BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Phan Ngọc Minh

TÍNH CHẤT NHIỀU NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC NỬA TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2025

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Phan Ngọc Minh

TÍNH CHẤT NHIỀU NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC NỬA TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Ngành: Toán giải tích

Mã số: 8460102

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC :
GS. TSKH. Nguyễn Minh Trí

Hà Nội - 2025

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận văn thạc sĩ với đề tài "**Tính chất nhiều nghiệm của bài toán biên đối với một số lớp phương trình elliptic nửa tuyến tính**" là kết quả nghiên cứu và làm việc của riêng tôi dưới sự hướng dẫn trực tiếp của GS. TSKH. Nguyễn Minh Trí. Những tài liệu, kết quả nghiên cứu của tác giả khác trong luận văn đã được trích dẫn và ghi rõ nguồn gốc. Nếu có bất kỳ sự gian dối hay vi phạm nào được phát hiện, tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật.

Hà Nội, tháng 03 năm 2025

Học viên

Phan Ngọc Minh

LỜI CẢM ƠN

Trước tiên, tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến GS. TSKH. Nguyễn Minh Trí, người thầy đã tận tâm hướng dẫn, truyền đạt kiến thức, và định hướng nghiên cứu cho tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn này. Sự tận tụy và những lời khuyên quý báu của Thầy không chỉ giúp tôi hoàn thành tốt đề tài mà còn truyền cảm hứng cho tôi trong con đường nghiên cứu khoa học.

Tôi cũng xin cảm ơn các thầy cô giáo tại Viện Toán học đã không ngừng truyền đạt tri thức, chia sẻ kinh nghiệm quý báu, cũng như các anh chị đồng nghiệp và bạn bè đã luôn hỗ trợ và động viên tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi chân thành cảm ơn Viện Toán học, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã cung cấp môi trường học tập thuận lợi và điều kiện cơ sở vật chất cần thiết để tôi hoàn thành nghiên cứu này.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến gia đình, những người đã luôn là điểm tựa vững chắc, đã kiên nhẫn, động viên và yêu thương tôi vô điều kiện. Sự ủng hộ và hy sinh của gia đình là động lực lớn nhất giúp tôi vượt qua mọi khó khăn và thử thách trong suốt hành trình học tập.

Một lần nữa, tôi xin chân thành cảm ơn tất cả.

Hà Nội, tháng 03 năm 2025

Học viên

Phan Ngọc Minh

Mục lục

Lời cam đoan **i**

Lời cảm ơn **ii**

Mục lục **iii**

Danh mục ký hiệu **iv**

Mở đầu **iv**

1 Kiến thức chuẩn bị **3**

1.1 Không gian $L^p(\Omega)$ 3

1.2 Không gian $W^{k,p}(\Omega)$ 4

1.3 Định lý nhúng 5

1.4 Các bất đẳng thức cơ bản 6

1.5 Không gian $H_0^1(\Omega)$ và $H^{-1}(\Omega)$ 9

1.6 Định lý về biến dạng 10

1.7 Hàm Carathéodory 11

2 Bài toán biên đối với lớp phương trình elliptic nửa tuyến tính **13**

2.1 Giới thiệu bài toán 13

2.2 Trường hợp f không thoả mãn điều kiện Ambrosetti-Rabinowitz 16

2.3 Trường hợp f thoả mãn điều kiện Ambrosetti-Rabinowitz . . . 32

Kết luận **49**

Tài liệu tham khảo **50**

Danh mục ký hiệu

$\mathbb{R}^N$	Không gian véc tơ thực N chiều.
$C^\infty(\Omega)$	Không gian các hàm khả vi vô hạn trong Ω.
Δ	Toán tử Laplace trong không gian $\mathbb{R}^N$, tức là $\Delta = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.
$\mathrm{Vol}(\Omega)$	Độ đo Lebesgue của miền $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

LỜI MỞ ĐẦU

Nghiệm không tầm thường của bài toán biên cho phương trình elliptic phi tuyến đã được nghiên cứu sâu rộng từ những năm 1950, và trong quá trình đó, nhiều chuyên gia đã đạt được những kết quả ấn tượng và có giá trị sâu sắc. Trong luận văn này, chúng tôi tập trung tìm hiểu một số kết quả nghiên cứu gần đây, được trình bày trong bài báo [1] của hai tác giả Luyện và Trí.

Tính chất nhiều nghiệm của bài toán biên đối với phương trình elliptic phi tuyến đã được thiết lập trong các công trình của Bahri, Berestycki, Struwe, Rabinowitz, Lions, Tanaka, Bolle, Ghoussoub, Tehrani, Hirano, Zou và Santos. Một trong những phương pháp chủ yếu để đạt được các kết quả này là phương pháp nhiễu. Trong công trình mới đây, hai tác giả Luyện và Trí đã sử dụng phương pháp nhiễu nhằm nghiên cứu tính chất nhiều nghiệm cho lớp phương trình elliptic rộng hơn.

Hướng nghiên cứu tính chất nhiều nghiệm là một hướng nghiên cứu thời sự, hiện đại và nó không chỉ hạn chế trong lớp phương trình elliptic phi tuyến mà còn có thể phát triển ra cho phương trình elliptic suy biến.

Mục tiêu của đề tài: Đọc hiểu kết quả trong bài báo [1] của hai tác giả Luyện và Trí.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu: Chúng tôi xem xét bài toán biên đối với phương trình elliptic nửa tuyến tính

$$-\Delta u = f(x,u) + d(x,u), \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Phương pháp nghiên cứu: Để nghiên cứu tính chất nhiều nghiệm của bài toán biên, chúng tôi sử dụng phương pháp nhiễu Rabinowitz, phương pháp điểm tới hạn, phương pháp biến phân và các định lý nhúng kiểu Sobolev.

Cấu trúc luận văn: Ngoài phần Lời cam đoan, Lời cảm ơn, Danh mục ký

hiệu, Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, luận văn được chia thành hai chương:

- Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.
- Chương 2: Bài toán biên đối với lớp phương trình elliptic nửa tuyến tính.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Giả sử miền $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là bị chặn với biên $\partial\Omega$.

1.1. Không gian $L^p(\Omega)$

Định nghĩa 1.1.1. *Không gian $L^p(\Omega)$ là không gian Banach cổ điển bao gồm tất cả các hàm u đo được trên Ω và khả tích bậc p sao cho*

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty.$$

Ta định nghĩa chuẩn của không gian $L^p(\Omega)$ bởi

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

trong đó $|u(x)|$ là giá trị tuyệt đối của $u(x)$.

Với $p = \infty$, không gian $L^\infty(\Omega)$ là không gian Banach gồm các hàm bị chặn trên Ω cùng với chuẩn

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_\Omega |u(x)|.$$

Nhận xét 1.1.1. *Với $p = 2$ thì không gian $L^2(\Omega)$ là Hilbert có tích vô hướng*

$$\langle u_1; u_2\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u_1(x).u_2(x)dx,$$

và chuẩn

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

1.2. Không gian $W^{k,p}(\Omega)$

Định nghĩa 1.2.1. *Với $1 \leq p < \infty$ và k là một số nguyên không âm, ta định nghĩa*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u(x) \in W^k(\Omega) : D^s u(x) \in L^p(\Omega), \text{ với mọi } |s| \leq k\},$$

trong đó

$$\begin{aligned} s &= (s_1, s_2, \cdots, s_N) \quad (s_j \in \mathbb{N}), \\ |s| &= s_1 + s_2 + \cdots + s_N, \\ D^s u &= D_1^{s_1} D_2^{s_2} \cdots D_N^{s_N} \quad \left(D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\right). \end{aligned}$$

Ta định nghĩa chuẩn của $u(x) \in W^{k,p}(\Omega)$ là

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|s| \leq k} |D^s u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ngoài ra ta còn có một chuẩn khác tương đương

$$\|u\|^p_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|s| \leq k} |D^s u|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Nhận xét 1.2.1. *Giả sử Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$ và k là một số nguyên không âm. Khi đó $W^{k,p}(\Omega)$ là một không gian Banach.*

Nhận xét 1.2.2. *Nếu $k = 1$ và $p = 2$ thì không gian*

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^1 u \in L^2(\Omega)\}$$

là một không gian Hilbert được trang bị tích vô hướng

$$\langle u_1; u_2 \rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \langle u_1; u_2 \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{1 \leq k \leq n} \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x_k}; \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

cùng với chuẩn

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 + u^2(x)\right) dx.$$

Nhận xét 1.2.3. *Nếu $k < h$ thì*

$$W^{h,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega).$$

1.3. Định lý nhúng

Định nghĩa 1.3.1. *Giả sử X và Y là hai không gian Banach. Khi đó không gian X được gọi là nhúng vào không gian Y nếu với mọi $u \in X$ kéo theo $u \in Y$.*

Định nghĩa 1.3.2. *Giả sử X và Y là hai không gian Banach. Khi đó không gian X được gọi là nhúng liên tục vào không gian Y, ký hiệu $X \hookrightarrow Y$, nếu X nhúng vào Y và tồn tại $C > 0$ (không phụ thuộc vào $u \in X$) sao cho $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$.*

Định nghĩa 1.3.3 (Phép nhúng compact)**.** *Giả sử X và Y là hai không gian Banach. Khi đó không gian X được gọi là nhúng compact vào không gian Y, ký hiệu $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$, nếu một tập bị chặn trong X là một tập tiền compact trong Y.*

Định lí 1.3.1 (Định lý nhúng vào $L^p(\Omega)$)**.** *Gọi Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$. Nếu p và p' là hai số thoả mãn $1 \leq p < p' < \infty$ thì ta có $L^{p'}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Hơn nữa, ánh xạ*

$$z : L^{p'}(\Omega) \mapsto L^p(\Omega)$$

là nhúng liên tục.

Chứng minh. Gọi $u \in L^{p'}(\Omega)$. Ta sẽ chỉ ra $u \in L^p(\Omega)$, nghĩa là $\int_\Omega |u|^p dx < \infty$.

Do

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^p dx = \int_\Omega 1.|u|^p dx,$$

nên theo bất đẳng thức Hölder, ta thu được

$$\begin{aligned}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} &\leq \left[\int_\Omega 1^{\frac{p'}{p'-p}} dx\right]^{\frac{p'-p}{p'}} . \left[\int_\Omega (|u|^p)^{\frac{p'}{p}} dx\right]^{\frac{p}{p'}} \\ &= (\mathrm{Vol}(\Omega))^{\frac{p'-p}{p'}} \left[\|u\|_{L^{p'}(\Omega)}\right]^{\frac{p}{p'}} < \infty. \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Do Ω là miền bị chặn nên

$$(\mathrm{Vol}(\Omega))^{\frac{p'-p}{p'}} < \infty,$$

suy ra $u \in L^p(\Omega)$.

Từ (1.1) ta có

$$\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq (\mathrm{Vol}\,\Omega)^{\frac{p'-p}{p'}} \left(\int_\Omega |u|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{pp'}}$$
$$= (\mathrm{Vol}\,\Omega)^{\frac{p'-p}{p'}} \left(\int_\Omega |u|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}},$$

suy ra

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq (\mathrm{Vol}\,\Omega)^{\frac{p'-p}{p'}} \cdot \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Vậy tức là ánh xạ $z : L^{p'}(\Omega) \mapsto L^p(\Omega)$ liên tục và

$$\|z\|_{L^p(\Omega)} \leq (\mathrm{Vol}\,\Omega)^{\frac{p'-p}{p'}} = (\mathrm{Vol}\,\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}.$$

□

Định lí 1.3.2 (Sobolev). *Gọi Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$. Lúc này ta thu được khẳng định*

(a) Nếu $kp < n$ và $q \leq \dfrac{np}{n-kp}$ thì không gian $W^{k,p}(\Omega)$ nhúng liên tục vào không gian $L^q(\Omega)$.

(b) Nếu $kp < n$ và $q < \dfrac{np}{k-np}$ thì không gian $W^{k,p}(\Omega)$ nhúng compact vào không gian $L^q(\Omega)$.

1.4. Các bất đẳng thức cơ bản

Bất đẳng thức Cauchy

Cho a và b là hai số thực. Khi đó

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Chứng minh. $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0.$ □

Bất đẳng thức Cauchy cho ε

Cho a, b là hai số thực dương và $\varepsilon > 0$. Khi đó

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Chứng minh. Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy cho hai số $(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}} a$ và $\dfrac{b}{(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}$, ta có

$$ab = \left((2\varepsilon)^{\frac{1}{2}} a\right) . \frac{b}{(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

□

Bất đẳng thức Young

Cho p, p' là hai số thoả mãn $1 < p, p' < \infty$ và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Khi đó

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad (\text{với } a, b > 0).$$

Chứng minh. Vì ánh xạ $x \mapsto e^x$ là lồi, nên ta có

$$\begin{aligned} ab &= \exp\left(\log a + \log b\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log a^{p'}\right) \\ &\leq \frac{1}{p}\exp\left(\log a^p\right) + \frac{1}{p'}\exp\left(\log a^{p'}\right) \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \end{aligned}$$

□

Nhận xét 1.4.1. *Bất đẳng thức Cauchy là trường hợp riêng của Bất đẳng thức Young khi $p = q = 2$.*

Bất đẳng thức Young cho ε

Cho p, p' là hai số thoả mãn $1 < p, p' < \infty$ và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Khi đó

$$ab \leq \varepsilon a^p + \alpha(\varepsilon) b^{p'} \quad (a, b > 0, \varepsilon > 0),$$

trong đó $\alpha(\varepsilon) = \dfrac{1}{(\varepsilon p)^{\frac{p'}{p}}}$.

Chứng minh. Áp dụng Bất đẳng thức Young cho hai số $(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}} a$ và $\dfrac{b}{(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}}$, ta có

$$ab = \left((\varepsilon p)^{\frac{1}{p}} a\right).\frac{b}{(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}} \leq \varepsilon a^p + \frac{b^{p'}}{(\varepsilon p)^{\frac{p'}{p}}} = \varepsilon a^p + \alpha(\varepsilon) b^{p'}.$$

□

Bất đẳng thức Hölder

Cho p, p' là hai số thoả mãn $1 \leq p, p' \leq \infty$ và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Nếu $u \in L^p(\Omega)$ và $p' \in L^{p'}(\Omega)$ thì

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}.\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Chứng minh. Giả sử $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} = 1$. Áp dụng Bất đẳng thức Young, ta có

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx + \frac{1}{p'}\int_\Omega |v|^{p'} dx = 1 = \|u\|_{L^p(\Omega)}.\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

□

Bất đẳng thức Hölder mở rộng

Cho $p_1, \cdots, p_m$ là các số thoả $1 \leq p_1, \cdots, p_m \leq \infty$ và $\dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_m} = 1$. Nếu $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ với $k = 1, \cdots, m$ thì

$$\int_\Omega |u_1 \cdots u_m| dx \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}.$$

Chứng minh. Sử dụng nguyên lý quy nạp toán học kết hợp với Bất đẳng thức Hölder. □

Bất đẳng thức nội suy cho chuẩn trong $L^p(\Omega)$

Cho p, q, r là ba số thoả mãn $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$ và $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\vartheta}{p} + \dfrac{1-\vartheta}{r}$. Nếu $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ thì $u \in L^q(\Omega)$ và

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|^{\vartheta}_{L^p(\Omega)}.\|u\|^{1-\vartheta}_{L^r(\Omega)}.$$

Chứng minh. Theo Bất đẳng thức Hölder,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^q dx &\le \int_\Omega |u|^{\vartheta q}|u|^{(1-\vartheta)q}dx \\ &\le \left(\int_\Omega |u|^{\vartheta q\cdot\frac{p}{\vartheta q}}dx\right)^{\frac{\vartheta q}{p}}.\left(\int_\Omega |u|^{(1-\vartheta)q\cdot\frac{r}{(1-\vartheta)q}}dx\right)^{\frac{(1-\vartheta)q}{r}}.\end{aligned}$$

□

Bổ đề Fatou

Gọi $u_1, u_2, \cdots$ là dãy các hàm không âm đo được trên $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Khi đó

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} u_n dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega u_n dx.$$

Chứng minh. Xem [2]. □

1.5. Không gian $H_0^1(\Omega)$ và $H^{-1}(\Omega)$

Ta gọi $C_0^\infty(\Omega)$ là không gian các hàm $u \in C^\infty(\Omega)$ mà giá của chúng, được định nghĩa bởi

$$\operatorname{spt} u := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \ne 0\}},$$

là tập compact chứa trong Ω. Với mọi $u(x), v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, ta trang bị cho không gian $C_0^\infty(\Omega)$ tích vô hướng

$$(u,v)_{C_0^\infty(\Omega)} = \int_\Omega Du.Dv dx$$

và chuẩn

$$\|u\|_{C_0^\infty(\Omega)} = \int_\Omega |Du|^2 dx,$$

trong đó

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial x_N}\right), \quad Du.Dv = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad |Du|^2 = \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2.$$

Với tích vô hướng và chuẩn được định nghĩa ở trên, $C_0^\infty(\Omega)$ là không gian tiền Hilbert. Gọi $H_0^1(\Omega)$ là không gian làm đầy của $C_0^\infty(\Omega)$. Khi ấy không gian $H_0^1(\Omega)$ trở thành không gian Hilbert. Ngoài ra ta còn có $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

Từ định lý nhúng Sobolev ta có $H_0^1(\Omega)$ nhúng compact vào $L^2(\Omega)$. Điều đó có nghĩa là nếu tập $A \subset H_0^1(\Omega)$ bị chặn thì A là compact tương đối trong $L^2(\Omega)$.

Gọi không gian đối ngẫu $H^{-1}(\Omega)$ của $H_0^1(\Omega)$ là không gian gồm tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục từ H_0^1 vào trường số thực $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h : H_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \langle h; u \rangle, \end{aligned}$$

trong đó ký hiệu $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ là phép toán h tác động vào $u \in H_0^1(\Omega)$, với chuẩn

$$\|h\|_{-1} = \sup_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{|\langle h; u \rangle|}{\|u\|_{u \in H_0^1(\Omega)}}.$$

Từ Định lý 1.3.2 ta có kết quả sau cho không gian $H_0^1(\Omega)$.

Định lí 1.5.1. *Giả sử Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với $N \geq 3$. Khi đó*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{với mọi } q \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right].$$

Ngoài ra, phép nhúng là compact khi và chỉ khi $q \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right)$.

Số $\widetilde{2} := \dfrac{2N}{N-2}$ được gọi là *số mũ Sobolev tới hạn* đối với phép nhúng $H_0^1(\Omega)$ vào $L^q(\Omega)$.

1.6. Định lý về biến dạng

Định nghĩa 1.6.1. *Gọi $\mathbb{V}$ là một không gian Banach thực cùng với không gian đối ngẫu $\mathbb{V}^*$ của nó, phiếm hàm $\Xi \in C^1(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ và $\mathcal{A} \subset \mathbb{V}$. Ta nói Ξ thoả mãn điều kiện Palais-Smale trên $\mathcal{A}$ nếu với mỗi dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ sao cho $\Xi(u_n)$ bị chặn và*

$$\left\|\Xi'(u_n))\right\|_{\mathbb{V}^*} \to 0 \text{ khi } n \to \infty,$$

thì tồn tại một dãy con $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ mạnh trong $\mathbb{V}$.

Định nghĩa 1.6.2. *Phiếm hàm $\Xi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ được gọi là khả vi Fréchet tại $u \in \mathbb{V}$ nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục $\Xi'(u) \in \mathbb{V}^*$, sao cho*

$$\lim_{\|h\|_{\mathbb{V}} \to 0} \frac{|\Xi(u+h) - \Xi(u) - \Xi'(u)(h)|}{\|h\|_{\mathbb{V}}} = 0.$$

Phiếm hàm Ξ được gọi là khả vi Fréchet trên $\mathbb{V}$ nếu nó khả vi Fréchet với mọi $u \in \mathbb{V}$.

Định nghĩa 1.6.3. *Phiếm hàm $\Xi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ được gọi là khả vi Gâteaux tại $u \in \mathbb{V}$ nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục $\Xi'_G \in \mathbb{V}^*$, sao cho*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Xi(u + th) - \Xi(u)}{t} = \Xi'_G(u)(h)$$

với mọi $h \in X$.

Phiếm hàm Ξ được gọi là khả vi Gâteaux trên $\mathbb{V}$ nếu nó khả vi Gâteaux với mọi $u \in \mathbb{V}$.

Nhận xét 1.6.1. *Từ tính khả vi Fréchet ta suy ra được tính khả vi Gâteaux, tuy nhiên điều ngược lại không đúng.*

Định nghĩa 1.6.4. *Giả sử Ξ là một phiếm hàm khả vi Frechet trên không gian Banach $\mathbb{V}$ với không gian đối ngẫu định chuẩn $\mathbb{V}^*$ và cặp đối ngẫu $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V}^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Ký hiệu $\Xi' : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}^*$ là đạo hàm Frechet của Ξ, khi đó đạo hàm của Ξ tại u theo hướng v được cho bởi*

$$\langle v, \Xi'(u) \rangle = \Xi'(u)(v).$$

Ta sẽ sử dụng phiên bản sau của Định lý về biến dạng (xem [3, 4]).

Bổ đề 1.6.1. *Giả sử phiếm hàm $\Xi \in C^1(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ thoả mãn điều kiện Palais-Smale trên $\widehat{A}_M = \{u \in \mathbb{V} : \Xi(u) \geq M\}$. Khi đó nếu $c > M$ không phải giá trị tới hạn của Ξ và $\bar{\epsilon} > 0$ thì tồn tại $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ và $\eta \in C([0,1] \times \mathbb{V}, \mathbb{V})$ sao cho*

(a) $\eta(t, u) = u$ *nếu* $u \notin \Xi^{-1}(c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon})$,

(b) $\eta(1, A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon}$. *Ở đây với mỗi* $m \in \mathbb{R}$ *ta ký hiệu* $A_m := \{u \in \mathbb{V} : \Xi(u) \leq m\}$.

1.7. Hàm Carathéodory

Định nghĩa 1.7.1. *Hàm $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn hai điều kiện*

(a) $x \mapsto f(x, \zeta)$ *đo được Lebesgue với* $\zeta \in \mathbb{R}$,

(b) $\zeta \mapsto f(x, \zeta)$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$ *với* $x \in \Omega$,

được gọi là hàm Carathéodory.

Chương 2

Bài toán biên đối với lớp phương trình elliptic nửa tuyến tính

2.1. Giới thiệu bài toán

Vào những thập kỷ trước, bài toán giá trị biên đối với phương trình elliptic nửa tuyến tính

$$-\Delta u = f(x,u) + d(x,u), \quad u \in H_0^1(\Omega) \tag{2.1}$$

đã được nhiều tác giả nghiên cứu (xem [5, 6, 7] cùng với các tài liệu tham khảo trong đó). Ở đây Ω là miền trơn bị chặn trong $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, hàm $f(x,\zeta)$ là hàm lẻ theo ζ và $d(x,\zeta)$ là điều kiện nhiễu không lẻ. Điều kiện sau đây đã được giới thiệu trong [8, 9]

(Y_0) Với $\mu > 2$ và $R > 0$, ta có

$$0 < \mu F(x,\zeta) \leq f(x,\zeta)\zeta, \quad \text{với mọi } x \in \Omega, |\zeta| \geq R,$$

trong đó $F(x,\zeta) = \displaystyle\int_0^\zeta f(x,\tau)d\tau$.

Điều kiện này đóng vai trò then chốt trong việc nghiên cứu các phương trình elliptic. Sau đây chúng tôi xin tóm tắt một số kết quả thu được trong vòng 40 năm qua.

Bahri và Berestycki (xem [5]) đã chứng minh rằng nếu

$$f(x,\zeta) \equiv |\zeta|^{p-2}\zeta, \quad d(x,\zeta) \equiv d(x) \in L^2(\Omega), \quad p \in (1, S_N),$$

trong đó S_N là nghiệm lớn nhất của phương trình

$$(2N-2)S^2 - (N+2)S - N = 0, \quad N \geq 2,$$

thì khi đó bài toán (2.1) có vô số nghiệm trong $H_0^1(\Omega)$. Trường hợp này được nghiên cứu lần đầu tiên bởi Bahri và Berestycki [5], độc lập với Struwe [6].

Bài toán (2.1) được nghiên cứu bởi Rabinowitz [10, 11] với giả thiết $N \geq 3$, hàm f thoả mãn điều kiện (Y_0), (K_a), (K_b), $d\,(x,\zeta) \equiv d(x) \in L^2(\Omega)$ và

$$\frac{2p}{N(p-2)} - 1 > \frac{\mu}{\mu - 1}, \tag{2.2}$$

trong đó

(K_a) $f(x,\zeta) \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right), f(x,-\zeta) = -f(x,\zeta)$ với mọi $(x,\zeta) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

(K_b) Tồn tại $2 < p < \widetilde{2} := \dfrac{2N}{N-2}, C > 0$ sao cho hầu khắp nơi trong Ω,

$$f\,(x,\zeta) \leq C\left(1 + |\zeta|^{p-1}\right).$$

Tác giả sau đó đã chứng minh được bài toán (2.1) có một dãy nghiệm không bị chặn trong $H_0^1(\Omega)$ (xem [10, Định lý 1.5]). Giả sử rằng f thoả mãn các điều kiện (Y_0), (K_a), (K_b), $d(x,\zeta) \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ và

$$|d(x,\zeta)| \leq \alpha_1 + \alpha_2|\zeta|^{\sigma}, \quad 0 \leq \sigma < \mu - 1, \quad \frac{2p}{N(p-2)} - 1 > \frac{\mu}{\mu - \sigma - 1},$$

trong đó α_1, α_2 là các số thực không âm, thì bài toán (2.1) có một dãy nghiệm không bị chặn trong $H_0^1(\Omega)$ (xem [10, Chú ý 1.71]).

Bahri và Lions [7] lại giả sử rằng

$$f(x,\zeta) \equiv |\zeta|^{p-2}\,\zeta, 2 < p < \widetilde{2}, \quad (p < \infty \text{ nếu } N = 2)$$

sao cho $d : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory thoả mãn

$$|d(x,\zeta)| \leq d_1(x) + \alpha_3\,|\zeta|^{\frac{N+2}{N-2}} \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega \text{ với } \alpha_3 \geq 0,$$
$$|D\,(x,\zeta)| \leq d_2(x) + d_3(x)\,|\zeta|^{\sigma_1} \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega \text{ với } 0 \leq \sigma_1 < 2,$$

trong đó

$$D(x,\zeta) := \int_0^{\zeta} d(x,\tau)d\tau, d_1(x) \in L_+^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega), d_2(x) \in L_+^1(\Omega), N > 2,$$
$$d_3(x) \in L_+^{\beta}(\Omega), \text{ với } \beta > 1, \beta' < \frac{2N}{\sigma_1(N-2)}, \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1,$$
$$L_+^{\beta}(\Omega) := \{d : \Omega \to \mathbb{R}|_d \in L^{\beta}(\Omega), d(x) \leq 0 \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega\}$$

và

$$2 < p < \frac{2N - 2\sigma_1}{N-2}. \tag{2.3}$$

Với các giả thiết như trên, Bahri và Lions đã chứng minh được bài toán (2.1) có vô số nghiệm trong $H_0^1(\Omega)$. Rõ ràng, giả thiết về p trong (2.3) yếu hơn (2.2).

Sau này Tanaka [12] thu được kết quả tồn tại nghiệm tương tự như trong [7], bằng việc giả sử $f(x,\zeta) \equiv f(\zeta)$ thoả mãn (Y_0), (K_a), (K_b), $d(x,\zeta) \equiv d(x) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, và

$$\frac{2p}{N(p-2)} > \frac{\mu}{\mu - 1}. \tag{2.4}$$

Tác giả đã chứng minh được bài toán (2.1) có một dãy nghiệm không bị chặn trong $H_0^1(\Omega)$ (xem [12, Định lý 1]). Giả thiết về p trong (2.4) yếu hơn (2.2).

Tehrani [13] đã xem xét trường hợp thế vị đổi dấu. Bolle, Ghoussoub và Tehrani [14] cũng đã thu được một số kết quả tồn tại trên phương trình elliptic nhiễu

$$-\Delta u = |u|^{p-2}u + d(x) \quad \text{trong } \Omega,$$
$$u = u_0 \quad \text{trên } \partial\Omega,$$

trong đó $u_0 \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ với $\Delta u_0 = 0, 2 < p < \widetilde{2}$. Tác giả Long [15] thì đã xem xét hệ Hamilton siêu bậc hai nhiễu.

Hirano và Zou [16] thì nghiên cứu về bài toán giá trị biên elliptic

$$-\Delta u = |u|^{p-2}u + \beta d(x,u), \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{2.5}$$

trong đó $2 < p < \widetilde{2}(N \geq 3)$, và $d(x,\zeta) \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), d(x,\zeta)\zeta \geq 0$ với mọi $x \in \Omega, \zeta \in \mathbb{R}, \lim\limits_{\zeta \to 0} \dfrac{d(x,\zeta)}{\zeta} = 0$ hội tụ đều theo $x \in \Omega$. Khi đó tác giả chứng minh rằng với mỗi $m \in \mathbb{N}$, tồn tại $\beta_m > 0$ sao cho với mỗi $\beta \in (0, \beta_m)$, bài toán (2.5) có ít nhất m nghiệm trái dấu phân biệt.

Gần đây, Santos [17] đã sử dụng lý thuyết bậc Leray-Shauder kết hợp với phương pháp nghiệm trên và nghiệm dưới để chỉ ra sự tồn tại và tính chất nhiều nghiệm của bài toán

$$\big(\psi(u')\big)' = f(\tau, u, u')$$
$$u(0) = u(T) = u'(0),$$

trong đó ψ là đồng phôi đơn điệu tăng thoả mãn $\psi(0) = 0$, và f là hàm liên tục.

2.2. Trường hợp f không thoả mãn điều kiện Ambrosetti-Rabinowitz

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu tính chất nhiều nghiệm của (2.1), bằng cách sử dụng các giả thiết sau: $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory thoả mãn

(Y_1) $f(x, -\zeta) = -f(x, \zeta)$ với mọi $(x, \zeta) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

(Y_2) Tồn tại $2 < p < \widetilde{2}, \alpha_1 > 0$ sao cho

$$|f(x, \zeta)| \leq \alpha_1(1 + |\zeta|^{p-1}) \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega \times \mathbb{R}.$$

(Y_3) Tồn tại một hằng số dương r_0 sao cho

$$F(x, \zeta) \geq 0, \quad (x, \zeta) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ và } |\zeta| \geq r_0$$
$$\lim_{|\zeta| \to \infty} \frac{F(x, \zeta)}{\zeta^2} = \infty \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega.$$

(Y_4) Tồn tại hằng số $\alpha_2 > 0$ và $\kappa > \frac{N}{2}$ sao cho

$$|F(x, \zeta)|^\kappa \leq \alpha_2 |\zeta|^{2\kappa} \widehat{F}(x, \zeta), \quad (x, \zeta) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ và } |\zeta| \geq r_0,$$

trong đó $\widehat{F}(x, \zeta) = \dfrac{\zeta f(x, \zeta)}{2} - F(x, \zeta)$.

(Y_5) Tồn tại một hằng số dương $\alpha_3 > 0$ và $\rho_1 \in [2, \widetilde{2})$ sao cho

$$\widehat{F}(x, \zeta) \geq \alpha_3(|\zeta|^\rho - 1), \quad \text{với mọi } (x, \zeta) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

(Y_6) $d : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory thoả mãn: Tồn tại

$$d_1(x) \in L^{p_1}(\Omega), \quad d_2(x) \in L^{p_2}(\Omega), \quad \frac{p_1}{p_1 - 1} \leq \rho_1, \quad p_2 > 1,$$
$$\frac{(\sigma_1 + 1)p_2}{p_2 - 1} < \rho_1, \quad \sigma_1 \in [0, \rho_1 - 1), \quad p_1 > \max\left\{1, \frac{\widetilde{2}p_2}{p_2\sigma_1 + \widetilde{2}}\right\},$$

sao cho

$$|d(x, \zeta)| \leq d_1(x) + d_2(x)|\zeta|^{\sigma_1}$$

hầu khắp nơi trong $\Omega \times \mathbb{R}$.

Ta định nghĩa phiếm hàm Euler-Lagrange liên kết với bài toán (2.1) là

$$\Xi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_\Omega D(x,u)dx.$$

Từ [18, Mệnh đề 2.2], (Y_2) và (Y_6), ta có Ξ là định nghĩa tốt trên $H_0^1(\Omega)$ và $\Xi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ với

$$\Xi'(u)(v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx - \int_\Omega d(x,u)v dx$$

với mọi $v \in H_0^1(\Omega)$. Dễ dàng chỉ ra được các điểm tới hạn của Ξ là nghiệm của bài toán (2.1).

Bổ đề 2.2.1. *Giả sử (Y_2), (Y_5), (Y_6) được thoả mãn, và u là điểm tới hạn của Ξ. Khi đó tồn tại hằng số α_5 sao cho*

$$\int_\Omega |u(x)|^{\rho_1} dx \le \alpha_5(\Xi^2(u) + 1)^{1/2}. \tag{2.6}$$

Chứng minh. Vì u là điểm tới hạn của Ξ, nên theo (Y_2), (Y_5), (Y_6) và bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
\Xi(u) &= \Xi(u) - \frac{1}{2}\Xi'(u)(u) \\
&\ge \int_\Omega \widehat{F}(x,u)dx - \int_\Omega \left(\left|2^{-1}d(x,u)u\right| + |D(x,u)|\right) dx \\
&\ge \alpha_4 \int_\Omega |u|^\rho dx - \alpha_6 \left(\int_\Omega |u|^{\frac{(\sigma+1)p_2}{p_2-1}} dx\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}} - \alpha_7.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Khi đó (2.6) được suy ra bởi (2.7) và bất đẳng thức Young, ta có điều phải chứng minh. □

Tiếp theo, ta định nghĩa một phiếm hàm sửa đổi $\overline{\Xi}(u)$. Gọi $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sao cho

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \le 1, \\ 0 & \text{nếu } t > 2 \end{cases}$$

và $-2 < \chi' < 0$ với $t \in (1,2)$.
Gọi $u \in H_0^1(\Omega)$, ta đặt

$$\kappa(u) = 2\Theta\left((\Xi(u))^2 + 1\right)^{1/2},$$
$$\psi(u) = \chi\left(\kappa(u)^{-1}\int_\Omega |u(x)|^{\rho_1}dx\right)$$

và

$$\overline{\Xi}(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u) - \psi(u)D(x,u)\right)dx, \tag{2.8}$$

trong đó Θ là hằng số dương đủ lớn, mà sẽ được chọn sau theo Bổ đề 2.2.3. Khi đó ta thu được

$$\begin{aligned}\overline{\Xi}'(u)(u) = (1+T_1(u))&\left(\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \int_\Omega f(x,u)udx\right)\\ &- T_2(u)\int_\Omega D(x,u)dx - (\psi(u)+T_1(u))\int_\Omega d(x,u)udx,\end{aligned} \tag{2.9}$$

trong đó

$$T_1(u) = \chi'\left(\kappa(u)^{-1}\int_\Omega |u|^{\rho_1}dx\right)\kappa(u)^{-3}(2\Theta)^2\Xi(u)\int_\Omega |u|^{\rho_1}dx\int_\Omega D(x,u)dx,$$
$$T_2(u) = \rho_1\chi'\left(\kappa(u)^{-1}\int_\Omega |u|^{\rho_1}dx\right)\kappa(u)^{-1}\int_\Omega |u|^{\rho_1}dx.$$

Gọi $\mathrm{spt}(\psi)$ là giá của ψ.

Bổ đề 2.2.2. *Giả sử rằng (Y_1), (Y_2), (Y_5), (Y_6) được thoả mãn.*

(a) Nếu $u \in \mathrm{spt}(\psi)$ thì

$$\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right| \le \alpha_8\left(|\Xi(u)|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}} + |\Xi(u)|^{\frac{1}{\rho_1}} + 1\right).$$

(b) Tồn tại hằng số α_{12} sao cho với mọi $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$|\overline{\Xi}(u) - \overline{\Xi}(-u)| \le \alpha_{12}\left(|\overline{\Xi}(u)|^{\frac{1}{\rho_1}} + |\overline{\Xi}(u)|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}} + 1\right).$$

(c) Tồn tại hằng số $M_0, \alpha_{15} > 0$ sao cho nếu $M \ge M_0, \overline{\Xi}(u) \ge M, u \in \mathrm{spt}(\psi)$ thì $\Xi(u) \ge \alpha_{15}M$.

(d) Với mọi $\delta > 0$ đủ nhỏ, tồn tại $M > 0$ đủ lớn để với mọi $u \in H_0^1(\Omega), \overline{\Xi}(u) \geq M$ ta có $|T_1(u)| \leq \delta, |T_2(u)| \leq 4\rho_1$.

Chứng minh. (a) Theo điều kiện (Y_6) và bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right| &\leq \int_\Omega |d_1(x,u)|\,.\,|u|\,dx + \frac{1}{\sigma_1+1}\int_\Omega |d_2(x,u)|\,.\,|u|^{\sigma_1+1}\,dx \\ &\leq \alpha_9\left(\|u\|_{L^{\rho_1}(\Omega)} + \|u\|^{\sigma_1+1}_{L^{\rho_1}(\Omega)}\right) \\ &\leq \alpha_{10}\left[\left(\Xi^2(u)+1\right)^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}} + \left(\Xi^2(u)+1\right)^{\frac{1}{\rho_1}}\right] \\ &\leq \alpha_{11}\left(|\Xi(u)|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}} + |\Xi(u)|^{\frac{1}{\rho_1}} + 1\right).\end{aligned}$$

(b) Từ giả thiết (Y_1) và (2.8) ta có

$$\left|\overline{\Xi}(u) - \overline{\Xi}(-u)\right| \leq |\psi(u)|\,.\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right| + |\psi(-u)|\,.\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right| \tag{2.10}$$

Ta xét 4 trường hợp như sau.

Trường hợp 1: $u \in \mathrm{spt}(\psi)$ và $-u \in \mathrm{spt}(\psi)$.

Theo Bổ đề 2.2.2(a) ta thu được

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right| &\leq \alpha_8\left(|\Xi(u)|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}} + |\Xi(u)|^{\frac{1}{\rho_1}} + 1\right), \\ \left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right| &\leq \alpha_8\left(|\Xi(u)|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}} + |\Xi(u)|^{\frac{1}{\rho_1}} + 1\right).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Mặt khác, theo giả thiết (2.8), ta có

$$|\Xi(u)| \leq \left|\overline{\Xi}(u)\right| + 2\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right| \leq \alpha_{13}\Bigg(&|\overline{\Xi}(u)|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}} + |\overline{\Xi}(u)|^{\frac{1}{\rho_1}} \\ &+ \left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|^{\frac{1}{\rho_1}} + \left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}} + 1\Bigg).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Áp dụng bất đẳng thức Young, ta có

$$\alpha_{13}\left(\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|^{\frac{1}{\rho_1}}+\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}}\right)\leq\frac{1}{2}\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|+\alpha_{14}. \tag{2.13}$$

Từ (2.11), (2.12), (2.13) và định nghĩa của ψ, ta thu được điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: $u\in\operatorname{spt}(\psi)$ và $-u\notin\operatorname{spt}(\psi)$.

Từ (2.10) ta có

$$\left|\overline{\Xi}(u)-\overline{\Xi}(-u)\right|\leq|\psi(u)|.\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|.$$

Lập luận tương tự như Trường hợp 1, ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp 3: $u\notin\operatorname{spt}(\psi)$ và $-u\notin\operatorname{spt}(\psi)$, chứng minh là tầm thường.

Trường hợp 4: $u\notin\operatorname{spt}(\psi)$ và $-u\in\operatorname{spt}(\psi)$.

Từ (2.10), ta có

$$\left|\overline{\Xi}(u)-\overline{\Xi}(-u)\right|\leq 2\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right|. \tag{2.14}$$

Từ (Y_1), (2.8) và định nghĩa của Ξ, ta có

$$\Xi(-u)=\overline{\Xi}(u)-\int_\Omega D(x,-u)dx.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right|\leq\alpha_{13}\Bigg(&\left|\overline{\Xi}(u)\right|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}}+\left|\overline{\Xi}(u)\right|^{\frac{1}{\rho_1}}\\&+\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right|^{\frac{1}{\rho_1}}+\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}}+1\Bigg).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Áp dụng bất đẳng thức Young,

$$\alpha_{13}\left(\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right|^{\frac{1}{\rho_1}}+\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}}\right)\leq\frac{1}{2}\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right|+\alpha_{14}. \tag{2.16}$$

Từ (2.14), (2.15) và (2.16), ta suy ra điều phải chứng minh.

(c) Từ (2.8), ta có

$$\Xi(u) \geq \overline{\Xi}(u) - \left| \int_\Omega D(x,u)dx \right|. \tag{2.17}$$

Nếu $u \in \mathrm{spt}(\psi)$ thì theo (2.17) và Bổ đề 2.2.2(a),

$$\Xi(u) + \alpha_8 \left(|\Xi(u)|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}} + |\Xi(u)|^{\frac{1}{\rho_1}} \right) \geq \overline{\Xi}(u) - \alpha_8 \geq \frac{M}{2}$$

với M_0 đủ lớn. Nếu $\Xi(u) < 0$ thì theo bất đẳng thức Young,

$$\overline{C}_1(\epsilon) + \epsilon\,|\Xi(u)| \geq \alpha_8 \left(|\Xi(u)|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}} + |\Xi(u)|^{\frac{1}{\rho_1}} \right) \geq \frac{M}{2} + |\Xi(u)|,$$

trong đó $\overline{C}_1(\epsilon) \to \infty$ khi $\epsilon \to 0$.

Mặt khác, nếu $M_0 \geq 2\overline{C}_1(\epsilon)$ và $\epsilon < 1$ thì ta có bất đẳng thức

$$(\epsilon - 1)\,|\Xi(u)| \geq 0,$$

và điều này là vô lý. Vậy $\Xi(u) \geq 0$ và $\Xi(u) \geq \dfrac{M}{2(2\alpha_8+1)}$.

(d) Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: Nếu $u \notin \mathrm{spt}(\psi)$ thì chứng minh là tầm thường.

Trường hợp 2: Nếu $u \in \mathrm{spt}(\psi)$, ta chọn M_0 như trong Bổ đề 2.2.2(c). Ngoài ra, gọi $u \in H_0^1(\Omega)$ sao cho $\overline{\Xi}(u) \geq M$ và $M \geq M_0$. Khi đó

$$\kappa(u)^{-1} \int_\Omega |u(x)|^{\rho_1}\,dx \leq 2,$$
$$2\kappa(u)^{-1}\Theta\Xi(u) \leq 1,$$
$$\left| \chi'\left(\kappa(u)^{-1} \int_\Omega |u(x)|^{\rho_1}\,dx \right) \right| \leq 2.$$

Từ Bổ đề 2.2.2(a) và Bổ đề 2.2.2(c),

$$\begin{aligned} |T_1(u)| &\leq \alpha_{16} \left(\Xi(u)^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}-1} + \Xi(u)^{\frac{1}{\rho_1}-1} + \Xi(u)^{-1} \right) \\ &\leq \alpha_{17} \left(M^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}-1} + M^{\frac{1}{\rho_1}-1} + M^{-1} \right) \to 0 \text{ khi } M \to \infty, \\ |T_2(u)| &\leq 2\rho_1.2 = 4\rho_1. \end{aligned}$$

□

Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra rằng các giá trị tới hạn lớn của $\overline{\Xi}$ cũng là giá trị tới hạn của Ξ.

Bổ đề 2.2.3. *Giả sử rằng (Y_1), (Y_2), (Y_5), (Y_6) được thoả mãn, và Θ là hằng số dương đủ lớn. Khi đó tồn tại $M_1 > 0$ sao cho nếu $u \in H_0^1(\Omega)$ là điểm tới hạn của $\overline{\Xi}$ và $\overline{\Xi}(u) \geq M_1$, thì u là điểm tới hạn của Ξ và $\overline{\Xi}(u) = \Xi(u)$.*

Chứng minh. Gọi $u \in H_0^1(\Omega)$ sao cho $\overline{\Xi}'(u) = 0$. Với M_1 đủ lớn thoả mãn $M_1 > M_0$ thì T_1 đủ nhỏ và T_2 bị chặn, và theo (2.9) ta có

$$\begin{aligned}\Xi(u) &= \Xi(u) - \frac{\overline{\Xi}'(u)(u)}{2\left(1 + T_1(u)\right)} \\ &\geq \alpha_4 \int_\Omega |u|^\rho dx - \alpha_{18} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{(\sigma+1)p_2}{p_2-1}} dx \right)^{\frac{p_2-1}{p_2}} - \alpha_{18}.\end{aligned}$$

Do đó nếu ta chọn Θ đủ lớn,

$$\kappa(u)^{-1} \int_\Omega |u|^\rho dx \leq 1,$$

suy ra $\psi(u) = 1$ và $\psi'(u) = 0$. □

Định nghĩa 2.2.1. *Gọi $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ là một không gian Banach thực với không gian đối ngẫu $\mathbb{V}^*$ của nó và $J \in C^1(\mathbb{V}, \mathbb{R})$. Với $c \in \mathbb{R}$ ta nói rằng J thoả mãn điều kiện $(C)_c$ nếu với mỗi dãy $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{V}$, ta có*

$$J(x_m) \to c \quad \text{và} \quad (1 + \|x_m\|_{\mathbb{V}})\|J'(x_m)\| \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty,$$

thì tồn tại một dãy con $\{x_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ mạnh trong $\mathbb{V}$. Nếu J thoả mãn điều kiện $(C)_c$ với mọi $c > 0$, ta nói rằng J thoả mãn điều kiện Cerami.

Bổ đề 2.2.4. *Giả sử (Y_1)-(Y_6) được thoả mãn. Khi đó $\overline{\Xi} \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ và tồn tại hằng số $M_2 > 0$ sao cho $\overline{\Xi}$ thoả mãn điều kiện $(C)_c$ với mọi $c > M_2$.*

Chứng minh. Vì (Y_2), (Y_5), (Y_6) được thoả mãn, và $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nên suy ra $\overline{\Xi} \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Gọi M_0 thoả mãn Bổ đề 2.2.2 và lấy $M_2 \geq M_0, c > M_2$. Gọi $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ là dãy $(C)_c$, tức là

$$\begin{gathered}\overline{\Xi}(u_m) \to c \quad \text{khi } m \to \infty, \\ \lim_{m\to\infty} \left(1 + \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}\right) \left\|\overline{\Xi}'(u_m)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^*} = 0.\end{gathered} \tag{2.18}$$

Khi đó

$$\overline{\Xi}'(u_m)(u_m) \to 0,$$
$$\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega 2F(x,u_m)\,dx - \int_\Omega 2\psi(u_m)\,G(x,u_m)\,dx \to 2c \quad \text{khi } m \to \infty. \tag{2.19}$$

Đầu tiên ta chỉ ra $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ bị chặn trong $H_0^1(\Omega)$ bằng phản chứng. Thật vậy, (nếu cần thiết ta có thể chuyển qua dãy con) giả sử rằng với mọi m, $\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} > 1$ và

$$\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty \quad \text{khi } m \to \infty. \tag{2.20}$$

Đặt

$$w_m = \frac{u_m}{\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}},$$

ta có $\|w_m\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ và

$$\|w_m\|_{L^\nu(\Omega)} \le \tau_\nu \|w_m\|_{H_0^1(\Omega)} = \tau_\nu,$$

với $1 \le \nu < \widetilde{2}$.

Chuyển qua dãy con, giả sử $w_m \rightharpoonup w$ trong $H_0^1(\Omega)$, khi đó $w_m \to w$ trong $L^\nu(\Omega), 1 \le \nu < \widetilde{2}$. Với $0 \le a < b$, gọi

$$\Omega_m(a,b) = \{x \in \Omega : a \le |u_m(x)| < b\}. \tag{2.21}$$

Theo giả thiết (Y_5) và (Y_6), với m đủ lớn ta có

$$\begin{aligned} c + 1 &\ge \overline{\Xi}(u_m) - \frac{1}{2(1+T_1(u_m))}\overline{\Xi}'(u_m)(u_m) \\ &> \frac{1}{2}\int_{\Omega_m(r_0,\infty)} \widehat{F}(x,u_m)\,dx - \alpha_{19}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

trong đó α_{19} là hằng số dương không phụ thuộc vào m.

Từ (Y_6) và định nghĩa phiếm hàm ψ, với m đủ lớn ta có

$$\left|\int_\Omega \psi(u_m)\,D(x,u_m)\,dx\right| \le \alpha_{20}. \tag{2.23}$$

Theo (Y_6), (2.19), (2.20), (2.23) ta thu được

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega \frac{2F(x,u_m)}{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}}dx = 1. \tag{2.24}$$

Bây giờ ta xem xét hai trường hợp: $w = 0$ và $w \neq 0$.

Trường hợp 1: Nếu $w = 0$. Khi đó $w_m \to 0$ trong $L^\nu(\Omega), 1 \le \nu < \widetilde{2}$, và $w_m \to 0$ hầu khắp nơi trong Ω. Từ (Y_2) và bất đẳng thức Hölder ta suy ra

$$\int_{\Omega_m(0,r_0)} \frac{F(x,u_m)}{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}}dx \le \alpha_{21}\left(\frac{1}{\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}}\|w_m\|_{L^1(\Omega)} + \|w_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \to 0$$

khi $m \to \infty$, và do đó

$$\int_{\Omega_m(0,r_0)} \frac{2F(x,u_m)}{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}}dx \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty. \tag{2.25}$$

Đặt $q' = \dfrac{q}{q-1}$ và $q > \dfrac{N}{2}$, khi đó $2q' \in \left[2, \widetilde{2}\right)$. Từ (Y_4) và (2.22) ta có

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega_m(r_0,+\infty)} \frac{F(x,u_m)}{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}}dx\right| \\
&\quad\le \int_{\Omega_m(r_0,+\infty)} \frac{|F(x,u_m)|}{|u_m|^2}|w_m|^2\,dx \\
&\quad\le \left[\int_{\Omega_m(r_0,+\infty)} \left(\frac{|F(x,u_m)|}{|u_m|^2}\right)^q dx\right]^{1/q} \left[\int_{\Omega_m(r_0,+\infty)} |w_m|^{2q'}\,dx\right]^{1/q} \\
&\quad\le \alpha_{22}\left[\int_{\Omega_m(r_0,+\infty)} \widehat{F}(x,u_m)\,dx\right]^{1/q} \left[\int_{\Omega_m(r_0,+\infty)} |w_m|^{2q'}\,dx\right]^{1/q'} \\
&\quad\le \alpha_{23}\left[\int_{\Omega_m(r_0,+\infty)} |w_m|^{2q'}\,dx\right]^{1/q'} \mathrm{d}x \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\int_{\Omega_m(r_0,+\infty)} \frac{2F(x,u_m)}{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}}dx \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty. \tag{2.26}$$

Kết hợp với (2.25) ta thu được

$$\int_\Omega \frac{2F(x,u_m)}{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}}dx \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty,$$

mâu thuẫn với (2.24).

Trường hợp 2: Nếu $w \neq 0$. Đặt

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega : w(x) \neq 0\},$$

ta có $\mathrm{Vol}(\Omega_0) > 0$ và

$$\lim_{m\to\infty} u_m(x) = \lim_{m\to\infty} \|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} w_m(x) = \infty$$

hầu khắp nơi trong Ω_0.

Từ (Y_2), (Y_3), (Y_6), (2.18), (2.23) và bổ đề Fatou ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,u_m)}{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}} dx \\
&\geq \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,u_m)}{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}} dx \\
&\geq \liminf_{m\to\infty} \int_{\Omega_0} \frac{F(x,u_m)}{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}} dx \\
&\geq \int_{\Omega_0} \liminf_{m\to\infty} \frac{F(x,u_m)}{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}} dx \\
&= \int_{\Omega_0} \liminf_{m\to\infty} \frac{F(x,u_m)}{|u_m|^2} w_m^2 dx = +\infty,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

hay điều này là vô lý. Vì thế, không mất tính tổng quát, giả sử rằng

$$\begin{aligned}
u_m &\rightharpoonup u \quad \text{yếu trong } H_0^1(\Omega) \text{ khi } m \to \infty, \\
u_m &\to u \quad \text{hầu khắp nơi trong } \Omega \text{ khi } m \to \infty, \\
u_m &\to u \quad \text{mạnh trong } L^\nu(\Omega), 1 \leq \nu < \widetilde{2} \text{ khi } m \to \infty.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Do đó theo (Y_2), (Y_6) và (2.28) ta có

$$\int_\Omega (f(x,u_m) - f(x,u))(u_m - u)\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty, \tag{2.29}$$

$$\int_\Omega (d(x,u_m) - d(x,u))(u_m - u)\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty. \tag{2.30}$$

Nếu M_2 đủ lớn, từ $\lim_{m\to\infty} \overline{\Xi}'(u_m) = 0$ và (2.28) ta có

$$\left\langle (1 + T_1(u))\,\overline{\Xi}'(u_m) - (1 + T_1(u_m))\,\overline{\Xi}'(u), u_m - u \right\rangle \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty. \tag{2.31}$$

Ngoài ra,

$$\begin{aligned}
&\left\langle (1+T_1(u))\,\overline{\Xi}'(u_m) - (1+T_1(u_m))\,\overline{\Xi}'(u), u_m - u \right\rangle \\
&= (1+T_1(u))\,(1+T_1(u_m))\left[\int_\Omega \left(|\nabla u_m - \nabla u|^2 - f(x,u_m)(u_m-u)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + f(x,u)(u_m-u)\right) dx\right] \\
&\quad - (1+T_1(u))\,(\psi(u_m)+T_1(u_m))\int_\Omega d(x,u_m)(u_m-u)\,dx \\
&\quad + (1+T_1(u_m))\,(\psi(u)+T_1(u))\int_\Omega d(x,u)(u_m-u)\,dx \\
&\quad - (1+T_1(u))\,T_3(u_m)\int_\Omega |u_m|^{\rho-1}(u_m-u)\,dx \\
&\quad + (1+T_1(u_m))\,T_3(u)\int_\Omega |u|^{\rho-1}(u_m-u)\,dx,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

trong đó

$$T_3(u) = \rho\chi'\left(\kappa(u)^{-1}\int_\Omega |u|^\rho dx\right)\kappa(u)^{-1}\int_\Omega D(x,u)dx.$$

Theo (2.29), (2.30), (2.31) và (2.32) ta thu được

$$\int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^2\,dx \to 0 \text{ khi } m \to \infty.$$

Vì thế ta kết luận rằng $u_m \to u$ mạnh trong $H_0^1(\Omega)$, điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2.2.5. *Giả sử rằng (Y_2), (Y_3), (Y_6) được thoả mãn. Khi đó với mọi không gian con hữu hạn chiều $\widehat{\mathbb{X}} \subset H_0^1(\Omega)$, tồn tại $R = R(\widehat{\mathbb{X}}) > 0$ sao cho*

$$\overline{\Xi}(u) \le 0, \quad \textit{với mọi } u \in \widehat{\mathbb{X}}, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \ge R.$$

Chứng minh. Bằng phương pháp phản chứng, giả sử rằng với dãy $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset \widehat{\mathbb{X}}$ thoả mãn $\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} > 0$ với mọi $m \in \mathbb{N}$ và $\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$ khi $m \to \infty$, tồn tại $M > 0$ sao cho $\overline{\Xi}(u_m) \ge -M$ với mọi $m \in \mathbb{N}$. Ta đặt

$$w_m = \frac{u_m}{\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}},$$

thì khi đó $\|w_m\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$. Vậy ta có thể (chuyển qua dãy con nếu cần thiết) giả sử rằng

$$\begin{aligned}
w_m &\rightharpoonup w \quad \text{yếu trong } H_0^1(\Omega) \text{ khi } m \to \infty \\
w_m &\to w \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega \text{ khi } m \to \infty \\
w_m &\to w \quad \text{mạnh trong } L^\nu(\Omega) \text{ khi } m \to \infty, 2 \le \nu < \widetilde{2}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Vì $\widehat{\mathbb{X}}$ hữu hạn chiều, nên $w_m \to w$ mạnh trong $\widehat{\mathbb{X}}$ khi $m \to \infty$, và $w \in \widehat{\mathbb{X}}$ với $\|w\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$. Do đó, từ (2.26) ta thu được

$$0 = \lim_{m\to\infty} \frac{-M}{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \leq \lim_{m\to\infty} \frac{\overline{\Xi}(u_m)}{\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}} = -\infty.$$

Vậy ta suy ra mâu thuẫn. Nói cách khác, tồn tại $R = R(\widehat{\mathbb{X}}) > 0$ sao cho $\overline{\Xi}(u) \leq 0$ với $u \in \widehat{\mathbb{X}}$ và $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq R$. □

Bây giờ ta chứng minh $\overline{\Xi}$ có một dãy các điểm tới hạn không bị chặn. Gọi $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ là các giá trị riêng của bài toán

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{trong } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{trên } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.34}$$

và $e_1, e_2, \cdots$ là các hàm riêng tương ứng được chuẩn hoá để $\|e_j\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ với mọi $j = 1, 2, \cdots$. Với mọi $k > 0$, ta đặt $\mathbb{V}_k = \text{span}\{e_j; j \leq k\}$ trong $H_0^1(\Omega)$, và $\mathbb{V}_k^\perp$ là phần bù trực giao của nó. Chọn một dãy tăng R_k sao cho $\overline{\Xi}(u) \leq 0$ nếu $u \in \mathbb{V}_k, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq R_k$. Gọi B_{R_k} là hình cầu đóng bán kính R_k trong $H_0^1(\Omega), \mathbb{W}_k \equiv B_{R_k} \cap \mathbb{V}_k$, và

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \left\{ h \in C\left(\mathbb{W}_k, H_0^1(\Omega)\right) : h \text{ là lẻ và } h(u) = u \text{ nếu } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = R_k \right\} \\ \mathbb{U}_k &= \left\{ u = te_{k+1} + w : t \in [0, R_{k+1}], w \in B_{R_{k+1}} \cap \mathbb{V}_k, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R_{k+1} \right\} \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_k = \Big\{ H \in C\left(\mathbb{U}_k, H_0^1(\Omega)\right) : H|_{\mathbb{W}_k} \in \Gamma_k \text{ và } H(u) = u \text{ nếu} \\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = R_{k+1} \text{ hoặc } u \in \left(B_{R_{k+1}} \backslash B_{R_k}\right) \cap \mathbb{V}_k \Big\} \end{aligned}$$

Bây giờ ta định nghĩa

$$\gamma_k = \inf_{H\in\Lambda_k} \max_{u\in\mathbb{U}_k} \overline{\Xi}(H(u)), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.36}$$

$$\beta_k = \inf_{h\in\Gamma_k} \max_{u\in\mathbb{W}_k} \overline{\Xi}(h(u)), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.37}$$

Hiển nhiên $\gamma_k \geq \beta_k$. Ta sẽ đưa ra chặn dưới của β_k ở bổ đề tiếp theo.

Bổ đề 2.2.6. *Giả sử rằng (Y_2), (Y_6) được thoả mãn. Khi đó tồn tại hằng số $\alpha_{24} > 0$ và $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $k \geq k_0$,*

$$\beta_k \geq \alpha_{24} k^{\frac{2p}{N(p-2)}}. \tag{2.38}$$

Chứng minh. Theo (Y_2) và (Y_6) ta thu được

$$\overline{\Xi}(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \alpha_{25}\int_\Omega |u|^p dx - \alpha_{26}. \tag{2.39}$$

Đặt

$$K(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \alpha_{25}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \in C^2\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right). \tag{2.40}$$

Khi đó ta thấy rằng

$$\overline{\Xi}(u) \geq K(u) - \alpha_{26}, \tag{2.41}$$

$$K''(u)(h,h) = \left(\left(-\Delta - \alpha_{25}p(p-1)|u|^{p-2}\right)h, h\right) \quad \text{với mọi } u \in H_0^1(\Omega) \tag{2.42}$$

và phiếm hàm $K(u)$ thoả mãn các giả thiết sau:

(Y_7) $K(0) = 0$;

(Y_8) $K(-u) = K(u)$ với mọi $u \in H_0^1(\Omega)$;

(Y_9) với mỗi không gian con hữu hạn chiều $E \subset H_0^1(\Omega)$, tồn tại $R = R(E) > 0$ sao cho

$$K(u) < 0, \quad \text{với mọi } u \in E \text{ và } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq R(E);$$

(Y_{10}) $K'(u) = u + \kappa(u)$ với $u \in H_0^1(\Omega)$, trong đó $\kappa : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ là toán tử compact;

(Y_{11}) Nếu tồn tại $M > 0$, $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ thoả mãn $K\left(u_j\right) \leq M$ với mọi j, và

$$\left\|K'\left(u_j\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^*} \to 0$$

khi $j \to \infty$, thì khi đó tồn tại một dãy con $\left\{u_{j_k}\right\}_{k=1}^\infty$ hội tụ mạnh trong $H_0^1(\Omega)$;

(Y_{12}) Nếu tồn tại $M > 0$, $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{V}_m$ thoả mãn $K\left(u_j\right) \leq M$ với mọi j và

$$\left\|\left(K|_{\mathbb{V}_m}\right)'\left(u_j\right)\right\|_{(\mathbb{V}_m)^*} \to 0$$

khi $j \to \infty$, thì khi đó tồn tại một dãy con $\left\{u_{j_k}\right\}_{k=1}^\infty$ hội tụ mạnh trong $\mathbb{V}_m$;

(Y_{13}) Nếu tồn tại $M > 0$, $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ thoả mãn $u_j \in \mathbb{V}_j, K(u_j) \leq M$ với mọi j và

$$\left\| \left(K|_{\mathbb{V}_j} \right)' (u_j) \right\|_{(\mathbb{V}_j)^*} \to 0$$

khi $j \to \infty$, thì khi đó tồn tại một dãy con $\{u_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ mạnh trong $H_0^1(\Omega)$.

Tiếp theo, ta định nghĩa giá trị minimax

$$\omega_k = \inf_{h \in \Gamma_k} \max_{u \in \mathbb{W}_k} K(h(u)), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.43}$$

Từ (2.41) ta thu được

$$\beta_k \geq \omega_k - \alpha_{26}. \tag{2.44}$$

Từ [12, Định lý B], tồn tại $v_k \in H_0^1(\Omega)$ sao cho

$$K(v_k) \leq \omega_k, \tag{2.45}$$

$$K'(v_k) = 0, \tag{2.46}$$

$$\operatorname{index}_0 K''(v_k) \geq k, \tag{2.47}$$

trong đó

$$\operatorname{index}_0 K''(v_k) := \max\{ \dim E : E \subset H_0^1(\Omega) \text{ là không gian con sao cho } K''(v_k)(h,h) \leq 0, \text{ với } h \in E\}.$$

Do đó, từ (2.42) và (2.47) ta thu được

$$-\Delta - \alpha_{25} p(p-1) |v_k|^{p-2} \text{ có ít nhất } k \text{ giá trị riêng không dương.} \tag{2.48}$$

Gọi $\mathcal{N}(V)$ là số các giá trị riêng không dương (tính cả bội số) của bài toán

$$-\Delta u - V(x)u = \lambda u \quad \text{trong } \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{trên } \partial\Omega,$$

trong đó $V(x) \in L^{N/2}(\Omega)$. Khi đó từ [12, Bổ đề 2.3] (hoặc [19, 20]), tồn tại một hằng số $C_N > 0$ sao cho

$$\mathcal{N}(V) \leq C_N \|V(x)\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)}^{\frac{N}{2}}. \tag{2.49}$$

Từ (2.48) và (2.49) ta thu được

$$\alpha_{27}k \leq \left\| |v_k|^{p-2} \right\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)}^{\frac{N}{2}}. \tag{2.50}$$

Mặt khác, từ (2.46) ta có

$$\|v_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \alpha_{25} p \|v_k\|_{L^p(\Omega)}^p. \tag{2.51}$$

Từ (2.45), (2.50) và (2.51) ta thu được

$$\omega_k \geq \frac{\alpha_{25}}{2}(p-2)\|v_k\|_{L^p(\Omega)}^p \geq \alpha_{28} k^{\frac{2p}{N(p-2)}} \text{ với mọi } k \in \mathbb{N}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Để xây dựng một dãy các giá trị tới hạn của $\overline{\Xi}$, ta gọi

$$\Lambda_k = \Big\{ H \in C\left(\mathbb{U}_k, H_0^1(\Omega)\right) : H|_{\mathbb{W}_k} \in \Gamma_k \text{ và } H(u) = u \\ \text{nếu } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = R_{k+1} \text{ hoặc } u \in \left(B_{R_{k+1}} \setminus B_{R_k}\right) \cap \mathbb{V}_k \Big\}.$$

Bổ đề 2.2.7. *Giả sử rằng $\gamma_k > \beta_k \geq M_2$. Gọi $\delta \in (0, \gamma_k - \beta_k)$ và*

$$\Lambda_k(\delta) = \left\{ H \in \Lambda_k : \overline{\Xi}(H) \leq \beta_k + \delta \text{ trên } \mathbb{W}_k \right\}.$$

Gọi

$$\gamma_k(\delta) = \inf_{H \in \Lambda_k(\delta)} \max_{u \in \mathbb{U}_k} \overline{\Xi}(H(u)), \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.52}$$

Khi đó $\gamma_k(\delta)$ là giá trị tới hạn của $\overline{\Xi}$.

Chứng minh. Từ định nghĩa của β_k và Λ_k, ta có $\Lambda_k(\delta) \neq \varnothing$. Chọn $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}(\gamma_k - \beta_k - \delta) > 0$. Nếu $\gamma_k(\delta)$ không phải giá trị tới hạn của $\overline{\Xi}$, thì tồn tại ϵ và η như trong Bổ đề 1.6.1. Chọn $H \in \Lambda_k(\delta)$ sao cho

$$\max_{\mathbb{U}_k} \overline{\Xi}(H(u)) \leq \gamma_k(\delta) + \epsilon. \tag{2.53}$$

Xét $\eta(1, H(u)) \in C(\mathbb{U}_k, \mathbb{V})$. Chú ý rằng nếu $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = R_{k+1}$ hoặc $u \in \left(B_{R_{k+1}} \setminus B_{R_K}\right) \cap \mathbb{V}_k$ thì $\overline{\Xi}(H(u)) = \overline{\Xi}(u) \leq 0$, do đó $\eta(1, H(u)) = u$ theo Bổ đề 1.6.1 (có thể giả sử $\beta_k > 0$). Vậy $\eta(1, H(u)) \in \Lambda_k$. Hơn nữa trên $\mathbb{W}_k, \overline{\Xi}(H(u)) \leq \beta_k + \delta \leq \gamma_k - \bar{\epsilon} \leq \gamma_k(\delta) - \bar{\epsilon}$ thông qua việc chọn δ và $\bar{\epsilon}$.

Do đó $\eta(1,H) = H \leq \beta_k + \delta$ trên $\mathbb{W}_k$ theo Bổ đề 1.6.1. Vì vậy, $\eta(1,H) \in \Lambda_k(\delta)$ và theo (2.52) cùng với của Bổ đề 1.6.1(b),

$$\max_{\mathbb{U}_k} \overline{\Xi}(\eta(1,H(u))) \leq \gamma_k(\delta) - \epsilon,$$

trái với định nghĩa của $\gamma_k(\delta)$. Suy ra $\gamma_k(\delta)$ phải là giá trị tới hạn của $\overline{\Xi}$. □

Định lí 2.2.1. *Giả sử rằng (Y_1)-(Y_6) được thoả mãn, và*

$$\frac{2p}{N(p-2)} > \frac{\rho_1}{\rho_1 - \sigma_1 - 1}, \tag{2.54}$$

thì khi đó bài toán (2.1) có một dãy nghiệm không bị chặn trong $H_0^1(\Omega)$.

Chứng minh. Từ Bổ đề 2.2.6 ta thấy $\beta_k \to \infty$ khi $k \to \infty$. Ta cần chỉ ra sự tồn tại của một dãy con của dãy γ_k sao cho $\gamma_k > \beta_k$. Thật vậy, giả sử rằng $\gamma_k = \beta_k$ với mọi $k \geq k_1$. Với mọi $\epsilon > 0$, ta chọn $H \in \Lambda_k$ sao cho

$$\max_{u \in \mathbb{U}_k} \overline{\Xi}(H(u)) \leq \beta_k + \epsilon. \tag{2.55}$$

Gọi $\widehat{H}(u) = H(u)$ nếu $u \in \mathbb{U}_k$ và $\widehat{H}(u) = -H(-u)$ nếu $-u \in \mathbb{U}_k$. Vì $H|_{B_{R_{k+1}} \cap \mathbb{V}_k}$ là lẻ và liên tục và $\mathbb{W}_{k+1} = \mathbb{U}_k \cup (-\mathbb{U}_k)$, do đó $\widehat{H}$ được định nghĩa tốt trên $\mathbb{W}_{k+1}$ và $\widehat{H} \in \Gamma_{k+1}$. Do đó

$$\beta_{k+1} \leq \max_{u \in \mathbb{W}_{k+1}} \overline{\Xi}(\widehat{H}(u)). \tag{2.56}$$

Theo Bổ đề 2.2.2(b) và (2.55) ta thu được

$$\max_{-\mathbb{U}_k} \overline{\Xi}(\widehat{H}(u)) \leq \beta_k + \epsilon + \alpha_{12} \left(|\beta_k + \epsilon|^{\frac{1}{\rho_1}} + |\beta_k + \epsilon|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}} + 1 \right). \tag{2.57}$$

Từ (2.55), (2.56) và (2.57) suy ra

$$\beta_{k+1} \leq \beta_k + \epsilon + \alpha_{12} \left(|\beta_k + \epsilon|^{\frac{1}{\rho_1}} + |\beta_k + \epsilon|^{\frac{\sigma_1+1}{\rho_1}} + 1 \right).$$

Vì ϵ là tuỳ ý nên ta có

$$\beta_{k+1} \leq \beta_k \left[1 + \alpha_{29} \left(\beta_k^{\frac{1-\rho_1}{\rho_1}} + \beta_k^{\frac{\sigma_1+1-\rho_1}{\rho_1}} \right) \right] \text{ với mọi } k \geq k_1.$$

Bằng phương pháp lặp,

$$\begin{aligned}\beta_{k_1+l} &\le \beta_{k_1} \prod_{k=k_1}^{k_1+l-1} \left[1 + \alpha_{29}\left(\beta_k^{\frac{1-\rho_1}{\rho_1}} + \beta_k^{\frac{\sigma_1+1-\rho_1}{\rho_1}}\right)\right] \\ &\le \beta_{k_1} \exp\left\{\sum_{k=k_1}^{k_1+l-1} \ln\left[1 + \alpha_{29}\left(\beta_k^{\frac{1-\rho_1}{\rho_1}} + \beta_k^{\frac{\sigma_1+1-\rho_1}{\rho_1}}\right)\right]\right\} \\ &\le \beta_{k_1} \exp \alpha_{29}\left(\sum_{k=k_1}^{k_1+l-1} \beta_k^{\frac{1-\rho_1}{\rho_1}} + \sum_{k=k_1}^{k_1+l-1} \beta_k^{\frac{\sigma_1+1-\rho_1}{\rho_1}}\right).\end{aligned}$$

Từ (2.37) và (2.54) ta có đánh giá

$$\begin{aligned}\beta_{k_1+l} &\le \beta_{k_1} \exp \alpha_{30}\left(\sum_{k=k_1}^{\infty} k^{\frac{1-\rho_1}{\rho_1}\cdot\frac{2p}{N(p-2)}} + k^{\frac{\sigma_1+1-\rho_1}{\rho_1}\cdot\frac{2p}{N(p-2)}}\right) \\ &< \infty \text{ với mọi } l \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

mâu thuẫn với Bổ đề 2.2.6. □

Chú ý 2.2.1. *Kết quả ở Định lý 2.2.1 không phải trường hợp riêng của [12]. Chẳng hạn, nếu ta xét $N = 3$,*

$$f(x,\zeta) = 2\zeta\left[\ln(1 + |\zeta|^{1/3}) + \frac{|\zeta|^{1/3}}{6(1 + |\zeta|^{1/3})}\right],$$

và $d : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory thoả mãn tồn tại $d_1(x) \in L^{p_1}(\Omega), d_2(x) \in L^{p_2}(\Omega)$, $\frac{(\sigma_1+1)p_2}{p_2-1} < 2, \sigma_1 \in \left[0, \frac{4}{7}\right), p_1 \ge \frac{6p_2}{p_2\sigma_1+6}, p_2 \ge \frac{6}{5-\sigma_1}$, sao cho

$$|d(x,\zeta)| \le d_1(x) + d_2(x)|\zeta|^{\sigma_1} \quad \textit{hầu khắp nơi trong } \Omega \times \mathbb{R},$$

thì khi đó f, d thoả mãn điều kiện của Định lý 2.2.1, nhưng f không thoả mãn điều kiện trong [12, Định lý 1].

2.3. Trường hợp f thoả mãn điều kiện Ambrosetti-Rabinowitz

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu tính chất nhiều nghiệm của (2.1), bằng cách sử dụng các giả thiết sau: $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory thoả mãn

(Y_0) Với $\mu > 2$ và $R > 0$, ta có

$$0 < \mu F(x,\zeta) \leq f(x,\zeta)\zeta, \quad \forall x \in \Omega, \forall |\zeta| \geq R,$$

trong đó $F(x,\zeta) = \int_0^\zeta f(x,\tau)d\tau$.

(Y_1) $f(x,-\zeta) = -f(x,\zeta)$ với mọi $(x,\zeta) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

(Y_2) Tồn tại $2 < p < \widetilde{2}, \alpha_1 > 0$ sao cho

$$|f(x,\zeta)| \leq \alpha_1(1 + |\zeta|^{p-1}) \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega \times \mathbb{R}.$$

(Y_{14}) $d : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory thoả mãn: Tồn tại $d_3(x) \in L^{p_3}(\Omega), d_4(x) \in L^{p_4}(\Omega), \frac{p_3}{p_3-1} \leq \mu, p_4 > 1, \frac{(\sigma_2+1)p_4}{p_4-1} < \mu, \sigma_2 \in [0, \mu-1), p_3 > \max\left\{1, \frac{\widetilde{2}p_4}{p_4\sigma_2+\widetilde{2}}\right\}$, sao cho

$$|d(x,\zeta)| \leq d_3(x) + d_4(x)|\zeta|^{\sigma_2} \quad \text{hầu khắp nơi trong } \Omega \times \mathbb{R}.$$

Ta định nghĩa phiếm hàm Euler-Lagrange liên kết với bài toán (2.1) bởi

$$\Xi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_\Omega D(x,u)dx.$$

Từ [18, Mệnh đề 2.2], (Y_2) và (Y_{14}), ta có Ξ là định nghĩa tốt trên $H_0^1(\Omega)$ và $\Xi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ với

$$\Xi'(u)(v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx - \int_\Omega d(x,u)v dx$$

với mọi $v \in H_0^1(\Omega)$. Dễ dàng chỉ ra được các điểm tới hạn của Ξ là nghiệm của bài toán (2.1).

Chú ý 2.3.1. *Từ giả thiết (Y_0) suy ra tồn tại $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33} > 0$ sao cho*

$$\frac{1}{\mu}\left(\zeta f(x,\zeta) + \alpha_{31}\right) \geq F(x,\zeta) + \alpha_{32} \geq \alpha_{33}|\zeta|^\mu \quad \text{với mọi } \zeta \in \mathbb{R}. \tag{2.58}$$

Bổ đề 2.3.1. *Giả sử f thoả mãn (Y_0), (Y_1), (Y_2) và d thoả mãn (Y_{14}) và u là điểm tới hạn của Ξ. Khi đó tồn tại hằng số α_{34} phụ thuộc vào $\|d_3\|_{L^{p_3}(\Omega)}$, $\|d_4\|_{L^{p_4}(\Omega)}$ sao cho*

$$\int_\Omega \left(F(x,u) + \alpha_{32}\right) dx \leq \frac{1}{\mu}\int_\Omega \left(uf(x,u)) + \alpha_{31}\right) dx \leq \alpha_{34}\left((\Xi(u))^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.59}$$

Chứng minh. Bất đẳng thức bên trái của (2.59) dễ dàng chứng minh được bằng cách lấy tích phân trên Ω của bất đẳng thức (2.58). Vì u là điểm tới hạn của Ξ nên theo bất đẳng thức Hölder và Young, ta có

$$\begin{aligned}
\Xi(u) &= \Xi(u) - \frac{1}{2}\Xi'(u)(u) \\
&= -\int_\Omega F(x,u)dx - \int_\Omega D(x,u)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega d(x,u)udx + \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,u)udx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\int_\Omega \left(f(x,u)u + \alpha_{31}\right)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega d(x,u)udx - \int_\Omega D(x,u)dx - \alpha_{35}.
\end{aligned}$$

Từ giả thiết (Y_0) và định lý nhúng, kết hợp với bất đẳng thức Hölder và bất đẳng thức Young, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega d(x,u)udx &\geq -\overline{C}_2(\epsilon) - \frac{\epsilon}{2}\|u\|^\mu_{L^\mu(\Omega)}, \\
-\int_\Omega D(x,u)dx &\geq -\overline{C}_3(\epsilon) - \frac{\epsilon}{2}\|u\|^\mu_{L^\mu(\Omega)},
\end{aligned}$$

trong đó $\overline{C}_2(\epsilon), \overline{C}_3(\epsilon) \to \infty$ khi $\epsilon \to 0$. Cho nên

$$\Xi(u) \geq \alpha_{36}\int_\Omega \left(f(x,u)u + \alpha_{31}\right)dx - \overline{C}_4(\epsilon) - \epsilon\|u\|^\mu_{L^\mu(\Omega)}. \tag{2.60}$$

Chọn $\epsilon = \dfrac{\mu\alpha_{36}\alpha_{33}}{2}$, theo (2.58) và (2.60) và bất đẳng thức Cauchy, ta thu được

$$\frac{1}{\mu}\int_\Omega \left(uf(x,u) + \alpha_{31}\right)dx \leq \alpha_{34}\left((\Xi(u))^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Tiếp theo, ta định nghĩa một phiếm hàm sửa đổi $\overline{\Xi}(u)$. Gọi $\chi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sao cho $\chi(t) = 1$ với $t \leq 1, \chi(t) = 0$ với $t > 2$ và $-2 < \chi' < 0$ với $t \in (1,2)$. Với $u \in H^1_0(\Omega)$, ta đặt

$$\begin{aligned}
\kappa(u) = 2\Theta\left((\Xi(u))^2 + 1\right)^{1/2}, \quad \psi(u) = \chi\left(\kappa(u)^{-1}\int_\Omega \left(F(x,u) + \alpha_{32}\right)dx\right), \\
\overline{\Xi}(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u) - \psi(u)D(x,u)\right)dx,
\end{aligned} \tag{2.61}$$

trong đó Θ là hằng số dương đủ lớn, mà sẽ được chọn sau theo Bổ đề 2.3.6. Khi đó ta thu được

$$\begin{aligned}
\overline{\Xi}'(u)(u) = (1 + T_3(u))\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - (1 + T_4(u))\int_\Omega f(x,u)udx \\
- (\psi(u) + T_3(u))\int_\Omega d(x,u)udx,
\end{aligned} \tag{2.62}$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
T_3(u) &= \chi'\left(\kappa(u)^{-1}\int_\Omega (F(x,u)+\alpha_{32})\,dx\right)\kappa(u)^{-3}(2\Theta)^2\Xi(u)\\
&\quad\times\int_\Omega (F(x,u)+\alpha_{32})\,dx\int_\Omega D(x,u)dx,\\
T_4(u) &= \chi'\left(\kappa(u)^{-1}\int_\Omega (F(x,u)+\alpha_{32})\,dx\right)\kappa(u)^{-1}\int_\Omega D(x,u)dx + T_3(u).
\end{aligned}
$$

Chú ý 2.3.2. *Theo định nghĩa của χ nếu*

$$
u \in H_0^1(\Omega) \text{ và } \kappa(u)^{-1}\int_\Omega (F(x,u)+\alpha_{32})\,dx \le 1
$$

thì

$$
\Xi(u) = \overline{\Xi}(u) \quad \text{và} \quad \Xi'(u) = \overline{\Xi}'(u).
$$

Gọi $\mathrm{spt}(\psi)$ là giá của ψ.

Bổ đề 2.3.2. *Giả sử rằng f thoả mãn (Y_0), (Y_1), (Y_2), g thoả mãn (Y_{14}) và $u \in \mathrm{spt}(\psi)$. Khi đó*

$$
\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right| \le \alpha_{37}\left(|\Xi(u)|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}} + |\Xi(u)|^{\frac{1}{\mu}} + 1\right). \tag{2.63}
$$

Chứng minh. Từ giả thiết (Y_{14}) kết hợp với bất đẳng thức Hölder, ta có

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right| &\le \int_\Omega |d_1(x)|\,|u|\,dx + \frac{1}{\sigma_2+1}\int_\Omega |d_2(x)|\,|u|^{\sigma_2+1}\,dx\\
&\le \alpha_{38}\left(\|u\|_{L^\mu(\Omega)} + \|u\|_{L^\mu(\Omega)}^{\sigma_2+1}\right)\\
&\le \alpha_{39}\left[\left(\int_\Omega (F(x,u)+\alpha_{32})\,dx\right)^{\frac{1}{\mu}}\right.\\
&\qquad \left. + \left(\int_\Omega (F(x,u)+\alpha_{32})\,dx\right)^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}}\right].
\end{aligned} \tag{2.64}
$$

Mặt khác, vì $u \in \mathrm{spt}(\psi)$ nên

$$
\int_\Omega (F(x,u)+\alpha_{32})\,dx \le 4\Theta\left((\Xi(u))^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \le \alpha_{40}\left(|\Xi(u)|+1\right). \tag{2.65}
$$

Từ (2.65) và (2.64) ta suy ra (2.63). □

Bổ đề 2.3.3. *Giả sử rằng f thoả mãn (Y_0), (Y_1), (Y_2), d thoả mãn (Y_{14}). Khi đó tồn tại hằng số α_{41} sao cho với mọi $u \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\left|\overline{\Xi}(u) - \overline{\Xi}(-u)\right| \leq \alpha_{41}\left(\left|\overline{\Xi}(u)\right|^{\frac{1}{\mu}} + \left|\overline{\Xi}(u)\right|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}} + 1\right). \tag{2.66}$$

Chứng minh. Từ giả thiết (Y_0) và (2.61) ta có

$$\left|\overline{\Xi}(u) - \overline{\Xi}(-u)\right| \leq |\psi(u)|\,.\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right| + |\psi(-u)|\,.\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right| \tag{2.67}$$

Ta xét 4 trường hợp như sau.

Trường hợp 1: $u \in \mathrm{spt}(\psi)$ và $-u \in \mathrm{spt}(\psi)$.

Theo Bổ đề 2.3.2 ta thu được

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right| &\leq \alpha_{37}\left(|\Xi(u)|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}} + |\Xi(u)|^{\frac{1}{\mu}} + 1\right),\\ \left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right| &\leq \alpha_{37}\left(|\Xi(u)|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}} + |\Xi(u)|^{\frac{1}{\mu}} + 1\right).\end{aligned} \tag{2.68}$$

Mặt khác, theo giả thiết (2.61), ta có

$$|\Xi(u)| \leq \left|\overline{\Xi}(u)\right| + 2\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right| \leq \alpha_{42}\Bigg(&|\overline{\Xi}(u)|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}} + |\overline{\Xi}(u)|^{\frac{1}{\mu}}\\ &+ \left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|^{\frac{1}{\mu}} + \left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}} + 1\Bigg).\end{aligned} \tag{2.69}$$

Áp dụng bất đẳng thức Young, ta có

$$\alpha_{42}\left(\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|^{\frac{1}{\mu}} + \left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}}\right) \leq \frac{1}{2}\left|\int_\Omega D(x,u)dx\right| + \alpha_{43}. \tag{2.70}$$

Từ (2.68), (2.69), (2.70) và định nghĩa của ψ, ta thu được điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: $u \in \mathrm{spt}(\psi)$ và $-u \notin \mathrm{spt}(\psi)$.

Từ (2.67) ta có

$$\left|\overline{\Xi}(u) - \overline{\Xi}(-u)\right| \leq |\psi(u)| \,.\, \left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|.$$

Lập luận tương tự như Trường hợp 1, ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp 3: $u \notin \mathrm{spt}(\psi)$ và $-u \notin \mathrm{spt}(\psi)$, hiển nhiên.

Trường hợp 4: $u \notin \mathrm{spt}(\psi)$ và $-u \in \mathrm{spt}(\psi)$.

Từ (2.67), ta có

$$\left|\overline{\Xi}(u) - \overline{\Xi}(-u)\right| \leq 2\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right|. \tag{2.71}$$

Từ (Y_1), (2.61) và định nghĩa của Ξ, ta có

$$\Xi(-u) = \overline{\Xi}(u) - \int_\Omega D(x,-u)dx.$$

Do đó

$$\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right| \leq \alpha_{42}\left(\left|\overline{\Xi}(u)\right|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}} + \left|\overline{\Xi}(u)\right|^{\frac{1}{\mu}} + \left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right|^{\frac{1}{\mu}} + \left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}} + 1\right). \tag{2.72}$$

Áp dụng bất đẳng thức Young,

$$\alpha_{42}\left(\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right|^{\frac{1}{\mu}} + \left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}}\right) \leq \frac{1}{2}\left|\int_\Omega D(x,-u)dx\right| + \alpha_{43}. \tag{2.73}$$

Từ (2.71), (2.72) và (2.73) ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2.3.4. *Giả sử rằng f thoả mãn (Y_0), (Y_1), (Y_2), g thoả mãn (Y_{14}) và tồn tại các hằng số M_3, α_{44} sao cho nếu $M \geq M_3, \overline{\Xi}(u) \geq M, u \in \mathrm{spt}(\psi)$ thì $\Xi(u) \geq \alpha_{44}M$.*

Chứng minh. Từ (2.61), ta có

$$\Xi(u) \geq \overline{\Xi}(u) - \left|\int_\Omega D(x,u)dx\right|. \tag{2.74}$$

Nếu $u \in \mathrm{spt}(\psi)$ thì theo (2.74) và (2.63),

$$\Xi(u) + \alpha_{37}\left(|\Xi(u)|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}} + |\Xi(u)|^{\frac{1}{\mu}}\right) \geq \overline{\Xi}(u) - \alpha_{37} \geq \frac{M}{2}$$

với M_3 đủ lớn. Nếu $\Xi(u) < 0$ thì theo bất đẳng thức Young,

$$\overline{C}_5(\epsilon) + \epsilon\,|\Xi(u)| \geq \alpha_{37}\left(|\Xi(u)|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}} + |\Xi(u)|^{\frac{1}{\mu}}\right) \geq \frac{M}{2} + |\Xi(u)|\,,$$

trong đó $\overline{C}_5(\epsilon) \to \infty$ khi $\epsilon \to 0$.

Mặt khác, nếu $M_3 \geq 2\overline{C}_5(\epsilon)$ và $\epsilon < 1$ thì ta có bất đẳng thức

$$(\epsilon - 1)\,|\Xi(u)| \geq 0,$$

và điều này là vô lý. Vậy $\Xi(u) \geq 0$ và $\Xi(u) \geq \dfrac{M}{2(2\alpha_{37}+1)}$. □

Bổ đề 2.3.5. *Giả sử rằng f thoả mãn (Y_0), (Y_1), (Y_2), g thoả mãn (Y_{14}). Khi đó với mọi $\delta > 0$ đủ nhỏ, tồn tại $M > 0$ đủ lớn sao cho với mọi $u \in H_0^1(\Omega), \overline{\Xi}(u) \geq M$ ta có $|T_3(u)| \leq \delta, |T_4|(u) \leq \delta$.*

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp như sau.

Trường hợp 1: Nếu $u \notin \mathrm{spt}(\psi)$ thì chứng minh là tầm thường.

Trường hợp 2: Nếu $u \in \mathrm{spt}(\psi)$, ta chọn M_3 như trong Bổ đề 2.3.4. Ngoài ra, gọi $u \in H_0^1(\Omega)$ sao cho $\overline{\Xi}(u) \geq M$ và $M \geq M_3$. Khi đó

$$\kappa(u)^{-1}\int_\Omega (F(x,u) + \alpha_{32})\,dx \leq 2, \quad 2\kappa(u)^{-1}\Theta\Xi(u) \leq 1,$$
$$\left|\chi'\left(\kappa(u)^{-1}\int_\Omega (F(x,u) + \alpha_{32})\,dx\right)\right| \leq 2.$$

Từ Bổ đề 2.3.2 và Bổ đề 2.3.4,

$$\begin{aligned}
|T_3(u)| &\leq \alpha_{45}\left(\Xi(u)^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}-1} + \Xi(u)^{\frac{1}{\mu}-1} + \Xi(u)^{-1}\right)\\
&\leq \alpha_{46}\left(M^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}-1} + M^{\frac{1}{\mu}-1} + M^{-1}\right) \to 0 \text{ khi } M \to \infty,\\
|T_4(u)| &\leq |T_3(u)| + \alpha_{47}\left(M^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}-1} + M^{\frac{1}{\mu}-1} + M^{-1}\right) \to 0 \text{ khi } M \to \infty.
\end{aligned}$$

□

Bổ đề 2.3.6. *Giả sử rằng f thoả mãn (Y_0), (Y_1), (Y_2), g thoả mãn (Y_{14}) và hằng số Θ đủ lớn. Khi đó tồn tại $M_4 > 0$ sao cho nếu $u \in H_0^1(\Omega)$ là điểm tới hạn của $\overline{\Xi}$ và $\overline{\Xi}(u) \geq M_4$, thì u là điểm tới hạn của Ξ và $\overline{\Xi}(u) = \Xi(u)$.*

Chứng minh. Gọi $u \in H_0^1(\Omega)$ sao cho $\overline{\Xi}'(u) = 0$. Từ (2.62) ta có

$$\begin{aligned}
\Xi(u) &= \Xi(u) - \frac{\overline{\Xi}'(u)(u)}{2\left(1+T_3(u)\right)} \\
&= -\int_\Omega F(x,u)dx - \int_\Omega D(x,u)dx + \frac{1+T_4(u)}{2\left(1+T_3(u)\right)}\int_\Omega f(x,u)udx \\
&\quad + \frac{\psi(u)+T_3(u)}{2\left(1+T_3(u)\right)}\int_\Omega d(x,u)udx \\
&\geq \left(\frac{1+T_4(u)}{2\left(1+T_3(u)\right)} - \frac{1}{\mu}\right)\int_\Omega \left(f(x,u)u+\alpha_{31}\right)dx \\
&\quad + \frac{\psi(u)+T_3(u)}{2\left(1+T_3(u)\right)}\int_\Omega d(x,u)udx - \int_\Omega D(x,u)dx - \alpha_{48} \\
&\geq \alpha_{49}\int_\Omega \left(f(x,u)u+\alpha_{31}\right)dx - \overline{C}_6(\epsilon) - \epsilon\|u\|^\mu_{L^\mu(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Với M_4 đủ lớn sao cho $M_4 > M_3$ thì T_3, T_4 đủ nhỏ, và do đó nếu ta chọn Θ đủ lớn

$$\kappa(u)^{-1}\int_\Omega \left(F(x,u)+\alpha_{32}\right)dx \leq 1,$$

suy ra $\psi(u) = 1$ và $\psi'(u) = 0$. □

Bổ đề 2.3.7. *Giả sử rằng f thoả mãn (Y_0), (Y_1), (Y_2), g thoả mãn (Y_{14}). Khi đó $\overline{\Xi} \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ và tồn tại hằng số $M_5 > 0$ sao cho $\overline{\Xi}$ thoả mãn điều kiện Palais-Smale trên $\widehat{A}_{M_5} = \{u \in H_0^1(\Omega) : \overline{\Xi}(u) \geq M_5\}$.*

Chứng minh. Vì f thoả mãn (Y_0), (Y_2), g thoả mãn (Y_{14}) và $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, suy ra $\overline{\Xi} \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Gọi M_3 như trong Bổ đề 2.3.4 và chọn $M_5 \geq M_3$. Giả sử $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ là dãy thuộc $\widehat{A}_{M_5}$ thoả mãn

$$\overline{\Xi}(u_m) \leq K_1 \text{ với mọi } m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{m\to\infty} \overline{\Xi}'(u_m) = 0, \tag{2.75}$$

với $K_1 \geq M_5$. Trước hết, ta cần chỉ ra $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ là dãy bị chặn trong $H_0^1(\Omega)$.

Thật vậy, với mọi $\rho_3 > 0$ đủ nhỏ, m đủ lớn và $\rho_2 > 0$, ta có

$$\begin{aligned}
&\rho_2 K_1 + \rho_3 \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \rho_2 \overline{\Xi}(u_m) - \overline{\Xi}'(u_m)(u_m) \\
&= \left(\frac{\rho_2}{2} - (1 + T_3(u_m))\right) \|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} + (1 + T_4(u_m)) \int_\Omega f(x, u_m) u_m dx \\
&\quad - \rho_2 \int_\Omega F(x, u_m) dx - \rho_2 \int_\Omega \psi(u_m) D(x, u_m) dx \\
&\quad + (\psi(u_m) + T_3(u_m)) \int_\Omega d(x, u_m) u_m dx \geq \left(\frac{\rho_2}{2} - (1 + T_3(u_m))\right) \|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad + \left(1 + T_4(u_m) - \frac{\rho_2}{\mu}\right) \int_\Omega (f(x, u_m) u_m + \alpha_{31}) dx \\
&\quad - \rho_2 \int_\Omega \psi(u_m) D(x, u_m) dx + (\psi(u_m) + T_3(u_m)) \int_\Omega d(x, u_m) u_m dx - \alpha_{50} \\
&\geq \left(\frac{\rho_2}{2} - (1 + T_3(u_m))\right) \|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left(1 + T_4(u_m) - \frac{\rho_2}{\mu}\right) \alpha_{33} \mu \|u\|^\mu_{L^\mu(\Omega)} \\
&\quad - \overline{C}_7(\epsilon) - \epsilon \|u\|^\mu_{L^\mu(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Với M_5 đủ lớn và T_3, T_4 đủ nhỏ, ta chọn ρ_2, ρ_3 sao cho

$$\frac{\rho_2}{2} - (1 + T_3(u_m)) > 0, \quad 1 + T_4(u_m) - \frac{\rho_2}{\mu} > 0, \quad \rho_3 > 0$$

và $\epsilon = \left(1 + T_4(u_m) - \frac{\rho_2}{\mu}\right) \alpha_{33} \mu$, do đó $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ bị chặn trong $H_0^1(\Omega)$. Cho nên ta có thể (nếu cần thiết có thể xét dãy con) giả sử rằng

$$\begin{aligned}
&u_m \rightharpoonup u \text{ yếu trong } H_0^1(\Omega) \text{ khi } m \to \infty, \\
&u_m \to u \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega \text{ khi } m \to \infty, \\
&u_m \to u \text{ mạnh trong } L^q(\Omega), 1 \leq q < \widetilde{2} \text{ khi } m \to \infty.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Theo giả thiết (Y_2) ta có

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega f(x, u_m)(u_m - u) dx \right| \leq \alpha_{30} \int_\Omega |u_m - u| dx + \alpha_{30} \int_\Omega |u_m - u| |u_m|^{p-1} dx \\
&\leq \alpha_{30} \int_\Omega |u_m - u| dx + \alpha_{30} \left(\int_\Omega |u_m - u|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |u_m|^p dx \right)^{(p-1)/p}.
\end{aligned}$$

Từ (2.76) ta suy ra

$$\int_\Omega f(x, u_m)(u_m - u) dx \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty.$$

Cho nên

$$\int_\Omega (f(x,u_m) - f(x,u))\,(u_m - u)dx \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty. \tag{2.77}$$

Theo giả thiết (Y_{14}), nếu $\sigma_2 = 0$ ta có

$$\int_\Omega d(x,u_m)(u_m - u)dx \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty.$$

Nếu $\sigma_2 \neq 0$ thì

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega d\,(x,u_m)\,(u_m - u)\,dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |d_1(x)|\,|u_m - u|\,dx + \int_\Omega |u_m - u|\,|u_m|^{\sigma_2}\,|d_2(x)|\,dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |u_m - u|^{\frac{p_3}{p_3-1}}\,dx\right)^{\frac{p_3-1}{p_3}} \left(\int_\Omega |d_1(x)|^{p_3}\,dx\right)^{\frac{1}{p_3}} + \left(\int_\Omega |d_2(x,y)|^{p_4}\,dx\right)^{\frac{1}{p_4}} \\
&\quad \times \left(\int_\Omega |u_m - u|^{\frac{(\sigma_2+1)p_4}{p_4-1}}\,dx\right)^{\frac{p_4-1}{(\sigma_2+1)p_4}} \left(\int_\Omega |u_m|^{\frac{(\sigma_2+1)p_4}{p_4-1}}\,dx\right)^{\frac{\sigma_2(p_4-1)}{(\sigma_2+1)p_4}}.
\end{aligned}$$

Từ (2.76) ta thu được

$$\int_\Omega d(x,u_m)(u_m - u)dx \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty.$$

Do đó

$$\int_\Omega (d(x,u_m) - d(x,u))(u_m - u)dx \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty. \tag{2.78}$$

Nếu M_5 đủ lớn, thì từ $\lim_{m\to\infty} \overline{\Xi}'(u) = 0$ và (2.76) ta có

$$\left\langle (1 + T_3(u))\,\overline{\Xi}'\,(u_m) - (1 + T_3\,(u_m))\,\overline{\Xi}'(u), u_m - u \right\rangle \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty. \tag{2.79}$$

Ngoài ra

$$\begin{aligned}
&\left\langle (1 + T_3(u))\,\overline{\Xi}'\,(u_m) - (1 + T_3\,(u_m))\,\overline{\Xi}'(u), u_m - u \right\rangle \\
&= (1 + T_3(u))\,(1 + T_3\,(u_m)) \int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^2\,dx \\
&\quad - (1 + T_3(u))\,(1 + T_4\,(u_m)) \int_\Omega f\,(x,u_m)\,(u_m - u)\,dx \\
&\quad - (1 + T_3(u))\,(\psi\,(u_m) + T_3\,(u_m)) \int_\Omega d\,(x,u_m)\,(u_m - u)\,dx \\
&\quad + (1 + T_3\,(u_m))\,(1 + T_4(u)) \int_\Omega d(x,u)\,(u_m - u)\,dx \\
&\quad + (1 + T_3\,(u_m))\,(\psi(u) + T_3(u)) \int_\Omega d(x,u)\,(u_m - u)\,dx.
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Từ (2.77), (2.78), (2.79) và (2.80) ta thu được

$$\int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^2 \, dx \to 0 \quad \text{khi } m \to \infty.$$

Vậy ta suy ra rằng $u_m \to u$ mạnh trong $H_0^1(\Omega)$, điều phải chứng minh. □

Bây giờ ta sẽ chỉ ra $\overline{\Xi}$ có một dãy các điểm tới hạn không bị chặn. Gọi $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ là giá trị riêng của bài toán

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{trong } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{trên } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.81}$$

và $e_1, e_2, \cdots$ là các hàm riêng chuẩn hoá sao cho $\|e_j\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ với mọi $j = 1, 2, \cdots$. Với mỗi $k > 0$, ta đặt $\mathbb{V}_k = \text{span}\{e_j : j \leq k\}$ trong $H_0^1(\Omega)$ và $\mathbb{V}_k^\perp$ là phần bù trực giao của nó.

Bổ đề 2.3.8. *Giả sử rằng f thoả mãn (Y_0), (Y_1), (Y_2), g thoả mãn (Y_{14}). Khi đó với mọi $k > 0$, tồn tại $R_k > 0$ sao cho với mọi $u \in \mathbb{V}_k$, $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq R_k$, ta có $\overline{\Xi}(u) \leq 0$.*

Chứng minh. Gọi $u \in \mathbb{V}_k$. Từ (2.58), (2.61) và giả thiết (Y_{14}) ta có

$$\begin{aligned} \overline{\Xi}(u) &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \alpha_{33}\|u\|^\mu_{L^\mu(\Omega)} + \alpha_{51}\|u\|_{L^{p_3'}(\Omega)} + \alpha_{52}\|u\|^{\sigma_2+1}_{L^{p_4'(\sigma_2+1)}(\Omega)} + \alpha_{53} \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \alpha_{54}\|u\|^\mu_{L^\mu(\Omega)} + \alpha_{55} \quad (\alpha_{54} > 0, \alpha_{55} > 0), \end{aligned}$$

trong đó $\dfrac{1}{p_3} + \dfrac{1}{p_3'} = 1, \dfrac{1}{p_4} + \dfrac{1}{p_4'} = 1.$

Vì trong $\mathbb{V}_k$ tồn tại $\hat{d} = \hat{d}_k > 0$ sao cho $\|u\|_{L^\mu(\Omega)} \geq \hat{d}\|u\|_{H_0^1}(\Omega)$ với mọi $u \in \mathbb{V}_k$, ta có

$$\overline{\Xi}(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \alpha_{54}\hat{d}^\mu\|u\|^\mu_{H_0^1(\Omega)} + \alpha_{55},$$

suy ra $\overline{\Xi}(u) \to -\infty$ khi $u \in \mathbb{V}_k$, $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$. □

Gọi B_{R_k} là hình cầu đóng bán kính R_k trong $H_0^1(\Omega)$, $\mathbb{W}_k \equiv B_{R_k} \cap \mathbb{V}_k$, và

$$\Gamma_k = \left\{ h \in C\left(\mathbb{W}_k, H_0^1(\Omega)\right) : h \text{ là lẻ và } h(u) = u \text{ nếu } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = R_k \right\}. \tag{2.82}$$

Ta định nghĩa

$$\beta_k = \inf_{h\in\Gamma_k} \max_{u\in\mathbb{W}_k} \overline{\Xi}(h(u)), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.83}$$

Nếu $g \equiv 0$ và $\overline{\Xi}$ là hàm chẵn thì theo bài báo [21, 8] các số β_k là điểm tới hạn của $\overline{\Xi}$. Nếu $g \neq 0$ thì điều đó chưa chắc đúng. Tuy nhiên ta sẽ sử dụng β_k làm cơ sở để lập luận trong chứng minh Định lý 2.3.1. Trước hết ta chỉ ra $\beta_k \to \infty$ khi $k \to \infty$.

Bổ đề 2.3.9. *Giả sử rằng f thoả mãn (Y_0), (Y_1), (Y_2), g thoả mãn (Y_{14}). Khi đó tồn tại hằng số $\alpha_{56} > 0$ và $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $k \geq k_0$,*

$$\beta_k \geq \alpha_{56} k^{\frac{2p}{N(p-2)}}. \tag{2.84}$$

Chứng minh. Theo (Y_2) và (Y_{14}) ta thu được

$$\overline{\Xi}(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \alpha_{57}\int_\Omega |u|^p dx - \alpha_{58}. \tag{2.85}$$

Đặt

$$K(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \alpha_{57}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \in C^2\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right). \tag{2.86}$$

Khi đó ta thấy rằng

$$\overline{\Xi}(u) \geq K(u) - \alpha_{58}, \tag{2.87}$$

$$K''(u)(h,h) = \left(\left(-\Delta - \alpha_{57}p(p-1)|u|^{p-2}\right)h, h\right) \quad \text{với mọi } u \in H_0^1(\Omega) \tag{2.88}$$

và phiếm hàm $K(u)$ thoả mãn các giả thiết sau:

(Y_{15}) $K(0) = 0$;

(Y_{16}) $K(-u) = K(u)$ với mọi $u \in H_0^1(\Omega)$;

(Y_{17}) với mỗi không gian con hữu hạn chiều $E \subset H_0^1(\Omega)$, tồn tại $R = R(E) > 0$ sao cho

$$K(u) < 0, \quad \text{với mọi } u \in E \text{ và } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq R(E);$$

(Y_{18}) $K'(u) = u + \kappa(u)$ với $u \in H_0^1(\Omega)$, trong đó $\kappa : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ là toán tử compact;

(Y_{19}) Nếu tồn tại $M > 0, \{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ thoả mãn $K(u_j) \leq M$ với mọi j, và

$$\|K'(u_j)\|_{(H_0^1(\Omega))^*} \to 0$$

khi $j \to \infty$, thì khi đó tồn tại một dãy con $\{u_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ mạnh trong $H_0^1(\Omega)$;

(Y_{20}) Nếu tồn tại $M > 0, \{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{V}_m$ thoả mãn $K(u_j) \leq M$ với mọi j và

$$\left\| \left(K|_{\mathbb{V}_m} \right)' (u_j) \right\|_{(\mathbb{V}_m)^*} \to 0$$

khi $j \to \infty$, thì khi đó tồn tại một dãy con $\{u_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ mạnh trong $\mathbb{V}_m$;

(Y_{21}) Nếu tồn tại $M > 0, \{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ thoả mãn $u_j \in \mathbb{V}_j, K(u_j) \leq M$ với mọi j và

$$\left\| \left(K|_{\mathbb{V}_j} \right)' (u_j) \right\|_{(\mathbb{V}_j)^*} \to 0$$

khi $j \to \infty$, thì khi đó tồn tại một dãy con $\{u_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ mạnh trong $H_0^1(\Omega)$.

Tiếp theo, ta định nghĩa giá trị minimax

$$\omega_k = \inf_{h \in \Gamma_k} \max_{u \in \mathbb{W}_k} K(h(u)), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.89}$$

Từ (2.87) ta thu được

$$\beta_k \geq \omega_k - \alpha_{26}. \tag{2.90}$$

Từ [12, Định lý B], tồn tại $v_k \in H_0^1(\Omega)$ sao cho

$$K(v_k) \leq \omega_k, \tag{2.91}$$

$$K'(v_k) = 0, \tag{2.92}$$

$$\operatorname{index}_0 K''(v_k) \geq k, \tag{2.93}$$

trong đó

$$\operatorname{index}_0 K''(v_k) := \max\{ \dim E : E \subset H_0^1(\Omega) \text{ là không gian con sao cho } K''(v_k)(h,h) \leq 0, \text{ với } h \in E\}.$$

Do đó, từ (2.88) và (2.93) ta thu được

$$-\Delta - \alpha_{57} p(p-1)\,|v_k|^{p-2} \text{ có ít nhất } k \text{ giá trị riêng không dương.} \tag{2.94}$$

Gọi $\mathcal{N}(V)$ là số các giá trị riêng không dương (tính cả bội số) của bài toán

$$\begin{aligned} -\Delta u - V(x)u &= \lambda u \quad \text{trong } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{trên } \partial\Omega, \end{aligned}$$

trong đó $V(x) \in L^{N/2}(\Omega)$. Khi đó từ [12, Bổ đề 2.3] (hoặc [19, 20]) tồn tại một hằng số $C_N > 0$ sao cho

$$\mathcal{N}(V) \leq C_N \|V(x)\|^{\frac{N}{2}}_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)}. \tag{2.95}$$

Từ (2.94) và (2.95) ta thu được

$$\alpha_{59} k \leq \left\| |v_k|^{p-2} \right\|^{\frac{N}{2}}_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega)}. \tag{2.96}$$

Mặt khác, từ (2.92) ta có

$$\|v_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \alpha_{57} p \, \|v_k\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{2.97}$$

Từ (2.91), (2.96) và (2.97) ta thu được

$$\omega_k \geq \frac{\alpha_{57}}{2}(p-2)\,\|v_k\|^p_{L^p(\Omega)} \geq \alpha_{60} k^{\frac{2p}{N(p-2)}} \text{ với mọi } k \in \mathbb{N}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Để xây dựng một dãy các giá trị tới hạn của $\overline{\Xi}$, ta gọi

$$\mathbb{U}_k = \left\{ u = te_{k+1} + w : t \in [0, R_{k+1}], w \in B_{R_{k+1}} \cap \mathbb{V}_k, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R_{k+1} \right\}$$

và

$$\begin{aligned} \Lambda_k = \Big\{ H \in C\left(\mathbb{U}_k, H_0^1(\Omega)\right) : H|_{\mathbb{W}_k} \in \Gamma_k \text{ và } H(u) = u \\ \text{nếu } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = R_{k+1} \text{ hoặc } u \in \left(B_{R_{k+1}} \setminus B_{R_k}\right) \cap \mathbb{V}_k \Big\}. \end{aligned}$$

Giờ ta định nghĩa

$$\gamma_k = \inf_{H \in \Lambda_k} \max_{u \in \mathbb{U}_k} \overline{\Xi}(H(u)), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.98}$$

Bổ đề 2.3.10. *Giả sử rằng $\gamma_k > \beta_k \geq M_5$. Gọi $\delta \in (0, \gamma_k - \beta_k)$ và*

$$\Lambda_k(\delta) = \left\{ H \in \Lambda_k : \overline{\Xi}(H) \leq \beta_k + \delta \text{ trên } \mathbb{W}_k \right\}.$$

Gọi

$$\gamma_k(\delta) = \inf_{H \in \Lambda_k(\delta)} \max_{u \in \mathbb{U}_k} \overline{\Xi}(H(u)), \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.99}$$

Khi đó $\gamma_k(\delta)$ là giá trị tới hạn của $\overline{\Xi}$.

Chứng minh. Từ định nghĩa của β_k và Λ_k, ta có $\Lambda_k(\delta) \neq \varnothing$. Chọn $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}(\gamma_k - \beta_k - \delta) > 0$. Nếu $\gamma_k(\delta)$ không phải giá trị tới hạn của $\overline{\Xi}$, thì tồn tại ϵ và η như trong Bổ đề 1.6.1. Chọn $H \in \Lambda_k(\delta)$ sao cho

$$\max_{\mathbb{U}_k} \overline{\Xi}(H(u)) \leq \gamma_k(\delta) + \epsilon. \tag{2.100}$$

Xét $\eta(1, H(u)) \in C(\mathbb{U}_k, \mathbb{V})$. Chú ý rằng nếu $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = R_{k+1}$ hoặc $u \in \left(B_{R_{k+1}} \setminus B_{R_K}\right) \cap \mathbb{V}_k$ thì $\overline{\Xi}(H(u)) = \overline{\Xi}(u) \leq 0$, do đó $\eta(1, H(u)) = u$ theo Bổ đề 1.6.1 (có thể giả sử $\beta_k > 0$). Vậy $\eta(1, H(u)) \in \Lambda_k$. Hơn nữa trên $\mathbb{W}_k, \overline{\Xi}(H(u)) \leq \beta_k + \delta \leq \gamma_k - \bar{\epsilon} \leq \gamma_k(\delta) - \bar{\epsilon}$ thông qua việc chọn δ và $\bar{\epsilon}$. Do đó $\eta(1, H) = H \leq \beta_k + \delta$ trên $\mathbb{W}_k$ theo Bổ đề 1.6.1. Vì vậy, $\eta(1, H) \in \Lambda_k(\delta)$ và theo (2.98) cùng với của Bổ đề 1.6.1(b),

$$\max_{\mathbb{U}_k} \overline{\Xi}(\eta(1, H(u))) \leq \gamma_k(\delta) - \epsilon,$$

trái với định nghĩa của $\gamma_k(\delta)$. Suy ra $\gamma_k(\delta)$ phải là giá trị tới hạn của $\overline{\Xi}$. □

Định lí 2.3.1. *Giả sử rằng (Y_0), (Y_1), (Y_2) và (Y_{14}) được thoả mãn, và*

$$\frac{2p}{N(p-2)} > \frac{\mu}{\mu - \sigma_2 - 1}. \tag{2.101}$$

Khi đó bài toán (2.1) có một dãy nghiệm không bị chặn trong $H_0^1(\Omega)$.

Chứng minh. Từ (2.83), (2.98) và (2.99) suy ra $\gamma_k(\delta) \geq \gamma_k \geq \beta_k$, và theo Bổ đề 2.3.9 ta có $\beta_k \to \infty$ khi $k \to \infty$. Ta cần chỉ ra sự tồn tại của một dãy con của dãy γ_k sao cho $\gamma_k > \beta_k$. Thật vậy, giả sử rằng $\gamma_k = \beta_k$ với mọi $k \geq k_1$. Với mọi $\epsilon > 0$, ta chọn $H \in \Lambda_k$ sao cho

$$\max_{u \in \mathbb{U}_k} \overline{\Xi}(H(u)) \leq \beta_k + \epsilon. \tag{2.102}$$

Gọi $\widehat{H}(u) = H(u)$ nếu $u \in \mathbb{U}_k$ và $\widehat{H}(u) = -H(-u)$ nếu $-u \in \mathbb{U}_k$. Vì $H|_{B_{R_{k+1}} \cap \mathbb{V}_k}$ là lẻ và liên tục và $\mathbb{W}_{k+1} = \mathbb{U}_k \cup (-\mathbb{U}_k)$, do đó $\widehat{H}$ được định nghĩa tốt trên $\mathbb{W}_{k+1}$ và $\widehat{H} \in \Gamma_{k+1}$. Do đó

$$\beta_{k+1} \leq \max_{u \in \mathbb{W}_{k+1}} \overline{\Xi}(\widehat{H}(u)). \tag{2.103}$$

Theo Bổ đề 2.3.3 và (2.102) ta thu được

$$\max_{-\mathbb{U}_k} \overline{\Xi}(\widehat{H}(u)) \leq \beta_k + \epsilon + \alpha_{41} \left(|\beta_k + \epsilon|^{\frac{1}{\mu}} + |\beta_k + \epsilon|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}} + 1 \right). \tag{2.104}$$

Từ (2.102), (2.103) và (2.104) suy ra

$$\beta_{k+1} \leq \beta_k + \epsilon + \alpha_{41} \left(|\beta_k + \epsilon|^{\frac{1}{\mu}} + |\beta_k + \epsilon|^{\frac{\sigma_2+1}{\mu}} + 1 \right).$$

Vì ϵ là tuỳ ý nên ta có

$$\beta_{k+1} \leq \beta_k \left[1 + \alpha_{60} \left(\beta_k^{\frac{1-\mu}{\mu}} + \beta_k^{\frac{\sigma_1+1-\mu}{\mu}} \right) \right]$$

với mọi $k \geq k_1$.

Bằng phương pháp lặp,

$$\begin{aligned}
\beta_{k_1+l} &\leq \beta_{k_1} \prod_{k=k_1}^{k_1+l-1} \left[1 + \alpha_{60} \left(\beta_k^{\frac{1-\mu}{\mu}} + \beta_k^{\frac{\sigma_2+1-\rho_1}{\mu}} \right) \right] \\
&\leq \beta_{k_1} \exp \left\{ \sum_{k=k_1}^{k_1+l-1} \ln \left[1 + \alpha_{60} \left(\beta_k^{\frac{1-\mu}{\mu}} + \beta_k^{\frac{\sigma_2+1-\mu}{\mu}} \right) \right] \right\} \\
&\leq \beta_{k_1} \exp \alpha_{60} \left(\sum_{k=k_1}^{k_1+l-1} \beta_k^{\frac{1-\mu}{\mu}} + \sum_{k=k_1}^{k_1+l-1} \beta_k^{\frac{\sigma_2+1-\mu}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

Từ (2.83) và (2.101) ta có đánh giá

$$\beta_{k_1+l} \leq \beta_{k_1} \exp \alpha_{61} \left(\sum_{k=k_1}^{\infty} k^{\frac{1-\mu}{\mu} \cdot \frac{2p}{N(p-2)}} + k^{\frac{\sigma_2+1-\mu}{\mu} \cdot \frac{2p}{N(p-2)}} \right) < \infty$$

với mọi $l \in \mathbb{N}$, mâu thuẫn với Bổ đề 2.3.9. □

Chú ý 2.3.3. *Định lý 2.3.1 là sự mở rộng kết quả của Rabinowitz [10, 11] và Tanaka [12]. Ngoài ra, nó cũng không là trường hợp riêng của [7, 6, 20, 16, 5]. Chẳng hạn, nếu ta xét $N = 3$,*

$$f(x, \zeta) = \zeta|\zeta|^{\frac{1}{4}} - \zeta|\zeta|^{\frac{1}{8}}, \quad d(x, \zeta) = |\zeta|^{\sigma_2}, \quad 0 \leq \sigma_2 < \frac{21}{24}$$

thì khi đó f, d thoả mãn các điều kiện trong Định lý 2.3.1, nhưng f không thoả mãn điều kiện trong [7, Định lý 1]. Mặt khác, hàm f thoả mãn điều kiện trong [18, Định lý 1.1], [10, 11, Định lý 1.5] và [6, Định lý 3]. Tuy nhiên, hàm d có thể tăng trưởng nhanh hơn điều kiện nhiễu trong [18, 10, 11, 6].

Kết luận

Trong luận văn này, chúng tôi tìm hiểu về tính chất nhiều nghiệm yếu của bài toán giá trị biên

$$-\Delta u = f(x,u) + g(x,u) \quad \text{trong } \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{trên } \partial\Omega,$$

trong đó Ω là miền bị chặn có biên trơn thuộc $\mathbb{R}^N (N > 2)$, hàm $f(x,\zeta)$ là hàm lẻ theo biến ζ và g là điều kiện nhiễu. Cụ thể, luận văn đã trình bày một số kết quả chính như sau

- Chương 1: Nhắc lại các khái niệm cơ bản như không gian $L^p(\Omega)$, không gian Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, định lý nhúng, các bất đẳng thức cơ bản, định lý về biến dạng và định nghĩa hàm Carathéodory.

- Chương 2: Bằng cách vận dụng phương pháp nhiễu Rabinowitz, kết hợp với ước lượng dáng điệu tiệm cận cho các giá trị riêng của phương trình Schrödinger, chúng tôi chỉ ra được tính chất nhiều nghiệm của bài toán giá trị biên cho hai trường hợp: hàm f không thoả mãn điều kiện (Y_0) và hàm f thoả mãn điều kiện (Y_0) (các điều kiện được giả sử ở đây không phải trường hợp riêng của [7, 12]).

Tài liệu tham khảo

[1] D. T. Luyen, N. M. Tri, Multiple solutions to boundary value problems for semilinear elliptic equations, Vietnam: Hanoi University of Education, 2017.

[2] H. Tuy, Hàm thực và giải tích hàm, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2005.

[3] D. C. Clark, A variant of the Lusternik–Schnirelman theory, Indiana Univ. Math. J., 22 (1972/73), 65–74.

[4] P. H. Rabinowitz, Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, in: G. Prodi (ed.), Eigenvalues of Non-linear Problems, C.I.M.E. Summer Schools, Vol. 67, Springer, Berlin, 2009, pp. 139–195.

[5] A. Bahri, H. Berestycki, A perturbation method in critical point theory and applications, Trans. Amer. Math. Soc., 267 (1981), no. 1, 1–32.

[6] M. Struwe, Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear boundary value problems, Manuscripta Math., 32 (1980), no. 3–4, 335–364.

[7] A. Bahri, P. L. Lions, Morse index of some min-max critical points. I. Application to multiplicity results, Comm. Pure Appl. Math., 41 (1988), no. 8, 1027–1037.

[8] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal., 14 (1973), 349–381.

[9] P. H. Rabinowitz, Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4) 5 (1978), no. 1, 215–223.

[10] P. H. Rabinowitz, Multiple critical points of perturbed symmetric functionals, Trans. Amer. Math. Soc., 272 (1982), no. 2, 753–769.

[11] P. H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 65, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[12] K. Tanaka, Morse indices at critical points related to the symmetric mountain pass theorem and applications, Comm. Partial Differential Equations, 14 (1989), no. 1, 99–128.

[13] H. T. Tehrani, Infinitely many solutions for indefinite semilinear elliptic equations without symmetry, Comm. Partial Differential Equations, 21 (1996), no. 3–4, 541–557.

[14] P. Bolle, N. Ghoussoub, H. Tehrani, The multiplicity of solutions in nonhomogeneous boundary value problems, Manuscripta Math., 101 (2000), no. 3, 325–350.

[15] Y. Long, Multiple solutions of perturbed superquadratic second order Hamiltonian systems, Trans. Amer. Math. Soc., 311 (1989), no. 2, 749–780.

[16] N. Hirano, W. Zou, A perturbation method for multiple sign-changing solutions, Calc. Var. Partial Differential Equations, 37 (2010), nos. 1–2, 87–98.

[17] D. P. D. Santos, Multiple solutions for mixed boundary value problems with φ-Laplacian operators, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2020 (2020), no. 67, 1–8.

[18] D. T. Luyen, N. M. Tri, On the existence of multiple solutions to boundary value problems for semilinear elliptic degenerate operators, Complex Var. Elliptic Equ., 64 (2019), no. 6, 1050–1066.

[19] M. Cwickel, Weak type estimates and the number of bounded states of Schrödinger operators, Ann. of Math., (2) 106 (1977), no. 1, 93–100.

[20] P. Li, S. T. Yau, On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem, Comm. Math. Phys., 88 (1983), no. 3, 309–318.

[21] N. M. Tri, Semilinear degenerate elliptic differential equations: local and global theories, Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2010.

[22] R. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[23] L. C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.