm trở nên mềm hơn mà còn làm tăng hiệu ứng của biến dạng trượt đối với độ võng lớn.
- Mô hình đồng nhất hóa vật liệu dùng trong đánh giá các tính chất hiệu dụng của vật liệu composite có vai trò quan trọng tới kết quả số nhận được từ phân tích chuyển vị lớn của kết cấu dầm sandwich FGM. Trong

bốn mô hình đồng nhất hóa vật liệu sử dụng trong Luận án thì mô hình Voigt là cứng nhất, trong khi mô hình Tamura-Tomota-Ozawa là mềm nhất. Mặc dù mô hình Voigt có các biểu thức toán học đơn giản và được sử dụng rộng rãi trong đánh giá các tính chất hiệu dụng của FGM nhưng chúng ta cần cẩn thận trong việc xử lý kết quả số thu được từ mô hình này.

- Hiệu ứng kích thước micro đóng vai trò quan trọng tới ứng xử phi tuyến của khung, dầm FGM có kích thước micro. Chuyển vị lớn của khung, dầm FGM kích thước micro bị đánh giá cao đáng kể khi bỏ qua ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước. Hiệu ứng kích thước cũng làm thay đổi sự phụ thuộc của ứng xử phi tuyến của khung, dầm FGM vào tham số vật liệu.

### Hướng nghiên cứu tiếp theo

Một số hướng nghiên cứu cần phát triển từ Luận án là:

- Nghiên cứu ứng xử phi tuyến hình học của khung, dầm có kích thước micro gia cường bởi các ống nano carbon xét tới ảnh hưởng của một số yếu tố thực tiễn như nền đàn hồi, nhiệt độ và sự kết tụ của các ống nano carbon.
- Nghiên cứu ứng xử phi tuyến vật liệu của khung, dầm FGM có kích thước micro. Trong nhiều trường hợp khi kết cấu chịu tải trọng lớn, ứng suất tại một hoặc vài vị trí của kết cấu vượt qua giới hạn đàn hồi, và vì thế ảnh hưởng của biến dạng dẻo cần được tính tới khi nghiên cứu uốn phi tuyến của khung, dầm FGM.
- Phát triển các phần tử dầm phi tuyến sang trường hợp phân tích khung, dầm ba chiều. Các biến đổi toán học trong việc xây dựng phần tử dầm phi tuyến cho phân tích khung, dầm không gian rất phức tạp và cồng kềnh. Điều này đòi hỏi việc đầu tư nhiều thời gian hơn nữa và cần có sự phối hợp của các nhà nghiên cứu.

## DANH MỤC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN TỚI LUẬN ÁN

Kết quả của Luận án đã được công bố trên các Tạp chí Quốc tế, Tạp chí Quốc gia, Tuyển tập Hội nghị Khoa học Quốc gia, cụ thể:

1. Bui Thi Thu Hoai, Tran Thi Thu Huong, Nguyen Dinh Kien, Vu Thi An Ninh, Large deflection of cantilever functionally graded sandwich beam under end forces based on a total Lagrange formulation, *Vietnam Journal of Science and Technology*, 57 (6A) 2019, 32-42.
2. Bui Thi Thu Hoai, Nguyen Dinh Kien, Tran Thi Thu Huong, Le Thi Ngoc Anh, Large displacements of FGSW Beams in thermal environment using a finite element formulation, *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST, 42(1) 2020, 43–61.
3. Bui Thi Thu Hoai, Tran Thi Thu Huong, Nguyen Dinh Kien, Large deflection of FGSW beams partially supported by a two-parameter elastic foundation using a finite element formulation, *Tạp chí Cơ khí Việt Nam*, 2020.
4. Bui Thi Thu Hoai, Nguyen Dinh Kien and Tran Thi Thu Huong, Large deflections of cantilever FG-CNTRC sandwich beams, *Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn lần thứ XV*, Trường Đại học kỹ thuật công nghiệp, Đại học Thái Nguyên, 2021
5. Dinh Kien Nguyen, Thi Thu Hoai Bui, Thi Thu Huong Tran, Sergei Alexandrov, Large deflections of functionally graded sandwich beams with influence of homogenization schemes, *Archive of Applied Mechanics*, 2022.
6. Thi Thu Hoai Bui, Thi Thom Tran, Dinh Kien Nguyen, Geometrically nonlinear analysis of sandwich composite beams reinforced by agglomeration carbon nanotubes, *Vietnam Journal of Mechanics*, 44(4) 2022, 376 – 391
7. Thi Thu Hoai Bui, Thi Thu Huong Tran, Vu Nam Pham, Dinh Kien Nguyen, Large deflections of agglomerated carbon nanotubes reinforced sandwich cantilever beam partially embedded on foundation, *Comptes Rendus Mécanique*, 2024 (Accepted).
8. Thi Thu Hoai Bui, Thi Thu Huong Tran, and Dinh Kien Nguyen, Geometrically nonlinear behaviour of functionally graded beam and frame structures under mechanical loading, *RCTEMME 2021, LNME*, 326–342, 2022.
9. Thi Thu Hoai Bui, Dinh Kien Nguyen, Geometrically nonlinear behaviour of FG-CNRC sandwich beam using a co-rotational formulation, *The 7th International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA - 2023) Hanoi*, November 11, 2023.
10. Bui Thi Thu Hoai, Le Cong Ich, Nguyen Dinh Kien, Size-dependent nonlinear bending of tapered cantilever microbeam based on modified couple stress theory, *Vietnam Journal of Science and Technology*, 62 (6) (2024) 1196-1209, doi:10.15625/2525-2518/19281.