

**BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO**

**VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM**

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ



Bùi Thị Thu Hoài

**MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN TRONG
PHÂN TÍCH PHI TUYẾN HÌNH HỌC KẾT CẤU DẦM FGM VÀ CNTRC**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT CƠ KHÍ VÀ CƠ KỸ THUẬT

Hà Nội - 2024

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Bùi Thị Thu Hoài

MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN TRONG
PHÂN TÍCH PHI TUYẾN HÌNH HỌC KẾT CẤU DẦM FGM VÀ CNTRC

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT CƠ KHÍ VÀ CƠ KỸ THUẬT

Ngành: Cơ kỹ thuật

Mã số: 9 52 01 01

Xác nhận của Học viện
Khoa học và Công nghệ

Người Hướng dẫn 1
(Ký, ghi rõ họ tên)

Người Hướng dẫn 2
(Ký, ghi rõ họ tên)

GS. TS. Nguyễn Đình Kiên PGS. TS. Trần T. Thu Hương

Hà Nội - 2024

LỜI CAM ĐOAN

Tác giả xin cam đoan Luận án: "Mô hình phần tử hữu hạn trong phân tích phi tuyến hình học kết cấu dầm FGM và CNTRC" là công trình nghiên cứu của chính mình dưới sự hướng dẫn khoa học của tập thể thầy, cô hướng dẫn. Luận án sử dụng thông tin trích dẫn từ nhiều nguồn tham khảo khác nhau và các thông tin trích dẫn được ghi rõ nguồn gốc. Các kết quả nghiên cứu của tác giả được công bố chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào Luận án. Các số liệu, kết quả được trình bày trong Luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình nào khác ngoài các công trình công bố của tác giả. Luận án được hoàn thành trong thời gian tác giả làm nghiên cứu sinh tại Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Nghiên cứu sinh

Bùi Thị Thu Hoài

LỜI CẢM ƠN

Trước khi đi vào nội dung chính của Luận án này, với lòng biết ơn sâu sắc nhất, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới tập thể cán bộ, các nhà khoa học trong Học viện Khoa học và Công nghệ; Viện Cơ học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã tận tình giúp đỡ, tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành Luận án.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới hai Thầy Cô hướng dẫn là GS. TS. Nguyễn Đình Kiên và PGS. TS. Trần Thị Thu Hương. Sự tận tâm hướng dẫn và sự dạy bảo chu đáo cùng với tri thức và tâm huyết của Thầy Cô là hành trang quý báu giúp tác giả có thể hoàn thành Luận án và hoàn thiện kiến thức của mình sau này.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các đồng nghiệp trong phòng Cơ học vật liệu và kết cấu - Viện Cơ học, trong nhóm nghiên cứu Cơ học vật rắn, trong Khoa Kỹ thuật Ô tô và Năng lượng - Trường Đại học Phenikaa, gia đình, bạn bè và người thân đã tạo điều kiện, luôn quan tâm và động viên trong quá trình tác giả học tập và hoàn thiện Luận án.

Trong quá trình tìm hiểu, nghiên cứu khoa học, kiến thức của tác giả còn hạn chế. Do vậy, tác giả không tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được những đóng góp quý giá của Thầy Cô và các đồng nghiệp.

Sau cùng, tác giả xin kính chúc GS. TS. Nguyễn Đình Kiên, PGS. TS. Trần Thị Thu Hương và toàn thể các Thầy Cô trong Học viện Khoa học và Công nghệ dồi dào sức khỏe, niềm tin để tiếp tục thực hiện sứ mệnh cao đẹp của mình là nghiên cứu khoa học và truyền đạt kiến thức cho thế hệ mai sau.

Tác giả Luận án

Bùi Thị Thu Hoài

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN	i
LỜI CẢM ƠN	ii
MỤC LỤC	iii
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT	vi
DANH MỤC HÌNH VẼ	viii
DANH MỤC BẢNG	xi
MỞ ĐẦU	1
Chương 1. Tổng quan vấn đề nghiên cứu	4
1.1. Vật liệu composite thể hệ mới	4
1.1.1. Vật liệu FGM	4
1.1.2. Vật liệu CNTRC	5
1.2. Phân tích kết cấu FGM	7
1.2.1. Phân tích tuyến tính	7
1.2.2. Phân tích phi tuyến	9
1.3. Phân tích phi tuyến dầm micro	11
1.4. Phân tích kết cấu dầm gia cường ống nano carbon	16
1.5. Tình hình nghiên cứu trong nước	17
1.6. Định hướng nghiên cứu	19
Chương 2. Chuyển vị lớn của dầm sandwich FGM và CNTRC	21
2.1. Mở đầu	21
2.2. Dầm sandwich FGM	22
2.3. Dầm sandwich CNTRC.....	23
2.4. Các tính chất hiệu dụng.....	25
2.4.1. Hệ số đàn hồi của dầm FGSW	25
2.4.2. Tính chất hiệu dụng của dầm CNTRC	27
2.5. Phần tử dầm Lagrange toàn phần	28
2.5.1. Véc-tơ chuyển vị nút	28

2.5.2. Năng lượng biến dạng và phép nội suy	30
2.5.3. Véc-tơ nội lực	32
2.5.4. Ma trận độ cứng tiếp tuyến	32
2.6. Phương trình cân bằng	34
2.7. Nghiên cứu kiểm chứng	37
2.8. Kết quả số và thảo luận	41
2.8.1. Chuyển vị lớn của dầm FGSW	41
2.8.1.1. Dầm công-xôn FGSW chịu tải trọng P	41
2.8.1.2. Dầm công-xôn FGSW chịu mô-men	47
2.8.2. Chuyển vị lớn của dầm sandwich CNTRC	51
2.8.2.1. Ảnh hưởng của CNT gia cường	51
2.8.2.2. Ảnh hưởng của nền đàn hồi	56
2.8.2.3. Ảnh hưởng của cấu hình sandwich	57
2.8.2.4. Ảnh hưởng của tỷ số độ mảnh dầm	58
Chương 3. Chuyển vị lớn của khung, dầm FGM	62
3.1. Mở đầu	62
3.2. Dầm FGM	63
3.3. Hệ tọa độ đồng hành và véc-tơ chuyển vị nút	64
3.4. Ma trận chuyển đổi	66
3.5. Năng lượng biến dạng đàn hồi	67
3.5.1. Dầm Euler-Bernoulli	67
3.5.2. Lý thuyết liên tục bậc cao	68
3.5.2.1. Lý thuyết cặp ứng suất sửa đổi	68
3.5.2.2. Lý thuyết gradient biến dạng sửa đổi	69
3.5.3. Dầm FG Euler-Bernoulli kích thước micro	70
3.6. Công thức phần tử trong hệ tọa độ địa phương	72
3.6.1. Nội suy	72
3.6.2. Véc-tơ nội lực và ma trận độ cứng tiếp tuyến địa phương	74
3.7. Phương trình cân bằng và thuật toán số	77

3.8. Kết quả số và thảo luận	78
3.8.1. Khung, dầm FGM kích thước macro	78
3.8.1.1. Dầm công-xôn FGM chịu uốn bởi mô-men uốn.....	79
3.8.1.2. Dầm công-xôn FGM chịu lực dọc trục	81
3.8.1.3. Khung không đối xứng	83
3.8.2. Khung, dầm FGM kích thước micro	84
3.8.2.1. Sự hội tụ của phần tử	85
3.8.2.2. Dầm công-xôn FGM micro chịu tải tại đầu tự do.....	86
3.8.2.3. Dầm công-xôn kích thước micro chịu mô-men.....	88
3.8.2.4. Khung FGM không đối xứng kích thước micro	90
3.8.2.5. Khung FGM micro hình vuông chịu kéo	91
KẾT LUẬN.....	95
DANH MỤC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN TỚI LUẬN ÁN.....	98
TÀI LIỆU THAM KHẢO	100

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

Ký hiệu	Ý nghĩa
A	Diện tích thiết diện ngang của dầm
A_{11}	Độ cứng dọc trục
A_{12}	Độ cứng tương hỗ kéo-uốn
A_{22}	Độ cứng chống uốn
A_{33}	Độ cứng chống trượt (<i>Dùng trong lý thuyết bậc nhất</i>)
Phương pháp CPVP	Phương pháp Cầu phương vi phân (<i>Differential Quadrature Method</i>)
Phương pháp PTHH	Phương pháp Phần tử hữu hạn (<i>Finite Element Method</i>)
CNTs	Các ống nano carbon (<i>Carbon Nanotubes</i>)
SWCNT	Ống nano carbon đơn vách (<i>Single Walled Carbon Nanotube</i>)
MWCNT	Ống nano carbon đa vách (<i>Multi - Walled Carbon Nanotube</i>)
CNTRC	Composite gia cường ống nano carbon
FGM	Vật liệu có cơ tính biến thiên
FGSW	Kết cấu sandwich làm từ vật liệu có cơ tính biến thiên
CNTRC	Composite gia cường các ống nano carbon
FGSW-CNTRC	Kết cấu sandwich gia cường các ống nano carbon có cơ tính biến thiên
PMMA	Poly methylmethacrylate – (một loại po-li-me nhiệt rắn)
RVE	Phần tử đại diện (<i>Representative Volume Element</i>)
V_r	Tổng thể tích của CNTs trong RVE
$V_r^{\text{inclusion}}$	Thể tích của CNTs bên trong các cụm hình cầu
V_r^m	Thể tích của CNTs bên trong pha nền
$V_{\text{inclusion}}$	Thể tích của các cụm hình cầu bên trong RVE
ξ	Tỷ phần thể tích của các cụm hình cầu so với tổng thể tích của phần tử đại diện
ζ	Tỷ phần thể tích của CNTs bên trong các cụm hình cầu so với tổng thể tích của CNTs

V_{CNT}	Tỷ phần thể tích ống nano carbon trong kết cấu composite
V_c	Tỷ phần thể tích của gốm
V_m	Tỷ phần thể tích của kim loại
E	Mô đun đàn hồi
G	Mô đun trượt
K	Mô đun khối
q	Tham số thử nghiệm trong mô hình Tamura-Tomota-Ozawa, tỉ số giữa ứng suất và biến dạng truyền
k_r, m_r, n_r, p_r	Mô đun đàn hồi Hill của pha gia cường CNT
k_1, k_2	Độ cứng của nền Winkler, độ cứng lớp trượt của nền Pasternak

DANH MỤC HÌNH VẼ

Hình 1.1	Năm kiểu phân bố CNTs theo chiều dày dầm sandwich FG-CNTRC.	6
Hình 2.1	Mô hình dầm FGSW.	22
Hình 2.2	Mô hình dầm sandwich CNTRC nằm một phần trên nền đàn hồi.	23
Hình 2.3	Phần tử đại diện với các hình cầu kết tụ CNTs.	24
Hình 2.4	Cấu hình và các bậc tự do của phần tử dầm hai nút.	29
Hình 2.5	Sơ đồ khối thuật toán tăng dần/lặp theo phương pháp Newton-Raphson.	36
Hình 2.6	So sánh chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGSW chịu tải trọng P .	37
Hình 2.7	Ảnh hưởng của sự kết tụ CNT tới mô-đun đàn hồi của dầm CNTRC với $V_{CNT} = 0.1$	39
Hình 2.8	Đường cong tải-chuyển vị của dầm (2-1-2) loại A : (a) Mô hình MT và n thay đổi; (b) $n = 0.3$ và các mô hình đồng nhất hóa khác nhau.	44
Hình 2.9	Cấu hình biến dạng của dầm loại A tương ứng với $P^* = 5$: (a) Mô hình MT và n thay đổi; (b) $n = 0.3$ và các mô hình đồng nhất hóa khác nhau.	44
Hình 2.10	Đường cong tải-chuyển vị của dầm loại B chịu tải P : (a) dầm (1-3-1) với mô hình MT và n thay đổi; (b) $n = 0.3$ và tỉ số chiều dày các lớp khác nhau.	45
Hình 2.11	Cấu hình biến dạng của dầm loại B với $P^* = 15$: (a) Dầm (1-3-1) và n thay đổi; (b) $n = 0.3$ và tỉ số chiều dày các lớp khác nhau (mô hình MT).	45
Hình 2.12	Ảnh hưởng của tham số vật liệu lên sự phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tại thiết diện ngàm của dầm FGSW với $P^* = 15$.	46
Hình 2.13	Đường cân bằng của dầm loại A (2-1-2) chịu mô-men: (a) mô hình MT và n thay đổi; (b) $n = 0.5$ và các mô hình đồng nhất hóa khác nhau.	48
Hình 2.14	Đường cân bằng của dầm loại B chịu mô-men: (a) dầm (1-3-1) và n thay đổi; (b) $n = 0.5$ và tỉ số chiều dày các lớp khác nhau (mô hình MT).	48
Hình 2.15	Cấu hình biến dạng của dầm (2-1-2) loại A: (a) Mô hình MT, $M^* = 6$ và n thay đổi; (b) $n = 0.5$, $M^* = 10$ và các mô hình đồng nhất hóa khác nhau.	49

Hình 2.16	Cấu hình biến dạng của dầm loại B: (a) Dầm (2-1-2) và n thay đổi; (b) $n = 0.5$, $M^* = 10$ và các tỉ số chiều dày các lớp khác nhau.	49
Hình 2.17	Phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tại thiết diện ngàm của dầm loại A với $M^* = 3$	50
Hình 2.18	Phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tại thiết diện ngàm của dầm loại B với $M^* = 3$	50
Hình 2.19	Ảnh hưởng của V_{CNT} tới đáp ứng phi tuyến của dầm công-xôn CNTRC chịu tải trọng P theo phương vuông góc với dầm ($L/h = 10$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.6)$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).	53
Hình 2.20	Ảnh hưởng của V_{CNT} tới đáp ứng phi tuyến của dầm công-xôn CNTRC chịu mô-men uốn ($L/h = 10$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.6)$ và $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).	54
Hình 2.21	Đường cong tải-chuyển vị của dầm công-xôn CNTRC chịu tải P với các giá trị khác nhau của tham số kết tụ ξ ($L/h = 10$, $V_{CNT} = 0.1$, $\alpha_F = 0.4$, $\zeta = 0.9$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).	54
Hình 2.22	Đường cong tải-chuyển vị của dầm sandwich CNTRC chịu mô-men uốn với các giá trị khác nhau của tham số kết tụ ξ ($L/h = 10$, $V_{CNT} = 0.1$, $\alpha_F = 0.4$, $\zeta = 0.9$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).	55
Hình 2.23	Cấu hình biến dạng của dầm CNTRC chịu mô-men uốn $M^* = 5$ với các giá trị khác nhau của V_{CNT} ($L/h = 10$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.6)$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).	55
Hình 2.24	Cấu hình biến dạng của dầm sandwich CNTRC chịu mô-men với các giá trị khác nhau của tham số kết tụ ξ ($L/h = 10$, $V_{CNT} = 0.1$, $\alpha_F = 0.4$, $\zeta = 0.9$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).	56
Hình 2.25	Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi tới chuyển vị lớn của dầm CNTRC chịu tải P ($L/h = 10$, $V_{CNT} = 0.1$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.7)$).	57
Hình 2.26	Ảnh hưởng của tham số nền α_F tới chuyển vị lớn của dầm CNTRC chịu tải P ($L/h = 10$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.7)$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).	57
Hình 3.1	Hệ tọa độ đồng hành, các bậc tự do địa phương và tổng quát của phần tử dầm hai nút.	65
Hình 3.2	Chương trình Matlab giải hệ phương trình vi phân phi tuyến dầm Euler-Bernoulli.	73
Hình 3.3	Chương trình Matlab xác định véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử dầm trong hệ tọa độ địa phương.	75

Hình 3.4	Mô hình khung, dầm công-xôn FGM kích thước macro: (a) Dầm chịu lực dọc trục, (b) Dầm chịu mô-men uốn, (c) Khung không đối xứng.	78
Hình 3.5	Đường cong mô-men-chuyển vị lớn của dầm công-xôn $\text{Si}_3\text{Ni}_4/\text{Al}$ với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu n .	80
Hình 3.6	Phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tại đầu ngàm của dầm công-xôn $\text{Si}_3\text{Ni}_4/\text{Al}$ chịu tác dụng của mô-men.	81
Hình 3.7	Đường cong tải-chuyển vị của dầm công-xôn ZrO_2/Al với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu n .	82
Hình 3.8	Cấu hình biến dạng của dầm công-xôn FGM được tạo thành bởi các cặp vật liệu khác nhau chịu tác dụng của lực dọc trục ($n = 3$).	82
Hình 3.9	Đường cong tải-chuyển vị của khung không đối xứng ZrO_2/Al .	83
Hình 3.10	Ứng suất dọc trục tại các điểm trên cùng và dưới cùng của phần chịu tải trong khung không đối xứng ZrO_2/Al .	84
Hình 3.11	Ứng suất dọc trục tại các điểm trên cùng và dưới cùng của phần chịu tải trong khung không đối xứng với các cặp vật liệu khác nhau.	84
Hình 3.12	Mô hình khung, dầm công-xôn FGM kích thước macro: (a) Dầm chịu tải trọng ngang, (b) Dầm chịu mô-men uốn, (c) Khung không đối xứng, (d) Khung hình vuông chịu kéo.	85
Hình 3.13	Đường cong tải-chuyển vị của dầm công-xôn FGM kích thước micro chịu tải ngang với các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ kích thước.	87
Hình 3.14	Phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục của dầm công-xôn FGM kích thước micro với $P^* = 10$.	88
Hình 3.15	Đường cân bằng của dầm công-xôn FGM kích thước micro chịu tác dụng của mô-men với các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ kích thước.	89
Hình 3.16	Cấu hình biến dạng của dầm FGM micro ứng với $M^* = 5.6$, $n = 1$ và các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ không thứ nguyên.	89
Hình 3.17	Phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục của dầm công-xôn micro ứng với $M^* = 5.6$.	90
Hình 3.18	Đường cong tải-chuyển vị của khung FGM không đối xứng kích thước micro với các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ.	91
Hình 3.19	Đường cong tải-chuyển vị của khung FGM hình vuông chịu tải trọng kéo kích thước micro với các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ.	91
Hình 3.20	Cấu hình biến dạng của khung FGM hình vuông kích thước micro chịu tải trọng kéo với các giá trị khác nhau của lực kéo và tham số tỷ lệ.	93

DANH MỤC BẢNG

Bảng 1.1	Tỉ phần thể tích V_{CNT} của CNTs tại các lớp của dầm sandwich.	6
Bảng 2.1	So sánh đáp ứng chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGM chịu tác dụng của mô-men	38
Bảng 2.2	So sánh đáp ứng chuyển vị lớn của dầm sandwich CNTRC đối xứng (1-2-1) chịu tác dụng của mô-men $M^* = 5, L/h = 20$ và $V_{CNT} = 0.1$	39
Bảng 2.3	Sự hội tụ của công thức phần tử hữu hạn trong dự đoán độ võng w^* của dầm công-xôn chịu tác dụng của lực $P^* = 10$ ($V_{CNT} = 0.3, \alpha_F = 0.5$, và $(k_1, k_2) = (50, 0.1)$).	40
Bảng 2.4	Chuyển vị lớn không thứ nguyên của dầm công-xôn FGSW loại A chịu tác dụng của tải trọng P	42
Bảng 2.5	Đáp ứng chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGSW loại B chịu tác dụng của tải trọng P	43
Bảng 2.6	Ảnh hưởng của mô hình đồng nhất hóa lên ứng suất dọc trục cực đại, $\max(\sigma_x/\sigma_0)$, tại thiết diện ngang của dầm FGSW với $P^* = 15$	47
Bảng 2.7	Chuyển vị lớn không thứ nguyên ở đầu tự do của dầm sandwich công-xôn CNTRC với $P^* = 10, L/h = 20, \alpha_F = 0.4, k_1 = 50$ và $k_2 = 0.5$	52
Bảng 2.8	Chuyển vị không thứ nguyên ở đầu tự do của dầm sandwich CNTRC với các giá trị khác nhau của tỷ số L/h ($P^* = 10, V_{CNT} = 0.1, \alpha_F = 0.4, (k_1, k_2) = (50, 0.5)$).	59
Bảng 3.1	Sự hội tụ của phần tử dầm trong đánh giá chuyển vị lớn của dầm công-xôn $\text{Si}_3\text{Ni}_4/\text{Al}$ mô-men $M = 5E_m I/L$ (nELE số phần tử)	79
Bảng 3.2	Sự hội tụ của phần tử dầm trong tính toán đáp ứng chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGM kích thước micro chịu tải trọng ngang $P^* = 10$	86
Bảng 3.3	Chuyển vị lớn không thứ nguyên của dầm công-xôn FG kích thước micro chịu tải trọng ngang	87
Bảng 3.4	Chuyển vị và góc quay của khung FGM hình vuông kích thước micro chịu tải trọng kéo	92

MỞ ĐẦU

Tính cấp thiết của đề tài

Cùng với sự phát triển của khoa học công nghệ và các vật liệu mới có độ bền cơ học cao hơn, kết cấu ngày nay được thiết kế cho phép trải qua chuyển vị lớn trong quá trình làm việc. Phân tích phi tuyến kết cấu có chuyển vị lớn là một trong các đề tài quan trọng trong cơ học kết cấu và cơ học vật rắn, có ý nghĩa thực tiễn, thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong nước và trên thế giới.

Trong lĩnh vực cơ học, phân tích ứng xử phi tuyến của kết cấu và vật rắn được chia làm hai bài toán chính: (1) Bài toán phi tuyến hình học, trong đó kết cấu có chuyển vị tương đối lớn (moderate displacements) hoặc chuyển vị lớn (large displacements); (2) Bài toán phi tuyến vật liệu, trong đó ứng suất tại một hoặc một số vùng của kết cấu vượt qua giới hạn đàn hồi (kết cấu đàn-dẻo). Các kết quả phân tích chuyển vị lớn của kết cấu nói chung, khung, dầm làm từ các vật liệu mới nói riêng còn rất hạn chế. Vì lí do đó, Luận án này tập trung nghiên cứu bài toán phi tuyến hình học, cụ thể là nghiên cứu ứng xử chuyển vị lớn của kết cấu khung, dầm làm từ hai loại vật liệu mới là vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Material, viết tắt là FGM) và vật liệu composite gia cường bằng các ống nano carbon (Carbon Nanotube Reinforced Composite, viết tắt là CNTRC). Các phương pháp giải tích truyền thống thường khó sử dụng để phân tích kết cấu có chuyển vị lớn, Luận án, vì thế sẽ sử dụng cách tiếp cận số, cụ thể là phương pháp phần tử hữu hạn, để tính toán các đặc trưng cơ học như trường chuyển vị và trường ứng suất của kết cấu khung, dầm FGM và CNTRC có chuyển vị lớn. Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu, cấu hình hình học như các tham số nội tại của kết cấu (tham số tỷ lệ kích thước) tới ứng xử phi tuyến của kết cấu khung, dầm nêu trên được nghiên cứu chi tiết.

Mục tiêu của Luận án

Mục tiêu chính của Luận án là phát triển mô hình phần tử dầm phi tuyến và chương trình tính toán số cho phân tích ứng xử chuyển vị lớn của kết cấu khung, dầm làm từ một số loại vật liệu mới. Với chương trình tính toán số xây dựng được, Luận án sẽ tiến hành phân tích một số bài toán cụ thể và khảo sát ảnh hưởng của một số tham số hình học, vật liệu tới ứng xử chuyển vị lớn của kết cấu khung, dầm làm từ các vật liệu mới nêu trên.

Điểm mới của Luận án

Phân tích chuyển vị lớn của khung, dầm FGM và CNTRC xét tới các yếu tố quan trọng như mô hình đồng nhất hóa vật liệu và sự kết tụ của các ống nano carbon được nghiên cứu lần đầu tiên trong Luận án. Đặc biệt, phần tử dầm dựa trên phương pháp hệ tọa độ đồng hành có xét tới ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro cho phân tích chuyển vị lớn của khung, dầm FGM được phát triển lần đầu tiên trong Luận án.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu của Luận án là:

1. **Đối tượng:** Đối tượng nghiên cứu của Luận án là các kết cấu dầm sandwich FGM, dầm sandwich CNTRC nằm một phần trên nền đàn hồi và khung, dầm FGM.
2. **Phạm vi nghiên cứu:** Phạm vi nghiên cứu của Luận án là chuyển vị lớn của kết cấu khung, dầm FGM và CNTRC trong đó xét tới ảnh hưởng của các yếu tố quan trọng như nền đàn hồi, sự kết tụ của các ống nano carbon trong vật liệu CNTRC, hiệu ứng kích thước micro và mô hình đồng nhất hóa dầm trong tính toán các tính chất hiệu dụng của vật liệu FGM.

Phương pháp nghiên cứu

Luận án sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết với cách tiếp cận số dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Các phương trình cơ bản cho kết cấu được thiết lập trên cơ sở một số lý thuyết dầm khác nhau, trong khi phương pháp phần tử hữu hạn được sử dụng để xây dựng các phương trình cân bằng phi tuyến rời rạc và tính toán các đặc trưng cơ học của kết cấu.

Bố cục của Luận án

Ngoài phần Mở đầu, Luận án được chia làm ba Chương và phần Kết luận cùng với các Tài liệu tham khảo. Công trình công bố liên quan tới Luận án được liệt kê ở cuối Luận án. Nội dung chính của các chương như sau:

Chương 1: Tổng quan vấn đề nghiên cứu. Chương này trình bày tổng quan về tình hình nghiên cứu trong phân tích kết cấu FGM và CNTRC, trong đó chú trọng tới các kết quả trong phân tích phi tuyến. Kết quả phân tích kết cấu làm từ vật liệu mới của các tác giả trong nước cũng được đề cập trong chương 1. Từ phần phân tích tổng quan, định hướng nghiên cứu cho Luận án được đưa ra ở cuối chương.

Chương 2: Chuyển vị lớn của dầm sandwich FGM và CNTRC. Sử dụng công

thức Lagrange toàn phần, chương này xây dựng phần tử dầm phi tuyến cho phân tích chuyển vị lớn của dầm sandwich FGM và dầm sandwich CNTRC. Phần tử dầm được xây dựng trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất với phép cầu phương giảm bậc để tránh hiện tượng nghẽn trượt (shear locking). Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu, cấu hình sandwich tới ứng xử phi tuyến của dầm được khảo sát chi tiết. Đặc biệt, ảnh hưởng của các mô hình đồng nhất hóa vật liệu và sự kết tụ của các ống nano carbon tới chuyển vị lớn của dầm cũng được quan tâm nghiên cứu.

Chương 3: Chuyển vị lớn của khung, dầm FGM. Sử dụng phương pháp hệ tọa độ đồng hành, chương 3 xây dựng phần tử dầm phi tuyến cho phân tích chuyển vị lớn của kết cấu khung, dầm FGM có xét tới ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro. Phần tử được xây dựng trên cơ sở sử dụng lý thuyết dầm Euler-Bernoulli kết hợp với lý thuyết cặp ứng suất sửa đổi để mô phỏng chuyển vị và hiệu ứng kích thước. Các kết cấu khung, dầm FGM macro và micro được phân tích và đánh giá ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu, hiệu ứng kích thước tới ứng xử phi tuyến phức tạp của khung, dầm FGM.

Các kết luận chính rút ra từ Luận án và kiến nghị cho các nghiên cứu tiếp theo được tóm lược trong **Phần Kết luận** của Luận án.

CHƯƠNG 1

TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Chương này trình bày tổng quan tình hình nghiên cứu trong lĩnh vực phân tích kết cấu khung, dầm nối chung và khung, dầm sandwich nối riêng làm từ vật liệu composite FGM và composite gia cường bằng các ống nano carbon (CNTRC - Carbon Nanotube Reinforced Composite). Các kết quả và phương pháp nghiên cứu liên quan tới ứng xử phi tuyến hình học của khung, dầm FGM, CNTRC được trình bày chi tiết. Các kết quả nghiên cứu của các nhà khoa học trong nước cũng được cập nhật và thảo luận. Định hướng nghiên cứu của Luận án được trình bày ở phần cuối chương.

1.1. Vật liệu composite thế hệ mới

Một loạt các loại vật liệu composite thế hệ mới như vật liệu FGM, vật liệu CNTRC, vật liệu composite gia cường bằng graphene... được phát minh trong thời gian gần đây. Ưu điểm chính của các vật liệu này là có độ bền cơ học cao, khả năng làm việc tốt trong các điều kiện khắc nghiệt, chẳng hạn như nhiệt độ cao, độ ăn mòn của a-xít lớn, va đập mạnh... Kết cấu làm từ vật liệu composite thế hệ mới có nhiều đặc tính ưu việt vượt trội so với các kết cấu truyền thống, vì thế khả năng ứng dụng trong chế tạo các phần tử kết cấu chịu tải trọng phức tạp cho các ngành công nghiệp khác nhau, đặc biệt trong các ngành công nghiệp công nghệ cao, ngày càng mở rộng. Một số đặc tính cơ bản của vật liệu FGM và CNTRC, dùng cho phần tử khung, dầm trong Luận án được tóm lược dưới đây.

1.1.1. Vật liệu FGM

Vật liệu FGM (Functionally Graded Material - vật liệu có cơ tính biến thiên) được các nhà khoa học ở Đại học Tohoku, Sendai, Nhật Bản khởi tạo lần đầu tiên vào năm 1984 [1]. Ban đầu, vật liệu FGM được phát triển để có thể chịu nhiệt độ cao, dùng bao phủ mặt ngoài nhằm giảm thiểu ảnh hưởng của nhiệt độ tới các thiết bị trong công nghiệp hàng không vũ trụ và kết cấu trong nhà máy điện hạt nhân [1, 2]. Ngày nay, vật liệu FGM được ứng dụng rộng rãi hơn, không chỉ trong các ngành công nghiệp mà còn ở nhiều lĩnh vực khác nữa, chẳng hạn trong truyền thông, y học, năng lượng...

FGM có thể xem là vật liệu composite thế hệ mới, được hình thành từ hai hay nhiều pha vật liệu thành phần, chủ yếu là gốm (ceramic) và kim loại (metal). Tỷ phần thể tích của các pha vật liệu thành phần được tính toán một cách hợp lý, là hàm số liên tục, trơn của tọa độ không gian theo một hoặc vài phương của kết cấu. Vật liệu nhận

được có các ưu điểm vượt trội so với các vật liệu thành phần như có độ cứng cao, khả năng kháng nhiệt tốt của gốm, độ dai và độ bền va đập cao của kim loại. Thêm vào đó, các tính chất cơ học và vật lý của vật liệu FGM biến đổi liên tục, trơn, vì thế khắc phục được các yếu điểm vốn có của composite đa lớp, gia cường bằng các xơ, sợi truyền thống như sự tách lớp và tập trung ứng suất. Với các ưu điểm này, FGM là lựa chọn hợp lý để chế tạo các phần tử kết cấu chịu các tải trọng cơ-nhiệt phức tạp dùng trong các kết cấu của máy bay, tên lửa, các thiết bị trong lĩnh vực dầu khí, luyện kim, cũng như các lò phản ứng hạt nhân. Với hệ tải trọng phức tạp trong các ứng dụng nói trên, các phần tử kết cấu thường có ứng xử phi tuyến phức tạp. Nghiên cứu ứng xử cơ học nói chung, chuyển vị lớn của khung, dầm FGM và CNTRC nói riêng là bài toán quan trọng, đòi hỏi của thực tế, được nhiều nhà khoa học trong nước và trên thế giới quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây.

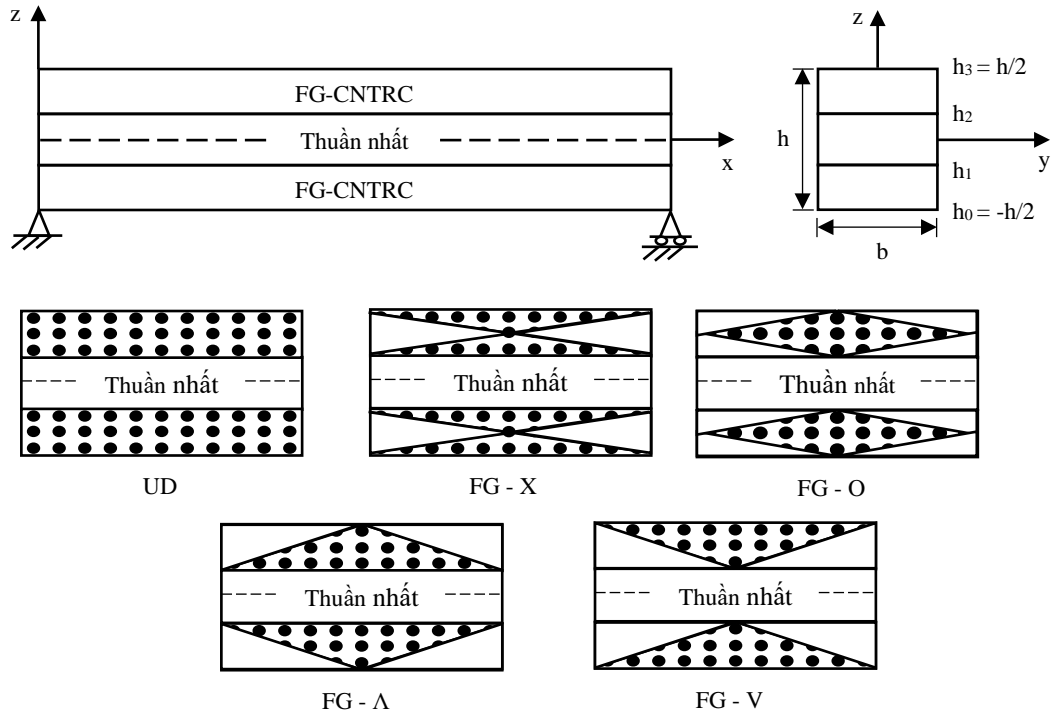
1.1.2. Vật liệu CNTRC

Từ các công trình nền tảng của Iijima [3, 4], các ống nano carbon (Carbon Nanotubes, viết tắt là CNT) với diện tích riêng bề mặt (specific surface area) cao và độ bền cơ học lớn được biết đến như là loại vật liệu gia cường lý tưởng cho các vật liệu nền polymer. Kết cấu composite gia cường bằng ống nano carbon (kết cấu CNTRC) có độ bền và độ cứng vượt trội so với kết cấu composite truyền thống, ngày càng được sử dụng nhiều trong các ngành công nghệ cao.

Có hai loại CNT chính là ống nano carbon đơn vách (Single Walled Carbon Nanotube, viết tắt là SWCNT) và ống nano carbon đa vách (Multi-Walled Carbon Nanotube, viết tắt là MWCNT). SWCNT gồm một phiến đơn graphen được cuộn một cách hoàn hảo (tức là liền mảnh, không có đường nối) để tạo thành một trụ với đường kính cỡ nm (nanô mét) và chiều dài lên đến cỡ vài cm (xăng-ti-mét). MWCNT gồm một dãy các trụ như thế được tạo thành sao cho các trụ có chung một trục đối xứng và cách nhau khoảng 0.35 nm, tương tự như sự ngăn cách giữa các mặt phẳng cơ sở trong than chì (graphite). Các MWCNT có thể có các đường kính từ 2 đến 100 nm và các chiều dài khoảng hàng chục lần micro-mét. Với đường kính cực nhỏ, cả SWCNT và MWCNT có diện tích tiếp xúc lớn với vật liệu nền khi được sử dụng làm pha gia cường, giúp tăng hiệu quả của việc gia cường.

Từ ý tưởng vật liệu composite FGM, Shen [5] đưa ra khái niệm "*Vật liệu composite gia cường ống nano carbon có cơ tính biến thiên*" (Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite, viết tắt là FG-CNTRC). Theo đó, CNTs với vai trò là vật liệu gia cường cho vật liệu nền polyme được sắp xếp song song theo một phương

nhất định, trong đó tỷ phần thể tích của CNTs thay đổi theo phương chiều cao của phần tử kết cấu theo quy luật định sẵn, chủ yếu là quy luật tuyến tính. Trong trường hợp riêng, khi tỷ phần thể tích của CNTs không thay đổi theo tọa độ không gian, sự phân bố của các ống nano carbon là đều. Cách gia cường các ống nano carbon vào kết cấu dầm sandwich có chiều rộng b và chiều cao h được minh họa trên Hình 1.1 và Bảng 1.1 (theo [5, 6]). Năm kiểu phân bố khác nhau của CNTs bao gồm phân bố đều UD (Uniform Distribution) và bốn kiểu phân bố theo quy tắc hàm là FG- Λ , FG-V, FG-O và FG-X tương ứng với các trường hợp CNTs phân bố theo phương chiều dày dầm theo các hình dạng chữ Λ , V, O, X.



Hình 1.1. Năm kiểu phân bố CNTs theo chiều dày dầm sandwich FG-CNTRC.

Bảng 1.1. Tỷ phần thể tích V_{CNT} của CNTs tại các lớp của dầm sandwich.

Kiểu phân bố	Lớp dưới ($h_0 \leq z \leq h_1$)	Lớp trên ($h_2 \leq z \leq h_3$)
UD	V_{CNT}^*	V_{CNT}^*
FG-X	$2 \frac{ h_0 + h_1 - 2z }{h_1 - h_0} V_{CNT}^*$	$2 \frac{ h_2 + h_3 - 2z }{h_3 - h_2} V_{CNT}^*$
FG- Λ	$2 \frac{z - h_0}{h_1 - h_0} V_{CNT}^*$	$2 \frac{h_3 - z}{h_3 - h_2} V_{CNT}^*$
FG-V	$2 \frac{h_1 - z}{h_1 - h_0} V_{CNT}^*$	$2 \frac{z - h_2}{h_3 - h_2} V_{CNT}^*$
FG-O	$2 \left(1 - \frac{ 2z - h_0 - h_1 }{h_1 - h_0} \right) V_{CNT}^*$	$2 \left(1 - \frac{ 2z - h_2 - h_3 }{h_3 - h_2} \right) V_{CNT}^*$

Trong Bảng 1.1, V_{CNT}^* là tổng tỷ phần thể tích của CNT và được xác định

bởi $V_{CNT}^* = \frac{w_{CN}}{w_{CN} + (\rho^{CNT}/\rho^m) - (\rho^{CNT}/\rho^m)w_{CN}}$, với w_{CN} là tỷ phần khối lượng của CNTs, ρ_{CNT} và ρ_m tương ứng là khối lượng riêng của CNT và vật liệu nền.

Bên cạnh vật liệu composite gia cường bằng các ống nano carbon phân bố theo một quy luật xác định (viết tắt là FG-CNTRC), vật liệu composite gia cường bằng các ống nano carbon với kích thước ngắn, phân bố ngẫu nhiên trong ma trận polyme cũng được dùng trong chế tạo các phần tử kết cấu. Với tỉ số độ mảnh lớn, độ cứng uốn thấp của CNT và lực van der Waals, các ống nano carbon gia cường có xu hướng bó hoặc co cụm lại với nhau. Shi và cộng sự [7] đã đề xuất mô hình hai tham số để nghiên cứu hiệu ứng kết tụ của các ống nano carbon tới các tính chất hiệu quả của CNTRC. Cơ sở của mô hình này xuất phát từ việc xét đến sự phân bố không đều của CNT trong pha nền và do đó một số vùng của vật liệu composite có sự tập trung nhiều hơn của vật liệu gia cường. Mô hình đồng nhất hóa vật liệu Mori-Tanaka cũng được sử dụng ở đây để đánh giá các tính chất hiệu quả của vật liệu composite. Chi tiết cách tiếp cận này được trình bày trong chương 2 của Luận án.

1.2. Phân tích kết cấu FGM

Các kết quả nghiên cứu tuyến tính và phi tuyến một số kết cấu FGM được tóm lược trong mục này trong đó tập trung chủ yếu vào các nghiên cứu liên quan tới khung, dầm FGM. Một số kết quả nhận được từ phân tích phi tuyến tấm FGM, liên quan tới Luận án, cũng được đề cập.

1.2.1. Phân tích tuyến tính

Phân tích dầm FGM nhận được nhiều quan tâm nghiên cứu trong khoảng ba thập kỷ gần đây. Apetre và cộng sự [8] áp dụng phương pháp Galerkin để đánh giá đáp ứng động lực học của dầm sandwich với lõi làm từ vật liệu FGM dưới tác động của tải trọng va đập có vận tốc thấp. Kết quả của nghiên cứu cho thấy các giá trị của biến dạng cực đại ứng với lực va đập lớn nhất giảm đáng kể nhờ sự biến thiên của tính chất vật liệu trong lớp lõi. Lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và lý thuyết biến dạng trượt bậc ba được sử dụng bởi Aydogdu và Taskin [9] trong phân tích dao động tự do của dầm FGM với biên tựa đơn và tính chất vật liệu được giả định tuân theo quy luật hàm số lũy thừa và hàm số mũ. Nghiệm Navier được các tác giả sử dụng để tính toán tần số và dạng dao động của dầm. Benatta cùng cộng sự [10] sử dụng phương pháp giải tích trong việc xây dựng nghiệm cho bài toán uốn vữa dầm Euler-Bernoulli và dầm Rayleigh FGM, xét tới ảnh hưởng của sự oằn (warping effect). Một phương pháp giải tích mới được Li [11] đề xuất cho việc tính toán các đặc trưng cơ học như tần số dao

động riêng, chuyển vị tĩnh, quá trình lan truyền sóng và phân bố ứng suất của dầm FGM với tính chất vật liệu biến đổi theo chiều cao dầm theo quy luật tùy ý. Sử dụng phương pháp giải tích, Ying và đồng nghiệp [12] đưa ra nghiệm cho bài toán uốn và dao động tự do của dầm FGM nằm trên nền đàn hồi Pasternak, giả định các tính chất vật liệu dầm thay đổi theo chiều cao theo quy luật hàm số mũ. Sina và đồng nghiệp [13] đề xuất mô hình dầm mới cho bài toán dao động tự do của dầm FGM, xét tới ảnh hưởng của các điều kiện biên khác nhau. Tần số dao động tự do thu nhận được trong [13] bằng phương pháp giải tích được nhiều tác giả sử dụng để kiểm chứng kết quả tính toán dao động của dầm FGM. Huang và Li [14] nghiên cứu dao động tự do của dầm FGM xét tới tính không đồng nhất của độ cứng chống uốn, mật độ khối và tính chất vật liệu dọc theo trục dầm. Sankar [15] đưa ra nghiệm đàn hồi cho trường ứng suất và chuyển vị của dầm FGM chịu tải trọng phân bố hình sin trên mặt dầm. Tác giả chỉ ra rằng ứng suất phân bố ở mặt chịu tải của dầm FGM cao hơn so với dầm thuần nhất nếu tải trọng tác dụng trên bề mặt cứng hơn và ngược lại. Phương pháp giải tích trong [14] cũng được Huang và Li [16] sử dụng trong nghiên cứu mất ổn định của dầm FGM có thiết diện ngang không đồng nhất với cơ tính biến đổi dọc trục. Anderson [17] nghiên cứu panel sandwich với lớp lõi là vật liệu cơ tính biến thiên chịu ảnh hưởng của tải trọng ngang là một khối cầu cứng. Kirugulige và cộng sự [18] đã sử dụng cả phương pháp thực nghiệm và phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu ứng xử phá hủy động học (dynamic fracture behavior) của kết cấu sandwich với lớp lõi có cơ tính biến thiên. Trên cơ sở lý thuyết Hermitian zig-zag, Di Sciuva và Gherlone [19] phát triển mô hình phần tử hữu hạn cho nghiên cứu ứng xử tĩnh và dao động của dầm sandwich. Kết quả số nhận được cho tần số và độ võng của dầm chứng tỏ tính ưu việt của mô hình đề xuất. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, Bhangale và Ganesan [20] đã nghiên cứu dao động và ổn định nhiệt của dầm sandwich FGM với lõi là vật liệu đàn nhớt trong môi trường nhiệt độ. Avila [21] đề xuất một tiêu chuẩn hư hỏng cho dự đoán chính xác cơ chế hư hỏng của dầm sandwich có lõi làm từ vật liệu có cơ tính biến thiên. Kashtalyan và cộng sự [22] trình bày lời giải đàn hồi 3D cho bài toán uốn của panel với lõi FGM chịu tải trọng phân bố trên bề mặt. Kết quả số chỉ ra rằng việc sử dụng lõi FGM giúp giảm đáng kể sự mất liên tục của cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp ở mặt phân cách giữa lớp lõi và lớp biên. Nghiên cứu của Amirani và cộng sự [23] đã phân tích ứng xử dao động tự do của dầm sandwich với lõi FGM sử dụng phương pháp phần tử tự do Galerkin (element free Galerkin method). Phương pháp không lưới (meshless method) và phương pháp phạt (penalty method) được sử dụng để thỏa mãn điều kiện biên cơ bản và liên tục của dầm. Sử dụng phương pháp

không lưới, Bùi Quốc Tính và cộng sự [24] đã nghiên cứu dao động tự do và đáp ứng động lực học của dầm sandwich với lõi FGM. Võ Phương Thức và cộng sự [25, 26] sử dụng các lý thuyết biến dạng trượt bậc cao cải tiến để mô phỏng và nghiên cứu dao động tự do, mất ổn định của dầm sandwich FGM và dầm FGM. Sử dụng phương pháp bán giải tích, Şimşek và Al-shujairi [27] nghiên cứu bài toán uốn và đáp ứng động lực học của dầm sandwich Timoshenko FGM chịu kích động bởi hai lực điều hoà di động có vận tốc không đổi. Độ võng tĩnh và động lực học của dầm được tính toán gần đúng trên cơ sở sử dụng các đa thức để xấp xỉ trường chuyển vị.

1.2.2. Phân tích phi tuyến

Các nghiên cứu thảo luận trên đây chỉ liên quan đến phân tích tuyến tính các kết cấu dầm FGM và dầm sandwich FGM. Trên thực tế, ứng xử phi tuyến nói chung và phi tuyến hình học nói riêng của kết cấu là bài toán quan trọng trong lĩnh vực cơ học kết cấu, đặc biệt do sự phát triển của các loại vật liệu mới cho phép kết cấu trải qua chuyển vị lớn trong quá trình làm việc. Một số nghiên cứu liên quan tới ứng xử phi tuyến của kết cấu dầm công bố trong thời gian gần đây, được thực hiện bằng cả phương pháp giải tích và phương pháp số. Ứng xử phi tuyến hình học của dầm công-xôn được Banerjee và cộng sự [28] nghiên cứu bằng cả phương pháp giải tích và phương pháp số. Độ võng của dầm công-xôn dưới tác động của tải trọng phân bố tùy ý được các tác giả xác định bằng phương pháp "shooting" phi tuyến và phương pháp phân tích Adomian. Cũng nhờ sử dụng phương pháp phân tích Adomian, Rahimi và Davoodinik [29] đưa ra nghiệm giải tích của bài toán dầm FGM có xét tới yếu tố phi tuyến hình học. Arefi và Rahimi [30] nghiên cứu ứng xử phi tuyến hình học của dầm Euler-Bernoulli có cơ tính biến đổi theo hướng chiều dài, xét tới sự thay đổi liên tục của thiết diện ngang và các tính chất đàn hồi dọc theo chiều dài dầm. Kết quả giải tích nhận được trên cơ sở phương pháp phân tích Adomian được các tác giả so sánh với kết quả phần tử hữu hạn. Ảnh hưởng của tham số thiết diện ngang đến góc quay và độ võng của dầm được khảo sát chi tiết. Nghiệm Navier và mô hình phần tử hữu hạn dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc ba được Reddy [31] sử dụng trong phân tích uốn phi tuyến của tấm chữ nhật FGM. Ảnh hưởng tương hỗ cơ-nhiệt và tính phi tuyến hình học von Kármán được tác giả xét tới trong nghiên cứu. Kết quả số nhận được cho thấy độ võng và ứng suất của tấm chịu ảnh hưởng đáng kể của sự phân bố vật liệu. Chen [32] nghiên cứu dao động phi tuyến của tấm FGM với ứng suất ban đầu nhờ sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất và giả thiết von Kármán. Tần số dao động phi tuyến của tấm tựa đơn được thu nhận bằng cách sử dụng kết hợp phương pháp Galerkin với phép lặp Runge-Kutta. Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất với giả thiết

von Kármán cũng được Alijani và cộng sự [33] sử dụng trong nghiên cứu dao động phi tuyến của tấm FGM tựa đơn, xét tới ảnh hưởng của nhiệt độ môi trường. Kocatürk và cộng sự [34] đã nghiên cứu bài toán chuyển vị lớn của dầm Timoshenko FGM dưới tác động của tải trọng phân bố ngang không bảo toàn bằng cách sử dụng công thức Lagrange toàn phần. Almeida cùng đồng nghiệp [35] cũng sử dụng công thức Lagrange toàn phần để phân tích ứng xử phi tuyến hình học của dầm FGM. Công thức phần tử hữu hạn được xây dựng trên cơ sở dầm Timoshenko với trường nội suy tuyến tính. Zhang [36] nghiên cứu bài toán uốn phi tuyến của dầm FGM bằng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao với các mối quan hệ biến dạng-chuyển vị von Kármán, xét tới ảnh hưởng của ứng suất nhiệt ban đầu và tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ. Sitar và cộng sự [37] xây dựng phương trình vi phân cân bằng cho bài toán uốn phi tuyến dầm công-xôn, xét tới quan hệ ứng suất-biến dạng tuân theo quy luật Ludwick. Phương pháp số được các tác giả sử dụng để tính toán độ võng của dầm. Niknam cùng đồng nghiệp [38] nghiên cứu ứng xử uốn phi tuyến của dầm thon FGM chịu tải trọng nhiệt dựa trên hai cách tiếp cận số khác nhau là phương pháp Galerkin và phương pháp cầu phương vi phân tổng quát (Generalized Differential Quadrature - GDQ). Sử dụng phương pháp Lagrange toàn phần, các tác giả Nguyễn Đình Kiên [39] xây dựng mô hình phần tử hữu hạn cho phân tích ứng xử sau ổn định của dầm nằm một phần trên nền đàn hồi hai tham số chịu lực dọc trục. Phương pháp trong [39] được Gan và Nguyễn Đình Kiên [40] mở rộng sang phân tích chuyển vị lớn của dầm FGM, với một phần dầm nằm trên nền đàn hồi. Phần tử dầm phi tuyến trong [40] được xây dựng với việc sử dụng các hàm tuyến tính để nội suy trường chuyển vị. Mặt trung hòa của dầm được sử dụng làm mặt quy chiếu, giúp cho việc loại bỏ các số hạng đặc trưng cho ảnh hưởng tương hỗ giữa uốn và kéo. Trên cơ sở phương pháp hệ tọa độ đồng hành và sử dụng nghiệm của phương trình vi phân cân bằng để nội suy trường chuyển vị, tác giả Nguyễn Đình Kiên [41] xây dựng mô hình phần tử dầm Timoshenko phi tuyến dùng trong phân tích khung, dầm có chuyển vị lớn. Mô hình phần tử dầm sử dụng phương pháp hệ tọa độ đồng hành trong tài liệu [40] được tác giả Nguyễn Đình Kiên và đồng nghiệp mở rộng cho dầm FGM với thiết diện thay đổi theo chiều dài, có chuyển vị lớn và cơ tính biến đổi liên tục theo chiều cao hoặc chiều dài dầm [42–45]. Ứng xử phi tuyến của dầm FGM xét tới ảnh hưởng của biến dạng không đàn hồi đã được quan tâm nghiên cứu bằng phương pháp phần tử hữu hạn trong thời gian gần đây [46, 47]. Trong các nghiên cứu này, ứng xử đàn dẻo của vật liệu composite FGM hai pha được giả định tuân theo mô hình lưỡng tuyến tính TTO (Tamura–Tomota–Ozawa model). Trên cơ sở lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và mối quan hệ phi tuyến biến dạng-chuyển

vị von Kármán, các tác giả Nguyễn Đình Kiên và Trần Thị Thơm [48] phát triển mô hình phần tử dầm sandwich cho phân tích chuyển vị lớn của khung, dầm sandwich FGM. Mô hình phần tử cũng được xây dựng trên cơ sở phương pháp hệ tọa độ đồng hành với việc sử dụng nghiệm của phương trình vi phân cân bằng phi tuyến để nội suy trường chuyển vị. Thuật toán lặp tăng dần kết hợp với phương pháp độ dài cung (arc length method) được các tác giả sử dụng để tính toán đường cân bằng (the equilibrium paths) của kết cấu. Phân tích số được thực hiện chi tiết để chứng tỏ tính đúng đắn và hiệu quả của công thức thiết lập được đồng thời minh họa ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu cũng như các tham số hình học, cấu hình sandwich tối ứng xử phi tuyến của khung, dầm sandwich FGM.

1.3. Phân tích phi tuyến dầm micro

Các phần tử kết cấu như dầm, tấm có chiều dày nhỏ, chùng một vài hoặc vài chục micro mét được sử dụng nhiều trong thực tế, chẳng hạn trong các hệ vi cơ điện tử (Micro-Electro-Mechanical Systems - MEMS). Phân tích ứng xử cơ học của kết cấu micro nói chung, dầm micro nói riêng là bài toán quan trọng của cơ học, giúp cho việc thiết kế và sử dụng loại kết cấu này được an toàn và hiệu quả hơn. Thêm vào đó, các phần tử kết cấu micro trong các ứng dụng nói trên thường mảnh, chịu tác động của nhiều loại tải trọng khác nhau, dễ có độ võng lớn. Trong thời gian gần đây với sự ra đời của nhiều loại vật liệu mới, chẳng hạn vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM), vật liệu thông minh (Smart material) ... phân tích phi tuyến kết cấu có kích thước micro trở nên cấp thiết hơn. Các vật liệu mới với các tính chất cơ-lý ưu việt cho phép thiết kế các phần tử kết cấu micro có thể trải qua các ứng xử cơ học phức tạp mà không bị phá hủy. Phân tích ứng xử phi tuyến của kết cấu micro nói chung, khung, dầm micro nói riêng là đề tài thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong nước và trên thế giới trong thời gian gần đây.

Khác với kết cấu có kích thước 'macro' thông thường, hiệu ứng kích thước đóng vai trò quan trọng trong ứng xử của kết cấu có kích thước micro. Mô phỏng để đánh giá ứng xử cơ học của kết cấu micro không thể bỏ qua ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước. Các lý thuyết cơ học kết cấu truyền thống không có khả năng mô phỏng ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước, vì thế một số lý thuyết đã được phát triển cho mục đích này. Trong số các lý thuyết đề xuất, lý thuyết cặp ứng suất đàn hồi (couple-stresses in elasticity) gồm hai tham số do Mindlin và Tiersten [49], Toupin [50] đưa ra vào năm 1962 thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học hơn cả. Trong lý thuyết cặp ứng suất đàn hồi, gradient của véc-tơ quay được sử dụng như là ten-xơ độ

cong. Tuy nhiên, một số khó khăn trong việc áp dụng các công thức của lý thuyết cặp ứng suất đàn hồi làm hạn chế việc sử dụng lý thuyết này vào mô phỏng hiệu ứng kích thước của kết cấu.

Để khắc phục nhược điểm trên, năm 2002 Yang và cộng sự [51] đã cải tiến lý thuyết cặp ứng suất đàn hồi trong [49, 50]. Lý thuyết do Yang và cộng sự đề xuất có tên lý thuyết cặp ứng suất sửa đổi (Modified Couple-Stress Theory - MCST) với chỉ một tham số đặc trưng cho hiệu ứng kích thước. MCST được nhiều nhà khoa học sử dụng kết hợp với các lý thuyết kết cấu truyền thống để mô phỏng hiệu ứng kích thước tới ứng xử cơ học của kết cấu có kích thước micro.

Bên cạnh MCST, lý thuyết gradient biến dạng đàn hồi (Strain Gradient Elasticity Theory - SGET) do Lam và cộng sự đề xuất năm 2003 [52] cũng được một số tác giả sử dụng kết hợp với các lý thuyết kết cấu truyền thống để mô tả ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro tới ứng xử cơ học của kết cấu. Khác với MCST, SGET cần tới 3 tham số để mô phỏng hiệu ứng kích thước trong kết cấu micro. Các lý thuyết MCST và SGET hoặc lý thuyết gradient biến dạng sửa đổi (Modified Strain Gradient elasticity Theory - MSGT) hiện được nhiều nhà khoa học sử dụng trong phân tích ứng xử cơ học của kết cấu micro. Tuy nhiên, cũng cần lưu ý rằng, lý thuyết đàn hồi phi cục bộ do Eringen đề xuất trong [53] cũng được một số tác giả sử dụng để nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước tới ứng xử cơ học của kết cấu có kích thước micro. Về các lý thuyết khác nhau trong mô phỏng hiệu ứng kích thước của kết cấu được trình bày trong 2 bài báo tổng quan [53, 54].

Với khả năng ứng dụng cao của dầm có kích thước micro, nghiên cứu ứng xử phi tuyến của loại kết cấu này được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây. Ke và cộng sự [55] sử dụng nguyên lý biến phân Hamilton để thiết lập phương trình vi phân cân bằng cho bài toán dao động phi tuyến của dầm micro làm từ FGM. Phương trình được xây dựng trên cơ sở sử dụng kết hợp lý thuyết dầm Timoshenko với MCST và được giải bằng phương pháp DQM kết hợp với kỹ thuật lặp. Kết quả số nhận được bởi các tác giả cho thấy cả tần số dao động tuyến tính và phi tuyến của dầm micro tăng đáng kể khi chiều dày dầm gần với tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu. Bài toán dao động tự do phi tuyến của dầm có kích thước micro cũng được nghiên cứu bởi Asghari và đồng nghiệp [56], Zhao và cộng sự [57] nhưng sử dụng SGET để mô tả ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro. Ứng xử phi tuyến sau mất ổn định của dầm micro xét tới ảnh hưởng của nhiệt độ được Mohammadi và Mahzoon [58] nghiên cứu bằng phương pháp giải tích. MCST được các tác giả sử dụng để xây

dựng các phương trình cân bằng phụ thuộc vào kích thước của dầm.

Phương pháp Galerkin được tác giả Farokhi cùng cộng sự [59, 60] sử dụng trong nghiên cứu dao động phi tuyến và mất ổn định của dầm micro. Một số lý thuyết dầm khác nhau được các tác giả sử dụng trong [59] để thiết lập phương trình chuyển động cho dầm micro. Phương pháp độ dài cung được sử dụng để tính toán ứng xử của dầm. Phân tích số được thực hiện để nghiên cứu ảnh hưởng của các tham số khác nhau tới ứng xử cộng hưởng của dầm. Phương pháp trong [59] cũng được sử dụng trong [61, 62] để nghiên cứu đáp ứng động lực học của dầm Euler-Bernoulli và dầm Timoshenko có kích thước micro, xét tới tính không hoàn hảo về hình học dầm. Trong [60], phương trình chuyển động cho nghiên cứu ứng xử cộng hưởng của dầm ba lớp được xây dựng trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt và MCST. Phương pháp sai phân hữu hạn Houbolt được các tác giả sử dụng kết hợp với thuật toán lặp Newton-Raphson để tính toán các đặc trưng động lực học của dầm.

Phương pháp Galerkin cũng được Ghayesh và cộng sự [63, 64] sử dụng trong nghiên cứu dao động phi tuyến của dầm có kích thước micro. Các lý thuyết dầm khác nhau được các tác giả sử dụng kết hợp với MCST để xây dựng phương trình chuyển động với ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro. Hệ phương trình phi tuyến rời rạc nhận được từ phương pháp Galerkin được các tác giả giải bằng kỹ thuật liên tục và phương pháp tích phân trực tiếp Newmark. Ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước tới ứng xử phi tuyến động lực học của dầm micro đàn-nhớt theo mô hình Kelvin-Voigt được Ghayesh và cộng sự [65] quan tâm nghiên cứu với sự trợ giúp của MCST. Phương trình vi phân chuyển động được các tác giả rời rạc hóa bằng phương pháp trọng số dư và giải trên cơ sở kết hợp phương pháp tích phân trực tiếp với phương pháp lặp.

Ansari và đồng nghiệp [66] xây dựng phần tử dầm Timoshenko hai nút cho nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước tới ứng xử sau mất ổn định của dầm micro. Phần tử dầm được xây dựng trên cơ sở SGET trong đó phần tử dùng MCST được thu nhận như là trường hợp riêng. Ứng xử sau mất ổn định do nhiệt của dầm micro FGM được Ansari và cộng sự [67] nghiên cứu trên cơ sở MSGT và MCST. Phương trình vi phân cân bằng của dầm được rời rạc hóa nhờ DQM và giải lặp trực tiếp. Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu dầm, tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu tới ứng xử sau ổn định được các tác giả khảo sát chi tiết. DQM cũng được sử dụng trong [68] để tính toán các đặc trưng phi tuyến của dầm FGM có kích thước micro. Mô hình dầm micro với hiệu ứng kích thước được các tác giả xây dựng trên cơ sở lý thuyết biến

dạng trượt bậc cao và SGET.

Trong [69], ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước tới dao động phi tuyến của dầm Euler-Bernoulli có kích thước micro chịu lực kích động điều hòa được khảo sát với sự trợ giúp của MCST. Kết quả nhận được cho thấy đáp ứng tần số của dầm chịu ảnh hưởng mạnh bởi tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu. Dao động cưỡng bức phi tuyến của dầm Euler-Bernoulli kích thước micro được Vatankhah và cộng sự [70] nghiên cứu trên cơ sở SGET. Phương pháp nhiễu (perturbation method) được các tác giả sử dụng để thu nhận đáp ứng động lực học phi tuyến của dầm.

Ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước tới ứng xử uốn và dao động phi tuyến của dầm micro nằm trên nền đàn hồi được Şimşek [71] nghiên cứu trên cơ sở lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và MCST. Phương trình vi phân chuyển động của dầm được tác giả rời rạc hóa bằng phương pháp Galerkin sau đó sử dụng phương pháp biến phân He để thu nhận các biểu thức cho độ võng và tần số của dầm. Phương pháp trong [71] được tác giả mở rộng cho nghiên cứu dao động tự do phi tuyến của dầm micro có cơ tính biến đổi theo chiều dài dầm [72]. Dao động tự do phi tuyến của dầm FGM với kích thước micro được nghiên cứu bởi Sahmani và đồng nghiệp [73] trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc ba và MSGT. Trong nghiên cứu này, mô hình đồng nhất hóa vật liệu Mori-Tanaka được các tác giả sử dụng để đánh giá các tính chất hiệu quả của vật liệu, trong khi DQM được dùng để rời rạc hóa phương trình vi phân chuyển động phi tuyến của dầm.

Li và Hu [74] nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước tới ứng xử sau mất ổn định của dầm Euler-Bernoulli kích thước micro với sự trợ giúp của SGET. Các tác giả chỉ ra rằng độ võng sau tới hạn của dầm tăng lên khi tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu tăng trong khi lực tới hạn giảm khi tăng tham số này. Trên cơ sở MCST, Dai và cộng sự [75] đề xuất mô hình dầm phi tuyến cho nghiên cứu động lực học của dầm công-xôn micro. Các tác giả chỉ ra rằng trong trường hợp dầm chịu lực tác động điều hòa của nền thì đường cong đáp ứng tần số có ứng xử mềm (softening). Thêm vào đó, nếu hệ dầm được gia cường bởi lò xo tuyến tính trong khoảng giữa dầm thì lò xo này sẽ làm tăng tần số cộng hưởng và làm giảm biên độ cộng hưởng của dầm. Shafiei [76, 77] và đồng nghiệp nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước tới dao động tự do phi tuyến của dầm Euler-Bernoulli FGM với sự trợ giúp của MCST và DQM. Tính không đồng nhất của thiết diện dầm với cơ tính biến thiên theo chiều dài được xét tới trong [76], trong khi ảnh hưởng của lỗ rỗng vi mô được nghiên cứu trong [77].

Lý thuyết dầm Euler-Bernoulli cũng được Dehrouyeh-Semnani và cộng sự [78]

sử dụng cùng với MCST để nghiên cứu mất ổn định nhiệt của dầm micro FGM. Tính không hoàn hảo về hình học và sự phụ thuộc của các hằng số đàn hồi vào nhiệt độ được xét tới trong các phương trình mô tả mất ổn định của dầm. Đường cong mất ổn định được các tác giả thu nhận bằng phương pháp giải tích và kiểm chứng trên cơ sở so sánh với nghiệm nhận được theo phương pháp Galerkin. Patel và đồng nghiệp [79] đề xuất phương pháp nghiên cứu chuyển vị lớn của dầm micro với việc sử dụng mối quan hệ mô men-độ cong và MCST. Phương pháp bán giải tích được các tác giả sử dụng để thu nhận đường cân bằng cho dầm. Kết quả số nhận được cho thấy tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu làm dầm cứng hơn so với lý thuyết dầm truyền thống, tức là với cùng giá trị của lực tác động, chuyển vị của dầm nhận được khi xét tới hiệu ứng kích thước giảm đi. Độ cứng của dầm micro khi mô phỏng bởi MCST tăng lên so với trường hợp sử dụng lý thuyết dầm truyền thống cũng được Li và Luo [80] khẳng định trong nghiên cứu ứng xử sau tới hạn của dầm micro làm từ vật liệu áp điện.

Taati [81] nghiên cứu ứng xử mất ổn định của dầm micro FGM chịu tác động của tải cơ-nhiệt. Các phương trình cơ bản của dầm, thiết lập trên cơ sở MCST tính tới ảnh hưởng của nền đàn hồi, được giải bằng chuỗi Fourier. Phương pháp giải tích được Chen và Li [82] sử dụng trong nghiên cứu ứng xử mất ổn định sau tới hạn của dầm micro không hoàn hảo về mặt hình học. Kết quả số nhận được bởi các tác giả chỉ ra rằng ứng xử sau tới hạn của dầm micro không hoàn hảo là bất đối xứng. Pourasghar và Chen [83] nghiên cứu dao động phi tuyến của dầm Timoshenko micro làm từ vật liệu composite gia cường bởi các ống nano carbon chịu ảnh hưởng của trường nhiệt phân bố theo quy luật hyperbolic. Phương trình vi phân chuyển động của dầm được giải với sự trợ giúp của DQM kết hợp với phương pháp lặp Newton-Raphson. Kết quả nhận được bởi các tác giả chỉ ra rằng tần số dao động phi tuyến của dầm tăng lên khi tỷ số giữa chiều dài dầm và tham số tỷ lệ chiều dài tăng. Dao động phi tuyến của dầm micro FGM cũng được Shen và Wang [84] nghiên cứu trên cơ sở lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và MCST. Phương pháp Galerkin được các tác giả sử dụng kết hợp với phương pháp Runge-Kutta để tính toán các đặc trưng dao động của dầm.

Yin và cộng sự [85] đưa ra lời giải giải tích cho bài toán mất ổn định của dầm có kích thước micro. Phương trình cân bằng của dầm được xây dựng với sự kết hợp của các lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và Timoshenko với SGET. Mất ổn định nhiệt của dầm micro có thiết diện không đồng nhất làm từ kết cấu 2D-FGM (kết cấu có cơ tính biến thiên theo hai chiều - Two-directional functionally graded structure) được Attia và Mohamed [86] nghiên cứu với sự trợ giúp của DQM. Các tác giả khẳng định rằng tùy theo điều kiện biên và loại tải trọng nhiệt mà ứng xử sau tới hạn thuộc loại

rẽ nhánh hay ‘snap-through’. Ứng xử mất ổn định sau tới hạn của dầm Timoshenko micro FGM được Tang và Qing [87] nghiên cứu gần đây, xét tới ảnh hưởng của các lỗ rỗng vi mô. Phương pháp Galerkin được sử dụng kết hợp với DQM để rời rạc phương trình vi phân cân bằng và xác định đường cân bằng sau tới hạn của dầm.

1.4. Phân tích kết cấu dầm gia cường ống nano carbon

Nhờ các tính chất cơ, nhiệt, điện và vật lý vượt trội, CNTs là vật liệu ưu việt dùng trong gia cường các vật liệu nền có cơ lý tính thấp [88–90]. Nghiên cứu về ứng xử cơ học của dầm sandwich composite gia cường bằng ống nano carbon (CNTRC) đã được một số nhà khoa học thực hiện trong thời gian gần đây. Sử dụng lý thuyết dầm Timoshenko, Ke và cộng sự [91, 92] nghiên cứu dao động tự do phi tuyến và mất ổn định động học của dầm nanocomposite FG gia cường bằng CNTs đơn vách (SWCNTs). Kết quả nhận được bởi các tác giả cho thấy sự tăng tỷ phần thể tích CNTs dẫn đến các tần số tự nhiên cao hơn, điều này xảy ra cho cả dầm với CNTs phân bố đều (UD-CNT) và CNTs phân bố theo một quy luật xác định (FG-CNT). Yas và Heshmati [93] nghiên cứu dao động tự do và dao động cưỡng bức của dầm FG-CNTRC (Functionally graded carbon nanotube-reinforced composite) được gia cường bởi SWCNTs thẳng, phân bố ngẫu nhiên chịu tác động bởi một tải trọng di động. Phân tích dao động tự do và ổn định của dầm FG-CNTRC Timoshenko nằm trên nền đàn hồi cũng được thực hiện bởi Yas và Samadi [94]. Shen và Xiang [95] nghiên cứu dao động với biên độ lớn, uốn phi tuyến và các phân tích sau mất ổn định bởi nhiệt của dầm CNTRC. Các kết quả thu được cho thấy tỷ phần thể tích CNTs có ảnh hưởng đáng kể đến đường cong tải trọng-độ võng khi dầm chịu uốn. Wattanasakulpong và Ungbhakorn [96] sử dụng một số lý thuyết biến dạng trượt khác nhau để nghiên cứu các bài toán uốn, ổn định và dao động của dầm CNTRC tựa giản đơn nằm trên nền đàn hồi. Wu và Kitipornchai [97] đã nghiên cứu dao động tự do và ổn định đàn hồi của dầm sandwich với các lớp ngoài được làm từ FG-CNTRC. Ảnh hưởng của tỷ phần thể tích CNTs, tỷ lệ chiều dày lớp lõi trên chiều dày lớp mặt, tỷ lệ độ mảnh và các điều kiện biên tới ứng xử dao động tự do và ổn định của dầm sandwich được các tác giả khảo sát chi tiết. Mohammadimehr và cộng sự [98] nghiên cứu dao động tự do phi tuyến của dầm Timoshenko với kích thước nano có lõi thuần nhất và các lớp mặt FG-CNTRC nằm trên nền đàn hồi Pasternak, trong đó phân bố của CNTs trong các lớp mặt CNTRC của dầm sandwich được giả định là UD, FG-A, FG-V, FG-O và FG-X. Kết quả cho thấy khi tăng tỷ phần thể tích CNTs, hệ số độ cứng nền, tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu và các thông số từ tính dọc, dầm sandwich bị cứng hơn và tần số phi tuyến thứ nhất tăng lên, trong khi ứng xử này lại ngược lại đối với tỷ lệ độ mảnh.

Ebrahimi và Farazmand Nia [99] đề xuất lý thuyết biến dạng trượt bậc cao cho phân tích dao động tự do của dầm sandwich FG-CNTRC trong môi trường nhiệt độ. Ảnh hưởng của tỷ phần thể tích CNT, tỷ lệ độ mảnh và tỷ lệ chiều dày lớp lõi trên lớp mặt lên ứng xử dao động tự do của dầm sandwich với lớp mặt FG-CNTRC được khảo sát.

Tuy nhiên, hầu hết các nghiên cứu thảo luận trên đây được thực hiện trên cơ sở giả định các ống nano carbon được phân bố thẳng trong pha nền polyme. Rubel và đồng nghiệp [100] đã phân tích ảnh hưởng của sự kết tụ CNT trong pha nền tới các tính chất cơ-lý của vật liệu composite gia cường bởi các ống nano carbon. Các tác giả chỉ ra rằng sự kết tụ của CNT có ảnh hưởng trực tiếp đến các đặc trưng nhiệt, điện và cơ học của composite và làm giảm các tính chất vật lý. Mô hình hai tham số trong tài liệu [7] được sử dụng cùng với mô hình đồng nhất hóa Mori–Tanaka bởi Heshmati và Yas [101] để tính toán các mô-đun đàn hồi của CNTRC với sự phân bố ngẫu nhiên của CNTs trong phân tích dao động tự do của dầm CNTRC. Phương pháp phần tử hữu hạn đã được các tác giả sử dụng để thu nhận các tần số dao động của dầm. Phương pháp DQM được Nejadi và Eslampanah [102] sử dụng để đánh giá tham số tần số của dầm công-xôn CNTRC. Dựa trên lý thuyết dầm Timoshenko, Kamarian và cộng sự [103] đã xác định các đặc trưng dao động tự do của dầm sandwich nanocomposite FG nằm trên nền đàn hồi Pasternak, trong đó có xét đến ảnh hưởng của sự kết tụ các ống nano carbon. Nghiên cứu về vật liệu composite CNTRC bởi Pan và Bian [104] đã kết luận rằng sự kết tụ CNT làm giảm độ cứng đàn hồi hiệu quả của vật liệu composite. Kiani và cộng sự [105] đã nghiên cứu bài toán uốn cơ nhiệt của dầm CNTRC dưới tải nhiệt không đều, trong đó có tính đến ảnh hưởng kết tụ của CNTs. Yue và cộng sự [106] đã xây dựng mô hình dầm quasi-3D trong nghiên cứu của họ về ảnh hưởng của sự kết tụ CNT lên đáp ứng ổn định động phi tuyến của dầm CNTRC.

1.5. Tình hình nghiên cứu trong nước

Ngoài các nghiên cứu của Nguyễn Đình Kiên và cộng sự đề cập trong Mục 1.2.2, phân tích ứng xử cơ học của kết cấu FGM và kết cấu sandwich FGM đã được một số nhà khoa học trong nước quan tâm nghiên cứu và nhận được một số kết quả đáng khích lệ. Một số nhóm nghiên cứu về cơ học vật liệu và kết cấu FGM được hình thành tại các cơ sở giáo dục đại học như Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội, Đại học Tôn Đức Thắng, Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh, Đại học Bách khoa Hà Nội, Đại học Xây dựng Hà Nội, Học viện Kỹ thuật Quân sự, Đại học Công nghệ giao thông vận tải, Đại học Phenikaa v.v. Đặc biệt, đã có một số Luận án tiến sĩ được bảo vệ theo hướng nghiên cứu này. Chẳng

hạn, các Luận án của Lê Thị Hà, Bùi Văn Tuyển, Trần Thị Thơm, Lê Thị Ngọc Ánh và Phạm Vũ Nam [107–111] đã xây dựng các mô hình PTHH cho nghiên cứu dao động tự do và cưỡng bức của dầm FGM, dầm 2D-FGM, dầm sandwich FGM và dầm sandwich 2D-FGM. Các Luận án của Nguyễn Ngọc Huyền [112] và Ngô Trọng Đức [113] đã nghiên cứu ảnh hưởng của vết nứt tới dao động của dầm FGM. Việc chẩn đoán vết nứt cho dầm được các tác giả thực hiện trên cơ sở các đặc trưng dao động nhận được. Phân tích ứng xử của dầm sandwich FGM có tính tới ảnh hưởng của độ ẩm và nhiệt độ môi trường đã được thực hiện trong Luận án của Nguyễn Bá Duy [114]. Nghiệm Navie được tác giả sử dụng để thu nhận đặc trưng cơ học của dầm.

Nhóm tác giả Nguyễn Trung Kiên và cộng sự [115, 116] đã thu được một số kết quả đáng khích lệ về bài toán phân tích dầm FGM và dầm sandwich FGM. Trường chuyển vị đã được cải tiến cho lý thuyết dầm để có được đánh giá tốt hơn cho ứng xử uốn, mất ổn định và dao động tự do của dầm. Bài toán đáp ứng động và tĩnh của kết cấu FG-CNTRC cũng nhận được sự quan tâm nghiên cứu của một số nhà khoa học trong nước. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, tác giả Nguyễn Xuân Hùng và các cộng sự [117–119] đã phân tích ứng xử uốn và ổn định tĩnh của tấm và panel trụ FG-CNTRC với các điều kiện biên và tải cơ học khác nhau. Sử dụng phương pháp PTHH dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bốn ẩn chuyển vị, tác giả Trần Hữu Quốc và cộng sự [120] đã phân tích tĩnh tấm FG-CNTRC có lớp áp điện.

Phương pháp giải tích và phương pháp số được một số nhà khoa học trong nước sử dụng để phân tích ứng xử phi tuyến của các kết cấu FGM và kết cấu FG-CNTRC. Nhóm tác giả Đào Văn Dũng và đồng nghiệp [121–125] sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển để nghiên cứu ổn định tĩnh phi tuyến của vỏ trụ tròn và vỏ nón cụt có gân gia cường chịu tải xoắn và áp lực ngoài, xét tới ảnh hưởng của nhiệt độ. Luận án tiến sĩ của các tác giả Vũ Hoài Nam [126] và Đặng Thùy Đông [127] nghiên cứu ổn định và động lực phi tuyến của vỏ và vỏ thoải sandwich FGM dưới tác động của các tải trọng cơ học và nhiệt độ. Sử dụng lý thuyết vỏ Donnell, FSDT và HSDT, nhóm tác giả Lê Thị Như Trang và Hoàng Văn Tùng [128–130] nghiên cứu ổn định phi tuyến của tấm, panel trụ tròn và panel hai độ cong FG-CNTRC. Các kết cấu FG-CNTRC được xét đến trong các nghiên cứu này có cạnh tựa đơn trên nền đàn hồi chịu tải trọng nén dọc trục, áp lực ngoài và tải cơ kết hợp trong môi trường nhiệt độ. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, Luận án tiến sĩ của tác giả Nguyễn Đình Kiên [131] đã phân tích ứng xử của kết cấu khung, dầm có tính đến yếu tố phi tuyến hình học và vật liệu. Phần tử dầm Timoshenko trong [41] được xây dựng trên cơ sở sử dụng lời giải phương trình cân bằng thuần nhất của phần tử để nội suy trường chuyển vị và góc xoay. Với trường

nội suy này, phần tử tránh được hiện tượng nghẽn trượt (shear locking) mà phần tử sử dụng nội suy Lagrange truyền thống vốn gặp và giúp cho tốc độ hội tụ của phần tử được cải thiện đáng kể. Trong [42–45] nhóm tác giả Nguyễn Đình Kiên cùng đồng nghiệp đã phát triển phần tử dầm cho phân tích phi tuyến của khung, dầm có xét tới sự thay đổi của tính chất vật liệu theo chiều cao hoặc chiều dài dầm. Để tăng độ chính xác của phần tử, dầm có thiết diện không đồng nhất được sử dụng để tính toán ma trận độ cứng tiếp tuyến và véc-tơ nội lực phần tử.

Mặc dù kết cấu micro có nhiều ứng dụng trong thực tế nhưng nghiên cứu ứng xử của kết cấu có tính tới hiệu ứng kích thước micro nói chung, khung, dầm micro nói riêng còn ít được các nhà khoa học trong nước quan tâm nghiên cứu. Theo hiểu biết của tác giả thì hiện mới chỉ có một số ít các bài báo liên quan tới vấn đề này. Trong [132], Nguyễn Xuân Hoàng và cộng sự sử dụng phương pháp đẳng hình học để nghiên cứu bài toán uốn, mất ổn định và dao động của tấm micro. Lý thuyết biến dạng trượt tựa 3D (Quasi-3D shear deformation theory) được các tác giả sử dụng kết hợp với lý thuyết MCST để xét tới ảnh hưởng của biến dạng trượt và hiệu ứng kích thước tới các đặc trưng cơ học của tấm. Trong [133], Lê Công Ích và đồng nghiệp phát triển mô hình phần tử hữu hạn để nghiên cứu ảnh hưởng của kích thước micro tới các đặc trưng dao động của dầm micro trong MEMS chịu tác động của lực cơ-điện. Độ võng động lực học của dầm dưới tác động đồng thời của lực dọc trục và lực điện được các tác giả tính toán trên cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn phi tuyến.

1.6. Định hướng nghiên cứu

Như thấy từ phần Tổng quan trình bày trên đây, mặc dù bài toán phân tích phi tuyến khung, dầm bằng phương pháp PTHH đã được quan tâm nghiên cứu bởi một số tác giả, tuy nhiên việc phân tích kết cấu làm từ vật liệu CNTRC, và kết cấu khung, dầm có kích thước micro còn rất ít. Với kết cấu có chuyển vị lớn, các phương pháp giải tích thường gặp khó khăn, phương pháp số, đặc biệt là phương pháp PTHH thường là lựa chọn thay thế. Để phân tích khung, dầm phi tuyến, đòi hỏi phải xây dựng các phần tử dầm phi tuyến và thuật toán mới, có khả năng mô tả tốt ứng xử phi tuyến của kết cấu làm từ các vật liệu mới. Đây là vấn đề cần thiết, là đòi hỏi của kỹ thuật và công nghiệp. Vì các lý do này NCS chọn đề tài: “*Mô hình phần tử hữu hạn trong phân tích phi tuyến hình học kết cấu dầm FGM và CNTRC*” để nghiên cứu. Từ các phân tích trình bày trong phần Tổng quan, NCS đề ra các mục đích sau:

1. Phát triển các mô hình PTHH, tức là thiết lập các véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến dùng trong phân tích chuyển vị lớn của khung, dầm FGM, dầm

sandwich FGM và dầm sandwich CNTRC. Mô hình được xây dựng trên cơ sở các lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất, sử dụng các trường nội suy khác nhau. Ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro cũng được quan tâm trong việc xây dựng phần tử dầm. Hai mô hình PTHH lựa chọn phát triển trong Luận án là phần tử dầm sử dụng công thức Lagrange toàn phần và phần tử dầm sử dụng hệ tọa độ đồng hành.

2. Với các mô hình PTHH nhận được và thuật toán số dùng trong phân tích chuyển vị lớn của kết cấu, Luận án tiến hành xây dựng chương trình tính toán số. Chương trình tính toán có khả năng xử lý được các trường hợp ứng xử phi tuyến phức tạp của kết cấu trong đó ma trận độ cứng tiếp tuyến không còn xác định dương, thậm chí xác định âm, chẳng hạn các ứng xử ‘snap-through’ và ‘snap-back’.
3. Sử dụng chương trình tính toán số xây dựng được, Luận án thực hiện phân tích một số bài toán cụ thể để đánh giá ảnh hưởng của một số tham số vật liệu, hình học dầm, cũng như ảnh hưởng của các yếu tố bên ngoài như nền đàn hồi, hiệu ứng kích thước tới ứng xử phi tuyến của kết cấu khung, dầm. Trên cơ sở kết quả số nhận được sẽ đưa ra các nhận xét và khuyến nghị cần thiết.

CHƯƠNG 2

CHUYỂN VỊ LỚN CỦA DẦM SANDWICH FGM VÀ CNTRC

Chương này xây dựng phần tử dầm phi tuyến dựa trên công thức Lagrange toàn phần cho phân tích chuyển vị lớn của dầm sandwich FGM và dầm sandwich CNTRC. Phần tử dầm được xây dựng trên cơ sở mở rộng mô hình phần tử dầm đồng nhất, đẳng hướng của Antman [134, 135], trong đó lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất được sử dụng để thiết lập biểu thức năng lượng biến dạng đàn hồi. Kỹ thuật tích phân giảm bậc được áp dụng để tránh cho phần tử khỏi hiện tượng nghẽn trượt (shear-locking). Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu, cấu hình sandwich và nền đàn hồi tới chuyển vị lớn của dầm được khảo sát chi tiết.

2.1. Mở đầu

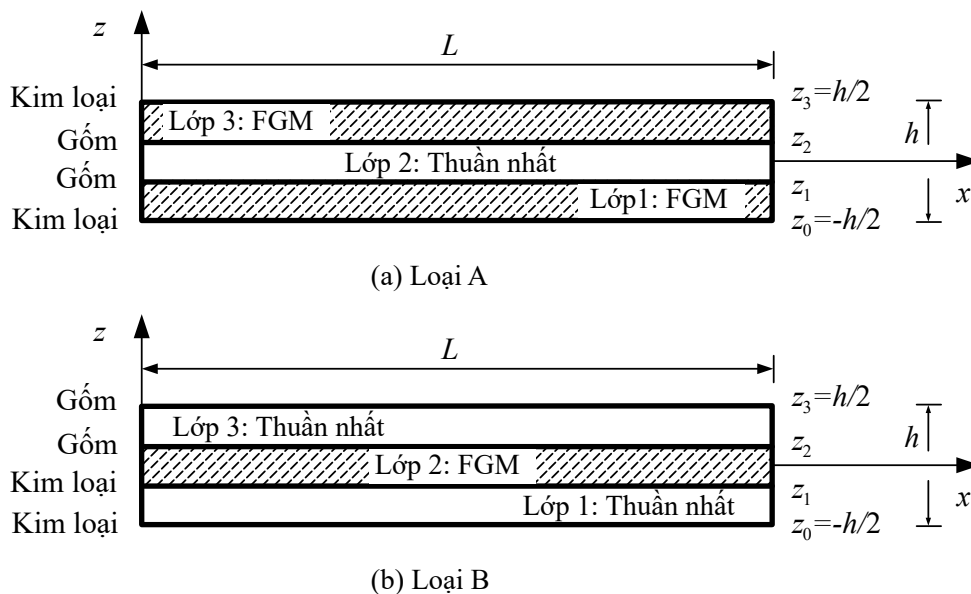
Vật liệu FGM và vật liệu CNTRC có nhiều ưu điểm so với các vật liệu truyền thống, cho phép thiết kế kết cấu trải qua chuyển vị lớn mà không bị phá hủy. Kết cấu sandwich giúp cho việc sử dụng vật liệu hiệu quả hơn và làm tăng tỷ số giữa độ cứng và khối lượng của kết cấu. Nghiên cứu ứng xử phi tuyến của kết cấu nói chung, chuyển vị lớn của dầm sandwich làm từ FGM và CNTRC nói riêng là bài toán quan trọng, thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của một số nhà khoa học. Một trong các yếu tố quan trọng của kết cấu làm từ vật liệu composite, đặc biệt là FGM, đó là các tính chất vật liệu hiệu dụng sử dụng dùng trong mô hình hóa và tính toán đáp ứng của kết cấu composite phụ thuộc vào mô hình đồng nhất hóa lựa chọn. Chương này, bên cạnh việc nghiên cứu chuyển vị lớn của dầm sandwich FGM hai pha (viết tắt là dầm FGSW) và dầm sandwich CNTRC, ảnh hưởng của một số mô hình đồng nhất hóa vật liệu khác nhau cũng như ảnh hưởng của nền đàn hồi tới ứng xử của dầm cũng được xét tới. Các tính chất vật liệu của dầm FGSW được xét trong chương được giả định thay đổi theo chiều dày dầm theo quy luật hàm số lũy thừa. Bốn mô hình đồng nhất hóa vật liệu, cụ thể là các mô hình Voigt, Mori-Tanaka, Hashin-Strickman và Tamura-Tomota-Ozawa được sử dụng để tính toán các hệ số đàn hồi hiệu dụng của dầm. Sử dụng công thức Lagrange toàn phần, phần tử dầm dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất được thiết lập và áp dụng trong nghiên cứu. Phương pháp lặp Newton-Raphson được sử dụng kết hợp với kỹ thuật kiểm soát độ dài cung để thu nhận các đường cong chuyển vị lớn và sự phân bố ứng suất của dầm. Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu, các tham số hình học của dầm lên chuyển vị lớn và sự phân bố ứng suất sẽ được nghiên cứu chi

tiết và làm sáng tỏ. Ảnh hưởng của mô hình đồng nhất hóa lên ứng xử phi tuyến của dầm cũng sẽ được khảo sát và thảo luận.

Với dầm sandwich CNTRC, do các ống nano carbon có độ mảnh cao, khi trộn vào pha nền polymer dễ sinh ra hiện tượng kết tụ. Chính vì vậy, ảnh hưởng của sự kết tụ CNTs tới ứng xử của kết cấu CNTRC nói chung, dầm sandwich CNTRC có chuyển vị lớn nói riêng là vấn đề quan trọng, không thể bỏ qua. Dầm sandwich CNTRC xét trong chương có lớp lõi là vật liệu nền thuần polymer và hai lớp ngoài là vật liệu composite gia cường CNTs. Các hệ số đàn hồi của CNTRC được tính toán theo mô hình Eshelby-Mori-Tanaka, xét tới ảnh hưởng của sự kết tụ của CNTs. Thêm vào đó, nền đàn hồi đóng vai trò quan trọng trong việc hỗ trợ kết cấu, đồng thời cũng ảnh hưởng tới ứng xử phi tuyến của dầm, vì thế, ảnh hưởng của một phần nền đàn hồi dầm tựa lên tới ứng xử phi tuyến của dầm CNTRC cũng được xét tới.

2.2. Dầm sandwich FGM

Hình 2.1 minh họa dầm sandwich FGM (viết tắt là dầm FGSW). Dầm có chiều dài L , thiết diện hình chữ nhật ($b \times h$) đặt trong hệ tọa độ Đề-các (x, z). Hai mô hình dầm được xét đến trong chương này là dầm có hai lớp ngoài được làm từ vật liệu FGM, lớp lõi là vật liệu thuần gốm (gọi là dầm loại A, Hình 2.1a) và dầm có hai lớp ngoài được làm từ vật liệu thuần nhất, lớp lõi là vật liệu FGM (gọi là dầm loại B, Hình 2.1b). Trong Hình 2.1, trục x — được chọn nằm trong mặt giữa của dầm; z_0, z_1, z_2 và z_3 tương ứng là tung độ của mặt đáy, mặt tiếp xúc giữa các lớp và mặt trên của dầm.



Hình 2.1. Mô hình dầm FGSW.

Dầm FGSW được giả định được làm từ hai pha vật liệu, pha gốm và pha kim

loại với tỷ phần thể tích của các pha thành phần thay đổi theo chiều cao dầm theo quy luật lũy thừa. Với dầm Loại A minh họa trên Hình 2.1a, tỷ phần thể tích của pha gốm (V_c) và pha kim loại (V_m) cho bởi phương trình

$$V_c = \begin{cases} \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n, & z \in [z_0, z_1] \\ 1, & z \in [z_1, z_2] \\ \left(\frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \right)^n, & z \in [z_2, z_3] \end{cases} \quad \text{và} \quad V_m = 1 - V_c \quad (2.1)$$

trong đó n là tham số vật liệu, không âm.

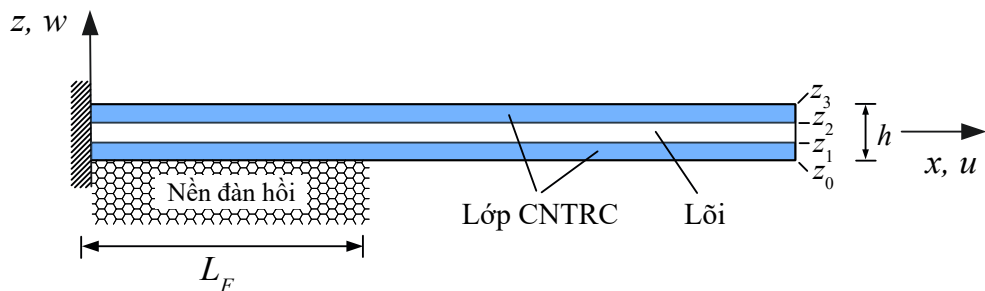
Với dầm Loại B trên Hình 2.1b, tỷ phần thể tích của các pha vật liệu thành phần thay đổi theo chiều cao dầm như sau

$$V_c = \begin{cases} 0, & z \in [z_0, z_1] \\ \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^n, & z \in [z_1, z_2] \\ 1, & z \in [z_2, z_3] \end{cases} \quad \text{và} \quad V_m = 1 - V_c \quad (2.2)$$

Tỷ phần thể tích của các vật liệu thành phần cho bởi các phương trình (2.1) và (2.2) đảm bảo sự liên tục giữa các lớp của dầm sandwich FGM. Điều này giúp cho các tính chất hiệu dụng của dầm sandwich FGM giữa các lớp không bị gián đoạn như thường thấy ở dầm sandwich truyền thống.

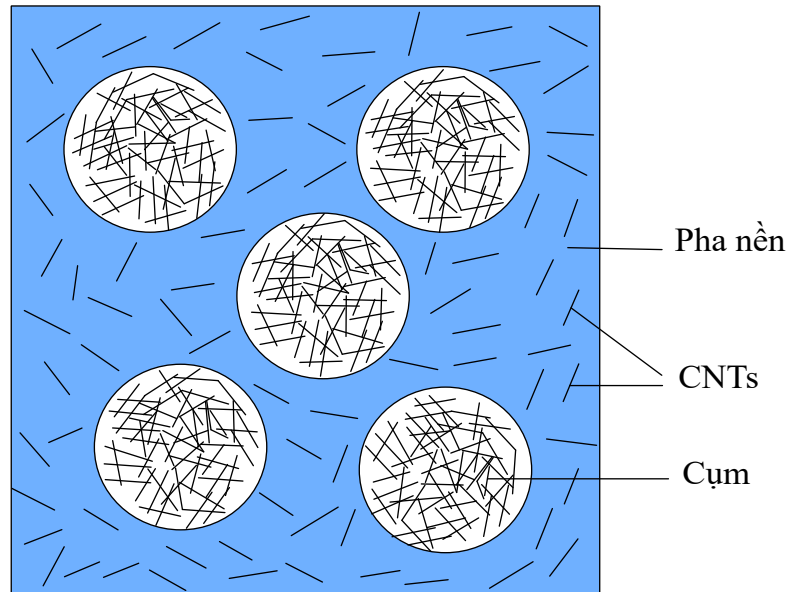
2.3. Dầm sandwich CNTRC

Hình 2.2 minh họa dầm công-xôn dạng sandwich gia cường bởi các ống nano carbon. Dầm có chiều dài L , diện tích thiết diện ngang hình chữ nhật với kích thước ($b \times h$). Dầm được đặt một phần trên nền đàn hồi Pasternak với phần dầm tựa lên có chiều dài L_F , tính từ đầu ngàm của dầm. Hệ tọa độ Đề-các (x, z) và các tọa độ hình học của dầm được định nghĩa như mô tả trong Mục 2.2.



Hình 2.2. Mô hình dầm sandwich CNTRC nằm một phần trên nền đàn hồi.

CNTs với mô-đun đàn hồi cao được sử dụng để gia cường pha nền polymer nhằm cải thiện các tính chất cơ học của kết cấu. Trong mô hình dầm sandwich CNTRC xét đến trong nghiên cứu này, lớp lõi polymer được đặc trưng bởi các hệ số đàn hồi của pha nền polymer, trong khi hai lớp ngoài làm từ CNTRC. Mô hình đồng nhất hóa vật liệu, cụ thể là mô hình Eshelby-Mori-Tanaka [136, 137], được sử dụng để tính toán các tính chất hiệu dụng của hai lớp ngoài. Do tỉ số độ mảnh lớn và độ cứng chống uốn thấp, CNTs có xu hướng kết tụ (agglomeration) trong pha nền polymer, tạo ra các cụm (inclusions) dạng hình cầu, như minh họa trên Hình 2.3 cho một phần tử đại diện (Representative Volume Element, RVE). CNTs trong RVE được tìm thấy ở cả dạng bó (bundle) hoặc dạng bó cụm (cluster) bên trong các hình cầu và rải rác trong pha nền. Sự phân bố cụ thể này đã được mô tả bởi Shi và các cộng sự [7] bằng cách sử dụng mô hình hai tham số được tóm tắt dưới đây.



Hình 2.3. Phân tử đại diện với các hình cầu kết tụ CNTs.

Tổng thể tích (V_r) của CNTs bên trong phần tử đại diện RVE có thể tích (V) được chia thành hai phần

$$V_r = V_r^{\text{inclusion}} + V_r^m \quad (2.3)$$

với $V_r^{\text{inclusion}}$ và V_r^m tương ứng là thể tích của CNTs bên trong các cụm hình cầu (vùng tập trung CNTs) và bên trong pha nền.

Sự kết tụ của CNTs được mô tả thông qua hai tham số dưới đây

$$\xi = \frac{V_{\text{inclusion}}}{V}, \quad \zeta = \frac{V_r^{\text{inclusion}}}{V_r} \quad \text{với } (\xi, \zeta) \in [0, 1] \quad (2.4)$$

Trong biểu thức (2.4), $V_{\text{inclusion}}$ là thể tích của các cụm hình cầu bên trong RVE.

Tham số ξ được định nghĩa là tỉ phần thể tích của các cụm hình cầu so với tổng thể tích của phần tử đại diện (V); ζ là tỉ phần thể tích của CNTs bên trong các cụm hình cầu ($V_r^{\text{inclusion}}$) so với tổng thể tích của CNTs. Trong trường hợp, $\xi < 1$, sự kết tụ là từng phần, các ống nano carbon phân bố cả trong các cụm hình cầu và nằm rải rác trong pha nền. Trường hợp $\xi = 1$ có nghĩa là CNTs phân bố đều trong pha nền và $\zeta = 1$ tương ứng với trường hợp CNTs nằm hoàn toàn trong các cụm hình cầu.

2.4. Các tính chất hiệu dụng

2.4.1. Hệ số đàn hồi của dầm FGSW

Các kết cấu FGM thường có sự thay đổi lớn về tỉ phần thể tích của các vật liệu thành phần bên trong kết cấu. Các tính chất hiệu dụng của FGMs, vì vậy sẽ phụ thuộc vào các đặc trưng địa phương và tổng thể cũng như sự phân bố không gian bên trong kết cấu. Sự thay đổi trong tỉ phần thể tích của các thành phần dẫn đến sự khác nhau trong cấu trúc vi mô và không phải tất cả các mô hình đồng nhất hóa đều áp dụng được đối với FGM. Trong chương này, bốn mô hình đồng nhất hóa vật liệu, cụ thể là các mô hình của Voigt (V), Mori-Tanaka (MT), Hashin-Strickman (HS) và Tamura-Tomota-Ozawa (TTO) được áp dụng để tối ưu các tính chất đàn hồi hiệu dụng của dầm FGM hai pha.

Theo mô hình Voigt, tính chất đàn hồi hiệu dụng (\mathcal{P}_f) của vật liệu FGM hai pha được giả sử tỉ lệ thuận với tỉ phần thể tích của vật liệu thành phần như sau [138]

$$\mathcal{P}_f(z) = \mathcal{P}_c V_c(z) + \mathcal{P}_m V_m(z) \quad (2.5)$$

trong đó \mathcal{P}_c và \mathcal{P}_m tương ứng là tính chất đàn hồi của gốm và kim loại; V_c và V_m tương ứng là tỉ phần thể tích của gốm và kim loại. Các chỉ số dưới 'c' và 'm' trong phương trình (2.5) và dưới đây được sử dụng để xác định các đại lượng liên quan đến tính chất của gốm và kim loại.

Mô hình Mori-Tanaka [137] xấp xỉ sự tương tác giữa các pha trong đó giả sử ứng suất trong mỗi pha bằng với ứng suất trong một cụm đơn lẻ trong ma trận. Mô-đun đàn hồi hiệu dụng (E_f) và hệ số Poisson hiệu dụng (ν_f) trong mô hình Mori-Tanaka có thể được biểu diễn như sau

$$E_f = \frac{9K_f G_f}{3K_f + G_f}, \quad \nu_f = \frac{3K_f - 2G_f}{6K_f + 2G_f} \quad (2.6)$$

trong đó K_f và G_f tương ứng là mô-đun khối hiệu dụng và mô-đun trượt hiệu dụng, các mô-đun này có thể được tính từ mô-đun đàn hồi của các vật liệu thành phần

$$\begin{aligned}\frac{K_f - K_m}{K_c - K_m} &= \frac{V_c}{1 + V_m(K_c - K_m)/(K_m + 4G_m/3)} \\ \frac{G_f - G_m}{G_c - G_m} &= \frac{V_c}{1 + \frac{V_m(G_c - G_m)}{G_m + G_m(9K_m + 8G_m)/(6K_m + 12G_m)}}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Trong phương trình trên, mô-đun khối và mô-đun trượt của các vật liệu thành phần như sau

$$\begin{aligned}K_c &= \frac{E_c}{3(1 - 2\nu_c)}, \quad G_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu_c)} \\ K_m &= \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}\end{aligned}\quad (2.8)$$

Các giới hạn Hashin và Shtrikman [139] cho mô-đun đàn hồi của composite hai pha thu được bằng cách xét đến ảnh hưởng của hệ số Poisson của cả hai pha. Các giới hạn dưới cho mô-đun đàn hồi (E_f), hệ số Poisson hiệu dụng (ν_f) và mô-đun trượt hiệu dụng (G_f) cho bởi

$$E_f = \frac{9KG}{3K + G}, \quad \nu_f = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}, \quad G_f = \frac{E_f}{2(1 - \nu_f)} \quad (2.9)$$

trong đó

$$K = K_c + \frac{V_m}{\frac{1}{K_m - K_c} + \frac{V_c}{K_c + G_c}}, \quad G = G_c + \frac{V_m}{\frac{1}{G_m - G_c} + \frac{V_c(K_c + 2G_c)}{2G_c(K_c + G_c)}} \quad (2.10)$$

Mô hình thứ tư được xét đến ở đây là mô hình Tamura-Tomota-Ozawa [140]. Theo mô hình TTO, ứng suất dọc trục σ và biến dạng dọc trục ε của composite hai pha liên hệ với các ứng suất và biến dạng dọc trục trung bình tương ứng của hai vật liệu thành phần bởi [47, 141]

$$\sigma = \sigma_c V_c + \sigma_m V_m, \quad \varepsilon = \varepsilon_c V_c + \varepsilon_m V_m \quad (2.11)$$

trong đó $\sigma_c, \sigma_m, \varepsilon_c, \varepsilon_m$ là các ứng suất và biến dạng trung bình của các pha gốm và kim loại. Trong mô hình TTO, tham số thực nghiệm q đại diện cho tỉ số giữa ứng suất và biến dạng truyền

$$q = \frac{\sigma_c - \sigma_m}{|\varepsilon_c - \varepsilon_m|}, \quad 0 < q < \infty \quad (2.12)$$

Giá trị của q phụ thuộc vào các tính chất của các vật liệu thành phần và sự tương tác kết cấu vi mô trong composite. Kết hợp phương trình (2.11) và (2.12) ta thu

được mô-đun đàn hồi hiệu dụng (E_f) dưới dạng

$$E_f = \frac{E_c V_c + E_m V_m \frac{q + E_c}{q + E_m}}{V_c + V_m \frac{q + E_c}{q + E_m}} \quad (2.13)$$

Mô-đun trượt hiệu dụng (G_f) trong mô hình TTO được đánh giá thông qua mô-đun đàn hồi hiệu dụng (E_f) trong phương trình (2.13) và hệ số Poisson hiệu dụng (ν_f), trong đó hệ số Poisson hiệu dụng được tính toán qua biểu thức $\nu_f = \nu_c V_c + \nu_m V_m$. Chúng ta có thể xác nhận rằng phương trình (2.13) sẽ đưa được về dạng biểu diễn cho mô-đun đàn hồi hiệu dụng theo mô hình Voigt trong trường hợp $q = \pm\infty$.

2.4.2. Tính chất hiệu dụng của dầm CNTRC

Mô-đun khối hiệu dụng và mô-đun trượt hiệu dụng bên trong các cụm hình cầu, (K_{in}) và (G_{in}), và các mô-đun khối hiệu dụng và mô-đun trượt hiệu dụng bên ngoài các cụm hình cầu, (K_{out}) và (G_{out}), được tính như sau [7]

$$\begin{aligned} K_{in} &= K_m + \frac{f_{CNT} \zeta (\delta_r - 3K_m \alpha_r)}{3(\xi - f_{CNT} \zeta + f_{CNT} \zeta \alpha_r)}, \\ G_{in} &= G_m + \frac{f_{CNT} \zeta (\eta_r - 2G_m \beta_r)}{2(\xi - f_{CNT} \zeta + f_{CNT} \zeta \beta_r)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

và

$$\begin{aligned} K_{out} &= K_m + \frac{f_{CNT} (1 - \zeta) (\delta_r - 3K_m \alpha_r)}{3[1 - \xi - f_{CNT} (1 - \zeta) + f_{CNT} (1 - \zeta) \alpha_r]}, \\ G_{out} &= G_m + \frac{f_{CNT} (1 - \zeta) (\eta_r - 2G_m \beta_r)}{2[1 - \xi - f_{CNT} (1 - \zeta) + f_{CNT} (1 - \zeta) \beta_r]} \end{aligned} \quad (2.15)$$

với $f_{CNT} = V_{CNT}/V$.

Các biểu thức (2.14) và (2.15) sử dụng các ký hiệu dưới đây

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{3(K_m + G_m) + k_r - l_r}{3(G_m + k_r)}, \\ \delta_r &= \frac{1}{3} \left[n_r + 2l_r \frac{(2k_r + l_r)(3K_m + 2G_m - l_r)}{G_m + k_r} \right], \\ \beta_r &= \frac{1}{5} \left\{ \frac{4G_m + 2k_r + l_r}{3(G_m + k_r)} + \frac{4G_m}{G_m + p_r} + \frac{2G_m[(3K_m + G_m) + (3K_m + 7G_m)]}{G_m(3K_m + G_m) + m_r(3K_m + 7G_m)} \right\}, \\ \eta_r &= \frac{1}{5} \left[\frac{2}{3}(n_r - l_r) + \frac{8G_m p_r}{G_m + p_r} + \frac{8m_r G_m (3K_m + 4G_m)}{3K_m(m_r + G_m) + G_m(7m_r + G_m)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(k_r - l_r)(2G_m + l_r)}{3(G_m + k_r)} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

trong đó các chỉ số dưới 'm' và 'r' được sử dụng để chỉ pha nền và pha gia cường; k_r , l_r , m_r , n_r , p_r là mô-đun đàn hồi Hill của pha gia cường CNTs.

Mô-đun khối và mô-đun trượt hiệu dụng của composite thu được bằng cách sử dụng mô hình đồng nhất hóa vật liệu Mori-Tanaka như sau

$$\begin{aligned} K &= K_{\text{out}} + \left[1 + \frac{\xi \left(\frac{K_{\text{in}}}{K_{\text{out}}} - 1 \right)}{1 + \alpha(1 - \xi) \left(\frac{K_{\text{in}}}{K_{\text{out}}} - 1 \right)} \right], \\ G &= G_{\text{out}} + \left[1 + \frac{\xi \left(\frac{G_{\text{in}}}{G_{\text{out}}} - 1 \right)}{1 + \beta(1 - \xi) \left(\frac{G_{\text{in}}}{G_{\text{out}}} - 1 \right)} \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

trong đó α và β được xác định như sau

$$\alpha = \frac{1 + \nu_{\text{out}}}{3(1 - \nu_{\text{out}})}, \quad \beta = \frac{2(4 - 5\nu_{\text{out}})}{15(1 - \nu_{\text{out}})} \quad (2.18)$$

với $\nu_{\text{out}} = (3K_{\text{out}} - 2G_{\text{out}})/2(3K_{\text{out}} + G_{\text{out}})$. Mô-đun Young (E) và hệ số Poisson (ν) của dầm CNTRC có dạng

$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad (2.19)$$

2.5. Phần tử dầm Lagrange toàn phần

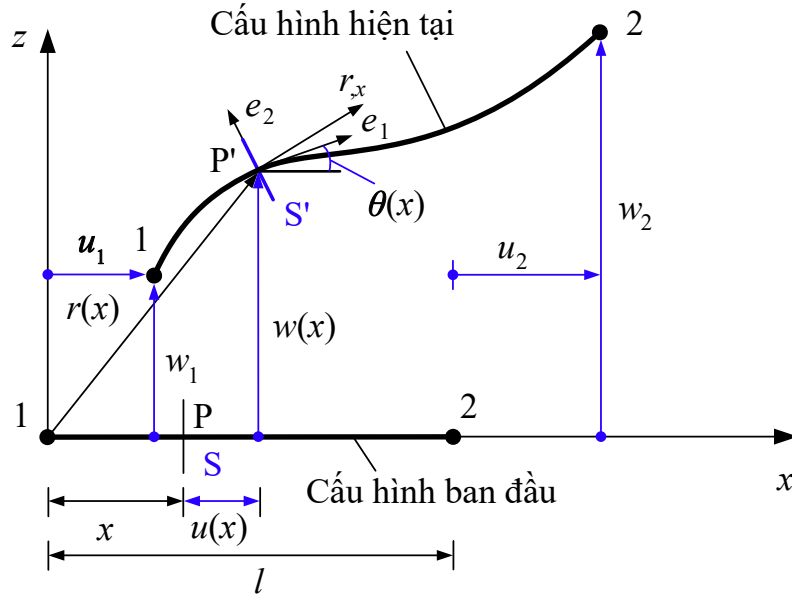
Mô hình phần tử hữu hạn dùng trong phân tích chuyển vị lớn của dầm có thể được xây dựng bằng cách sử dụng công thức Lagrange toàn phần, công thức hệ tọa độ đồng hành hoặc công thức Lagrange cập nhật. Điều này phụ thuộc vào việc lựa chọn cấu hình quy chiếu. Trong mục này, Luận án tiến hành xây dựng phần tử dầm phi tuyến hai nút dựa trên công thức Lagrange toàn phần, trong đó có tính đến sự thay đổi của các tính chất vật liệu theo chiều cao dầm.

2.5.1. Véc-tơ chuyển vị nút

Phần tử dầm hai nút, minh họa trên Hình 2.4, ban đầu được xây dựng bởi Pacoste và Eriksson [142] cho phân tích phi tuyến của dầm thuần nhất, được phát triển từ mô hình dầm phi tuyến của Antman [143]. Véc-tơ chuyển vị nút của phần tử dầm bao gồm sáu bậc tự do

$$\mathbf{d} = \{u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2\}^T \quad (2.20)$$

trong đó u_i , w_i , θ_i , ($i = 1, 2$) tương ứng là chuyển vị theo phương x , chuyển vị theo phương z và góc quay tại nút i . Chỉ số trên 'T' trong phương trình (2.20) và dưới đây được sử dụng để chỉ chuyển vị của một véc-tơ hay một ma trận.



Hình 2.4. Cấu hình và các bậc tự do của phần tử dầm hai nút.

Giả sử trong cấu hình ban đầu, phần tử dầm là thẳng, có chiều dài ban đầu l nằm trên trục x của hệ tọa độ Đề-các (x, z) . Điểm P trong cấu hình ban đầu ứng với hoành độ x và thiết diện ngang S , sau quá trình biến dạng trở thành điểm P' và thiết diện S' . Biến dạng tại điểm P có thể được xác định qua góc $\theta(x)$ - góc quay của thiết diện S và véc-tơ vị trí hiện tại $\mathbf{r}(x)$ của điểm P' như sau [142]

$$\mathbf{r}(x) = [x + u(x)]\mathbf{i} + w(x)\mathbf{j} \quad (2.21)$$

trong đó \mathbf{i} và \mathbf{j} tương ứng là các véc-tơ đơn vị trên các trục x và z ; $0 \leq x \leq l$, xác định trong cấu hình ban đầu; $u(x)$ và $w(x)$ tương ứng là các chuyển vị theo phương trục x và trục z của điểm P . Thiết diện S tương ứng với điểm P có thể trải qua chuyển vị và góc quay lớn theo các chuyển vị $u(x)$, $w(x)$ và góc quay $\theta(x)$, như được minh họa trên Hình 2.4. Véc-tơ $\mathbf{r}_{,x}(x)$ tại điểm P' , tiếp tuyến với cấu hình biến dạng hiện tại của phần tử có thể được biểu diễn theo các biến dạng dọc trục và biến dạng trượt, $\varepsilon(x)$ và $\gamma(x)$, như sau

$$\mathbf{r}_{,x}(x) = \frac{d\mathbf{r}(x)}{dx} = [1 + \varepsilon(x)]\mathbf{e}_1 + \gamma(x)\mathbf{e}_2 \quad (2.22)$$

trong đó

$$\mathbf{e}_1 = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_2 = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \quad (2.23)$$

tương ứng là các véc-tơ đơn vị, vuông góc và song song với thiết diện hiện tại tại S' . Độ cong của dầm, $\kappa(x)$, tại điểm P được cho bởi

$$\kappa(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (2.24)$$

Từ các phương trình (2.21)-(2.23), ta có thể viết các biểu thức cho biến dạng dọc trục và biến dạng trượt dưới dạng

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \cos \theta + \frac{dw}{dx} \sin \theta - 1 \\ \gamma(x) &= \frac{dw}{dx} \cos \theta - \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \sin \theta\end{aligned}\quad (2.25)$$

Như đã được chỉ ra trong nghiên cứu của Pacoste và Eriksson [142], các biến dạng $\varepsilon(x)$, $\gamma(x)$ và độ cong $\kappa(x)$, mặc dù được tham số hóa để thuận tiện với khoảng cách quy chiếu $x \in [0, l]$ nhưng nhận các giá trị trên cấu hình biến dạng hiện tại.

2.5.2. Năng lượng biến dạng và phép nội suy

Năng lượng biến dạng cho phần tử dầm U được xác định từ năng lượng biến dạng đàn hồi của dầm (U_B) và năng lượng sinh ra do biến dạng của nền đàn hồi (U_F), $U = U_B + U_F$, trong đó

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^l \left[A_{11} \varepsilon(x)^2 + 2A_{12} \varepsilon(x) \kappa(x) + A_{22} \kappa(x)^2 + \psi A_{33} \gamma(x)^2 \right] dx \quad (2.26)$$

với ψ là hệ số hiệu chỉnh trượt, được chọn bằng 5/6 cho dầm với thiết diện ngang hình chữ nhật xét đến trong Luận án này; A_{11} , A_{12} , A_{22} và A_{33} tương ứng là độ cứng dọc trục, độ cứng tương hỗ giữa dọc trục-uốn, độ cứng chống uốn và độ cứng chống trượt. Các thành phần độ cứng này được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned}(A_{11}, A_{12}, A_{22}) &= b \sum_{i=1}^3 \int_{z_{i-1}}^{z_i} E_f(z) (1, z, z^2) dz \\ A_{33} &= b \sum_{i=1}^3 \int_{z_{i-1}}^{z_i} G_f(z) dz\end{aligned}\quad (2.27)$$

trong đó b là chiều dày của dầm, và E_f , G_f tương ứng là mô-đun đàn hồi và mô-đun trượt hiệu dụng, được tính toán trên cơ sở sử dụng các mô hình cơ học vi mô như trình bày trong mục 2.4. Lưu ý rằng, mô-đun đàn hồi E_f và mô-đun trượt G_f trong mục 2.4 được xây dựng cho từng lớp dầm sandwich. Các thành phần độ cứng A_{11} , A_{12} , A_{22} và A_{33} của kết cấu thu được bằng cách tính tổng qua từng lớp dầm.

Bởi vì dầm trải qua chuyển vị lớn, biến dạng của nền đàn hồi cần được xem xét theo cả hướng chuyển vị theo phương trục x và trục z [39]. Do đó, năng lượng biến dạng đàn hồi sinh ra do nền đàn hồi Pasternak dùng cho phân tích chuyển vị lớn có dạng

$$U_F = \frac{k_W}{2} \int_0^{L_F} (u^2 + w^2) dx + \frac{k_G}{2} \int_0^{L_F} (\theta - \gamma)^2 dx \quad (2.28)$$

trong đó k_W và k_G tương ứng là độ cứng của nền đàn hồi Winkler và độ cứng chống trượt của nền đàn hồi Pasternak; L_F là chiều dài phần nền đàn hồi dầm tựa lên.

Các chuyển vị và góc quay trong phần tử của phần tử dầm xây dựng trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất có thể được nội suy tuyến tính qua các giá trị nút như sau

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 \end{bmatrix} \left\{ u_1 \quad u_2 \quad w_1 \quad w_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \right\}^T \quad (2.29)$$

với

$$N_1 = \frac{l-x}{l}, \quad N_2 = \frac{x}{l} \quad (2.30)$$

Tuy nhiên, phép nội suy tuyến tính ở trên dẫn tới phần tử gặp phải hiện tượng nghẽn trượt [144]. Để giải quyết vấn đề này, phương pháp cầu phương giảm bậc, cụ thể là một điểm Gauss được áp dụng để đánh giá năng lượng biến dạng của phần tử. Với ý tưởng này, chúng ta có thể biểu diễn năng lượng biến dạng (2.26) và (2.28) dưới dạng sau đây

$$\begin{aligned} U_B &= \frac{l}{2} (A_{11}\hat{\varepsilon}^2 + 2A_{12}\hat{\varepsilon}\hat{\kappa} + A_{22}\hat{\chi}^2 + \psi A_{33}\hat{\gamma}^2) \\ U_F &= \frac{lk_W}{6} (u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2 + w_1^2 + w_1w_2 + w_2^2) + \frac{lk_G}{2} (\hat{\theta} - \hat{\gamma})^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{l}\right) \cos \hat{\theta} + \frac{w_2 - w_1}{l} \sin \hat{\theta} - 1 \\ \hat{\gamma} &= -\left(1 + \frac{u_2 - u_1}{l}\right) \sin \hat{\theta} + \frac{w_2 - w_1}{l} \cos \hat{\theta} \\ \hat{\chi} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{l} \quad \text{với} \quad \hat{\theta} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Từ biểu thức (2.32), ta tính được

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial u_1} &= -\frac{1}{l} \cos \hat{\theta}, \quad \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial u_2} = \frac{1}{l} \cos \hat{\theta}, \quad \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial w_1} = -\frac{1}{l} \sin \hat{\theta}, \quad \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial w_2} = \frac{1}{l} \sin \hat{\theta} \\ \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u_1} &= \frac{1}{l} \sin \hat{\theta}, \quad \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial u_2} = -\frac{1}{l} \sin \hat{\theta}, \quad \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial w_1} = -\frac{1}{l} \cos \hat{\theta}, \quad \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial w_2} = \frac{1}{l} \cos \hat{\theta}, \\ \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} \hat{\gamma}, \quad \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2} (\hat{\varepsilon} + 1), \quad \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{l} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Lưu ý rằng, đối với bài toán không xét đến ảnh hưởng của nền đàn hồi, năng lượng sinh ra do nền đàn hồi được cho bằng 0. Khi đó biểu thức năng lượng biến dạng đàn hồi của dầm có dạng đơn giản $U = U_B$.

2.5.3. Véc-tơ nội lực

Véc-tơ nội lực tại nút phân tử \mathbf{f}_{in} được chia thành hai phần, \mathbf{f}_{in}^B sinh ra do biến dạng của dầm và \mathbf{f}_{in}^F sinh ra do biến dạng của nền đàn hồi

$$\mathbf{f}_{in} = \mathbf{f}_{in}^B + \mathbf{f}_{in}^F \quad (2.34)$$

Các véc-tơ nội lực tại nút này thu được bằng cách vi phân biểu thức năng lượng biến dạng trong (2.31) theo véc-tơ chuyển vị nút

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{in}^B &= \frac{\partial U_B}{\partial \mathbf{d}} = \left\{ f_{u_1}^B \quad f_{w_1}^B \quad f_{\theta_1}^B \quad f_{u_2}^B \quad f_{w_2}^B \quad f_{\theta_2}^B \right\}^T, \\ \mathbf{f}_{in}^F &= \frac{\partial U_F}{\partial \mathbf{d}} = \left\{ f_{u_1}^F \quad f_{w_1}^F \quad f_{\theta_1}^F \quad f_{u_2}^F \quad f_{w_2}^F \quad f_{\theta_2}^F \right\}^T \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sử dụng các biến đổi (2.33) và thay biểu thức (2.31) vào biểu diễn (2.35), ta thu được các biểu diễn hiển cho các véc-tơ nội lực phân tử như sau

$$\begin{aligned} f_{u_1}^B &= -(A_{11}\hat{\varepsilon} + A_{12}\hat{\chi}) \cos \hat{\theta} + \psi A_{33} \hat{\gamma} \sin \hat{\theta} \\ f_{w_1}^B &= -(A_{11}\hat{\varepsilon} + A_{12}\hat{\chi}) \sin \hat{\theta} - \psi A_{33} \hat{\gamma} \cos \hat{\theta} \\ f_{\theta_1}^B &= \frac{l}{2} A_{11} \hat{\varepsilon} \hat{\gamma} + \frac{l}{2} A_{12} \left(\hat{\gamma} \hat{\chi} - \frac{2}{l} \hat{\varepsilon} \right) - A_{22} \hat{\chi} - \frac{l}{2} \psi A_{33} (\hat{\varepsilon} + 1) \hat{\gamma} \\ f_{u_2}^B &= (A_{11}\hat{\varepsilon} + A_{12}\hat{\chi}) \cos \hat{\theta} - \psi A_{33} \hat{\gamma} \sin \hat{\theta} \\ f_{w_2}^B &= (A_{11}\hat{\varepsilon} + A_{12}\hat{\chi}) \sin \hat{\theta} + \psi A_{33} \hat{\gamma} \cos \hat{\theta} \\ f_{\theta_2}^B &= \frac{l}{2} A_{11} \hat{\varepsilon} \hat{\gamma} + A_{12} \left(\frac{l}{2} \hat{\gamma}^2 - \hat{\varepsilon} \right) + A_{22} \hat{\chi} - \frac{l}{2} \psi A_{33} (\hat{\varepsilon} + 1) \hat{\gamma} \end{aligned} \quad (2.36)$$

và

$$\begin{aligned} f_{u_1}^F &= \frac{l}{6} k_W (2u_I + u_J) + k_G (\hat{\theta} - \hat{\gamma}) \sin \hat{\theta}, \\ f_{w_1}^F &= \frac{l}{6} k_W (2w_1 + w_2) + k_G (\hat{\theta} - \hat{\gamma}) \cos \hat{\theta}, \\ f_{\theta_1}^F &= l k_G (\hat{\theta} - \hat{\gamma}) \left(1 - \frac{l}{2} \hat{\varepsilon} \right), \quad f_{u_1}^F = \frac{l}{6} k_W (u_I + 2u_J) + k_G (\hat{\theta} - \hat{\gamma}) \sin \hat{\theta}, \\ f_{w_2}^F &= \frac{l}{6} k_W (w_1 + 2w_2) - k_G (\hat{\theta} - \hat{\gamma}) \cos \hat{\theta}, \quad f_{\theta_2}^F = f_{\theta_1}^F \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.5.4. Ma trận độ cứng tiếp tuyến

Ma trận độ cứng tiếp tuyến phân tử \mathbf{k}_t cũng được viết dưới dạng

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_t^B + \mathbf{k}_t^F \quad (2.38)$$

trong đó \mathbf{k}_t^B và \mathbf{k}_t^F tương ứng là các ma trận độ cứng tiếp tuyến phần tử sinh ra từ biến dạng của dầm và biến dạng của nền đàn hồi. Các ma trận độ cứng tiếp tuyến này thu được bằng cách vi phân hai lần năng lượng biến dạng đàn hồi (2.31) theo véc-tơ chuyển vị nút

$$\mathbf{k}_t^B = \frac{\partial^2 U_B}{\partial \mathbf{d}^2} = \begin{bmatrix} k_{u_1 u_1}^B & k_{u_1 w_1}^B & k_{u_1 \theta_1}^B & k_{u_1 u_2}^B & k_{u_1 w_2}^B & k_{u_1 \theta_2}^B \\ & k_{w_1 w_1}^B & k_{w_1 \theta_1}^B & k_{w_1 u_2}^B & k_{w_1 w_2}^B & k_{w_1 \theta_2}^B \\ & & k_{\theta_1 \theta_1}^B & k_{\theta_1 u_2}^B & k_{\theta_1 w_2}^B & k_{\theta_1 \theta_2}^B \\ & & & k_{u_2 u_2}^B & k_{u_2 w_2}^B & k_{u_2 \theta_2}^B \\ \text{syms.} & & & & k_{w_2 w_2}^B & k_{w_2 \theta_2}^B \\ & & & & & k_{\theta_2 \theta_2}^B \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

và

$$\mathbf{k}_t^F = \frac{\partial^2 U_F}{\partial \mathbf{d}^2} = \begin{bmatrix} k_{u_1 u_1}^F & k_{u_1 w_1}^F & k_{u_1 \theta_1}^F & k_{u_1 u_2}^F & k_{u_1 w_2}^F & k_{u_1 \theta_2}^F \\ & k_{w_1 w_1}^F & k_{w_1 \theta_1}^F & k_{w_1 u_2}^F & k_{w_1 w_2}^F & k_{w_1 \theta_2}^F \\ & & k_{\theta_1 \theta_1}^F & k_{\theta_1 u_2}^F & k_{\theta_1 w_2}^F & k_{\theta_1 \theta_2}^F \\ & & & k_{u_2 u_2}^F & k_{u_2 w_2}^F & k_{u_2 \theta_2}^F \\ \text{syms.} & & & & k_{w_2 w_2}^F & k_{w_2 \theta_2}^F \\ & & & & & k_{\theta_2 \theta_2}^F \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Dạng hiển của các hệ số trong các ma trận độ cứng tiếp tuyến \mathbf{k}_t^B và \mathbf{k}_t^F như sau

- Các hệ số trên đường chéo chính của ma trận \mathbf{k}_t^B trong biểu thức (2.39)

$$\begin{aligned} k_{u_1 u_1}^B &= \frac{1}{l} (A_{11} \cos^2 \hat{\theta} + \psi A_{33} \sin^2 \hat{\theta}), \quad k_{w_1 w_1}^B = \frac{1}{l} (A_{11} \sin^2 \hat{\theta} + \psi A_{33} \cos^2 \hat{\theta}) \\ k_{\theta_1 \theta_1}^B &= \frac{l A_{11}}{4} [\hat{\gamma}^2 - \hat{\varepsilon}(\hat{\varepsilon} + 1)] - \frac{l A_{12}}{4} \left[(\hat{\varepsilon} + 1) \hat{\chi} + \frac{4}{l} \hat{\gamma} \right] + \frac{A_{22}}{l} \\ &\quad + \frac{l \psi A_{33}}{4} [(\hat{\varepsilon} + 1)^2 - \hat{\gamma}^2] \\ k_{\theta_2 \theta_2}^B &= \frac{l A_{11}}{4} [\hat{\gamma}^2 - \hat{\varepsilon}(\hat{\varepsilon} + 1)] - \frac{l A_{12}}{4} (\hat{\varepsilon} + 1) \hat{\chi} + \frac{A_{22}}{l} + \frac{l \psi A_{33}}{4} [(\hat{\varepsilon} + 1)^2 - \hat{\gamma}^2] \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\text{và } k_{u_2 u_2}^B = k_{u_1 u_1}^B, \quad k_{w_2 w_2}^B = k_{w_1 w_1}^B$$

- Các hệ số ngoài đường chéo chính của ma trận \mathbf{k}_r^B trong biểu thức (2.39)

$$\begin{aligned}
k_{u_1 w_1}^B &= \frac{A_{11}}{l} \sin \hat{\theta} \cos \hat{\theta} - \frac{\psi A_{33}}{l} \sin \hat{\theta} \cos \hat{\theta} \\
k_{u_1 \theta_1}^B &= \frac{A_{11}}{2} (\hat{\varepsilon} \sin \hat{\theta} - \hat{\gamma} \cos \hat{\theta}) - \frac{A_{12}}{2l} (\hat{\chi} \sin \hat{\theta} + 2 \cos \hat{\theta}) \\
&\quad + \frac{\psi A_{33}}{2} [\hat{\gamma} \cos \hat{\theta} - (\hat{\varepsilon} + 1) \sin \hat{\theta}] \\
k_{w_1 \theta_1}^B &= -\frac{A_{11}}{2} (\hat{\gamma} \sin \hat{\theta} + \hat{\varepsilon} \cos \hat{\theta}) + \frac{A_{12}}{2l} (l \hat{\chi} \cos \hat{\theta} - 2 \sin \hat{\theta}) \\
&\quad + \frac{\psi A_{33}}{2} [\hat{\gamma} \sin \hat{\theta} + (\hat{\varepsilon} + 1) \cos \hat{\theta}] \\
k_{w_1 \theta_2}^B &= -\frac{A_{11}}{2} (\hat{\gamma} \sin \hat{\theta} + \hat{\varepsilon} \cos \hat{\theta}) + \frac{A_{12}}{2l} (l \hat{\chi} \cos \hat{\theta} + 2 \sin \hat{\theta}) \\
&\quad + \frac{\psi A_{33}}{2} [\hat{\gamma} \sin \hat{\theta} + (\hat{\varepsilon} + 1) \cos \hat{\theta}] \\
k_{u_1 \theta_2}^B &= \frac{A_{11}}{2} (\hat{\varepsilon} \sin \hat{\theta} - \hat{\gamma} \cos \hat{\theta}) + \frac{A_{12}}{2l} (\hat{\chi} \sin \hat{\theta} - 2 \cos \hat{\theta}) \\
&\quad + \frac{\psi A_{33}}{2} [\hat{\gamma} \cos \hat{\theta} - (\hat{\varepsilon} + 1) \sin \hat{\theta}]
\end{aligned} \tag{2.42}$$

và

$$\begin{aligned}
k_{u_1 u_2}^B &= -k_{u_1 u_1}^B, \quad k_{u_1 w_2}^B = -k_{u_1 w_1}^B, \quad k_{u_1 \theta_2}^B = k_{u_1 \theta_1}^B, \quad k_{w_1 w_2}^B = -k_{w_1 w_1}^B, \\
k_{w_1 \theta_2}^B &= -k_{w_1 \theta_1}^B, \quad k_{u_2 w_2}^B = k_{u_1 w_1}^B, \quad k_{u_2 \theta_2}^B = -k_{u_1 \theta_1}^B, \quad k_{w_2 \theta_2}^B = -k_{w_1 \theta_2}^B
\end{aligned}$$

- Các hệ số của ma trận \mathbf{k}_r^F trong biểu thức (2.40)

$$\begin{aligned}
k_{u_1 u_1}^F &= \frac{l}{3} k_W + \frac{1}{l} \sin^2 \hat{\theta} k_G, \quad k_{w_1 w_1}^F = \frac{l}{3} k_W + \frac{1}{l} \cos^2 \hat{\theta} k_G, \\
k_{\theta_1 \theta_1}^F &= \frac{l}{4} [(2 - \hat{\varepsilon})^2 - (\hat{\theta} - \hat{\gamma}) \hat{\gamma}] k_G, \quad k_{u_1 w_1}^F = -\frac{1}{2l} \sin 2\hat{\theta} k_G \\
k_{u_1 \theta_1}^F &= -\frac{1}{2} [(2 - \hat{\varepsilon}) \sin \hat{\theta} - (\hat{\theta} - \hat{\gamma}) \cos \hat{\theta}] k_G, \\
k_{w_1 \theta_1}^F &= \frac{1}{2} [(2 - \hat{\varepsilon}) \cos \hat{\theta} - (\hat{\theta} - \hat{\gamma}) \sin \hat{\theta}] k_G
\end{aligned} \tag{2.43}$$

và

$$\begin{aligned}
k_{u_2 u_2}^F &= k_{u_1 u_1}^F, \quad k_{u_1 u_2}^F = -k_{u_1 u_2}^F, \quad k_{w_2 w_2}^F = k_{w_1 w_1}^F, \\
k_{w_1 w_2}^F &= -k_{w_2 w_2}^F, \quad k_{\theta_1 \theta_2}^F = k_{\theta_2 \theta_2}^F = k_{\theta_1 \theta_1}^F, \\
k_{u_2 w_2}^F &= k_{u_1 w_1}^F, \quad k_{u_1 w_2}^F = -k_{u_1 w_1}^F, \quad k_{u_1 \theta_2}^F = k_{u_1 \theta_1}^F, \\
k_{w_1 \theta_2}^F &= k_{w_1 \theta_1}^F, \quad k_{w_2 \theta_1}^F = k_{w_2 \theta_2}^F = -k_{w_1 \theta_2}^F
\end{aligned}$$

2.6. Phương trình cân bằng

Phương trình cân bằng dùng cho phân tích chuyển vị lớn của dầm theo ngôn ngữ PTHH có thể viết dưới dạng sau [145]

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}, \lambda) = \mathbf{q}_{\text{in}}(\mathbf{p}) - \lambda \mathbf{f}_{\text{ef}} = \mathbf{0} \tag{2.44}$$

trong đó véc-tơ lực dư \mathbf{g} là hàm của chuyển vị nút hiện tại của kết cấu \mathbf{p} và tham số lực ngoài λ ; \mathbf{q}_{in} là véc-tơ lực nút của kết cấu, được ghép nối từ véc-tơ nội lực \mathbf{f}_{in} , và \mathbf{f}_{ef} là véc-tơ lực ngoài cố định. Hệ phương trình (2.44) gồm n phương trình với m ẩn số là các chuyển vị và góc xoay tại các nút \mathbf{p} . Nghiệm của phương trình (2.44) tương ứng với một giá trị nào đó của tham số λ cho điểm cân bằng trong không gian lực-chuyển vị nút. Tập hợp các điểm cân bằng tạo thành đường cân bằng (equilibrium path).

Hệ phương trình cân bằng (2.44) có thể giải bằng thuật toán tăng dần/lặp (incremental/iterative method) trên cơ sở phương pháp Newton-Raphson. Cụ thể, tổng giá trị của tải trọng được chia thành các phần nhỏ \mathbf{f}_{ef} , được gọi là gia số tải trọng. Ứng với mỗi gia số tải trọng, gia số chuyển vị được tính toán trên cơ sở thuật toán lặp. Thuật toán lặp gồm hai bước: bước dự đoán và bước hiệu chỉnh. Trong bước dự đoán, nghiệm mới tính toán từ nghiệm hội tụ trước đó với ma trận độ cứng được tính tại vị trí cân bằng đã biết. Trong bước hiệu chỉnh chuyển vị lặp liên tiếp được thêm vào cho đến khi lời giải thỏa mãn một tiêu chuẩn hội tụ đã chọn nào đó. Thuật toán lặp theo phương pháp Newton-Raphson có thể nhận được bằng cách khai triển Taylor bậc một véc-tơ lực dư $\mathbf{g}(\mathbf{p}, \lambda)$ tại điểm cân bằng đã biết $(\mathbf{p}_o, \lambda_o \mathbf{f}_{ef})$

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_o + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \Delta \mathbf{p} = \mathbf{g}_o + \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{p} = 0 \quad (2.45)$$

trong đó \mathbf{K}_t là ma trận độ cứng tiếp tuyến tổng thể, nhận được bằng cách nối ghép các ma trận độ cứng tiếp tuyến phần tử \mathbf{k}_t , $\mathbf{K}_t = \sum \mathbf{k}_t$; các chỉ số dưới 'n' và 'o' tương ứng với giá trị tính tại điểm mới (new) và tại điểm cân bằng đã biết (old). Phương trình (2.45) cho ta tính giá trị của gia số chuyển vị trong bước dự đoán và véc-tơ chuyển vị được cập nhật như sau

$$\Delta \mathbf{p} = -\mathbf{K}_t^{-1}(\mathbf{p}_o) \mathbf{g}_o(\mathbf{p}_o, \lambda_o \mathbf{f}_{ef}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_o + \Delta \mathbf{p} \quad (2.46)$$

trong đó ma trận độ cứng tiếp tuyến \mathbf{K}_t được đánh giá tại điểm đã biết $(\mathbf{p}_o, \lambda_o \mathbf{f}_{ef})$, và ở bước dự đoán thì $\mathbf{g}_o = \mathbf{f}_{ef}$.

Các bước hiệu chỉnh được thực hiện trên cơ sở các phương trình (2.45) và (2.46) với véc-tơ lực dư \mathbf{g} và ma trận độ cứng được tính với \mathbf{p} là véc-tơ chuyển vị đã cập nhật. Cụ thể, chuyển vị lặp $\delta \mathbf{p}$ và véc-tơ chuyển vị trong bước hiệu chỉnh được cập nhật như sau

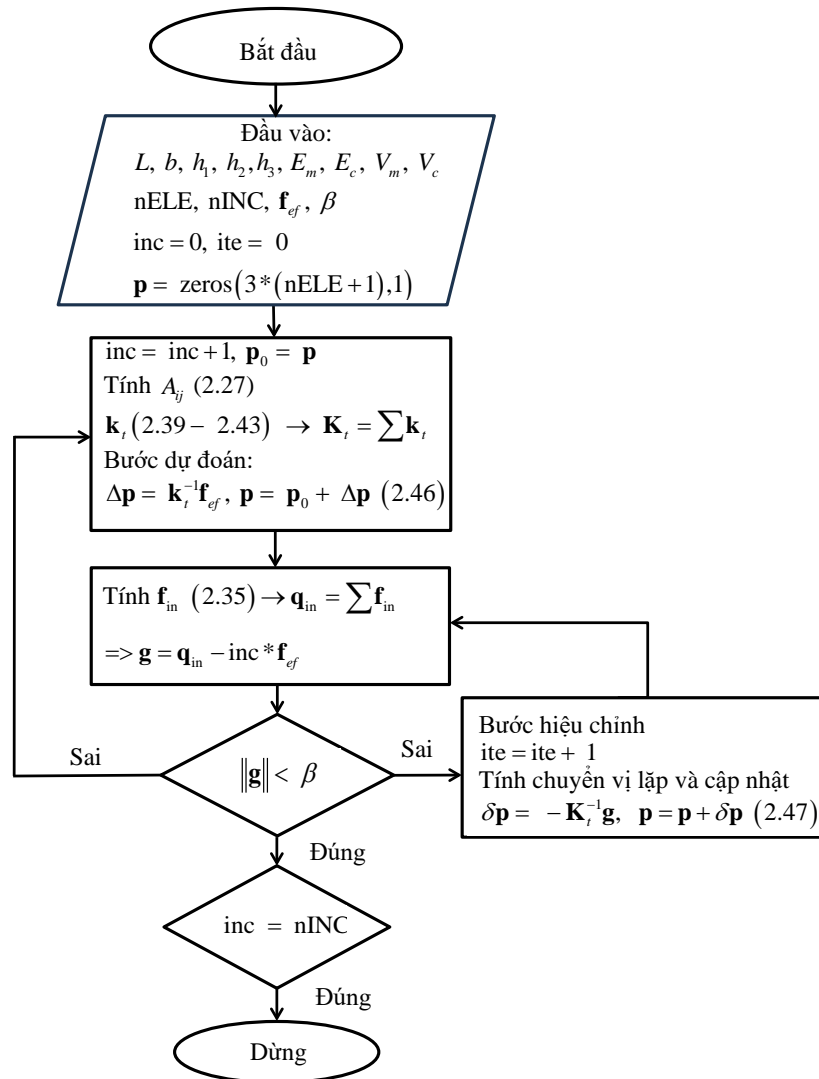
$$\delta \mathbf{p} = -\mathbf{K}_t^{-1}(\mathbf{p}) \mathbf{g}(\mathbf{p}, \lambda_o \mathbf{f}_{ef}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p} + \delta \mathbf{p} \quad (2.47)$$

Các bước hiệu chỉnh được thực hiện cho tới khi thỏa mãn một tiêu chuẩn hội tụ lựa chọn. Trong Luận án này, tiêu chuẩn hội tụ dựa trên chuẩn Euclidean của véc-tơ

lực dư được sử dụng cho thuật toán lặp như sau

$$\|\mathbf{g}\| < \beta \|\lambda \mathbf{f}_{ef}\| \quad (2.48)$$

trong đó β là hệ số dung sai (tolerance factor), được chọn tùy theo bài toán. Nếu β quá nhỏ dẫn tới sự lãng phí không cần thiết trong tính toán. Nếu β không đủ nhỏ có thể dẫn tới sai số đáng kể sau quá trình lặp. Giá trị được chọn của β trong tất cả các nghiên cứu số dưới đây là bằng 10^{-4} .



Hình 2.5. Sơ đồ khối thuật toán tăng dần/lặp theo phương pháp Newton-Raphson.

Hình 2.5 minh họa sơ đồ khối thuật toán tăng dần/lặp theo phương pháp Newton-Raphson dùng cho phân tích chuyển vị lớn của dầm sandwich FGM. Sơ đồ sử dụng các ký hiệu sau đây:

nELE: tổng số phần tử sử dụng

nINC: số bước tăng của lực ngoài (number of increments)

inc: bước lực hiện tại

ite: số bước lặp

2.7. Nghiên cứu kiểm chứng

Để thuận tiện cho phân thảo luận trong các nghiên cứu kiểm chứng và kết quả số dưới đây, Luận án đưa vào các tham số không thứ nguyên cho chuyển vị và tải trọng như sau

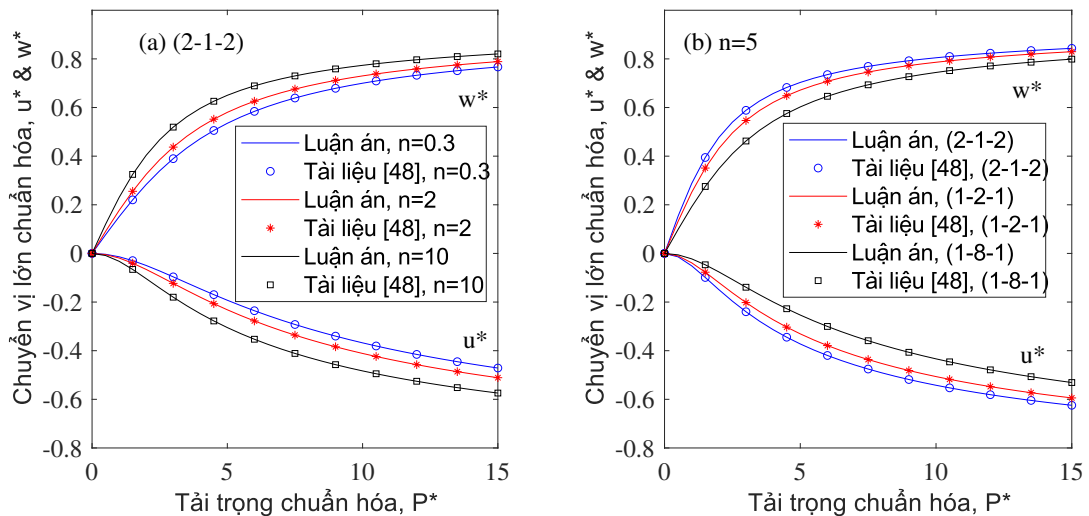
$$P^* = \frac{PL^2}{E_m I}, \quad M^* = \frac{ML}{E_m I}, \quad u^* = \frac{u_L}{L}, \quad w^* = \frac{w_L}{L}, \quad \theta^* = \frac{\theta_L}{\pi/2} \quad (2.49)$$

trong đó u_L , w_L và θ_L là các chuyển vị theo phương x , chuyển vị theo phương z và góc quay tại đầu tự do của dầm công-xôn. Ngoài ra, Luận án cũng đưa vào các tham số không thứ nguyên cho độ cứng nền đàn hồi

$$k_1 = \frac{L^4}{E_m I} k_W, \quad k_2 = \frac{L^2}{\pi^2 E_m I} k_G, \quad \alpha_F = \frac{L_F}{L} \quad (2.50)$$

với k_W , k_G và L_F , như đã đề cập ở trên, là các độ cứng của nền đàn hồi và chiều dài nền đàn hồi.

Để khẳng định tính chính xác của công thức phần tử hữu hạn đã xây dựng được, dầm công-xôn FGSW với tỉ số độ mảnh $L/h = 50$ chịu tác động của tải trọng P theo phương vuông góc với dầm được phân tích trong mục này. Dầm có lớp lõi được làm hoàn toàn từ Nhôm (Al) và hai lớp ngoài là vật liệu có cơ tính biến thiên cấu thành từ Kẽm ô-xít (ZrO_2) và Nhôm. Mô-đun đàn hồi của Al và ZrO_2 lần lượt là 70 GPa và 151 GPa [146]. Hình 2.6 so sánh đáp ứng chuyển vị lớn của dầm thu được trong Luận án với kết quả của nhóm tác giả Nguyễn Đình Kiên và Trần Thị Thơm trong [48] cho các giá trị khác nhau của tham số vật liệu và tỉ số chiều dày giữa các lớp. Quan sát Hình 2.6 ta có thể thấy độ chính xác cao giữa kết quả thu được trong nghiên cứu này so với



Hình 2.6. So sánh chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGSW chịu tải trọng P .

kết quả thu được từ phần tử dầm Euler-Bernoulli sử dụng phương pháp hệ tọa độ đồng hành trong [48]. Lưu ý rằng kết quả so sánh trong Hình 2.6 cho mô hình Voigt do Tài liệu [48] chỉ sử dụng mô hình này.

Tiếp theo, dầm công-xôn FGM với tỉ số độ mảnh $L/h = 20$, được làm từ Ti/TiB chịu tác dụng của mô-men M được khảo sát nhằm khẳng định thêm tính đúng đắn của công thức phần tử xây dựng được. Bảng 2.1 so sánh đáp ứng chuyển vị lớn chuẩn hóa của dầm thu được trong Luận án với nghiệm giải tích của Kang và Li [147]. Mô hình dầm FGM trong Tài liệu [147] là trường hợp đặc biệt của dầm sandwich loại B trong Luận án khi $z_1 \equiv z_0 = -h/2$ và $z_2 \equiv z_3 = h/2$. Dạng hiển của chuyển vị lớn được xây dựng trong Tài liệu [147] như sau

$$u_L = \frac{\bar{A}_{22}}{ML} \sin\left(\frac{ML}{\bar{A}_{22}}\right) - L, \quad w_L = \frac{\bar{A}_{22}}{M} \left[1 - \cos\left(\frac{ML}{\bar{A}_{22}}\right)\right] \quad (2.51)$$

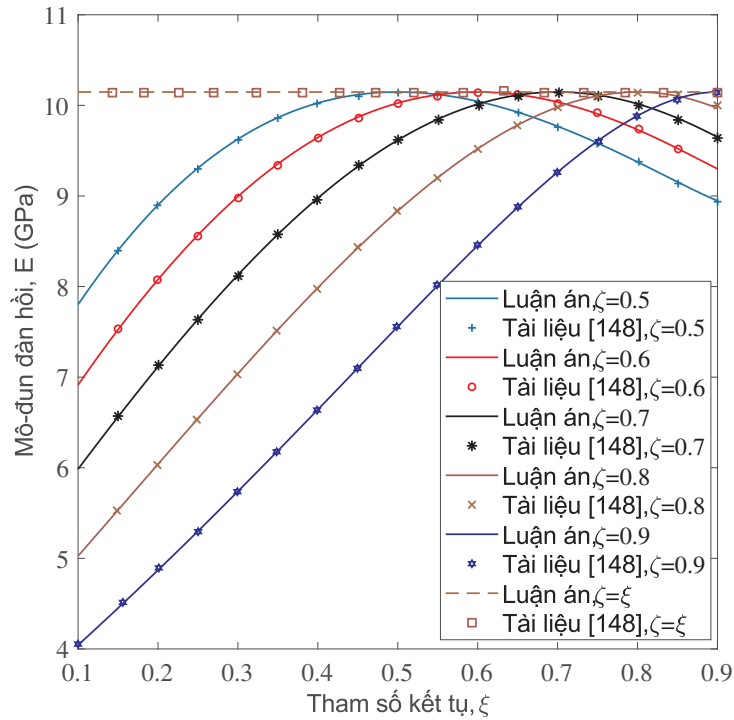
trong đó \bar{A}_{22} là độ cứng chống uốn được tính bằng cách xét đến khoảng cách của trục trung hòa so với mặt giữa dầm, do đó \bar{A}_{22} hơi khác so với A_{22} trong biểu thức (2.27). Bảng 2.1 cho thấy tính chính xác của đáp ứng chuyển vị lớn trong Luận án so với kết quả trong Tài liệu [147], không phụ thuộc vào tham số vật liệu và giá trị của mô-men tác dụng.

Bảng 2.1. So sánh đáp ứng chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGM chịu tác dụng của mô-men

M^*	Nguồn	$ u^* $			w^*		
		$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 3$	$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 3$
3	Luận án	0.2290	0.3244	0.4774	0.5417	0.6200	0.6979
	Tài liệu [147]	0.2296	0.3284	0.4732	0.5374	0.6152	0.6870
6	Luận án	0.7376	0.9417	1.1488	0.7283	0.678	0.5071
	Tài liệu [147]	0.7339	0.9413	1.1367	0.723	0.6690	0.5088
10	Luận án	1.2007	1.2011	1.0161	0.3943	0.1582	0.0007
	Tài liệu [147]	1.1958	1.1968	1.0281	0.3957	0.1558	0.0024

Mô-đun đàn hồi của kết cấu composite gia cường các ống nano carbon thu được trong Luận án được so sánh với kết quả của Daghigh và cộng sự [148] như minh họa trên Hình 2.7, trong đó tỷ phần thể tích ống nano carbon gia cường là $V_{CNT} = 0.1$. Hình 2.7 cho thấy sự tương đồng cao giữa kết quả thu được trong Luận án và tài liệu tham khảo. Có thể quan sát thấy rằng sự kết tụ có ảnh hưởng đáng kể đến tính chất vật liệu. Hình 2.7 cũng chỉ ra rằng trong trường hợp $\zeta > \xi$, khi tăng giá trị của ξ , mô-đun đàn hồi cũng tăng tới khi đạt giá trị lớn nhất tại $\xi = \zeta$ (ứng với trường hợp CNT phân

tán đều). Ngược lại, trong trường hợp $\zeta < \xi$, sự tăng giá trị của ξ làm giảm mô-đun đàn hồi.



Hình 2.7. Ảnh hưởng của sự kết tụ CNT tới mô-đun đàn hồi của dầm CNTRC với $V_{CNT} = 0.1$

Để minh họa tính chính xác của công thức phần tử trong việc mô hình hóa chuyển vị lớn của dầm composite, các thành phần chuyển vị lớn không thứ nguyên của dầm công-xôn dạng sandwich CNTRC (1-2-1) có tỉ số độ mảnh $L/h = 20$ chịu

Bảng 2.2. So sánh đáp ứng chuyển vị lớn của dầm sandwich CNTRC đối xứng (1-2-1) chịu tác dụng của mô-men $M^* = 5$, $L/h = 20$ và $V_{CNT} = 0.1$

ζ	$\xi = 0.1$		$\xi = 0.3$		$\xi = 0.5$		$\xi = 0.7$		
	Luận án	Tài liệu [147, 149]	Luận án	Tài liệu [147, 149]	Luận án	Tài liệu [147, 149]	Luận án	Tài liệu [147, 149]	
0.1	$ u^* $	0.2808	0.2810	0.3092	0.3093	0.3587	0.3589	0.4169	0.4171
	w^*	0.5815	0.5814	0.6025	0.6024	0.6342	0.6340	0.6644	0.6642
0.3	$ u^* $	0.3238	0.3239	0.2808	0.2810	0.3004	0.3006	0.3464	0.3466
	w^*	0.6124	0.6123	0.5815	0.5814	0.5963	0.5962	0.6268	0.6267
0.5	$ u^* $	0.4379	0.4381	0.3078	0.3079	0.2808	0.2810	0.3001	0.3002
	w^*	0.6737	0.6734	0.6015	0.6014	0.5815	0.5814	0.5960	0.5959
0.7	$ u^* $	0.6551	0.6553	0.4096	0.4098	0.3084	0.3085	0.2808	0.2810
	w^*	0.7241	0.7237	0.6610	0.6608	0.6019	0.6018	0.5815	0.5814
0.9	$ u^* $	1.0323	1.0323	0.6942	0.6943	0.4609	0.4610	0.3289	0.3291
	w^*	0.6150	0.6143	0.7250	0.7246	0.6828	0.6826	0.6158	0.6157

tác dụng của mô-men $M^* = 5$ thu được trong nghiên cứu này được so sánh với kết quả giải tích của các Tài liệu tham khảo [147, 149] như trong Bảng 2.2 với các giá trị khác nhau của tham số kết tụ. Bảng 2.2 cho thấy tính chính xác cao giữa kết quả thu được trong Luận án và nghiệm giải tích trong các Tài liệu tham khảo [147, 149], không phụ thuộc giá trị của tham số kết tụ. Lưu ý rằng, đối với dầm sandwich đối xứng (1-2-1) đang được xét tới, độ cứng tương hỗ bị triệt tiêu, $A_{12} = 0$, và nghiệm giải tích thu được bằng cách tính đến ảnh hưởng của vị trí mặt trung hòa, điều này cho phép bỏ qua số hạng tương hỗ.

Sự hội tụ của phần tử dầm xây dựng được trong việc tính toán đáp ứng chuyển vị lớn của dầm sandwich CNTRC được minh họa trong Bảng 2.3, trong đó độ võng không thứ nguyên tại đầu tự do của dầm sandwich công-xôn đối xứng (2-1-2) và không đối xứng (1-1-2) với các giá trị khác nhau của tỉ số độ mảnh của dầm chịu tác dụng của tải trọng nhận được với số lượng phần tử (nELE) khác nhau cho trường hợp $P^* = 10$, $V_{CNT} = 0.3$, $\alpha_F = 0.5$, $k_1 = 50$ và $k_2 = 0.5$. Như ta thấy từ Bảng 2.3, sự hội tụ của cả dầm đối xứng (2-1-2) và không đối xứng (1-1-2) đều đạt được với 24 phần tử, không phụ thuộc tham số kết tụ và tỉ số độ mảnh dầm. Từ kết quả hội tụ này, lưới 24 phần tử được sử dụng trong các tính toán đáp ứng chuyển vị lớn của dầm sandwich gia cường bởi các ống nano carbon.

Bảng 2.3. Sự hội tụ của công thức phần tử hữu hạn trong dự đoán độ võng w^* của dầm công-xôn chịu tác dụng của lực $P^* = 10$ ($V_{CNT} = 0.3$, $\alpha_F = 0.5$, và $(k_1, k_2) = (50, 0.1)$).

(ζ, ξ)	nELE	Dầm (2-1-2)				Dầm (1-1-2)			
		$L/h = 50$	$L/h = 20$	$L/h = 10$	$L/h = 5$	$L/h = 50$	$L/h = 20$	$L/h = 10$	$L/h = 5$
(0.1, 0.4)	8	0.5693	0.5703	0.5740	0.5889	0.7243	0.7276	0.7351	0.7565
	12	0.5697	0.5707	0.5744	0.5892	0.7245	0.7277	0.7352	0.7578
	16	0.5698	0.5708	0.5745	0.5894	0.7245	0.7278	0.7353	0.7581
	20	0.5698	0.5709	0.5746	0.5894	0.7245	0.7278	0.7353	0.7581
	22	0.5699	0.5709	0.5746	0.5895	0.7246	0.7278	0.7353	0.7581
	24	0.5699	0.5709	0.5746	0.5895	0.7246	0.7278	0.7353	0.7581
	26	0.5699	0.5709	0.5746	0.5895	0.7246	0.7278	0.7353	0.7581
(0.1, 0.6)	8	0.5945	0.5956	0.5965	0.6153	0.7397	0.7431	0.7508	0.7751
	12	0.5948	0.5959	0.5986	0.6156	0.7398	0.7432	0.7511	0.7753
	16	0.5955	0.5960	0.5998	0.6157	0.7415	0.7432	0.7512	0.7753
	20	0.5958	0.5961	0.6000	0.6158	0.7419	0.7433	0.7512	0.7753
	22	0.5978	0.5961	0.6001	0.6188	0.7424	0.7433	0.7512	0.7753
	24	0.5978	0.5961	0.6001	0.6158	0.7429	0.7433	0.7512	0.7753
	26	0.5978	0.5961	0.6001	0.6158	0.7429	0.7433	0.7512	0.7753

2.8. Kết quả số và thảo luận

Sử dụng mô hình phân tử dầm xây dựng được và thuật toán số cho phân tích phi tuyến của kết cấu trình bày trong Mục 2.6, Luận án đã xây dựng chương trình tính toán số cho phân tích chuyển vị lớn của dầm. Mục này tiến hành phân tích một số bài toán cụ thể để làm sáng tỏ ảnh hưởng của các tham số hình học, vật liệu cũng như nền đàn hồi tới ứng xử phi tuyến của dầm sandwich FGM và dầm sandwich CNTRC.

2.8.1. Chuyển vị lớn của dầm FGSW

Nghiên cứu số được đưa ra trong phần này nhằm nghiên cứu ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu và các mô hình đồng nhất hóa vật liệu lên ứng xử chuyển vị lớn của dầm sandwich FGM. Mô hình dầm công-xôn dạng sandwich được tạo từ Ti đóng vai trò pha kim loại và TiB đóng vai trò pha gốm được xét đến ở đây. Các tính chất vật liệu của các vật liệu thành phần như sau [47, 141]: $E_m = 107$ GPa, $E_c = 375$ GPa, $\nu_m = \nu_c = 0.3$. Tham số thực nghiệm dùng trong mô hình TTO được lựa chọn là $q = 4.5$ GPa cho dầm FGM hai pha Ti/TiB. Tỷ số độ mảnh dầm $L/h = 10$ được sử dụng cho tất cả các tính toán dưới đây.

2.8.1.1. Dầm công-xôn FGSW chịu tải trọng P

Chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGSW chịu tác dụng của tải trọng P vuông góc với dầm tại đầu tự do được nghiên cứu trong phần này. Trong Bảng 2.4, chuyển vị lớn không thứ nguyên tại đầu tự do của dầm sandwich loại A đối xứng (2-1-2) và không đối xứng (2-1-1) chịu tải P được liệt kê với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu, hai giá trị của lực tác dụng, $P^* = 5$ và $P^* = 10$ và bốn mô hình đồng nhất hóa vật liệu. Các kết quả tương ứng cho dầm sandwich loại B được cho trong Bảng 2.5 cho dầm đối xứng (1-4-1) và dầm không đối xứng (1-4-2). Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu và mô hình đồng nhất hóa lên đáp ứng của dầm có thể thấy từ các Bảng 2.4 và 2.5. Cụ thể:

- Với một giá trị lực của tham số lực ngoài P^* , sự tăng của tham số vật liệu n dẫn tới sự tăng của các chuyển vị và góc quay. Điều này đúng cho tất cả các mô hình đồng nhất hóa vật liệu và cả hai loại dầm xét tới trong Luận án. Kết quả này có thể được giải thích trên cơ sở xem xét các phương trình (2.1) và (2.2). Dầm sandwich FGM với tham số n lớn hơn sẽ giàu kim loại hơn. Vì mô-đun đàn hồi và mô-đun trượt của kim loại thấp hơn so với gốm nên độ cứng của dầm với n lớn hơn sẽ thấp hơn. Kết quả là chuyển vị và góc quay của dầm ứng với với tham số n lớn hơn sẽ lớn hơn. Kiểm tra kỹ các bảng có thể nhận thấy rằng ảnh hưởng của tham số vật liệu lên đáp ứng chuyển vị lớn của dầm phụ thuộc vào mô hình đồng nhất hóa vật liệu. Ví dụ, chuyển vị không

thứ nguyên theo phương z , w^* , của dầm đối xứng loại A (2-1-2) thu được bằng mô hình Voigt, như được chỉ ra trong Bảng 2.4, tăng 22.59% khi tham số vật liệu tăng từ 0.3 lên 3, trong khi giá trị tương ứng thu được bằng mô hình MT, HS và TTO lần lượt là 16.94%, 15.69% và 13.86%, thấp hơn đáng kể so với mô hình Voigt.

Bảng 2.4. Chuyển vị lớn không thứ nguyên của dầm công-xôn FGSW loại A chịu tác dụng của tải trọng P

P^*	n	Đáp ứng	(2-1-2)				(2-1-1)			
			V	MT	HS	TTO	V	MT	HS	TTO
5	0.5	$ u^* $	0.1809	0.2241	0.2341	0.2487	0.1751	0.2145	0.2237	0.2370
		w^*	0.5225	0.5738	0.5847	0.6000	0.5125	0.5597	0.5698	0.5839
		θ^*	0.5270	0.5873	0.6005	0.6192	0.5158	0.5708	0.5828	0.5999
	1	$ u^* $	0.2385	0.2818	0.2905	0.3025	0.2277	0.2672	0.2751	0.2861
		w^*	0.5894	0.6321	0.6400	0.6506	0.5740	0.6137	0.6212	0.6311
		θ^*	0.6062	0.6594	0.6695	0.6832	0.5879	0.6367	0.6460	0.6586
	3	$ u^* $	0.3317	0.3517	0.3551	0.3594	0.3126	0.3312	0.3345	0.3386
		w^*	0.6750	0.6908	0.6935	0.6968	0.6539	0.6692	0.6717	0.6750
		θ^*	0.7153	0.7363	0.7398	0.7443	0.6880	0.7078	0.7111	0.7155
10	0.5	$ u^* $	0.3543	0.4033	0.4139	0.4291	0.3468	0.3923	0.4023	0.4164
		w^*	0.6938	0.7289	0.7360	0.7459	0.6856	0.7181	0.7248	0.7339
		θ^*	0.7384	0.7867	0.7967	0.8105	0.7276	0.7719	0.7810	0.7937
	1	$ u^* $	0.4186	0.4617	0.4700	0.4812	0.4066	0.4469	0.4547	0.4652
		w^*	0.7390	0.7659	0.7708	0.7773	0.7275	0.7526	0.7573	0.7634
		θ^*	0.8010	0.8389	0.8457	0.8548	0.7849	0.8198	0.8262	0.8346
	3	$ u^* $	0.5076	0.525	0.528	0.5317	0.4899	0.5066	0.5094	0.5131
		w^*	0.7920	0.8015	0.8031	0.8052	0.7770	0.7863	0.7878	0.7898
		θ^*	0.8755	0.8883	0.8904	0.8930	0.8535	0.8658	0.8678	0.8704

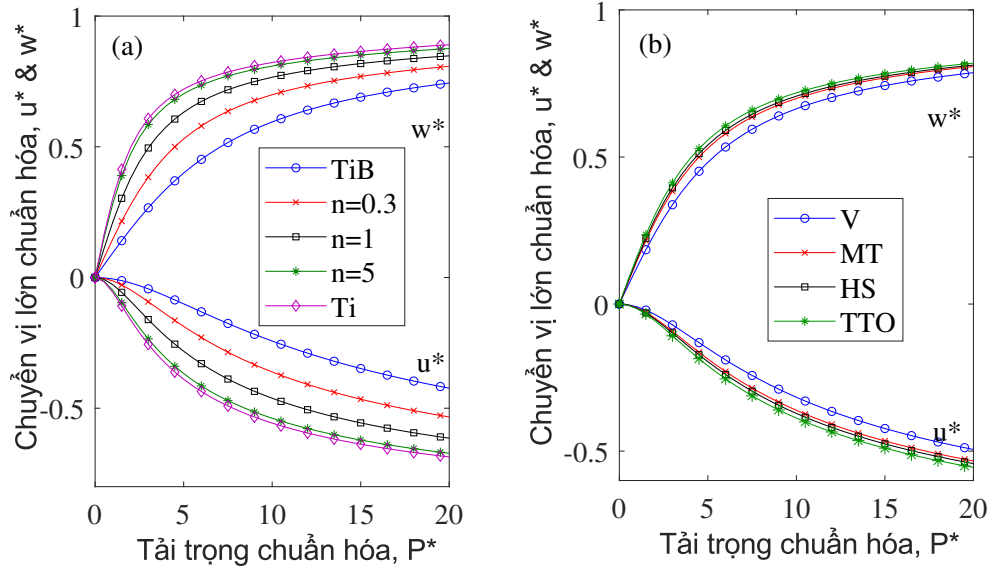
- Ảnh hưởng của tham số vật liệu và mô hình đồng nhất hóa vật liệu tới chuyển vị lớn của dầm FGSW loại B, như ta thấy từ Bảng 2.5, cũng tương tự như dầm loại A. Tuy nhiên, sự tăng của chuyển vị và góc xoay của dầm loại B khi tăng tham số vật liệu

n ít hơn đáng kể so với dầm loại A. Thêm vào đó, sự khác nhau giữa các chuyển vị và góc quay thu được bằng các mô hình đồng nhất hóa khác nhau cho dầm loại B nhỏ hơn so với dầm loại A. Như vậy, khi so sánh với dầm loại A, ta thấy rằng dầm loại B ít nhạy cảm hơn với sự thay đổi của tham số n và mô hình đồng nhất hóa vật liệu.

Bảng 2.5. Đáp ứng chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGSW loại B chịu tác dụng của tải trọng P

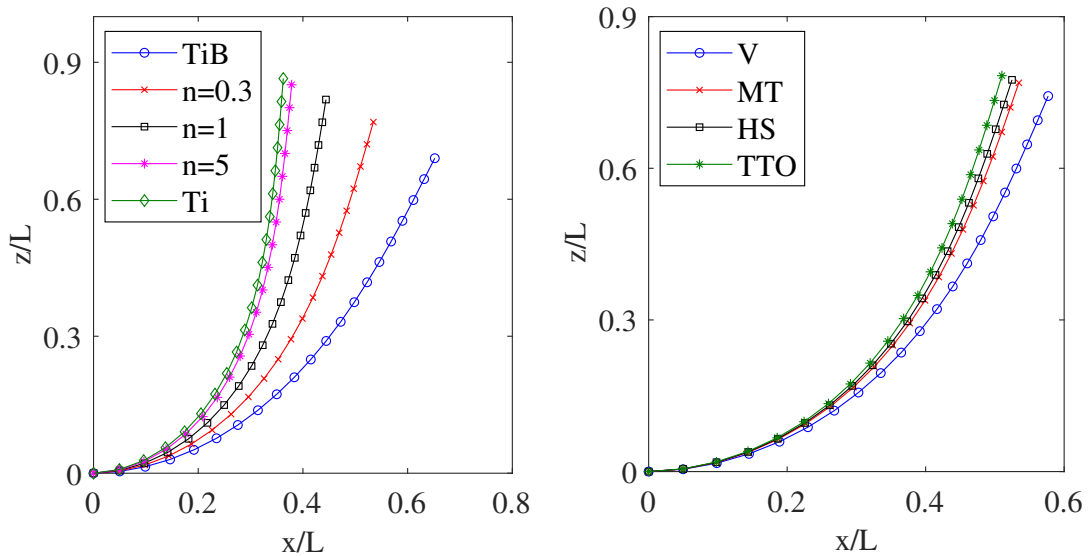
P^*	n	Đáp ứng	(1-4-1)				(1-4-2)			
			V	MT	HS	TTO	V	MT	HS	TTO
5	0.5	$ u^* $	0.2082	0.2242	0.2274	0.2319	0.1977	0.2146	0.2181	0.223
		w^*	0.5441	0.5607	0.5639	0.5684	0.5325	0.5505	0.5541	0.559
		θ^*	0.5528	0.5722	0.5760	0.5812	0.5393	0.5603	0.5645	0.5703
	1	$ u^* $	0.2309	0.2424	0.2444	0.2470	0.2214	0.2346	0.2369	0.2400
		w^*	0.5673	0.5785	0.5805	0.5831	0.5575	0.5704	0.5726	0.5756
		θ^*	0.5801	0.5933	0.5955	0.5985	0.5686	0.5839	0.5865	0.5900
	3	$ u^* $	0.2545	0.2573	0.2579	0.2586	0.2493	0.2526	0.2531	0.2537
		w^*	0.5897	0.5929	0.5936	0.5945	0.5842	0.5871	0.5875	0.5881
		θ^*	0.6065	0.6099	0.6106	0.6116	0.6004	0.6037	0.6042	0.6048
10	0.5	$ u^* $	0.3839	0.4013	0.4048	0.4095	0.3722	0.3909	0.3947	0.4000
		w^*	0.7042	0.7150	0.7171	0.7200	0.6965	0.7082	0.7105	0.7137
		θ^*	0.7526	0.7665	0.7692	0.7728	0.7424	0.7578	0.7608	0.7649
	1	$ u^* $	0.4085	0.4204	0.4225	0.4252	0.3983	0.4122	0.4147	0.4179
		w^*	0.7192	0.7264	0.7276	0.7293	0.7127	0.7208	0.7222	0.7241
		θ^*	0.7721	0.781	0.7825	0.7845	0.7639	0.7743	0.7761	0.7783
	3	$ u^* $	0.4327	0.4356	0.4362	0.4369	0.4274	0.4307	0.4312	0.4318
		w^*	0.7334	0.7358	0.7363	0.7370	0.7293	0.7312	0.7315	0.7319
		θ^*	0.7894	0.7919	0.7924	0.7931	0.7852	0.7871	0.7874	0.7877

Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu và mô hình đồng nhất hóa lên ứng xử chuyển vị lớn của dầm FGSW cũng có thể thấy rõ từ các Hình 2.8 và 2.9, trong đó các đường cong tải-chuyển vị và các cấu hình biến dạng của dầm đối xứng loại A (2-1-2) lần lượt được minh họa cho các giá trị khác nhau của tham số vật liệu và mô



Hình 2.8. Đường cong tải-chuyển vị của dầm (2-1-2) loại A :

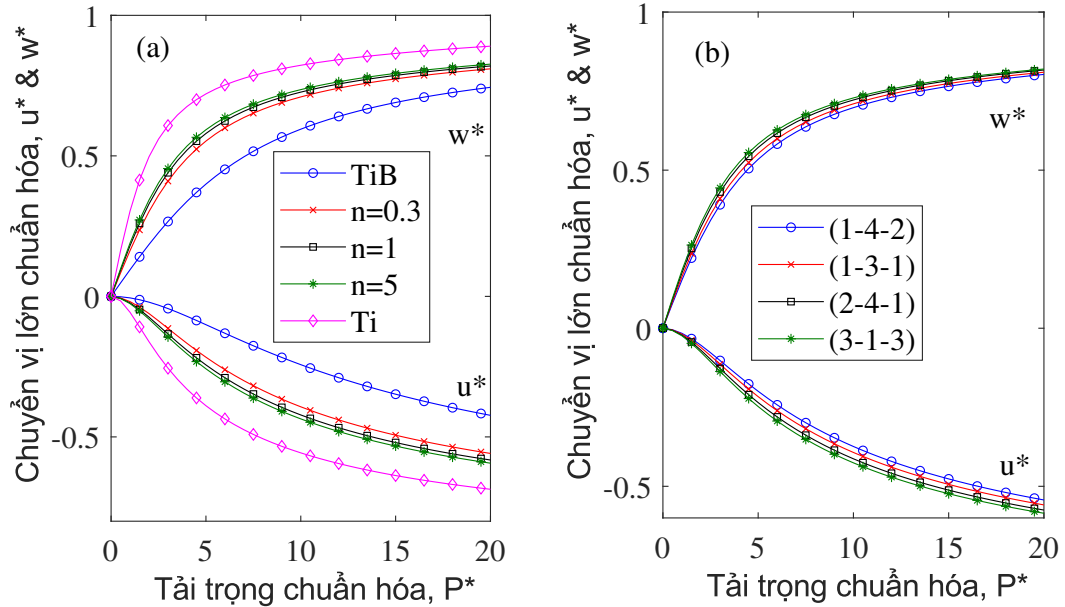
(a) Mô hình MT và n thay đổi; (b) $n = 0.3$ và các mô hình đồng nhất hóa khác nhau.



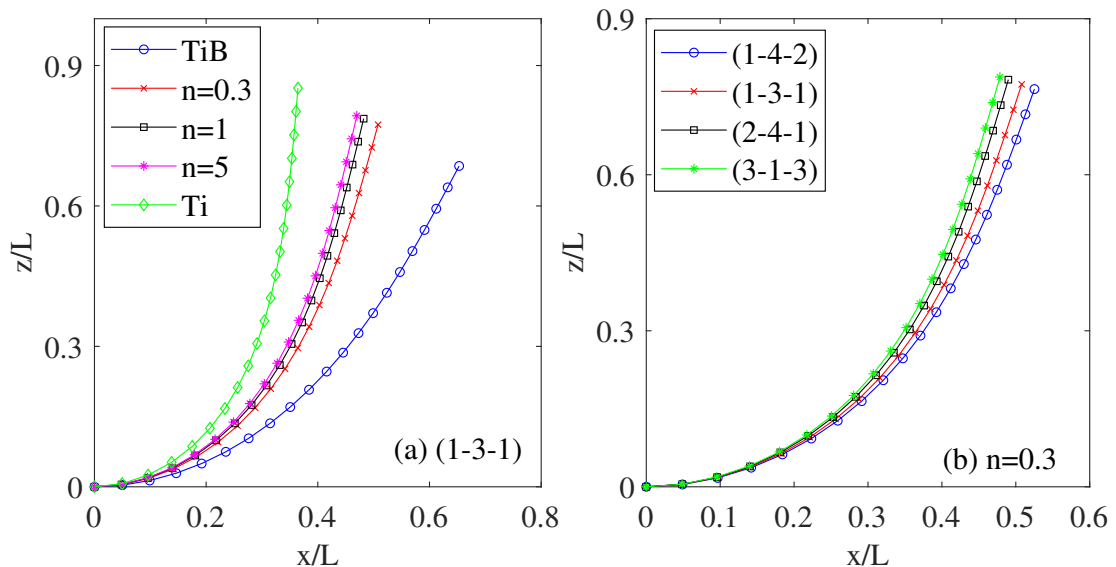
Hình 2.9. Cấu hình biến dạng của dầm loại A tương ứng với $P^* = 5$: (a) Mô hình MT và n thay đổi; (b) $n = 0.3$ và các mô hình đồng nhất hóa khác nhau.

hình đồng nhất hóa vật liệu khác nhau. Các đường cong tải-chuyển vị và cấu hình biến dạng tương ứng của dầm loại B đối xứng (1-3-1) lần lượt được minh họa trên các Hình 2.10 và 2.11 cho các giá trị khác nhau của tham số vật liệu và tỉ số chiều dày các lớp. Các Hình 2.8a và 2.10a xác nhận lại các nhận xét ở trên về ảnh hưởng của tham số vật liệu đến đáp ứng chuyển vị lớn của dầm, trong khi các Hình 2.10b và 2.11b chỉ ra vai trò quan trọng của tỉ số chiều dày các lớp tới đáp ứng của dầm. Đáp ứng chuyển vị lớn thu được bằng các mô hình MT, HS và TTO, như ta thấy từ các Hình 2.8b và 2.9b là khá gần nhau, trong khi sử dụng mô hình Voigt cho sự khác nhau đáng kể so

với các mô hình còn lại. Trong bốn mô hình được xét đến trong Luận án thì mô hình Voigt không thỏa mãn các giới hạn Hashin-Strickman [150], cứng hơn so với các mô hình còn lại. Kết quả này cho thấy, mặc dù mô hình Voigt đơn giản về mặt toán học, nhưng cần cẩn trọng trong đánh giá đáp ứng chuyển vị lớn của dầm FGSW thu được khi sử dụng mô hình Voigt.



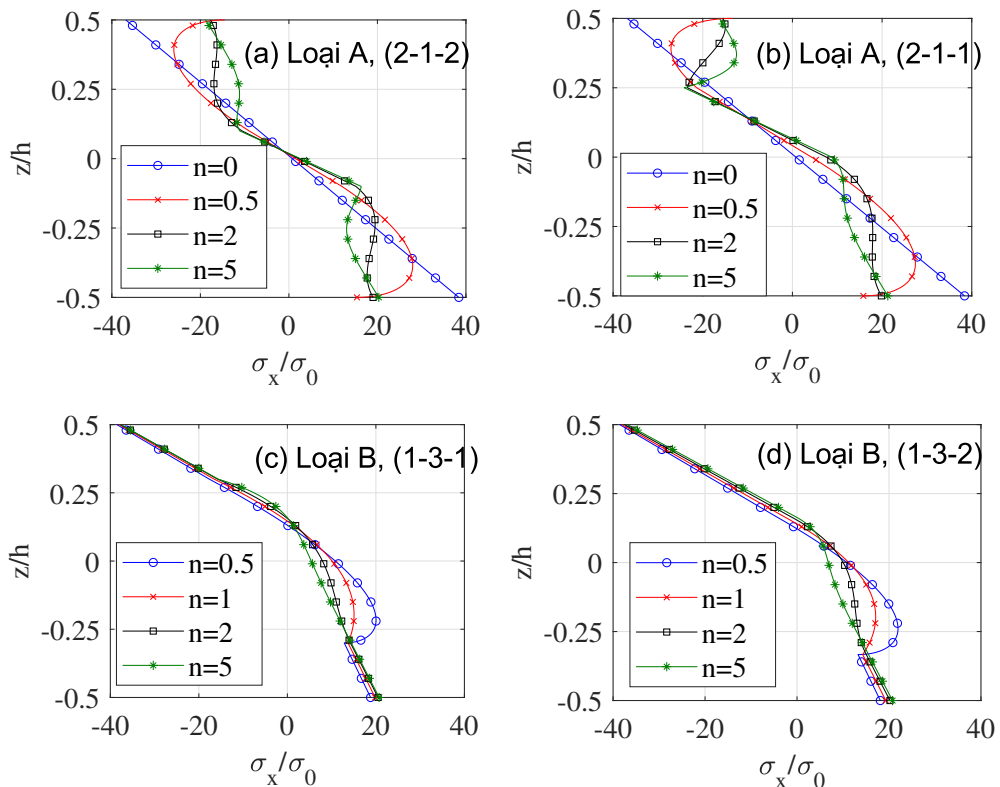
Hình 2.10. Đường cong tải-chuyển vị của dầm loại B chịu tải P : (a) dầm (1-3-1) với mô hình MT và n thay đổi; (b) $n = 0.3$ và tỉ số chiều dày các lớp khác nhau.



Hình 2.11. Cấu hình biến dạng của dầm loại B với $P^* = 15$: (a) Dầm (1-3-1) và n thay đổi; (b) $n = 0.3$ và tỉ số chiều dày các lớp khác nhau (mô hình MT).

Trong Hình 2.12, ảnh hưởng của tham số vật liệu lên sự phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tại thiết diện đầu ngàm của dầm loại A và B được minh họa cho trường hợp $P^* = 15$ và các giá trị khác nhau của tỉ số chiều dày giữa các lớp.

Ứng suất dọc trục trong hình được chuẩn hóa bởi $\sigma_0 = P/bh$. Tham số vật liệu, như thấy từ hình, có vai trò quan trọng lên sự phân bố ứng suất. Cả cường độ ứng suất cũng như đường cong ứng suất thay đổi đáng kể bởi sự thay đổi của tham số n , điều này không phụ thuộc vào loại dầm cũng như tỉ số chiều dày giữa các lớp. Sự phân bố ứng suất cho các dầm đối xứng (Hình 2.12a và 2.12c) khác biệt đáng kể so với các dầm không đối xứng (Hình 2.12b và 2.12d), đặc biệt với dầm loại A. Ảnh hưởng của mô hình đồng nhất hóa vật liệu tới ứng suất dọc trục được minh họa trong Bảng 2.6, trong đó giá trị cực đại của ứng suất kéo chuẩn hóa, $\max(\sigma_x/\sigma_0)$, thu được từ bốn mô hình đồng nhất hóa vật liệu được liệt kê trong bảng ứng với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu và tỉ số chiều dày các lớp. Như được chỉ ra trong bảng, ứng suất cực đại của cả dầm loại A và loại B thu được bằng mô hình Voigt là nhỏ nhất trong khi ứng suất lớn nhất thu được từ mô hình TTO. Điều này đúng cho tất cả các giá trị khác nhau của tham số vật liệu và tỉ số chiều dày giữa các lớp được xét đến. Bảng 2.6 cũng chỉ ra rằng với cùng tỉ số chiều dày giữa các lớp, sự khác nhau giữa ứng suất cực đại của dầm loại B thu được bằng các mô hình đồng nhất hóa vật liệu khác nhau nhỏ hơn đáng kể so với dầm loại A. Mặt khác, ảnh hưởng của mô hình đồng nhất hóa vật liệu tới ứng suất cực đại của dầm loại B cũng ít hơn đáng kể so với dầm loại A.



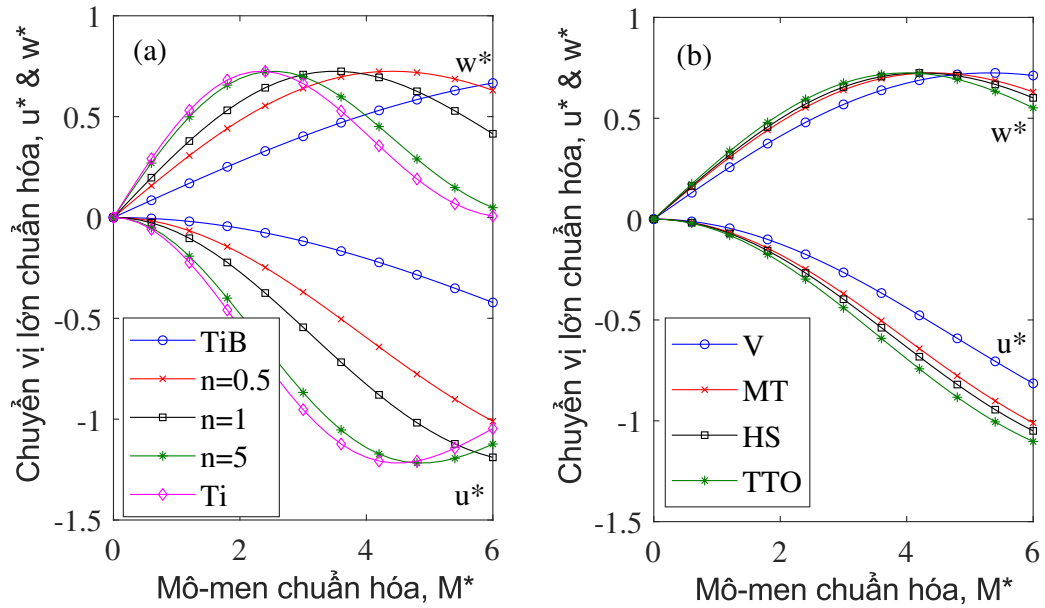
Hình 2.12. Ảnh hưởng của tham số vật liệu lên sự phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tại thiết diện ngang của dầm FGSW với $P^* = 15$.

Bảng 2.6. Ảnh hưởng của mô hình đồng nhất hóa lên ứng suất dọc trục cực đại, $\max(\sigma_x/\sigma_0)$, tại thiết diện ngàm của dầm FGSW với $P^* = 15$

n	Mô hình	Loại A				Loại B			
		(1-1-1)	(2-1-2)	(2-1-1)	(3-2-1)	(1-4-2)	(1-3-2)	(2-3-2)	(1-1-1)
$n = 0.3$	V	28.0518	27.6487	27.0729	26.9613	23.7910	23.4442	19.6114	18.9832
	MT	30.4659	30.2946	29.9419	29.7577	25.6696	25.1666	20.6164	19.4247
	HS	31.0684	30.9538	30.658	30.4555	26.1220	25.5746	20.8457	19.5245
	TTO	31.9844	31.9536	31.7449	31.5306	26.7882	26.1767	21.1777	19.6688
$n = 0.5$	V	25.9410	25.2733	24.5097	24.3883	20.6434	20.3807	18.9049	19.3659
	MT	28.3969	27.9030	27.3498	27.2281	22.3739	21.9576	19.5054	19.8138
	HS	28.9659	28.5043	28.0134	27.8841	22.7451	22.2978	19.6277	19.9058
	TTO	29.8017	29.3875	28.9836	28.8446	23.2687	22.7799	19.7963	20.0334
$n = 1$	V	23.2741	21.9071	20.8268	20.7561	18.3679	18.4682	19.723	19.9607
	MT	25.2954	23.9254	22.9891	22.9286	19.2752	19.3068	20.1758	20.3094
	HS	25.7173	24.3386	23.4310	23.3855	19.4433	19.4648	20.2562	20.3729
	TTO	26.3086	24.9111	24.0429	24.0216	19.6663	19.6762	20.3609	20.4567
$n = 2$	V	21.6367	18.3803	18.7078	18.3906	19.7613	19.7257	20.4097	20.4718
	MT	22.9606	19.4787	19.8445	19.5161	20.2528	20.212	20.6306	20.6609
	HS	23.2123	19.6804	20.0512	19.7240	20.3331	20.2943	20.6652	20.6922
	TTO	23.5514	19.9472	20.3241	20.0009	20.4342	20.4000	20.7078	20.7320
$n = 3$	V	22.0628	19.0129	19.8517	19.5003	20.3119	20.2445	20.661	20.6715
	MT	23.0322	19.7360	20.6400	20.3054	20.5844	20.5387	20.7742	20.7829
	HS	23.2090	19.8615	20.7760	20.4473	20.626	20.5862	20.7904	20.8006
	TTO	23.4433	20.0245	20.9522	20.6332	20.6769	20.646	20.8097	20.8227
$n = 5$	V	22.7399	19.9166	20.8458	20.4945	20.6968	20.6363	20.8254	20.8186
	MT	23.3410	20.3155	21.2733	20.9583	20.7946	20.7677	20.8582	20.8671
	HS	23.4472	20.3823	21.3441	21.0372	20.8080	20.7880	20.8619	20.8744
	TTO	23.5863	20.4682	21.4345	21.1394	20.8235	20.8131	20.8657	20.8834

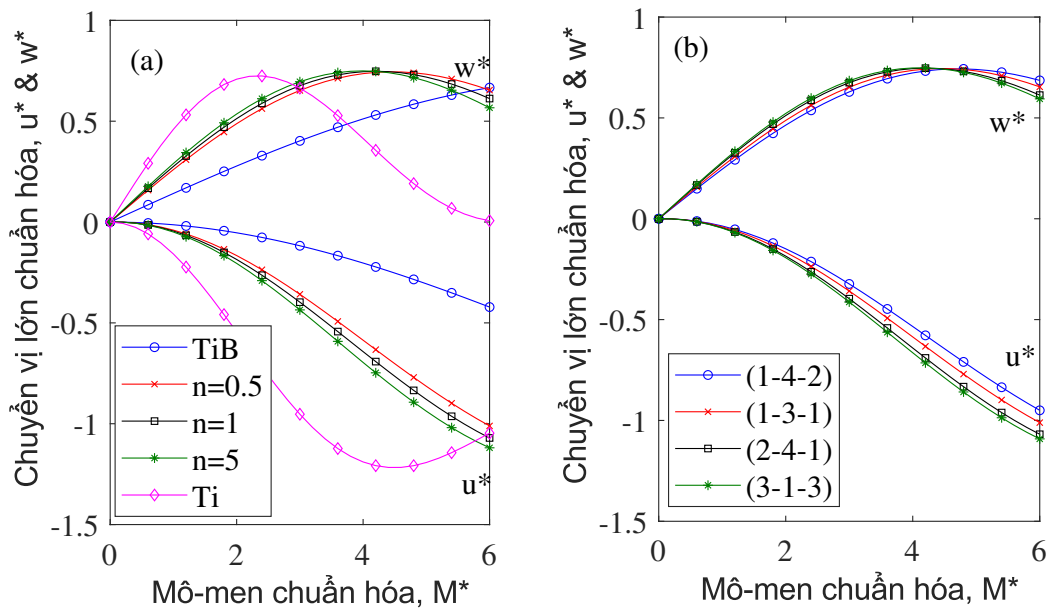
2.8.1.2. Dầm công-xôn FGSW chịu mô-men

Chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGSW chịu tác dụng của mô-men M tại đầu tự do của dầm được nghiên cứu trong Mục này. Dầm sandwich loại A với tỷ số độ dày giữa các lớp là (2-1-2) và dầm sandwich loại B (1-3-1) chịu tác động của mô-men được phân tích. Trên Hình 2.13, đường cân bằng cho dầm loại A (2-1-2) được minh



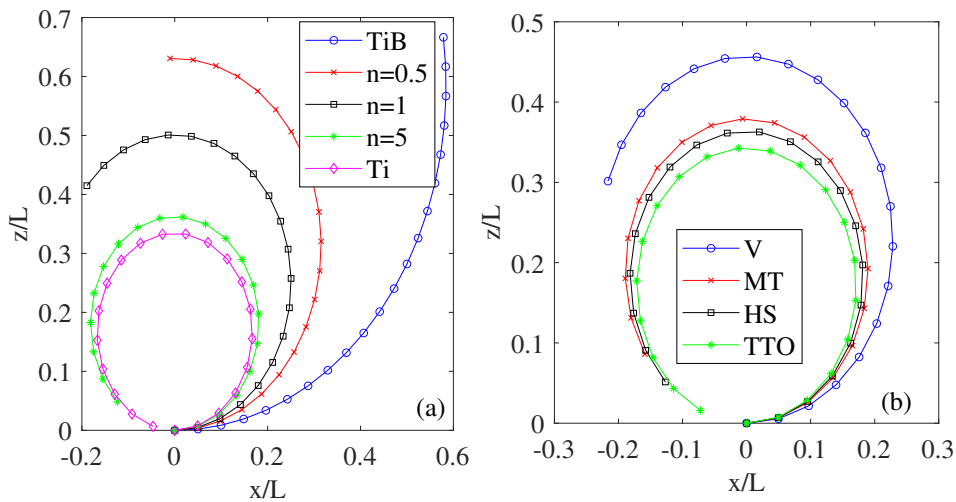
Hình 2.13. Đường cân bằng của dầm loại A (2-1-2) chịu mô-men: (a) mô hình MT và n thay đổi; (b) $n = 0.5$ và các mô hình đồng nhất hóa khác nhau.

họa cho các giá trị khác nhau của tham số vật liệu và các mô hình đồng nhất hóa vật liệu. Đường cân bằng cho dầm loại B được minh họa trên Hình 2.14 cho các giá trị khác nhau của tham số vật liệu và tỉ số chiều dày của các lớp. Ảnh hưởng của tham số vật liệu, mô hình đồng nhất hóa và tỉ số chiều dày các lớp lên ứng xử chuyển vị lớn của dầm, như được nhìn thấy từ các hình, tương tự như trường hợp dầm chịu tác động của tải ngang trình bày ở mục trên. Cụ thể, chuyển vị tại đầu tự do của cả dầm loại A

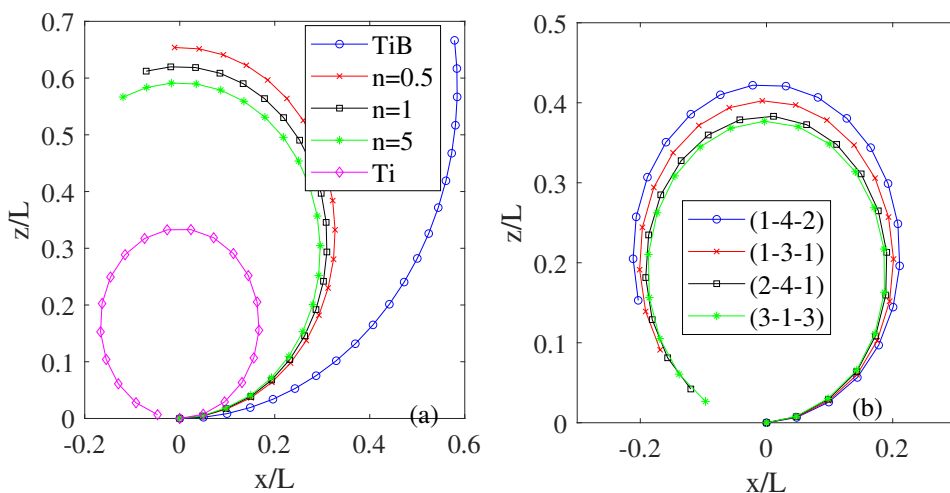


Hình 2.14. Đường cân bằng của dầm loại B chịu mô-men: (a) dầm (1-3-1) và n thay đổi; (b) $n = 0.5$ và tỉ số chiều dày các lớp khác nhau (mô hình MT).

và B tăng khi tăng giá trị của tham số vật liệu (Hình 2.13a và 2.14a). Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu, mô hình đồng nhất hóa vật liệu và cấu hình sandwich tới ứng xử của dầm được nhìn thấy rõ qua các Hình 2.15 và 2.16, trên đó cấu hình biến dạng của dầm sandwich loại A và B tương ứng với hai giá trị của mô-men, $M^* = 6$ và $M^* = 10$, được minh họa cho các giá trị khác nhau của tham số vật liệu, các mô hình đồng nhất hóa và tỷ số độ dày giữa các lớp. Các Hình 2.15 và 2.16 cũng chỉ ra rõ ảnh hưởng của mô hình đồng nhất hóa vật liệu lên ứng xử chuyển vị lớn của dầm, trong đó mô hình Voigt lại một lần nữa được thấy là cứng nhất trong khi mô hình TTO là mềm nhất. Cả dầm loại A và loại B đều uốn cong theo cung tròn theo thứ tự TTO, HS, MT và V.

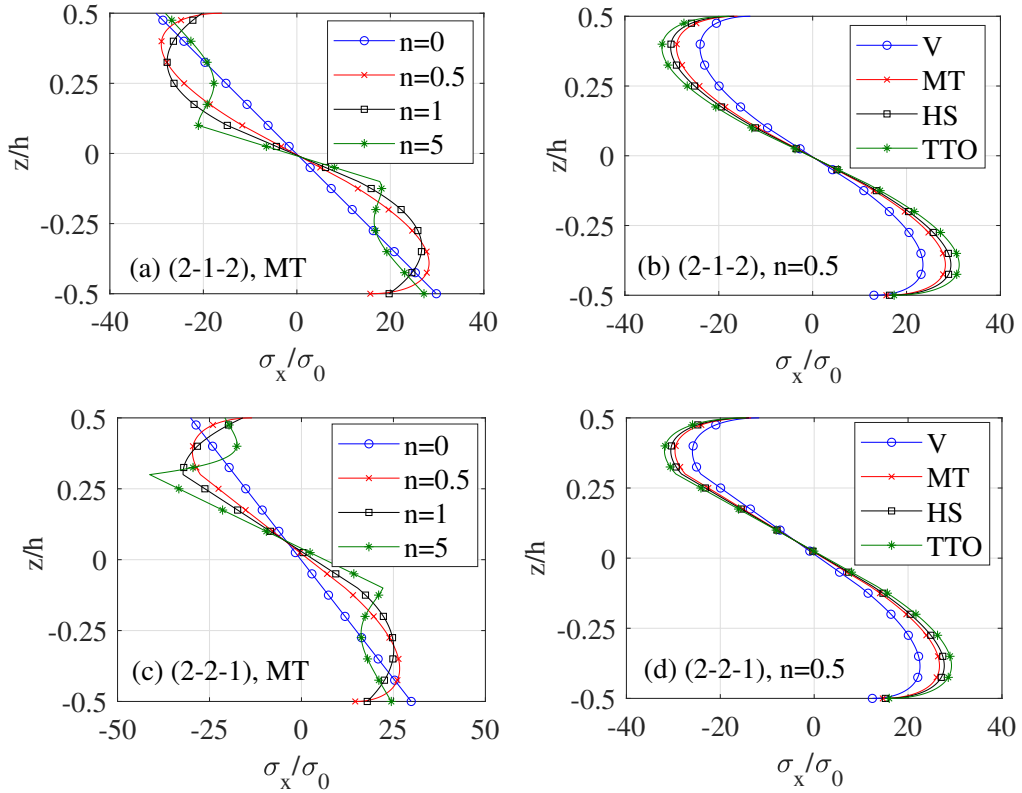


Hình 2.15. Cấu hình biến dạng của dầm (2-1-2) loại A: (a) Mô hình MT, $M^* = 6$ và n thay đổi; (b) $n = 0.5$, $M^* = 10$ và các mô hình đồng nhất hóa khác nhau.

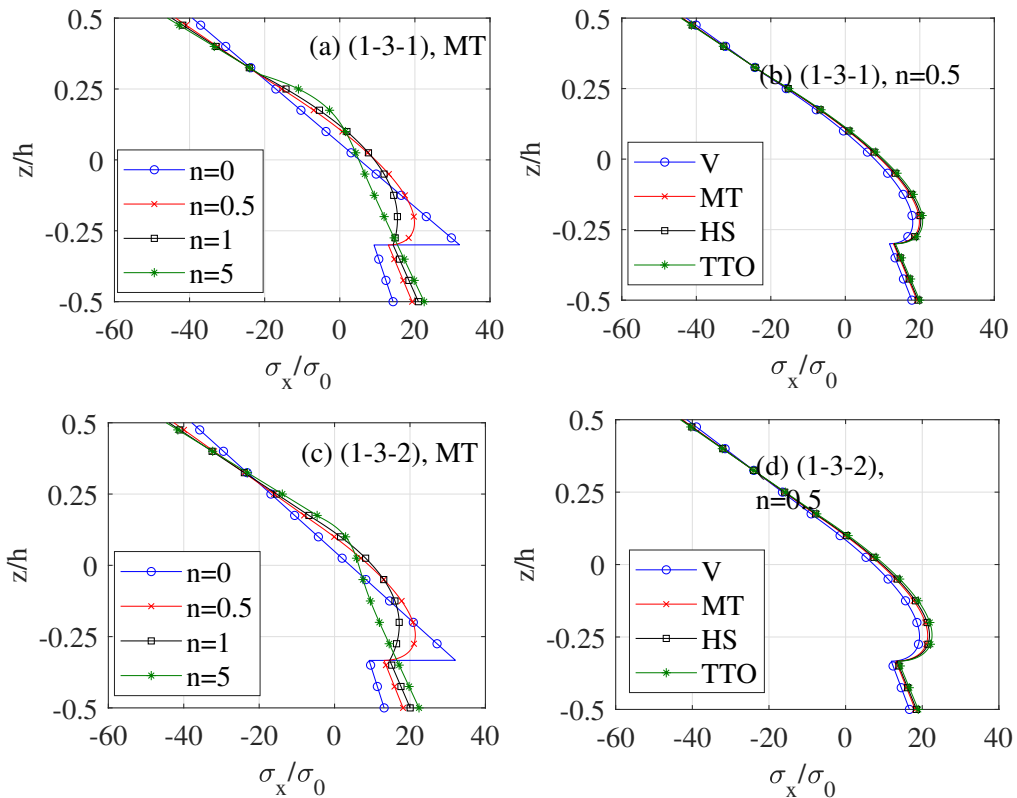


Hình 2.16. Cấu hình biến dạng của dầm loại B: (a) Dầm (2-1-2) và n thay đổi; (b) $n = 0.5$, $M^* = 10$ và các tỉ số chiều dày các lớp khác nhau.

Cuối cùng, sự phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tại thiết diện ngang của dầm loại A đối xứng (2-1-2) và dầm loại B không đối xứng (2-2-1)



Hình 2.17. Phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tại thiết diện ngàm của dầm loại A với $M^* = 3$.



Hình 2.18. Phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tại thiết diện ngàm của dầm loại B với $M^* = 3$.

với $M^* = 3$ được minh họa trên các Hình 2.17 và 2.18 cho các giá trị khác nhau của tham số vật liệu và các mô hình đồng nhất hóa vật liệu. Như ta thấy từ các hình này, sự phân bố ứng suất của dầm đối xứng khác biệt đáng kể so với dầm không đối xứng. Thứ tự của ứng suất cực đại thu được từ các mô hình đồng nhất hóa vật liệu khác nhau, như có thể thấy từ Hình 2.17b và 2.17d cho dầm loại A và Hình 2.18b và 2.18d cho dầm loại B là V, MT, HS và TTO. Cần lưu ý rằng ứng suất dọc trục ứng với trường hợp $n = 0$ trên các Hình 2.18a và 2.18c không liên tục mà có bước nhảy. Lí do là với $n = 0$ dầm sandwich không còn là dầm FGM thông thường mà trở thành dầm 2 lớp, lớp gốm và lớp kim loại. Mô-đun đàn hồi của gốm và kim loại khác nhau nên ứng suất của dầm có bước nhảy khi đi qua mặt phân cách giữa hai lớp.

2.8.2. Chuyển vị lớn của dầm sandwich CNTRC

Phần này nghiên cứu đáp ứng chuyển vị lớn của dầm sandwich công-xôn CNTRC nằm một phần trên nền đàn hồi hai tham số Pasternak dưới tác dụng của tải trọng ngang và mô-men tại đầu tự do. Dầm được cấu thành từ vật liệu pha nền là polymethyl methacrylate (PMMA) với $E_m = 2.5$, $\nu_m = 0.34$ và pha gia cường là các SWCNT (10, 10) có các hệ số đàn hồi Hills như trong Tài liệu tham khảo [7]. Luận án sẽ tập trung khảo sát ảnh hưởng của sự gia cường của CNTs, mức độ kết tụ và tham số nền đàn hồi tới chuyển vị cũng như cấu hình biến dạng của dầm.

2.8.2.1. Ảnh hưởng của CNT gia cường

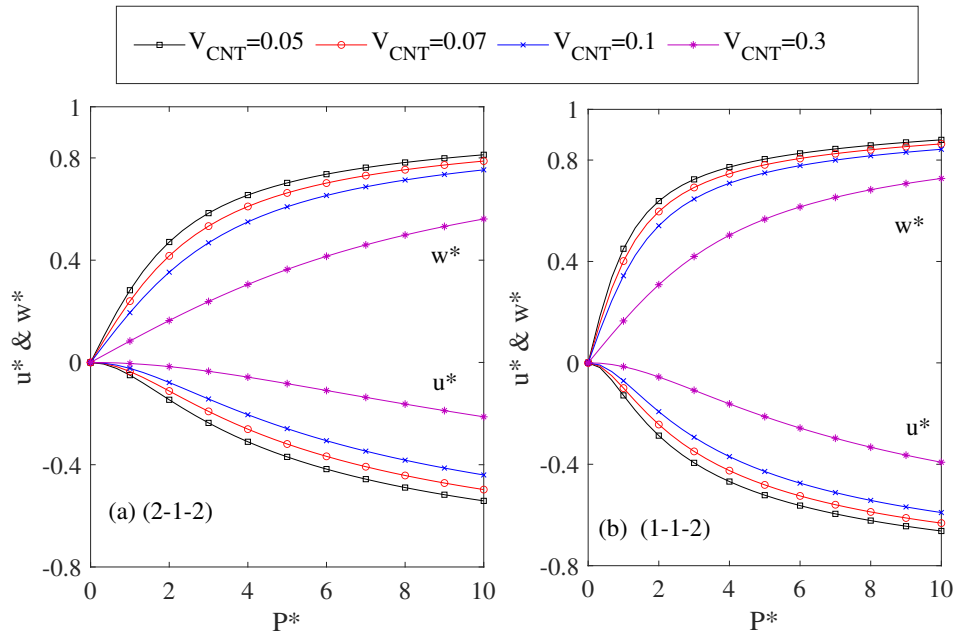
Bảng 2.7 liệt kê chuyển vị không thứ nguyên theo phương x và theo phương z tại đầu tự do của dầm sandwich (2-1-2) và (1-1-2) ứng với $P^* = 10$, $L/h = 20$, $\alpha_F = 0.4$, $k_1 = 50$ và $k_2 = 0.5$. Ảnh hưởng của tỷ phần thể tích ống nano carbon và tham số kết tụ tới đáp ứng phi tuyến của dầm có thể quan sát được một cách rõ ràng từ Bảng 2.7. Như mong đợi, sự tăng của tỷ phần thể tích V_{CNT} dẫn tới sự giảm đáng kể của chuyển vị của cả dầm sandwich đối xứng và không đối xứng, và sự suy giảm này không phụ thuộc vào tham số kết tụ. Độ kết tụ của các ống nano carbon, biểu thị qua hai tham số ξ và ζ , cũng có ảnh hưởng đáng kể tới đáp ứng chuyển vị lớn của dầm. Chuyển vị của cả dầm đối xứng (2-1-2) và dầm không đối xứng (1-1-2) đạt giá trị nhỏ nhất khi $\xi = \zeta$, tức là ứng với trường hợp CNTs phân bố đều. Như đã đề cập ở trên và minh họa trên Hình 2.7, mô-đun đàn hồi của kết cấu composite đạt giá trị lớn nhất khi CNTs phân bố đều, và do đó độ cứng của dầm là lớn nhất trong trường hợp này. Chuyển vị của cả dầm đối xứng và không đối xứng cao hơn đáng kể khi mức độ kết tụ CNT lớn hơn, tức là khi hai tham số kết tụ ξ và ζ có sự chênh lệch lớn. Quan sát Bảng 2.7 kỹ lưỡng hơn, ta nhận thấy rằng ảnh hưởng của sự kết tụ CNT đối với

đáp ứng chuyển vị lớn của dầm phụ thuộc vào tỷ phần thể tích CNT, và sự ảnh hưởng này trở nên rõ rệt hơn khi tỷ phần thể tích CNT cao hơn. Ví dụ, sự chênh lệch của chuyển vị theo phương z của dầm (2-1-2) ứng với $V_{CNT} = 0.05$ giữa trường hợp dầm gia cường bởi CNTs có độ kết tụ lớn ($\xi = 0.1, \zeta = 0.9$) và trường hợp dầm có CNT phân bố đều ($\xi = \zeta$) là 6.56%, trong khi giá trị tương ứng với dầm có tỷ phần thể tích $V_{CNT} = 0.3$ là 33.41%, cao hơn gấp khoảng 5 lần.

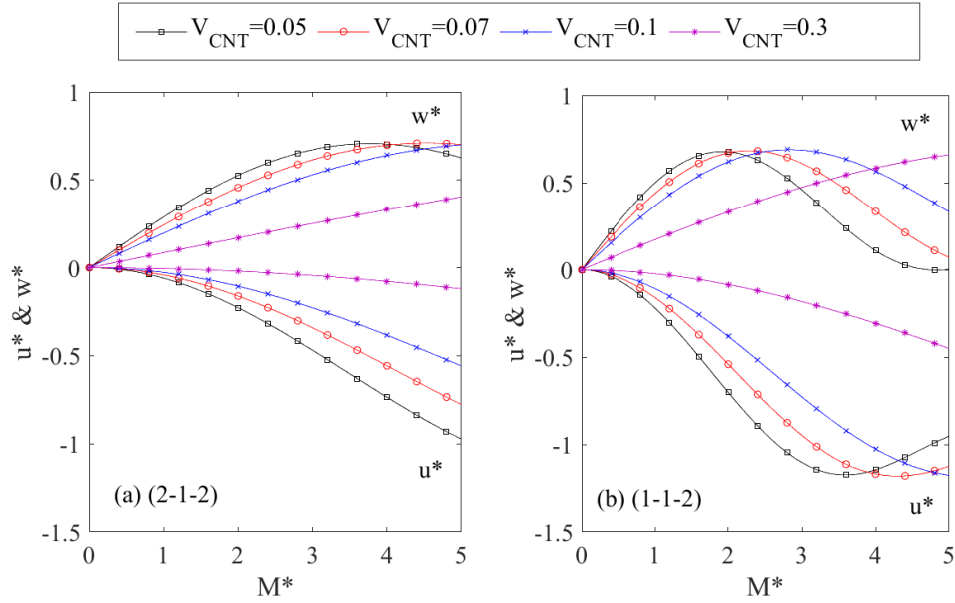
Bảng 2.7. Chuyển vị lớn không thứ nguyên ở đầu tự do của dầm sandwich công-xôn CNTRC với $P^* = 10, L/h = 20, \alpha_F = 0.4, k_1 = 50$ và $k_2 = 0.5$

V_{CNT}	ζ	2-1-2				1-1-2					
		$\xi = 0.1$	$\xi = 0.3$	$\xi = 0.5$	$\xi = 0.7$	$\xi = 0.1$	$\xi = 0.3$	$\xi = 0.5$	$\xi = 0.7$		
0.05	0.1	$ u^* $	0.5350	0.5421	0.5540	0.5679	0.6587	0.6636	0.6719	0.6815	
		w^*	0.8088	0.8126	0.8190	0.8265	0.8774	0.8800	0.8843	0.8895	
	0.3	$ u^* $	0.5463	0.5350	0.5402	0.5522	0.6665	0.6587	0.6623	0.6706	
		w^*	0.8149	0.8088	0.8116	0.8181	0.8815	0.8774	0.8793	0.8837	
	0.5	$ u^* $	0.5708	0.5418	0.5350	0.5402	0.6834	0.6634	0.6587	0.6623	
		w^*	0.8280	0.8125	0.8088	0.8116	0.8905	0.8799	0.8774	0.8793	
	0.7	$ u^* $	0.6031	0.5625	0.5417	0.5350	0.7055	0.6777	0.6633	0.6587	
		w^*	0.8449	0.8236	0.8124	0.8088	0.9027	0.8874	0.8798	0.8774	
	0.9	$ u^* $	0.6425	0.5987	0.5673	0.5452	0.7321	0.7025	0.6810	0.6658	
		w^*	0.8656	0.8427	0.8261	0.8143	0.9182	0.9010	0.8892	0.8811	
	0.1	0.1	$ u^* $	0.4280	0.4412	0.4617	0.4824	0.5813	0.5912	0.6063	0.6214
			w^*	0.7455	0.7540	0.7667	0.7791	0.8378	0.8429	0.8506	0.8582
0.3		$ u^* $	0.4475	0.4280	0.4373	0.4569	0.5959	0.5813	0.5883	0.6028	
		w^*	0.7579	0.7455	0.7515	0.7637	0.8453	0.8378	0.8414	0.8488	
0.5		$ u^* $	0.4892	0.4406	0.4280	0.4371	0.6263	0.5907	0.5813	0.5881	
		w^*	0.7830	0.7536	0.7455	0.7513	0.8607	0.8426	0.8378	0.8413	
0.7		$ u^* $	0.5457	0.4800	0.4408	0.4280	0.6661	0.6196	0.5909	0.5813	
		w^*	0.8146	0.7776	0.7537	0.7455	0.8813	0.8574	0.8427	0.8378	
0.9		$ u^* $	0.6185	0.5541	0.4963	0.4497	0.7159	0.6719	0.6313	0.5975	
		w^*	0.8530	0.8191	0.7871	0.7593	0.9086	0.8844	0.8633	0.8461	
0.3		0.1	$ u^* $	0.1953	0.2132	0.2391	0.2577	0.3729	0.3925	0.4194	0.4377
			w^*	0.5406	0.5618	0.5902	0.6093	0.7139	0.7279	0.7459	0.7577
	0.3	$ u^* $	0.2214	0.1953	0.2073	0.2298	0.4013	0.3729	0.3862	0.4099	
		w^*	0.5711	0.5406	0.5550	0.5803	0.7338	0.7139	0.7234	0.7397	
	0.5	$ u^* $	0.2830	0.2129	0.1953	0.2066	0.4616	0.3922	0.3729	0.3854	
		w^*	0.6336	0.5614	0.5406	0.5541	0.7723	0.7276	0.7139	0.7229	
	0.7	$ u^* $	0.3823	0.2767	0.2142	0.1953	0.5460	0.4557	0.3936	0.3729	
		w^*	0.7143	0.6277	0.5629	0.5406	0.8195	0.7688	0.7286	0.7139	
	0.9	$ u^* $	0.5405	0.4348	0.3240	0.2324	0.6625	0.5864	0.4980	0.4126	
		w^*	0.8118	0.7499	0.6694	0.5831	0.8794	0.8404	0.7934	0.7414	

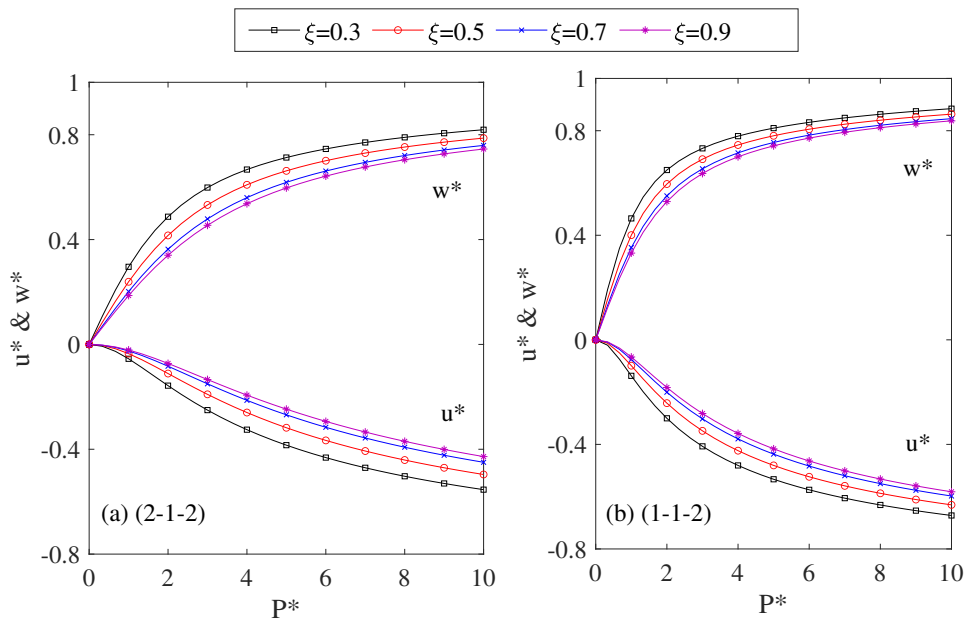
Để khảo sát ảnh hưởng của sự gia cường CNTs đối với đáp ứng phi tuyến của dầm chi tiết hơn, Hình 2.19 và 2.20 minh họa ảnh hưởng của tỷ phần thể tích CNT tới chuyển vị lớn của dầm chịu tải trọng P và mô-men M cho trường hợp $L/h = 10$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.6)$ và $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$. Ảnh hưởng của độ kết tụ CNTs được minh họa trên các Hình 2.21 và 2.22, trong đó đáp ứng phi tuyến của dầm đối xứng (2-1-2) và không đối xứng (1-1-2) của dầm chịu tải trọng theo phương vuông góc và mô-men tại đầu cuối của dầm công-xôn được minh họa cho $L/h = 10$, $V_{CNT} = 0.1$, $\alpha_F = 0.4$, $\zeta = 0.9$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$ và các giá trị khác nhau của tham số kết tụ ξ . Hình 2.21 cho thấy chuyển vị tại đầu tự do của dầm giảm đi khi tăng tỷ phần thể tích CNTs, và sự suy giảm này không phụ thuộc vào giá trị của tải trọng cũng như cấu hình sandwich của dầm. Ảnh hưởng của sự kết tụ CNTs lên đáp ứng của dầm sandwich chịu tác động của mô-men, như ta thấy từ Hình 2.22, cũng tương tự như trường hợp dầm chịu lực P . Cấu hình biến dạng của dầm dưới tác dụng của mô-men ở đầu tự do minh họa trên Hình 2.23 cho thấy độ cứng của dầm tăng lên khi tỷ phần thể tích CNTs trong dầm cao hơn. Dầm bị uốn cong tới dạng một nửa vòng tròn khi mô-men tác dụng đạt tới một giá trị nhất định, và sau đó chuyển vị w^* bắt đầu giảm, như minh họa trên Hình 2.22b cho đường cong ứng với $V_{CNT} = 0.05$.



Hình 2.19. Ảnh hưởng của V_{CNT} tới đáp ứng phi tuyến của dầm công-xôn CNTRC chịu tải trọng P theo phương vuông góc với dầm ($L/h = 10$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.6)$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).

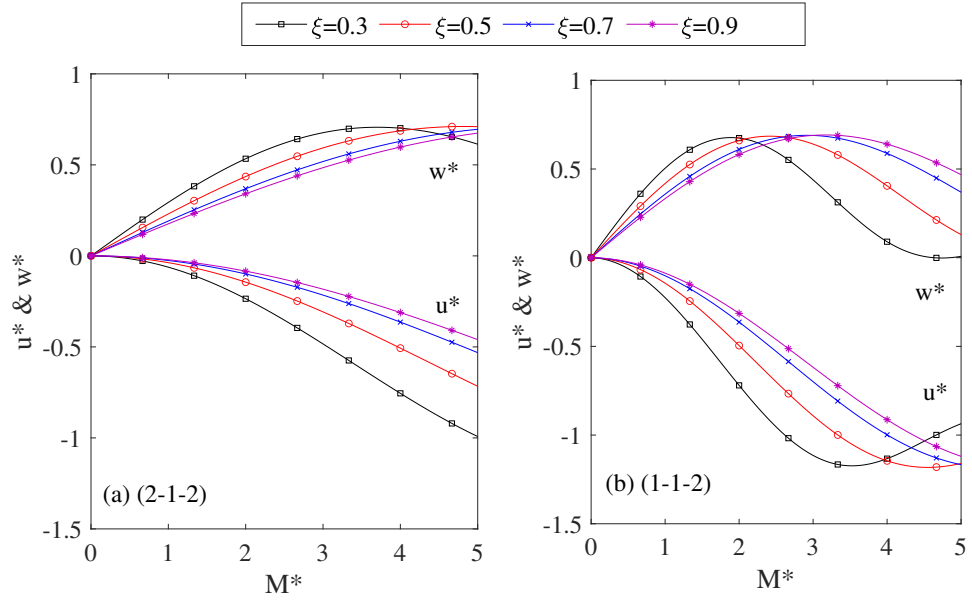


Hình 2.20. Ảnh hưởng của V_{CNT} tới đáp ứng phi tuyến của dầm công-xôn CNTRC chịu mô-men uốn ($L/h = 10$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.6)$ và $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).

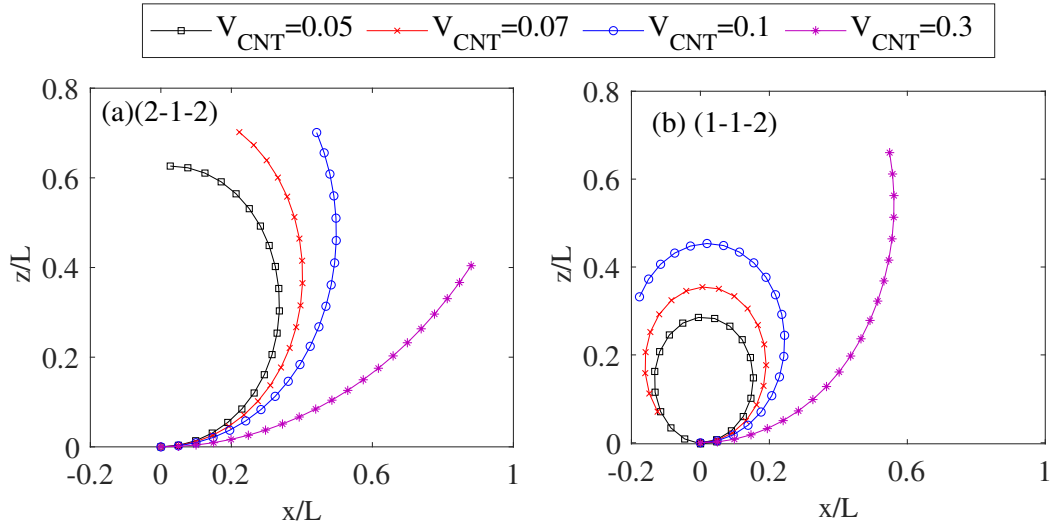


Hình 2.21. Đường cong tải-chuyển vị của dầm công-xôn CNTRC chịu tải P với các giá trị khác nhau của tham số kết tụ ξ ($L/h = 10$, $V_{CNT} = 0.1$, $\alpha_F = 0.4$, $\zeta = 0.9$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).

Đáp ứng chuyển vị lớn của dầm sandwich công-xôn CNTRC với cấu hình đối xứng và không đối xứng, như minh họa trên Hình 2.21 và 2.22, được hiển thị rõ ràng hơn khi có sự chênh lệch lớn hơn giữa hai tham số kết tụ ξ và ζ . Nói cách khác, độ kết tụ càng lớn, đáp ứng chuyển vị lớn của dầm càng rõ rệt, và nhận xét này không phụ



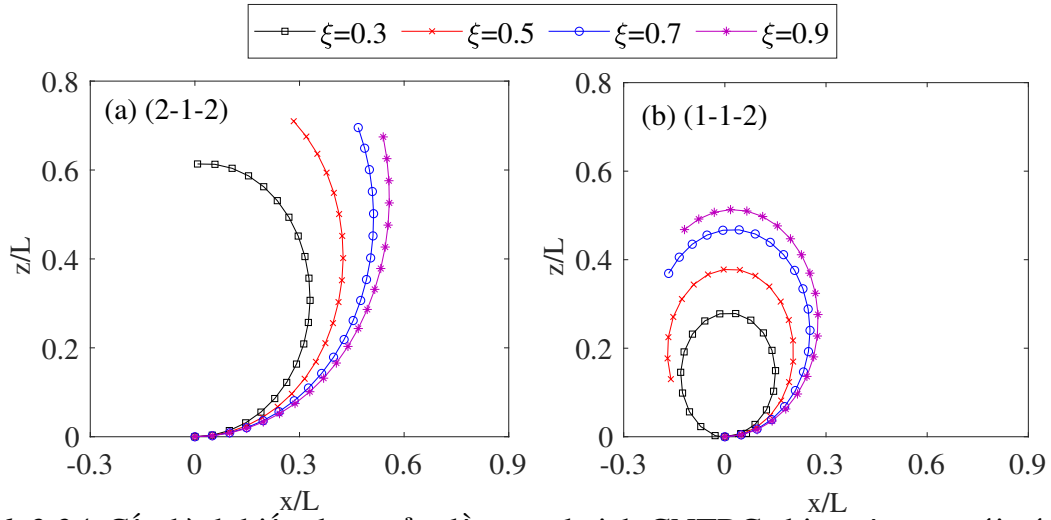
Hình 2.22. Đường cong tải-chuyển vị của dầm sandwich CNTRC chịu mô-men uốn với các giá trị khác nhau của tham số kết tụ ξ ($L/h = 10$, $V_{CNT} = 0.1$, $\alpha_F = 0.4$, $\zeta = 0.9$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).



Hình 2.23. Cấu hình biến dạng của dầm CNTRC chịu mô-men uốn $M^* = 5$ với các giá trị khác nhau của V_{CNT} ($L/h = 10$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.6)$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).

thuộc vào tải trọng cũng như cấu hình sandwich của dầm. Lưu ý rằng, dầm công-xôn ứng với $\xi = 0.3$ bị uốn tới dạng một nửa hình tròn khi $M^* = 2$, và chuyển vị theo phương z , w^* , giảm khi tăng giá trị của mô-men uốn, như minh họa trên Hình 2.22b. Mặc dù chuyển vị w^* của dầm ứng với $\xi = 0.3$ chịu tác dụng của $M^* > 2$ là nhỏ hơn, kết cấu dầm vẫn biến dạng lớn hơn so với các trường hợp khác ($\xi = 0.5, 0.7, 0.9$). Ảnh hưởng của sự gia cường CNTs cũng có thể thấy được từ các Hình 2.23 và 2.24,

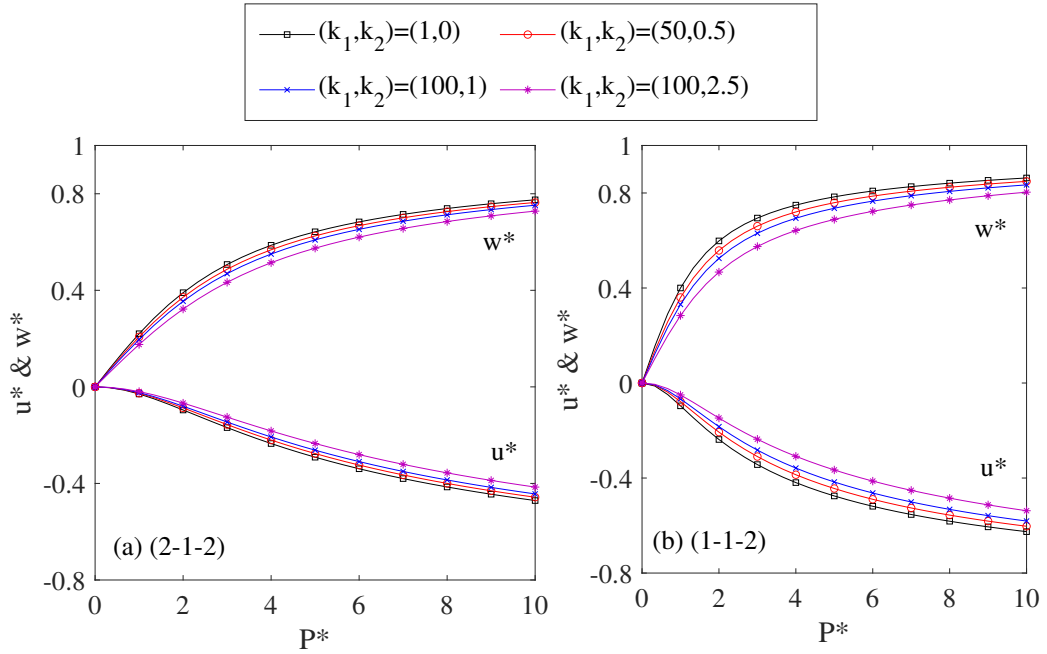
trên đó cấu hình biến dạng của dầm (2-1-2) và (1-1-2) chịu tác dụng của mô-men uốn được minh họa cho $L/h = 10$, $\alpha_F = 0.4$ và $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$. Với cùng một giá trị mô-men uốn chuẩn hóa $M^* = 5$, dầm không đối xứng (1-1-2) ứng với $V_{CNT} = 0.05$ uốn dạng hình tròn, trong khi đó đường cong biến dạng của dầm (1-1-2) ứng với $V_{CNT} = 0.3$ vẫn chưa được uốn cong tới nửa hình tròn (Hình 2.23b). Cấu hình biến dạng của dầm công-xôn CNTRC, như minh họa trên Hình 2.24, cũng chịu ảnh hưởng đáng kể bởi độ kết tụ của các ống nano carbon. Với $M^* = 5$, dầm sandwich không đối xứng (1-1-2) được gia cường bởi các ống nano carbon phân bố đều uốn thành nửa vòng tròn, trong khi đó, dầm được gia cường bởi các ống nano carbon có độ kết tụ lớn ($\xi = 0.3, \zeta = 0.9$) bị uốn thành một vòng tròn khép kín.



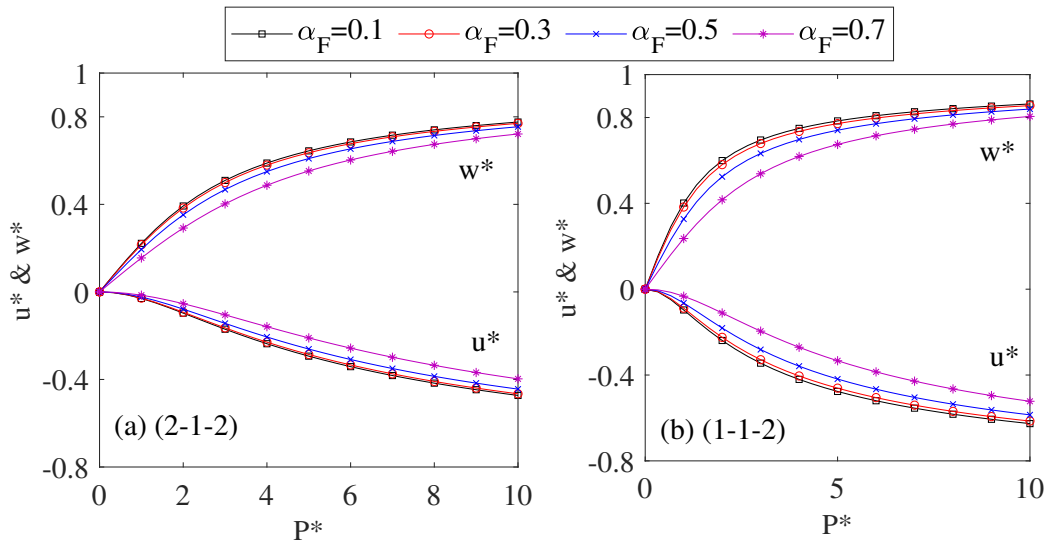
Hình 2.24. Cấu hình biến dạng của dầm sandwich CNTRC chịu mô-men với các giá trị khác nhau của tham số kết tụ ξ ($L/h = 10$, $V_{CNT} = 0.1$, $\alpha_F = 0.4$, $\zeta = 0.9$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).

2.8.2.2. Ảnh hưởng của nền đàn hồi

Hình 2.25 minh họa đường cong tải-chuyển vị của dầm sandwich CNTRC đối xứng (2-1-2) và không đối xứng (1-1-2) chịu tải trọng ngang với $L/h = 10$, $V_{CNT} = 0.1$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.7)$ và các giá trị khác nhau của tham số độ cứng nền đàn hồi. Ảnh hưởng của chiều dài nền đàn hồi được minh họa trên Hình 2.26 cho trường hợp $L/h = 10$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.7)$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$. Kết quả thu được như mong đợi, trong đó chuyển vị lớn của dầm giảm khi tăng độ cứng của nền đàn hồi, và điều này không phụ thuộc vào tải trọng và cấu hình dầm. Ảnh hưởng của chiều dài nền đàn hồi đối với ứng xử phi tuyến của dầm cũng tương tự như ảnh hưởng của tỷ phần thể tích CNTs. Như quan sát thấy từ các Hình 2.25 và 2.26, sự tăng của tham số nền đàn hồi α_F làm giảm đáng kể chuyển vị lớn của dầm công-xôn sandwich CNTRC, và điều này không phụ thuộc tải trọng và cấu hình dầm sandwich.



Hình 2.25. Ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi tới chuyển vị lớn của dầm CNTRC chịu tải P ($L/h = 10$, $V_{CNT} = 0.1$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.7)$).



Hình 2.26. Ảnh hưởng của tham số nền α_F tới chuyển vị lớn của dầm CNTRC chịu tải P ($L/h = 10$, $\alpha_F = 0.4$, $(\xi, \zeta) = (0.4, 0.7)$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).

2.8.2.3. Ảnh hưởng của cấu hình sandwich

Cấu hình sandwich, như ta thấy từ Bảng 2.7, ảnh hưởng rõ nét tới ứng xử chuyển vị lớn của dầm sandwich CNTRC. Với cùng một giá trị của tỷ phần thể tích CNTs, chuyển vị của dầm không đối xứng (1-1-2) lớn hơn đáng kể so với dầm đối xứng (2-1-2). Kết luận này không phụ thuộc tỷ phần thể tích CNTs và giá trị của tham số kết tụ. Cấu hình biến dạng của dầm CNTRC chịu tác dụng của mô-men uốn như

mô tả trên các Hình 2.23 và 2.24 cũng cho thấy độ cứng cao hơn của dầm đối xứng (2-1-2) so với dầm không đối xứng (1-1-2). Như quan sát thấy từ Hình 2.23, với cùng một giá trị của mô-men $M^* = 5$, dầm không đối xứng (1-1-2) được gia cường bởi các ống nano carbon với tỷ phần thể tích $V_{CNT} = 0.05$ bị uốn cong thành hình tròn, trong khi đó dầm đối xứng (2-1-2) mới chỉ bị uốn tới nửa hình tròn. Kết quả tương tự cũng được chỉ ra với cấu hình dầm (2-1-2) và (1-1-2) ứng với $\xi = 0.5$ dưới tác dụng của mô-men uốn $M^* = 5$ trên Hình 2.24. Như vậy, với cùng một giá trị xác định của tỷ phần thể tích CNTs và tham số kết tụ, ta có thể thiết kế một dầm sandwich để giảm thiểu sự biến dạng của dầm bằng cách lựa chọn phù hợp tỷ số độ dày giữa các lớp của dầm.

2.8.2.4. Ảnh hưởng của tỷ số độ mảnh dầm

Độ mảnh dầm sandwich CNTRC có thiết diện ngang hình chữ nhật được đặc trưng bởi tỷ số giữa chiều dài và chiều cao dầm, (L/h) . Bảng 2.8 liệt kê các thành phần chuyển vị lớn không thứ nguyên tại đầu cuối của dầm sandwich (2-1-2) và (1-1-2) chịu tác dụng của tải trọng $P^* = 10$ cho trường hợp $V_{CNT} = 0.1$, $\alpha_F = 0.4$ và $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$ và các giá trị khác nhau của tỷ số độ mảnh dầm cũng như tham số kết tụ. Bảng 2.8 cho thấy chuyển vị lớn không thứ nguyên của cả hai cấu hình dầm công-xôn sandwich CNTRC cao hơn khi dầm có tỷ số độ mảnh nhỏ hơn, và điều này không phụ thuộc tham số kết tụ và cấu hình dầm. Xem xét Bảng 2.8 kỹ lưỡng hơn ta thấy rằng ảnh hưởng của độ mảnh dầm phụ thuộc vào giá trị của tham số kết tụ. Chẳng hạn, với trường hợp phân bố đều ($\xi = \zeta = 0.1$), sự chênh lệch giữa độ võng của dầm đối xứng có tỉ số $L/h = 5$ và $L/h = 20$ là 4.10%, trong khi giá trị này tăng lên 5.48% khi độ kết tụ của các ống nano carbon gia cường lớn hơn (với $\xi = 0.1, \zeta = 0.7$). Vì tỷ số độ mảnh dầm biểu thị ảnh hưởng biến dạng trượt, ta có thể nói rằng ảnh hưởng của biến dạng trượt là đáng kể hơn khi độ kết tụ của CNTs gia cường lớn hơn. Bảng 2.8 cũng cho thấy ảnh hưởng của tỉ số độ mảnh của dầm không đối xứng (1-1-2) là lớn hơn so với ảnh hưởng của dầm đối xứng (2-1-2), và điều này không phụ thuộc vào độ kết tụ. Sự chênh lệch giữa độ võng của dầm không đối xứng (1-1-2) có tỉ số độ mảnh $L/h = 5$ và $L/h = 20$ là 5.53% khi dầm được gia cường bởi các ống nano carbon phân bố đều ($\xi = \zeta = 0.1$), trong khi giá trị này là 7.25% đối với trường hợp độ kết tụ của CNTs gia cường lớn hơn ($\xi = 0.1, \zeta = 0.7$). Giá trị tương ứng này cao hơn so với trường hợp dầm đối xứng (2-1-2) nói ở trên. Kết quả của Bảng 2.8 cũng cho thấy khả năng tốt của công thức phần tử hữu hạn xây dựng trong Luận án trong việc mô phỏng ảnh hưởng của biến dạng trượt đối với ứng xử chuyển vị lớn của dầm sandwich CNTRC.

Bảng 2.8. Chuyển vị không thứ nguyên ở đầu tự do của dầm sandwich CNTRC với các giá trị khác nhau của tỷ số L/h ($P^* = 10$, $V_{CNT} = 0.1$, $\alpha_F = 0.4$, $(k_1, k_2) = (50, 0.5)$).

L/h	ζ		(2-1-2)				(1-1-2)			
			$\xi = 0.1$	$\xi = 0.3$	$\xi = 0.5$	$\xi = 0.7$	$\xi = 0.1$	$\xi = 0.3$	$\xi = 0.5$	$\xi = 0.7$
5	0.1	$ u^* $	0.4326	0.4459	0.4664	0.4871	0.5828	0.5927	0.6078	0.6229
		w^*	0.7707	0.7803	0.7947	0.809	0.8749	0.8813	0.8913	0.9014
	0.3	$ u^* $	0.4522	0.4326	0.4419	0.4616	0.5974	0.5828	0.5897	0.6043
		w^*	0.7848	0.7707	0.7774	0.7913	0.8844	0.8749	0.8794	0.8889
	0.5	$ u^* $	0.4939	0.4452	0.4326	0.4418	0.6278	0.5922	0.5828	0.5896
		w^*	0.8137	0.7798	0.7707	0.7773	0.9047	0.8810	0.8749	0.8793
	0.7	$ u^* $	0.5505	0.4847	0.4455	0.4326	0.6675	0.6211	0.5924	0.5828
		w^*	0.8519	0.8074	0.7800	0.7707	0.9337	0.9002	0.8812	0.8749
10	0.1	$ u^* $	0.4280	0.4412	0.4617	0.4824	0.5813	0.5912	0.6063	0.6214
		w^*	0.7455	0.7540	0.7667	0.7791	0.8378	0.8429	0.8506	0.8582
	0.3	$ u^* $	0.4475	0.4280	0.4373	0.4569	0.5959	0.5813	0.5883	0.6028
		w^*	0.7579	0.7455	0.7515	0.7637	0.8453	0.8378	0.8414	0.8488
	0.5	$ u^* $	0.4892	0.4406	0.4280	0.4371	0.6263	0.5907	0.5813	0.5881
		w^*	0.7830	0.7536	0.7455	0.7513	0.8607	0.8426	0.8378	0.8413
	0.7	$ u^* $	0.5457	0.4800	0.4408	0.4280	0.6661	0.6196	0.5909	0.5813
		w^*	0.8146	0.7776	0.7537	0.7455	0.8813	0.8574	0.8427	0.8378
20	0.1	$ u^* $	0.4268	0.4400	0.4605	0.4812	0.5813	0.5912	0.6063	0.6214
		w^*	0.7391	0.7474	0.7596	0.7715	0.8265	0.8312	0.8384	0.8454
	0.3	$ u^* $	0.4464	0.4268	0.4361	0.4557	0.5959	0.5813	0.5882	0.6028
		w^*	0.7512	0.7391	0.7449	0.7568	0.8335	0.8265	0.8298	0.8367
	0.5	$ u^* $	0.4880	0.4394	0.4268	0.4359	0.6263	0.5907	0.5813	0.5881
		w^*	0.7753	0.7470	0.7391	0.7448	0.8477	0.8310	0.8265	0.8298
	0.7	$ u^* $	0.5445	0.4788	0.4397	0.4268	0.6661	0.6196	0.5909	0.5813
		w^*	0.8052	0.7702	0.7472	0.7391	0.866	0.8446	0.8311	0.8265

Kết luận Chương 2

Chương 2 đã xây dựng phần tử dầm phi tuyến cho nghiên cứu chuyển vị lớn của dầm sandwich làm từ vật liệu có cơ tính biến thiên và vật liệu composite gia cường bằng các ống nano carbon. Phần tử được xây dựng trên cơ sở công thức Lagrange toàn phần với lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất và các hàm nội suy tuyến tính. Kỹ thuật

tích phân giảm bậc được sử dụng để tránh hiện tượng nghẽn trượt. Phần tử xây dựng trong chương được sử dụng cùng với các thuật toán tăng dần/lấp và phương pháp độ dài cung để phát triển chương trình tính toán cho phân tích ứng xử phi tuyến của dầm sandwich. Hai bài toán cụ thể đã được phân tích và khảo sát trong chương. Cụ thể là:

- **Bài toán 1:** Nghiên cứu chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGSW hai pha có xét tới ảnh hưởng của mô hình đồng nhất hóa vật liệu dùng trong tính toán các hệ số đàn hồi của vật liệu FGM. Hai loại dầm được xét đến trong chương, dầm loại A với lõi gốm và các lớp mặt FGM và dầm loại B lõi FGM và mặt thuần nhất. Bốn mô hình đồng nhất hóa vật liệu là mô hình Voigt, Mori-Tanaka, Hashin-Strickman và Tamura-Tomota-Ozawa được dùng để đánh giá các tính chất hiệu dụng của dầm. Kết quả số nhận được cho thấy ảnh hưởng của tham số vật liệu lên đáp ứng chuyển vị lớn phụ thuộc vào mô hình đồng nhất hóa vật liệu. Đồng thời kết quả số cũng chỉ ra rằng độ nhạy đối với tham số vật liệu và mô hình đồng nhất hóa vật liệu của dầm loại A rõ nét hơn dầm loại B. Trong bốn mô hình đồng nhất hóa vật liệu xét đến trong chương thì mô hình Voigt, mô hình duy nhất không thỏa mãn giới hạn Hashin-Strickman, là cứng nhất trong khi mô hình Tamura-Tomota-Ozawa là mềm (flexible) nhất. Mặc dù mô hình Voigt có ưu điểm đơn giản về mặt tính toán và được nhiều nhà khoa học sử dụng trong nghiên cứu ứng xử của kết cấu FGM nhưng chúng ta cần thận trọng khi sử dụng kết quả thu được từ mô hình này.

- **Bài toán 2:** Nghiên cứu chuyển vị lớn của dầm sandwich CNTRC nằm một phần trên nền đàn hồi Pasternak xét tới ảnh hưởng sự kết tụ của CNTs. Dầm sandwich được tạo thành bởi ba lớp, trong đó lớp lõi là vật liệu thuần nhất, hai lớp mặt là vật liệu composite gia cường bởi các ống nano carbon. Mô hình đồng nhất hóa Eshelby-Mori-Tanaka được sử dụng để tính toán các mô-đun đàn hồi hiệu dụng của vật liệu composite. Ảnh hưởng của các tham số quan trọng, chẳng hạn tỷ phần thể tích CNTs, các tham số kết tụ CNT, độ cứng của nền đàn hồi và chiều dài nền đàn hồi tới chuyển vị lớn của dầm đã được nghiên cứu chi tiết. Kết quả số cho thấy dầm sandwich CNTRC cứng hơn khi tỷ phần thể tích CNTs cao hơn và phần dầm tựa trên nền đàn hồi dài hơn. Sự kết tụ của CNTs đóng vai trò quan trọng trong ứng xử phi tuyến của dầm sandwich và nó không chỉ làm cho dầm mềm hơn mà còn làm tăng hiệu ứng của biến dạng trượt đối với ứng xử phi tuyến của dầm. Kết quả số cũng chỉ ra rằng cấu hình sandwich rất quan trọng trong ứng xử của dầm sandwich CNTRC và với cùng thể tích CNTs và tham số kết tụ dầm đối xứng có xu hướng chống lại chuyển vị lớn tốt hơn dầm không đối xứng.

Kết quả của chương 2 được đăng trên 07 bài báo, các bài từ số 1 đến số 7 trong ‘Danh mục công trình liên quan tới Luận án’ (trang 98), trong đó có 02 bài đã đăng trên Tạp chí quốc tế ISI, 04 bài trên Tạp chí trong nước và 01 bài trên Tuyển tập Hội nghị Khoa học Quốc gia.

CHƯƠNG 3

CHUYỂN VỊ LỚN CỦA KHUNG, DẦM FGM

Chương này nghiên cứu chuyển vị lớn của khung, dầm FGM có xét tới ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro. Phần tử dầm phi tuyến được xây dựng trên cơ sở công thức hệ tọa độ đồng hành, trong đó công thức phần tử được xây dựng trong hệ tọa độ địa phương sau đó chuyển về hệ tọa độ tổng quát nhờ các ma trận chuyển đổi. Phần tử dầm trong chương được xây dựng trên cơ sở lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, có xét tới ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro nhờ lý thuyết cặp ứng suất sửa đổi (Modify Couple Stress Theory - MCST). Để cải thiện tốc độ hội tụ của phần tử, các đa thức nhận được từ lời giải phương trình vi phân cân bằng phi tuyến của phần tử được sử dụng để nội suy trường chuyển vị. Phần tử dầm cho phân tích khung, dầm macro truyền thống nhận được từ phần tử trong chương với việc loại bỏ các số hạng liên quan tới tham số kích thước. Nghiên cứu số được thực hiện để minh họa ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu, tham số kích thước tới ứng xử chuyển vị lớn của kết cấu khung, dầm FGM.

3.1. Mở đầu

Kết cấu có kích thước micro nói chung, khung, dầm FGM micro nói riêng được sử dụng trong các thiết bị vi cơ-điện tử (Micro-Electro-Mechanical Systems - MEMS). Các kết cấu này thường mảnh, dễ bị uốn với chuyển vị lớn dưới tác động của lực ngoài. Nghiên cứu ứng xử của kết cấu kích thước micro ngày càng thu hút được sự quan tâm của các nhà khoa học trong lĩnh vực cơ học và vật lý. Do các lý thuyết cơ học kết cấu truyền thống không mô tả được ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro, một số lý thuyết, trong đó có lý thuyết cặp ứng suất sửa đổi (Modified Couple Stress Theory - MCST) do Yang và cộng sự đề xuất [51], lý thuyết gradient biến dạng sửa đổi (Modied Strain Gradient Theory - MSGT) do Lam và cộng sự phát triển [52] hiện được nhiều nhà khoa học sử dụng để nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro tới ứng xử cơ học của kết cấu kích thước micro. Các lý thuyết này cần được sử dụng kết hợp với lý thuyết cơ học kết cấu truyền thống để xây dựng các phương trình chủ đạo phụ thuộc vào tham số kích thước.

Phân tích chuyển vị lớn của kết cấu nói chung, khung, dầm FGM kích thước micro nói riêng là bài toán phức tạp, đòi hỏi các kỹ thuật riêng. Các phương pháp giải tích truyền thống thường gặp khó khăn trong phân tích khung, dầm có chuyển vị lớn.

Phương pháp phần tử hữu hạn được sử dụng trong Luận án để phân tích khung, dầm FGM kích thước micro. Để làm điều này ta cần xây dựng phần tử dầm phi tuyến có khả năng mô phỏng ứng xử phi tuyến phức tạp của khung, dầm FGM cũng như mô phỏng ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước. Trong các phương pháp xây dựng phần tử dầm phi tuyến thì phương pháp hệ tọa độ đồng hành là công cụ hữu ích trong việc xây dựng phần tử dầm cho phân tích phi tuyến hình học trong đó kết cấu trải qua chuyển vị lớn. Ý tưởng trung tâm của phương pháp là việc đưa vào hai hệ tọa độ, hệ tổng quát cố định và hệ tọa độ địa phương luôn quay và chuyển động liên tục với phần tử trong suốt quá trình phần tử biến dạng. Dịch chuyển và quay của phần tử như là vật cứng tuyệt đối trong hệ tọa độ đồng hành được loại bỏ hoặc giảm bớt, vì thế công thức phần tử thiết lập trong hệ tọa độ này có dạng đơn giản hơn so với công thức thiết lập trong hệ tọa độ tổng quát, chẳng hạn công thức Lagrange toàn phần trong chương trước. Véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử được xây dựng trong hệ tọa độ địa phương và chuyển về hệ tọa độ tổng quát nhờ các ma trận chuyển đổi. Phần tử dầm dưới đây được xây dựng trên cơ sở phương pháp hệ tọa độ đồng hành, trong đó lý thuyết dầm Euler-Bernoulli được sử dụng kết hợp với MCST để thiết lập ma trận độ cứng tiếp tuyến và véc-tơ nội lực trong hệ tọa độ địa phương. Nghiệm của phương trình vi phân cân bằng phi tuyến của phần tử dầm được sử dụng để nội suy trường chuyển vị trong việc xây dựng các biểu thức cho phần tử dầm.

3.2. Dầm FGM

Xét dầm phẳng FGM có thiết diện ngang hình chữ nhật ($b \times h$). Dầm được làm từ vật liệu phối trộn giữa gốm và kim loại, với tỷ phần thể tích của vật liệu thành phần biến thiên theo chiều cao dầm theo quy luật hàm lũy thừa

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n, \quad V_m = 1 - V_c \quad (3.1)$$

trong đó z là tọa độ theo chiều cao dầm, tính từ mặt giữa của dầm; n là chỉ số mũ (còn gọi là tham số vật liệu) xác định sự thay đổi của tỷ phần thể tích các vật liệu thành phần. Mặt dưới của dầm, ứng với $z = -h/2$, được làm hoàn toàn từ kim loại; và mặt trên của dầm, ứng với $z = h/2$, được làm hoàn toàn từ gốm. Ta có thể nhận thấy từ phương trình (3.1) rằng, tham số vật liệu n càng cao, hàm lượng gốm trong dầm càng thấp. Chỉ số dưới 'c' và 'm' trong phương trình (3.1) được dùng tương ứng để biểu thị các đại lượng thuộc pha gốm và pha kim loại.

Hai mô hình đồng nhất hóa vật liệu được sử dụng trong chương này để tính toán các tính chất đàn hồi hiệu dụng của vật liệu FGM là mô hình Voigt và mô hình Mori-Tanaka. Công thức cho các hệ số đàn hồi của vật liệu FGM hai pha tính toán theo

mô hình Voigt và Mori-Tanaka đã được trình bày trong chương 2 cho dầm sandwich FGM. Do tỷ phần thể tích của dầm FGM cho bởi phương trình (3.1) khác với dầm sandwich FGM và để tiện theo dõi, công thức để tính toán các hệ số đàn hồi của dầm FGM được trình bày lại dưới đây.

Theo mô hình Voigt, tính chất vật liệu hiệu dụng (\mathcal{P}_f), được tính theo quy luật phối trộn như sau

$$\mathcal{P}_f(z) = \mathcal{P}_c V_c(z) + \mathcal{P}_m V_m(z) \quad (3.2)$$

với \mathcal{P}_c , \mathcal{P}_m tương ứng là tính chất vật liệu của gốm và kim loại. Thay phương trình (3.1) và phương trình (3.2) ta nhận được các đặc trưng đàn hồi hiệu dụng. Chẳng hạn mô-đun đàn hồi Young (E_f) của dầm FGM được tính như sau

$$E_f(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_m \quad (3.3)$$

Sử dụng mô hình Mori-Tanaka [137], mô-đun hiệu dụng Young (E_f) và hệ số Poisson (ν_f) liên hệ với các mô-đun khối hiệu dụng (K_f) và mô-đun trượt hiệu dụng (G_f) theo phương trình

$$E_f = \frac{9K_f G_f}{3K_f + G_f}, \quad \nu_f = \frac{3K_f - 2G_f}{6K_f + 2G_f} \quad (3.4)$$

Các mô-đun K_f và G_f được xác định từ mô-đun của các vật liệu thành phần như sau

$$\frac{K_f - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + \frac{(1 - V_c)(K_c - K_m)}{(K_m + 4G_m/3)}} \quad (3.5)$$

$$\frac{G_f - G_m}{G_c - G_m} = \frac{V_c}{1 + \frac{(1 - V_c)(G_c - G_m)}{G_m + G_m(9K_m + 8G_m)/(6K_m + 12G_m)}}$$

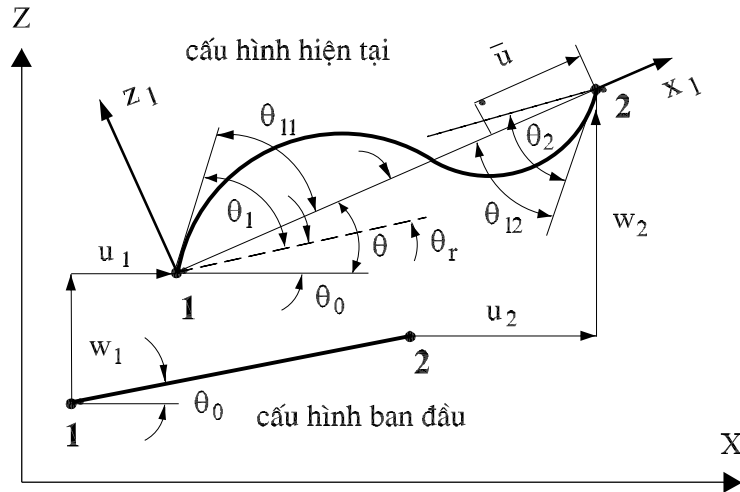
với K_c , K_m và G_c , G_m tương ứng là mô-đun khối và mô-đun trượt của gốm và kim loại; V_c là tỷ phần thể tích của pha gốm, cho bởi phương trình (3.1). Mặc dù lý thuyết dầm Euler-Bernoulli được sử dụng trong chương này nhưng mô-đun trượt G_f và hệ số Poisson ν_f , như ta thấy dưới đây, vẫn cần cho việc phân tích kết cấu kích thước micro.

3.3. Hệ tọa độ đồng hành và véc-tơ chuyển vị nút

Hình 3.1 minh họa phần tử dầm phẳng hai nút trong hệ tọa độ tổng quát (x, z) và hệ tọa độ đồng hành (x_l, z_l) . Theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, chuyển vị theo hướng các trục tọa độ địa phương x_l và z_l của một điểm bên trong phần tử dầm, $\bar{u}(\bar{x}, \bar{z})$ và $\bar{w}(\bar{x}, \bar{z})$, cho bởi

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{u}_0(\bar{x}) - \bar{z} \bar{w}_{0,\bar{x}}(\bar{x}), \quad \bar{w}(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{w}_0(\bar{x}) \quad (3.6)$$

trong đó $\bar{u}_0(\bar{x})$ và $\bar{w}_0(\bar{x})$ tương ứng là chuyển vị theo phương \bar{x} và chuyển vị theo phương \bar{z} của một điểm trên trục x_l xét theo hệ tọa độ địa phương; \bar{x} và \bar{z} là hoành độ và tọa độ theo chiều cao của điểm đang xét trong hệ tọa độ (x_l, z_l) . Trong phương trình (3.6) và dưới đây, dấu phẩy được sử dụng để chỉ đạo hàm theo biến tiếp theo, chẳng hạn $\bar{w}_{0,\bar{x}} = \partial \bar{w}_0 / \partial \bar{x}$.



Hình 3.1. Hệ tọa độ đồng hành, các bậc tự do địa phương và tổng quát của phần tử dầm hai nút.

Véc-tơ chuyển vị nút, bao gồm chuyển vị và góc quay tại nút, (\mathbf{d}), của phần tử trong hệ tọa độ tổng quát (x, z) gồm 6 thành phần

$$\mathbf{d} = \{u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T \quad (3.7)$$

trong đó u_i , w_i và θ_i ($i = 1, 2$) tương ứng là chuyển vị theo phương x , chuyển vị theo phương z và góc quay tại nút i xét trong hệ tọa độ tổng quát (x, z) .

Hệ tọa độ đồng hành (còn gọi là hệ tọa độ địa phương) (x_l, z_l) được chọn sao cho gốc tọa độ luôn nằm ở nút **1**, trục x hướng từ nút **1** sang nút **2**. Với lựa chọn này của hệ tọa độ địa phương, chuyển vị theo phương x_l tại nút **1** và chuyển vị theo phương z_l ở cả hai nút của phần tử luôn bằng không, $\bar{u}_1 = \bar{w}_1 = \bar{w}_2 = 0$. Véc-tơ chuyển vị nút của phần tử trong hệ tọa độ địa phương ($\bar{\mathbf{d}}$), vì thế, chỉ còn 3 thành phần khác không

$$\bar{\mathbf{d}} = \{\bar{u} \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{\theta}_2\}^T, \quad \bar{u} = \bar{u}_2 \quad (3.8)$$

với \bar{u} là chuyển vị của \bar{u}_0 tại nút **2**; $\bar{\theta}_1$ và $\bar{\theta}_2$ là góc quay tại các nút **1** và **2** xét trong hệ tọa độ địa phương (x_l, z_l) . Trong phương trình (3.8) và ở dưới đây, thanh ngang trên một đại lượng nào đó được sử dụng để chỉ đại lượng đó được định nghĩa trong hệ tọa độ địa phương (x_l, z_l) .

Độ dài phần tử trước và sau biến dạng, (l_o) và (l_n), có thể tính hoặc xấp xỉ qua tọa độ các nút và chuyển vị hiện tại như sau [145]

$$l_o = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3.9)$$

$$l_n = \sqrt{(x_2 + u_1 - x_1 - u_1)^2 + (z_2 + w_2 - z_1 - w_1)^2} \quad (3.10)$$

trong đó (x_1, z_1) , (x_2, z_2) là tọa độ của nút **1** và nút **2** của phần tử trước biến dạng (xét trong hệ tọa độ tổng quát). Mối liên hệ giữa các chuyển vị nút trong hai hệ tọa độ dễ dàng nhận được từ xem xét hình học Hình 3.1

$$\bar{u} = l_n - l_o; \quad \bar{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_r; \quad \bar{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_r \quad (3.11)$$

với θ_r là góc quay của phần tử như là vật thể cứng. Từ Hình 3.1 ta có

$$\cos \theta_r = \frac{(x_2 + u_2 - x_1 - u_1) + (z_2 + w_2 - z_1 - w_1)(z_2 - z_1)}{l_o l_n} \quad (3.12)$$

$$\sin \theta_r = \frac{(w_2 - w_1)(x_2 - x_1) - (u_2 - u_1)(z_2 - z_1)}{l_o l_n} \quad (3.13)$$

Phương trình (3.12) hoặc phương trình (3.13) cho phép xác định góc quay θ_r của phần tử như vật thể cứng. Tùy vị trí phần tử nằm ở góc phần tư nào của mặt phẳng ta có thể xác định θ_r như sau [145]

$$\begin{aligned} \theta_r &= \arcsin(s) && \text{khi } (s \geq 0), (c \geq 0) \\ \theta_r &= \arccos(s) && \text{khi } (s \geq 0), (c \leq 0) \\ \theta_r &= -\arccos(s) && \text{khi } (s \leq 0), (c \leq 0) \end{aligned} \quad (3.14)$$

với $c = \cos \theta_r$, $s = \sin \theta_r$, định nghĩa bởi các phương trình (3.12), (3.13).

3.4. Ma trận chuyển đổi

Véc-tơ nội lực phần tử ($\bar{\mathbf{f}}_{in}$) trong hệ tọa độ địa phương tương ứng với các chuyển vị nút trong phương trình (3.8) có dạng

$$\bar{\mathbf{f}}_{in} = \{\bar{N}_2 \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2\}^T \quad (3.15)$$

trong đó \bar{N}_2 là lực dọc trục trong hệ tọa độ địa phương tại nút **2**; \bar{M}_1 và \bar{M}_2 tương ứng là các mô-men tại các nút **1** và nút **2**.

Véc-tơ nội lực phần tử trong hệ tọa độ tổng quát (\mathbf{f}_{in}) tương ứng với các chuyển vị nút trong phương trình (3.7) có dạng

$$\mathbf{f}_{in} = \{N_1 \quad N_2 \quad Q_1 \quad M_1 \quad Q_2 \quad M_2\}^T \quad (3.16)$$

với N_i , Q_i và M_i ($i = 1, 2$) tương ứng là các lực dọc trục, lực cắt và mô-men tại nút i .

Với vật liệu đàn hồi, véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến có thể nhận được bằng cách vi phân năng lượng biến dạng đàn hồi theo các chuyển vị nút. Năng lượng biến dạng đàn hồi là đại lượng vô hướng, bất biến với hệ tọa độ nên ta có thể tính véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng quát như sau

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\text{in}} &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{f}}_{\text{in}}, \\ \mathbf{k}_t &= \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{d}^2} = \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{k}}_t \mathbf{T}_1 + \bar{N}_2 \mathbf{T}_2 + (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \mathbf{T}_3\end{aligned}\quad (3.17)$$

trong đó

$$\bar{\mathbf{f}}_{\text{in}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{d}}}, \quad \text{và} \quad \bar{\mathbf{k}}_t = \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{\mathbf{d}}^2} \quad (3.18)$$

tương ứng là véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến địa phương; $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$ là các ma trận chuyển đổi, được xác định từ mối liên hệ giữa các chuyển vị và góc quay trong hệ tọa độ địa phương với các đại lượng trong hệ tổng quát (3.11)

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial \mathbf{d}}, \quad \mathbf{T}_2 = \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \mathbf{d}^2}, \quad \mathbf{T}_3 = -\frac{\partial^2 \theta_r}{\partial \mathbf{d}^2} \quad (3.19)$$

với θ_r xác định bởi phương trình (3.14). Như vậy, với sự trợ giúp của các ma trận chuyển đổi $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$, phương trình (3.17) hoàn toàn xác định véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến phần tử trong hệ tọa độ tổng quát (x, z) qua các đại lượng tương ứng trong hệ tọa độ địa phương.

3.5. Năng lượng biến dạng đàn hồi

Trong phân tích chuyển vị lớn của khung, dầm bằng phương pháp hệ tọa độ đồng hành ta có thể sử dụng biểu thức cung thoải (shallow arch expression) cho biến dạng dọc trục như sau [145]

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{u}_{0,\bar{x}}(\bar{x}) + \frac{1}{2} \bar{w}_{0,\bar{x}}^2(\bar{x}) - \bar{z} \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\bar{x}) - \bar{z} \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\bar{x}) \quad (3.20)$$

với $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\bar{x}) = \bar{u}_{0,\bar{x}}(\bar{x}) + \frac{1}{2} \bar{w}_{0,\bar{x}}^2(\bar{x})$ là biến dạng màng và $\bar{\boldsymbol{\kappa}}(\bar{x}) = \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}}(\bar{x})$ là độ cong của dầm.

3.5.1. Dầm Euler-Bernoulli

Giả sử vật liệu dầm là đàn hồi tuyến tính, khi đó ứng suất và biến dạng dọc trục tuân theo định luật Hook

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{z}) = E_f(\bar{z}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\bar{x}} = E_f(\bar{z}) [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\bar{x}) - \bar{z} \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\bar{x})] \quad (3.21)$$

Từ các phương trình (3.20) và (3.21) ta có thể viết biểu thức cho năng lượng biến dạng đàn hồi của một phần tử dầm với độ dài ban đầu l_0 dưới dạng

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \int_A \bar{\sigma}_{\bar{x}} \bar{\epsilon}_{\bar{x}} dA d\bar{x} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \left[A_{11} \left(\bar{u}_{0,\bar{x}} + \frac{1}{2} \bar{w}_{0,\bar{x}}^2 \right)^2 - 2A_{12} \left(\bar{u}_{0,\bar{x}} + \frac{1}{2} \bar{w}_{0,\bar{x}}^2 \right) \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}} + A_{22} \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}}^2 \right] d\bar{x}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

trong đó A_{11} , A_{12} và A_{22} là các độ cứng của dầm, định nghĩa như sau

$$(A_{11}, A_{12}, A_{22}) = b \int_{-h/2}^{h/2} E(\bar{z}) (1, \bar{z}, \bar{z}^2) d\bar{z} \tag{3.23}$$

3.5.2. Lý thuyết liên tục bậc cao

Các phần tử kết cấu kích thước nhỏ, chiều dày dưới 100 μm , như khung, dầm, tấm micro được sử dụng nhiều trong các hệ vi cơ điện tử (Micro-Electro-Mechanical Systems, viết tắt là MEMS). Các nghiên cứu thực nghiệm trên một số loại vật liệu đã chỉ ra rằng các tính chất cơ học và đáp ứng của phần tử kết cấu kích thước micro bị ảnh hưởng đáng kể bởi hiệu ứng kích thước [151, 152]. Tuy nhiên, các lý thuyết cơ học kết cấu truyền thống không có khả năng mô phỏng ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước tới tính chất vật liệu và ứng xử cơ học của phần tử kết cấu. Để khắc phục cho thiếu sót này, một số lý thuyết liên tục bậc cao (Higher-order Continuum Theories) có chứa các tham số kích thước chiều dài vật liệu (Material length scale parameters, còn gọi là tham số tỷ lệ kích thước) đã được đề xuất. Để nghiên cứu ứng xử cơ học phụ thuộc vào kích thước của kết cấu, lý thuyết cơ học kết cấu truyền thống cần được sử dụng kết hợp với một lý thuyết liên tục bậc cao để xây dựng các phương trình cân bằng hay chuyển động của kết cấu. Một số lý thuyết liên tục bậc cao dùng trong mô phỏng hiệu ứng kích thước của dầm kích thước micro được tóm lược dưới đây.

3.5.2.1. Lý thuyết cặp ứng suất sửa đổi

Lý thuyết cặp ứng suất sửa đổi (Modified Couple Stress Theory - MCST) do Yang và cộng sự đề xuất năm 2002 [51]. Lý thuyết này được xây dựng trên cơ sở trên cơ sở lý thuyết cặp ứng suất (Couple Stress Theory) đề xuất vào những năm 60 của thế kỷ trước bởi Mindlin và Tiersten [49], Toupin [50], Koiter [153]. Lý thuyết cặp ứng suất nguyên bản có hai tham số tỷ lệ kích thước nhưng do có những phức tạp về mặt toán học nên khó áp dụng. MCST chỉ chứa một tham số tỷ lệ kích thước, năng

lượng biến dạng của một vật thể đàn hồi (U) là hàm số của cả biến dạng và độ cong

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} : \boldsymbol{\chi}) dV \quad (3.24)$$

trong đó V là thể tích của vật thể đàn hồi; $\boldsymbol{\sigma}$ và $\boldsymbol{\varepsilon}$ tương ứng là ten-xơ ứng suất và ten-xơ biến dạng; \mathbf{m} là ten-xơ ứng suất lệch và $\boldsymbol{\chi}$ là ten-xơ độ cong đối xứng. Ten-xơ ứng suất lệch \mathbf{m} liên hệ với ten-xơ độ cong $\boldsymbol{\chi}$ thông qua các hệ số đàn hồi và tham số tỷ lệ kích thước như sau

$$\mathbf{m} = \frac{E}{2(1+\nu)} l_m^2 \boldsymbol{\chi} \quad (3.25)$$

trong đó l_m là tham số tỷ lệ có thứ nguyên là μm . Giá trị của tham số l_m phụ thuộc vào loại vật liệu cũng như chiều dày của phần tử kết cấu [154].

3.5.2.2. Lý thuyết gradient biến dạng sửa đổi

Lý thuyết gradient biến dạng sửa đổi (Modified Strain Gradient Theory - MSGT) do Lam và công sự đề xuất năm 2003 [52]. MSGT được xây dựng với ý tưởng tương tự như MCST (cùng một nhóm tác giả). Năng lượng biến dạng của một vật thể đàn hồi trong MSGT ngoài các thành phần có trong MCST còn có sự đóng góp của ten-xơ gradient giãn nở (dilatation gradient) $\boldsymbol{\gamma}$ và ten-xơ gradient kéo lệch (deviatoric stretch gradient) $\boldsymbol{\eta}$. Cụ thể như sau

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{p} : \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta} + \mathbf{m} : \boldsymbol{\chi}) dV \quad (3.26)$$

Các ten-xơ ứng suất \mathbf{p} , $\boldsymbol{\tau}$ và \mathbf{m} cho bởi

$$\mathbf{p} = \frac{E}{2(1+\nu)} l_0^2 \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{E}{2(1+\nu)} l_1^2 \boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{m} = \frac{E}{2(1+\nu)} l_m^2 \boldsymbol{\chi} \quad (3.27)$$

với l_0 , l_1 và l_m là các tham số tỷ lệ tương ứng với các gradient giãn nở, gradient kéo lệch và gradient độ cong. Như vậy, so với MCST, số tham số tỷ lệ kích thước trong MSGT tăng thêm hai. Từ các phương trình (3.24) và (3.27) ta có thể thấy rằng MCST có thể nhận được từ MSGT như là trường hợp riêng khi bỏ qua ảnh hưởng của sự giãn nở và sự căng lệch.

Ngoài các lý thuyết MCST và MSGT, lý thuyết đàn hồi không địa phương (Nonlocal Elastic Theory) do Eringen đề xuất [155, 156] cũng được một số tác giả sử dụng để mô phỏng hiệu ứng kích thước trong kết cấu micro. Do những phức tạp về mặt toán học khi phân tích kết cấu có chuyển vị lớn nên để đơn giản Luận án sử dụng MSCT kết hợp với lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, hai lý thuyết giản đơn nhất, để xây dựng mô hình dầm phi tuyến cho phân tích chuyển vị lớn của khung, dầm FG.

3.5.3. Dầm FG Euler-Bernoulli kích thước micro

Như trình bày trong Mục 3.4, véc-tơ nội lực và ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử dầm trên cơ sở phương pháp hệ tọa độ đồng hành được xây dựng trong hệ tọa độ địa phương và sau đó chuyển về hệ tọa độ tổng quát nhờ các ma trận chuyển đổi. Để xây dựng công thức phần tử trong hệ tọa độ địa phương ta áp dụng MCST cho một phần tử dầm kích thước micro với chiều dài l_o và thiết diện ngang A . Từ phương trình (3.24), ta có thể viết năng lượng biến dạng đàn hồi của phần tử dầm trong hệ tọa độ địa phương như sau

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\mathbf{m}} : \bar{\boldsymbol{\chi}}) dV = \frac{1}{2} \int_0^{l_o} \int_A (\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\mathbf{m}} : \bar{\boldsymbol{\chi}}) dAd\bar{x} \quad (3.28)$$

trong đó $V = l_o \times A$ là thể tích của phần tử dầm; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ và $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ tương ứng là ten-xơ ứng suất và ten-xơ biến dạng; $\bar{\mathbf{m}}$ là ten-xơ ứng suất lệch và $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ là ten-xơ độ cong đối xứng. Biểu diễn của các ten-xơ này có dạng [51]

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \lambda_f \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \mathbf{I} + 2\mu_f \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [\nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T], \\ \bar{\boldsymbol{\chi}} &= \frac{1}{2} [\nabla \bar{\boldsymbol{\beta}} + (\nabla \bar{\boldsymbol{\beta}})^T], \quad \bar{\mathbf{m}} = 2l_m^2 \mu_f \bar{\boldsymbol{\chi}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

trong đó λ_f và μ_f là các hằng số Lámé hiệu dụng (effective Lamé's constants) của vật liệu FG, được định nghĩa như sau

$$\lambda_f = \frac{E_f \nu_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)}, \quad \mu_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} \quad (3.30)$$

với ν_f và E_f tương ứng là hệ số Poisson hiệu dụng và mô-đun Young hiệu dụng được xác định bởi phương trình (3.4); l_m là tham số tỉ lệ chiều dài vật liệu; $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ và $\bar{\mathbf{u}}$ tương ứng là véc-tơ góc quay và véc-tơ chuyển vị

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{2} \text{curl}(\bar{\mathbf{u}}), \quad \bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u} \quad 0 \quad \bar{w}\}^T \quad (3.31)$$

Theo lý thuyết biến dạng trượt Euler-Bernoulli, các thành phần của véc-tơ quay trong phương trình (3.31) có dạng

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \{0 \quad -\bar{w}_{0,\bar{x}} \quad 0\}^T \quad (3.32)$$

Thay biểu thức (3.32) vào biểu diễn của $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ và $\bar{\mathbf{m}}$ trong (3.29), ta được

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\chi}} &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{\chi}_{\bar{x}\bar{y}} & 0 \\ \bar{\chi}_{\bar{x}\bar{y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}}}{2} & 0 \\ -\frac{\bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{m}} &= 2l_m^2 \mu_f \bar{\boldsymbol{\chi}} = 2l_m^2 \mu_f \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}}}{2} & 0 \\ -\frac{\bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.33)$$

Ten-xơ ứng suất và ten-xơ biến dạng của dầm Euler-Bernoulli có dạng đơn giản

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{\bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{\bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (3.34)$$

trong đó $\bar{\sigma}_{\bar{x}}$ được xác định trong phương trình (3.29) với dạng dưới đây

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{z}) &= (\lambda_f + 2\mu_f) \bar{\varepsilon}_{\bar{x}} \\ &= \left[\frac{E_f \nu_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} + \frac{E_f}{(1 + \nu_f)} \right] (\bar{\varepsilon}_0 - \bar{z} \bar{\kappa}(\bar{x}))\end{aligned}\quad (3.35)$$

Điều đáng chú ý là việc kết hợp ảnh hưởng của hệ số Poisson vào ứng suất dọc trục như trong biểu thức (3.35) đã được một số tác giả đề cập, chẳng hạn như Liu và Reddy [157], Zhang và cộng sự [158]. Trong khi đó, một số nghiên cứu, chẳng hạn trong các tài liệu tham khảo [159, 160], các tác giả bỏ qua ảnh hưởng của hệ số Poisson trong quá trình xây dựng các mô hình dầm kích thước micro. Trong trường hợp này, ứng suất dọc trục trong $\bar{\sigma}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{z})$ quay về dạng truyền thống đơn giản như trong phương trình (3.21).

Cả hai biểu thức của ứng suất dọc trục (3.21) và (3.35) sẽ được dùng trong chương này để xây dựng công thức phần tử hữu hạn cho dầm kích thước micro. Ảnh hưởng của hệ số Poisson tới ứng xử phi tuyến hình học của kết cấu khung kích thước micro sẽ được khảo sát chi tiết trong phần phân tích số.

Sử dụng các phương trình (3.33) và (3.34), ta viết lại biểu thức năng lượng biến

dạng đàn hồi (3.28) dưới dạng

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \left[A_{11} \left(\bar{u}_{0,\bar{x}} + \frac{1}{2} \bar{w}_{0,\bar{x}}^2 \right)^2 - 2A_{12} \left(\bar{u}_{0,\bar{x}} + \frac{1}{2} \bar{w}_{0,\bar{x}}^2 \right) \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}} + A_{22} \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}}^2 + A_{33} \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}}^2 \right] dx \quad (3.36)$$

trong đó A_{11} , A_{12} , A_{22} và A_{33} là các độ cứng của dầm

$$(A_{11}, A_{12}, A_{22}) = b \int_{-h/2}^{h/2} \hat{E}_f(\bar{z}) (1, z, z^2) d\bar{z} \quad (3.37)$$

$$A_{33} = b l_m^2 \int_{-h/2}^{h/2} \mu_f(\bar{z}) d\bar{z}$$

với mô-đun đàn hồi Young \hat{E}_f xác định như sau

$$\hat{E}_f = \begin{cases} \lambda_f + 2\mu_f & \text{nếu có tính đến hệ số Poisson} \\ E_f & \text{nếu bỏ qua hệ số Poisson} \end{cases} \quad (3.38)$$

Cần nhấn mạnh rằng, do tính không thuần nhất của vật liệu FGM, độ cứng tương hỗ giữa dọc trục và chống uốn A_{12} không bị triệt tiêu trong mô hình dầm FGM. Hơn nữa, bởi vì ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro, độ cứng chống trượt A_{33} , có chứa tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu l_m , vẫn xuất hiện trong biểu thức năng lượng biến dạng đàn hồi, thậm chí ngay cả khi lý thuyết dầm Euler-Bernoulli được dùng để mô hình hóa khung, dầm kích thước micro.

3.6. Công thức phần tử trong hệ tọa độ địa phương

3.6.1. Nội suy

Các hàm nội suy cho chuyển vị theo phương x , \bar{u}_0 , và chuyển vị theo phương z , \bar{w}_0 , được xây dựng trong mục này trên cơ sở giải phương trình vi phân cân bằng phi tuyến cho một phần tử dầm. Sử dụng nguyên lý dừng cho năng lượng biến dạng (3.36), ta thu được hệ phương trình vi phân cân bằng phi tuyến cho phần tử dưới dạng

$$A_{11} \left(\bar{u}_{0,\bar{x}\bar{x}} + \bar{w}_{0,\bar{x}} \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}} \right) - A_{12} \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = 0, \quad (3.39)$$

$$A_{11} \left(\bar{u}_{0,\bar{x}\bar{x}} \bar{w}_{0,\bar{x}} + \bar{u}_{0,\bar{x}} \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}} + \frac{3}{2} \bar{w}_{0,\bar{x}}^2 \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}} \right) + A_{12} \bar{u}_{0,\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - (A_{22} + A_{33}) \bar{w}_{0,\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = 0$$

Hệ phương trình (3.39) là hệ phương trình vi phân phi tuyến, không thể giải bằng phương pháp giải tích. Để giải phương trình này, chuyển vị theo phương \bar{x} , $\bar{u}_0(\bar{x})$, từ phương trình đầu tiên được biểu diễn thông qua chuyển vị theo phương \bar{z} , $\bar{w}_0(\bar{x})$,

và thay vào phương trình thứ hai. Phương trình thu được được giải dưới dạng chuỗi. Trong biểu thức nghiệm của $\bar{w}_0(\bar{x})$ ta chỉ giữ lại các số hạng có bậc không vượt quá bậc 3. Các tính toán symbolic là công cụ hữu ích cho việc giải phương trình (3.39). Luận án sử dụng code tính toán bằng symbolic Matlab dưới đây để giải phương trình (3.39)

Hình 3.2. Chương trình Matlab giải hệ phương trình vi phân phi tuyến
dầm Euler-Bernoulli.

```
clear
clc
syms lo A11 A12 A22 A33 u2L t1L t2L c1 c2 c3 c4 c5 c6 u0L(x) w0L(x)
assume([lo A11 A12 A22 A33 u2L t1L t2L c1 c2 c3 c4 c5 c6], 'real')
w0Lx=diff(w0L);
w0L2x=diff(w0Lx);
w0L3x=diff(w0L2x);
w0L4x=diff(w0L3x);
u0L2x=(A12*w0L3x-A11*w0Lx*w0L2x)/A11;
u0Lx=int(u0L2x)+c1;
u0L3x=diff(u0L2x);
eqn = A11*(u0L2x*w0Lx+u0Lx*w0L2x+3/2*w0Lx^2*w0L2x)...
      +A12*u0L3x-(A22+A33)*w0L4x == 0;
w0L=dsolve(eqn, 'ExpansionPoint', 0, 'Order', 4, w0L(0)==c3,...
           w0Lx(0)==c4, w0L2x(0)==c5, w0L3x(0)==c6);
w0Lx=diff(w0L);
w0L2x=diff(w0L, 2);
w0L3x=diff(w0L, 3);
u0L=int(int((A12*w0L3x-A11*w0Lx*w0L2x)/A11)+c1)+c2;
eqn=[subs(u0L, x, 0)==0, subs(u0L, x, lo)==u2L, subs(w0L, x, 0)==0,...
     subs(w0L, x, lo)==0, subs(w0Lx, x, 0)==t1L, subs(w0Lx, x, lo)==t2L];
[C1, C2, C3, C4, C5, C6]=solve(eqn, [c1, c2, c3, c4, c5, c6]);
u0L=subs(u0L, [c1, c2, c3, c4, c5, c6], [C1, C2, C3, C4, C5, C6]);
u0L=collect(u0L, [u2L, t1L, t2L])
w0L=subs(w0L, [c1, c2, c3, c4, c5, c6], [C1, C2, C3, C4, C5, C6]);
w0L=collect(w0L, [u2L, t1L, t2L])
```

Với code symbolic Matlab trên ta nhận được dạng nghiệm dưới đây

$$\begin{aligned}\bar{u}_0(\bar{x}) &= -\frac{c_6^2}{40}\bar{x}^5 - \frac{c_5 c_6}{8}\bar{x}^4 - \frac{c_5^2 + c_4 c_6}{6}\bar{x}^3 - \frac{c_4 c_5}{2}\bar{x}^2 + c_2 \bar{x} + c_1 \\ \bar{w}_0(\bar{x}) &= \frac{c_6}{6}\bar{x}^3 + \frac{c_5}{2}\bar{x}^2 + c_4 \bar{x} + c_3\end{aligned}\quad (3.40)$$

Sáu hằng số c_1, c_2, \dots, c_6 trong phương trình trên được xác định từ các điều kiện biên của phần tử

$$\begin{aligned}\bar{u}_0(0) &= 0, \quad \bar{w}_0(0) = 0, \quad \bar{w}_{0,x}(0) = \bar{\theta}_1, \\ \bar{u}_0(l_0) &= \bar{u}_2, \quad \bar{w}_0(l_0) = 0, \quad \bar{w}_{0,x}(l_0) = \bar{\theta}_2\end{aligned}\quad (3.41)$$

Sau khi xác định được các hằng số, ta thu được hàm nội suy cho các chuyển vị theo phương \bar{x} và chuyển vị theo phương \bar{z} trong hệ tọa độ địa phương như sau

$$\begin{aligned}\bar{u}_0(\bar{x}) &= \frac{\bar{x}}{l_0}\bar{u}_2 + \left(\frac{3A_{12}\bar{x}^2}{A_{11}l_0^2} - \frac{3A_{12}\bar{x}}{A_{11}l_0} \right) (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \\ &+ \left(\frac{2\bar{x}^2}{l_0} - \frac{13\bar{x}}{30} - \frac{11\bar{x}^3}{3l_0^2} + \frac{3\bar{x}^4}{l_0^3} - \frac{9\bar{x}^5}{10l_0^4} \right) \bar{\theta}_1^2 \\ &+ \left(\frac{\bar{x}^2}{l_0} - \frac{\bar{x}}{30} - \frac{11\bar{x}^3}{3l_0^2} + \frac{9\bar{x}^4}{2l_0^3} - \frac{9\bar{x}^5}{5l_0^4} \right) \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 \\ &+ \left(\frac{\bar{x}}{15} - \frac{2\bar{x}^3}{3l_0^2} + \frac{3\bar{x}^4}{2l_0^3} - \frac{9\bar{x}^5}{10l_0^4} \right) \bar{\theta}_2^2 \\ \bar{w}_0(\bar{x}) &= \left(\bar{x} - \frac{2\bar{x}^2}{l_0} + \frac{\bar{x}^3}{l_0^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left(-\frac{\bar{x}^2}{l_0} + \frac{\bar{x}^3}{l_0^2} \right) \bar{\theta}_2\end{aligned}\quad (3.42)$$

Các thành phần chuyển vị trong (3.42) được sử dụng để xây dựng véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử dầm trong hệ tọa độ địa phương.

3.6.2. Véc-tơ nội lực và ma trận độ cứng tiếp tuyến địa phương

Với phép nội suy (3.42), ta có thể biểu diễn năng lượng biến dạng đàn hồi (3.36) theo trường chuyển vị trong hệ tọa độ địa phương. Véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử dầm trong hệ tọa độ địa phương, như đã đề cập ở trên, thu được bằng cách đạo hàm một lần và hai lần biểu thức năng lượng biến dạng đàn hồi (3.17). Dạng hiển của các véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến này dễ dàng nhận được bằng code symbolic Matlab dưới đây

Hình 3.3. Chương trình Matlab xác định véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử dầm trong hệ tọa độ địa phương.

```

clear
clc
syms x lo u2L t1L t2L A11 A12 A22 A33
assume([x lo u2L t1L t2L A11 A12 A22 A33], 'real')

% below local axial and transverse displacements
% u2L: local axial disp. at node 2
% t1L, t2L: local rotations at nodes 1 and 2
u0L=(x/lo)*u2L +(3*A12*x^2/(A11*lo^2)-3*A12*x/(A11*lo))*(t1L+t2L) ...
    +(2*x^2/lo-13*x/30-11*x^3/(3*lo^2)+3*x^4/lo^3 ...
    -9*x^5/(10*lo^4))*t1L^2 +(x^2/lo-x/30-11*x^3/(3*lo^2) ...
    +9*x^4/(2*lo^3)-9*x^5/(5*lo^4))*t1L*t2L+(x/15-2*x^3/(3*lo^2)...
    +3*x^4/(2*lo^3)-9*x^5/(10*lo^4))*t2L^2;
w0L=(x-2*x^2/lo+x^3/lo^2)*t1L+(x^3/lo^2-x^2/lo)*t2L;

% below derivatives of displacements
u0Lx=diff(u0L,x);
w0Lx=diff(w0L,x);
w0Lxx=diff(w0Lx,x);

% below strain energy
U=1/2*int((A11*(u0Lx+0.5*w0Lx^2)^2-2*A12*(u0Lx+0.5*w0Lx^2)*w0Lxx ...
    +(A22+A33)*w0Lxx^2),x,0,lo);

% below local force vector finL
% and tangent stiffness matrix ktL
finL=gradient(U, [u2L,t1L,t2L])
ktL=hessian(U, [u2L,t1L,t2L])

```

Với code symbolic Matlab trên ta nhận được ba thành phần của véc-tơ lực nút $\bar{\mathbf{f}}_{in}$ như sau

$$\begin{aligned}
\bar{N}_2 &= \frac{\partial U}{\partial \bar{u}_2} = \frac{A_{11}(\bar{\theta}_1^2 + \bar{\theta}_2^2)}{15} - \frac{A_{11}\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2}{30} + \frac{A_{12}(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)}{l_0} + \frac{A_{11}\bar{u}_2}{l_0}, \\
\bar{M}_1 &= \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{A_{12}\bar{\theta}_1^2}{5} + \frac{A_{12}\bar{\theta}_2^2}{10} - \frac{A_{12}\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2}{5} + \frac{2A_{11}\bar{\theta}_1\bar{u}_2}{15} - \frac{A_{11}\bar{\theta}_2\bar{u}_2}{30} + \frac{2A_{11}l_0\bar{\theta}_1^3}{225} \\
&\quad - \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_2^3}{450} + \frac{4A_{22}\bar{\theta}_1}{l_0} + \frac{2A_{22}\bar{\theta}_2}{l_0} + \frac{4A_{33}\bar{\theta}_1}{l_0} + \frac{2A_{33}\bar{\theta}_2}{l_0} + \frac{A_{12}\bar{u}_2}{l_0} \\
&\quad + \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2^2}{100} - \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_1^2\bar{\theta}_2}{150} - \frac{3A_{12}^2\bar{\theta}_1}{A_{11}l_0} - \frac{3A_{12}^2\bar{\theta}_2}{A_{11}l_0}, \\
\bar{M}_2 &= \frac{\partial U}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{A_{12}\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2}{5} - \frac{A_{12}\bar{\theta}_2^2}{5} - \frac{A_{12}\bar{\theta}_1^2}{10} - \frac{A_{11}\bar{\theta}_1\bar{u}_2}{30} + \frac{2A_{11}\bar{\theta}_2\bar{u}_2}{15} - \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_1^3}{450} \\
&\quad + \frac{2A_{11}l_0\bar{\theta}_2^3}{225} + \frac{2A_{22}\bar{\theta}_1}{l_0} + \frac{4A_{22}\bar{\theta}_2}{l_0} + \frac{2A_{33}\bar{\theta}_1}{l_0} + \frac{4A_{33}\bar{\theta}_2}{l_0} - \frac{A_{12}\bar{u}_2}{l_0} \\
&\quad - \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2^2}{150} + \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_1^2\bar{\theta}_2}{100} - \frac{3A_{12}^2\bar{\theta}_1}{A_{11}l_0} - \frac{3A_{12}^2\bar{\theta}_2}{A_{11}l_0}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Ma trận độ cứng tiếp tuyến trong hệ tọa độ địa phương $\bar{\mathbf{k}}_t$ có thể viết dưới dạng

$$\bar{\mathbf{k}}_t = \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{\mathbf{d}}^2} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{\bar{u}_2\bar{u}_2} & \bar{k}_{\bar{u}_2\bar{\theta}_1} & \bar{k}_{\bar{u}_2\bar{\theta}_2} \\ \bar{k}_{\bar{u}_2\bar{\theta}_1} & \bar{k}_{\bar{\theta}_1\bar{\theta}_1} & \bar{k}_{\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2} \\ \bar{k}_{\bar{u}_2\bar{\theta}_2} & \bar{k}_{\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2} & \bar{k}_{\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{\bar{u}_2\bar{u}_2} &= \frac{A_{11}}{l_0}, \quad \bar{k}_{\bar{u}_2\bar{\theta}_1} = \frac{2A_{11}\bar{\theta}_1}{15} - \frac{A_{11}\bar{\theta}_2}{30} + \frac{A_{12}}{l_0}, \\
\bar{k}_{\bar{u}_2\bar{\theta}_2} &= \frac{2A_{11}\bar{\theta}_2}{15} - \frac{A_{11}\bar{\theta}_1}{30} - \frac{A_{12}}{l_0}, \\
\bar{k}_{\bar{\theta}_1\bar{\theta}_1} &= \frac{2A_{11}l_0\bar{\theta}_1^2}{75} - \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2}{75} + \frac{2A_{12}\bar{\theta}_1}{5} + \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_2^2}{100} \\
&\quad - \frac{A_{12}\bar{\theta}_2}{5} + \frac{2A_{11}\bar{u}_2}{15} + \frac{4A_{22}}{l_0} + \frac{4A_{33}}{l_0} - \frac{3A_{12}^2}{A_{11}l_0}, \\
\bar{k}_{\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2} &= \frac{A_{12}\bar{\theta}_2}{5} - \frac{A_{12}\bar{\theta}_1}{5} - \frac{A_{11}\bar{u}_2}{30} + \frac{2A_{22}}{l_0} + \frac{2A_{33}}{l_0} - \frac{3A_{12}^2}{A_{11}l_0} \\
&\quad - \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_1^2}{150} - \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_2^2}{150} + \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2}{50}, \\
\bar{k}_{\bar{\theta}_2\bar{\theta}_2} &= \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_1^2}{100} - \frac{A_{11}l_0\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2}{75} + \frac{A_{12}\bar{\theta}_1}{5} + \frac{2A_{11}l_0\bar{\theta}_2^2}{75} \\
&\quad - \frac{2A_{12}\bar{\theta}_2}{5} + \frac{2A_{11}\bar{u}_2}{15} + \frac{4A_{22}}{l_0} + \frac{4A_{33}}{l_0} - \frac{3A_{12}^2}{A_{11}l_0}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Với các véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến trong hệ tọa độ địa phương, các phương trình (3.17) và (3.19) hoàn toàn xác định được véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến trong hệ tọa độ tổng quát cho dầm Euler-Bernoulli kích thước micro. Véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng tiếp tuyến cho phần tử dầm Euler-Bernoulli thông thường nhận được bằng cách loại bỏ các số hạng có chứa A_{33} trong biểu thức của véc-tơ lực nút và ma trận độ cứng phần tử micro.

3.7. Phương trình cân bằng và thuật toán số

Phương trình cân bằng (2.44), Mục 2.6, vẫn sử dụng cho phân tích chuyển vị lớn của khung, dầm FGM trong chương này. Tuy nhiên ứng xử phi tuyến của khung phức tạp hơn nhiều so với ứng xử của dầm. Đặc biệt, trong một số trường hợp khung có ứng xử ‘snap-through’ hay ‘snap-back’, trong đó ma trận độ cứng tiếp tuyến của khung không còn xác định dương, thậm chí xác định âm. Trong trường hợp này ta không thể giải trực tiếp phương trình (2.44) để nhận được gia số chuyển vị cho quá trình lặp.

Crisfield [161] đề xuất phương pháp độ dài cung để khắc phục khó khăn này. Ý tưởng của phương pháp là việc đưa vào phương trình ràng buộc dưới dạng ‘cung tròn’ và thay cho việc giải trực tiếp phương trình (2.44) bằng cách tìm giao điểm của đường cân bằng với đường cong của phương trình ràng buộc. Dạng cụ thể của phương trình dạng buộc như sau

$$a = \Delta \mathbf{p}^T \Delta \mathbf{p} + \Delta \lambda^2 \beta^2 \mathbf{f}_{ef}^T \mathbf{f}_{ef} - \Delta l^2 = 0 \quad (3.46)$$

trong đó Δl là bán kính của cung tròn; β là tham số tỷ lệ; $\Delta \mathbf{p}$ và $\Delta \lambda$ là các gia số chuyển vị và gia số tham số tải trọng. Trong phương pháp độ dài cung, tham số tải trọng λ không còn là giá trị cho trước mà trở thành một biến số cần tính. Như vậy, cùng với m bậc tự do cần tìm là các chuyển vị và góc quay tại các nút, chúng ta có tổng số $(m+1)$ ẩn cần tìm. Chúng ta có thể tìm $(m+1)$ ẩn này bằng cách áp dụng phương pháp Newton-Raphson với các phương trình (2.44) và (3.46). Cụ thể, khai triển Taylor bậc nhất tại điểm cân bằng của các phương trình (2.44) và (3.46) có dạng

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_n &= \mathbf{g}_o + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} \delta \lambda = \mathbf{g}_o + \mathbf{K}_t \delta \mathbf{p} - \mathbf{f}_{ef} \delta \lambda = 0 \\ a_n &= a_o + 2\Delta \mathbf{p}^T \delta \mathbf{p} + 2\Delta \lambda \delta \lambda \beta^2 \mathbf{f}_{ef}^T \mathbf{f}_{ef} = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

trong đó \mathbf{K}_t là ma trận độ cứng của toàn kết cấu. Các chỉ số dưới ‘ n ’ và ‘ o ’ trong phương trình (3.47) đại diện tương ứng cho ‘mới’ (new) và ‘cũ’ (old). Phương trình

(3.47) cho phép tìm các chuyển vị lặp $\delta \mathbf{p}$ và tham số tải trọng lặp $\delta \lambda$ dưới dạng

$$\begin{Bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & -\mathbf{f}_{ef} \\ 2\Delta \mathbf{p} & 2\Delta \lambda \beta^2 \mathbf{f}_{ef}^T \mathbf{f}_{ef} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.48)$$

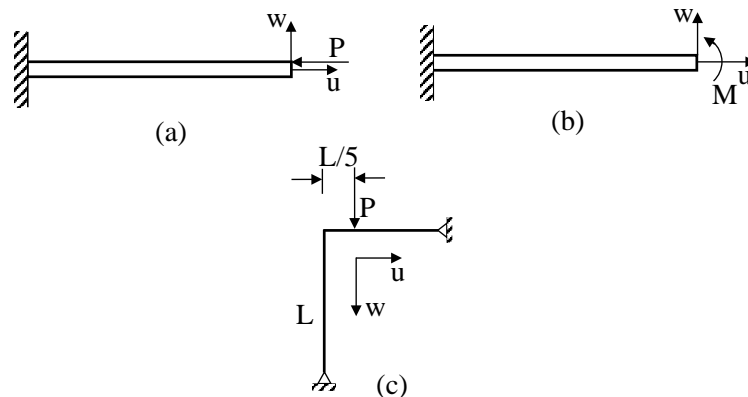
Như ta thấy từ phương trình (3.48), định thức Jacobi của ma trận độ cứng trong vế phải của (3.48) không suy biến ngay cả khi ma trận độ cứng tiếp tuyến \mathbf{K}_t không xác định dương. Một số dạng biến thể của phương pháp độ dài cung đã được đề xuất. Luận án này sử dụng phương pháp độ dài cung hình cầu, trong đó tham số tỷ lệ $\beta = 1$. Với $\beta = 1$, phương trình ràng buộc (3.46) xác định một mặt cầu, và vì thế thay cho việc giải phương trình cân bằng (2.44) ta tìm giao của hình cầu (3.46) với đường cân bằng. Chi tiết của phương pháp độ dài cung hình cầu được trình bày trong [145, 161].

3.8. Kết quả số và thảo luận

Sử dụng hệ phương trình cân bằng (2.44) trong Mục 2.6 cho bài toán phân tích ứng xử phi tuyến của kết cấu khung, dầm FGM, mục này tiến hành các nghiên cứu số nhằm khẳng định tính đúng đắn của công thức phần tử xây dựng được và chỉ ra ảnh hưởng của các tham số vật liệu, hình học tới ứng xử chuyển vị lớn của khung, dầm FGM và khung, dầm FGM kích thước micro.

3.8.1. Khung, dầm FGM kích thước macro

Mục này trình bày kết quả số trong phân tích chuyển vị lớn của một số khung dầm, FGM kích thước macro. Phân tích số được thực hiện trên cơ sở sử dụng phần tử dầm xây dựng trong chương với việc bỏ qua các hệ số có chứa tham số kích thước l_m và quan hệ ứng suất biến dạng tuân theo phương trình (3.21). Mô-đun đàn hồi hiệu dụng E_f cho khung, dầm FGM kích thước macro trong mục này được tính theo mô hình Voigt, công thức (3.3). Các mô hình khung, dầm FGM kích thước macro dùng trong các nghiên cứu số ở đây được minh họa trên Hình 3.4.



Hình 3.4. Mô hình khung, dầm công-xôn FGM kích thước macro:

(a) Dầm chịu lực dọc trục, (b) Dầm chịu mô-men uốn, (c) Khung không đối xứng.

3.8.1.1. Dầm công-xôn FGM chịu uốn bởi mô-men uốn

Xét dầm công-xôn kích thước $L = 5\text{m}$, $(b \times h) = (0.15 \times 0.1)\text{m}$, chịu uốn bởi mô-men M tại đầu tự do của dầm (Hình 3.4(b)). Giả định rằng dầm được tạo bởi hai vật liệu là Silicon Nitride (Si_3Ni_4) và Aluminum (Al) (viết tắt là dầm $\text{Si}_3\text{Ni}_4/\text{Al}$). Mô-đun đàn hồi và hệ số Poisson của Si_3Ni_4 tương ứng là 322.3 GPa và 0.24 [162]. Các giá trị tương ứng của Al là 70 GPa và 0.3 [146]. Chuyển vị theo phương x và chuyển vị theo phương z , $u_0(L)$ và $w_0(L)$, thu được bởi Kang và Li [147] bằng phương pháp giải tích dựa trên lý thuyết dầm Bernoulli có dạng

$$u_0(L) = \frac{A_{22}}{M} \sin\left(\frac{M}{A_{22}}L\right) - L, \quad w_0(L) = \frac{A_{22}}{M} \left[1 - \cos\left(\frac{M}{A_{22}}L\right)\right] \quad (3.49)$$

trong đó A_{22} là độ cứng chống uốn xác định bằng công thức (3.23) với mô-đun đàn hồi tính theo (3.3). Với các giá trị cho trước của vật liệu và kích thước hình học, phương trình (3.23) với mô-đun đàn hồi E tính theo mô hình Voigt cho giá trị độ cứng chống uốn hiệu dụng $A_{22} = 3.0757 \times 10^6$, 2.1138×10^6 , 1.4741×10^6 và $1.3451 \times 10^6 \text{ Nm}^2$ ứng với $n = 0.3, 1.0, 5.0$ và 10 .

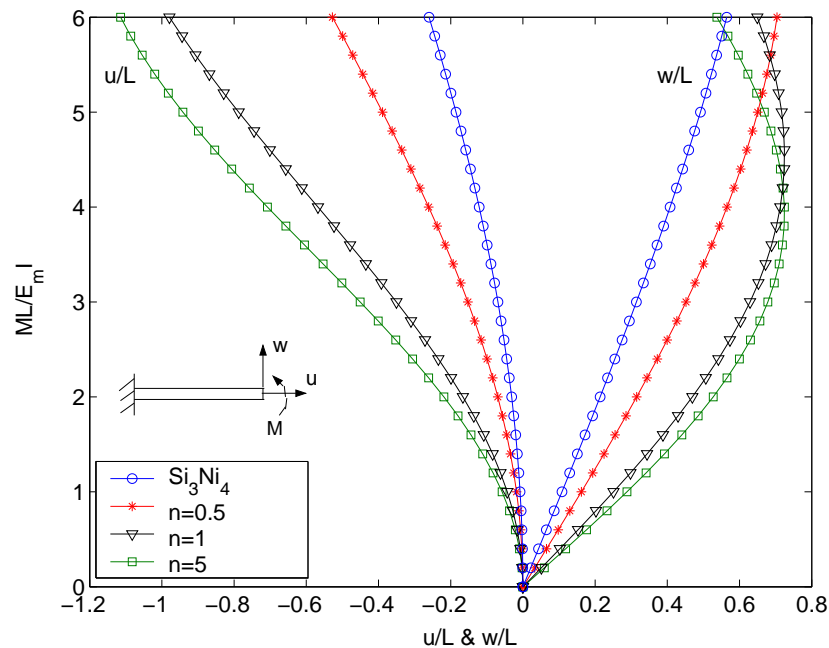
Bảng 3.1 liệt kê các chuyển vị chuẩn hóa theo phương x và theo phương z của dầm $\text{Si}_3\text{Ni}_4/\text{Al}$ chịu mô-men $M = 5E_m I/L$ (với E_m là mô-đun Young của Al) với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu n . Để so sánh, các giá trị tương ứng của chuyển vị tính bởi biểu thức (3.49) cũng được liệt kê trong Bảng 3.1. Có thể thấy rằng, kết quả sử dụng công thức phần tử trong nghiên cứu này hội tụ rất nhanh, cả chuyển vị theo phương trục x và trục z , hội tụ tới kết quả của nghiệm giải tích chỉ với 6 phần tử, không phụ thuộc giá trị của tham số vật liệu n . Do phần tử dầm được nghiên cứu

Bảng 3.1. Sự hội tụ của phần tử dầm trong đánh giá chuyển vị lớn của dầm công-xôn $\text{Si}_3\text{Ni}_4/\text{Al}$ mô-men $M = 5E_m I/L$ (nELE số phần tử)

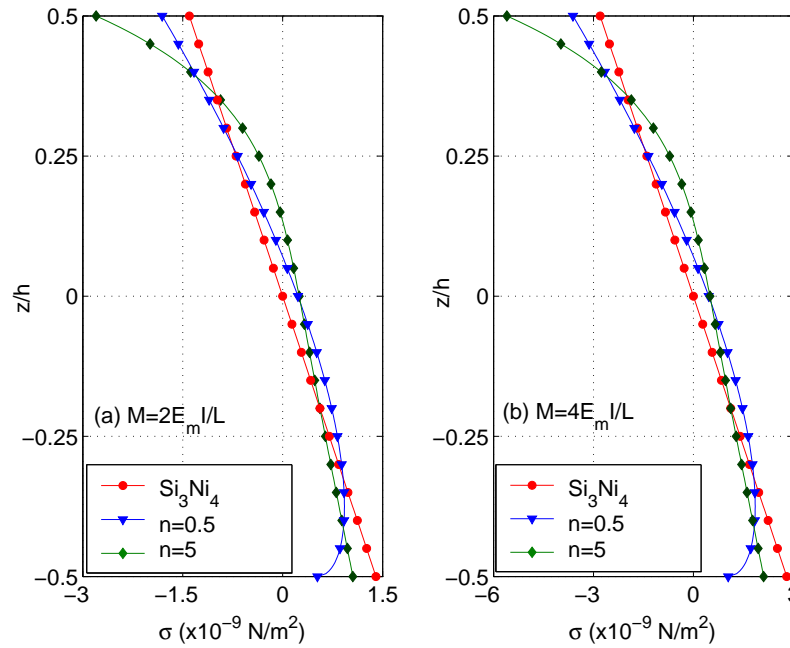
Đáp ứng	n	nELE				
		1	2	4	6	PT (3.49)
$\frac{ u_0(L) }{L}$	0.3	0.3063	0.3048	0.3047	0.3047	0.3047
	1	0.5805	0.5760	0.5758	0.5757	0.5757
	5	0.9451	0.9419	0.9418	0.9417	0.9418
	10	1.0310	1.0339	1.0340	1.0340	1.0340
$\frac{w_0(L)}{L}$	0.3	0.5978	0.5990	0.5991	0.5991	0.5991
	1	0.7063	0.7139	0.7143	0.7143	0.7143
	5	0.6306	0.6670	0.6687	0.6688	0.6688
	10	0.5583	0.6106	0.6129	0.6130	0.6130

trong bài toán này sử dụng các hàm nội suy chính xác, nên nó có khả năng xác định chuyển vị chính xác tại các điểm nút [163]. Lưu ý rằng, mô hình dầm xét đến trong cả nghiên cứu này và Tài liệu [147] được tính toán với tỷ số độ mảnh cao, $L/h = 50$.

Trong Hình 3.5, các đường cong mô-men-chuyển vị của dầm công-xôn $\text{Si}_3\text{Ni}_4/\text{Al}$ được mô tả với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu n . Khả năng chịu tải của dầm, như thấy trong hình, yếu hơn đối với dầm có tham số vật liệu n cao hơn, bất kể tải trọng được áp dụng. Điều này là do thực tế là, như thấy trong phương trình (3.1), dầm có tham số vật liệu n cao hơn chứa nhiều nhôm hơn. Do mô-đun đàn hồi của nhôm thấp hơn nhiều so với silicon nitric, các hệ số độ cứng của dầm nhỏ hơn khi tham số vật liệu n của dầm lớn hơn. Kết quả là chuyển vị của dầm ứng với giá trị n cao hơn sẽ lớn hơn. Ảnh hưởng của tính không đồng nhất của vật liệu lên đáp ứng của dầm cũng có thể được thấy từ sự phân bố ứng suất dọc trục theo chiều dày dầm tại đầu ngàm như minh họa trên Hình 3.6 đối với hai giá trị mô-men, $M = 2E_m I/L$ và $M = 4E_m I/L$. Hình 3.6 cho thấy ứng suất dọc trục nén và kéo cực đại của dầm tăng khi tăng tham số vật liệu n , và điều này không phụ thuộc giá trị của mô-men tác dụng. Hơn nữa, sự phân bố ứng suất dọc trục trong dầm FGM rất khác so với trong dầm thuần nhất. Chẳng hạn, như thấy rõ từ Hình 3.6, trong khi ứng suất dọc trục là tuyến tính và đối xứng qua tâm mặt giữa đối với dầm làm hoàn toàn từ gốm (thuần nhất), nhưng nó không còn tuyến tính và đối xứng đối với dầm FGM. Ngoài ra, ứng suất dọc trục nén và kéo cực đại trong dầm FGM không phải lúc nào cũng xảy ra ở bề mặt ngoài cùng như trong trường hợp dầm thuần nhất.



Hình 3.5. Đường cong mô-men-chuyển vị lớn của dầm công-xôn $\text{Si}_3\text{Ni}_4/\text{Al}$ với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu n .

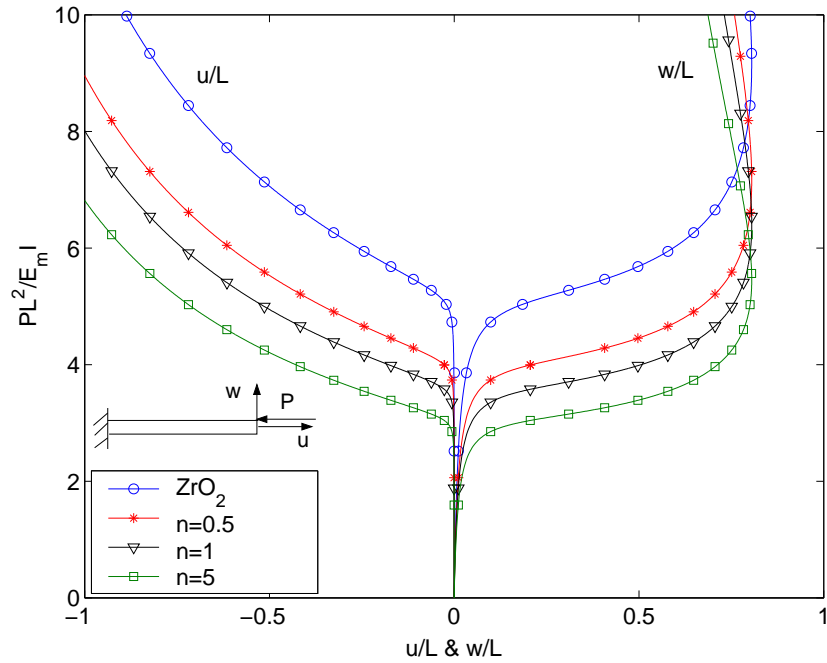


Hình 3.6. Phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tại đầu ngàm của dầm công-xôn $\text{Si}_3\text{Ni}_4/\text{Al}$ chịu tác dụng của mô-men.

3.8.1.2. Dầm công-xôn FGM chịu lực dọc trục

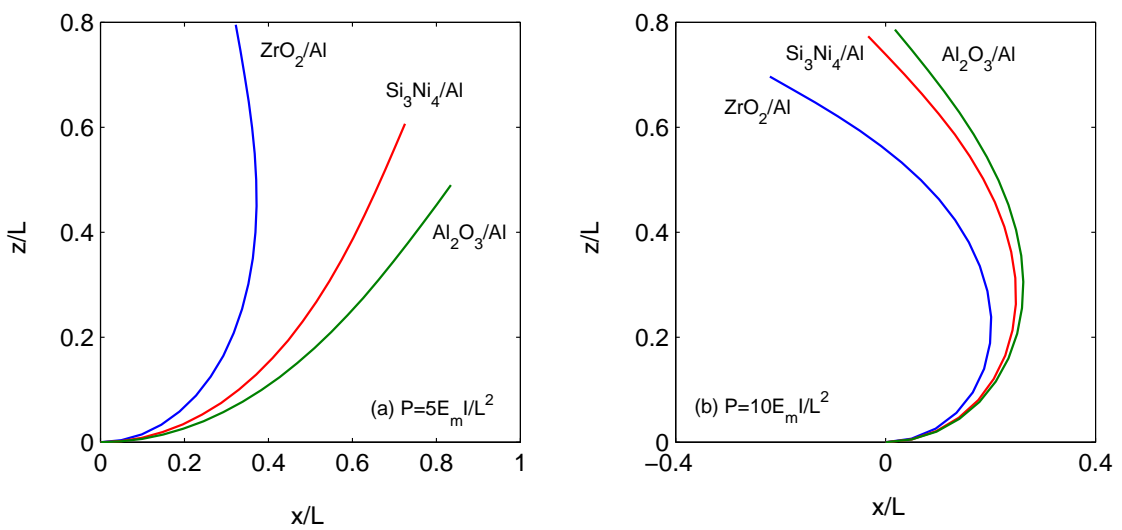
Mất ổn định của dầm chịu tải trọng dọc trục là bài toán quan trọng trong cơ học. Mục này nghiên cứu ứng xử sau mất ổn định của dầm công-xôn FGM chịu lực dọc trục P tại đầu tự do. Dầm xem xét trong mục này có kích thước hình học như dầm trong Mục 3.8.1.1, minh họa trên Hình 3.4(a). Đường cong tải-chuyển vị của dầm công-xôn thuần nhất, đẳng hướng do Wood và Zienkiewicz tính toán bằng cách sử dụng các phần tử đẳng tham số tuyến tính [164] cho thấy ứng xử ‘snap-back’ trong vùng biến dạng lớn và do đó phương pháp độ dài cung cần được sử dụng để thu nhận các đường cân bằng của dầm. Để thấy được ảnh hưởng của vật liệu thành phần tới ứng xử sau tới hạn của dầm FGM, ngoài dầm $\text{Si}_3\text{Ni}_4/\text{Al}$ nghiên cứu ở trên, một dầm được tạo thành từ Zirconia (ZrO_2) và Nhôm (gọi là dầm ZrO_2/Al) và một dầm khác được tạo thành từ Alumina (Al_2O_3) và Aluminum (gọi là $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Al}$) cũng được phân tích dưới đây. Mô-đun Young và hệ số Poisson của Zirconia lần lượt là 151 GPa và 0.3, trong khi các giá trị tương ứng của Alumina lần lượt là 380 GPa và 0.3 [146].

Hình 3.7 minh họa các đường cong tải-chuyển vị của dầm công-xôn ZrO_2/Al với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu n . Ảnh hưởng của tham số vật liệu n đối với ứng xử sau tới hạn của dầm FGM được thấy rõ từ hình, cụ thể độ bền sau tới hạn của dầm giảm rõ nét khi dầm có tham số vật liệu n cao hơn. Kết quả này, như giải thích trong chương trước và như thấy từ phương trình (3.1), dầm sẽ giàu kim loại hơn khi tham số n lớn hơn và như vậy độ cứng của dầm sẽ nhỏ hơn.



Hình 3.7. Đường cong tải-chuyển vị của dầm công-xôn ZrO_2/Al với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu n .

Ảnh hưởng của vật liệu thành phần tới ứng xử của dầm công-xôn FGM chịu lực dọc trục được minh họa trên Hình 3.8, trong đó cấu hình biến dạng của dầm ứng với giá trị của tham số vật liệu $n = 3$ được minh họa cho hai giá trị của lực dọc trục là $P = 5E_m I/L^2$ và $P = 10E_m I/L^2$. Hình 3.8 cho thấy vật liệu thành phần đóng vai trò quan trọng tới ứng xử của dầm, trong đó với cùng một giá trị của tải tác dụng thì dầm được tạo từ các vật liệu thành phần với mô-đun đàn hồi thấp hơn sẽ bị biến dạng đáng kể hơn.

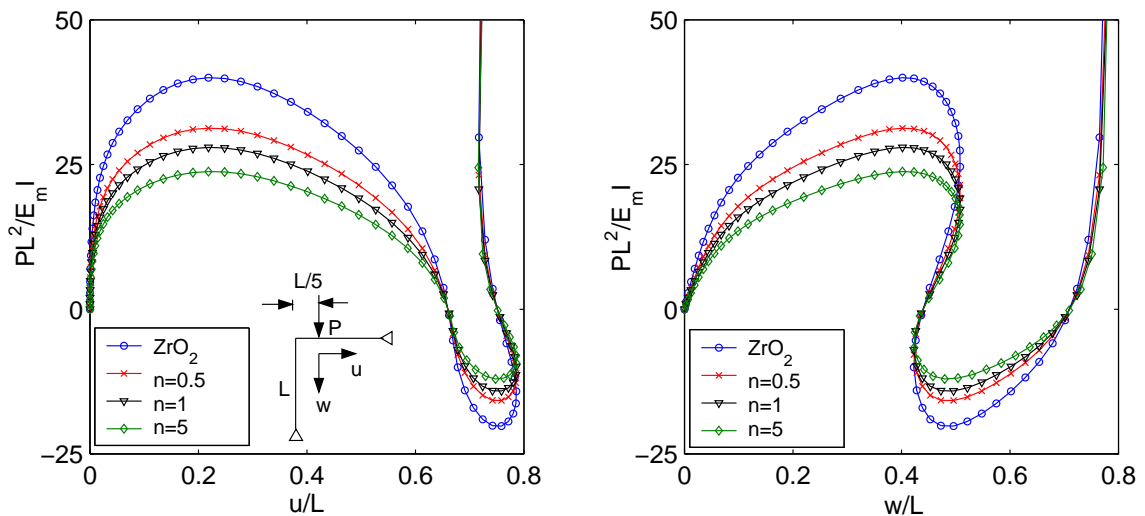


Hình 3.8. Cấu hình biến dạng của dầm công-xôn FGM được tạo thành bởi các cặp vật liệu khác nhau chịu tác dụng của lực dọc trục ($n = 3$).

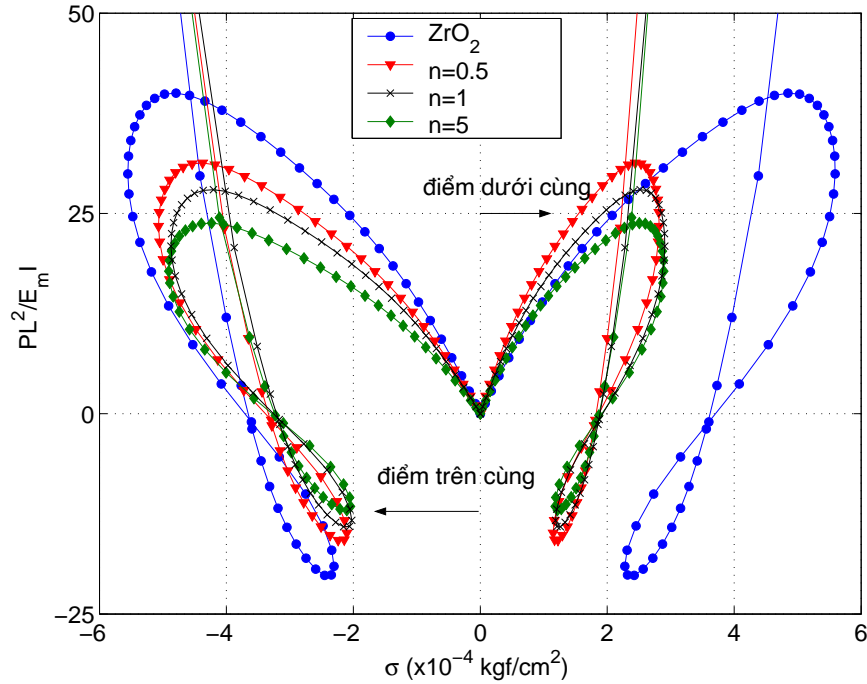
3.8.1.3. Khung không đối xứng

Mục này nghiên cứu chuyển vị lớn của khung không đối xứng chịu tác dụng của lực P có chiều hướng xuống như minh họa trên Hình 3.4(c). Ứng xử của khung đẳng hướng được nghiên cứu bởi một số tác giả, chẳng hạn [41, 165], cho thấy khung có ứng xử ‘snap-through’ và ‘snap-back’. Bài toán này thường được các tác giả sử dụng để kiểm tra khả năng của phần tử dầm và thuật toán số trong phân tích kết cấu có chuyển vị lớn có ứng xử phức tạp. Các tham số hình học cho khung như sau: $L = 120$ cm, $b = 3$ cm và $h = 2$ cm.

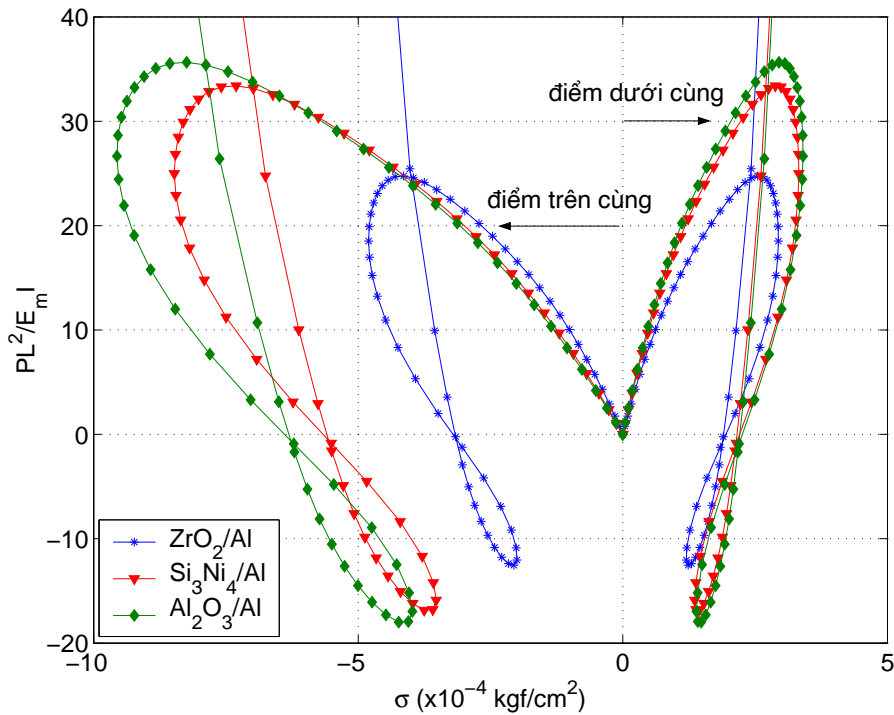
Đường cong tải-chuyển vị của khung làm từ Zirconia và Nhôm được minh họa trên Hình 3.9 với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu n . Trong hình, các chuyển vị theo phương x và phương z được tính toán tại điểm chịu tải với lưới mười phần tử, năm phần tử cho mỗi dầm. Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu đến ứng xử của khung được thấy rõ từ Hình 3.9, trong đó tải trọng giới hạn của khung giảm dần khi tăng tham số vật liệu n . Hình 3.10 và Hình 3.11 minh họa mối liên hệ giữa ứng suất dọc trục tại các điểm trên cùng và dưới cùng của thiết diện chịu tải với tải trọng P ứng với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu n và các vật liệu thành phần khác nhau. Như thấy từ Hình 3.10, trong khi ứng suất dọc trục của khung đẳng hướng đối xứng với mặt phẳng giữa, biên độ của ứng suất nén của khung FGM cao hơn đáng kể so với ứng suất kéo, bất kể giá trị của lực tác dụng. Các vật liệu thành phần, như thấy từ Hình 3.11, có vai trò quan trọng tới giá trị của ứng suất dọc trục của khung FGM. Giá trị của ứng suất dọc trục cao hơn đáng kể khi vật liệu thành phần có mô-đun đàn hồi lớn hơn.



Hình 3.9. Đường cong tải-chuyển vị của khung không đối xứng ZrO_2/Al .



Hình 3.10. Ứng suất dọc trục tại các điểm trên cùng và dưới cùng của phần chịu tải trong khung không đối xứng ZrO_2/Al .



Hình 3.11. Ứng suất dọc trục tại các điểm trên cùng và dưới cùng của phần chịu tải trong khung không đối xứng với các cặp vật liệu khác nhau.

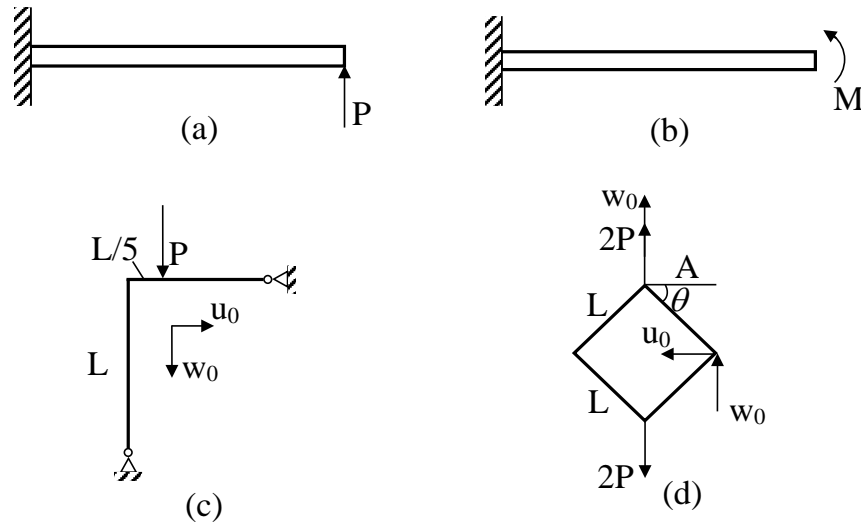
3.8.2. Khung, dầm FGM kích thước micro

Ứng xử chuyển vị lớn của khung, dầm FGM kích thước micro được nghiên cứu số trong mục này. Bên cạnh ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu, hiệu ứng kích thước và hệ số Poisson tối ứng xử của khung, dầm FGM micro cũng được quan tâm nghiên

cứ. Với mục đích này, khung, dầm FGM micro được giả định được làm từ hai vật liệu thành phần là Nhôm (Al) và Zirconia (ZrO_2). Tham số vật liệu của Nhôm và Zirconia dùng trong phân tích như sau [166]: $E_m = 70$ GPa (Al), $E_c = 151$ GPa (ZrO_2). Hệ số Poisson $\nu = 0.3$ được sử dụng cho cả hai vật liệu cấu thành. Để thuận tiện, các tham số không thứ nguyên cho chuyển vị, tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu cũng như tải trọng được đưa vào như sau

$$u^* = \frac{u_0}{L}, w^* = \frac{w_0}{L}, \eta = \frac{l_m}{h}, M^* = \frac{ML}{E_c I}, P^* = \frac{PL^2}{E_c I} \quad (3.50)$$

trong đó u_0 và w_0 là các chuyển vị theo phương x và chuyển vị theo phương z tại vị trí được nêu cho mỗi bài toán cụ thể. Các tính chất hiệu dụng của khung, dầm micro sử dụng trong mục này được tính theo mô hình Mori-Tanaka trong Mục 3.1. Các mô hình khung, dầm FGM kích thước micro dùng trong các nghiên cứu số ở mục này được minh họa trên Hình 3.12.



Hình 3.12. Mô hình khung, dầm công-xôn FGM kích thước macro:

- (a) Dầm chịu tải trọng ngang, (b) Dầm chịu mô-men uốn, (c) Khung không đối xứng, (d) Khung hình vuông chịu kéo.

3.8.2.1. Sự hội tụ của phần tử

Vì chưa có kết quả nghiên cứu nào về đáp ứng chuyển vị lớn của khung, dầm kích thước micro, nên tính chính xác của phần tử được kiểm chứng cho dầm FGM kích thước macro, và điều này đã được thực hiện trong Mục 3.8.1.1. Mục này, vì thế sẽ chỉ trình bày sự hội tụ của phần tử trong tính toán chuyển vị lớn của dầm FGM kích thước micro.

Bảng 3.2 minh họa sự hội tụ của phần tử dầm xây dựng trong chương cho tính toán đáp ứng chuyển vị lớn của dầm FGM kích thước micro chịu tải trọng ngang

Bảng 3.2. Sự hội tụ của phần tử dầm trong tính toán đáp ứng chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGM kích thước micro chịu tải trọng ngang $P^* = 10$

η	n	Đáp ứng	Số phần tử					
			1	2	3	4	5	6
0.2	0.5	$ u^* $	0.5039	0.5222	0.5242	0.5246	0.5247	0.5247
		w^*	0.7726	0.7963	0.7993	0.7999	0.8000	0.8000
	1	u^*	0.5250	0.5449	0.5471	0.5475	0.5476	0.5476
		w^*	0.7831	0.8086	0.8118	0.8124	0.8125	0.8125
	5	u^*	0.5558	0.5787	0.5816	0.5821	0.5823	0.5823
		w^*	0.7958	0.8239	0.8278	0.8287	0.8289	0.8289
0.4	0.5	u^*	0.3650	0.3742	0.3750	0.3751	0.3752	0.3752
		w^*	0.6939	0.7081	0.7095	0.7097	0.7097	0.7097
	1	$ u^* $	0.3922	0.4028	0.4037	0.4038	0.4038	0.4038
		w^*	0.7129	0.7287	0.7302	0.7304	0.7305	0.7305
	5	$ u^* $	0.4405	0.4543	0.4556	0.4559	0.4559	0.4559
		w^*	0.7412	0.7602	0.7623	0.7627	0.7628	0.7628

$P^* = 10$ với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu và tham số tỷ lệ không thứ nguyên. Các chuyển vị không thứ nguyên trong bảng được định nghĩa theo phương trình (3.50) với u_0 và w_0 là các chuyển vị tại đầu tự do của dầm. Như có thể thấy từ Bảng 3.2, sự hội tụ của công thức phần tử là rất nhanh và sự hội tụ có thể đạt được với lưới năm phần tử, bất kể giá trị của tham số vật liệu n và tham số tỷ lệ kích thước η . Cần lưu ý rằng sự hội tụ phụ thuộc vào cấu hình cụ thể của kết cấu cũng như tải trọng tác động, vì thế sự hội tụ cần được kiểm tra cho từng bài toán cụ thể.

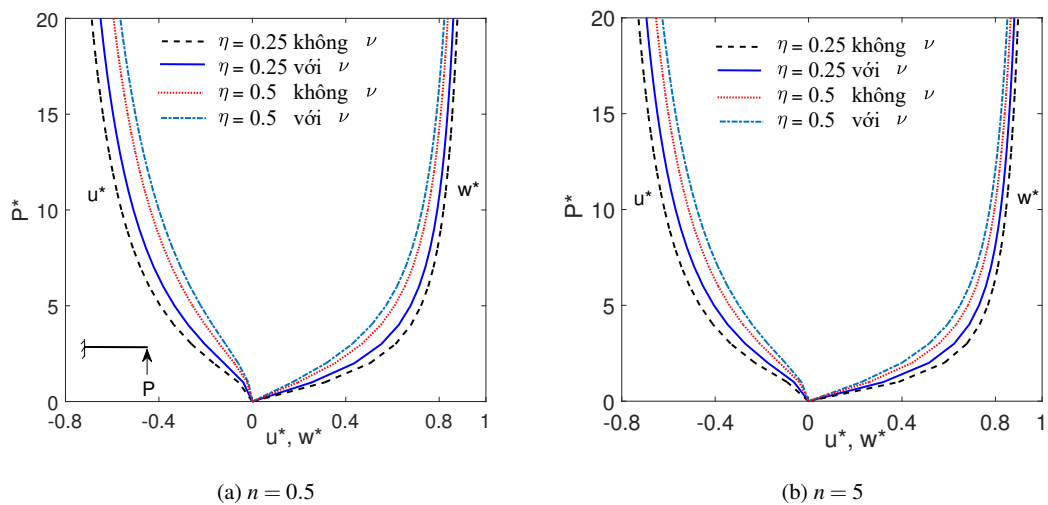
3.8.2.2. Dầm công-xôn FGM micro chịu tải tại đầu tự do

Xét dầm công-xôn FGM kích thước micro với tỷ số độ mảnh $L/h = 20$ chịu tác dụng của tải trọng ngang P tại đầu tự do, như minh họa trên Hình 3.12(a). Bảng 3.3 liệt kê chuyển vị lớn không thứ nguyên tại đầu tự do của dầm, ứng với hai giá trị tải trọng ngang $P^* = 5$ và $P^* = 10$, và các giá trị khác nhau của tham số vật liệu n và tham số tỷ lệ không thứ nguyên $\eta = l_m/h$. Kết quả trong bảng được tính cho cả hai trường hợp xét đến và bỏ qua ảnh hưởng của hệ số Poisson. Ảnh hưởng đáng kể của tham số vật liệu và hiệu ứng kích thước micro đối với ứng xử chuyển vị lớn của kết cấu micro được thấy rõ trong bảng. Chuyển vị lớn tăng khi tăng tham số vật liệu n , và giảm bởi sự tăng của tham số tỷ lệ η . Khi xem xét Bảng 3.3 một cách kỹ càng hơn, ta có thể thấy rằng sự phụ thuộc của chuyển vị lớn vào tham số vật liệu n chịu ảnh hưởng của tham số tỷ lệ không thứ nguyên η . Sự tăng của chuyển vị ở đầu tự do của dầm khi tăng tham số vật liệu n nhiều hơn khi dầm có tham số tỷ lệ kích thước η lớn hơn. Ví dụ, với $\eta = 0.1$, chuyển vị theo phương z , w^* , tương ứng với $P^* = 5$ thu được

Bảng 3.3. Chuyển vị lớn không thứ nguyên của dầm công-xôn FG kích thước micro chịu tải trọng ngang

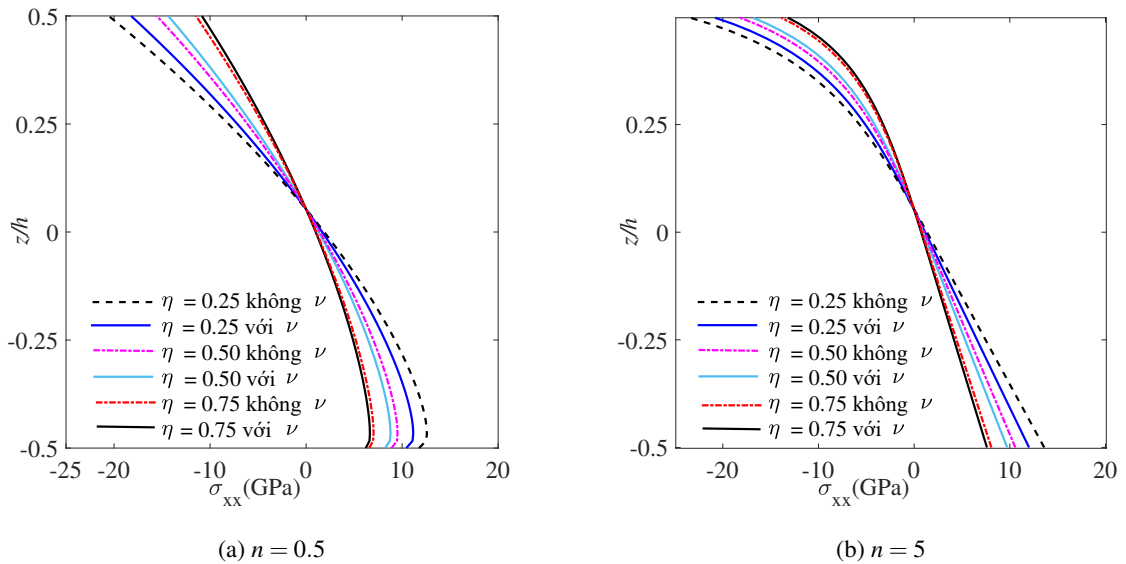
P^*	η	Đáp ứng	Xét đến hệ số Poisson			Bỏ qua hệ số Poisson		
			$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 5$	$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 5$
5	0.1	$ u^* $	0.3776	0.4039	0.4437	0.4497	0.4750	0.5124
		w^*	0.7106	0.7296	0.7543	0.7579	0.7736	0.7935
	0.25	$ u^* $	0.3333	0.3607	0.4053	0.3943	0.4216	0.4657
		w^*	0.6774	0.6992	0.7299	0.7225	0.7414	0.7678
0.5	$ u^* $	0.2208	0.2475	0.2989	0.2562	0.2845	0.3391	
	w^*	0.5719	0.6011	0.6490	0.6092	0.6370	0.6827	
0.75	$ u^* $	0.1228	0.1434	0.1899	0.1387	0.1611	0.2119	
	w^*	0.4404	0.4735	0.5360	0.4658	0.4993	0.5626	
10	0.1	$ u^* $	0.5468	0.5685	0.6001	0.6048	0.6243	0.6524
		w^*	0.8112	0.8227	0.8372	0.8392	0.8490	0.8614
	0.25	$ u^* $	0.5089	0.5327	0.5695	0.5606	0.5827	0.6171
		w^*	0.7918	0.8051	0.8229	0.8185	0.8300	0.8458
0.5	$ u^* $	0.4000	0.4280	0.4778	0.4367	0.4644	0.5140	
	w^*	0.7269	0.7462	0.7755	0.7511	0.7687	0.7960	
0.75	$ u^* $	0.2777	0.3070	0.3652	0.3003	0.3303	0.3902	
	w^*	0.6304	0.6575	0.7032	0.6513	0.6774	0.7218	

bằng công thức phần tử có tính đến ảnh hưởng của hệ số Poisson tăng 5,79% khi tăng n từ 0.5 lên 5, trong khi các giá trị tương ứng là 7.19, 11.88 và 17.84 đối với $\eta = 0.25, 0.55$ và 0.75 . Bảng 3.3 cũng cho thấy vai trò quan trọng của hệ số Poisson đối với đáp ứng chuyển vị lớn của dầm micro, và dầm kích thước micro trở nên cứng hơn khi tính đến ảnh hưởng của hệ số Poisson.



Hình 3.13. Đường cong tải-chuyển vị của dầm công-xôn FGM kích thước micro chịu tải ngang với các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ kích thước.

Đường cong tải-chuyển vị của dầm công-xôn FGM kích thước micro, như minh

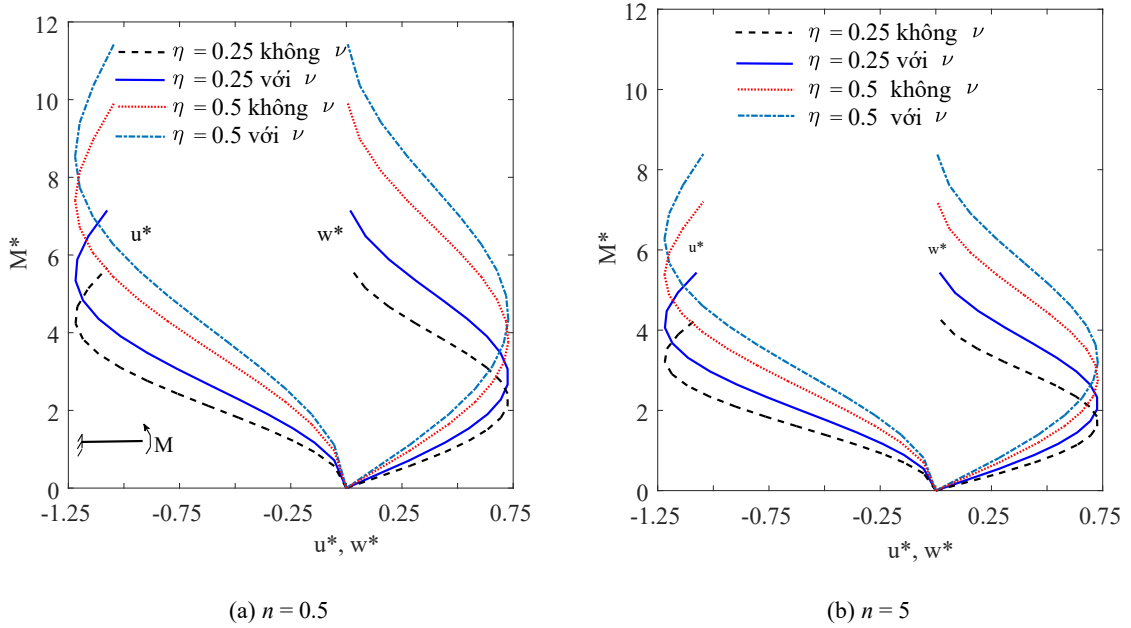


Hình 3.14. Phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục của dầm công-xôn FGM kích thước micro với $P^* = 10$.

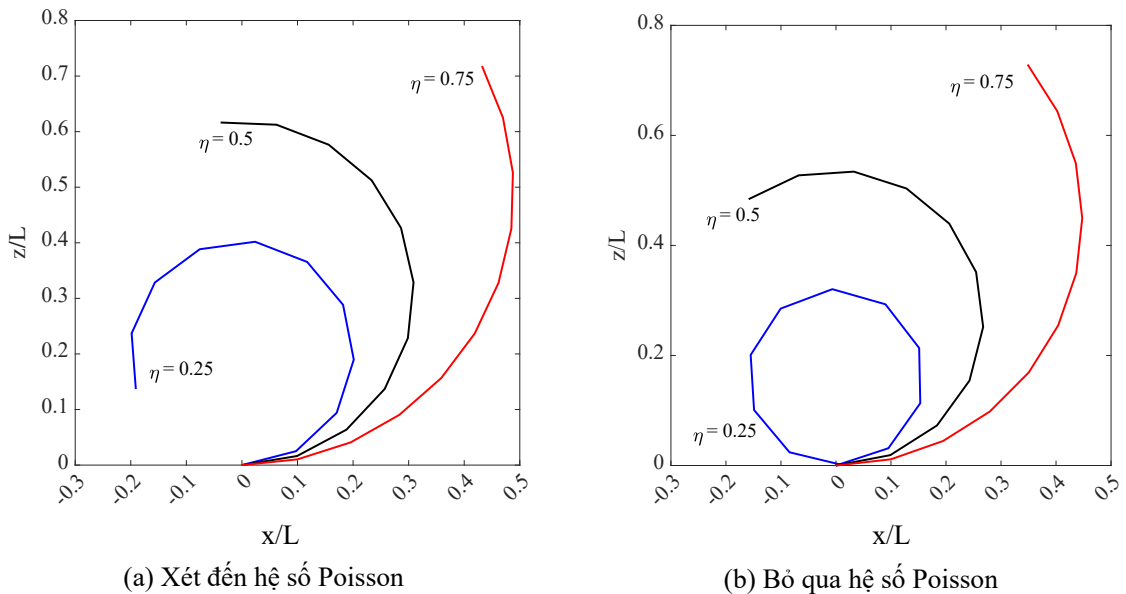
họa trên Hình 3.13a và Hình 3.13b cho hai giá trị của tham số vật liệu, $n = 0.5$ và $n = 5$, cũng khẳng định lại các nhận xét trên về ảnh hưởng của tham số tỷ lệ kích thước và hệ số Poisson đối với ứng xử chuyển vị lớn của dầm công-xôn kích thước micro. Cả tham số kích thước micro và hệ số Poisson đều làm cho dầm micro cứng hơn. Nhận xét này không phụ thuộc vào giá trị của tải trọng ngang và tham số vật liệu. Ảnh hưởng của tham số kích thước micro và hệ số Poisson cũng có thể được thấy từ Hình 3.14, trong đó phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tại của thiết diện ngang ứng với $P^* = 10$ được minh họa với các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ không thứ nguyên và hai giá trị của tham số vật liệu, $n = 0.5$ và $n = 5$. Ta có thể thấy rằng ứng suất dọc trục giảm đi khi tăng tham số tỷ lệ không thứ nguyên và khi tính đến ảnh hưởng của hệ số Poisson. Nhận xét này không phụ thuộc và giá trị của tham số vật liệu.

3.8.2.3. Dầm công-xôn kích thước micro chịu mô-men

Ứng xử chuyển vị lớn của dầm FGM kích thước micro ở Mục trên nhưng dưới tác động của mô-men uốn M như minh họa trên Hình 3.12(b) được nghiên cứu trong mục này. Trên các Hình 3.15a và 3.15b, các đường cong mô-men-chuyển vị của dầm công-xôn FGM micro được minh họa cho các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ không thứ nguyên và hai giá trị của tham số vật liệu, $n = 0.5$ và $n = 5$. Từ các hình này ta có thể thấy ảnh hưởng rõ nét của tham số tỷ lệ kích thước và hệ số Poisson đối với đáp ứng của dầm kích thước micro. Ảnh hưởng của hai yếu tố này có xu hướng đáng kể hơn trong vùng chuyển vị lớn của dầm. Các cấu hình biến dạng của dầm

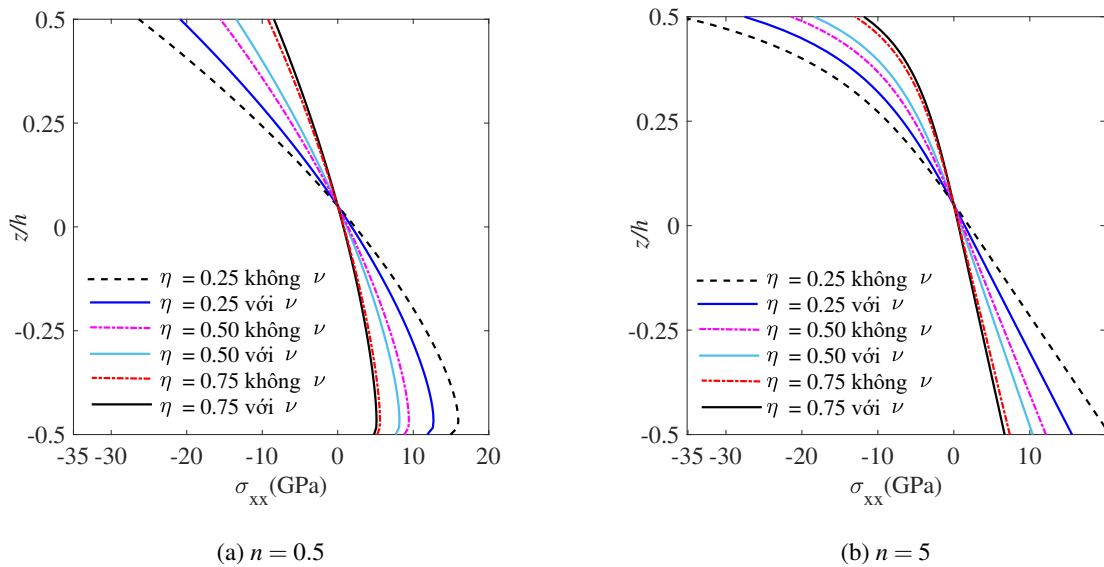


Hình 3.15. Đường cân bằng của dầm công-xôn FGM kích thước micro chịu tác dụng của mô-men với các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ kích thước.



Hình 3.16. Cấu hình biến dạng của dầm FGM micro ứng với $M^* = 5.6$, $n = 1$ và các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ không thứ nguyên.

micro ứng với giá trị của tham số vật liệu $n = 1$ và giá trị mô-men $M^* = 5.6$ như minh họa trên Hình 3.16 cũng thể hiện rõ vai trò quan trọng của hệ số Poisson đối với ứng xử phi tuyến của dầm micro. Tại giá trị của mô-men $M^* = 5.6$, dầm micro ứng với $\eta = 0.25$ đã uốn thành một vòng tròn đối với trường hợp bỏ qua ảnh hưởng của hệ số Poisson, trong khi điều này không xảy ra khi tính đến ảnh hưởng của hệ số Poisson. Lưu ý rằng sự hội tụ của chuyển vị lớn của dầm micro dưới tác động của mô-men cũng đạt được với lưới sáu phần tử, nhưng mười phần tử đã được sử dụng để có được

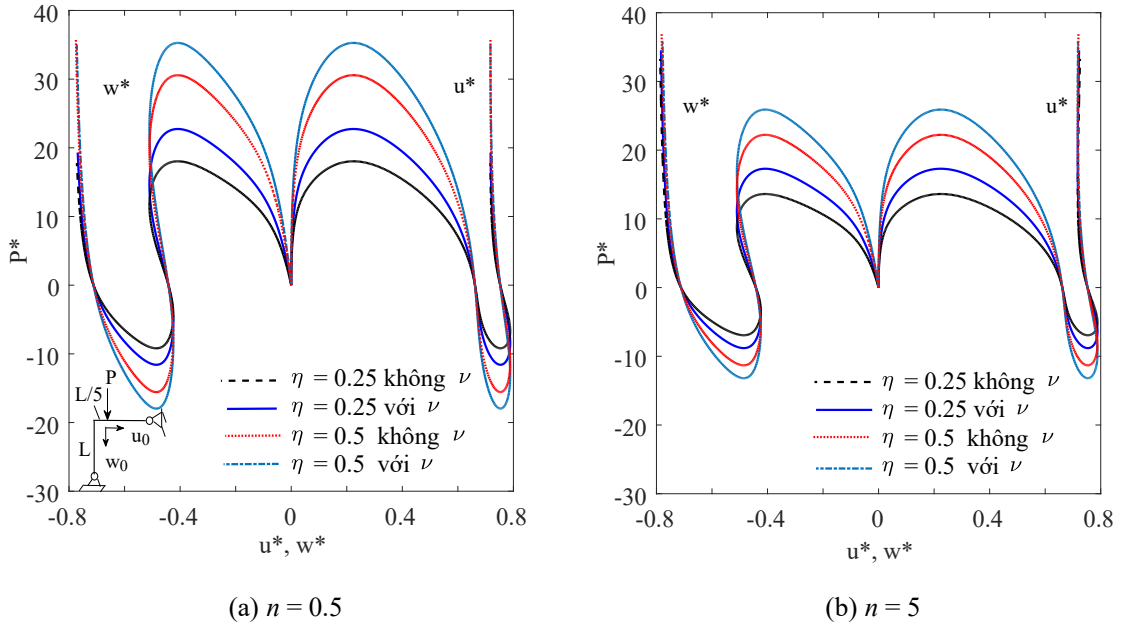


Hình 3.17. Phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục của dầm công-xôn micro ứng với $M^* = 5.6$.

cấu hình trong Hình 3.16. Việc sử dụng lưới nhiều phần tử để đảm bảo độ mịn của các đường cong. Sự phân bố theo chiều cao của ứng suất dọc trục tương ứng với $M^* = 5.6$ của dầm micro như được minh họa trên Hình 3.17 cũng cho thấy ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước micro và hệ số Poisson đối với chuyển vị lớn của dầm công-xôn FGM kích thước micro. Việc tăng tham số tỷ lệ không thứ nguyên và kết hợp với ảnh hưởng của hệ số Poisson dẫn đến giảm đáng kể biên độ ứng suất. Hình 3.17 cũng cho thấy biên độ ứng suất của dầm micro có tham số vật liệu cao hơn là lớn hơn so với biên độ ứng suất của dầm có tham số vật liệu n thấp hơn.

3.8.2.4. Khung FGM không đối xứng kích thước micro

Khung FGM không đối xứng kích thước micro chịu tải trọng hướng xuống dưới P , như minh họa trên Hình 3.12(c), được phân tích trong mục này. Kích thước hình học để tính toán như sau: $L = 120 \mu\text{m}$, $b = 3 \mu\text{m}$ và $h = 2 \mu\text{m}$. Hình 3.18 minh họa các đường cong lực-chuyển vị của khung ứng với các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ không thứ nguyên η . Ta có thể thấy từ Hình 3.18 rằng tham số tỷ lệ không thứ nguyên có ảnh hưởng quan trọng tới ứng xử của khung. Tải trọng giới hạn của khung càng lớn hơn khi giá trị của tham số tỷ lệ kích thước cao hơn, và nhận xét này không phụ thuộc vào giá trị của tham số vật liệu. Việc xét tới ảnh hưởng của hệ số Poisson vào công thức phần tử hữu hạn, như thấy từ Hình 3.18, cũng làm khung cứng hơn và tải trọng giới hạn của khung tăng lên. Hình 3.18 cũng cho thấy tính ưu việt của phần tử dầm được xây dựng và thuật toán số trong việc mô hình hóa ứng xử phi tuyến phức tạp của khung kích thước micro. Cần lưu ý rằng đáp ứng của khung không đối xứng

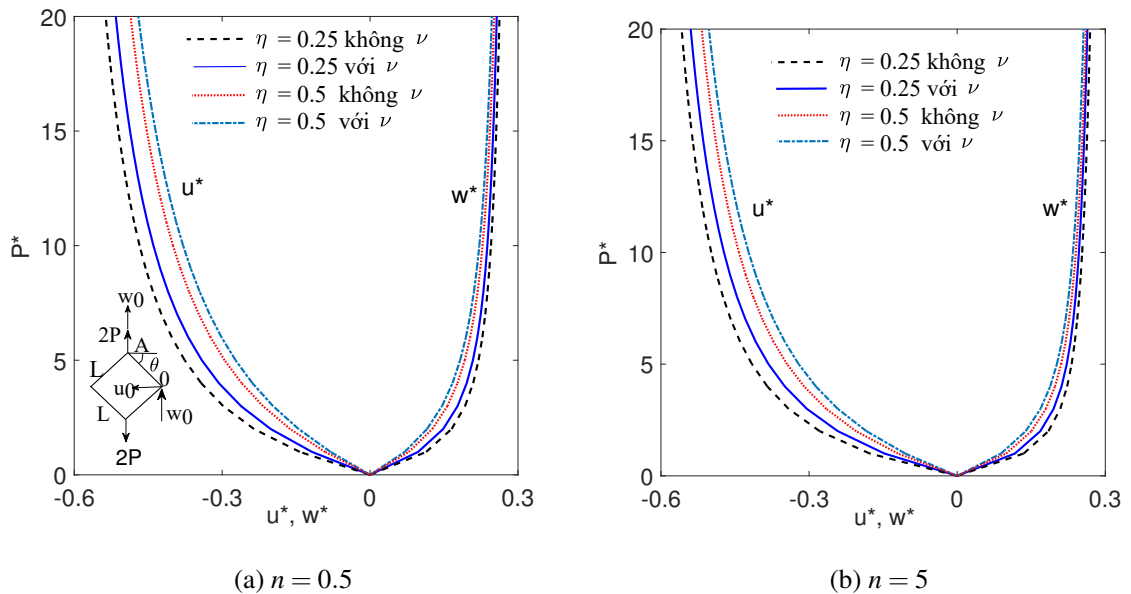


Hình 3.18. Đường cong tải-chuyển vị của khung FGM không đối xứng kích thước micro với các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ.

đạt được với ba phần tử, cụ thể là hai phần tử cho dầm ngang và một phần tử cho dầm dọc. Việc tăng số lượng phần tử không làm thay đổi đường cong lực-chuyển vị của khung.

3.8.2.5. Khung FGM micro hình vuông chịu kéo

Khung FGM kích thước micro hình vuông chịu tải trọng kéo $2P$, như minh họa trên Hình 3.12(d), được nghiên cứu trong mục này. Tỷ số độ mảnh của mỗi dầm được

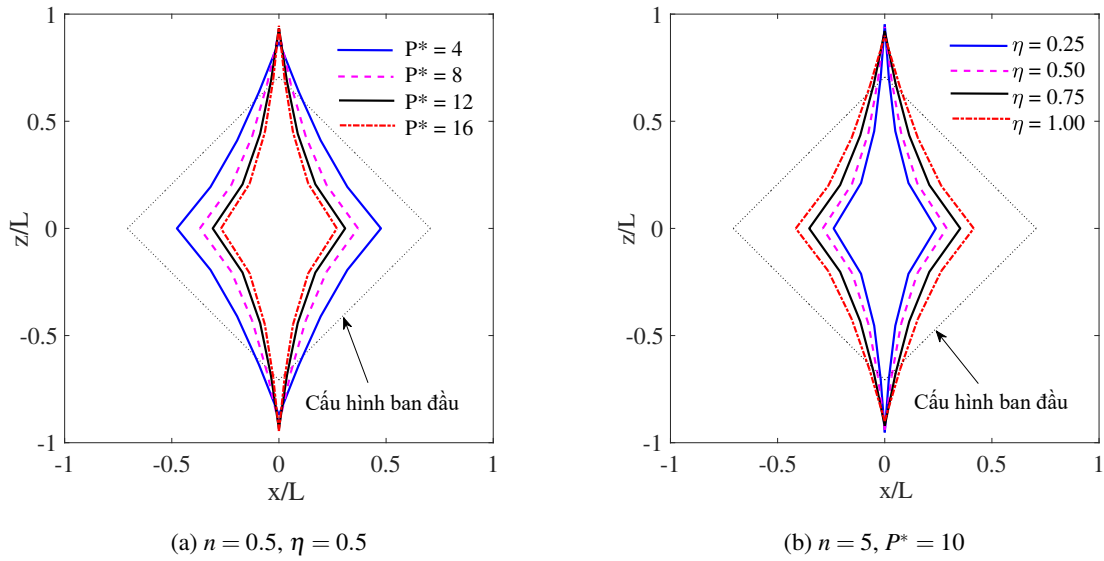


Hình 3.19. Đường cong tải-chuyển vị của khung FGM hình vuông chịu tải trọng kéo kích thước micro với các giá trị khác nhau của tham số tỷ lệ.

Bảng 3.4. Chuyển vị và góc quay của khung FGM hình vuông kích thước micro chịu tải trọng kéo

P^*	η	Đáp ứng	Xét đến hệ số Poisson			Bỏ qua hệ số Poisson		
			$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 5$	$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 5$
5	0.1	$ u^* $	0.3664	0.3810	0.4034	0.4067	0.4202	0.4409
		w^*	0.2167	0.2208	0.2279	0.2287	0.2320	0.2381
		θ_0	1.3901	1.4070	1.4345	1.4381	1.4517	1.4744
	0.25	$ u^* $	0.3411	0.3566	0.3820	0.3758	0.3908	0.4155
		w^*	0.2085	0.2133	0.2218	0.2199	0.2240	0.2316
		θ_0	1.3577	1.3769	1.4095	1.4019	1.4188	1.4480
	0.5	$ u^* $	0.2728	0.2896	0.3209	0.2950	0.3121	0.3444
		w^*	0.1826	0.1893	0.2019	0.1920	0.1984	0.2105
		θ_0	1.2627	1.2864	1.3310	1.2950	1.3182	1.3625
	0.75	$ u^* $	0.2031	0.2192	0.2523	0.2155	0.2322	0.2669
		w^*	0.1496	0.1578	0.1741	0.1564	0.1645	0.1810
		θ_0	1.1562	1.1812	1.2327	1.1761	1.2016	1.2547
10	0.1	$ u^* $	0.4596	0.4710	0.4884	0.4909	0.5009	0.5164
		w^*	0.2425	0.2450	0.2499	0.2502	0.2522	0.2567
		θ_0	1.4918	1.4999	1.5156	1.5172	1.5219	1.5334
	0.25	$ u^* $	0.4391	0.4516	0.4719	0.4671	0.4785	0.4975
		w^*	0.2376	0.2405	0.2463	0.2449	0.2474	0.2527
		θ_0	1.4724	1.4830	1.5028	1.4985	1.5061	1.5220
	0.5	$ u^* $	0.3790	0.3943	0.4221	0.3994	0.4143	0.4417
		w^*	0.2214	0.2257	0.2343	0.2280	0.2319	0.2401
		θ_0	1.4059	1.4231	1.4554	1.4303	1.4458	1.4756
	0.75	$ u^* $	0.3082	0.3254	0.3593	0.3217	0.3390	0.3734
		w^*	0.1977	0.2039	0.2163	0.2033	0.2094	0.2216
		θ_0	1.3137	1.3367	1.3821	1.3326	1.3550	1.3999

giả định là $L/h = 20$. Các chuyển vị và góc quay của khung micro tương ứng với hai giá trị của lực ngoài $P^* = 5$ và $P^* = 10$ được liệt kê trong Bảng 3.4 với các giá trị khác nhau của tham số vật liệu n và tham số tỷ lệ không thứ nguyên η . Các chuyển vị không thứ nguyên $|u^*|$ và w^* trong bảng được định nghĩa theo công thức (3.50) với chuyển vị u_0 và w_0 được tính tại các vị trí minh họa trên Hình 3.19a. Bảng 3.4 cho thấy vai trò quan trọng của tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu và ảnh hưởng của hệ số Poisson đối với chuyển vị lớn của khung. Giống như trường hợp của dầm công-xôn FGM kích thước micro chịu tác dụng của tải trọng ngang đã nghiên cứu ở trên, sự tăng của các chuyển vị và góc quay khi tăng tham số vật liệu n cũng phụ thuộc vào giá trị của tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu và sự tăng này là có ý nghĩa hơn đối với khung



Hình 3.20. Cấu hình biến dạng của khung FGM hình vuông kích thước micro chịu tải trọng kéo với các giá trị khác nhau của lực kéo và tham số tỷ lệ.

micro ứng với tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu cao hơn. Ví dụ, chuyển vị theo phương z , của khung ứng với tải trọng $P^* = 5$ được tính theo công thức có xét tới ảnh hưởng của hệ số Poisson, như ta thấy từ Bảng 3.4, tăng 5,15% khi tăng tham số n từ 0.5 lên 5 cho trường hợp $\eta = 0.1$, trong khi các giá trị tương ứng cho $\eta = 0.25, 0.5$ và 0.75 lần lượt là 6.38, 10.57 và 16.38%. Ảnh hưởng của tham số vật liệu tới chuyển vị không thứ nguyên theo phương z nhận được theo công thức không xét tới ảnh hưởng của hệ số Poisson nhẹ hơn một chút so với kết quả nhận được từ công thức có xét tới hệ số Poisson, nhưng cũng theo cùng xu hướng. Chuyển vị theo phương z , tăng 4.11, 5.32, 9.64 và 15.73% đối với $\eta = 0.1, 0.25, 0.5$ và 0.75 khi tính toán bằng công thức không xét tới ảnh hưởng của hệ số Poisson. Tuy nhiên, sự tăng của các chuyển vị khi tăng tham số vật liệu n có xu hướng giảm đi ở vùng chuyển vị lớn và đối với trường hợp $P^* = 10$, chuyển vị theo phương z , được dự đoán bởi công thức xét tới ảnh hưởng của hệ số Poisson chỉ tăng 3.05, 3.66, 5.83 và 9.41% tương ứng với $\eta = 0.1, 0.25, 0.5$ và 0.75 . Ta cũng có thể thấy từ Bảng 3.4 rằng, sự tăng của chuyển vị theo phương x khi tăng tham số vật liệu n rõ nét hơn so với sự tăng của chuyển vị theo phương z . Ảnh hưởng của hệ số Poisson và tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu đối với ứng xử chuyển vị lớn của khung FGM hình vuông kích thước micro cũng có thể được thấy từ các đường cong lực-chuyển vị và các cấu hình biến dạng của khung như được minh họa trên các Hình 3.20a và 3.20b cho trường hợp $n = 0.5$ và $n = 5$. Khung hình vuông FGM kích thước micro biến dạng đáng kể khi tăng tải trọng kéo (Hình 3.20a) và nó ít biến dạng hơn khi giá trị tham số tỷ lệ không thứ nguyên lớn hơn (Hình 3.20b).

Kết luận Chương 3

Chương 3 đã xây dựng phần tử dầm phi tuyến và thuật toán số cho phân tích khung, dầm FGM kích thước micro có chuyển vị lớn. Phần tử được xây dựng trên cơ sở công thức hệ tọa độ đồng hành trong đó lý thuyết dầm Euler-Bernoulli được sử dụng kết hợp với MCST để mô tả biến dạng dầm và hiệu ứng kích thước. Để tăng sự hội tụ của phần tử, các hàm nội suy nhận được từ lời giải hệ phương trình vi phân cân bằng phần tử được sử dụng để nội suy trường chuyển vị. Biểu thức cho ma trận độ cứng tiếp tuyến và véc-tơ nội lực của phần tử được thu nhận dưới dạng hiện. Phần tử dầm cho kết cấu FGM kích thước macro được thu nhận như là trường hợp riêng của phần tử xây dựng được với việc loại bỏ các số hạng có chứa tham số tỷ lệ kích thước. Một số kết quả và nhận xét chính rút ra từ chương này có thể tóm lược như sau:

- Phần tử dầm phi tuyến xây dựng trên cơ sở phương pháp hệ tọa độ đồng hành trong chương 3 có khả năng mô tả tốt ứng xử phi tuyến hình học của kết cấu khung, dầm. Sự hội tụ của phần tử dầm xây dựng được là nhanh, có thể tính toán chuyển vị lớn của khung, dầm FGM kích thước macro và micro với lưới một số ít phần tử.

- Tham số vật liệu và tham số kích thước có vai trò quan trọng tới đáp ứng chuyển vị lớn của khung, dầm FGM kích thước micro. Chuyển vị của khung, dầm ứng với tham số vật liệu cao hơn là lớn hơn. Tuy nhiên, ảnh hưởng của tham số vật liệu bị chi phối bởi giá trị của tham số kích thước vật liệu và sự tăng của chuyển vị lớn khi tăng tham số vật liệu rõ nét hơn khi khung, dầm có tham số tỷ lệ kích thước cao hơn.

- Hệ số Poisson có ảnh hưởng quan trọng tới đáp ứng chuyển vị lớn của khung dầm FGM kích thước micro. Ảnh hưởng của hệ số Poisson tương tự như ảnh hưởng của tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu và các kết cấu khung, dầm FGM micro trở nên cứng hơn khi tính toán bằng phần tử dầm có xét tới ảnh hưởng của hệ số Poisson.

Kết quả của chương 3 đã được công bố trên 03 bài báo, các bài từ số 8 đến số 10 trong ‘Danh mục công trình liên quan tới Luận án’ (trang 98), trong đó có 02 bài đăng Tạp chí Scopus và 01 bài trên Tuyển tập Hội nghị khoa học Quốc tế.

KẾT LUẬN

Luận án "Mô hình phần tử hữu hạn trong phân tích phi tuyến hình học kết cấu dầm FGM và CNTRC" đã xây dựng một số mô hình phần tử hữu hạn phi tuyến cho phân tích chuyển vị lớn của khung, dầm phẳng FGM và CNTRC. Hai mô hình phần tử hữu hạn xây dựng trong Luận án là phần tử dầm dựa trên công thức Lagrange toàn phần và phần tử dầm dựa trên phương pháp hệ tọa độ đồng hành. Sử dụng các phần tử xây dựng được và thuật toán số trong phân tích phi tuyến kết cấu, Luận án đã xây dựng chương trình tính toán số và áp dụng để phân tích một số bài toán cụ thể. Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu, cấu hình kết cấu và các tham số tải trọng, một số yếu tố thực tế tới ứng xử phi tuyến của khung, dầm làm từ các vật liệu FGM, CNTRC được khảo sát chi tiết. Một số kết quả, nhận xét chính và các kiến nghị hướng nghiên cứu rút ra từ Luận án được tóm lược dưới đây:

1. Các kết quả chính

- Đã xây dựng được hai mô hình phần tử dầm phi tuyến cho phân tích chuyển vị lớn của khung, dầm làm từ các vật liệu mới là vật liệu có cơ tính biến thiên và vật liệu composite gia cường bằng các ống nano carbon. Cụ thể: (1) Phần tử dầm xây dựng trên cơ sở công thức Lagrange toàn phần cho phân tích chuyển vị lớn của dầm sandwich FGM và dầm sandwich CNTRC. Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất được sử dụng để đánh giá năng lượng biến dạng đàn hồi phần tử, trong khi phép cầu phương giảm bậc được sử dụng để tránh cho phần tử bị nghẽn trượt. (2) Phần tử dầm xây dựng trên cơ sở phương pháp hệ tọa độ đồng hành cho phân tích chuyển vị lớn của khung, dầm FGM kích thước micro, trong đó lý thuyết dầm Euler-Bernoulli được sử dụng kết hợp với lý thuyết cặp ứng suất sửa đổi để mô phỏng biến dạng và hiệu ứng kích thước micro của khung, dầm FGM. Để cải thiện tốc độ hội tụ và tính chính xác của lời giải số, nghiệm của hệ phương trình vi phân cân bằng phi tuyến của phần tử được sử dụng làm hàm nội suy cho trường chuyển vị.
- Trên cơ sở các phần tử dầm xây dựng được và thuật toán số trong phân tích kết cấu phi tuyến, Luận án đã xây dựng các chương trình tính toán số dùng trong phân tích khung, dầm FGM và CNTRC có chuyển vị lớn. Đã tiến hành kiểm chứng, khẳng định tính đúng đắn và hiệu quả của các phần tử dầm và chương trình tính toán số xây dựng được.

- Sử dụng chương trình tính toán số xây dựng được, Luận án đã tiến hành phân tích một số kết cấu cụ thể, đưa ra các nhận xét về ảnh hưởng của tính không đồng nhất về vật liệu, cấu hình hình học, tham số kích thước micro và nền đàn hồi tới ứng xử phi tuyến của kết cấu khung, dầm FGM và CNTRC.

2. Các nhận xét chính

- Các phần tử dầm phi tuyến và chương trình tính toán số xây dựng trong Luận án có khả năng tốt trong mô phỏng ứng xử phi tuyến phức tạp của kết cấu khung, dầm FGM và CNTRC. Đặc biệt, phần tử dầm xây dựng trên cơ sở phương pháp hệ tọa độ đồng hành có biểu thức toán học đơn giản nhưng có tốc độ hội tụ nhanh. Chuyển vị lớn của khung, dầm FGM kích thước macro và micro có thể được mô phỏng chính xác bởi lưới chỉ gồm 6 phần tử.
- Sự phân bố vật liệu cũng như các yếu tố thực tế như sự kết tụ của CNTs trong vật liệu composite gia cường bằng CNTs có vai trò quan trọng tới ứng xử phi tuyến của khung, dầm FGM và CNTRC. Chuyển vị lớn của dầm sandwich CNTRC phụ thuộc rõ nét vào mức độ kết tụ của CNTs và sự kết tụ này không thể bỏ qua trong nghiên cứu ứng xử phi tuyến của kết cấu CNTRC. Thêm vào đó, sự kết tụ của CNTs, như thấy từ chương 2 của Luận án, không chỉ làm cho dầm trở nên mềm hơn mà còn làm tăng hiệu ứng của biến dạng trượt đối với độ võng lớn.
- Mô hình đồng nhất hóa vật liệu để xác định các tính chất hiệu quả của vật liệu composite có vai trò quan trọng tới kết quả số nhận được từ phân tích phần tử hữu hạn kết cấu FGM phi tuyến. Trong bốn mô hình đồng nhất hóa được xét đến trong Luận án thì mô hình Voigt là cứng nhất, trong khi mô hình Tamura-Tomota-Ozawa là mềm nhất. Mặc dù mô hình Voigt có các biểu thức toán học đơn giản và được sử dụng rộng rãi trong đánh giá các tính chất hiệu quả của FGM nhưng chúng ta cần cẩn thận trong việc đánh giá các kết quả thu được từ mô hình này.
- Hiệu ứng kích thước micro đóng vai trò quan trọng tới ứng xử phi tuyến của khung, dầm FGM có kích thước micro. Chuyển vị lớn của khung, dầm FGM kích thước micro bị đánh giá cao đáng kể (significantly overestimated) khi bỏ qua ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước. Hiệu ứng kích thước cũng làm thay đổi sự phụ thuộc của ứng xử phi tuyến của khung, dầm FGM vào tham số vật liệu.

3. Hướng nghiên cứu tiếp theo

Kết quả của Luận án mới chỉ là bước đầu của tác giả trong nghiên cứu ứng xử phi tuyến của kết cấu khung, dựa trên các vật liệu mới. Một số hướng nghiên cứu sau đây cần được tiếp tục quan tâm nghiên cứu và phát triển:

- Nghiên cứu ứng xử phi tuyến hình học của khung, dựa trên kích thước micro gia cường bởi các ống nano carbon xét tới ảnh hưởng của một số yếu tố thực tiễn như nền đàn hồi, nhiệt độ, sự kết tụ của ống nano carbon.
- Nghiên cứu ứng xử phi tuyến vật liệu của khung, dựa trên FGM kích thước micro. Trong nhiều trường hợp khi kết cấu chịu tải trọng lớn, ứng suất tại một hoặc vài vị trí của kết cấu vượt qua giới hạn đàn hồi, và vì thế ảnh hưởng của biến dạng dẻo cần được tính tới khi nghiên cứu uốn phi tuyến của khung, dựa trên FGM.
- Phát triển các phần tử sang trường hợp phân tích khung, dựa trên ba chiều. Các biến đổi toán học trong việc xây dựng phần tử dựa trên phi tuyến cho phân tích khung, dựa trên không gian rất phức tạp và công kênh. Điều này đòi hỏi việc đầu tư nhiều thời gian hơn nữa và cần có sự phối hợp của các nhà nghiên cứu.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN TỚI LUẬN ÁN

Kết quả của Luận án đã được công bố trên các Tạp chí Quốc tế, Tạp chí Quốc gia, Tuyển tập Hội nghị Khoa học Quốc gia, cụ thể:

1. Bui Thi Thu Hoai, Tran Thi Thu Huong, Nguyen Dinh Kien, Vu Thi An Ninh, Large deflection of cantilever functionally graded sandwich beam under end forces based on a total Lagrange formulation, *Vietnam Journal of Science and Technology*, 57 (6A) 2019, 32-42. doi:10.15625/2525-2518/57/6A/14008 (Tạp chí Scopus).
2. Bui Thi Thu Hoai, Nguyen Dinh Kien, Tran Thi Thu Huong, Le Thi Ngoc Anh, Large displacements of FGSW Beams in thermal environment using a finite element formulation, *Vietnam Journal of Mechanics, VAST*, 42(1) 2020, 43–61. DOI: <https://doi.org/10.15625/0866-7136/14628>
3. Bui Thi Thu Hoai, Tran Thi Thu Huong, Nguyen Dinh Kien, Large deflection of FGSW beams partially supported by a two-parameter elastic foundation using a finite element formulation, *Tạp chí Cơ khí Việt Nam*, 2020.
4. Bui Thi Thu Hoai, Nguyen Dinh Kien and Tran Thi Thu Huong, Large deflections of cantilever FG-CNTRC sandwich beams, *Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn lần thứ XV*, Trường Đại học kỹ thuật công nghiệp, Đại học Thái Nguyên, 2021
5. Dinh Kien Nguyen, Thi Thu Hoai Bui, Thi Thu Huong Tran, Sergei Alexandrov, Large deflections of functionally graded sandwich beams with influence of homogenization schemes, *Archive of Applied Mechanics*, 2022. <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02140-2> (Tạp chí ISI)
6. Thi Thu Hoai Bui, Thi Thom Tran, Dinh Kien Nguyen, Geometrically non-linear analysis of sandwich composite beams reinforced by agglomeration carbon nanotubes, *Vietnam Journal of Mechanics*, 44(4) 2022, 376 – 391 DOI: <https://doi.org/10.15625/0866-7136/17911>
7. Thi Thu Hoai Bui, Thi Thu Huong Tran, Vu Nam Pham, Dinh Kien Nguyen, Large deflections of agglomerated carbon nanotubes reinforced sandwich can-

- tiler beam partially embedded on foundation, *Comptes Rendus Mécanique*, 2024 (Accepted).
8. Thi Thu Hoai Bui, Thi Thu Huong Tran, and Dinh Kien Nguyen, Geometrically nonlinear behaviour of functionally graded beam and frame structures under mechanical loading, *RCTEMME 2021, LNME*, 326–342, 2022.
<https://doi.org/10.1007/978-981-19-1968-8-26>
 9. Thi Thu Hoai Bui, Dinh Kien Nguyen, Geometrically nonlinear behaviour of FG-CNRC sandwich beam using a co-rotational formulation, *The 7th International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA - 2023) Hanoi*, November 11, 2023, DOI:10.15625/vap.2023.0153
 10. Bui Thi Thu Hoai, Le Cong Ich, Nguyen Dinh Kien, Size-dependent nonlinear bending of tapered cantilever microbeam based on modified couple stress theory, *Vietnam Journal of Science and Technology*, 62 (6) (2024) 1196-1209, doi:10.15625/2525-2518/19281.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Koizumi M., 1997, FGM activities in Japan, *Composites: Part B*, 28, pp. 1–4.
- [2] Shen H. S., 2009, *Functionally graded materials – Nonlinear analysis of plates and shells*, CRC Press.
- [3] Iijima S., 1991, Helical microtubules of graphitic carbon, *Nature*, 354, pp. 56–58.
- [4] Iijima S., Ichihashi T., 1993, Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter, *Nature*, 363, pp. 603–605.
- [5] Shen H. S., 2009, Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Structures*, 91, pp. 9–19.
- [6] Long V. T., Tung H. V., 2019, Thermomechanical postbuckling behavior of CNT-reinforced composite sandwich plate models resting on elastic foundations with elastically restrained unloaded edges, *Journal of Thermal Stresses*, 42(5), pp. 658–680.
- [7] Shi D. L., Feng X.-Q., Huang Y., Hwang K.-C., Gao H., 2004, The effect of nanotube waviness and agglomeration on the elastic property of carbon nanotube-reinforced composites, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 126 (3), pp. 250–257.
- [8] Apetre N., Sankar B., Ambur D. R., 2006, Low-velocity impact response of sandwich beams with functionally graded core, *International Journal of Solids and Structures*, 43, pp. 2479–2496.
- [9] Aydogdu M., Taskin V., 2007, Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges, *Materials and Design*, 28, pp. 1651–1656.
- [10] Benatta M., Mechab I., Tounsi A., Bedia E. A. A., 2008, Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects, *Computational Materials Science*, 44, pp. 765–773.

- [11] Li X. F., 2008, A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams, *Journal of Sound and Vibration*, 318, pp. 1210–1229.
- [12] Ying J., Lü C., Chen W. Q., 2008, Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundation, *Composite Structures*, 84, pp. 209–219.
- [13] Sina S. A., Navazi H. M., Haddadpour H., 2009, An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams, *Materials and Design*, 30, pp. 741–747.
- [14] Huang Y., Li X. F., 2010, A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, 329, pp. 2291–2303.
- [15] Sankar B. V., 2001, An elasticity solution for functionally graded beams, *Composites Science and Technology*, 61, pp. 689–696.
- [16] Huang Y., Li X. F., 2011, Buckling analysis of non-uniform and axially graded beams with varying flexural rigidity, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 137, pp. 73–81.
- [17] Anderson T. A., 2003, A 3-D elasticity solution for a sandwich composite with functionally graded core subjected to transverse loading by a rigid sphere, *Computers & Structures*, 60, pp. 265–74.
- [18] Kirugulige M. S., Kitey R., Tippur H. V., 2005, Dynamic fracture behavior of model sandwich structures with functionally graded core: a feasibility study, *Composites Science and Technology*, 65, pp. 1052–68.
- [19] Di Sciuva M., Gherlone M., 2005, Quasi-3D static and dynamic analysis of undamaged and damaged sandwich beams, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 7, pp. 31–52.
- [20] Bhangale R. K., Ganesan N., 2006, Thermoelastic buckling and vibration behavior of a functionally graded sandwich beam with constrained viscoelastic core, *Journal of Sound and Vibration*, 295, pp. 294–316.
- [21] Antonio F. A., 2007, Failure mode investigation of sandwich beams with functionally graded core, *Composite Structures*, 81, pp. 323–330.

- [22] Kashtalyan M., Menshykova M., 2009, Three-dimensional elasticity solution for sandwich panels with a functionally graded core, *Composite Structures*, 87, pp. 36–43.
- [23] Amirani M., Khalili S., Nemati N., 2009, Free vibration analysis of sandwich beam with FG core using the element free Galerkin method, *Composite Structures*, 90, pp. 373–379.
- [24] Bui T. Q., Khosravifard A., Zhang C., Hematiyan M. R., Golub M. V., 2013, Dynamic analysis of sandwich beams with functionally graded core using a truly meshfree radial point interpolation method, *Engineering Structures*, 47, pp. 90–104.
- [25] Vo T. P., Thai H.-T., 2012, Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 62, pp. 67–76.
- [26] Vo T. P., Thai H.-T., Nguyen T.-K., Maheri A., Lee J., 2014, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory, *Engineering Structures*, 64, pp. 12–22.
- [27] Şimşek M., Al-shujairi M., 2017, Static, free and forced vibration of functionally graded (FG) sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads, *Composites: Part B*, 108, pp. 18–34.
- [28] Banerjee A., Bhattacharya B., Mallik A. K., 2008, Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity: Analytical and numerical approaches, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43, pp. 366–376.
- [29] Rahimi G. H., Davoodinik A. R., 2010, Large Deflection of Functionally Graded Cantilever Flexible Beam with Geometric Non-Linearity: Analytical and Numerical Approaches, *Scientia Iranica, Transaction B: Mechanical Engineering*, 17, pp. 25–40.
- [30] Arefi M., Rahimi G. H., 2013, Non linear analysis of a functionally graded beam with variable thickness, *Scientific Research and Essays*, 8, pp. 256–264.
- [31] Reddy J. N., 2000, Analysis of functionally graded plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, pp. 663–684.

- [32] Chen C. S., 2005, Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate, *Composite Structures*, 68, pp. 295–302.
- [33] Alijani F., Bakhtiari-Nejad F., Amabili M., 2011, Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments, *Nonlinear Dynamics*, 66, pp. 251–270.
- [34] Kocatürk T., Şimşek M., Akbaş S. D., 2011, Large displacement static analysis of a cantilever Timoshenko beam composed of functionally graded material, *Science Engineering Composite Materials*, 18, pp. 21–34.
- [35] Almeida C. A., Albino J. C. R., Menezes I. F. M., Paulino G. H., 2011, Geometric nonlinear analyses of functionally graded beams using a tailored Lagrangian formulation, *Mechanics Research Communications*, 38, pp. 553–559.
- [36] Zhang D. G., 2013, Nonlinear bending analysis of FGM beams based on physical neutral surface and high order shear deformation theory, *Composite Structures*, 100, pp. 121–126.
- [37] Sitar M., Kosel F., Brojan M., 2014, Large deflections of nonlinearly elastic functionally graded composite beams, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 14, pp. 700–9.
- [38] Niknam H., Fallah A., Aghdam M. M., 2014, Nonlinear bending of functionally graded tapered beams subjected to thermal and mechanical loading, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 65, pp. 141–147.
- [39] Nguyen D. K., 2004, Post-buckling behavior of beam on two-parameter elastic foundation, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 4, pp. 21–43.
- [40] Gan B. S., Nguyen D. K., 2014, Large Deflection Analysis of Functionally Graded Beams Resting on a Two-Parameter Elastic Foundation, *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*, 13, pp. 649–656.
- [41] Nguyen D. K., 2012, A Timoshenko beam element for large displacement analysis of planar beams and frames, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 12.

- [42] Nguyen D. K., 2013, Large displacement response of tapered cantilevers beams made of axially functionally graded material, *Composite: Part B*, 55, pp. 298–305.
- [43] Nguyen D. K., Gan. B. S., 2014, Large deflections of tapered functionally graded beams subjected to end forces, *Applied Mathematical Modelling*, 38, pp. 3054–3066.
- [44] Nguyen D. K., 2014, Large displacement behaviour of tapered cantilever Euler–Bernoulli beams made of functionally graded material, *Applied Mathematics and Computation*, 237, pp. 340–355.
- [45] Nguyen D. K., Gan B. S., Trinh T. H., 2014, Geometrically nonlinear analysis of planar beam and frame structures made of functionally graded materials, *Structural Engineering and Mechanics*, 49, pp. 727–743.
- [46] Trinh T. H., Nguyen D. K., Gan B. S., Alexandrov S., 2016, Post-buckling responses of elastoplastic FGM beams on nonlinear elastic foundation, *Structural Engineering and Mechanics*, 58, pp. 515–532.
- [47] Nguyen D. K., Nguyen K. V., Dinh V. M., Gan B. S., Alexandrov S., 2018, Nonlinear bending of elastoplastic functionally graded ceramic-metal beams subjected to nonuniform distributed loads, *Applied Mathematics and Computation*, 333, pp. 443–459.
- [48] Nguyen D. K., Tran T. T., 2016, A co-rotational formulation for large displacement analysis of functionally graded sandwich beam and frame structures, *Mathematical Problems in Engineering*, <http://dx.doi.org/10.1155/2016/5698351>.
- [49] Mindlin R., Tiersten H., 1962, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11, pp. 415–448.
- [50] Toupin R., 1962, Elastic materials with couple-stresses, *Archive for rational mechanics and analysis*, 11, pp. 385–414.
- [51] Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P., 2002, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 39 (10), pp. 2731–2743.

- [52] Lam D., Yang F., Chong A., Wang J., Tong P., 2003, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51, pp. 1477–1508.
- [53] Thai H., Vo T., Nguyen T., Kim S. E., 2017, A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates, *Composite Structures*, 177, pp. 196–219.
- [54] Roudbari M. A., Jorshari T., Lü C., Ansari R., Kouzani A. Z., Amabili M., 2022, A review of size-dependent continuum mechanics models for micro- and nano-structures, *Thin-Walled Structures*, 170, 108562.
- [55] Ke L., Wang Y. S., Yang J., Kitipornchai S., 2012, Nonlinear free vibration of size-dependent functionally graded microbeams, *International Journal of Engineering Science*, 50, pp. 256–267.
- [56] Asghari M., Kahrobaiyan M., Nikfar M., Ahmadian M., 2012, A size-dependent nonlinear Timoshenko microbeam model based on the strain gradient theory, *Acta Mechanica*, 223, pp. 1233–1249.
- [57] Zhao J., Zhou S., Wang B., Wang X., 2012, Nonlinear microbeam model based on strain gradient theory, *Applied Mathematical Modelling*, 36, pp. 2674–2686.
- [58] Mohammadi H., Mahzoon M., 2013, Thermal effects on postbuckling of nonlinear microbeams based on the modified strain gradient theory, *Composite Structures*, 106, pp. 764–776.
- [59] Farokhi H., Ghayesh M., Amabili M., 2013, Nonlinear resonant behavior of microbeams over the buckled state, *Applied Physics A*, 113, pp. 297–307.
- [60] Farokhi H., Ghayesh M., Gholipour A., Hussain S., 2018, Resonant responses of three-layered shear-deformable microbeams, *Microsystem Technologies*, 24, pp. 2123–2136.
- [61] Farokhi H., Ghayesh M. H., 2016, Size-dependent parametric dynamics of imperfect microbeams, *International Journal of Engineering Science*, 99, pp. 39–55.
- [62] Farokhi H., Ghayesh M. H., 2017, Nonlinear resonant response of imperfect extensible Timoshenko microbeams, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13, pp. 43–55.

- [63] Ghayesh M., Amabili M., Farokhi H., 2013, Three-dimensional nonlinear size-dependent behaviour of Timoshenko microbeams, *International Journal of Engineering Science*, 71, pp. 1–14.
- [64] Ghayesh M. H., Farokhi H., Alici G., 2015, Subcritical parametric dynamics of microbeams, *International Journal of Engineering Science*, 95, pp. 36–48.
- [65] Ghayesh M. H., Farokhi H., Hussain S., 2016, Viscoelastically coupled size-dependent dynamics of microbeams, *International Journal of Engineering Science*, 109, pp. 243–255.
- [66] Ansari R., Faghih Shojaei M., Ebrahimi F., Rouhi H., 2015, A non-classical Timoshenko beam element for the postbuckling analysis of microbeams based on Mindlin's strain gradient theory, *Archive of Applied Mechanics*, 85(7), pp. 937–953.
- [67] Ansari R., Faghih Shojaei M., Gholami R., Mohammadi V., Darabi M. A., 2013, Thermal postbuckling behavior of size-dependent functionally graded Timoshenko microbeams, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 50, pp. 127–135.
- [68] Ansari R., Shojaei M. F., Gholami R., 2016, Size-dependent nonlinear mechanical behavior of third-order shear deformable functionally graded microbeams using the variational differential quadrature method, *Composite Structures*, 136, pp. 669–683.
- [69] Kahrobaiyan M. H., Asghari M., Hoore M., Ahmadian M. T., 2011, Nonlinear size-dependent forced vibrational behavior of microbeams based on a non-classical continuum theory, *Journal of Vibration and Control*, 18(5), pp. 696–711.
- [70] Vatankhah R., Kahrobaiyan M. H., Alasty A., Ahmadian M. T., 2013, Nonlinear forced vibration of strain gradient microbeams, *Applied Mathematical Modelling*, 37(18–19), pp. 8363–8382.
- [71] Şimşek M., 2014, Nonlinear static and free vibration analysis of microbeams based on the nonlinear elastic foundation using modified couple stress theory and He's variational method, *Composite Structures*, 112, pp. 264–272.

- [72] Şimşek M., 2015, Size dependent nonlinear free vibration of an axially functionally graded (AFG) microbeam using He's variational method, *Composite Structures*, 131, pp. 207–214.
- [73] Sahmani S., Bahrami M., Ansari R., 2014, Nonlinear free vibration analysis of functionally graded third-order shear deformable microbeams based on the modified strain gradient elasticity theory, *Composite Structures*, 110, pp. 219–230.
- [74] Li L., Hu Y., 2015, Buckling analysis of size-dependent nonlinear beams based on a nonlocal strain gradient theory, *International Journal of Engineering Science*, 97, pp. 84–94.
- [75] Dai H. L., Wang Y. K., Wang L., 2015, Nonlinear dynamics of cantilevered microbeams based on modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, 94, pp. 103–112.
- [76] Shafiei N., Kazemi M., Ghadiri M., 2016, Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams, *International Journal of Engineering Science*, 102, pp. 12–26.
- [77] Shafiei N., Mousavi A., Ghadiri M., 2016, On size-dependent nonlinear vibration of porous and imperfect functionally graded tapered microbeams, *International Journal of Engineering Science*, 106, pp. 42–56.
- [78] Dehrouyeh-Semnani A. M., Mostafaei H., Dehrouyeh M., Nikkhah-Bahrami M., 2017, Thermal pre- and post-snap-through buckling of a geometrically imperfect doubly-clamped microbeam made of temperature-dependent functionally graded materials, *Composite Structures*, 170, pp. 122–134.
- [79] Patel B. N., Pandit D., Srinivasan S. M., 2017, A simplified moment-curvature based approach for large deflection analysis of micro-beams using the consistent couple stress theory, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 66, pp. 45–54.
- [80] Li X., Luo Y., 2017, Size-Dependent Postbuckling of Piezoelectric Microbeams Based on a Modified Couple Stress Theory, *International Journal of Applied Mechanics*, 09(04), 1750053.

- [81] Taati E., 2018, On buckling and post-buckling behavior of functionally graded micro-beams in thermal environment, *International Journal of Engineering Science*, 128, pp. 63–78.
- [82] Chen X., Li Y., 2018, Size-dependent post-buckling behaviors of geometrically imperfect microbeams, *Mechanics Research Communications*, 88, pp. 25–33.
- [83] Pourasghar A., Chen Z., 2019, Effect of hyperbolic heat conduction on the linear and nonlinear vibration of CNT reinforced size-dependent functionally graded microbeams, *International Journal of Engineering Science*, 137, pp. 57–72.
- [84] Sheng G. G., Wang X., 2019, Nonlinear forced vibration of size-dependent functionally graded microbeams with damping effects, *Applied Mathematical Modelling*, 71, pp. 421–437.
- [85] Yin S., Xiao Z., Zhang G., Bui T. Q., Wang X., Liu J., 2022, Size-dependent postbuckling for microbeams: analytical solutions using a reformulated strain gradient elasticity theory, *Acta Mechanica*, 233(12), pp. 5045–5060.
- [86] Attia M. A., Mohamed S. A., 2020, Nonlinear thermal buckling and postbuckling analysis of bidirectional functionally graded tapered microbeams based on Reddy beam theory, *Engineering with Computers*, 38(1), pp. 525–554.
- [87] Tang Y., Qing H., 2023, Size-dependent nonlinear post-buckling analysis of functionally graded porous Timoshenko microbeam with nonlocal integral models, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 116, 106808.
- [88] Lau T., Gu C., Hui D., 2006, A critical review on nanotube and nanotube/nanoclay related polymer composite materials, *Composites: Part B*, 21, pp. 425–436.
- [89] Ghorbanpour A. A., Maghamikia S., Mohammadimehr M., 2011, Buckling analysis of laminated composite rectangular plates reinforced by SWCNTs using analytical and finite element methods, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25, pp. 809–820.
- [90] Esawi A. M. K., Mahmoud M. F., 2007, Carbon nanotube reinforced composites: Potential and current challenges, *Materials and Design*, 28, pp. 2394–2401.

- [91] Ke L.-L., Yang J., Kitipornchai S., 2010, Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube reinforced composite beams, *Composite Structure*, 92, pp. 676–683.
- [92] Ke L.-L., Yang J., Kitipornchai S., 2013, Dynamic stability of functionally graded carbon nanotube reinforced composite beams, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 20, pp. 28–37.
- [93] Yas M. H., Heshmati M., 2012, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite beams reinforced by randomly oriented carbon nanotube under the action of moving load, *Applied Mathematical Modelling*, 36, pp. 1371–94.
- [94] Yas M., Samadi N., 2012, Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 98, pp. 119–128.
- [95] Shen H.-S., Xiang Y., 2013, Nonlinear analysis of nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations in thermal environments, *Engineering Structures*, 56, pp. 698–708.
- [96] Wattanasakulpong N., Ungbhakorn V., 2013, Analytical solutions for bending, buckling and vibration responses of carbon nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundation, *Computational Materials Science*, 71, pp. 201–208.
- [97] Wu H., Kitipornchai S., 2015, Free vibration and buckling analysis of sandwich beams with functionally graded carbon nanotube-reinforced composite face sheets, *International journal of structural stability and dynamics*, 15.
- [98] Mohammadimehr M., Shahedi S., Roustaei N. B., 2017, Nonlinear vibration analysis of FG-CNTRC sandwich Timoshenko beam based on modified couple stress theory subjected to longitudinal magnetic field using generalized differential quadrature method, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 231, pp. 3866–3885.
- [99] Ebrahimi F., Farazmandnia N., 2016, Thermo-mechanical vibration analysis of sandwich beams with functionally graded carbon nanotube-reinforced composite face sheets based on a higher-order shear deformation beam theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 24, pp. 820–829.

- [100] Rubel R. I., Ali M. H., Jafor M. A., Alam M., 2019, Carbon nanotubes agglomeration in reinforced composites: A review, *AIMS Materials Science*, 6 (5), pp. 756–780.
- [101] Heshmati M., Yas M. H., 2013, Free vibration analysis of functionally graded CNT-reinforced nanocomposite beam using Eshelby-Mori-Tanaka approach, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 27(11), pp. 3403–3408.
- [102] Nejati M., Eslampanah A., Najafizadeh M., 2016, Buckling and Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Beam Under Axial Load, *International Journal of Applied Mechanics*, 08(01), 1650008.
- [103] Kamarian S., Shakeri M., Yas M. H., Bodaghi M., Pourasghar A., 2015, Free vibration analysis of functionally graded nanocomposite sandwich beams resting on Pasternak foundation by considering the agglomeration effect of CNTs, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, pp. 1–34.
- [104] Pan J., Bian L., 2017, Influence of agglomeration parameters on carbon nanotube composites, *Acta Mechanica*, 228(6), pp. 2207–2217.
- [105] Kiani F., Ariaseresht Y., Niroumand A., Afshari H., 2022, Thermo-mechanical buckling analysis of thick beams reinforced with agglomerated CNTs with temperature-dependent thermo-mechanical properties under a nonuniform thermal loading, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 52(1), pp. 477–497.
- [106] Yue X.-G., Sahmani S., Luo H., Safaei B., 2022, Nonlocal strain gradient-based quasi-3D nonlinear dynamical stability behavior of agglomerated nanocomposite microbeams, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 23(1).
- [107] Hà L. T., 2015, *Phân tích dầm FGM có mặt cắt ngang thay đổi chịu tải trọng di động*, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, VAST, Hà Nội.
- [108] Tuyển B. V., 2018, *Dao động của dầm FGM có lỗ rỗng vi mô trong môi trường nhiệt độ chịu tải trọng di động*, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, VAST, Hà Nội.
- [109] Thơm T. T., 2019, *Mô hình phân tử hữu hạn trong phân tích dao động của dầm có cơ tính biến đổi theo hai chiều*, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, VAST, Hà Nội.

- [110] Ánh L. T. N., 2022, *Mô hình phân tử hữu hạn trong phân tích kết cấu dầm sandwich FGM*, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, VAST, Hà Nội.
- [111] Nam P. V., 2022, *Phân tích dao động của dầm, tấm sandwich 2D-FGM hai và ba pha bằng phương pháp phân tử hữu hạn*, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, VAST, Hà Nội.
- [112] Huyền N. N., 2017, *Phân tích dao động và chẩn đoán vết nứt dầm FGM*, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, VAST, Hà Nội.
- [113] Đức N. T., 2018, *Phân tích dầm Timoshenko có nhiều vết nứt bằng vật liệu cơ tính biến thiên (FGM) và ứng dụng vào nhận dạng tham số*, Luận án Tiến sĩ, Trường Đại học Xây dựng, Hà Nội.
- [114] Duy N. B., 2019, *Analysis of functionally graded sandwich beams under hygro-thermo-mechanical loads*, Luận án Tiến sĩ, Đại học Sư phạm Kỹ thuật, Thành phố Hồ Chí Minh.
- [115] Nguyen T.-K., Nguyen T.-P., Vo T. P., Thai H.-T., 2015, Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory, *Composites: Part B*, 76, pp. 273–285.
- [116] Nguyen T.-K., Vo T. P., Nguyen B.-D., Lee J., 2016, An analytical solution for buckling and vibration analysis of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D shear deformation theory, *Composite Structures*, 156, pp. 238–252.
- [117] Phung V. P., Abdel-Wahab M., Liew K. M., Bordas S. P. A., Nguyen X. H., 2015, Isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using higher-order shear deformation theory, *Composite Structures*, 123, pp. 137–149.
- [118] Nguyen T. N., Thai C. H., Nguyen-Xuan H., Lee J., 2018, NURBS-based analyses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite shells, *Composite Structures*, 203, pp. 349–360.
- [119] Nguyen T. N., Lee S., Nguyen P.-C., Nguyen-Xuan H., Lee J., 2020, Geometrically nonlinear postbuckling behavior of imperfect FG-CNTRC shells under axial compression using isogeometric analysis, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 84, 104066.

- [120] Tran H. Q., Vu V. T., Tran M. T., Nguyen-Tri P., 2020, A new four-variable refined plate theory for static analysis of smart laminated functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates, *Mechanics of Materials*, 142, 103294.
- [121] Dung D. V., Hoa L. K., 2013, Research on nonlinear torsional buckling and post-buckling of eccentrically stiffened functionally graded thin circular cylindrical shells, *Composites Part B: Engineering*, 51, pp. 300–309.
- [122] Dung D. V., Hoa L. K., 2013, Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure, *Thin-Walled Structures*, 63, pp. 117–124.
- [123] Hòa L. K., 2015, *Phân tích ổn định tĩnh của vỏ bằng vật liệu có cơ tính iến thiên*, Luận án tiến sĩ Cơ học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [124] Dung D. V., Hoai B. T. T., Hoa L. K., 2017, Postbuckling nonlinear analysis of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners resting on elastic foundations, *Acta Mechanica*, 228(4), pp. 1457–1479.
- [125] Hoa L. K., Hoai B. T. T., Chan D. Q., 2018, Nonlinear thermomechanical post-buckling analysis of ES-FGM truncated conical shells resting on elastic foundations, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(13), pp. 1089–1103.
- [126] Nam V. H., 2015, *Phân tích phi tuyến động lực của vỏ làm bằng vật liệu có cơ tính iến thiên*, Luận án tiến sĩ Cơ học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [127] Đông Đ. T., 2018, *Phân tích ổn định và động lực phi tuyến của vỏ thoải sandwich cơ tính iến thiên chịu tác dụng của tải cơ và nhiệt*, Luận án tiến sĩ Cơ học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [128] Trang L. T. N., Van Tung H., 2018, Tangential Edge Constraint Sensitivity of Nonlinear Stability of CNT-Reinforced Composite Plates under Compressive and Thermomechanical Loadings, *Journal of Engineering Mechanics*, 144(7).
- [129] Trang L. T. N., Tung H. V., 2018, Thermomechanical nonlinear analysis of axially compressed carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels

- resting on elastic foundations with tangentially restrained edges, *Journal of Thermal Stresses*, 41(4), pp. 418–438.
- [130] Trang L. T. N., Van Tung H., 2021, Thermomechanical postbuckling of higher order shear deformable CNT-reinforced composite plates with elastically restrained unloaded edges, *Polymers and Polymer Composites*, 29(9), pp. S857–S875.
- [131] Kiên N. Đ., 2004, *Phân tích kết cấu khung dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn có tính đến yếu tố phi tuyến hình học và vật liệu*, Luận án Tiến sĩ, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, Hà Nội.
- [132] Nguyen H. X., Nguyen T. N., Abdel-Wahab M., Bordas S. P. A., Nguyen-Xuan H., Vo T. P., 2017, A refined quasi-3D isogeometric analysis for functionally graded microplates based on the modified couple stress theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 313, pp. 904–940.
- [133] Le C. I., Tran Q. D., Lam V. D., Nguyen D. K., 2022, Size-dependent behavior of a MEMS microbeam under electrostatic actuation, *Vietnam Journal of Mechanics*, 44(1), pp. 69–81.
- [134] Antman S. S., 2005, Problems in nonlinear elasticity, *Nonlinear Problems of Elasticity*, pp. 513–584.
- [135] Pignataro M., Rizzi N., Luongo A., 2013, *Stability, bifurcation and postcritical behaviour of elastic structures*, volume 39, Elsevier.
- [136] Eshelby J. D., 1957, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proceedings of the Royal Society of London.*, 241 (1226), pp. 376–396.
- [137] Mori T., Tanaka K., 1973, Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica*, 21, pp. 571–74.
- [138] Christensen R. M., 1979, *Mechanics of Composite Materials*, Wiley, New York.
- [139] Hashin Z., Shtrikman S., 1963, A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11, pp. 127–140.

- [140] Tamura I., Tomota Y., Ozawa M., 1973, Strength and ductility of Fe–Ni–C alloys composed of austenite and martensite with various strength, *Proceedings of 3rd International Conference on Strength and Metal Alloys*, 1, pp. 611–615.
- [141] Jin Z. H., Paulino G. H., Dodds R. H. J., 2003, Cohesive fracture modeling of elastic plastic crack growth in functionally graded materials, *Engineering Fracture Mechanics*, 70, pp. 1885–1912.
- [142] Pacoste C., Eriksson A., 1997, Beam elements in instability problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 144, pp. 163–197.
- [143] Antman S. S., 1995, *Nonlinear problems of elasticity*, Springer-Verlag, New York.
- [144] Cook R., Malkus D., Plesha M., Witt R. J., 2002, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 4th edn*, Wiley, New York.
- [145] Crisfield M. A., 1991, *Non-linear finite element analysis of solids and structures, Volume 1: Essentials*, John Wiley and Sons, Chichester.
- [146] Praveen G. N., Reddy J. N., 1998, Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates, *International Journal of Solids and Structures*, 35, pp. 4457–76.
- [147] Kang Y. A., Li X. F., 2010, Large deflection of a non-linear cantilever functionally graded beam, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 29, pp. 1761–1774.
- [148] Daghigh H., Daghigh V., Milani A., Tannant D., Jr T. E. L., Reddy J. N., 2020, Nonlocal bending and buckling of agglomerated CNT-Reinforced composite nanoplates, *Composites Part B: Engineering*, 183.
- [149] Masjedia P. K., Maheri A., Weaver P. M., 2019, Large deflection of functionally graded porous beams based on a geometrically exact theory with a fully intrinsic formulation, *Applied Mathematical Modelling*, 76, pp. 938–957.
- [150] Zuiker J. R., 1995, Functionally graded materials: Choice of micromechanics model and limitations in property variation, *Composite Structures*, 5, pp. 807–819.
- [151] Poole W. J., Ashby M. F., Fleck N. A., 1996, Micro-hardness of annealed and work-hardened copper polycrystals, *Scripta Materialia*, 34(4), pp. 559–564.

- [152] McFarland A. W., Colton J. S., 2005, Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15(5), pp. 1060–1067.
- [153] Koiter W. T., 1969, COUPLE-STRESSES IN THE THEORY OF ELASTICITY, I & II.
- [154] Akbarzadeh Khorshidi M., 2018, The material length scale parameter used in couple stress theories is not a material constant, *International Journal of Engineering Science*, 133, pp. 15–25.
- [155] Eringen A. C., 1972, Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves, *International Journal of Engineering Science*, 10(5), pp. 425–435.
- [156] Eringen A. C., 1972, Nonlocal polar elastic continua, *International Journal of Engineering Science*, 10(1), pp. 1–16.
- [157] Liu Y., Reddy J. N., 2011, A nonlocal curved beam model based on a modified couple stress theory, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 11 (3), pp. 495 –512.
- [158] Zhang B., He Y., Liu D., Gan Z., Shen L., 2014, Non-classical Timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory, *Finite Elements In Analysis And Design*, 79, pp. 22–39.
- [159] Xia W., Wang L., Yin L., 2010, Nonlinear non-classical microscale beams: static bending, postbuckling and free vibration, *International Journal of Engineering Science*, 48 (12), pp. 2044–2–53.
- [160] Asghari M., Kahrobaiyan M., Ahmadian M. T., 2010, A nonlinear Timoshenko beam formulation based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, 48 (12), pp. 1749–1761.
- [161] Crisfield M. A., 1983, An arc-length method including line searches and accelerations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(9), pp. 1269–1289.
- [162] Fallah A., Aghdam M. M., 2011, Nonlinear free vibration and post-buckling analysis of functionally graded beams on nonlinear elastic foundation, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 30, pp. 571–583.

- [163] Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E., 1989, *Concepts and applications of finite element analysis*, 3rd edition, John Wiley & Sons, New York.
- [164] Wood R. D., Zienkiewicz O. C., 1977, Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells, *Computers & Structures*, 7, pp. 725–735.
- [165] Hsiao K. M., Huo F. Y., 1987, Nonlinear finite element analysis of elastic frames, *Computers and Structures*, 26, pp. 693–701.
- [166] Lee Y., Zhao X., Reddy J. N., 2010, Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, pp. 1645–1653.