

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ



**LÝ THUYẾT KALUZA-KLEIN GIẢN ĐOẠN VÀ CÁC KÊNH
PHÂN RÃ TỐI CỦA NEUTRON**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ VẬT LÝ

Hà Nội - 2025

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

LÝ THUYẾT KALUZA-KLEIN GIẢN ĐOẠN VÀ CÁC KÊNH
PHÂN RÃ TỐI CỦA NEUTRON

LUẬN ÁN TIẾN SĨ : VẬT LÝ LÝ THUYẾT VÀ VẬT LÝ TOÁN

Mã số: 9440103

Xác nhận của Học viện
Khoa học và Công nghệ

Người hướng dẫn 1
(Ký, ghi rõ họ tên)

Người hướng dẫn 2
(Ký, ghi rõ họ tên)

Hà Nội - 2025

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận án: "**Lý thuyết Kaluza-Klein gián đoạn và các kênh phân rã tối của neutron**" là công trình nghiên cứu của chính mình dưới sự hướng dẫn khoa học của tập thể hướng dẫn. Luận án sử dụng thông tin trích dẫn từ nhiều nguồn tham khảo khác nhau và các thông tin trích dẫn được ghi rõ nguồn gốc. Các kết quả nghiên cứu của tôi được công bố chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các số liệu, kết quả được trình bày trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ một công trình nào khác ngoài các công trình công bố của tác giả. Luận án được hoàn thành trong thời gian tôi làm nghiên cứu sinh tại Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Hà Nội, ngày 20 tháng 08 năm 2025

Tác giả luận án

(Ký và ghi rõ họ tên)

Phạm Tiến Dự

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Viện Vật lý, chuyên ngành Vật lý lý thuyết và khoa Vật lý đã truyền đạt cho tôi những kiến thức quý báu, trang bị cho tôi những phương pháp nghiên cứu khoa học hiện đại cùng một tư duy sáng tạo, độc đáo và đóng góp ý kiến hữu ích trong quá trình viết luận án.

Tôi xin cảm ơn Ban Giám đốc Học viện Khoa học và công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và công nghệ Việt Nam, Phòng sau đại học và các Phòng ban trong viện Vật lý đã tạo điều kiện, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại Viện và hoàn thành luận án này.

Xin chân thành cảm ơn tất cả người thân, bạn bè và đồng nghiệp. Đặc biệt xin gửi lời cảm ơn đến vợ và các con đã giúp đỡ, động viên tôi rất nhiều trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Hà Nội, ngày 20 tháng 08 năm 2025

Tác giả luận án

(Ký và ghi rõ họ tên)

Phạm Tiến Dự

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN	i
LỜI CẢM ƠN	ii
MỤC LỤC	iii
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CÁC CHỮ KÝ VIẾT TẮT	v
MỞ ĐẦU	1
1. Lý do chọn đề tài.....	1
2. Mục đích nghiên cứu	5
3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu	6
4. Nội dung nghiên cứu.....	7
5. Phương pháp nghiên cứu	7
6. Bố cục của luận án	7
CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU	9
1.1. Cơ sở khoa học và thực tiễn	9
1.1.1. <i>Nền tảng của vật lý hiện đại và Lý thuyết trường thống nhất.....</i>	9
1.1.2. <i>Mô hình Chuẩn</i>	12
1.1.3. <i>Lý thuyết không gian nhiều chiều.....</i>	13
1.1.4. <i>Vật chất tối.....</i>	14
1.2. Cơ sở toán học.....	16
1.2.1. <i>Hình học Riemann và hình thức luận Cartan</i>	16
1.2.2. <i>Hình học không giao hoán.....</i>	18
1.3. Kết luận chương 1.....	19
CHƯƠNG 2. LÝ THUYẾT KALUZA-KLEIN GIÁN ĐOẠN DKKT	21
2.1. Lý thuyết DKKT với chiều phụ gồm hai điểm.	21
2.1.1. <i>Không-thời gian với chiều ngoại phụ gián đoạn.....</i>	21
2.1.2. <i>Đại số hàm khả vi và đạo hàm tổng quát trong DKKT.....</i>	23
2.1.3. <i>Cơ sở trực chuẩn và tổng quát của dạng-1.....</i>	25
2.1.4. <i>Metric tổng quát hoá</i>	32
2.2. Mô hình hạt của tương tác photon-fermion	35
2.3. Kết luận chương 2.....	40
CHƯƠNG 3. TRƯỜNG GAUGE PHI ABEL NHƯ THÀNH PHẦN CỦA HẤP DẪN TRONG LÝ THUYẾT DKKT	41
3.1. Liên thông, độ xoắn và độ cong	41
3.1.1. <i>Liên thông Hermitian và metric tương thích dạng-1.....</i>	41
3.1.2. <i>Phương trình cấu trúc thứ nhất và độ xoắn dạng-2.....</i>	42
3.1.3. <i>Phương trình cấu trúc thứ hai và tensor độ cong Ricci</i>	47
3.2. Trường gauge phi Abel như thành phần của hấp dẫn.....	50
3.3. Kết luận chương 3.....	57

CHƯƠNG 4. ĐỘ RỘNG PHÂN RÃ CỦA NEUTRON TRONG LÝ THUYẾT DKKT	59
4.1. Thời gian sống và các kênh phân rã tối của neutron trong DKKT	59
4.2. Kênh rã của neutron sinh ra hạt photon tối vô hướng	62
4.3. Các kênh rã của neutron qua X_{17} ra neutron tối.	65
4.3.1. Quá trình rã neutron thành cặp neutrino và phản neutrino	70
4.3.2. Quá trình rã neutron thành cặp neutrino tối và phản neutrino	71
4.3.3. Quá trình rã neutron thành cặp neutrino và phản neutrino tối	72
4.3.4. Quá trình rã neutron thành cặp neutrino tối và phản neutrino tối	73
4.4. So sánh các kênh phân rã mới của neutron	76
4.5. Vấn đề phân rã neutron và lời giải trong lý thuyết DKKT	78
4.6. Kết luận chương 4	79
KẾT LUẬN	81
NHỮNG ĐÓNG GÓP MỚI CỦA LUẬN ÁN	84
DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ	85
TÀI LIỆU THAM KHẢO	86
PHỤ LỤC	93
P.1. Đạo hàm dạng-2 , liên thông trong trường hợp cơ bản và độ cong trong trường hợp phi Abel	93
P.2. Tính tensor độ cong trong trường hợp abel	99
P.3. Tính toán độ rộng phân rã trong các kênh phân rã neutron qua X_{17}	106

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CÁC CHỮ KÝ VIẾT TẮT

GR: Thuyết tương đối tổng quát

SM: Mô hình chuẩn

NCG: Hình học không giao hoán

KK: Kaluza-Klein

DKKT: Lý thuyết Kaluza-Klein với các chiều phụ gián đoạn

QCD: Sắc động học lượng tử

QED: Điện động lực học lượng tử

IPC- Internal Pair Creation: thí nghiệm tạo cặp nội bộ

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Mô hình Chuẩn (SM) đã mô tả rất thành công tương tác mạnh, tương tác yếu và tương tác điện từ của vật chất hadron và lepton với các tiên đoán phù hợp với thực nghiệm với độ chính xác cao. Hiện nay, các quá trình có mức năng lượng dưới 1 TeV mà các máy gia tốc hiện đại nhất mà chúng ta đang có đều được mô tả gần như hoàn hảo bởi Mô hình Chuẩn. Như vậy, một lý thuyết thống nhất các tương tác trong tương lai nhằm giải quyết các vấn đề cơ bản của vật lý cần phải bao gồm và mở rộng của Mô hình Chuẩn.

Trong nhiều thập kỷ qua, các nhà vật lý đã theo đuổi nhiều hướng khác nhau để mở rộng Mô hình Chuẩn. Có thể kể tới hai xu hướng chính sau đây:

- i. *Mở rộng nhóm đối xứng gauge $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.* Một lý thuyết mở rộng như vậy có thể có bao gồm những tương tác mới, với các tiên đoán thực nghiệm có thể kiểm chứng trên thế hệ các máy gia tốc hạt mới với mức năng lượng trên 1 TeV hoặc có những hệ quả mới cho vật lý vũ trụ và thiên văn.
- ii. *Mở rộng không thời gian 3+1 chiều với các chiều ngoại phụ (extra dimensions).* Về lâu dài, lý thuyết này trở nên cần thiết để thống nhất hai trụ cột của vật lý hiện đại là lý thuyết lượng tử và lý thuyết hấp dẫn, do ở mức năng lượng Planck, tất cả các tương tác đều sẽ phải thống nhất với lý thuyết hấp dẫn. Ngày nay, lý thuyết nhiều chiều đã trở thành chuẩn mực cho các lý thuyết thống nhất như siêu hấp dẫn 11 chiều, lý thuyết dây 26 chiều, lý thuyết Yang-Mills siêu đối xứng 10 chiều.

Đề tài của Luận án này thuộc xu hướng thứ hai. Về mặt lý thuyết, các lý thuyết với chiều ngoại phụ đều là mở rộng của lý thuyết Kaluza-Klein được Kaluza (1921) [1] và Klein (1926) [2] đề xuất từ những năm 1920 để thống nhất tương tác điện từ với tương tác hấp dẫn. Với chiều không gian phụ thứ 5

là một vòng tròn có bán kính rất nhỏ, hàm tác dụng Hilbert-Einstein mở rộng bao gồm các tương tác đã biết vào lúc đó là hấp dẫn và điện từ. Tuy nhiên, lý thuyết này chưa bao gồm hai loại tương tác còn lại, được mô tả bởi các trường gauge phi Abel, là tương tác mạnh và tương tác yếu. Ưu điểm của lý thuyết này là vừa mở rộng khái niệm không thời gian đồng thời vẫn giữ được vẻ đẹp của lý thuyết tương đối rộng của Einstein. Tuy nhiên, lý thuyết này có một vấn đề cơ bản là bao gồm vô hạn các trường có khối lượng là “bạn đồng hành Kaluza-Klein” (hạt cặp KK) của các trường đã biết là hệ số khai triển Fourier của các trường mở rộng theo các chiều phụ.

Mặt khác, chúng ta đã biết hình học Riemann dựa trên các đa tạp là công cụ toán học hiệu quả nhất để mô tả Lý thuyết tương đối tổng quát (GR). Cartan đã mở rộng GR để lý thuyết có thể bao gồm cả độ xoắn ($T \neq 0$). Khi đó, phương trình Einstein được thay bởi hệ hai phương trình Cartan mô tả cấu trúc không thời gian thông qua các đại lượng toán học là liên thông, độ xoắn và độ cong. Do đó, Cartan đã phát triển một hình thức luận thay thế cho hình thức luận metric trong hình học Riemann cổ điển bằng hình thức luận vierbein (phép quay địa phương, tetrad). Hình thức luận Cartan sử dụng phương pháp đại số cho chúng ta một biểu diễn toán học đơn giản hơn, rộng hơn và đẹp hơn, do đó nó thích hợp cho các lý thuyết hấp dẫn mở rộng sau này.

Đến hai thập kỷ cuối của thế kỷ 20, Connes-Lott đã cố gắng xây dựng một lý thuyết hình học mới gọi là hình học không giao hoán (NCG). Công cụ toán học của cấu trúc không thời gian Connes-Lott, hình học không giao hoán là mở rộng tự nhiên của hình học Riemann thông thường, trong đó đại số giao hoán của các hàm số trên đa tạp không-thời gian được thay thế bằng một đại số rộng hơn [3, 4]. Khi đó các hàm số này có thể được biểu diễn bởi các ma trận, tương tự như khi các đại lượng vật lý được thay thế bằng các ma trận trong cơ học lượng tử. Mô hình Chuẩn trong không-thời gian này tự động bao gồm trường vô hướng Higgs với thế năng bậc 4, gây ra cơ chế vi phạm tự phát đối xứng gauge [5]. Mô hình này chứa ít tham số tự do hơn Mô hình Chuẩn thông thường, do đó tiên đoán được góc Weinberg và khối lượng top quark phù hợp với thực nghiệm với độ chính xác cao. Gần đây, khối lượng Higgs cũng có thể khớp với thực nghiệm khi chọn một cấu trúc hình học phù hợp.

Một trong các kết quả thú vị và bất ngờ là lý thuyết hấp dẫn mở rộng trong không thời gian Connes-Lott bao gồm tương tác hấp dẫn và điện từ, tương tự như lý thuyết Kaluza-Klein truyền thống. Điều đó đã khiến Viet-Wali đề xuất khái niệm “chiều phụ gián đoạn” chỉ gồm 2 điểm. Như vậy, trong trường hợp đặc biệt của NCG khi các ma trận có dạng 2×2 sẽ tương đương với lý thuyết Kaluza-Klein với chiều thứ 5 chỉ có hai điểm, hay không thời gian có thể coi như là hai “lá” không thời gian 4-chiều song song với nhau. Lý thuyết này được Viet-Wali phát triển từ năm 1994 [3] dựa trên đề xuất mới của Connes và Lott về cấu trúc không thời gian được gọi là **Lý thuyết Kaluza-Klein với chiều phụ gián đoạn** (DKKT), trong đó sử dụng hai lá không thời gian 3+1 chiều riêng rẽ cho các hạt spinor chiral tay phải và tay trái.

Tóm lại, DKKT là lý thuyết được xây dựng dựa trên ba trụ cột bao gồm: Lý thuyết Kaluza-Klein; Hình thức luận Cartan và Hình học Không giao hoán. DKKT là lý thuyết không, thời gian nhiều chiều với chiều ngoại phụ gián đoạn trong đó cấu trúc cong của không thời gian mô tả trường hấp dẫn và các thành phần của vierbein mô tả các trường khác, do đó hình thức luận Cartan được mở rộng thêm một lần nữa với dạng ma trận như là một trường hợp đặc biệt của NCG.

Một mặt, lý thuyết DKKT có thể xây dựng một cách chặt chẽ nhờ công cụ toán học trừu tượng của hình học không giao hoán (NCG). Mặt khác, bằng cách coi các chiều phụ gián đoạn là bình đẳng với các chiều thông thường, các tác giả có thể xây dựng các khái niệm hình học mở rộng và suy ra các trường hấp dẫn, điện từ và các hạt spinor đều xuất hiện theo cặp, trong đó một trường không có khối lượng và trường còn lại có khối lượng là bạn đồng hành Kaluza-Klein [7, 8, 9]. Như vậy, DKKT khắc phục được nhược điểm của lý thuyết Kaluza-Klein có chiều phụ liên tục là không chứa dãy vô hạn các trường đối tác Kaluza-Klein có khối lượng tăng đến vô cùng.

Tuy nhiên, đến thời điểm đó, hạn chế của lý thuyết DKKT giống như lý thuyết KK và NCG là chúng mới chỉ bao gồm tương tác hấp dẫn và điện từ. Do đó, yêu cầu bức thiết cần phải kết hợp được hai loại tương tác còn lại là tương tác mạnh và tương tác yếu vào DKKT. Việc này sẽ được thực hiện nếu đưa

được các trường gauge phi Abel vào trong thành phần của vierbien. Đây là vấn đề đầu tiên được đặt ra trong Luận án này.

Đến năm 2017, lý thuyết DKKT đã được chúng tôi mở rộng thành công cho các tương tác Yang-Mills phi Abel trong không gian thời gian Connes-Lott và các không-thời gian với chiều phụ gián đoạn. Đáng chú ý là việc mở rộng này đòi hỏi các hạn chế đối với các nhóm đối xứng gauge trên các lá phải thỏa mãn một trong hai điều kiện là chúng phải có dạng giống nhau hoặc ít nhất một nhóm gauge phải là Abel. Đây là kết quả rất mạnh bởi nó chỉ ra sự phù hợp của lý thuyết DKKT với sự phân chia tính chất của các hạt tay trái và tay phải. Nói một cách khác, kết quả này “giải thích” được vì sao nhóm gauge phi Abel $SU(3)_c$ của tương tác mạnh lại như nhau đối với các quark và lepton tay trái và tay phải, đồng thời với tương tác yếu nhóm gauge là phi Abel $SU(2)_L \times U(1)_Y$ với các quark-lepton tay trái nhưng lại là Abel với các quark-lepton tay phải. Như vậy, trong DKKT, tất cả các tương tác đã biết đều là thành phần của tương tác hấp dẫn trong không-thời gian mở rộng với chiều phụ gián đoạn.

Dựa trên kết quả này, nhóm nghiên cứu có thể xây dựng Mô hình Chuẩn bao gồm tương tác hấp dẫn, mà mọi trường boson bao gồm trường hấp dẫn, các trường tương tác mạnh, điện yếu và trường Higgs đều là thành phần của tương tác hấp dẫn mở rộng với các tiên đoán thú vị về góc Weinberg, khối lượng top quark và các hạt Higgs [4,5,6]. Tiếp theo đó nhóm nghiên cứu đã xây dựng mô hình hạt cơ sơ cấp mở rộng trong DKKT, việc này tạo tiền đề cho việc nghiên cứu về các hạt vật chất chưa biết trong SM (hạt tối) nhằm giải quyết các bài toán dị thường của SM cũng như lý giải cho các kết quả thí nghiệm gần đây.

Mặt khác, để tăng sức thuyết phục cho DKKT, vấn đề cần được ưu tiên nghiên cứu tiếp theo là áp dụng lý thuyết này vào thực tiễn. Vấn đề thứ hai được xem xét đến trong luận án này là giải quyết một bài toán thực nghiệm đã tồn tại từ lâu trong SM, bài toán về thời gian sống của neutron. Trong những năm gần đây, vấn đề này đang nhận được nhiều sự quan tâm sau khi xuất hiện các kết quả thực nghiệm về việc phát hiện ra một hạt vecto boson mới được đặt tên là X17. Hạt này liên quan đến dị thường quan sát tại phòng thí nghiệm

ATOMKI [13]. Giả thiết về sự tồn tại của X17 được củng cố bằng thí nghiệm electron recoil trong XENON1T [14]. Rất nhiều các phòng thí nghiệm khác trên thế giới cũng đang quan tâm và tiến hành các thí nghiệm kiểm chứng khác. Điều thú vị là các thí nghiệm kiểm chứng về X17 có thể thực hiện trên máy gia tốc hạt năng lượng thấp, giá rẻ. Do đó, nhóm nghiên cứu đã đề xuất một dự án hợp tác giữa ATOMKI với trung tâm Vật lý hạt nhân-ĐH QG Hà Nội để kiểm chứng độc lập về X17 trên máy gia tốc Pelletron. Các nhà khoa học tại trung tâm Vật lý hạt nhân đã tiến hành các đo đạc từ năm 2019 và đã thu được các kết quả khả quan [15].

Về mặt lý thuyết, việc phát hiện ra X17 cùng với các ý tưởng về các kênh rã tối của neutron [16] cho thấy sự phù hợp đáng kinh ngạc với mô hình hạt sơ cấp trong lý thuyết DKKT. Do đó, vấn đề nghiên cứu thứ hai của Luận án là xem xét các kênh rã tối của neutron dựa mô hình hạt sơ cấp mới của DKKT. Ngoài kênh rã beta thông thường sẽ có thêm các kênh rã thông qua hạt truyền tương tác là X17 ra các hạt tối là các bạn đồng hành KK của các hạt đã biết và kênh rã ra hạt vô hướng H. Dựa vào đó, chúng tôi đồng thời vừa có thể thiết lập các tham số cho lý thuyết DKKT vừa có thể giải thích câu đố về thời gian sống của neutron.

Với mong muốn hoàn thiện lý thuyết DKKT và áp dụng cho một vấn đề cụ thể, tôi quyết định lựa chọn đề tài “**Lý thuyết Kaluza-Klein gián đoạn và các kênh phân rã tối của neutron**” để nghiên cứu.

Có hai nhóm vấn đề được đặt ra trong luận án bao gồm: xây dựng lý thuyết trường gauge Yang-Mills phi Abel như là thành phần của hấp dẫn trong không, thời gian mở rộng và giải thích dị thường X17 cùng với câu đố về thời gian sống của neutron khi có sự khác nhau về kết quả giữa hai phương pháp đo “beam” và “bottle”. Đây là hai đóng góp của NCS vào việc xây dựng lý thuyết DKKT cũng như áp dụng nó vào một quá trình cụ thể.

2. Mục đích nghiên cứu

Lý thuyết DKKT đã bao gồm cả tương tác hấp dẫn và tương tác điện từ nhưng chưa bao gồm tương tác mạnh và tương tác yếu. Do đó cần phải xây dựng cơ sở toán học cho lý thuyết DKKT để kết hợp tương tác mạnh và yếu

bằng cách đưa trường gauge phi Abel vào trong mô hình. Nghĩa là lý thuyết DKKT phải bao gồm cả hấp dẫn được mô tả là thành phần của không-thời gian, tương tác điện từ được mô tả bằng trường Abel và tương tác mạnh, yếu được mô tả bằng trường phi Abel. Luận án này tập chung vào việc xem xét các trường hợp các trường gauge phi Abel trên hai lá tương ứng với hạt tay phải và tay trái.

Mục tiêu tiếp theo, sau khi đã có đầy đủ cơ sở toán học cho lý thuyết DKKT, là áp dụng vào giải quyết các bài toán thực tế. Ở đây, tôi sẽ xem xét bài toán phân rã neutron trong mô hình hạt sơ cấp mới. Từ đó, đồng thời vừa giải thích được câu đố về thời gian sống của neutron và thiết lập các điều kiện cho các tham số của lý thuyết.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Vấn đề đầu tiên chúng tôi quan tâm là mở rộng lý thuyết DKKT cho trường hợp bao gồm các đối xứng gauge phi Abel trong mô hình không-thời gian với hai “lá” của các hạt tay phải và tay trái. Các trường Yang-Mills phi Abel với mục tiêu mô tả tương tác mạnh và tương tác điện-yếu xuất hiện với tư cách là thành phần của metric trong không-thời gian mở rộng đó. Nói cách khác, trên mỗi lá sẽ có một đối xứng gauge riêng biệt cho hạt tay phải và hạt tay trái.

Nếu chúng ta coi các hạt quark và lepton tay phải và tay trái là các bạn đồng hành Kaluza-Klein trên 2 lá có tính chẵn lẻ khác nhau, kết quả đó sẽ giải thích được vì sao nhóm gauge màu của tương tác mạnh lại giống nhau đối với hai lá và nhóm gauge của tương tác yếu lại là Abel đối với các quark và lepton tay phải. Kết quả này là cơ sở để mở rộng lý thuyết tương đối rộng để bao gồm tất cả các tương tác mạnh và điện-yếu như là thành phần của tương tác hấp dẫn.

Vấn đề thứ hai chúng tôi xem xét trong luận án là việc xây dựng lý thuyết cho vật chất tối và vector boson X17 được phát hiện tại ATOMKI để giải quyết bài toán phân rã neutron. Lý thuyết này không những sẽ giải thích được sự tồn tại của X17 và các dị thường IPC liên quan [13, 17] mà còn giải thích được câu đố về thời gian sống của neutron. Chúng ta biết rằng cho đến nay thời gian sống của neutron được đo bằng hai cách: Đếm số proton mới được tạo ra, hoặc đếm số neutron đã bị phân rã. Hai cách đo cho kết quả chênh lệch quá lớn so với sai

số của phép đo. Do đó Fornal và Grinstein [16] đã đề xuất việc tồn tại các kênh rã neutron thành neutron tối bên cạnh kênh rã beta thông thường. Chính các kênh này đã gây nên sự sai lệch giữa hai phép đo, do số proton tạo ra theo kênh rã beta sẽ nhỏ hơn số neutron bị rã theo tất cả các kênh. Chúng tôi sử dụng lý thuyết DKKT để đưa ra các kênh rã khác của neutron và chứng tỏ rằng kênh rã tạo ra neutrino với hạt trung gian H sẽ đem lại đóng góp lớn nhất. Nói một cách khác lý thuyết này có thể giải thích cả hai dị thường thực nghiệm với những điều kiện hạn chế hết sức chặt chẽ.

4. Nội dung nghiên cứu

Dựa trên lý thuyết DKKT, chúng tôi xem xét dạng tổng quát của các đại lượng hình học là liên thông, độ xoắn và độ cong của lý thuyết hấp dẫn mở rộng trong biểu diễn Cartan. Áp dụng lý thuyết trong trường hợp các thành phần của metric là các trường gauge phi Abel.

Dựa trên mô hình hạt sơ cấp mở rộng với các bạn đồng hành Kaluza-Klein của lý thuyết DKKT, chúng tôi chỉ ra các kênh phân rã khả dĩ khác với kênh rã β của neutron. Chúng tôi sẽ xác định đóng góp của các kênh rã này vào độ rộng phân rã. Từ đó, chúng tôi so sánh, đánh giá các kênh rã với nhau.

5. Phương pháp nghiên cứu

Hình học không giao hoán dựa trên các ma trận mở rộng và hình thức luận Cartan của lý thuyết hấp dẫn tổng quát dựa trên hình học Riemann được thống nhất trong lý thuyết DKKT.

Áp dụng lý thuyết trường lượng tử và các quy tắc giản đồ Feynmann để tính toán bề rộng phân rã của các kênh rã neutron trong mô hình. Sử dụng các số liệu thực nghiệm để thiết lập điều kiện cho các tham số của lý thuyết từ đó so sánh được sự đóng góp của các kênh rã với nhau.

Sử dụng các công cụ tin học như phần mềm Mathematica để tính toán số độc lập nhằm kiểm chứng cho độ chính xác của phương pháp giải tích gần đúng.

6. Bố cục của luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận và phụ lục, nội dung chính của Luận án

được trình bày trong 4 chương

Chương 1. Tổng quan nghiên cứu: Giới thiệu sơ lược về cơ sở khoa học và thực tiễn của đề tài. Giới thiệu vắn tắt hai nền tảng của lý thuyết DKKT là hình thức luận Cartan và hình học không giao hoán.

Chương 2. Lý thuyết Kaluza-Klein gián đoạn DKKT: Trình bày khái quát về lý thuyết DKKT và mô hình hạt sơ cấp mới của nó.

Chương 3. Trường gauge phi Abel như thành phần của hấp dẫn trong lý thuyết DKKT: Các trường gauge phi Abel xuất hiện như là thành phần trên hai lá của vierbien tổng quát. Tương tác mạnh và yếu có thể kết hợp với hấp dẫn trong tác dụng Hilbert-Einstein.

Chương 4. Độ rộng phân rã của Neutron trong lý thuyết DKKT: Giải thích bài toán câu đố về thời gian sống của neutron dựa trên các kênh rã mới của mô hình. Tính toán và so sánh đóng góp vào bề rộng phân rã của các kênh rã khác của neutron.

CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU

1.1. Cơ sở khoa học và thực tiễn

1.1.1. Nền tảng của vật lý hiện đại và Lý thuyết trường thống nhất

Thế kỷ 20 đã chứng kiến sự phát triển mạnh mẽ của Vật lý hiện đại với hai trụ cột là Thuyết tương đối và Cơ học lượng tử.

Một mặt, Thuyết tương đối đem lại cho chúng ta một quan niệm mới về không-thời gian và tương tác hấp dẫn. Thuyết tương đối hẹp là trường hợp riêng, khi không có tương tác hấp dẫn sẽ giải thích được các quá trình chuyển động có tốc độ so sánh được với vận tốc ánh sáng. Trong trường hợp tổng quát, không-thời gian sẽ bị uốn cong và mô tả được tương tác hấp dẫn. Tương tác này sẽ trở thành quan trọng trong việc mô tả sự phát triển của vũ trụ và tương tác giữa các thiên thể có khối lượng khổng lồ ở những khoảng cách lớn. Việc phát hiện ra sóng hấp dẫn, với tư cách là các rung động lan truyền các biến dạng hình học của không-thời gian bởi những vụ sáp nhập các lỗ đen hoặc các vật thể có khối lượng cực lớn đã khẳng định tính đúng đắn của Thuyết tương đối tổng quát [18]. Về mặt ứng dụng thực tiễn, thuyết tương đối hẹp đã xác lập được mối quan hệ giữa năng lượng và khối lượng, hứa hẹn sẽ đem lại nguồn năng lượng vô tận cho loài người bằng các phản ứng nhiệt hạch có điều khiển, sau khi các nguồn năng lượng hóa thạch trên Trái đất sẽ cạn kiệt sau một thế kỷ nữa. Các hiệu ứng là hệ quả của Thuyết tương đối có vai trò quan trọng trong công nghệ định vị toàn cầu. Hiện nay công nghệ này có khả năng xác định vị trí của mọi vật trên bề mặt Trái Đất với độ chính xác nhỏ hơn 3m. Tuy nhiên, nếu bỏ qua các hiệu ứng này, các thiết bị trên vệ tinh sẽ tích tụ sai số trong một ngày đêm lên tới 12 km, biến công nghệ này trở thành vô nghĩa [19].

Trong khi đó, Cơ học lượng tử lại là quy luật của thế giới vi mô, ở khoảng cách nhỏ cỡ nguyên tử, ra đời để giải thích các quan sát thực nghiệm về phổ

nguyên tử, tán xạ Rutherford về cấu trúc của nguyên tử. Cơ lượng tử cho thấy ở khoảng cách nhỏ, tồn tại các trạng thái lượng tử với năng lượng không thay đổi, nguyên tử chỉ có thể thay đổi trạng thái bằng cách bức xạ hoặc hấp thụ photon, có năng lượng $E = \hbar \nu$ tỷ lệ với tần số ($\hbar$ là hằng số Planck). Ở khoảng cách này, trường điện từ được lượng tử hóa thành các hạt photon. Tổng quát hơn, mọi trường cổ điển đều được lượng tử hóa thành các hạt có năng lượng và xung lượng tỷ lệ với tần số. Ngược lại các hạt như electron cũng thể hiện tính sóng có tần số tỷ lệ với năng lượng và xung lượng. Lượng tính sóng hạt của vật chất được khẳng định bằng các thực nghiệm về hiệu ứng quang điện và thí nghiệm giao thoa của điện tử đi qua hai khe. Ngày nay, hai hiện tượng này đã có vô số ứng dụng trong đời sống và đã chứng tỏ được tính đúng đắn của giả thuyết về lưỡng tính sóng hạt. Về mặt ứng dụng, Cơ học lượng tử đã giải thích được cấu tạo hóa học của các nguyên tố, là cơ sở cho khoa học vật liệu. Đặc biệt, các thành tựu về máy tính, công nghệ thông tin, thiết bị điện tử, mạng viễn thông, sinh học phân tử đem lại sự phát triển kỳ diệu cho xã hội loài người hiện nay đều là kết quả của Cơ học lượng tử. Trong tương lai gần, sinh học lượng tử, thông tin lượng tử dựa trên Cơ học lượng tử sẽ giúp chúng ta khám phá bí mật của sự sống, hoạt động của não bộ và sáng chế các thiết bị máy tính thế hệ tương lai như máy tính lượng tử hoặc máy tính phỏng não.

Việc thống nhất Cơ học lượng tử với Thuyết tương đối hẹp thành Cơ học tương đối tính và Lý thuyết trường lượng tử đã diễn ra tương đối thuận lợi. Electron và các hạt fermion có spin bán nguyên tự do được mô tả bởi phương trình Dirac cho trường spinor và tiên đoán sự tồn tại của phản vật chất [20]. Các hạt boson có spin nguyên tự do được mô tả bởi phương trình Klein-Gordon [21]. Các phương trình này đều **hiệp biến với phép biến đổi Lorentz**. Ở chiều ngược lại, các phương trình trường Maxwell đều **hiệp biến tương đối tính**, có thể lượng tử hóa thứ cấp bởi các toán tử sinh hủy photon, là hạt có năng lượng và xung lượng xác định. Lý thuyết điện động học lượng tử (QED) đã mô tả thành công hàng loạt quan sát thực nghiệm như dịch chuyển Lamb, tán xạ Compton, bức xạ hãm, sinh hủy cặp,... và chứng tỏ sự đúng đắn của lý thuyết Trường lượng tử.

Tuy nhiên, việc tiếp tục mở rộng lý thuyết Trường lượng tử để phù hợp

với Thuyết tương đối tổng quát đã vấp phải những khó khăn không thể vượt qua. Nói một cách khác, việc lượng tử hóa thứ cấp trường hấp dẫn vẫn còn bài toán lớn của vật lý hiện đại tồn tại gần 70 năm chưa có lời giải. Trong khi tương tác điện từ có thể được lượng tử hóa thứ cấp trong khuôn khổ của lý thuyết điện động học lượng tử, ở đó photon được sinh, hủy và có các tính chất hạt, tương tác hấp dẫn vẫn chỉ có thể coi là trường sóng cổ điển. Người ta tin rằng ở mức năng lượng Planck $E_p \sim 10^{19} \text{ GeV} \sim 1,9561 \times 10^9 \text{ J}$ ứng với khoảng cách $l_p \sim 1,616255 \cdot 10^{-35} \text{ m}$, tất cả các tương tác đều được thống nhất thành một tương tác duy nhất cùng với tương tác hấp dẫn. Điều đó có nghĩa là, nếu như các tương tác ngoài tương tác hấp dẫn đều có tính lượng tử, tương tác hấp dẫn cũng sẽ phải có tính lượng tử ở thang năng lượng Planck hay ở khoảng cách Planck.

Vấn đề này chính là xuất phát điểm của lý thuyết trường thống nhất, ở đó tất cả các trường tương tác cần được xây dựng dựa trên cùng một nguyên lý. Lý thuyết tương đối tổng quát được xây dựng bằng công cụ hình học Riemann của đa tạp 3+1 chiều, dựa trên nguyên lý hiệp biến tương đối tổng quát với nhóm biến đổi Lorentz định xứ. Lý thuyết Maxwell cho tương tác điện từ, được biết có bất biến gauge với nhóm Abel định xứ $U(1)$. Năm 1954, Yang và Mills đã xây dựng lý thuyết Yang-Mills bất biến với các nhóm phi Abel định xứ [22]. Lý thuyết này đã mở ra khả năng mô tả tất cả các tương tác ngoài tương tác hấp dẫn là các tương tác mạnh, yếu và điện từ bằng một lý thuyết *hiệp biến* với *nhóm gauge phi Abel định xứ*.

Mô hình Chuẩn(SM) [23, 24, 25] đã thành công trong việc mô tả tương tác mạnh, yếu và điện từ của các hạt quark và lepton bởi lý thuyết Yang-Mills hiệp biến với nhóm $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ định xứ. Lý thuyết Yang-Mills có cấu trúc hình học là không gian phân thớ cơ bản (*fundamental fiber bundle*). Trong khi đó Lý thuyết tương đối tổng quát có một cấu trúc hình học khác là phân thớ tiếp xúc (*tangent fiber bundle*) và dựa trên hiệp biến với nhóm biến đổi Lorentz định xứ. Nếu không có một cấu trúc toán học chung cho tương tác hấp dẫn và các tương tác khác, chúng ta sẽ phải sử dụng hai quy trình lượng tử hóa khác nhau. Có lẽ đây chính là nguyên nhân của việc hai cột trụ lớn của Vật lý hiện đại vẫn chưa gắn kết được với nhau. Lý thuyết trường thống nhất

(Unified Field Theories) đã được nhiều thế hệ các nhà vật lý lý thuyết như Einstein, Pauli, Heisenberg,... cố gắng xây dựng theo các cách tiếp cận khác nhau với mục tiêu chính là tiến tới thống nhất hai cách xây dựng lý thuyết tương tác.

1.1.2. Mô hình Chuẩn

Mô hình Chuẩn do Salam, Weinberg và Glashow xây dựng cho 3 thế hệ quark lepton, mỗi thế hệ gồm quark-lepton $(q_{LC}, u_{RC}, d_{RC}, l_L, e_R)_A$, các chỉ số thế hệ $A=1,2,3$ và chỉ số màu $c = r, y, b$. Các lưỡng tuyến $SU(2)_L$ quark $q_{LA} = (u_L, d_L)_A$ và lepton $l_{LA} = (e_L, \nu_L)_A$ có xoắn (helicity) tay trái. Các quark-lepton tay phải đều là các đơn tuyến của nhóm $SU(2)_L$. Theo cách sử dụng chỉ số thế hệ thì thế hệ 1 gồm có các quark up, down, electron và electron neutrino, thế hệ 2 gồm các charm, strange, muon và mu neutrino, thế hệ 3 gồm các quark top, bottom, tauon và tauon neutrino. Việc sắp xếp các quark và lepton tay trái và tay phải vào các lưỡng tuyến và đơn tuyến một cách bất đối xứng dựa trên phát hiện về vi phạm tính chẵn lẻ của tương tác yếu trong rã beta của Yang và Lee [26] và được Wu xác nhận bằng thực nghiệm [27].

Trong mô hình chuẩn tương tác giữa các hạt quark và lepton được xây dựng từ các trường gauge của nhóm đối xứng $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Lý thuyết cho các trường gauge này là kết hợp của hai lý thuyết gauge độc lập. Lý thuyết đầu tiên là lý thuyết Yang-Mills thống nhất tương tác yếu và tương tác điện từ dựa trên nhóm nhóm gauge phi Abel $SU(2)_L \times U(1)_Y$ được Glashow đề nghị [23]. Trong lý thuyết này có 4 trường gauge, tạo nên các tổ hợp ứng với các lượng tử là photon và các hạt vector boson có khối lượng là $W^\pm$ và Z^0 . Lý thuyết thống nhất thứ hai là sắc động học lượng tử (QCD) do Han và Nambu đề xuất để mô tả tương tác mạnh giữa các quark [28] là lý thuyết Yang-Mills của nhóm đối xứng định xứ phi Abel $SU(3)_c$ là nhóm màu (color group) có các lượng tử tạo thành một bát tuyến hạt vector gluon. Trường vector gluon $C_\mu^\alpha(x)$ ($\alpha = 1, \dots, 8; \mu = 0,1,2,3; x$ là các tọa độ không thời gian).

Khối lượng của quark, lepton và các vector boson nặng trong Mô hình chuẩn được sinh ra thông qua cơ chế Higgs [29]. Trong Mô hình chuẩn, có một lưỡng tuyến $SU(2)$ vô hướng với thế năng bậc 4. Cơ chế vi phạm đối xứng tự

phát và tương tác Yukawa của trường Higgs với quark và lepton, cũng như với các trường gauge của tương tác điện-yếu đã đem lại khối lượng cho các hạt quark, lepton và các hạt gauge vector boson $W^\pm$ và Z^0 . Người ta đã lần lượt quan sát được các quark, lepton, các hạt vector boson nặng và hạt Higgs. Bên cạnh đó, người ta đang cố gắng chứng minh sự tồn tại của các neutrino tay phải bằng thực nghiệm [30], do đó Mô hình Chuẩn cần bổ sung thêm các hạt neutrino tay phải dưới dạng các đơn tuyến. Điều này hoàn toàn dễ dàng về mặt toán học.

Do thực nghiệm đã chứng tỏ được tính đúng đắn của Mô hình Chuẩn với độ chính xác cao nên các lý thuyết trường thống nhất đều cần phải là mở rộng của Mô hình Chuẩn cho tới mức năng lượng $E < 1 \text{ TeV}$.

Có thể nói, sự ra đời của SM là một dấu mốc vô cùng quan trọng trong sự phát triển của vật lý hiện đại, đã cho chúng ta cái nhìn tổng quan về thế giới vi mô của các hạt cơ bản cũng như tương tác giữa chúng. Tuy nhiên, SM cũng còn tồn tại những hạn chế chưa thể giải quyết. Hạn chế đầu tiên, quan trọng nhất chính là mô hình chuẩn chưa thể mô tả được tương tác hấp dẫn nên nó không thể thống nhất thuyết lượng tử với thuyết tương đối. Thêm vào đó, SM chưa giải thích được một số dị thường đã được chỉ ra từ lâu trong thực nghiệm, cũng như chưa bao gồm các hạt vật chất khác (vật chất tối) đã được vũ trụ học chứng minh sự tồn tại phổ biến trong vũ trụ. Do đó, việc phải mở rộng SM là lẽ dĩ nhiên và vô cùng cần thiết.

1.1.3. Lý thuyết không gian nhiều chiều

Một trong những phương hướng mở rộng Mô hình chuẩn để đi đến lý thuyết trường thống nhất là sử dụng ý tưởng chiều ngoại phụ (extra dimension) của Kaluza và Klein. Năm 1921, Kaluza đã công bố lý thuyết tương đối rộng mở rộng trong không gian 4+1 chiều. Kết quả của lý thuyết này là tương tác điện từ và tương tác hấp dẫn được thống nhất vào trong metric của không gian 5 chiều [1]. Einstein đánh giá rất cao ý tưởng này. Năm 1926, Klein đề xuất chiều thứ 5 được compact hóa thành một vòng tròn có bán kính nhỏ, để khi khai triển chuỗi Fourier các trường theo chiều thứ năm, người ta sẽ nhận được các bậc tự do có khối lượng lớn mà thực nghiệm chưa thể quan sát được [2].

Đề xuất này một mặt sẽ giải thích số liệu thực nghiệm một cách phù hợp bằng cách chọn kích cỡ của chiều ngoại phụ đủ nhỏ.

Bên cạnh đó, lý thuyết mở rộng của lý thuyết tương đối rộng luôn tiên đoán sự tồn tại của vô hạn các bạn đồng hành (*partner*) của các hạt mà chúng ta đã biết. Lý thuyết Kaluza-Klein có thể mở rộng với nhiều chiều ngoại phụ, tạo thành một đa tạp compact, để bao gồm các trường Yang-Mills phi Abel, mô tả các tương tác mạnh, yếu-điện từ của mô hình chuẩn.

Ngày nay, các lý thuyết thống nhất như siêu hấp dẫn, Yang-Mills siêu đối xứng, lý thuyết dây (*string theory*), siêu dây đều sử dụng không gian nhiều chiều. Lý thuyết không gian nhiều chiều với các chiều ngoại phụ compact đã trở nên phổ biến cho các lý thuyết thống nhất. Chính vì vậy, việc quan sát bằng thực nghiệm các chiều ngoại phụ là một trong những mục tiêu trước mắt của vật lý hiện đại. Sự tồn tại của các chiều ngoại phụ sẽ dẫn đến phổ các hạt đồng hành Kaluza-Klein có khối lượng của các hạt đã biết. Cho đến nay, người ta vẫn chưa phát hiện ra được bất cứ hạt đồng hành Kaluza-Klein nào trong khuôn khổ các lý thuyết đã biết. Người ta hy vọng các thế hệ máy gia tốc trong tương lai gần sẽ cho phép phát hiện các hạt này ở các mức năng lượng không xa 1 TeV. Đã có những đề xuất về các chiều ngoại phụ lớn để có thể có các tiên đoán trong các vùng năng lượng đó [31, 32].

1.1.4. Vật chất tối

Năm 1933, Zwicky đã đề xuất sự tồn tại của dạng vật chất có tương tác rất yếu với tương tác điện từ và có tương tác mạnh hơn với tương tác hấp dẫn để giải thích vận tốc quay của các Thiên hà [33], chúng được gọi là vật chất tối. Vật chất tối khác với hố đen và các hành tinh bởi chúng không hấp thụ, phát xạ hay phản xạ sóng điện từ. Ngày nay khái niệm vật chất tối được hiểu rộng ra là các dạng vật chất không được mô tả bởi SM. Các quan sát thực nghiệm gần đây trong vũ trụ học đã chỉ ra rằng vật chất quark, lepton của Mô hình chuẩn chỉ chiếm chưa tới 5% vật chất của vũ trụ. Dựa trên hiện tượng thấu kính hấp dẫn, người ta có thể lập ra bản đồ phân bố của vật chất tối thông qua sự bẻ cong của các tia sáng khi đi qua vùng không gian có chúng. Có thể nói, vật chất tối rất phổ biến và phân bố rộng khắp trong vũ trụ, chúng chiếm khoảng 27% lượng

vật chất toàn vũ trụ. Tuy nhiên, vấn đề là chúng ta chưa có cách trực tiếp nào để xác nhận sự tồn tại của vật chất tối. Ở cấp độ vĩ mô vật chất tối có tương tác điện từ rất yếu hoặc không có, chỉ có tương tác hấp dẫn, nên ở cấp độ vi mô chúng ta càng khó khăn hơn để quan sát thấy chúng. Tuy nhiên, người ta tin rằng, nếu vật chất tối phổ biến trong vũ trụ như vậy thì có thể chúng cũng phổ biến trong thế giới vi mô và có thể quan sát được ngay tại trái đất. Các dị thường trong các thí nghiệm có thể là bằng chứng gián tiếp chứng minh cho sự tồn tại của các hạt vật chất tối.

Việc tìm kiếm bằng chứng thực nghiệm trực tiếp về vật chất tối cũng là một trong các mục tiêu của các dự án thực nghiệm về Vật lý năng lượng cao để xây dựng một lý thuyết mở rộng của Mô hình chuẩn bao gồm vật chất tối [34]. Một ý tưởng tự nhiên là việc xem xét các bản đồng hành Kaluza-Klein của các hạt đã biết trong DKKT như là ứng cử viên của vật chất tối [35].

Một số thí nghiệm ở năng lượng thấp có thể thực hiện trên máy gia tốc với năng lượng MeV đã quan sát được một số hiện tượng dị thường như X17 có thể giải thích bằng việc giả thiết có các tương tác mới và vật chất tối [13, 17, 36, 37]. Gần đây, các dị thường này cũng đã quan sát được bằng máy gia tốc Pelletron của Khoa Vật lý, trường Đại học Khoa học Tự nhiên [15].

1.2. Cơ sở toán học

1.2.1. Hình học Riemann và hình thức luận Cartan

Như đã nói ở trên, để có một lý thuyết thống nhất các loại tương tác, thì chúng ta cần phải xây dựng một cấu trúc toán học chung cho chúng. Phương pháp chúng tôi sử dụng để xây dựng các lý thuyết là phương pháp hình học Riemann đã ứng dụng thành công trong lý thuyết tương đối. Tuy nhiên thay vì sử dụng hình thức luận hình học Riemann cổ điển với metric, chúng tôi sử dụng hình thức luận vierbein của Cartan. Hiện nay, nó được sử dụng rộng rãi và tiện lợi hơn. Ở đây, chúng tôi sẽ tóm tắt hình thức luận này. Một trình bày chi tiết hơn có thể tham khảo trong [38].

Đại số các dạng vi phân trên đa tạp Riemann 3+1 chiều $\mathcal{M}^4$ được định nghĩa như sau:

Các dạng 0 là các hàm vô hướng khả vi vô hạn lần

$$f(x): M^4 \rightarrow R, \quad f(x) \in C^\infty(M^4). \quad (1.1)$$

Đạo hàm ngoài d được định nghĩa trên các dạng 0 như sau

$$df = dx^\mu \partial_\mu f(x), \quad (1.2)$$

với $\partial_\mu f(x)$ là các đạo hàm riêng của hàm $f(x)$, dx^μ là cơ sở cong các dạng 1.

Module các dạng 1 là mở rộng của df bao gồm các dạng

$$A = dx^\mu A_\mu(x). \quad (1.3)$$

Như vậy, các vector được biểu diễn bởi các dạng 1 trong hình thức luận này.

Tích xen của hai dạng 1 được định nghĩa là dạng 2 sau đây

$$A \wedge B = dx^\mu \wedge dx^\nu \frac{1}{2} (A_\mu(x) B_\nu(x) - A_\nu(x) B_\mu(x)), \quad (1.4)$$

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu. \quad (1.5)$$

Đặc biệt, ta có thể định nghĩa tác động của đạo hàm ngoài d trên các dạng 1 như sau:

$$dA = dx^\mu \wedge dx^\nu F_{\mu\nu}(x), \quad F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)). \quad (1.6)$$

Điều đó có nghĩa là đạo hàm ngoài thỏa mãn điều kiện de Rham $d^2 = 0$.

Vierbein là các hệ số biến đổi trong phép quay Lorentz địa phương biến đổi hệ tọa độ cong x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) thành hệ tọa độ phẳng địa phương x_a , ($a = 0, 1, 2, 3$)

$$x_a = e_a^\mu(x) x_\mu; \quad x_\mu = e_\mu^a(x) x_a, \quad (1.7)$$

với $e_\mu^a(x)$ là nghịch đảo của $e_a^\mu(x)$

$$e_b^\mu(x) e_\mu^a = \delta_b^a. \quad (1.8)$$

Metric thông thường được biểu thị qua vierbein như sau

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) \eta_{ab} e_\nu^a(x), \quad \eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (1.9)$$

Như vậy vierbein có thể biểu thị dưới dạng các dạng 1 như sau

$$e^a = dx^\mu e_\mu^a(x). \quad (1.10)$$

Các đại lượng hình học là liên thông, độ cong Ricci và độ xoắn được xác định bởi các phương trình sau đây:

Phương trình Cartan thứ nhất

$$T^a = de^a - e^b \wedge \omega_b^a, \quad (1.11)$$

với các dạng 1 $\omega_{ab} = \eta_{bc} \omega_a^c = dx^\mu \omega_{ab\mu}(x)$ là các liên thông thỏa mãn điều kiện

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba}. \quad (1.12)$$

Dạng 2 T^a là các độ xoắn (torsion). Trong trường hợp độ xoắn bằng 0 ($T^a = 0$), chúng ta có thể sử dụng phương trình Cartan để tính các liên thông theo các vierbein. Trong trường hợp có độ xoắn, các liên thông sẽ tính được theo cả vierbein và xoắn.

Phương trình Cartan thứ hai

$$R_{ab} = d\omega_{ab} + \omega_{ac} \wedge \omega_b^c, \quad (1.13)$$

được sử dụng để tính các thành phần của độ cong Ricci dạng 2 theo các thành phần của liên thông.

Độ cong vô hướng Ricci được tính bởi

$$R = \eta^{ac} R_{ab\mu\nu}(x) e_c^\mu(x) e_d^\nu(x) \eta^{bd}. \quad (1.14)$$

Tác dụng bất biến tương đối Einstein-Hilbert là

$$S = \int dx^4 \sqrt{-\det g} R. \quad (1.15)$$

Từ tác dụng này sẽ suy ra được phương trình Einstein. Hình thức luận vierbein sẽ được tổng quát hóa cho các chiều gián đoạn.

Trên không gian Hilbert của các hàm sóng spinor, toán tử đạo hàm ngoài được “biểu diễn” bởi toán tử Dirac

$$d = \gamma^\mu \partial_\mu, \quad (1.16)$$

với các ma trận Dirac thỏa mãn phản giao hoán tử

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

1.2.2. Hình học không giao hoán

Chúng ta đã thấy ở phần trên rằng các đối tượng của hình học Riemann có thể xây dựng từ đại số các hàm số $C^\infty(\mathcal{M})$ như là các dạng 0 trên đa tạp $\mathcal{M}$. Với toán tử d thỏa mãn điều kiện de Rham $d^2=0$, chúng ta có thể xây dựng các dạng vi phân trên đa tạp này. Bên cạnh đó dạng vi phân này có thể tác động như toán tử đạo hàm trên một không gian Hilbert. Đó chính là nội dung tổng quát của định lý Gelfand làm cơ sở cho phương pháp hình học đại số xây dựng hình học từ đại số giao hoán $C^\infty(\mathcal{M})$ của các hàm số khả vi vô hạn lần định nghĩa trên đa tạp $\mathcal{M}$ bất kỳ.

Alain Connes đề xuất mở rộng hình học Riemann và khái niệm đa tạp thành hình học không giao hoán (NCG) bằng cách thay thế đại số $C^\infty(\mathcal{M})$ bằng một đại số bất kỳ [3, 4]. Như vậy, các thành phần cơ bản để xây dựng NCG theo Connes là bộ ba $(\mathcal{H}, D, A)$, với $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert các hàm sóng, D là toán tử Dirac thỏa mãn điều kiện de Rham $D^2 = 0$, tác động trên các hàm sóng và A là một đại số bất kỳ có thể không giao hoán là mở rộng của đại số $C^\infty(\mathcal{M})$.

Connes và Lott cũng đã xây dựng Mô hình Chuẩn bằng phương pháp hình học không giao hoán bằng cách xây dựng hình học không giao hoán từ đại số $C_L^\infty(\mathcal{M}) \oplus C_R^\infty(\mathcal{M}) \sim C^\infty(\mathcal{M}) \times Z_2$, trong đó Z_2 gồm 2 phần tử $\mathbf{e}$ và $\mathbf{r}$ với $\{e, r = r, e^2 = r^2 = e\}$ [34]. Nói một cách khác, không thời gian gồm 2 lá (sheet), mỗi lá là không thời gian của các hạt fermion tay phải hoặc tay trái. Do đó đối xứng trên hai lá có thể giống nhau (đối với tương tác mạnh) hoặc có thể khác nhau (như với tương tác yếu-điện từ).

Với đề xuất quan niệm mới về không-thời gian, Connes và Lott đã xây dựng được Mô hình chuẩn hoàn toàn bằng phương pháp hình học. Đặc biệt, lưỡng tuyến Higgs trong Mô hình chuẩn xuất hiện một cách tự nhiên với thế năng bậc 4 dẫn đến cơ chế Higgs và vi phạm đối xứng tự phát [5]. Do lý thuyết này có số tham số ít hơn Mô hình chuẩn truyền thống, ở đó trường Higgs được đưa vào mô hình một cách tùy ý, Mô hình chuẩn dựa trên hình học không giao hoán (NCG) của Connes-Lott cho phép tiên đoán góc Weinberg, khối lượng top quark và khối lượng Higgs [10, 11, 12]. Trong khi góc Weinberg và khối lượng top quark được tiên đoán phù hợp với thực nghiệm với độ chính xác cao, khối lượng Higgs được tiên đoán lớn hơn nhiều so với giá trị thực nghiệm. Gần đây, đã có đề xuất sử dụng cấu trúc metric đặc biệt để cho phép khớp khối lượng Higgs với giá trị thực nghiệm. Nói một cách khác, giá trị thực nghiệm của khối lượng Higgs chứng tỏ rằng cấu trúc metric của không thời gian không giao hoán Connes-Lott là đặc biệt.

1.3. Kết luận chương 1

Trong chương này, các cơ sở khoa học và thực tiễn cũng như nền tảng toán học cho lý thuyết DKKT đã được trình bày. Cụ thể là:

- Vật lý hiện đại dựa trên hai trụ cột là Thuyết tương đối và Thuyết lượng tử. Việc thống nhất hai nhánh này của vật lý là một yêu cầu xuyên suốt.
- Việc thống nhất Cơ học lượng tử với Thuyết tương đối hẹp thành Cơ học tương đối tính và Lý thuyết trường lượng tử đã diễn ra tương đối thuận lợi. Tuy nhiên việc tiếp tục mở rộng Lý thuyết trường lượng tử để phù hợp với Thuyết tương đối tổng quát đã vấp phải những khó khăn không thể vượt qua.

- Có hai khó khăn chính bao gồm: Chưa thể lượng tử hóa được trường hấp dẫn và chưa có một cấu trúc toán học chung cho SM và GR.
- SM đã thống nhất được ba loại tương tác cơ bản ngoại trừ hấp dẫn và đã được thực nghiệm chứng minh tính đúng đắn của nó, do đó mọi lý thuyết trường thống nhất đều phải là sự mở rộng của SM.
- Lý thuyết không gian nhiều chiều dựa trên lý thuyết Kaluza-Klein là hướng đi phổ biến và cơ bản nhất cho các lý thuyết thống nhất hiện nay.
- Lý thuyết tương đối rộng đã được mô tả rất thành công bằng hình học Riemann, sau đó nó đã được trình bày dưới dạng toán học đơn giản và đẹp đẽ trong hình thức luận Cartan.
- Các ý tưởng về hình học không giao hoán khi hình học Riemann được tổng quát hóa không chỉ dựa trên các hàm khả vi mà là các đa tạp.
- Các vấn đề nảy sinh từ thực nghiệm bao gồm khả năng tồn tại của vật chất tối, các dị thường trong các thí nghiệm vật lý hạt nhân, X17... đã đòi hỏi cần phải mở rộng mô hình hạt của SM để có các ứng viên cho các dạng vật chất mới và các dị thường nêu trên.

Từ tất cả các vấn đề nêu trên đã thúc đẩy sự ra đời của lý thuyết Kaluza-Klein với các chiều phụ gián đoạn (DKKT). Trong đó sử dụng công cụ toán học là hình học không giao hoán (NCG) khi không-thời gian 4 chiều trong hình học Riemann được mở rộng thêm các chiều phụ bao gồm các điểm gián đoạn. Trong DKKT, trường hấp dẫn được mô tả bằng hình thức luận Cartan và các trường khác sẽ được đưa vào thông qua các veilbien. Bằng cách đó, chúng ta sẽ thu được một lý thuyết hình học chung cho việc thống nhất các tương tác. Mặt khác, việc mở rộng chiều phụ cũng kéo theo sự xuất hiện của các bản đồng hành Kaluza-Klein của các hạt đã biết, đây chính là các ứng viên tiềm năng cho các dạng vật chất chưa biết. Trong chương tiếp theo, tôi sẽ trình bày sơ lược lại các vấn đề căn bản nhất của DKKT.

CHƯƠNG 2. LÝ THUYẾT KALUZA-KLEIN GIẢN ĐOẠN DKKT

2.1. Lý thuyết DKKT với chiều phụ gồm hai điểm.

Trong chương trước, tôi đã trình bày hai cơ sở toán học của lý thuyết DKKT là hình thức luận Cartan và hình học không giao hoán. Bây giờ, tôi sẽ giới thiệu vắn tắt các vấn đề căn bản nhất của lý thuyết DKKT và mô hình hạt sơ cấp của nó. Đầu tiên ta sẽ xem xét trường hợp chiều phụ giản đoạn dùng để mô tả các hạt tay trái và tay phải trên hai lá, tiếp theo đó ta sẽ xét chiều ngoại phụ để mô tả hạt và các bạn đồng hành Kaluza-Klein của nó như là các ứng viên cho vật chất tối.

2.1.1. Không-thời gian với chiều ngoại phụ giản đoạn

Nếu coi đề xuất của Connes và Lott là một cấu trúc không thời gian mới, việc xây dựng lý thuyết Einstein mở rộng với không thời gian dựa trên hình học không giao hoán sẽ là yêu cầu hiển nhiên. Năm 1993, Chamseddine, Felder và Frohlich đã xây dựng lý thuyết Einstein mở rộng [39, 40] và thu được kết quả hiển nhiên: metric mới chỉ bao gồm metric cong mô tả trường hấp dẫn thông thường và một trường vô hướng. Từ năm 1995, Viet, Landi và Wali đã xây dựng tác dụng Hilbert-Einstein mở rộng cho không thời gian Connes-Lott với bộ ba $(\mathcal{H}, D, A)$ theo Connes và đã thu được một lý thuyết bao gồm các trường giống như lý thuyết Kaluza-Klein cổ điển. Lý thuyết bao gồm các trường hấp dẫn, trường điện từ và một trường vô hướng Brans-Dicke [7, 8]. Kết quả này cho phép coi 2 điểm của đại số Z_2 như một chiều ngoại phụ giản đoạn chỉ gồm 2 điểm và hình học không giao hoán (NCG) có thể coi như lý thuyết Kaluza-Klein với các chiều ngoại phụ giản đoạn (DKKT).

Khi đó với điều kiện độ xoắn bằng không (torsion free) như trong lý thuyết tương đối rộng của Einstein là trường hợp riêng của lý thuyết Cartan, chúng ta

thu được các dạng 0 không có khối lượng. Trong các tổng quát hóa tiếp theo [9,41], các tác giả đã thu được một phổ bao gồm các bạn đồng hành Kaluza-Klein có khối lượng của các mode 0 nói trên. Nói một cách khác, lý thuyết Einstein-Cartan suy rộng sẽ có các thành phần của trường hấp dẫn suy rộng bao gồm một cặp metric (bigraviton), một cặp trường vector (biphoton) và một cặp vô hướng. Trong mỗi cặp, một trường có khối lượng, còn trường kia là bạn đồng hành Kaluza-Klein không có khối lượng.

Chiều ngoại phụ gián đoạn có thể là thực tại hoặc có thể coi như là gián đoạn hóa, một xấp xỉ gần đúng của các chiều ngoại phụ compact của các lý thuyết nhiều chiều. Trong mọi trường hợp, các hệ quả của DKKT đều có ý nghĩa bởi vì với tư cách là xấp xỉ gần đúng của các chiều liên tục compact, các bạn đồng hành Kaluza-Klein có khối lượng thấp nhất của lý thuyết nhiều chiều sẽ xuất hiện một cách phù hợp trong DKKT và có thể kiểm tra bằng thực nghiệm trước tiên. Trong trường hợp các chiều gián đoạn là thực tế, chúng ta sẽ có một lý thuyết có hữu hạn trường mà không cần cắt bỏ một số vô hạn các trường bạn đồng hành Kaluza-Klein có khối lượng. Các trường này có thể gây khó khăn cả về lý thuyết và tính toán. Về nguyên tắc, chúng ta có thể có phép xấp xỉ ở gần đúng bậc cao hơn bằng cách thay thế Z_2 bằng Z_N với N là một số nguyên tùy ý.

Điểm quan trọng nhất là DKKT có thể xây dựng chặt chẽ về mặt toán học trong khuôn khổ của NCG với khái niệm đạo hàm theo chiều gián đoạn như sau: Cho một hàm số $G(x, \theta)$ với x là biến số liên tục, còn $\theta, \theta^2 = e$ là biến số lấy giá trị trong Z_2 gián đoạn. Khi đó G bao gồm một cặp hai hàm số ứng với 2 giá trị của θ

$$G(x, e) = g_1(x); \quad G(x, r) = g_2(x). \quad (2.1)$$

Đạo hàm theo chiều gián đoạn được định nghĩa bằng tỷ lệ giữa số gia theo hàm số và số gia theo biến số trong các phép xấp xỉ quen thuộc như sau

$$G(x, \theta) = \frac{g_2(x) - g_1(x)}{d} = m(g_2(x) - g_1(x)), \quad (2.2)$$

với $d = 1/m$ là khoảng cách giữa hai điểm và m là một tham số khối lượng.

Về mặt nguyên tắc việc sử dụng chiều gián đoạn không làm tăng số chiều

của một đa tạp theo nghĩa thông thường mà chỉ cho phép xét tới tương tác giữa các lá của không-thời gian. Điều đó cho phép coi các trường gián đoạn là các biến bình đẳng với các chiều gián đoạn và sử dụng các hình thức luận quen thuộc với vật lý để tổng quát hóa trong khi cho phép thấy được nội dung vật lý dễ dàng hơn và sử dụng được hầu hết các công cụ thường dùng. Chiều gián đoạn cũng có thể sử dụng để mô tả các hệ vật chất ngưng tụ nhiều lớp để mô tả tương tác giữa các lớp.

2.1.2. Đại số hàm khả vi và đạo hàm tổng quát trong DKKT

Chúng tôi xem xét một đa tạp không-thời gian vật lý M , được mở rộng bởi một không gian trong gián đoạn với hai điểm, có thể gán cấu trúc đại số là Z_2 . Với không thời gian mở rộng này, đại số thông thường của các hàm khả vi $C^\infty(M)$ được tổng quát thành $A = C^\infty(M) \oplus C^\infty(M)$ và một hàm tổng quát $F \in A$ bất kỳ kỳ nào, dạng-0, được cho bởi

$$F(x) = f_+(x)\mathbf{e} + f_-(x)\mathbf{r}, \quad (2.3)$$

với $e, r \in Z_2 = \{e, r \mid e^2 = e, r^2 = e, er = re = r\}$. Chúng tôi đề xuất một ma trận 2×2 đại diện cho hai cơ sở $\mathbf{e}, \mathbf{r}$ là

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Do đó, hàm $F(x)$ là một dạng ma trận 2×2 và có hàm ngã hoán vị liên hợp với nó $\tilde{F}(x)$ là

$$\begin{aligned} F(x) &= f_+(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + f_-(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) & 0 \\ 0 & f_2(x) \end{pmatrix}, \\ \tilde{F}(x) &= \begin{pmatrix} f_2(x) & 0 \\ 0 & f_1(x) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

với

$$f_\pm(x) = 1/2 \cdot [f_1(x) \pm f_2(x)]. \quad (2.6)$$

Ở đây, chúng ta sẽ sử dụng các chữ cái nhỏ để biểu thị các đại lượng của hình học thông thường và chữ in hoa cho các đại lượng tổng quát của NCG.

Với đại số A của các hàm khả vi, ta thu được dạng-0 tổng quát $A = \Omega^0(M) = C^\infty(M) \oplus C^\infty(M)$. Để xây dựng các dạng tổng quát bậc cao hơn tương ứng, ta cần một đạo hàm ngoài hoặc toán tử Dirac trong ngôn ngữ của NCG. Có thể hiểu đơn giản rằng, trong không gian 4 chiều thông thường, dạng-0 là một hàm, dạng-1 là vectơ thu được khi lấy toán tử đạo hàm riêng (gradient) đối với một hàm số (dạng-0). Điều khác biệt duy nhất ở đây là bởi không gian được mở rộng thành hai tấm, nên các hàm số thông thường dạng-0 sẽ trở thành các ma trận hàm số 2×2 . Với mục đích này, như trong tài liệu tham khảo [6], ta sẽ định nghĩa các đạo hàm D_N bằng

$$\begin{aligned} D_\mu &= \begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix}, \\ D_5 &= \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ở đó, $N = \mu, 5$ là chỉ số của không gian 5 chiều, $\mu = 0, 1, 2, 3$ là chỉ số của không gian 4 chiều Minkowski thông thường và m là hằng số khối lượng. Tác động của đạo hàm ngoài lên một yếu tố dạng-0 là

$$D_N(F) = [D_N, F]. \quad (2.8)$$

Viết tường minh ra ta có đạo hàm trong từng mặt

$$\begin{aligned} D_\mu F &= \begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_\mu f_1 & 0 \\ 0 & \partial_\mu f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 \partial_\mu & 0 \\ 0 & f_2 \partial_\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Và đạo hàm theo chiều phụ thứ 5 là

$$D_5(F) = \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & mf_2 \\ -mf_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & mf_1 \\ -mf_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m(f_2 - f_1) \\ -m(f_1 - f_2) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Đạo hàm ngoài phải thỏa mãn quy tắc Newton-Leibniz

$$D_N(FG) = D_N(F)G + F D_N(G). \quad (2.11)$$

Khi đó, toán tử đạo hàm ngoài D được cho bởi công thức

$$DF \doteq (DX^\mu D_\mu + DX^5 \sigma^+ D_5)F = \begin{pmatrix} df_1 & \theta m(f_2 - f_1) \\ \theta m(f_1 - f_2) & df_2 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

với

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

$$DX^\mu \doteq \begin{pmatrix} dx^\mu & 0 \\ 0 & dx^\mu \end{pmatrix}, \quad DX^5 \sigma^+ \doteq \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}.$$

Tham khảo bài báo [6] với θ là phần tử Clifford thỏa mãn $\theta^2 = 1$, $\theta dx^\mu = -dx^\mu \theta$. Ta có DX^M nói chung là các ma trận 2×2 tạo thành một cơ sở của dạng-1 tổng quát. Chúng được khái quát trực tiếp từ các phần tử vi phân. Khi không thời gian trở nên cong, như trong thuyết tương đối rộng (GR), DX^M biểu thị một phần tử vi phân cong- tuyến tính tổng quát. Dạng cụ thể của chúng có thể được đưa ra một cách tường minh. Dạng DX^M cụ thể trong cơ sở trực chuẩn sẽ được đưa ra trong phần tiếp theo.

2.1.3. Cơ sở trực chuẩn và tổng quát của dạng-1

Cấu trúc metric khả vi được đảm bảo bởi sự tồn tại của cơ sở trực chuẩn địa phương là vielbein E^A . Tương tự với GR, nếu chúng ta làm việc trên cơ sở phẳng địa phương thì vielbein E^A có thể được chọn làm một cơ sở trực chuẩn. Bài báo [6] đã chọn một biểu diễn chéo hóa với cơ sở cong tuyến tính (curvilinear) DX^μ và $DX^5 \sigma^+$ để tổng quát hóa cho dạng-1 và dạng cao hơn, tương tự với hình học Riemann thông thường. Tuy nhiên, nó thuận tiện hơn để tính toán trong một biểu diễn mà ở đó vielbein E^A được chéo hóa, với chỉ số

$A = a, \dot{5} = 0, 1, 2, 3, \dot{5}$ là để chỉ hệ cơ sở địa phương. Tại hệ tọa độ địa phương, E^A được đưa ra như sau

$$E^a = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix}, \quad E^{\dot{5}} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

trong đó e^a là vielbein dạng-1 thông thường và θ là phần tử Clifford hermitic. Dạng cơ bản của tích có hướng (tích xiên) có thể được định nghĩa là

$$E^A \wedge E^B = -E^B \wedge E^A. \quad (2.15)$$

Trong hệ cơ sở phẳng địa phương và trục chuẩn E^A , thành phần đạo hàm cong tuyến tính DX^M nói chung không ở dạng chéo hóa. Ngược lại, chúng ta có thể chọn làm việc trong biểu diễn trong đó DX^M là đường chéo. Do đó E^A không phải là đường chéo nữa như đã thảo luận trong bài báo [6]. Cả hai hệ cơ sở đều có thể dùng để biểu diễn không gian của dạng-1 tổng quát, do đó, dạng-1, U , bất kỳ trong NCG được cho bởi

$$U = E^A U_A = DX^M U_M, \quad (2.16)$$

trong đó U^A và U^M tương ứng là các thành phần của dạng-1 U trong hệ cơ sở E^A và DX^M . Vì bản thân E^A và DX^M cũng là dạng-1 nên ta có thể biểu diễn mối liên hệ qua lại giữa chúng như sau

$$\begin{aligned} E^A &= DX^M E_M^A, \\ DX^M &= E^A E_A^M, \end{aligned} \quad (2.17)$$

với E_M^A và E_A^M là các hàm tổng quát thỏa mãn

$$\begin{aligned} E_M^A E_B^M &= \delta_B^A, \\ E_N^A E_A^M &= \delta_N^M. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể chọn E_M^A như sau

$$E_\mu^a = \begin{pmatrix} e_{1\mu}^a(x) & 0 \\ 0 & e_{2\mu}^a(x) \end{pmatrix}, \quad E_{\dot{5}}^a = 0$$

$$E_5^{\dot{5}} = \begin{pmatrix} \phi_1(x) & 0 \\ 0 & \phi_2(x) \end{pmatrix} = \Phi \quad , \quad E_\mu^{\dot{5}} = \begin{pmatrix} e_{1\mu}^{\dot{5}} & 0 \\ 0 & e_{2\mu}^{\dot{5}} \end{pmatrix} = -A_\mu \Phi. \quad (2.19)$$

Chú ý rằng: Chúng ta dùng chỉ số in hoa N, M để chỉ không gian 5 chiều với chiều phụ gồm hai điểm, chỉ số in thường a, b để chỉ không gian 4 chiều thông thường; sử dụng chỉ số $\dot{5}$ trong cơ sở trực chuẩn địa phương, để phân biệt nó với chỉ số 5 trong cơ sở cong-tuyến tính. Ta có

$$\begin{aligned} DX^M E_M^{\dot{5}} - DX^\mu E_\mu^{\dot{5}} &= DX^5 E_5^{\dot{5}} \\ \Rightarrow E^{\dot{5}} - DX^\mu E_\mu^a E_a^\nu (-A_\nu \Phi) &= DX^5 \Phi \\ \Rightarrow E^{\dot{5}} + E^a A_a \Phi &= DX^5 \Phi \\ \Rightarrow DX^5 &= E^{\dot{5}} \Phi^{-1} + E^a A_a. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Như vậy để chuyển từ hệ cơ sở cong tuyến tính sang hệ cơ sở trực chuẩn địa phương, ta có phép biến đổi sau

$$DX^\mu = E^a E_a^\mu \quad , \quad DX^5 = E^{\dot{5}} \Phi^{-1} + E^a A_a, \quad (2.21)$$

với $A_a = E_a^\mu A_\mu$

Bây giờ chúng ta có thể rút ra các quy tắc chuyển đổi cho các thành phần của một dạng-1, U giữa hai cơ sở, ta thay (2.21) vào (2.16) ta có

$$E^A U_A = DX^M U_M. \quad (2.22)$$

Nên ta có

$$\begin{aligned} E^a U_a + E^{\dot{5}} U_{\dot{5}} &= DX^\mu U_\mu + DX^5 U_5 \\ &= E^a E_a^\mu U_\mu + E^{\dot{5}} \Phi^{-1} U_5 + E^a A_a U_5 \\ &= E^a E_a^\mu (U_\mu + A_\mu U_5) + E^{\dot{5}} \Phi^{-1} U_5. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} U_a &= E_a^\mu (U_\mu - A_\mu \Phi U_5) \quad , \quad U_{\dot{5}} = \Phi^{-1} U_5, \\ U_\mu &= E_\mu^a U_a + A_\mu \Phi U_{\dot{5}} \quad , \quad U_5 = \Phi U_{\dot{5}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ta đi tính đạo hàm của dạng-1 tổng quát $U = DX^M U_M = E^A U_A$ như sau

$$\begin{aligned}
DU &= (DX^\mu + DX^5 \sigma^+ D_5)U \\
&= E^a \wedge E^b (DU)_{ab} + E^a \wedge E^{\dot{5}} 2.(DU)_{a\dot{5}}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Biểu diễn tường minh hơn, ta có

$$DU = (DX^\mu D_\mu + DX^5 \sigma^\dagger D_5) \wedge (DX^\nu U_\nu + DX^5 U_5). \tag{2.26}$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}
DU &= \{1\} DX^\mu \wedge DX^\nu D_\mu U_\nu + \{2\} DX^\mu \wedge DX^5 D_\mu U_5 \\
&+ \{3\} DX^5 \sigma^\dagger \wedge DX^\nu D_5 U_\nu + \{4\} DX^5 \sigma^\dagger \wedge DX^5 D_5 U_5.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Áp dụng (2.21), ta tính toán tường minh 4 số hạng ($\{1,2,3,4\}$) của đạo hàm (2.27) với một số chú ý biến đổi sau đây

$$\begin{aligned}
E^{\dot{5}} \cdot \sigma^+ &= -\sigma^+ E^{\dot{5}}, \\
F \cdot E^{\dot{5}} &= E^{\dot{5}} \cdot \tilde{F}, \\
\sigma^+ D_5 F &= m \cdot e \cdot F - m \cdot e \cdot \tilde{F}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Ta có số hạng đầu tiên trong (2.27) là

$$\begin{aligned}
\{1\} &= DX^\mu \wedge DX^\nu D_\mu U_\nu = (E^b E_b^\mu) \wedge (E^c E_c^\nu) D_\mu (E_\nu^a U_a - A_\nu \Phi U_{\dot{5}}) \\
&= E^b \wedge E^c E_b^\mu E_c^\nu \left[D_\mu E_\nu^a U_a + E_\nu^a D_\mu U_a - D_\mu A_\nu \Phi U_{\dot{5}} - A_\nu D_\mu (\Phi U_{\dot{5}}) \right] \\
&= E^b \wedge E^c \left[E_b^\mu E_c^\nu (D_\mu E_\nu^a) U_a + E_b^\mu \delta_c^a D_\mu U_a - E_b^\mu E_c^\nu (D_\mu A_\nu) \Phi U_{\dot{5}} \right] \\
&\quad - E^b \wedge E^c E_b^\mu E_c^\nu A_\nu D_\mu (\Phi U_{\dot{5}}) \\
&= E^b \wedge E^c \left[E_b^\mu E_c^\nu (D_\mu E_\nu^a) U_a + E_b^\mu D_\mu U_c - E_b^\mu E_c^\nu (D_\mu A_\nu) \Phi U_{\dot{5}} - E_b^\mu A_c D_\mu (\Phi U_{\dot{5}}) \right].
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Và chú ý đến tính phản xứng khi đổi chỗ $\mu \rightarrow \nu$ hoặc $b \rightarrow c$, ta tách được một số hạng thành dạng phản xứng như sau

$$DX^\mu \wedge DX^\nu D_\mu U_\nu = \frac{1}{2} DX^\mu \wedge DX^\nu (D_\mu U_\nu - D_\nu U_\mu). \tag{2.30}$$

Tiếp tục với số hạng thứ 2, ta có

$$\begin{aligned}
\{2\} &= DX^\mu \wedge DX^\nu D_\mu U_\nu = (E^b E_b^\mu) \wedge (E^\dot{5} + E^c A_c \Phi) \Phi^{-1} D_\mu (\Phi U_\dot{5}) \\
&= E^b \wedge E^\dot{5} \tilde{E}_b^\mu \left(\frac{D_\mu \Phi}{\Phi} U_\dot{5} + D_\mu U_\dot{5} \right) + E^b \wedge E^c E_b^\mu A_c D_\mu (\Phi U_\dot{5}).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Ở đây, ta chú ý rằng E_b^μ qua $E^\dot{5}$ thành ngã do $E^\dot{5}$ có dạng chéo. Số hạng thứ 2 của $\{2\}$ triệt tiêu số hạng cuối của $\{1\}$.

Với số hạng thứ ba, ta có

$$\begin{aligned}
\{3\} &= DX^\nu \sigma^\dagger \wedge DX^\nu D_\nu (U_\nu) = (E^\dot{5} \Phi^{-1} + E^b A_b) \sigma^\dagger \wedge (E^c E_c^\nu) D_\nu (U_\nu) \\
&= \{3.1\} E^\dot{5} \wedge E^c \Phi^{-1} \tilde{E}_c^\nu \sigma^\dagger D_\nu (U_\nu) + \{3.2\} E^b \wedge E^c A_b \tilde{E}_c^\nu \sigma^\dagger D_\nu (U_\nu)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\{3.1\} &= E^\dot{5} \wedge E^c \Phi^{-1} \tilde{E}_c^\nu .m.e \left(E_\nu^a U_a - A_\nu \Phi U_\dot{5} - \tilde{E}_\nu^a \tilde{U}_a + \tilde{A}_\nu \tilde{\Phi} \tilde{U}_\dot{5} \right) \\
&= E^\dot{5} \wedge E^c \Phi^{-1} \tilde{E}_c^\nu .m.e \left(E_\nu^a U_a - A_\nu \Phi U_\dot{5} - \tilde{E}_\nu^a \tilde{U}_a + \tilde{A}_\nu \tilde{\Phi} \tilde{U}_\dot{5} \right) \\
&= E^\dot{5} \wedge E^c .m.e \left(\Phi^{-1} \tilde{E}_c^\nu E_\nu^a U_a - \Phi^{-1} \tilde{E}_c^\nu A_\nu \Phi U_\dot{5} - \Phi^{-1} \tilde{E}_c^\nu \tilde{E}_\nu^a \tilde{U}_a + \Phi^{-1} \tilde{E}_c^\nu \tilde{A}_\nu \tilde{\Phi} \tilde{U}_\dot{5} \right) \\
&= E^c \wedge E^\dot{5} .m.e \left(\tilde{E}_c^\nu A_\nu U_\dot{5} + \Phi^{-1} \tilde{U}_c - \Phi^{-1} \tilde{E}_c^\nu E_\nu^a U_a - \tilde{E}_c^\nu \tilde{A}_\nu \Phi^{-1} \tilde{\Phi} \tilde{U}_\dot{5} \right) \\
&= E^b \wedge E^\dot{5} .2 \frac{m}{2} \left(\tilde{E}_b^\nu A_\mu U_\dot{5} + \Phi^{-1} \tilde{U}_b - \Phi^{-1} \tilde{E}_b^\mu E_\mu^c U_c - \tilde{E}_b^\mu \tilde{A}_\mu \Phi^{-1} \tilde{\Phi} \tilde{U}_\dot{5} \right) \\
&= E^b \wedge E^\dot{5} .m \left[\Phi^{-1} \left(\tilde{U}_b - \tilde{E}_b^\mu E_\mu^c U_c \right) + \tilde{E}_b^\mu A_\mu U_\dot{5} - \tilde{A}_b \Phi^{-1} \tilde{\Phi} \tilde{U}_\dot{5} \right]
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Tiếp tục, ta có số hạng thứ hai trong biểu thức (2.32) là

$$\begin{aligned}
\{3.2\} &= E^b \wedge E^c .m.e .A_b .\tilde{E}_c^\nu (U_\nu - \tilde{U}_\nu) \\
&= E^b \wedge E^c .m.e .A_b .\tilde{E}_c^\nu \left(E_\nu^a U_a - A_\nu \Phi U_\dot{5} - \tilde{E}_\nu^a \tilde{U}_a + \tilde{A}_\nu \tilde{\Phi} \tilde{U}_\dot{5} \right) \\
&= E^b \wedge E^c .m.e \left(A_b .\tilde{E}_c^\nu E_\nu^a U_a - A_b \tilde{U}_c - A_b .\tilde{E}_c^\nu A_\nu \Phi U_\dot{5} + A_b .\tilde{E}_c^\nu \tilde{A}_\nu \tilde{\Phi} \tilde{U}_\dot{5} \right)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Cuối cùng, số hạng thứ tư trong biểu thức (2.27) là

$$\begin{aligned}
\{4\} &= DX^5 \sigma^\dagger D_5 \wedge DX^5 U_5 = DX^5 \sigma^\dagger \wedge DX^5 D_5(U_5) \\
&= (E^5 \Phi^{-1} + E^b A_b) \sigma^\dagger \wedge (E^5 \Phi^{-1} + E^c A_c) D_5(\Phi U_{\dot{5}}) \\
&= (E^5 \wedge E^c \Phi^{-1} \tilde{A}_c - E^b \wedge E^5 \tilde{A}_b \tilde{\Phi}^{-1} + E^b \wedge E^c A_b \tilde{A}_c) \sigma^\dagger D_5(\Phi U_{\dot{5}}) \\
&= (-E^b \wedge E^5 \tilde{A}_b (\Phi^{-1} + \tilde{\Phi}^{-1}) + E^b \wedge E^c A_b \tilde{A}_c) m(\Phi U_{\dot{5}} - \tilde{\Phi} \tilde{U}_{\dot{5}}) \\
&= -E^b \wedge E^5 2 \tilde{A}_b (\Phi^{-1} + \tilde{\Phi}^{-1}) \frac{m}{2} e(\Phi U_{\dot{5}} - \tilde{\Phi} \tilde{U}_{\dot{5}}) \\
&\quad + E^b \wedge E^c A_b \tilde{A}_c m.e(\Phi U_{\dot{5}} - \tilde{\Phi} \tilde{U}_{\dot{5}}). \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Do biểu thức của các số hạng trong (2.27) khá dài, nên ta xét riêng theo từng tích xiên. Đầu tiên ta xét các số hạng chứa tích xiên $E^b \wedge E^c$ trong tổng $\{1\} + \{2\} + \{3\} + \{4\}$ là

$$\begin{aligned}
(DU)_{bc} &= E_b^\mu E_c^\nu (D_\mu E_\nu^a) U_a + E_b^\mu D_\mu U_c - E_b^\mu E_c^\nu (D_\mu A_\nu) \Phi U_{\dot{5}} \\
&\quad - E_b^\mu A_c D_\mu (\Phi U_{\dot{5}}) + E_b^\mu A_c D_\mu (\Phi U_{\dot{5}}) \\
&\quad + m.e \left[A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu E_\nu^a U_a - A_b \tilde{U}_c - A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu A_\nu \Phi U_{\dot{5}} \right. \\
&\quad \left. + A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu \tilde{A}_\nu \tilde{\Phi} \tilde{U}_{\dot{5}} + A_b \tilde{A}_c (\Phi U_{\dot{5}} - \tilde{\Phi} \tilde{U}_{\dot{5}}) \right] \\
&= E_b^\mu E_c^\nu (D_\mu E_\nu^a) U_a + E_b^\mu D_\mu U_c - E_b^\mu E_c^\nu (D_\mu A_\nu) \Phi U_{\dot{5}} \\
&\quad + m.e \left[A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu E_\nu^a U_a - A_b \tilde{U}_c - A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu A_\nu \Phi U_{\dot{5}} + A_b \cdot \tilde{A}_c \tilde{\Phi} \tilde{U}_{\dot{5}} + A_b \tilde{A}_c (\Phi U_{\dot{5}} - \tilde{\Phi} \tilde{U}_{\dot{5}}) \right] \\
&= E_b^\mu E_c^\nu (D_\mu E_\nu^a) U_a + E_b^\mu D_\mu U_c - E_b^\mu E_c^\nu (D_\mu A_\nu) \Phi U_{\dot{5}} \\
&\quad + m.e \left[A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu E_\nu^a U_a - A_b \tilde{U}_c - A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu A_\nu \Phi U_{\dot{5}} + A_b \tilde{A}_c \Phi U_{\dot{5}} \right] \\
&= E_b^\mu E_c^\nu (D_\mu E_\nu^a) U_a + E_b^\mu D_\mu U_c - E_b^\mu E_c^\nu (D_\mu A_\nu) \Phi U_{\dot{5}} \\
&\quad + m.e \left[A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu E_\nu^a U_a - A_b \tilde{U}_c - A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu A_\nu \Phi U_{\dot{5}} + A_b \tilde{E}_c^\nu \tilde{A}_\nu \Phi U_{\dot{5}} \right]. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Sử dụng tính chất phản xứng (2.30) suy ra

$$\begin{aligned}
(DU)_{bc} = & \frac{1}{2} E_b^\mu E_c^\nu (\partial_\mu E_\nu^a - \partial_\nu E_\mu^a) U_a - \frac{1}{2} E_b^\mu E_c^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \Phi U_{\dot{5}} \\
& + \frac{1}{2} (E_b^\mu \partial_\mu U_c - E_c^\nu \partial_\nu U_b) + \frac{m}{2} \left[(A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu - A_c \cdot \tilde{E}_b^\nu) E_\nu^a U_a + (A_c \tilde{U}_b - A_b \tilde{U}_c) \right. \\
& \left. + (A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu - A_c \cdot \tilde{E}_b^\nu) (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \Phi U_{\dot{5}} \right]. \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Tương tự ta có số hạng có chứa $E^b \wedge E^{\dot{5}}$ là

$$\begin{aligned}
(DU)_{b\dot{5}} = & \frac{1}{2} \tilde{E}_b^\mu \left(\frac{\partial_\mu \Phi}{\Phi} U_{\dot{5}} + \partial_\mu U_{\dot{5}} \right) - \frac{m}{2} (\tilde{A}_b \Phi^{-1} + \tilde{A}_b \tilde{\Phi}^{-1}) (\Phi U_{\dot{5}} - \tilde{\Phi} \tilde{U}_{\dot{5}}) \\
& + \frac{m}{2} \left[\Phi^{-1} (\tilde{U}_b - \tilde{E}_b^\mu E_\mu^c U_c) + \tilde{E}_b^\mu A_\mu U_{\dot{5}} - \tilde{A}_b \Phi^{-1} \tilde{\Phi} \tilde{U}_{\dot{5}} \right]. \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
(DU)_{b\dot{5}} = & \frac{1}{2} \tilde{E}_b^\mu \left(\frac{\partial_\mu \Phi}{\Phi} U_{\dot{5}} + \partial_\mu U_{\dot{5}} \right) + \frac{m}{2} \left[\Phi^{-1} (\tilde{U}_b - \tilde{E}_b^\mu E_\mu^c U_c) \right] + \\
& + \frac{m}{2} \left[\tilde{E}_b^\mu A_\mu U_{\dot{5}} - \tilde{A}_b \Phi^{-1} \tilde{\Phi} \tilde{U}_{\dot{5}} - \tilde{A}_b U_{\dot{5}} + \tilde{A}_b \Phi^{-1} \tilde{\Phi} \tilde{U}_{\dot{5}} - \tilde{A}_b \tilde{\Phi}^{-1} \Phi U_{\dot{5}} + \tilde{A}_b \tilde{U}_{\dot{5}} \right]. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Nên rút gọn đi ta được

$$\begin{aligned}
(DU)_{b\dot{5}} = & \frac{1}{2} \tilde{E}_b^\mu \left(\frac{\partial_\mu \Phi}{\Phi} U_{\dot{5}} + \partial_\mu U_{\dot{5}} \right) + \frac{m}{2} \left[\Phi^{-1} (\tilde{U}_b - \tilde{E}_b^\mu E_\mu^c U_c) \right] \\
& + \frac{m}{2} \left[\tilde{E}_b^\mu A_\mu U_{\dot{5}} - \tilde{A}_b U_{\dot{5}} - \tilde{A}_b \tilde{\Phi}^{-1} \Phi U_{\dot{5}} + \tilde{A}_b \tilde{U}_{\dot{5}} \right]. \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
(DU)_{b\dot{5}} = & \frac{1}{2} \tilde{E}_b^\mu \left(\frac{\partial_\mu \Phi}{\Phi} U_{\dot{5}} + \partial_\mu U_{\dot{5}} \right) + \frac{m}{2} \left[\Phi^{-1} (\tilde{U}_b - \tilde{E}_b^\mu E_\mu^c U_c) \right] \\
& + \frac{m}{2} \left[\tilde{E}_b^\mu A_\mu U_{\dot{5}} - \tilde{A}_b (1 + \tilde{\Phi}^{-1} \Phi) U_{\dot{5}} + \tilde{A}_b \tilde{U}_{\dot{5}} \right]. \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Như vậy cuối cùng ta thu được các thành phần của đạo hàm dạng-1 tổng quát trong công thức (2.25) với chú ý có thay đổi cách đánh chỉ số là

$$\begin{aligned}
(DU)_{bc} = & \frac{1}{2} E_b^\mu E_c^\nu (\partial_\mu E_\nu^a - \partial_\nu E_\mu^a) U_a - \frac{1}{2} E_b^\mu E_c^\nu F_{\mu\nu} \Phi U_{\dot{5}} \\
& + \frac{1}{2} (E_b^\mu \partial_\mu U_c - E_c^\nu \partial_\nu U_b) + \frac{m}{2} \left[(A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu - A_c \cdot \tilde{E}_b^\nu) E_\nu^a U_a + (A_c \tilde{U}_b - A_b \tilde{U}_c) \right. \\
& \left. + (A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu - A_c \cdot \tilde{E}_b^\nu) (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \Phi U_{\dot{5}} \right], \quad (2.42)
\end{aligned}$$

$$(DU)_{b\dot{5}} = \frac{1}{2} \tilde{E}_b^\mu \left(\frac{\partial_\mu \Phi}{\Phi} U_{\dot{5}} + \partial_\mu U_{\dot{5}} \right) + \frac{m}{2} \left[\Phi^{-1} (\tilde{U}_b - \tilde{E}_b^\mu E_\mu^c U_c) \right] + \frac{m}{2} \left[\tilde{E}_b^\mu A_\mu U_{\dot{5}} - \tilde{A}_b (1 + \tilde{\Phi}^{-1} \Phi) U_{\dot{5}} + \tilde{A}_b \tilde{U}_{\dot{5}} \right]. \quad (2.43)$$

Trong cơ sở E^A , liên hợp hermitic của một dạng-1 tùy ý $U = E^a U_a + E^{\dot{5}} U_{\dot{5}}$ cũng là dạng-1 $U^+ = E^a U_a + E^{\dot{5}} \tilde{U}_{\dot{5}}$, ở đó dấu “ngã” liên hợp là liên hợp phức trong Z_2 và với dạng-1 $U = u_+ \mathbf{e} + u_- \mathbf{r}$ thì ta có

$$\tilde{U} = u_+ \mathbf{e} - u_- \mathbf{r}. \quad (2.44)$$

Theo cơ sở trực chuẩn, chúng ta đã chọn E^A là hermitian, dạng-1 tổng quát U không nhất thiết phải hermitian, tương tự nó cũng không cần hermitian trong cả cơ sở DX^M .

2.1.4. Metric tổng quát hoá

Theo bài báo [6], chúng ta xác định metric G như là tích trong tuyến tính (tương ứng với tích vô hướng trong hình học thông thường) của hai dạng-1 U và V thỏa mãn

$$\begin{aligned} \langle UF, VG \rangle &= F \langle U, V \rangle G, \\ \langle U \otimes R, V \otimes S \rangle &= R^+ \langle U, V \rangle S, \end{aligned} \quad (2.45)$$

trong đó F, G là các hàm và R, S là các dạng-1. Giả sử tồn tại cơ sở trực chuẩn địa phương E^A , chúng ta có

$$\langle E^A, E^B \rangle = \eta^{AB}, \quad (2.46)$$

với η^{AB} là ma trận đường chéo trực chuẩn dạng $(-, +, +, +, +)$. Từ các phương trình (2.45) và (2.46), chúng ta thu được tensor metric tổng quát trong hình thức quen thuộc

$$\begin{aligned} G_{MN} &= E^A_M \eta_{AB} E^B_N, \\ G^{MN} &= E^M_A \eta^{AB} E^N_B. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Với các vielbein được đưa ra trong phương trình (2.19), các thành phần của tensor metric G^{MN} và G_{MN} sẽ là

$$\begin{aligned}
G^{\mu\nu} &= G^{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} g_1^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & g_2^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \\
G^{\mu 5} &= A^\mu = G^{5\mu}, \\
G^{55} &= \Phi^{-2} + A^2, \\
G_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu \doteq \begin{pmatrix} g_{1\mu\nu} & 0 \\ 0 & g_{2\mu\nu} \end{pmatrix} + A_\mu A_\nu, \\
G_{\mu 5} &= G_{5\mu} = A_\mu \Phi, \\
G_{55} &= \Phi^2,
\end{aligned} \tag{2.48}$$

ở đây $g_i^{\mu\nu} = e_{ia}^\mu \eta^{ab} e_{ib}^\nu$, $i=1,2$ là tensor metric trên hai tấm.

Chúng ta cần lưu ý rằng các thành phần của tensor metric giống hệt nhau về hình thức với những tensor metric trong lý thuyết Kaluza-Klein 5 chiều ngoại trừ trường hợp hiện tại, các dạng liên quan đến tọa độ liên tục thông thường được thay thế bằng dạng ma trận.

Ở đây, ta cũng cần nhắc lại một chút về chú ý quan trọng là các đại lượng dạng-0 được mô tả bởi ma trận 2×2 chéo hóa với mỗi thành phần trên đường chéo là một hàm 4-chiều mô tả không thời gian thông thường. Các dạng-1 là sự mở rộng của khái niệm vectơ từ hình học cổ điển với hai lần mở rộng. Vectơ trong hình học cổ điển là một đoạn thẳng có hướng với 3-chiều không gian được thay bằng một ma trận hàng hoặc cột với ba thành phần không gian thay đổi theo thời gian. Tuy nhiên, các đại lượng vật lý có thể có hướng hoặc không nhưng nó phụ thuộc mạnh vào cả không gian (trường) và thời gian dẫn đến sự mở rộng khái niệm không gian lần thứ nhất, không-thời gian bốn chiều Minkowski. Kéo theo đó là sự ra đời của hình học vi phân, hình học Riemann, ở đó khái niệm hình học được tổng quát hóa theo các hàm cong trơn khả vi. Vô hướng (dạng-0) là các hàm khả vi phụ thuộc vào bốn biến không-thời gian x^4 , vectơ là một ma trận hàng hoặc cột cũng có 4 thành phần là các dạng vô hướng kể trên. Để thuận tiện cho việc tính toán người ta mở rộng chúng về chung dạng ma trận với hệ vectơ cơ sở trực chuẩn chính là các ma trận được chéo hóa. Đó là vấn đề hình học.

Như vậy, ta đã trình bày lại vắn tắt các khái niệm căn bản nhất của lý thuyết DKKT với không-thời gian bao gồm hai lá tương ứng với các hạt tay

trái và hạt tay phải. Việc tiếp theo ta cần phải làm đó là mở rộng lý thuyết này để chúng bao gồm các đối xứng gauge phi Abel. Đây chính là cơ sở cho nội dung sẽ được trình bày trong chương 3.

2.2. Mô hình hạt của tương tác photon-fermion

Trong phần trên, tôi đã trình bày lại lý thuyết Kaluza-Klein với chiều thứ 5 gián đoạn chỉ có hai điểm (DKKT) được Viet và Wali phát triển [6]. Lý thuyết chiều phụ gián đoạn như là một diễn giải trực quan của mô hình Connes-Lott về không thời gian trong hình học không giao hoán [42]. Gần đây, chúng tôi đã tiếp tục phát triển và hoàn thiện lý thuyết này và áp dụng nó vào một số trường hợp đặc biệt. Cụ thể không-thời gian trong lý thuyết này là sự mở rộng của không thời gian Minkowski bốn chiều M^4 với thêm hai chiều phụ gián đoạn $M^4 \oplus Z_2 \oplus Z_2$. Trong đó, một chiều phụ để mô tả sự phân chia các hạt thành tay trái và tay phải như đã trình bày ở mục trên. Ở đây, chiều phụ thứ 6, sẽ được sử dụng để mô tả các hạt vật chất mới, là ứng viên cho các hạt vật chất tối chưa biết. Việc mở rộng mô hình hạt cơ bản như vậy nhằm mục đích giải thích cho các bài toán hiện tượng luận về sự tồn tại của hạt photon tối X17 cũng như có thể giải thích cho bài toán phân rã neutron. Như vậy, để cho đơn giản, ở đây ta sẽ chỉ xem xét lý thuyết DKKT cho trường hợp chiều phụ gián đoạn mô tả các hạt cặp Kaluza-Klein. Ta có, phần tử đường và metric cụ thể như sau

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{MN} dx^M dx^N = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \lambda^4 dx^5 dx^5, \\ G_{\mu\nu} &= \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \\ G_{\mu 5} &= G_{5\mu} = 0, G_{55} = \lambda^4, \end{aligned} \quad (2.49)$$

ở đó $M, N = \mu, 5$ là chỉ số tọa độ không trực chuẩn và λ^2 là tham số metric dọc theo chiều phụ gián đoạn. Metric trong (2.49) tương ứng với vielbein mở rộng

$$\begin{aligned} E^A &= E_M^A DX^M, \quad DX^M = E_A^M E^A, \\ G^{AB} &= E_M^A G^{MN} E_N^B = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1), \\ G^{MN} G_{NL} &= \delta_L^M, \end{aligned} \quad (2.50)$$

với $A, B = a, 5$ là chỉ số của hệ tọa độ trực chuẩn địa phương.

Các hạt cặp Kaluza-Klein của nhau tồn tại trên hai lá song song và chúng có thể tương tác được với nhau và với các hạt khác. Để thu nhận được Lagrange

và khối lượng của các hạt, ta xem xét mô hình hạt của các tương tác photon-fermion. Ta có Lagrange của tương tác photon-fermion thông thường là

$$L = L_f + L_{f-g} + L_g = \bar{\psi}(x)(i\not{\partial} + \not{A}(x))\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x), \quad (2.51)$$

với $\not{A}(x) = g\gamma^\mu A_\mu(x)$, $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$.

Trong không thời gian này, mỗi fermion chỉ có một bạn đồng hành. Do đó, để thuận tiện ta biểu diễn trường fermion mở rộng để biểu diễn hai hạt cặp KK fermion như là một spinor hai hàng

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

và toán tử Dirac $\not{\partial}$ được mở rộng thành ma trận

$$\not{D} = \Gamma^M D_M = \begin{bmatrix} \not{\partial} & -m\lambda^{-2} \\ m\lambda^{-2} & \not{\partial} \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

với m hằng số khối lượng.

Ma trận Dirac là

$$\Gamma^\mu = \begin{bmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & -\gamma^\mu \end{bmatrix}, \quad \Gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^{-2} \\ \lambda^{-2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Các đạo hàm được cho bởi dạng chuẩn là

$$D_\mu = \begin{bmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & -\partial_\mu \end{bmatrix}, \quad D_5 = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Với thế năng 4 chiều của photon $\not{A}(x) = g\gamma^\mu A_\mu(x)$ được mở rộng thành ma trận

$$\not{B} = \begin{bmatrix} \gamma^\mu g A_\mu(x) & \sqrt{2}gH(x) - m\lambda^{-2} \\ \sqrt{2}gH(x) - m\lambda^{-2} & \gamma^\mu (g A_\mu(x)Q - g'X_\mu(x)Q_x) \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

ở đó $A_\mu(x)$ là vectơ điện từ 4 chiều thông thường, cặp vector và vô hướng Kaluza-Klein của photon là $X_\mu(x)$ và $H(x)$, cuối cùng Q và Q_x tương ứng là

toán tử điện tích của electron và của electron tối. Hằng số g và g' lần lượt là hằng số liên kết liên quan đến photon và photon tối X_{17} . Trong mô hình này, các hằng số liên kết đó là không độc lập.

Cường độ trường mở rộng được định nghĩa là

$$F = \mathbb{D}B + \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} = \Gamma^M \wedge \Gamma^N F_{MN}(x), \quad (2.57)$$

với tích chéo được định nghĩa là

$$\begin{aligned} \Gamma^M \wedge \Gamma^N &= -\Gamma^N \wedge \Gamma^M = \frac{1}{2}(\Gamma^M \Gamma^N - \Gamma^N \Gamma^M), \\ \Gamma^5 \wedge \Gamma^5 &= \lambda^{-4}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Lagrange cho vector trường mở rộng của photon là

$$L_g = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{g'^2}{4g^2}X^{\mu\nu}X_{\mu\nu} + g'^2\lambda^4 X_\mu^2(x)H^2(x) + L_H, \quad (2.59)$$

với

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad X_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu, \quad (2.60)$$

$$L_H = \frac{1}{2}\partial^\mu H(x)\partial_\mu H(x) - 2g^2\left(H^2(x) - \frac{m^2}{2g^2\lambda^4}\right)^2. \quad (2.61)$$

Trong mô hình này, ta lấy $g = g'$, photon tối H có một giá trị kỳ vọng chân không $v_0 = m/\sqrt{2}g\lambda^2$ và khối lượng $m_H = \sqrt{2}m\lambda^{-2}$ do thế năng bậc 4, tạo ra khối lượng photon X là $m_X = m/\sqrt{2}$. Do đó dựa vào thí nghiệm tại ATOMKI, ta định nghĩa khối lượng của X là 17 MeV. Vậy khối lượng của X -photon và H -photon liên hệ với hằng số khối lượng bằng biểu thức

$$m_X = m/\sqrt{2} = 17\text{MeV}, \quad m_H = 2m_X/\lambda^2, \quad m = 24\text{MeV} \quad (2.62)$$

Với proton, neutron, electron và neutrino như là các thành phần fermion tối thiểu mà ta xem xét trong mô hình hạt này, ta chưa đề cập đến cấu trúc quark do ở mức năng lượng của các quá trình mà ta xem xét là không cần thiết, ta có các cặp $p_i(x)$, $n_i(x)$, $e_i(x)$ và $\nu_i(x)$. Với $i=1, 2$ để chỉ hạt và hạt cặp của fermion.

Ta có Lagrange tổng cộng của tất cả các fermion tổng quát từ $\bar{\psi}(x)(i\not{D} + m_0 A(x))\psi(x)$ là

$$L_{f-A} = \text{Tr}[\bar{\Psi}(x)(i\not{D} + M_0 + B(x))\Psi(x)] = L_f + L_{int}, \quad (2.63)$$

với

$$L_f = \sum_{i=1,2} \bar{\psi}_i(x) i\not{D} \psi_i(x) + \sum_{i,j=1,2} \bar{\psi}_i(x) M^{ij} \psi_j(x). \quad (2.64)$$

Ở đó, f là các fermion p, n, e, ν . Lagrange tương tác thể hiện sự tương tác của các fermion với cặp Kaluza-Klein của photon. Các ma trận khối lượng lần lượt là

$$M_0 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & -m(1+i)\lambda^{-2} \\ -m(1-i)\lambda^{-2} & m_2 \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Do ma trận khối lượng M là không chéo hóa nên các fermion chưa có khối lượng riêng. Ta có thể sử dụng phép biến đổi unita dưới đây để chéo hóa ma trận khối lượng và thu được khối lượng riêng của cặp Kaluza-Klein của fermion. Ta có ma trận chéo hóa

$$U_f = \begin{bmatrix} \cos \theta_f & -e^{i\alpha_f} \sin \theta_f \\ e^{-i\alpha_f} \sin \theta_f & \cos \theta_f \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Do đó

$$M'_f = U_f M_f U_f^\dagger = \begin{bmatrix} M_1^f & 0 \\ 0 & M_2^f \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Nếu chọn $\alpha_f = \pi / 4$, ta có

$$M_f = \begin{bmatrix} M_1^f + (M_2^f - M_1^f) \sin^2 \theta_f & -\frac{1}{2\sqrt{2}} (M_2^f - M_1^f) \sin 2\theta_f (1+i) \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} (M_2^f - M_1^f) \sin 2\theta_f (1-i) & M_1^f + (M_2^f - M_1^f) \cos^2 \theta_f \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Đổi chiều với (2.65) ta thu được công thức độ chênh lệch khối lượng giữa một hạt fermion thông thường ψ và hạt cặp Kaluza-Klein của chúng ψ_X theo góc trộn là

$$M_2^f - M_1^f = m_f - m_{f_X} = \frac{2\sqrt{2}m}{\sin 2\theta_f \lambda^2} = \frac{4m_X}{\sin 2\theta_f \lambda^2}. \quad (2.69)$$

Lagrange tương tác về mặt khối lượng riêng của các fermion hay tương tác photon-fermion là

$$\begin{aligned} L_{f-A} &= g(\bar{\psi}(x)\mathcal{A}(x)\psi(x) + \bar{\psi}_X(x)\mathcal{A}(x)\psi_X(x)), \\ L_{f-X} &= g(\sin^2\theta_f \bar{\psi} X(x)\psi + \cos^2\theta_f \bar{\psi}_X X(x)\psi_X \\ &\quad + \frac{1}{2}\sin 2\theta_f \bar{\psi}_X X(x)\psi + \frac{1}{2}\sin 2\theta_f \bar{\psi} X(x)\psi_X), \\ L_{f-H} &= g \sin 2\theta_f H(x)(-\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}_X\psi_X) \\ &\quad + g \cos^2\theta_f H(x)(-\bar{\psi}\psi_X + \bar{\psi}_X\psi). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Như vậy, chúng ta dễ dàng thu được hằng số tương tác giữa photon tối H và photon tối X với các fermion. Trong luận án này, tôi sẽ xem xét bài toán phân rã neutron, do đó tôi chỉ viết tường minh các hằng số tương tác giữa photon X và H với neutrino, neutron và các hạt cặp Kaluza-Klein của chúng như sau [41]

$$\begin{aligned} g_{Xnn} &= g \sin^2 \theta_n, \quad g_{Xn_X n_X} = g \cos^2 \theta_n, \quad g_{Xnn_X} = 1/2 g \sin 2\theta_n, \\ g_{X\nu\nu} &= g \sin^2 \theta_\nu, \quad g_{X\nu_X \nu_X} = g \cos^2 \theta_\nu, \quad g_{X\nu\nu_X} = 1/2 g \sin 2\theta_\nu, \\ g_{Hnn} &= g_{Hn_X n_X} = g \sin^2 \theta_n, \quad g_{Hnn_X} = g \cos^2 \theta_n, \\ g_{H\nu\nu} &= g_{X\nu_X \nu_X} = g \sin^2 \theta_\nu, \quad g_{H\nu\nu_X} = g \cos^2 \theta_\nu, \end{aligned} \quad (2.71)$$

với θ_n, θ_ν tương ứng là góc trộn của neutron và neutrino với bạn đồng hành Kaluza-Klein của chúng.

Dựa vào mô hình hạt sơ cấp mới và việc loại trừ kênh rã ra cặp electron và phản electron, phù hợp với kết quả thực nghiệm của Tang và cộng sự [46], ta đưa ra giả định bổ xung sau

$$m_n - m_{n_X} < 1,102 \text{ MeV}. \quad (2.72)$$

Như vậy, từ Lagrange tương tác, chúng ta đã thu được độ lệch khối lượng của các hạt fermion và bản đồng hành Kaluza-Klein của chúng và các hằng số liên kết của photon tới H và X với các hạt fermion. Dựa vào các kết quả thực nghiệm ta cũng thiết lập giá trị và điều kiện của các tham số. Đây là cơ sở quan trọng để ta có thể đề xuất các kênh phân rã neutron và tính toán các giản đồ trong chương 4.

2.3. Kết luận chương 2

Trong chương 2, tôi đã trình bày những đặc điểm căn bản nhất của DKKT. Cụ thể là:

- Cấu trúc không-thời gian của DKKT được xem như là các lá không-thời gian 4 chiều song song với nhau mà khoảng cách giữa chúng đặc trưng cho phép lấy đạo hàm trong chiều phụ.
- Mở rộng các khái niệm của hình học Riemann và hình thức luận Cartan dựa trên hình học không giao hoán, trong đó với chiều phụ bao gồm hai điểm thì các đại lượng hình học thông thường sẽ trở thành các ma trận 2×2 .
- Đưa ra các công thức đạo hàm, hệ cơ sở và metric của lý thuyết.
- Xây dựng mô hình hạt sơ cấp mới để phục vụ cho bài toán phân rã neutron. Từ Lagrange của tương tác photon-fermion, xây dựng mối liên hệ về khối lượng của các hạt sơ cấp với bản đồng hành Kaluza-Klein cũng như các hằng số tương tác theo góc trộn trạng thái của chúng.

Đây là các cơ sở để từ đó tôi có thể giải quyết được hai vấn đề đã được đặt ra trong Luận án là: Đưa các trường gauge phi Abel vào trong lý thuyết DKKT để mô tả tương tác mạnh và yếu, đây là nội dung chính của chương 3; Giải quyết bài toán phân rã neutron bằng cách xem xét các kênh rã mới dựa trên mô hình hạt mở rộng của DKKT, đây là nội dung chính trong chương 4.

CHƯƠNG 3. TRƯỜNG GAUGE PHI ABEL NHƯ THÀNH PHẦN CỦA HẤP DẪN TRONG LÝ THUYẾT DKKT

Trong chương trước, chúng tôi đã giới thiệu lý thuyết Kaluza-Klein với chiều phụ gián đoạn DKKT và sự mở rộng mô hình hạt cơ bản. Cơ sở quan trọng nhất cho việc thống nhất được lý thuyết hấp dẫn cùng với mô hình chuẩn là bởi vì ta đã đưa được trường phi Abel vào lý thuyết DKKT trong chiều phụ thứ 5. Đây chính là kết quả nghiên cứu đã được đưa ra trong bài báo đầu tiên của chúng tôi năm 2017. Bây giờ, tôi sẽ trình bày chi tiết nội dung này.

3.1. Liên thông, độ xoắn và độ cong

3.1.1. Liên thông Hermitian và metric tương thích dạng-1

Trong bài báo [6], các tác giả đã chỉ ra rằng tương thích metric hoặc liên thông Levi-Civita dạng-1 Ω_{AB} thỏa mãn

$$\Omega_{AB}^+ = -\Omega_{BA}. \quad (3.1)$$

Ở đây, chúng ta sẽ áp đặt một điều kiện thực tế bổ sung cho liên thông

$$\Omega_{AB}^+ = \Omega_{AB}. \quad (3.2)$$

Cùng với điều kiện metric tương thích (3.1), dẫn đến các điều kiện của các thành phần Ω_{ABC} của liên thông dạng-1 Ω_{AB} trong cơ sở E^A , ta có

$$\begin{aligned} \Omega_{abc} &= -\Omega^{bac}, \\ \Omega_{ab\dot{5}} &= -\Omega_{ba\dot{5}} = \omega_{ab\dot{5}} \cdot e, \\ \Omega_{a\dot{5}c} &= -\Omega_{\dot{5}ac}, \\ \Omega_{a\dot{5}\dot{5}} &= -\Omega_{\dot{5}a\dot{5}} = \omega_{a\dot{5}\dot{5}} \cdot e, \\ \Omega_{\dot{5}\dot{5}c} &= \Omega_{\dot{5}\dot{5}\dot{5}} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Có nghĩa là, điều kiện thực tế (3.2) yêu cầu các thành phần chỉ số trong của các liên thông Levi-Civita dạng-1 là các hàm thông thường. Các thành phần này cũng luôn phản xứng với hai chỉ số đầu.

3.1.2. Phương trình cấu trúc thứ nhất và độ xoắn dạng-2

Phương trình cấu trúc Cartan thứ nhất xác định độ xoắn dạng-2 T^A cho bởi biểu thức

$$T_A = DE_A - E^B \wedge \Omega_{AB}. \quad (3.4)$$

Đây là sự tổng quát hóa từ phương trình (1.11).

Trong bài báo [6], các tác giả đã giả sử $T^A = 0$, với $(A = a, \dot{5})$, để xác định liên thông Ω . Như đã lưu ý, chúng ta đi đến một lý thuyết với trường tensor, vectơ, vô hướng và thêm một trường dilaton-like. Ở đây, chúng ta sẽ giả định

$$T_{abc} = T_{ab\dot{5}} = T_{a\dot{5}b} = 0, \quad (3.5)$$

$$T_{\dot{5}AB} = t_{\dot{5}AB}r. \quad (3.6)$$

Nói cách khác, thành phần độ xoắn dạng-2 liên quan đến việc chỉ số ngoài của không thời gian vật lý, trên các mặt, sẽ tiêu biến trong khi độ xoắn liên quan đến chỉ số chiều phụ $\dot{5}$ như trong phương trình (3.6) không bị triệt tiêu. Do đó ta có thể xác định $t_{\dot{5}AB}$ như là hermitian và metric thích hợp với liên thông dạng-1 Ω_{AB} theo kiểu vielbein.

Sử dụng công thức chung (2.42, 2.43), dễ dàng tính được đạo hàm ngoài DE^A cần thiết để tính Ω_{ABC} trong phương trình (3.4). Thay các thành phần của U tương ứng với cơ sở E_A như sau:

$$\begin{aligned} U_a &\rightarrow \eta_{aa} = 1; \quad U_{\dot{5}} \rightarrow \eta_{\dot{5}\dot{5}} = 1, \\ U_b &\rightarrow \eta_{ab}; \quad U_c \rightarrow \eta_{ac}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ta thu được các thành phần của đạo hàm là

$$\begin{aligned}
(DE_a)_{bc} &= \frac{1}{2} E_b^\mu E_c^\nu (\partial_\mu E_\nu^a - \partial_\nu E_\mu^a) + \frac{1}{2} (E_b^\mu \partial_\mu \eta_{ac} - E_c^\nu \partial_\nu \eta_{ab}) \\
&+ \frac{m}{2} [(A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu - A_c \cdot \tilde{E}_b^\nu) E_\nu^a + (A_c \eta_{ab} - A_b \eta_{ac})], \\
&= \frac{1}{2} E_b^\mu E_c^\nu (\partial_\mu E_\nu^a - \partial_\nu E_\mu^a) + \frac{m}{2} [(A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu - A_c \cdot \tilde{E}_b^\nu) E_\nu^a + (A_c \eta_{ab} - A_b \eta_{ac})] \\
&= -(DE_a)_{cb},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$(DE_a)_{b\dot{5}} = \frac{m}{2} \Phi^{-1} (\eta_{ab} - \tilde{E}_b^\mu E_\mu^c \eta_{ac}) = \frac{m}{2} \Phi^{-1} (\eta_{ab} - \tilde{E}_b^\mu E_{a\mu}) = -(DE_a)_{\dot{5}b}, \tag{3.9}$$

$$(DE_{\dot{5}})_{ab} = -\frac{1}{2} E_a^\mu E_b^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \Phi + \frac{m}{2} (A_a \cdot \tilde{E}_b^\nu - A_b \cdot \tilde{E}_a^\nu) (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \Phi, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
(DE_{\dot{5}})_{b\dot{5}} &= \frac{1}{2} \tilde{E}_b^\mu \frac{\partial_\mu \Phi}{\Phi} + \frac{m}{2} [\tilde{E}_b^\mu A_\mu - \tilde{A}_b (1 + \tilde{\Phi}^{-1} \Phi) + \tilde{A}_b] \\
&= \frac{1}{2} \tilde{E}_b^\mu \left[\frac{\partial_\mu \Phi}{\Phi} + m (A_\mu - \tilde{A}_\mu \tilde{\Phi}^{-1} \Phi) \right] = -(DE_{\dot{5}})_{\dot{5}b}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ở dạng thành phần, phương trình cấu trúc Cartan thứ nhất có dạng là

$$E^B \wedge E^C T_{ABC} = E^B \wedge E^C (DE_A)_{BC} - \frac{1}{2} E^B \wedge E^C (\Omega_{ABC} - \Omega_{ACB}). \tag{3.12}$$

Rút gọn thành

$$T_{ABC} = (DE_A)_{BC} - \frac{1}{2} (\Omega_{ABC} - \Omega_{ACB}). \tag{3.13}$$

Sử dụng phương trình (3.13) và điều kiện của độ xoắn (3.5), (3.6), ta có thể tính các thành phần của Ω như sau. Ta có

$$\begin{aligned}
(DE_a)_{bc} + (DE_b)_{ca} - (DE_c)_{ab} &= \frac{1}{2} (\Omega_{abc} - \Omega_{acb}) + \frac{1}{2} (\Omega_{bca} - \Omega_{bac}) - \frac{1}{2} (\Omega_{cab} - \Omega_{cba}) \\
&= \frac{1}{2} (\Omega_{abc} - \Omega_{bac} - \Omega_{acb} - \Omega_{cab} + \Omega_{bca} + \Omega_{cba}) = \Omega_{abc}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Thay (3.8) vào phương trình (3.14) ta thu được thành phần đầu tiên của liên thông là

$$\Omega_{abc} = \frac{1}{2} \left[E_b^\mu E_c^\nu (\partial_\mu E_{av} - \partial_\nu E_{a\mu}) + E_c^\mu E_a^\nu (\partial_\mu E_{bv} - \partial_\nu E_{b\mu}) \right. \\ \left. - E_a^\mu E_b^\nu (\partial_\mu E_{cv} - \partial_\nu E_{c\mu}) \right] \\ + \frac{m}{2} \left[(A_b \cdot \tilde{E}_c^\nu - A_c \cdot \tilde{E}_b^\nu) E_\nu^a + (A_c \cdot \tilde{E}_a^\nu - A_a \cdot \tilde{E}_c^\nu) E_\nu^b \right. \\ \left. - (A_a \cdot \tilde{E}_b^\nu - A_b \cdot \tilde{E}_a^\nu) E_\nu^c + 2(A_a \eta_{bc} - A_b \eta_{ac}) \right]. \quad (3.15)$$

Mặt khác, thay điều kiện $T_{\dot{5}AB} = t_{\dot{5}AB} \cdot r$, $T_{abc} = T_{ab\dot{5}} = 0$ vào (3.13) ta có:

$$(DE_a)_{b\dot{5}} = \frac{1}{2} (\Omega_{ab\dot{5}} - \Omega_{a\dot{5}b}) + T_{ab\dot{5}}, \\ (DE_b)_{\dot{5}a} = \frac{1}{2} (\Omega_{b\dot{5}a} - \Omega_{ba\dot{5}}) + T_{b\dot{5}a}, \\ (DE_{\dot{5}})_{ab} = \frac{1}{2} (\Omega_{\dot{5}ab} - \Omega_{\dot{5}ba}) + T_{\dot{5}ab}. \quad (3.16)$$

Cộng vế với vế của 2 phương trình đầu rồi trừ đi phương trình sau trong (3.15) ta thu được

$$\Omega_{ab\dot{5}} - T_{\dot{5}ab} = (DE_a)_{b\dot{5}} + (DE_b)_{\dot{5}a} - (DE_{\dot{5}})_{ab} \\ = \frac{m}{2} \Phi^{-1} (\eta_{ab} - \tilde{E}_b^\mu E_{a\mu}) - \frac{m}{2} \Phi^{-1} (\eta_{ab} - \tilde{E}_a^\mu E_{b\mu}) + \frac{1}{2} E_a^\mu E_b^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \Phi \\ - \frac{m}{2} (A_a \cdot \tilde{E}_b^\nu - A_b \cdot \tilde{E}_a^\nu) (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \Phi. \quad (3.17)$$

Nên thu được

$$\Omega_{ab\dot{5}} - T_{\dot{5}ab} = \frac{1}{2} E_a^\mu E_b^\nu F_{\mu\nu} \Phi + \frac{m}{2} \left[\Phi^{-1} (\tilde{E}_a^\mu E_{b\mu} - \tilde{E}_b^\mu E_{a\mu}) \right. \\ \left. - (A_a \cdot \tilde{E}_b^\nu - A_b \cdot \tilde{E}_a^\nu) (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \Phi \right]. \quad (3.18)$$

Trong đó

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} f_{1\mu\nu} & 0 \\ 0 & f_{2\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Đặt $\Omega_{ab\dot{5}} - T_{\dot{5}ab} = VP$ và áp dụng kỹ thuật sau: do $\Omega_{ab\dot{5}} = \omega_{ab\dot{5}} \cdot e$ và $T_{\dot{5}ab} = t_{\dot{5}ab} \cdot r$ nên ta có:

$$\begin{aligned}\Omega_{ab\dot{5}} - T_{\dot{5}ab} &= \begin{pmatrix} \omega_{ab\dot{5}} & 0 \\ 0 & \omega_{ab\dot{5}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_{\dot{5}ab} & 0 \\ 0 & -t_{\dot{5}ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{ab\dot{5}} - t_{\dot{5}ab} & 0 \\ 0 & \omega_{ab\dot{5}} + t_{\dot{5}ab} \end{pmatrix} = VP, \\ \Omega_{ab\dot{5}} + T_{\dot{5}ab} &= \begin{pmatrix} \omega_{ab\dot{5}} & 0 \\ 0 & \omega_{ab\dot{5}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{\dot{5}ab} & 0 \\ 0 & -t_{\dot{5}ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{ab\dot{5}} + t_{\dot{5}ab} & 0 \\ 0 & \omega_{ab\dot{5}} - t_{\dot{5}ab} \end{pmatrix} = \tilde{VP}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\Omega_{ab\dot{5}} &= \frac{\tilde{VP} + VP}{2} = \frac{\tilde{VT} + VT}{2}, \\ T_{\dot{5}ab} &= \frac{\tilde{VP} - VP}{2} = \frac{\tilde{VT} - VT}{2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Vậy ta thu được thành phần thứ 2 của liên thông là

$$\begin{aligned}\Omega_{ab\dot{5}} &= \frac{1}{4} \left(E_a^\mu E_b^\nu F_{\mu\nu} \Phi + \tilde{E}_a^\mu \tilde{E}_b^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{\Phi} \right) + \frac{m}{4} \left[\Phi^{-1} \left(\tilde{E}_a^\mu E_{b\mu} - \tilde{E}_b^\mu E_{a\mu} \right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\Phi}^{-1} \left(E_a^\mu \tilde{E}_{b\mu} - E_b^\mu \tilde{E}_{a\mu} \right) \right] \\ &\quad + \frac{m}{4} \left[\left(\tilde{A}_a \cdot E_b^\nu - \tilde{A}_b \cdot E_a^\nu \right) \tilde{\Phi} - \left(A_a \cdot \tilde{E}_b^\nu - A_b \cdot \tilde{E}_a^\nu \right) \Phi \right] \left(\tilde{A}_\nu - A_\nu \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Và thành phần thứ 2 của độ xoắn là

$$\begin{aligned}T_{\dot{5}ab} &= \frac{1}{4} \left(-E_a^\mu E_b^\nu F_{\mu\nu} \Phi + \tilde{E}_a^\mu \tilde{E}_b^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{\Phi} \right) + \frac{m}{4} \left[\tilde{\Phi}^{-1} \left(E_a^\mu \tilde{E}_{b\mu} - E_b^\mu \tilde{E}_{a\mu} \right) \right. \\ &\quad \left. - \Phi^{-1} \left(\tilde{E}_a^\mu E_{b\mu} - \tilde{E}_b^\mu E_{a\mu} \right) \right] \\ &\quad + \frac{m}{4} \left[\left(\tilde{A}_a \cdot E_b^\nu - \tilde{A}_b \cdot E_a^\nu \right) \tilde{\Phi} + \left(A_a \cdot \tilde{E}_b^\nu - A_b \cdot \tilde{E}_a^\nu \right) \Phi \right] \left(\tilde{A}_\nu - A_\nu \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Tiếp tục cộng theo một thứ tự khác của phương trình (3.16), ta giữ lại thành phần $\Omega_{\dot{5}ab}$ của liên thông, ta có như sau

$$\left(DE_{\dot{5}} \right)_{ab} + \left(DE_a \right)_{b\dot{5}} - \left(DE_b \right)_{\dot{5}a} = \frac{1}{2} \left(\Omega_{\dot{5}ab} - \Omega_{\dot{5}ba} + \Omega_{ab\dot{5}} - \Omega_{a\dot{5}b} - \Omega_{b\dot{5}a} + \Omega_{ba\dot{5}} \right) + T_{\dot{5}ab}. \quad (3.24)$$

Suy ra

$$\Omega_{\dot{5}ab} = \left(DE_{\dot{5}} \right)_{ab} + \left(DE_a \right)_{b\dot{5}} - \left(DE_b \right)_{\dot{5}a} - T_{\dot{5}ab}. \quad (3.25)$$

Ta tiếp tục áp dụng kỹ thuật tính toán tương tự như với thành phần thứ 2, ta có thành phần thứ 3 của liên thông là

$$\begin{aligned}\Omega_{\dot{5}ab} = & \frac{m}{2}\Phi^{-1}(\eta_{ab} - \tilde{E}_b^\mu E_{a\mu}) + \frac{m}{2}\Phi^{-1}(\eta_{ab} - \tilde{E}_a^\mu E_{b\mu}) - \frac{1}{2}E_a^\mu E_b^\nu F_{\mu\nu}\Phi \\ & + \frac{m}{2}(A_a \cdot \tilde{E}_b^\nu - A_b \cdot \tilde{E}_a^\nu)(\tilde{A}_\nu - A_\nu)\Phi - \frac{1}{4}(-E_a^\mu E_b^\nu F_{\mu\nu}\Phi + \tilde{E}_a^\mu \tilde{E}_b^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{\Phi}) \\ & - \frac{m}{4}\left[\tilde{\Phi}^{-1}(E_a^\mu \tilde{E}_{b\mu} - E_b^\mu \tilde{E}_{a\mu}) - \Phi^{-1}(\tilde{E}_a^\mu E_{b\mu} - \tilde{E}_b^\mu E_{a\mu})\right] \\ & - \frac{m}{4}\left[(\tilde{A}_a \cdot E_b^\nu - \tilde{A}_b \cdot E_a^\nu)\tilde{\Phi} + (A_a \cdot \tilde{E}_b^\nu - A_b \cdot \tilde{E}_a^\nu)\Phi\right](\tilde{A}_\nu - A_\nu).\end{aligned}\quad (3.26)$$

Rút gọn biểu thức ta có

$$\begin{aligned}\Omega_{\dot{5}ab} = & -\frac{1}{4}(E_a^\mu E_b^\nu F_{\mu\nu}\Phi + \tilde{E}_a^\mu \tilde{E}_b^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{\Phi}) + \frac{m}{4}\left[\Phi^{-1}(4\eta_{ab} - 3\tilde{E}_b^\mu E_{a\mu} - \tilde{E}_a^\mu E_{b\mu})\right. \\ & \left.- \tilde{\Phi}^{-1}(E_a^\mu \tilde{E}_{b\mu} - E_b^\mu \tilde{E}_{a\mu}) - \left[(\tilde{A}_a \cdot E_b^\nu - \tilde{A}_b \cdot E_a^\nu)\tilde{\Phi} - (A_a \cdot \tilde{E}_b^\nu - A_b \cdot \tilde{E}_a^\nu)\Phi\right](\tilde{A}_\nu - A_\nu)\right].\end{aligned}\quad (3.27)$$

Vậy cuối cùng ta thu được thành phần thứ 3 của liên thông là

$$\begin{aligned}\Omega_{\dot{5}ab} = & -\frac{1}{4}(E_a^\mu E_b^\nu F_{\mu\nu}\Phi + \tilde{E}_a^\mu \tilde{E}_b^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{\Phi}) + \frac{m}{4}\left[\Phi^{-1}(4\eta_{ab} - 3\tilde{E}_b^\mu E_{a\mu} - \tilde{E}_a^\mu E_{b\mu})\right. \\ & \left.+ \tilde{\Phi}^{-1}(E_b^\mu \tilde{E}_{a\mu} - E_a^\mu \tilde{E}_{b\mu}) - \left[(\tilde{A}_a \cdot E_b^\nu - \tilde{A}_b \cdot E_a^\nu)\tilde{\Phi} - (A_a \cdot \tilde{E}_b^\nu - A_b \cdot \tilde{E}_a^\nu)\Phi\right](\tilde{A}_\nu - A_\nu)\right].\end{aligned}\quad (3.28)$$

Với thành phần tiếp theo, từ phương trình (3.13) ta có

$$(DE_{\dot{5}})_{\dot{5}c} = \frac{1}{2}(\Omega_{\dot{5}\dot{5}c} - \Omega_{\dot{5}c\dot{5}}) + T_{\dot{5}\dot{5}c}. \quad (3.29)$$

Do (3.3) nên ta có

$$\Omega_{\dot{5}c\dot{5}} - 2T_{\dot{5}\dot{5}c} = -2(DE_{\dot{5}})_{\dot{5}c} = 2(DE_{\dot{5}})_{c\dot{5}}. \quad (3.30)$$

Đổi lại chỉ số $c \rightarrow b$ và áp dụng kỹ thuật tương tự, ta có

$$\begin{aligned}\Omega_{\dot{5}b\dot{5}} = & (\tilde{D}E_{\dot{5}})_{b\dot{5}} - (DE_{\dot{5}})_{b\dot{5}} = \frac{1}{2}\left(\tilde{E}_b^\mu \frac{\partial_\mu \Phi}{\Phi} + E_b^\mu \frac{\partial_\mu \tilde{\Phi}}{\tilde{\Phi}}\right) \\ & + \frac{m}{2}\left[\tilde{E}_b^\mu (A_\mu - \tilde{A}_\mu \tilde{\Phi}^{-1}\Phi) + E_b^\mu (\tilde{A}_\mu - A_\mu \Phi^{-1}\tilde{\Phi})\right].\end{aligned}\quad (3.31)$$

Hai thành phần cuối cùng dễ dàng thu được từ (3.3)

$$\Omega_{\dot{5}\dot{5}a} = \Omega_{\dot{5}\dot{5}\dot{5}} = 0. \quad (3.32)$$

Vậy các thành phần của liên thông và thành phần khác không của độ xoắn đã được chỉ ra trong các công thức trong phần trên là (3.15, 22, 28, 31, 32) và công thức (3.23).

3.1.3. Phương trình cấu trúc thứ hai và tensor độ cong Ricci

Phương trình cấu trúc Cartan thứ hai xác định độ cong dạng-2 như sau

$$R_{AB} = D\Omega_{AB} + \Omega_{AC} \wedge \Omega^C_B. \quad (3.33)$$

Thành phần của nó trong hệ cơ sở E^A là

$$\begin{aligned} E^C \wedge E^D R_{ABCD} &= E^C \wedge E^D (D\Omega_{AB})_{CD} \\ &+ E^C \wedge E^D \frac{1}{2} (\Omega_{AEC} \Omega^E_{BD} - \Omega_{AED} \Omega^E_{BC}). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Chú ý là vì tích chéo phải thỏa mãn điều kiện phản xứng nên ta có thể tách thành hiệu. Ta có

$$R_{ABCD} = (D\Omega_{AB})_{CD} + \frac{1}{2} (\Omega_{AEC} \Omega^E_{BD} - \Omega_{AED} \Omega^E_{BC}). \quad (3.35)$$

Suy ra biểu thức của tensor độ cong là

$$\begin{aligned} R &= \eta^{AC} \eta^{BD} R_{ABCD} = \eta^{AC} \eta^{BD} \left[(D\Omega_{AB})_{CD} + \frac{1}{2} (\Omega_{AEC} \Omega^E_{BD} - \Omega_{AED} \Omega^E_{BC}) \right] \\ &= \eta^{AC} \eta^{BD} (D\Omega_{AB})_{CD} + \frac{1}{2} \eta^{AC} \eta^{BD} (\Omega_{AEC} \Omega^E_{BD} - \Omega_{AED} \Omega^E_{BC}) \\ &= \eta^{AC} \eta^{BD} (D\Omega_{AB})_{CD} + \frac{1}{2} \eta^{AC} \eta^{BD} (\Omega_{AEC} \Omega^E_{BD} - \Omega_{AED} \Omega^E_{BC}) \\ &= \eta^{AC} \eta^{BD} (D\Omega_{AB})_{CD} + \frac{1}{2} (\eta^{AC} \eta^{BD} - \eta^{AD} \eta^{BC}) \Omega_{AEC} \Omega^E_{BD}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nên ta thu được

$$R = \frac{1}{2} (\eta^{AC} \eta^{BD} - \eta^{AD} \eta^{BC}) [(D\Omega_{AB})_{CD} + \Omega_{AEC} \Omega^E_{BD}] = \frac{1}{2} (R_1 - R_2). \quad (3.37)$$

Như vậy, ta đã thu được các biểu thức của lý thuyết hấp dẫn trong hình thức luận Cartan khi mở rộng không gian thành 5-chiều với chiều phụ gián đoạn.

Để xem xét riêng bài toán hấp dẫn như trong lý thuyết 4-chiều, ta sẽ xét trường hợp đơn giản nhất là các thành phần của E_M^A trong công thức (2.19) thể hiện tương quan giữa chiều phụ và các chiều còn lại bị triệt tiêu. Với hàm vô hướng ta cũng lấy trường hợp đơn giản nhất, ta có điều kiện sau

$$\begin{cases} A_\mu = \mathbf{0} \\ \Phi = \mathbf{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_\mu^5 = \mathbf{0} \\ F_{\mu\nu} = \mathbf{0} \end{cases}. \quad (3.38)$$

Do việc tính toán R khá dài nên tôi thực hiện trong phần phụ lục P.2 công thức (5.7). Ta có biểu thức của tensor độ cong Ricci trong trường hợp đặc biệt Abel là

$$\begin{aligned} R = R_4 + \frac{m^2}{16} & \left(-152 + 16E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} + 64\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} - G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - 8(\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu})^2 \right) \\ & + \frac{m^2}{16} \left[-7E_{a\nu} \tilde{E}^{a\mu} E_{b\mu} \tilde{E}^{b\nu} + E^{a\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \tilde{E}_{b\mu} - 2\tilde{E}^{a\mu} E_a^\nu \tilde{E}_{b\nu} E_\mu^b \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Trong đó

$$R_4 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

với r_1 và r_2 là các độ cong vô hướng Ricci thông thường trên từng lá.

Như vậy chúng ta đã có một quy trình tính toán chuẩn trong DKKT để thu được biểu thức của tenxơ độ cong với bất kỳ cách chọn vierbein nào. Trong bài báo [8], Viet-Wali đã chỉ ra có thể đưa được trường gauge Abel mô tả tương tác điện từ vào lý thuyết, nhiệm vụ tiếp theo của chúng ta là phải đưa được các trường gauge phi Abel để mô tả cho tương tác mạnh và yếu. Như chúng ta đã biết, theo Yang và Lee có sự vi phạm tính chẵn lẻ trong tương tác yếu dẫn đến các hạt được chia thành tay trái và tay phải. Trong khi đó, với mô hình tương tác mạnh của Han và Nambu với nhóm gauge phi Abel lại không có sự khác nhau này. Do đó, một cách tự nhiên, trong lý thuyết DKKT, khi đưa các trường

gauge phi Abel vào để mô tả hai loại tương tác này, chúng tôi coi rằng hai lá không thời gian trong chiều phụ được dùng để phân chia thế giới hạt. Hạt tay trái tồn tại trên một lá và hạt tay phải tồn tại trên lá còn lại. Điều đó có nghĩa là, khi đưa các trường gauge phi Abel vào các thành phần trên hai lá, chúng ta phải thu được kết quả phù hợp với các tính chất của tương tác mạnh, yếu đã được biết đến trong SM kể trên. Đây chính là nội dung chính của chương 3 mà tôi sẽ trình bày trong phần tiếp theo.

3.2. Trường gauge phi Abel như thành phần của hấp dẫn

Do các hạt trái, phải có cùng khối lượng, nên chúng có tương tác hấp dẫn là như nhau. Do đó, không-thời gian trên hai lá mà chúng tồn tại là tương đồng. Nói cách khác, hai lá này song song với nhau và có chung một hệ cơ sở trực chuẩn địa phương hay ta có:

$$E_\mu^a = e_\mu^a \cdot \mathbf{e}. \quad (3.41)$$

Để tính được độ cong Ricci, trước tiên chúng ta tính các thành phần của liên thông Ω khi $\tilde{E}_\mu^a = E_\mu^a$. Sau đó tính các đạo hàm bằng cách áp dụng các công thức (2.42, 2.43) với chú ý khi giao hoán các dạng-1 qua tích xiên. Ta thu các thành phần của liên thông là

$$\begin{aligned} \Omega_{abc} &= \frac{1}{2} \left[E_b^\mu E_c^\nu (\partial_\mu E_{a\nu} - \partial_\nu E_{a\mu}) + E_c^\mu E_a^\nu (\partial_\mu E_{b\nu} - \partial_\nu E_{b\mu}) - E_a^\mu E_b^\nu (\partial_\mu E_{c\nu} - \partial_\nu E_{c\mu}) \right], \\ \Omega_{ab\dot{5}} &= -\Omega_{\dot{5}ab} = \frac{1}{4} E_a^\mu E_b^\nu (F_{\mu\nu} \Phi + \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{\Phi}) + \frac{m}{4} (E_a^\mu E_b^\nu - E_b^\mu E_a^\nu) (\tilde{A}_\mu \tilde{\Phi} - A_\mu \Phi) (\tilde{A}_\nu - A_\nu), \\ \Omega_{\dot{5}b\dot{5}} &= \frac{E_b^\mu}{2\Phi\tilde{\Phi}} \left[(\tilde{\Phi}\partial_\mu\Phi + \Phi\partial_\mu\tilde{\Phi}) + m(A_\mu\tilde{\Phi} - \tilde{A}_\mu\Phi)(\Phi - \tilde{\Phi}) \right], \\ \Omega_{\dot{5}\dot{5}a} &= \Omega_{\dot{5}\dot{5}\dot{5}} = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Trong đó:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = f_+ \mathbf{e} + f_- \mathbf{r}. \quad (3.43)$$

$F_{\mu\nu}$ đóng vai trò như trong lý thuyết trường điện từ, thành phần Ω_{abc} trở về dạng trong trường hợp 4-chiều thông thường, như vậy chỉ có thêm các thành phần liên quan đến chiều phụ thứ 5 mà ta cần quan tâm đến.

Áp dụng (3.42) và công thức tính đạo hàm (5.4) trong phụ lục P.1 vào phương trình (3.37), ta thu được biểu thức tensor độ cong Ricci tổng hợp là

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} - \eta^{ac} E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} - \frac{1}{\Phi\tilde{\Phi}} \eta^{ac} E_c^\mu \left[\tilde{\Phi}\partial_\mu\Phi + m(A_\mu\tilde{\Phi} - \tilde{A}_\mu\Phi^2) \right] \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu F_{\mu\nu} - m(E_c^\mu E_d^\nu - E_d^\mu E_c^\nu) A_\mu (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \right] \Phi \Omega_{ab\dot{5}} \end{aligned}$$

$$-\Omega_{\dot{5}e\dot{5}}\Omega_{b\dot{f}d}\eta^{bd}\eta^{ef}-\frac{1}{2}\eta^{ad}\Omega_{ac\dot{5}}\Omega_{bd\dot{5}}\eta^{bc}. \quad (3.44)$$

Chú ý rằng thành phần đầu tiên chính là thành phần tương ứng với độ cong 4-chiều thông thường nên ta không xem xét đến. Do ở đây, tôi áp dụng chiều phụ để mô tả hai loại hạt cơ bản là chẵn và lẻ (tay trái và tay phải), nên các chỉ số 1, 2 ký hiệu cho hai lá trong Z_2 ở trên sẽ được thay bằng chỉ số L, R. Để đơn giản nhất khi xem xét trường hợp phi Abel, tôi chọn hàm vô hướng

thực $\Phi = \phi \cdot \mathbf{e}$ đặt vector $A_\mu = a_{+\mu} \mathbf{e} + a_{-\mu} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} a_{\mu L} & 0 \\ 0 & a_{\mu R} \end{pmatrix}$ là trường gauge phi

Abel. Do đó ta thu được các thành phần của E_M^A trong công thức (2.19) được viết lại là

$$\begin{aligned} E_\mu^a &= \begin{pmatrix} e_\mu^a(x) & 0 \\ 0 & e_\mu^a(x) \end{pmatrix} = e_\mu^a(x) \mathbf{e}, & E_5^a &= 0, \\ E_5^{\dot{5}} &= \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} = \Phi, & E_\mu^{\dot{5}} &= -\begin{pmatrix} a_{\mu L} \phi & 0 \\ 0 & a_{\mu R} \phi \end{pmatrix} = -A_\mu \Phi. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \Phi = \phi \cdot \mathbf{e}, & \tilde{A}_\mu &= a_{+\mu} \cdot \mathbf{e} - a_{-\mu} \cdot \mathbf{r}, \\ \tilde{A}_\mu - A_\mu &= -2a_{-\mu} \cdot \mathbf{r}, & F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu} &= 2f_{+\mu\nu} \cdot \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Thay các công thức (3.41) và (3.45) vào công thức (3.42) ta thu được thành phần của liên thông là

$$\begin{aligned} \Omega_{abc} &= \frac{1}{2} \left[e_b^\mu e_c^\nu (\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}) + e_c^\mu e_a^\nu (\partial_\mu e_{b\nu} - \partial_\nu e_{b\mu}) - e_a^\mu e_b^\nu (\partial_\mu e_{c\nu} - \partial_\nu e_{c\mu}) \right] \cdot \mathbf{e} \\ \Omega_{ab\dot{5}} &= -\Omega_{\dot{5}ab} = \frac{1}{4} e_a^\mu e_b^\nu \phi (2f_{+\mu\nu} \cdot \mathbf{e}) + \frac{m}{4} \phi (e_a^\mu e_b^\nu - e_b^\mu e_a^\nu) (-2a_{-\mu} \cdot \mathbf{r}) (-2a_{-\nu} \cdot \mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} e_a^\mu e_b^\nu \phi f_{+\mu\nu} \cdot \mathbf{e} + m \phi (e_a^\mu e_b^\nu - e_b^\mu e_a^\nu) a_{-\mu} a_{-\nu} \cdot \mathbf{e} \\ &= \frac{1}{2} e_a^\mu e_b^\nu \phi (f_{+\mu\nu} + 2m[a_{-\mu}; a_{-\nu}]) \cdot \mathbf{e} \end{aligned}$$

$$\Omega_{\dot{5}b\dot{5}} = e_b^\mu \frac{\partial_\mu \phi}{\phi} \cdot \mathbf{e}. \quad (3.47)$$

Thay (3.46) vào biểu thức (3.44) ta thu được độ cong Ricci R là

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} - \eta^{ac} e_c^\mu \partial_\mu \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} - \eta^{ac} e_c^\mu \left[\frac{\partial_\mu \phi}{\phi} + m(2a_{-\mu} \cdot \mathbf{r}) \right] \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} - \Omega_{\dot{5}e\dot{5}} \cdot \Omega_{b\dot{f}d} \eta^{bd} \eta^{ef} \\ & - \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[e_c^\mu e_d^\nu (f_{+\mu\nu} \mathbf{e} + f_{-\mu\nu} \mathbf{r}) - m(e_c^\mu e_d^\nu - e_d^\mu e_c^\nu) (a_{+\mu} \cdot \mathbf{e} + a_{-\mu} \cdot \mathbf{r}) (-2a_{-\nu} \cdot \mathbf{r}) \right] \phi \Omega_{ab\dot{5}} \\ & - \frac{1}{2} \eta^{ad} \Omega_{ac\dot{5}} \cdot \Omega_{bd\dot{5}} \eta^{bc}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Bỏ đi các số hạng chứa vector $\mathbf{r}$ do chúng sẽ bị triệt tiêu khi lấy vết của ma trận, ta có:

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} - \eta^{ac} e_c^\mu \partial_\mu \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} - \eta^{ac} e_c^\mu \frac{\partial_\mu \phi}{\phi} \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} - \Omega_{\dot{5}e\dot{5}} \cdot \Omega_{b\dot{f}d} \eta^{bd} \eta^{ef} \\ & - \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[e_c^\mu e_d^\nu f_{+\mu\nu} + 2m(e_c^\mu e_d^\nu - e_d^\mu e_c^\nu) a_{-\mu} a_{-\nu} \right] \phi \Omega_{ab\dot{5}} - \frac{1}{2} \eta^{ad} \Omega_{ac\dot{5}} \cdot \Omega_{bd\dot{5}} \eta^{bc}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Hay ta có

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} - \eta^{ac} e_c^\mu \partial_\mu \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} - \eta^{ac} e_c^\mu \frac{\partial_\mu \phi}{\phi} \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} - \Omega_{\dot{5}e\dot{5}} \cdot \Omega_{b\dot{f}d} \eta^{bd} \eta^{ef} \\ & - \frac{1}{2} \phi \eta^{ac} \eta^{bd} e_c^\mu e_d^\nu (f_{+\mu\nu} + 2m[a_{-\mu}; a_{-\nu}]) \Omega_{ab\dot{5}} - \frac{1}{2} \eta^{ad} \Omega_{ac\dot{5}} \cdot \Omega_{bd\dot{5}} \eta^{bc}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Thay tiếp (3.47) vào ta có:

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} - \eta^{ac} e_c^\mu \partial_\mu \left(e_a^\nu \frac{\partial_\nu \phi}{\phi} \right) - \eta^{ac} e_c^\mu e_a^\nu \frac{\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{\phi^2} \\ & - \frac{1}{2} e_e^\chi \eta^{ac} \eta^{be} \left[e_b^\mu e_c^\nu (\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}) + e_c^\mu e_a^\nu (\partial_\mu e_{b\nu} - \partial_\nu e_{b\mu}) - e_a^\mu e_b^\nu (\partial_\mu e_{c\nu} - \partial_\nu e_{c\mu}) \right] \frac{\partial_\chi \phi}{\phi} \\ & - \frac{1}{4} \phi^2 \eta^{ac} \eta^{bd} e_c^\mu e_d^\nu e_a^\alpha e_b^\beta (f_{+\mu\nu} + 2m[a_{-\mu}, a_{-\nu}]) (f_{+\alpha\beta} + 2m[a_{-\alpha}, a_{-\beta}]) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{8}\phi^2\eta^{ad}\eta^{bc}e_a^\mu e_c^\nu e_b^\alpha e_d^\beta\left(f_{+\mu\nu}+2m[a_{-\mu},a_{-\nu}]\right)\left(f_{+\alpha\beta}+2m[a_{-\alpha},a_{-\beta}]\right). \quad (3.51)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} - \eta^{ac}e_c^\mu\partial_\mu\left(e_a^\nu\frac{\partial_\nu\phi}{\phi}\right) - g^{\mu\nu}\frac{\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}{\phi^2} \\ &\quad - \frac{1}{2}e^{b\chi}\left[e_b^\mu e^{a\nu}(\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}) + g^{\mu\nu}(\partial_\mu e_{b\nu} - \partial_\nu e_{b\mu}) - e^{a\mu}e_b^\nu(\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu})\right]\frac{\partial_\chi\phi}{\phi} \\ &\quad - \frac{1}{4}\phi^2 g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\left(f_{+\mu\nu}+2m[a_{-\mu},a_{-\nu}]\right)\left(f_{+\alpha\beta}+2m[a_{-\alpha},a_{-\beta}]\right) \\ &\quad - \frac{1}{8}\phi^2 g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\left(f_{+\mu\nu}+2m[a_{-\mu},a_{-\nu}]\right)\left(f_{+\alpha\beta}+2m[a_{-\alpha},a_{-\beta}]\right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ta đổi thay $\alpha \leftrightarrow \beta$ cho số hạng cuối cùng sẽ bị đổi dấu

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} - \eta^{ac}e_c^\mu\partial_\mu\left(e_a^\nu\frac{\partial_\nu\phi}{\phi}\right) - \left(\frac{\partial\phi}{\phi}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}e^{b\chi}\left[e^{a\mu}e_b^\nu(\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}) + e^{a\mu}e_b^\nu(\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu})\right]\frac{\partial_\chi\phi}{\phi} \\ &\quad - \frac{1}{4}\phi^2 g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\left(f_{+\mu\nu}+2m[a_{-\mu},a_{-\nu}]\right)\left(f_{+\alpha\beta}+2m[a_{-\alpha},a_{-\beta}]\right) \\ &\quad + \frac{1}{8}\phi^2 g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\left(f_{+\mu\nu}+2m[a_{-\mu},a_{-\nu}]\right)\left(f_{+\alpha\beta}+2m[a_{-\alpha},a_{-\beta}]\right). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Nên ta có

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} - \eta^{ac}e_c^\mu\partial_\mu\left(e_a^\nu\frac{\partial_\nu\phi}{\phi}\right) - \left(\frac{\partial\phi}{\phi}\right)^2 + g^{\nu\chi}e^{a\mu}(\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu})\frac{\partial_\chi\phi}{\phi} \\ &\quad - \frac{1}{8}\phi^2 g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\left(f_{+\mu\nu}+2m[a_{-\mu},a_{-\nu}]\right)\left(f_{+\alpha\beta}+2m[a_{-\alpha},a_{-\beta}]\right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Rút gọn đi ta được

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} - e^{a\mu}\partial_\mu\left(e_a^\nu\frac{\partial_\nu\phi}{\phi}\right) - \left(\frac{\partial\phi}{\phi}\right)^2 + e^{a\mu}(\partial_\mu e_a^\nu - g^{\alpha\nu}\partial_\alpha e_{a\mu})\frac{\partial_\nu\phi}{\phi} \\ &\quad - \frac{1}{8}\phi^2 g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\left(f_{+\mu\nu}+2m[a_{-\mu},a_{-\nu}]\right)\left(f_{+\alpha\beta}+2m[a_{-\alpha},a_{-\beta}]\right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Nên ta có

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial \phi}{\phi} \right)^2 - e^{a\mu} e_a^\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial_\nu \phi}{\phi} \right) - e^{a\mu} \partial_\mu e_a^\nu \frac{\partial_\nu \phi}{\phi} + e^{a\mu} (\partial_\mu e_a^\nu - g^{\alpha\nu} \partial_\alpha e_{a\mu}) \frac{\partial_\nu \phi}{\phi} - \frac{1}{8} \phi^2 g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (f_{+\mu\nu} + 2m[a_{-\mu}, a_{-\nu}]) (f_{+\alpha\beta} + 2m[a_{-\alpha}, a_{-\beta}]). \quad (3.56)$$

Do đó ta được

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial \phi}{\phi} \right)^2 - g^{\mu\nu} \partial_\mu \left(\frac{\partial_\nu \phi}{\phi} \right) - e^{a\mu} g^{\alpha\nu} \partial_\alpha e_{a\mu} \frac{\partial_\nu \phi}{\phi} - \frac{1}{8} \phi^2 g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (f_{+\mu\nu} + 2m[a_{-\mu}, a_{-\nu}]) (f_{+\alpha\beta} + 2m[a_{-\alpha}, a_{-\beta}]). \quad (3.57)$$

Như vậy ta đã thu được công thức cuối cùng của tenxo độ cong Ricci là

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} - g^{\mu\nu} \frac{\partial_\mu \partial_\nu \phi}{\phi} - g^{\alpha\nu} e^{a\mu} \partial_\alpha e_{a\mu} \frac{\partial_\nu \phi}{\phi} - \frac{1}{8} \phi^2 g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (f_{+\mu\nu} + 2m[a_{-\mu}, a_{-\nu}]) (f_{+\alpha\beta} + 2m[a_{-\alpha}, a_{-\beta}]). \quad (3.58)$$

Số hạng thứ 3 trong biểu thức không cho đóng góp vào Lagrange nên ta bỏ qua. Tensor độ cong có thể bỏ qua một hệ số nên ta thu được dạng rút gọn sau

$$R = R_4 - \frac{2\Box\phi}{\phi} - \frac{1}{4} \phi^2 g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \hat{f}_{\mu\nu} \hat{f}_{\alpha\beta}. \quad (3.59)$$

Trong đó số hạng đầu tiên là độ cong 4-chiều như đã biết, và số hạng cuối cùng chứa thành phần phi Abel.

$$\hat{f}_{\mu\nu}(x) = f_{+\mu\nu} + 2m[a_{-\mu}, a_{-\nu}] = \partial_\mu a_{+\nu}(x) - \partial_\nu a_{+\mu}(x) + 2m[a_{-\mu}(x), a_{-\nu}(x)]. \quad (3.60)$$

Viết dưới dạng thành phần trái phải trên hai lá là

$$\hat{f}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \left\{ g_{\mu\nu L} + g_{\mu\nu R} - \frac{m}{2} ([a_{\mu L}, a_{\nu R}] + [a_{\mu R}, a_{\nu L}]) \right\}. \quad (3.61)$$

Với cường độ trường hiệp biến được định nghĩa là

$$g_{\mu\nu L, R} = \partial_\mu a_{\nu L, R} - \partial_\nu a_{\mu L, R} + m[a_{\mu L, R}, a_{\nu L, R}]. \quad (3.62)$$

Độ cong vô hướng Ricci trong (3.59) là bất biến gauge chỉ khi các thành phần không hiệp biến trong phương trình (3.60) tiêu biến hoặc đóng góp vào trong cường độ trường hiệp biến. Vậy nên ta chỉ có hai trường hợp khả dĩ dưới đây:

a) *Trường hợp 1: Một trường gauge phải là Abel.*

Không mất tính tổng quát, ta có thể chọn thành phần tay phải $a_{\mu R}$ là Abel. Vì các trường như là thành phần của vielbein tổng quát không có thứ nguyên, ta có thể đưa ra các trường vectơ Abel vật lý $B_\mu(x)$ và cả trường phi Abel $W_\mu(x)$ như sau

$$a_{\mu R} = \frac{g'}{m} B_\mu(x) Y_R, \quad a_{\mu L} = \frac{g'}{m} B_\mu(x) Y_L - \frac{g}{m} W_\mu(x). \quad (3.63)$$

Do đó thành phần trong hệ cơ sở địa phương là

$$\begin{aligned} a_{-\mu} &= \frac{g'}{2m} (Y_L - Y_R) B_\mu(x) - \frac{g}{2m} W_\mu(x), \\ a_{+\mu} &= \frac{g'}{2m} (Y_L + Y_R) B_\mu(x) - \frac{g}{2m} W_\mu(x). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Ở đây $B_\mu(x)$ là một trường gauge Abel và $W_\mu(x) = W_\mu^i(x) T^i$ là trường gauge phi Abel, m là tham số khối lượng, Y_L, Y_R là tổng của các phần tử sinh của nhóm gauge Abel tay trái và phải. Suy ra

$$\begin{aligned} \hat{f}_{\mu\nu} &= \frac{g'}{2m} (Y_L + Y_R) B_{\mu\nu} + \frac{g}{2m} W_{\mu\nu}, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ W_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + g [W_\mu, W_\nu]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Ta có tác dụng Hilbert-Einstein là

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int dx^4 \sqrt{-\det|g|} \phi(x) \frac{1}{2N} \text{Tr}(R). \quad (3.66)$$

Với G_N là hằng số hấp dẫn của Newton, thay các công thức trên vào (3.66) ta có

$$\begin{aligned}
S_g &= -\frac{1}{64N\pi G_N} \int dx^4 \sqrt{-\det g} \phi^3 g^{\mu\rho} g^{\nu\tau} \text{Tr}(\hat{f}_{\mu\nu} \hat{f}_{\rho\tau}) \\
&= \frac{1}{4} \int dx^4 \sqrt{-\det g} \phi^3 \left(\frac{g'^2}{m^2} \frac{\sum (Y_L + Y_R)^2}{64N\pi G_N} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \frac{g^2}{64N\pi G_N m^2} \text{Tr} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \right).
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Để giữ lại các số hạng động lực chính xác cho trường gauge B_μ và W_μ , ta phải có mối quan hệ phụ thuộc giữa các tham số g' , g , m và G_N . Trong mô hình chuẩn, ta có $N=8$, nhóm gauge Abel $U(1)$ và phi Abel là $SU(2) \times U(1)$. Mối liên hệ giữa các tham số là

$$g = 16m\sqrt{2\pi G_N}, \quad g' \sum (Y_L + Y_R)^2 = 16m\sqrt{\pi G_N}. \tag{3.68}$$

Các mô hình với đối xứng khác nhau sẽ dẫn đến các liên hệ khác nhau. Trong bất kỳ trường hợp nào, tác dụng Hilbert-Einstein cũng được rút thành một lý thuyết vật lý bất biến gauge nếu các trường gauge trên một tấm không-thời gian là Abel.

b) Trường hợp 2: Hai trường gauge phi Abel phải có dạng giống nhau

Ta giới thiệu một trường gauge phi Abel $C_\mu(x) = C_\mu^i(x) \lambda^i$ đặc trưng cho nhóm màu. Ta có các thành phần

$$\begin{aligned}
a_{\mu L} &= \frac{\alpha g_s}{m} C_\mu, & a_{\mu R} &= \frac{g_s}{m} C_\mu, \\
a_{\pm\mu} &= (\alpha \pm 1) \frac{g_s}{2m} C_\mu.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Cường độ trường bây giờ có dạng hiệp biến

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{\mu\nu} &= (\alpha + 1) \frac{g_s}{2m} C_{\mu\nu}, \\
C_{\mu\nu} &= \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu + g_s [C_\mu, C_\nu].
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Nếu $\alpha=3$, số hạng động học của trường vector C_μ sẽ có thừa số đúng nếu ta chọn

$$g_s = 2\sqrt{\pi G_N} m. \quad (3.71)$$

Do đó, tác dụng Hilbert-Einstein là bất biến gauge

$$S_g = -\frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{-\det g} \phi^3 C^{\mu\nu} C_{\mu\nu}. \quad (3.72)$$

Nếu ta chọn nhóm màu $SU(3)$ là một nhóm gauge phi Abel, thì tác dụng (3.52) trở thành tác dụng của QCD kết hợp với hấp dẫn. Ta có thể kết hợp hai trường hợp trên để có một trường hợp hỗn hợp. Ví dụ, nếu chúng ta chọn nhóm đối xứng gauge bên trái là $SU(N_c) \otimes SU(N_f) \otimes U(1)_L$ và bên phải là $SU(N_c) \otimes U(1)_R$, do đó chúng ta có tác dụng Hilbert-Einstein tổng quát là bất biến chuẩn. Với các sự chọn lựa khác nhau của nhóm đối xứng chuẩn, ta sẽ có mỗi liên hệ khác nhau của các tham số.

Tóm lại, tác dụng Hilbert-Einstein tổng quát của hai lá không-thời gian không giao hoán $M^4 \times Z_2$ được xây dựng bởi hình thức luận Viet-Wali có thể chứa các số hạng bất biến chuẩn với các trường gauge phi Abel chỉ trong hai trường hợp. Trường hợp đầu tiên, nhóm gauge phải là Abel trên một lá của không thời gian, để áp dụng cho lý thuyết thống nhất của tương tác điện-yếu với hấp dẫn. Trường hợp thứ hai là nhóm gauge là phi Abel trên cả hai lá thì phải có dạng giống nhau để có thể áp dụng cho thống nhất tương tác mạnh QCD với hấp dẫn. Nói cách khác, lý thuyết DKKT có thể giải thích được tại sao tương tác mạnh lại giống nhau với hạt tay phải và tay trái và được mô tả bởi cùng một trường gauge phi Abel $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Trong khi đó, với tương tác yếu lại có sự mất đối xứng chẵn-lẻ khi các hạt tay phải phải được mô tả qua một trường gauge Abel và các hạt tay trái trên lá còn lại được mô tả bởi một trường gauge phi Abel $SU(2)$.

3.3. Kết luận chương 3

Trong chương 3, tôi đã giải quyết được bài toán đưa các trường gauge phi Abel vào DKKT và thu được nhiều kết quả quan trọng. Cụ thể là:

- Xây dựng quy trình chuẩn cho việc tính toán các đại lượng hình học bao gồm liên thông, độ xoắn và độ cong của hình thức luận Cartan trong

DKKT. Thu được lý thuyết đã bao gồm trường điện từ và hấp dẫn.

- Kết hợp thành công các trường gauge phi Abel vào veilbien, chúng đã xuất hiện như thành phần của trường hấp dẫn khi tồn tại trong tenxo độ cong Ricci.
- Kết quả thu được tính chất rất mạnh đó là tác dụng Hilbert-Einstein chỉ bất biến chuẩn khi hai trường gauge trên hai lá thỏa mãn một trong hai trường hợp: Hoặc một trường gauge phải là Abel trên một lá hoặc nếu chúng phi Abel thì phải có dạng giống nhau trên cả hai lá.

Kết quả này không chỉ mở ra khả năng kết hợp tương tác mạnh và yếu vào trong DKKT khi đưa được các hàm phi Abel. Nó còn đồng thời chứng minh được sự vi phạm tính chất chẵn lẻ của tương tác yếu bằng toán học và phù hợp với cả tính chất của tương tác mạnh. Có nghĩa là các trường phi Abel được đưa vào chỉ có hai khả năng và chúng phù hợp với hai loại tương tác mạnh và yếu. Đây là kết quả rất bất ngờ và lý thú của luận án.

CHƯƠNG 4. ĐỘ RỘNG PHÂN RÃ CỦA NEUTRON TRONG LÝ THUYẾT DKKT

4.1. Thời gian sống và các kênh phân rã tối của neutron trong DKKT

Phân rã neutron là một vấn đề đã được biết đến từ lâu trong vật lý năng lượng cao và hạt cơ bản. Theo mô hình chuẩn hiện tại chỉ có duy nhất một kênh rã β là $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ và tiên đoán thời gian sống của neutron với kênh rã này là $\tau_{SM} = 878,7 \pm 0,6$ [43]. Giá trị này là rất phù hợp với thực nghiệm khi đo bằng phương pháp “bottle”, đo các hạt neutron còn lại bằng phép đo khối lượng, là $\tau_{bottle} = 879,4 \pm 0,6$ [44]. Tuy nhiên, khi đo bằng phương pháp “beam” tức là đo qua dòng hạt mang điện proton sinh ra thì thời gian sống của neutron tăng lên 8 giây, cỡ 1% với $\tau_{beam} = 888 \pm 0,2$ [45]. Điều này có nghĩa là số hạt proton sinh ra là ít hơn số hạt neutron đã phân rã, điều đó có nghĩa là phải tồn tại các kênh rã khác ngoài kênh rã β .

Gần đây, nhiều nhà vật lý đã tìm cách giải bài toán “câu đố về thời gian sống của neutron” bằng cách đề xuất các kênh rã mới không có trong mô hình chuẩn mà sinh ra các hạt vật chất tối chưa biết [46]. Fornal và Grinstein [16] đã đề xuất ba kênh rã mới ra hạt neutron tối bao gồm: i) $n \rightarrow n_X + \gamma$, ii) $n \rightarrow n_X + e^+ + e^-$ và iii) $n \rightarrow n_X + \phi$. Các tác giả cũng xác định rằng, trong kịch bản đơn giản nhất, khối lượng của neutron tối nằm trong khoảng từ 937,9 đến 938,8 MeV. Tuy nhiên, các thực nghiệm gần đây đã loại trừ hai kênh rã đầu tiên [47, 48]. Sau đó, Ivanov và cộng sự [49] đề xuất thêm một kênh rã thay cho kênh rã (ii) ở trên ra cặp neutrino và phản neutrino là $n \rightarrow n_X + \nu_e + \bar{\nu}_e$.

Thêm vào đó, các nhà khoa học trong nhóm Xenon đã báo cáo về sự giật lùi ở năng lượng thấp được đo bởi XENON1T với độ tin cậy 3σ [14]. Người ta giả định rằng, electron bị giật lùi là do đã tương tác với một hạt vectơ boson

tương tự như photon nhưng có khối lượng trong khoảng MeV. Một cách tự nhiên, ta có thể thấy những dị thường này có thể liên quan đến photon tối có khối lượng X_{17} đã được tìm thấy trong thí nghiệm tại ATOMKI với thí nghiệm tạo cặp nội bộ (IPC- Internal Pair Creation). Trong thí nghiệm này, Kraszhorkay và đồng nghiệp đã bắn phá $Li7$ bằng proton năng lượng thấp với máy gia tốc Van-der-Graff [13]. Họ đã quan sát được một IPC dị thường trong quá trình hạt nhân Be kích thích chuyển về trạng thái cơ bản. Do đó, họ giả thiết tồn tại một hạt vector boson có khối lượng cỡ 17 MeV gọi là X_{17} . Có trung bình khoảng 5,8 sự kiện dị thường liên quan đến X_{17} trên 1 triệu sự kiện IPC, chủ yếu là photon thường. Những quan sát trong các thí nghiệm khác gần đây của nhóm cũng thu nhận được kết quả tương tự [50, 51, 52]. Hiện nay, trên thế giới đã có rất nhiều phòng thí nghiệm năng lượng thấp quan tâm đến X_{17} và đang tiến hành các đo đạc kiểm chứng.

Dựa vào những giả thiết và bằng chứng thực nghiệm ở trên, chúng tôi đã xây dựng một mô hình hạt sơ cấp tổng quát hơn mà ở đó thế giới các hạt sẽ có thêm các hạt vật chất tối tạo cặp với chúng gọi là bạn đồng hành (hay hạt cặp) Kaluza-Klein. Hạt neutron tối và X_{17} chính là hai ví dụ về hạt cặp Kaluza-Klein với neutron và photon. Vì lẽ đó, rõ ràng là trong mô hình này hiển nhiên sẽ tồn tại thêm các kênh rã khác của neutron.

Ta sẽ đi xem xét bài toán phân rã neutron trong lý thuyết DKKT. Cần chú ý rằng, trong các thí nghiệm về phân rã neutron, không hề phát hiện hạt mang điện nào khác sinh ra ngoài proton. Do đó, neutron không thể phân rã ra proton tối nên trong lý thuyết DKKT ta giả định rằng khối lượng của proton tối là rất lớn. Như vậy, dựa trên lý thuyết DKKT với mô hình hạt mở rộng và các thí nghiệm đã nêu ở trên, ta giả định rằng có tất cả 6 kênh rã khả dĩ của neutron bao gồm: kênh rã beta, kênh rã tối ra vô hướng và bốn kênh rã thông qua hạt truyền tương tác là photon tối X_{17} ra cặp hạt-phản hạt neutrino. Cụ thể là:

$$i) \quad n \xrightarrow{W} p + e^- + \bar{\nu}_e, (\beta - \text{decay})$$

$$ii) \quad n \rightarrow n_X + H \text{ (first order)}$$

$$iii) \quad n \xrightarrow{X17} n_X + \nu + \bar{\nu}$$

$$iv) \quad n \rightarrow n_X + \nu + \bar{\nu}_X$$

$$v) \quad n \rightarrow n_X + \nu_X + \bar{\nu}$$

$$vi) \quad n \rightarrow n_X + \nu_X + \bar{\nu}_X$$

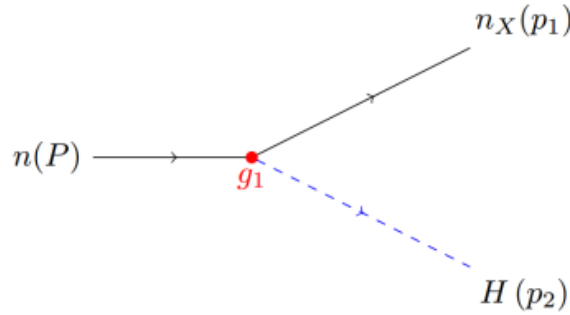
Trong sáu kênh rã này, kênh rã (i) đã biết trong SM, kênh rã (ii) là kênh rã bậc một ra photon tối, bốn kênh rã còn lại là các kênh rã thông qua hạt truyền tương tác là X17. Trong đó, hai kênh rã số (iv) và (v) là tương tự nhau, kênh rã số (iii) là trường hợp riêng của các kênh rã khác. Để trình bày được ngắn gọn, tôi chỉ xét kênh rã số (ii) và xét trường hợp tổng quát cho cả 4 kênh rã qua X17 với hai hạt ra có khối lượng bất kỳ. Sau đó, tôi sẽ áp dụng kết quả tổng quát cho từng trường hợp cụ thể. Bây giờ, ta sẽ đi vào chi tiết, bắt đầu với kênh rã bậc nhất.

4.2. Kênh rã của neutron sinh ra hạt photon tối vô hướng

Từ các biểu thức trong chương 2 là (2.62, 2.69, 2.72), ta có

$$m_H = 2m_X / \lambda^2 < m_n - m_{n_X} < 1,102 \text{ MeV}, \quad (4.1)$$

nên giản đồ phân rã của neutron ra hạt vô hướng H (bạn đồng hành Kaluza-Klein vô hướng của photon) thỏa mãn điều kiện năng lượng. Ta có giản đồ Feynman sau



Hình 1. Giản đồ phân rã neutron ra neutron tối và vô hướng H .

Trong đó $g_1 = g_{Hnn_X}$ là hằng số liên kết tại đỉnh trong công thức (2.71). Xung lượng của các hạt được ký hiệu như hình vẽ.

Áp dụng quy tắc vàng trong rã hai hạt [53] cho trường hợp kênh rã $n \rightarrow n_X + H$, trong hệ quy chiếu gắn với hạt neutron, $P = (m_n; \vec{0})$ (xem **Hình 1**), ta có

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{|M|^2}{2m_n} (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2) \frac{d^3\vec{p}_1}{2(2\pi)^3 E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{2(2\pi)^3 E_2} \\ &= \frac{|M|^2}{32\pi^2} \frac{|p_1|}{m_n^2} d\Omega. \end{aligned} \quad (4.2)$$

với $d\Omega = d\phi d(\cos\theta)$ là vi phân của hàm cầu.

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$\begin{aligned} E_n &= E_{n_X} + E_H = E_1 + E_2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{m_n^2 + P^2} &= \sqrt{m_{n_X}^2 + p_1^2} + \sqrt{m_H^2 + p_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow m_n = \sqrt{m_{n_x}^2 + p_1^2} + \sqrt{m_H^2 + p_1^2} \\
&\Leftrightarrow 4m_n^2 p_1^2 = m_n^4 + m_{n_x}^4 + m_H^4 - 2m_n^2 m_{n_x}^2 - 2m_n^2 m_H^2 - 2m_{n_x}^2 m_H^2.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Chúng ta thu được độ lớn của momen xung lượng của neutron tối là

$$|p_1| = \frac{1}{2m_n} \left[\left(m_n^2 - (m_{n_x} + m_H)^2 \right) \left(m_n^2 - (m_{n_x} - m_H)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4}$$

Từ $m_H < 1,102 \text{ MeV}$ và $m_{n_x} > 938,463 \text{ MeV}$, ta có thể lấy xấp xỉ

$$|p_1| \sim \frac{m_n + m_{n_x}}{2m_n} \left[(m_n - m_{n_x})^2 - m_H^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sim \left[(m_n - m_{n_x})^2 - m_H^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

Mặt khác, biên độ tán xạ M là

$$M_{\alpha\beta} = g_1 \bar{n}_\alpha(P) n_{x\beta}(p_1), \quad M_{\alpha\beta}^+ = g_1 \bar{n}_{x\beta}(p_1) n_\alpha(P). \tag{4.6}$$

Vì thế nên

$$\begin{aligned}
|M|^2 &= g_1^2 \text{Tr}[(p_1 + m_{n_x})(P + m_n)] = 4g_1^2 (p_1 \cdot P) + 4g_1^2 m_n m_{n_x} \\
&= 4g_1^2 m_n E_{n_x} + 4g_1^2 m_n m_{n_x} = 4g_1^2 m_n \left(\sqrt{m_{n_x}^2 + |p_1|^2} + m_{n_x} \right).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Ta có

$$|M|^2 = 2g_1^2 (m_n + m_{n_x})^2. \tag{4.8}$$

Chúng ta có thể thấy rằng $|p_1|, |M|^2$ không phụ thuộc vào các góc. Do đó tích phân hàm cầu trở nên tầm thường ($\int d\Omega = 4\pi$), vậy

$$\begin{aligned}
\Gamma_H &= \frac{g_1^2 (m_n + m_{n_x})^3}{8\pi m_n^3} \sqrt{(m_n - m_{n_x})^2 - m_H^2} \\
&\sim \frac{g^2 \cos^4 \theta_n}{\pi} [(m_n - m_{n_x})^2 - m_H^2]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Cuối cùng, thay các biểu thức (2.62, 2.71) vào (4.9), ta thu được độ rộng phân rã của neutron với kênh rã tạo ra hạt vô hướng H là

$$\Gamma_H = \frac{2g^2 \cos^4 \theta_n m_X}{\pi \lambda^2} \left(\frac{4}{\sin^2 2\theta_n} - 1 \right)^{1/2} \quad (4.10)$$

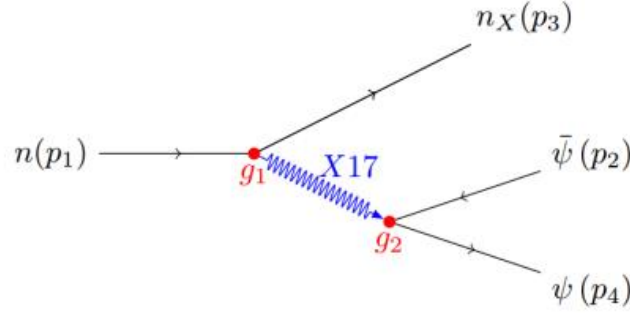
$$\sim \frac{2g^2 m_X \cos^3 \theta_n}{\pi \lambda^2 \sin \theta_n}.$$

Trong đó, chú ý rằng $\sin 2\theta_n < 0.1$, nên $4/\sin^2 2\theta_n \gg 1$. Đây như một hệ quả của thí nghiệm ICP [13] và lấy gần đúng khai triển Taylor đến bậc 1.

Như đã trình bày ở trên, theo lý thuyết DKKT có tất cả 4 kênh rã thông qua hạt truyền tương tác là photon X hay $X17$ ra các cặp neutrino. Trong bốn kênh rã này, có hai kênh rã số (iv) và (v) là tương tự nhau, kênh rã số (iii) là trường hợp riêng của các kênh rã còn lại, do đó chúng ta chỉ cần xét đến hai kênh rã số (v) và (vi). Tuy nhiên, để ngắn gọn, chúng tôi sẽ xem xét các kênh rã này trong trường hợp tổng quát với các hạt đi ra có khối lượng bất kỳ.

4.3. Các kênh rã của neutron qua $X17$ ra neutron tối.

Ta thấy tất cả các kênh rã của neutron qua hạt truyền tương tác $X17$ (iii, iv, v và vi) đều được mô tả bằng giản đồ sau.



Hình 2. Giản đồ phân rã neutron qua $X17$ ra cặp lepton.

Trong đó, $g_1 = g_{Xnn_X}$ và g_2 là hằng số liên kết tại đỉnh thứ 2 tổng quát, các hạt ra bao gồm neutron tối và cặp hạt-phản hạt của neutrino hoặc neutrino tối.

Sự khác nhau thực tế giữa các kênh rã chỉ là khối lượng của các hạt bay ra. Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát là hai hạt ra có khối lượng khác nhau, ta sẽ đi tính biên độ phân rã lần lượt theo các bước trong lý thuyết điện động học lượng tử [53].

Đầu tiên, ta có ma trận tán xạ của giản đồ trên là

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} &= [\bar{u}(n_X)\mathcal{K}^\mu u(n)] \cdot \mathcal{D}_{\mu\nu} \cdot [\bar{u}(f)\mathcal{K}^\nu u(\bar{f})] \\ &= [\bar{u}(n_X)ig_1\gamma^\mu u(n)] \cdot \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_X^2)}{q^2 - M_X^2} \cdot [\bar{u}(f)ig_2\gamma^\nu u(\bar{f})] \end{aligned} \quad (4.11)$$

với q và M_X là động lượng và khối lượng của hạt truyền tương tác $X17$, f là ký hiệu cho các hạt đi ra tổng quát, mà ở đây chính là hạt neutrino tương ứng với hàm song $\psi(p_4)$ và $\bar{f}$ là ký hiệu cho các phản hạt đi ra tổng quát, mà ở đây chính là phản neutrino tương ứng với hàm song $\bar{\psi}(p_2)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} &= [\bar{u}(n_x)\mathcal{K}^\mu u(n)] \cdot \mathcal{D}_{\mu\nu} \cdot [\bar{u}(f)\mathcal{K}^\nu u(\bar{f})] \\ &= [\bar{u}(n_x)ig_1\gamma^\mu u(n)] \cdot \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_X^2)}{q^2 - M_X^2} \cdot [\bar{u}(f)ig_2\gamma^\nu u(\bar{f})]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Do đó ta được biên độ tán xạ

$$\begin{aligned} M &= -\frac{g_1 g_2 g_{\mu\nu}}{(q^2 - M_X^2)} [\bar{u}(n_x)\gamma^\mu u(n)] [\bar{u}(f)\gamma^\nu u(\bar{f})] \\ &+ \frac{g_1 g_2}{(q^2 - M_X^2) M_X^2} [\bar{u}(n_x)\gamma^\mu q_\mu u(n)] [\bar{u}(f)\gamma^\nu q_\nu u(\bar{f})]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Việc tính toán các kênh rã neutron qua hạt truyền X17 gặp nhiều khó khăn. Đầu tiên, do khối lượng của hạt truyền X17 là cỡ 17 MeV là khối lượng trung bình nên rất khó khai triển các số hạng chứa nó ở dưới mẫu số. Mặt khác, trong trường hợp tổng quát, ta không thể bỏ qua khối lượng của các hạt bay ra, nên sẽ có nhiều tham số phải tính đến. Thêm vào đó, trong quá trình tính toán giản đồ, các số hạng bậc 0 và bậc 1 đều bị triệt tiêu nên tôi phải giữ lại các số hạng đến gần đúng bậc 2. Khó khăn cuối cùng là trong quá trình tính toán, tôi đã thực hiện đồng thời các phép tính xấp xỉ với nhiều tham số vô cùng bé. Mặc dù, các bước tính toán giản đồ Feymann đã được trình bày quy lát trong các tài liệu xong các kỹ thuật được dùng ở đây có nhiều điểm mới, có ý nghĩa thực tiễn trong việc giải quyết một bài toán giản đồ khó. Tuy nhiên để tránh làm mất mạch phân tích ý nghĩa vật lý, các tính toán giải tích chi tiết sẽ được trình bày trong phụ lục **P.3**. Các tính toán này đã được kiểm tra độc lập theo phương pháp số bằng phần mềm Mathematica đảm bảo tính chính xác của các phép xấp xỉ với sai số nhỏ hơn 2%. Điểm chú ý đặc biệt nhất ở đây là chúng tôi đã đặt các ẩn phụ không thứ nguyên như sau

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{m_1 - m_3}{m_1} = \frac{m_n - m_{n_x}}{m_n}, & \delta &= \frac{m_4}{m_1} = \frac{m_f}{m_n}, \\ \eta &= \frac{E_4}{m_1} = \frac{E_4}{m_n}, & \phi &= \sqrt{\eta^2 - \delta^2} = \frac{|\vec{p}_4|}{m_n}, \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{m_2}{m_1} = \frac{m_{\bar{f}}}{m_n}, \quad E = \frac{E_2}{m_1} = \frac{E_2}{m_n},$$

$$X = \frac{M_X^2}{m_1^2} = \left(\frac{M_X}{m_n} \right)^2. \quad (4.14)$$

Ta chú ý rằng, khác với các ẩn phụ khử thứ nguyên khác, ẩn phụ X được đặt theo tỷ lệ bậc hai giữa khối lượng của $X17$ và neutron thay vì bậc nhất. Điều này là vô cùng quan trọng do kênh rã ra cặp electron và positron bị cấm nên ta có điều kiện: $m_n - m_{n_x} < 2m_{e^-} \approx 1,022\text{MeV} \Rightarrow \varepsilon \approx 10^{-3}$ và khối lượng của $X17$ là cỡ 17 MeV nên $X \approx \varepsilon/3 \approx 10^{-3}$ kéo theo các đại lượng ta vừa đặt đều là các giá trị vô cùng bé cỡ 10^{-3} .

Áp dụng quy trình tính toán như trong [53] với các chú ý ở trên (xem trong phụ lục P.3), ta thu được biểu thức cuối cùng của bình phương biên độ tán xạ là

$$\frac{|\mathcal{M}|^2}{16g_1^2g_2^2} = \frac{-2E^2 + (4\varepsilon - 2)E + 2\varepsilon - 2\eta - 2\eta^2 + 4\eta\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + 6\gamma\delta}{(2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)^2}. \quad (4.15)$$

Và vi phân của độ rộng phân rã là

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} \left(\frac{4\pi^3\hbar}{g_1^2g_2^2m_1} \right) = \frac{-2E^2 + (4\varepsilon - 2)E + 2\varepsilon - 2\eta - 2\eta^2 + 4\eta\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + 6\gamma\delta}{(2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)^2} dE. \quad (4.16)$$

Đây là một tích phân dạng phân thức bậc 2 theo biến E , nên ta có thể giải được ngay thông qua các cận. Ta có

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} \left(\frac{4\pi^3\hbar}{g_1^2g_2^2m_n} \right) = \frac{A.E^2 + B.E + C}{(aE + b)^2} dE = \frac{A}{a^2} (E_+ - E_-)$$

$$+ \left(-\frac{2bA}{a^3} + \frac{B}{a^2} \right) \ln \frac{aE_+ + b}{aE_- + b} - \left(\frac{b^2A}{a^3} - \frac{bB}{a^2} + \frac{C}{a} \right) \left(\frac{1}{aE_+ + b} - \frac{1}{aE_- + b} \right). \quad (4.17)$$

với A, B, C và a, b là các hệ số tương ứng của biến E trong biểu thức (4.16), ta có

$$\begin{aligned} A &= -2, B = 4\varepsilon - 2, a = 2, b = 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X, \\ C &= 2\varepsilon - 2\eta - 2\eta^2 + 4\eta\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + 6\gamma\delta. \end{aligned} \quad (4.18)$$

và hai cận của E là

$$E_{\pm} \approx \varepsilon - \eta + \frac{\gamma^2 + \delta^2 - \varepsilon^2}{2} + \eta\varepsilon - \eta^2 \pm \phi\sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2}. \quad (4.19)$$

Áp dụng (4.19) vào các biểu thức chứa cận trong (4.17), ta có

$$\begin{aligned} aE_{\pm} + b &= 2\varepsilon - 2\eta - \varepsilon^2 - 2\eta^2 + \delta^2 + \gamma^2 + 2\varepsilon\eta + 2\eta - 2\varepsilon \\ &+ \varepsilon^2 - X \pm 2\phi\sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Nên

$$aE_{\pm} + b = 2\eta(\varepsilon - \eta) + \delta^2 + \gamma^2 - X \pm 2\phi\sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2}. \quad (4.21)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} (aE_+ + b) - (aE_- + b) &= 4\phi\sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2}, \\ \frac{(aE_+ + b)}{(aE_- + b)} &= \frac{2\eta(\varepsilon - \eta) + \delta^2 + \gamma^2 - X + 2\phi\sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2}}{2\eta(\varepsilon - \eta) + \delta^2 + \gamma^2 - X - 2\phi\sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2}} \approx 1 - \frac{4Y^2}{X}, \\ \frac{1}{(aE_+ + b)} - \frac{1}{(aE_- + b)} &= \frac{-1}{(aE_- + b)} \left[1 - \frac{(aE_- + b)}{(aE_+ + b)} \right] \approx \frac{-1}{(aE_- + b)} \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{4Y^2}{X}} \right] \\ &\approx \frac{1}{X} \left[-\frac{4Y^2}{X} - \frac{16Y^4}{X^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Với $Y^2 = \phi\sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2}$ và Y cũng là vô cùng bé cùng bậc với các ẩn phụ.

Thay vào tích phân (4.17) ta có:

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} \left(\frac{4\pi^3\hbar}{g_1^2 g_2^2 m_n} \right) = -Y^2 + \left(\frac{2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X}{2} + \frac{4\varepsilon - 2}{2^2} \right) \left(-\frac{4Y^2}{X} - \frac{8Y^4}{X^2} \right)$$

$$+ \frac{1}{2^2} \left[\begin{aligned} & \left((2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)^2 + (2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)(4\varepsilon - 2) \right) \\ & - 2(2\varepsilon - 2\eta - 2\eta^2 + 4\eta\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + 6\gamma\delta) \end{aligned} \right] \left(-\frac{4Y^2}{X^2} - \frac{16Y^4}{X^3} \right). \quad (4.23)$$

Ta xét đến vô cùng bé đến bậc 2 (do bậc 1 bị triệt tiêu hết), chú ý rằng Y cũng là vô cùng bé cùng bậc với các biến khác. Đầu tiên, ta tính biểu thức trong ngoặc vuông

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [] &= (2\eta - 2\varepsilon - X)^2 + (2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)(4\varepsilon - 2) \\ &- 4\varepsilon + 4\eta + 6\varepsilon^2 - 8\varepsilon\eta + 4\eta^2 - 2\delta^2 - 2\gamma^2 - 12\gamma\delta \\ &= (2\eta - 2\varepsilon - X)^2 + 4\varepsilon(2\eta - 2\varepsilon - X) + 4\varepsilon^2 + 4\eta^2 - 8\varepsilon\eta + 2X - 2\delta^2 - 2\gamma^2 - 12\gamma\delta \\ &= (2\eta - 2\varepsilon - X)^2 - 4\varepsilon X - 4\varepsilon^2 + 4\eta^2 + 2X - 2\delta^2 - 2\gamma^2 - 12\gamma\delta \\ &= 4\eta^2 + 4\varepsilon^2 + X^2 - 8\varepsilon\eta - 4\eta X + 4\varepsilon X - 4\varepsilon X - 4\varepsilon^2 + 4\eta^2 + 2X - 2\delta^2 - 2\gamma^2 - 12\gamma\delta \\ &= -8\eta\varepsilon - 4\eta X + 8\eta^2 + X^2 + 2X - 2\delta^2 - 2\gamma^2 - 12\gamma\delta. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\eta} \left(\frac{4\pi^3 \hbar}{g_1^2 g_2^2 m_n} \right) &= -Y^2 + \frac{2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X + 2\varepsilon - 1}{2} \left(-\frac{4Y^2}{X} - \frac{8Y^4}{X^2} \right) \\ &+ (-8\eta\varepsilon - 4\eta X + 8\eta^2 + X^2 + 2X - 2\delta^2 - 2\gamma^2 - 12\gamma\delta) \left(-\frac{Y^2}{X^2} - \frac{4Y^4}{X^3} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Rút gọn biểu thức ta có

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\eta} \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n}{4\pi^3 \hbar} \right)^{-1} &= -Y^2 + (2\eta - X - 1) \left(-\frac{2Y^2}{X} - \frac{4Y^4}{X^2} \right) \\ &- \frac{Y^2}{X^2} (-8\eta\varepsilon - 4\eta X + 8\eta^2 + X^2 + 2X - 2\delta^2 - 2\gamma^2 - 12\gamma\delta) - \frac{8Y^4}{X^2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Phá ngoặc cho các biểu thức có X ta được

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\eta} \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n}{4\pi^3 \hbar} \right)^{-1} &= -Y^2 - \frac{4\eta Y^2}{X} - \frac{8\eta Y^4}{X^2} + 2Y^2 + \frac{4Y^4}{X} + \frac{2Y^2}{X} \\ &+ \frac{4Y^4}{X^2} - \frac{Y^2}{X^2} (8\eta^2 - 8\eta\varepsilon - 2\delta^2 - 2\gamma^2 - 12\gamma\delta) + \frac{Y^2(4\eta - 2)}{X} - Y^2 - \frac{8Y^4}{X^2}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Triệt tiêu các biểu thức giống nhau và bỏ đi các vô cùng bé bậc cao ta đã thu được biểu thức cuối cùng của vi phân độ rộng tán xạ theo biến η trong gần đúng đến bậc 2 là

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n}{4\pi^3 \hbar} \right)^{-1} \approx -\frac{Y^2}{X^2} (8\eta^2 - 8\eta\varepsilon - 2\delta^2 - 2\gamma^2 - 12\gamma\delta) - \frac{4Y^4}{X^2}. \quad (4.28)$$

Thay biến Y về các biến phụ ban đầu, ta đã thu được biểu thức tổng quát của vi phân biên độ tán xạ theo năng lượng của hạt thứ 4 (ψ)

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\eta} \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n}{4\pi^3 \hbar X^2} \right)^{-1} = & -4\phi^2 \left[(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2 \right] \\ & - \phi \sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2} (8\eta^2 - 8\eta\varepsilon - 2\delta^2 - 2\gamma^2 - 12\gamma\delta). \end{aligned} \quad (4.29)$$

với điều kiện của biến η là

$$\delta < \eta < \varepsilon - \gamma \quad (4.30)$$

Ta sẽ áp dụng công thức (4.29) cho từng trường hợp giản đồ phân rã qua X17 đã nêu ở trên.

4.3.1. Quá trình rã neutron thành cặp neutrino và phản neutrino

Xét kênh rã (iii) $n \rightarrow n_x + \nu + \bar{\nu}$, Áp dụng (4.29) với

$$m_2 = m_4 = m_\nu = m_{\bar{\nu}} = 0 \Rightarrow \delta = \gamma = 0.$$

Công thức (4.29) trở thành

$$\frac{d\Gamma_3}{d\eta} \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n}{4\pi^3 \hbar X^2} \right)^{-1} = 8\eta^2 (\varepsilon - \eta)^2 - 4\eta^2 (\varepsilon - \eta)^2 = 4\eta^2 (\varepsilon - \eta)^2. \quad (4.31)$$

Điều kiện (4.30) trở thành: $0 < \eta < \varepsilon$

Tiếp tục đổi biến $\eta = \varepsilon x$ và lấy tích phân ta thu được

$$\Gamma_3 \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n}{4\pi^3 \hbar X^2} \right)^{-1} = \int_0^\varepsilon 4\eta^2 (\varepsilon - \eta)^2 d\eta = \varepsilon^5 \int_0^1 4x^2 (1-x)^2 dx = \frac{2\varepsilon^5}{15} \quad (4.32)$$

Vậy

$$\Gamma_3 = \frac{g_1^2 g_2^2 m_n}{30\pi^3 \hbar X^2} \varepsilon^5 = \frac{g_1^2 g_2^2}{30\pi^3 \hbar M_X^4} (m_n - m_{n_X})^5. \quad (4.33)$$

4.3.2. Quá trình rã neutron thành cặp neutrino tối và phản neutrino

Kênh rã số (iv) là $n \rightarrow n_x + \nu_x + \bar{\nu}$.

Áp dụng (4.29) với $m_{\bar{f}} = m_2 = m_{\bar{\nu}} = 0$; $m_f = m_{\nu_x} = m_4 = m \Rightarrow \gamma = 0$; $\delta = m/m_n$.

Ta có công thức (4.30) trở thành

$$\frac{d\Gamma_4}{d\eta} \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n}{4\pi^3 \hbar X^2} \right)^{-1} = \phi(\eta - \varepsilon) (8\eta^2 - 8\eta\varepsilon - 4\phi\eta + 4\phi\varepsilon - 2\delta^2). \quad (4.34)$$

Đặt $\eta = \varepsilon x$; $\delta = \varepsilon a \Rightarrow \phi = \sqrt{\eta^2 - \delta^2} = \varepsilon \sqrt{x^2 - a^2}$ ta có

$$\frac{d\Gamma_4}{dx} \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n \varepsilon^5}{4\pi^3 \hbar X^2} \right)^{-1} = \sqrt{x^2 - a^2} (x-1) (8x^2 - 8x - 4\sqrt{x^2 - a^2} x + 4\sqrt{x^2 - a^2} - 2a^2). \quad (4.35)$$

Thay cận $\delta < \eta < \varepsilon \Leftrightarrow a < x < 1$ Ta có:

$$\frac{d\Gamma_4}{dx} \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n \varepsilon^5}{4\pi^3 \hbar X^2} \right)^{-1} = \sqrt{x^2 - a^2} (x-1) (8x^2 - 8x - 4\sqrt{x^2 - a^2} x + 4\sqrt{x^2 - a^2} - 2a^2). \quad (4.36)$$

Lấy tích phân ta có

$$\begin{aligned} \Gamma_4 \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n \varepsilon^5}{2\pi^3 \hbar X^2} \right)^{-1} &= \frac{3}{5} + \frac{2}{3}(-1 + a^2) + \frac{1}{30}\sqrt{1-a^2}(4-13a^2-6a^4) \\ &+ \frac{1}{2}a^4 \ln(1+\sqrt{1-a^2}) - 2a^3 + a^4 + \frac{2a^5}{5} - \frac{2}{3}a^3(-1+a^2) - \frac{1}{2}a^4 \ln a. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Hay

$$\begin{aligned} \Gamma_4 \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n \varepsilon^5}{2\pi^3 \hbar X^2} \right)^{-1} &= \frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}a^2 - 2a^3 + a^4 + \frac{2a^5}{5} + \frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^5 \\ &+ \frac{\sqrt{1-a^2}}{30}(4-13a^2-6a^4) + \frac{1}{2}a^4 \ln(1+\sqrt{1-a^2}) - \frac{1}{2}a^4 \ln a. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ta thu được

$$\Gamma_4 \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n \varepsilon^5}{30\pi^3 \hbar X^2} \right)^{-1} = -1 + 10a^2 - 20a^3 + 15a^4 - 4a^5 - \frac{15}{2}a^4 \ln a$$

$$+ \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} (4 - 13a^2 - 6a^4) + \frac{15}{2}a^4 \ln(1 + \sqrt{1-a^2}) = J_4(a).$$
(4.39)

Vậy cuối cùng ta thu được biểu thức của độ rộng phân rã trong giản đồ (iv) là:

$$\Gamma_4 = \frac{g_1^2 g_2^2}{30\pi^3 \hbar M_X^4} (m_n - m_{n_x})^5 \left[-1 + 10a^2 - 20a^3 + 15a^4 - 4a^5 - \frac{15}{2}a^4 \ln a \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} (4 - 13a^2 - 6a^4) + \frac{15}{2}a^4 \ln(1 + \sqrt{1-a^2}) \right].$$
(4.40)

Hay là

$$\Gamma_4 = \frac{g_1^2 g_2^2 m_n \varepsilon^5}{30\pi^3 \hbar X^2} J_4(a) = \frac{g_1^2 g_2^2}{30\pi^3 \hbar M_X^4} (m_n - m_{n_x})^5 J_4(a).$$
(4.41)

Trong đó

$$a = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{m}{m_n - m_{n_x}} = \frac{m_{\nu_X}}{m_n - m_{n_x}}.$$
(4.42)

Và

$$J_4(a) = -1 + 10a^2 - 20a^3 + 15a^4 - 4a^5 - \frac{15}{2}a^4 \ln a$$

$$+ \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} (4 - 13a^2 - 6a^4) + \frac{15}{2}a^4 \ln(1 + \sqrt{1-a^2}).$$
(4.43)

Sử dụng phần mềm Mathematica với điều kiện $0 \leq a < 1$ ta có giá trị cực đại của J_4 là xấp xỉ 1,009 tại $a \approx 0,11186243786270342$.

4.3.3. Quá trình rã neutron thành cặp neutrino và phản neutrino tới

Giản đồ số (v) : $n \rightarrow n_x + \nu + \bar{\nu}_x$.

Áp dụng (4.29) với $m_f = m_\nu = m_4 = 0$; $m_{\bar{f}} = m_{\bar{\nu}_x} = m_2 = m$.

Giản đồ này tương tự giản đồ số (iv), chúng ta chỉ cần thay thứ tự lấy tích phân cho E_4 trước E_2 , do đó kết quả thu được là

$$\Gamma_5 = \Gamma_4 = \frac{g_1^2 g_2^2}{30\pi^3 \hbar M_X^4} (m_n - m_{n_X})^5 \left[\begin{aligned} & -1 + 10a^2 - 20a^3 + 15a^4 - 4a^5 - \frac{15}{2}a^4 \ln a \\ & + \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} (4 - 13a^2 - 6a^4) + \frac{15}{2}a^4 \ln(1 + \sqrt{1-a^2}) \end{aligned} \right]. \quad (4.44)$$

4.3.4. Quá trình rã neutron thành cặp neutrino tới và phản neutrino tới

Giản đồ số (vi): $n \rightarrow n_X + \nu_X + \bar{\nu}_X$.

Áp dụng (4.29) với $m_f = m_\nu = m_4 = m_{\bar{f}} = m_{\bar{\nu}_X} = m_2 = m \Rightarrow \delta = \gamma$.

Công thức (4.30) trở thành

$$\frac{d\Gamma_6}{d\eta} \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n}{4\pi^3 \hbar X^2} \right)^{-1} = -\phi \sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \delta^2} (8\eta^2 - 8\eta\varepsilon - 16\delta^2) - 4\phi^2 [(\varepsilon - \eta)^2 - \delta^2]. \quad (4.45)$$

Đặt $\eta = \varepsilon x; \delta = \varepsilon a \Rightarrow \phi = \sqrt{\eta^2 - \delta^2} = \varepsilon \sqrt{x^2 - a^2}$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_6}{dx} \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n \varepsilon^5}{2\pi^3 \hbar X^2} \right)^{-1} &= -\sqrt{x^2 - a^2} \sqrt{(1-x)^2 - a^2} (4x^2 - 4x - 8a^2) \\ &\quad - 2(x^2 - a^2) [(1-x)^2 - a^2]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\Gamma_6 \left(\frac{g_1^2 g_2^2 m_n \varepsilon^5}{30\pi^3 \hbar X^2} \right)^{-1} = 15 \int_a^{1-a} \left\{ \begin{aligned} & -\sqrt{x^2 - a^2} \sqrt{(1-x)^2 - a^2} (4x^2 - 4x - 8a^2) \\ & - 2(x^2 - a^2) [(1-x)^2 - a^2] \end{aligned} \right\} dx = J_6(a). \quad (4.47)$$

Tính tích phân theo x với điều kiện

$$m < E_4 < \frac{m_n^2 - m_{n_x}^2 - 2m_{n_x}m}{2m_n} \Rightarrow \delta < \eta < \frac{2\varepsilon - \varepsilon^2 - 2(1-\varepsilon)\delta}{2} \quad (4.48)$$

$$\Rightarrow a < x < 1-a$$

Ta thu được:

$$\Gamma_6 = \frac{g_1^2 g_2^2}{30\pi^3 \hbar M_x^4} (m_n - m_{n_x})^5 J_6(a). \quad (4.49)$$

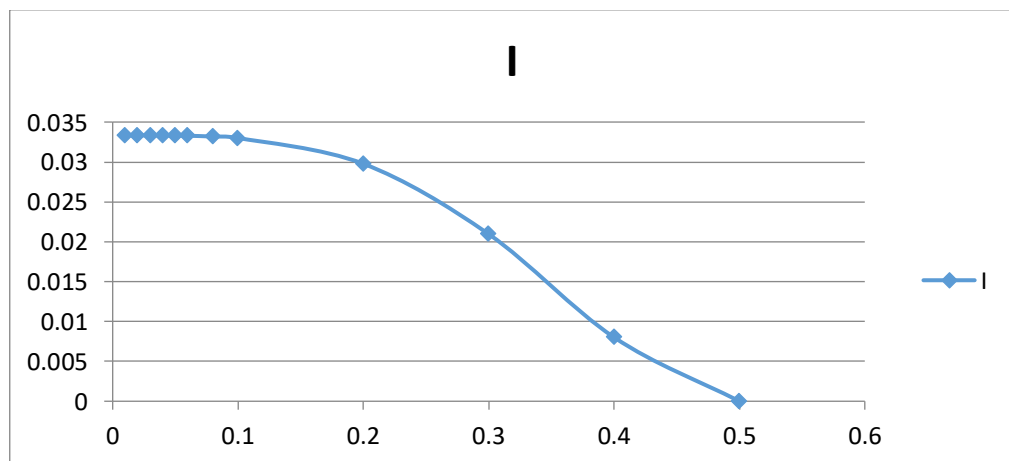
Trong đó:

$$\begin{aligned} J_6(a) &= 15 \int_a^{1-a} \left\{ \frac{-\sqrt{x^2 - a^2} \sqrt{(1-x)^2 - a^2} (4x^2 - 4x - 8a^2)}{-2(x^2 - a^2)[(1-x)^2 - a^2]} \right\} dx \\ &= -1 + 20a^2 - 40a^3 + 32a^5 - 60 \int_a^{1-a} \left[\sqrt{x^2 - a^2} \sqrt{x^2 - a^2 - 2x + 1} (x^2 - x - 2a^2) \right] dx \end{aligned} \quad (4.50)$$

Tích phân này là một tích phân không giải được tường minh, do đó ta dùng phương pháp gần đúng để xấp xỉ nó thành hàm đa thức. Ta đặt

$$I(a) = - \int_a^{1-a} \left[\sqrt{x^2 - a^2} \sqrt{x^2 - a^2 - 2x + 1} (x^2 - x - 2a^2) \right] dx \quad (4.51)$$

Sử dụng phương pháp số và sử dụng Mathematica để tính tích phân trên theo nhiều giá trị của a thỏa mãn điều kiện năng lượng $0 \leq a < 0,5$, sau đó vẽ đồ thị. Ta có, đồ thị tương ứng có dạng:



Hình 3. Đồ thị tích phân $I(a)$

Xấp xỉ đồ thị này đến đa thức bậc 5 ta được:

$$I(a) = - \int_a^{1-a} \left[\sqrt{x^2 - a^2} \sqrt{x^2 - a^2 - 2x + 1} (x^2 - x - 2a^2) \right] dx \quad (4.52)$$

$$\approx 2.954a^5 - 1.249a^4 - 0.432a^3 + 0.027a^2 + \frac{1}{30}$$

Suy ra:

$$J_6(a) = 1 + 21,435a^2 - 65,94a^3 - 74,94a^4 + 209,235a^5. \quad (4.53)$$

Giá trị cực đại của J_6 là xấp xỉ 1,28 khi $a = 0,198477$.

Tóm lại ta thu được biểu thức cuối cùng của độ rộng phân rã của kênh (vi) là:

$$\Gamma_6 \approx \frac{g_1^2 g_2^2}{30\pi^3 \hbar M_X^4} (m_n - m_{n_X})^5 (1 + 21,435a^2 - 65,94a^3 - 74,94a^4 + 209,235a^5) \quad (4.54)$$

Trong đó:

$$a = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{m}{m_n - m_{n_X}} = \frac{m_{\nu_X}}{m_n - m_{n_X}} < \frac{1}{2}. \quad (4.55)$$

Như vậy, các công thức (4.33, 41, 44, 49) đã chỉ ra độ rộng phân rã qua 4 kênh rã thông qua $X17$ của neutron với chú ý các hằng số liên kết g_1, g_2 theo công thức (2.71).

Việc tính toán nêu trên đã trải qua rất nhiều bước phức tạp với rất nhiều các gần đúng được áp dụng. Điều này đặt ra những nghi ngờ về độ chính xác của nó. Tuy nhiên, tôi đã tiến hành các bước tính toán số trong mọi trường hợp bằng phần mềm Mathematica để kiểm chứng. Kết quả cho thấy, trong mọi trường hợp đầu vào, các tính toán số cho kết quả lệch với kết quả giải tích nêu trên nhỏ hơn 2%.

4.4. So sánh các kênh phân rã mới của neutron

Trước tiên, ta nhắc lại độ rộng phân rã của kênh rã đầu tiên, kênh rã β trong SM [54] thông qua hạt boson W là

$$\Gamma_W = \frac{f^R m_e^5}{2\pi^3} V_{ud}^2 G_F^2 \left(1 + \frac{3g_A^2}{g_V^2} \right) = \frac{9,504g^4}{64\pi^3 \sin^4 \theta_W} \frac{m_e^5}{m_W^4} \quad (4.56)$$

Với các kênh rã qua X17, ta sẽ thay các hằng số liên kết trong chương 2 để đánh giá. Áp dụng (2.69, 2.71) vào các biểu thức (4.33, 4.41, 4.44, 4.49), lưu ý lấy $\hbar=1$ và đổi lại chỉ số cho đơn giản, ta thu được

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &= \frac{16g^4 m_X}{15\pi^3 \lambda^{10}} \frac{\sin^4 \theta_\nu}{\sin^3 \theta_n \cos^3 \theta_n}, \\ \Gamma_{4,5} &= \frac{16g^4 m_X}{15\pi^3 \lambda^{10}} \frac{\sin^2 \theta_\nu \cos^2 \theta_\nu}{\sin^3 \theta_n \cos^3 \theta_n} \times J_4(a), \\ \Gamma_6 &= \frac{16g^4 m_X}{15\pi^3 \lambda^{10}} \frac{\cos^4 \theta_\nu}{\sin^3 \theta_n \cos^3 \theta_n} \times J_6(a). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Trong trường hợp đơn giản nhất, khối lượng của neutrino tối rất nhỏ có thể bỏ qua ($a=0$) thì J_4 và J_6 bằng 1. Khi đó, ta có tổng độ rộng phân rã của các kênh qua X17 là

$$\Gamma_X = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6 = \frac{16g^4 m_X}{15\pi^3 \lambda^{10} \sin^3 \theta_n \cos^3 \theta_n}. \quad (4.58)$$

Ngay cả trong trường hợp tổng quát, do $J_4 \leq 1,009$ và $J_6 \leq 1,28$ nên ta có

$$\Gamma_X < 1,28 \frac{16g^4 m_X}{15\pi^3 \lambda^{10} \sin^3 \theta_n \cos^3 \theta_n}. \quad (4.59)$$

Dựa trên kết quả thu được ở các kênh rã qua hạt truyền tương tác X17 và kênh rã ra vô hướng H, ta có thể so sánh được độ rộng phân rã của hai trường hợp này với nhau. Kết quả thí nghiệm của Tang [46] chứng minh không tồn tại kênh rã ra cặp electron và phản electron, điều đó có thể được giải thích bởi điều kiện trong lý thuyết DKKT là $\delta m_n = 68 \text{ MeV} / \sin 2\theta_n \lambda^2 < 1,102 \text{ MeV}$, có nghĩa là $\sin 2\theta_n \lambda^2 > 61,7$. Khi đó, tỉ lệ của độ rộng phân rã giữa hai trường hợp rã ra vô hướng H và phân rã thông qua X17 là

$$\frac{\Gamma_X}{\Gamma_H} < \frac{256g^2}{15\pi^2 \sin^4 2\theta_n \lambda^8} < \frac{256g^2}{15\pi^2 61,7^4} < 1,210^{-7} g^2 \ll 1. \quad (4.60)$$

Như vậy, chúng ta thấy rằng nếu kênh β (ii) tồn tại, nghĩa là điều kiện khối lượng $m_H < 1,102\text{MeV}$ thoả mãn, thì kênh β (ii) đóng vai trò chính trong các kênh β tối khác kênh β và ta có thể bỏ qua các kênh β qua X17.

Một vấn đề quan trọng ở đây cần phải nhắc lại, như đã nói trong phần mở đầu chương 4, nếu tồn tại các kênh β ra hạt neutron tối thì trong phương pháp “bottle” việc đo khối lượng thực chất là đã tính cả của neutron còn lại và neutron tối sinh ra. Do đó, đóng góp thực tế của các kênh β tối không phải chỉ là 1% vào thời gian sống của neutron mà là lớn hơn. Điều này, chúng tôi sẽ trình bày trong các nghiên cứu tiếp theo mà không đưa ra ở đây.

Tóm lại, dựa trên lý thuyết DKKT, việc mở rộng không-thời gian 4 chiều thông thường thành các không-thời gian 4 chiều tồn tại trên hai lá song song tương ứng với hai điểm gián đoạn của chiều phụ thứ 5 đã kéo theo sự xuất hiện của các bạn đồng hành Kaluza-Klein với các hạt sơ cấp trong mô hình chuẩn. Từ đó có thể giải thích câu đố về thời gian sống của neutron. Số hạt proton sinh ra trong kênh β ít hơn số hạt neutron mất đi là bởi vì tồn tại các kênh β khác liên quan đến các bạn đồng hành Kaluza-Klein. Các kênh β mới này sẽ cho đóng góp lớn hơn 1% so với suy đoán từ thực nghiệm bởi thực chất các hạt neutron tối trộn lẫn trạng thái với các hạt neutron và không thể phân biệt chúng bằng phép đo khối lượng. Hiện tại, trong các kênh β mới của mô hình β neutron trong DKKT, các kênh β qua X17 có đóng góp không đáng kể so với kênh β ra hạt vô hướng H nếu kênh β này tồn tại. Trong một hướng suy nghĩ mở rộng, các bạn đồng hành Kaluza-Klein cũng là một hướng đi triển vọng để tìm hiểu về sự tồn tại và các tính chất của vật chất tối.

Như vậy, bằng cách đề xuất các kênh β mới của neutron trong mô hình DKKT, ta có thể giải thích được rằng các neutron còn tham gia vào các kênh β khác, với giả thiết các hạt proton tối có khối lượng rất lớn làm các kênh β ra proton tối bị loại trừ. Do đó, trong phép đo “beam” ta chỉ đo được các hạt proton mang điện sinh ra bằng với số neutron tham gia kênh β (i) sẽ ít hơn số hạt neutron mất đi được đo bằng phương pháp “bottle”. Câu đố về thời gian sống

của neutron được giải thích định tính một cách hiển nhiên. Các số liệu thực nghiệm này sẽ được sử dụng để thiết lập các tham số của lý thuyết DKKT. Ta sẽ xem xét vấn đề này ngay trong phần dưới đây.

4.5. Vấn đề phân rã neutron và lời giải trong lý thuyết DKKT

Như vậy, trong các phần ở trên, ta đã thu được độ rộng phân rã của tất cả các kênh rã neutron trong lý thuyết DKKT. Các kênh rã qua X17 có đóng góp rất nhỏ so với kênh rã ra H. Như vậy, nếu kênh rã qua H không bị cấm ta có thể bỏ qua các kênh rã qua X17. Do đó, để giải quyết bài toán câu đố về thời gian sống của neutron được đưa ra từ đầu chương ta chỉ cần quan tâm đến kênh rã (i) và (ii).

Đầu tiên, như ta đã đề cập ở trên, trong lý thuyết DKKT neutron có thêm các kênh rã khác ngoài kênh rã beta, do đó số hạt neutron mất đi thực tế sẽ nhiều hơn số hạt proton sinh ra từ kênh rã beta. Nên thực tế thời gian sống của neutron được đo bằng phương pháp beam là không chính xác và sẽ phải sai lệch với phương pháp bottle. Theo định luật phân rã, xác suất để một hạt phân rã hay tốc độ phân rã của hạt là hằng số không đổi. Để đơn giản, ở đây, ta chỉ xét neutron phân rã theo hai kênh (i) và (ii) với hai hằng số phân rã lần lượt là λ_1, λ_2 , ta có số hạt neutron còn lại theo thời gian là

$$N_n(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (4.61)$$

với $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ là hằng số phân rã toàn phần của neutron. Dễ thấy rằng, phương pháp bottle thực chất đã đo được số hạt neutron còn lại này. Do đó thời gian sống hay chu kỳ bán rã được đo bằng phương pháp bottle chính là chu kỳ bán rã của neutron. Do đó ta có

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau_{\text{bottle}}}. \quad (4.62)$$

Mặt khác, phương pháp beam đã đo đạc dựa trên sản phẩm proton của quá trình phân rã neutron, đối với phân rã theo nhiều kênh, tỷ lệ của các sản phẩm theo các kênh sẽ tỷ lệ theo xác suất hay hằng số phân rã của nó, ta có số hạt proton và số hạt neutron tối sinh ra theo thời gian là

$$\begin{aligned} N_p(t) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} N_0 (1 - e^{-\lambda t}) = \frac{\lambda_1}{\lambda} N_0 (1 - e^{-\lambda t}) \\ N_{n_x}(t) &= \frac{\lambda_2}{\lambda} N_0 (1 - e^{-\lambda t}) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Do đó, dựa trên thí nghiệm beam thời gian bán rã đo được thực chất là thời gian để thu được số hạt proton bằng một nửa số neutron ban đầu, ta có

$$N_p(t = \tau_{beam}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} N_0 (1 - e^{-\lambda \tau_{beam}}) = \frac{1}{2} N_0. \quad (4.64)$$

Thay (4.62) vào (4.64) ta có

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(1 - e^{-\ln 2 \frac{\tau_{beam}}{\tau_{bottle}}} \right) = \frac{1}{2}. \quad (4.65)$$

Như vậy ta thu được tỷ lệ hằng số phân rã hay độ rộng phân rã theo hai kênh là

$$\frac{\Gamma_H}{\Gamma_w} = \frac{\Gamma_{ii}}{\Gamma_i} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 - 2e^{-\ln 2 \frac{\tau_{beam}}{\tau_{bottle}}} = 1 - 2^{1 - \frac{\tau_{beam}}{\tau_{bottle}}} \sim 6,756 \cdot 10^{-3}. \quad (4.66)$$

Thay (4.10) và (4.56) vào (4.66) ta có

$$\frac{\cos^3 \theta_n}{\lambda^2 \sin \theta_n} = \left(1 - 2^{1 - \frac{\tau_{beam}}{\tau_{bottle}}} \right) \frac{4,752 g^2 m_e^5}{64 \pi^2 m_x m_w^4 \sin^4 \theta_w} \sim \frac{g^2 m_e^5 10^{-3}}{2 \pi^2 m_x m_w^4 \sin^4 \theta_w}. \quad (4.67)$$

Như vậy từ kết quả của thí nghiệm beam và bottle, ta đã thu được phương trình liên hệ giữa hai tham số quan trọng của lý thuyết DKKT là tham số cấu trúc λ và góc trộn θ_n giữ neutron và neutron tối. Để xác định giá trị các tham số của DKKT đòi hỏi phải áp dụng lý thuyết này cho các vấn đề lý thuyết và thực nghiệm khác. Trong khuôn khổ của luận án này, tôi dừng lại ở việc giải quyết bài toán phân rã neutron bằng lý thuyết DKKT.

4.6. Kết luận chương 4

Trong chương 4, dựa trên mô hình hạt sơ cấp mới của DKKT và các bằng chứng thực nghiệm, chúng tôi đã đề xuất thêm 5 kênh rã mới của neutron. Các kênh rã tối này có thể giải thích được bài toán “câu đố về thời gian sống của neutron” một cách định tính. Các kết quả của chương 4 cho thấy khả năng ứng dụng của lý thuyết DKKT vào các bài toán thực tế cụ thể, theo sát các kết quả thực nghiệm mới hiện nay. Đặc biệt hơn, nó còn góp phần hoàn thiện lý thuyết cho dự án nghiên cứu, kiểm nghiệm sự tồn tại của dị thường IPC, X17 đang được tiến hành trên máy gia tốc hạt Pelletron tại Trung tâm Vật lý hạt nhân, trường Đại học Khoa học tự nhiên, Đại học QGHN. Các kết quả thu được trong chương 4 cụ thể là:

- Xác định được độ rộng phân rã của các kênh rã mới của neutron bằng phương pháp giải tích với độ chính xác cao.
- Xây dựng quy trình và đưa ra các kỹ thuật tính toán đặc biệt cho các trường hợp giản đồ Feymann của các kênh rã mới. Các kỹ thuật này đã khắc phục được các khó khăn rất lớn khi tính toán các giản đồ liên quan đến các hạt truyền có khối lượng trung bình. Từ đó mở ra cơ hội áp dụng DKKT cho các quá trình vật lý khác.
- Dựa trên các bằng chứng thực nghiệm và lý thuyết DKKT, chúng tôi đã đánh giá được đóng góp của các kênh rã mới so với nhau. Độ rộng phân rã của các kênh rã qua $X17$ rất bé so với kênh rã ra vô hướng H , do đó có thể bỏ qua nếu kênh rã này tồn tại.
- Việc tính toán được các giản đồ phân rã mới mở ra khả năng giải quyết triệt để bài toán phân rã neutron một cách định lượng. Từ đó, tôi đã xác định được phương trình ràng buộc giữa tham số cấu trúc metric và góc trộn của neutron và neutron tối. Như vậy có thể nói, bài toán phân rã neutron đã có lời giải trọn vẹn trong DKKT

KẾT LUẬN

Như vậy, chúng ta có thể thấy rằng Luận án đã hoàn thành tất cả các yêu cầu đặt ra ban đầu. Các kết quả trong luận án đã đóng góp quan trọng vào việc xây dựng và hoàn thiện lý thuyết DKKT cũng như áp dụng lý thuyết này vào thực tiễn nhằm giải quyết các bài toán dị thường mà thực nghiệm đặt ra.

Với việc tính toán cụ thể từng bước và áp dụng trường hợp tổng quát hơn khi có chứa các trường gauge phi Abel, chúng tôi đã góp phần quan trọng trong việc chuẩn hóa các quy trình tính toán của lý thuyết DKKT với cả hệ tọa độ thẳng địa phương và hệ tọa độ cong tuyến tính. Từ đó tạo điều kiện thuận lợi để lý thuyết dễ dàng có thể áp dụng cho các trường hợp tổng quát hơn.

Xuất phát từ hình học Riemann với hình thức luận Cartan để biểu diễn lý thuyết tương đối rộng kết hợp với lý thuyết nhiều chiều Kaluza-Klein dựa trên hình học không giao hoán đã phát triển thành lý thuyết DKKT. Lý thuyết này đã thống nhất được tương tác điện từ với hấp dẫn. Giờ đây, chúng tôi đã kết hợp được các trường gauge phi Abel vào DKKT như là thành phần của hấp dẫn khi chúng xuất hiện trong biểu thức của tenxơ độ cong. Kết quả chỉ ra rằng, các trường gauge phi Abel thỏa mãn đề tác dụng Hilbert-Einstein là bất biến chuẩn chỉ với hai trường hợp. Một là nhóm gauge phải là Abel trên một lá của không-thời gian, phù hợp với sự vi phạm tính chất chẵn lẻ của tương tác yếu. Hai là nhóm gauge phi Abel phải là giống nhau trên cả hai lá của không-thời gian, phù hợp với tính chất của tương tác mạnh. Có nghĩa là, về mặt toán học, lý thuyết DKKT có thể mô tả đồng thời cả 4 loại tương tác, hay chính là một lý thuyết thống nhất các tương tác. Tất cả các trường xuất hiện đều là hệ quả của không-thời gian bị bẻ cong và phân thớ trong chiều phụ. Như vậy, hình thức luận của lý thuyết DKKT vô cùng thích hợp và hứa hẹn cho việc giải quyết bài toán thống nhất tương tác.

Sau những phát hiện đột phá từ thực nghiệm, khi tìm thấy bằng chứng về sự tồn tại của photon tối X17, chúng tôi đã có bước phát triển lớn trong lý

thuyết DKKT khi mở rộng mô hình hạt sơ cấp với các bạn đồng hành Kaluza-Klein của nó là các ứng viên cho các hạt vật chất tối, bao gồm cả X17. Điều này không chỉ cho thấy lý thuyết DKKT là một công cụ tuyệt vời, dễ dàng phù hợp với nhiều vấn đề vật lý mà còn cho thấy sự mở rộng chiều phụ gián đoạn có thể giải thích được sự phân chia trong thế giới vật chất. Chiều phụ gồm 2 điểm mô tả cho sự phân chia hạt theo tính chẵn lẻ hoặc theo dạng vật chất sang tối, chiều phụ gồm 3 điểm có thể mô tả các thế hệ của fermion. Thêm vào đó, nó còn cho thấy cơ hội áp dụng lý thuyết DKKT để giải quyết các vấn đề hóc búa lâu nay cũng như những khám phá mới đang được đòi hỏi ngày một nhiều từ thực nghiệm. Trong Luận án này, chúng tôi đã áp dụng lý thuyết DKKT để giải quyết bài toán về thời gian sống của neutron.

Theo những kết quả đã trình bày ở trên, chúng tôi đã tính toán thành công các giản đồ phân rã mới của neutron được đề xuất trong lý thuyết DKKT. Mặc dù các giản đồ này là các trường hợp khó chưa có tiền lệ và phải áp dụng trong một mô hình mới xong chúng tôi đã tìm ra được các kỹ thuật tính toán tốt để giải quyết được các bước tính toán rất phức tạp với rất nhiều số hạng cần đánh giá. Nhờ có những bước cải tiến trong kỹ thuật tính toán khi có thể đưa các đại lượng không còn thứ nguyên với bậc vô cùng bé giống nhau để có thể phân loại các vô cùng bé cùng loại, từ đó có thể loại bỏ các số hạng vô cùng bé ở bậc cao hơn. Mặt khác, chúng tôi cũng phát hiện ra rằng các vô cùng bé bậc 0, 1 bị triệt tiêu nên chúng tôi đã áp dụng các gần đúng đến bậc 2. Cuối cùng, sau khi áp dụng cho các trường hợp tổng quát có thể, chúng tôi đã từng bước cải tiến quy trình để đưa các bước tính toán phức tạp trở nên đơn giản. Kết quả là sau đó chúng tôi có thể dễ dàng áp dụng cho cả bốn giản đồ trong phân rã qua X17, từ đó tạo cơ sở thuận lợi cho những tính toán tiếp theo trong lý thuyết DKKT.

Cuối cùng, chúng tôi đã tổng hợp và đánh giá sự đóng góp vào độ rộng phân rã của tất cả các kênh rã mới của neutron trong DKKT. Từ việc áp dụng các điều kiện là các kết quả mới nhất, chúng tôi đã thiết lập được các điều kiện ràng buộc chặt chẽ của các tham số trong lý thuyết DKKT. Như vậy, nếu thực sự các tham số này được thiết lập và kiểm chứng thành công thì tất cả các vấn đề liên quan từ thực nghiệm hiển nhiên đã được giải thích bằng lý thuyết DKKT.

Như vậy, có thể nói lý thuyết DKKT dù chỉ đang trong quá trình hoàn thiện nhưng đã cho thấy nhiều triển vọng tích cực trong việc giải quyết các vấn đề lớn nhất của Vật lý hiện đại. Mặc dù các bài toán là vô cùng hóc búa và thực chất khi áp dụng cho các trường hợp cụ thể có thể rất phức tạp về mặt toán học xong nhóm nghiên cứu kỳ vọng nếu có thể đưa ra các tiên đoán khớp với thực nghiệm thì đây sẽ là một hướng nghiên cứu vô cùng triển vọng.

Trong các nghiên cứu tiếp theo, chúng tôi sẽ công bố phần còn lại của bài toán về thời gian sống của neutron. Tập trung vào một số bài toán đã có số liệu thực nghiệm như chuyển pha neutrino, tán xạ proton ... để thiết lập thêm những mối liên hệ cho các tham số của lý thuyết. Từ đó, chúng tôi sẽ đưa ra được các tiên đoán hiện tượng luận.

Điều đáng lưu ý là hiện tại lý thuyết DKKT mới chỉ xây dựng đến cấp độ hạt sơ cấp như neutron, proton, electron và photon chứ chưa xét đến cấp độ hạt cơ bản như các quark. Trong thời gian tới, sau khi thiết lập xong các thông số lý thuyết từ các quá trình tương tác của các hadron, chúng tôi sẽ tập chung phát triển lý thuyết DKKT cho các quark và lepton nhằm giải thích sự phân chia thành các thế hệ quark theo hương, áp dụng trường phi Abel cho quá trình tương tác mạnh theo màu của chúng và giải quyết bài toán dao động giữa các thế hệ của neutrino.

NHỮNG ĐÓNG GÓP MỚI CỦA LUẬN ÁN

- ❖ Chúng tôi đã kết hợp thành công các trường gauge phi Abel vào veilbien, chúng đã xuất hiện như thành phần của trường hấp dẫn khi tồn tại trong tenxo độ cong Ricci. Đây là cơ sở toán học để lý thuyết DKKT có thể thống nhất các tương tác trong một lý thuyết hình học.
- ❖ Kết quả thu được tính chất rất mạnh đó là tác dụng Hilbert-Einstein chỉ bất biến chuẩn khi trường gauge trên hai lá của hạt tay trái- hạt tay phải phải thỏa mãn một trong hai trường hợp:
 - Trường gauge phải là Abel trên một lá, điều này phù hợp với tính chất của tương tác yếu.
 - Trường gauge phi Abel thì phải có dạng giống nhau trên cả hai lá, phù hợp với tương tác mạnh.
- ❖ Chúng tôi đã đề xuất các kênh phân rã mới của neutron dựa trên các bạn đồng hành Kaluza-Klein của các hạt sơ cấp trong DKKT và các bằng chứng thực nghiệm. Qua đó đã giải thích định tính được bài toán “câu đố về thời gian sống của neutron”.
- ❖ Xây dựng quy trình và kỹ thuật tính toán độ rộng phân rã của các kênh rã mới của neutron.
- ❖ Độ rộng phân rã của các kênh rã qua X17 rất nhỏ so với kênh rã ra vô hướng H, nên chúng ta có thể bỏ qua chúng nếu kênh rã ra H tồn tại.
- ❖ Dựa trên hai thí nghiệm đo thời gian sống của neutron là beam và bottle, tôi đã thiết lập được mối liên hệ giữa hai tham số của lý thuyết DKKT

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ

❖ 01 bài báo đã đăng trên tạp chí *Modern Physics Letters A* (ISI).

- Tiêu đề: Nonabelian gauge fields as components of gravity in the discretized Kaluza-Klein theory, *Modern Physics Letters A*, Vol. 32, No. 18 (2017) 1750095

❖ 02 bài báo đã đăng trên tạp chí *Journal of Physics* (Scopus).

- Tiêu đề: Decay of neutron with participation of the light vector boson X17, 2020 *J. Phys.: Conf. Ser.* 1506 012004
- Tiêu đề: Comparison of the contribution of the photon's vector and scalar Kaluza-Klein partners in the neutron lifetime, 2021 *J. Phys.: Conf. Ser.* 1932 012002

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Kaluza, Theodor, 1921, "Zum Unitätsproblem in der Physik", Sitzungsber, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.) (in German)*, 966–972.
2. Klein, Oskar, 1926, "Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie", *Zeitschrift für Physik A* . 37 (12): 895–906.
3. A.Connes, 1994, Noncommutative Geometry, *Academic Press*.
4. A.Connes (IHES, Bures-sur-Yvette), 1995, Noncommutative geometry and reality , *J.Math.Phys.* 36, 6194-6231
5. A. Connes & J. Lott, 1989, Particle models and noncommutative geometry, *Nucl. Phys.Proc. Suppl. B*18 29
6. Giovanni Landi, Nguyen Ai Viet, Kameshwar C. Wali, 1994, Gravity and electromagnetism in noncommutative geometry, *Physics Letters B*, Volume 326, Issues 1–2, Pages 45-50.
7. N. Ai Viet and K.C. Wali, 1995, Magnetic monopole solutions in a modified Einstein-Yang-Mills-Higgs system, *Physical Review D* 51.1664.
8. N.A Viet, 1995, Discrete internal space and its visibility, *Acta Physica Hungarica New Series Heavy Ion Physics.* 1, 3–4 (Jun. 1995), 263–272
9. N.A. Viet, and K.C. Wali, 1996, A discretized version of Kaluza - Klein theory with torsion and massive fields, *International Journal of Modern Physics A*. 2403-2418.
10. N.A. Viet, et al, 2017, Einstein-Yang-Mills-Dirac systems from the discretized Kaluza-Klein theory, *Physical Review D*, 95, 3.

11. Nguyen Van Dat, Nguyen Ai Viet, Pham Tien Du, 2019, Prediction of Weinberg Angle in Discretized Kaluza-Klein Theory, *VNU Journal of Science: Mathematics - Physics*, [S.l.], v. 35, n. 3.
12. Nguyen Van Dat, Nguyen Ai Viet, Pham Tien Du, 2020, Prediction of the Higgs and Top Quark Masses by Discrete Dimensions Revisited, *VNU Journal of Science: Mathematics - Physics*, [S.l.], v. 36, n. 2.
13. A.J. Krasznahorkay, et al, 2016, Observation of anomalous internal pair creation in ^8Be : A possible indication of a light, neutral boson, *Physical Review Letters*. 116 (42501): 042501.
14. Szydagis, Matthew & Levy, C. & Blockinger, Gregory & Kamaha, A. & Parveen, Nishat & Rischbieter, G., 2020, Investigating the XENON1T Low-Energy Electronic Recoil Excess Using NEST.
15. Tran The Anh, Tran Dinh Trong, Attila J. Krasznahorkay, Attila Krasznahorkay, József Molnár, Zoltán Pintye, Nguyen Ai Viet, Nguyen The Nghia, Do Thi Khanh Linh, Bui Thi Hoa, Le Xuan Chung and Nguyen Tuan Anh, 2024, Checking the ^8Be Anomaly with a Two-Arm Electron Positron Pair Spectrometer, *Universe*. 10. 168. 10.3390.
16. B. Fornal and B. Grinstein, 2018, Dark matter interpretation of the neutron decay activity, *Physical Review Letters*, 2018, Vol. 120, Paper 191801.
17. Feng, L. Jonathan, et al, 2016, Protophobic fifth force interpretation of the observed anomaly in ^8Be nuclear transitions, *Physical Review Letters*. 117 (7): 071803.
18. Abbott, Benjamin et al, 2016, Properties of the binary black hole merger GW150914, *Physical Review Letters*, 116 (24): 241102.
19. Ashby, Neil, 2002, Relativity and the Global Positioning System, *Physics Today*, Vol 55, number 5, page 41-47.
20. Dirac, 1930, A Theory of Electrons and Protons, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 126 (801).
21. S. Weinberg, 2002, The Quantum Theory of Fields. Vol. I, *Cambridge University Press*, ISBN 0-521-55001-7.

22. C.N. Yang, R. Mills, 1954, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, *Physical Review*. 96 (1): 191–195.
23. S.L. Glashow, 1961, Partial-symmetries of weak interactions, *Nuclear Physics*. 22 (4): 579–588.
24. S. Weinberg, 1967, A Model of Leptons, *Physical Review Letters*. 19 (21): 1264–1266.
25. A. Salam, N. Svartholm, 1968, Elementary Particle Physics: Relativistic Groups and Analyticity, Eighth Nobel Symposium, *Stockholm: Almqvist and Wiksell*. tr. 367
26. T.D. Lee, C.N. Yang, 1956, Question of Parity Conservation in Weak Interactions, *Physical Review*. 104 (1): 254–258.
27. C.S. Wu, E. Ambler, R.W. Hayward, D.D. Hoppes, R.P. Hudson, 1957, Experimental test of parity conservation in beta decay, *Physical Review*. 105 (4): 1413–1415.
28. M. Y. Han, Y. Nambu, 1965, Three-Triplet Model with Double SU(3) Symmetry, *Phys. Rev.* 139 (4B): B1006–B1010.
29. Higgs, Peter, 1964, Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons, *Physical Review Letters*. 13 (16): 508–509.
30. Nakamura, Kengo; Petcov, Serguey Todorov, 2016, Neutrino mass, mixing, and oscillations, *Chinese Physics C*. 40: 100001
31. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, 1998, *Phys.Lett.* B429 (1998), 263
32. T. Appelquist, H. C. Cheng and B. A. Dobrescu, 2001, Bounds on universal extra dimensions, *Phys. Rev. D* 64 (2001) 035002.
33. F. Zwicky, 1937, On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae, *The Astrophysical Journal*. 86: 217–246.
34. G. Bertone, D. Hooper, J. Silk, 2005, Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints, *Physics Reports*. 405 (5–6): 279–390.

35. Hsin-Chia Cheng, Jonathan L. Feng, and Konstantin T. Matchev, 2002, Kaluza-Klein Dark Matter, *Phys. Rev. Lett.* 89, 211301.
36. D. Banerjee, V.E. Burtsev, A.G. Chumakov, D. Cooke, P. Crivelli, E. Depero, A.V. Dermenev, S.V. Donskov, R.R. Dusaev, T. Enik, M. Charitonidis, 2018, Search for a hypothetical 16.7 MeV gauge boson and dark photons in the NA64 Experiment at CERN. *Physical Review Letters*. 120 (23): 231802.
37. A. J. Krasznahorkay, M. Csatlós, L. Csige, J. Gulyás, A. Krasznahorkay, B. M. Nyakó, I. Rajta, J. Timár, I. Vajda, and N. J. Sas, 2021, New anomaly observed in ^4He supports the existence of the hypothetical X17 particle, *Phys. Rev. C* 104, 044003
38. M.Nakahara, 2003, Geometry, Topology and Physics, *Institute of Physics Publishin*, ISBN 0 7503 0606
39. A.H. Chamseddine, et al, 1993, Gravity in non-commutative geometry, *Communications in Mathematical Physics*. 155, 1 (Jul. 1993), 205–217.
40. A.H. Chamseddine and A. Connes, 1997, The spectral action principle, *Communications in Mathematical Physics*. 186, 3 (1997), 731–750.
41. Nguyen Ai Viet, 2019, Extra dimension of space-time exposed by anomalies at low energy, *arXiv preprint*, arXiv:1907.04517.
42. A. Connes and J. Lott, 1991, Particle models and noncommutative geometry, *Nucl. Phys. B* 18B 29-47
43. Z. Berezhiani, 2019, Neutron lifetime puzzle and neutron–mirror neutron oscillatio, *Eur. Phys. J. C* 79, 484.
44. S. Arzumanov, L. Bondarenko, S. Chernyavsky, P. Geltenbort, V. Morozov, V. V. Nesvizhevsky, Yu. Panin, and A. Strepetov, “A measurement of the neutron lifetime using the method of storage of ultracold neutrons and detection of inelastically upscattered neutrons”, *Physics Letters B*, 2015, Vol. 745, pp. 79–89.
45. J. Byrne and P. G. Dawber, “A revised value for neutron lifetime measured using a Penning trap”, *Europhysics Letters*, 1996, Vol. 33, pp. 187–192.

46. Z. Tang, et al, 2018, Search for the Neutron Decay $n \rightarrow X + \gamma$, Where X is a Dark Matter Particle, *Physical Review Letters*, 121 022505.
47. X. Sun, et al, 2018, Search for dark matter decay of the free neutron from the UCNA experiment, *Physical Review C* 97 052501.
48. Tanabashi M, Hagiwara K, Hikasa K, Nakamura K, Sumino Y, Takahashi F, Tanaka J, Agashe K, Aielli G, Amsler C et al, 2018, Review of Particle Physics, *Physical Review D* 98 030001.
49. A.N. Ivanov, R. Hollwieser, N.I. Troitskaya, M. Wellenzohn and Y.A. Berdnikov, 2019, *Nucl. Phys. B* 938 114130.
50. A. J. Krasznahorkay, M. Csatlós, L. Csige, J. Gulyás, T. J. Ketel, A. Krasznahorkay, I. Kuti, A. Nagy, B. M. Nyakó and N. Sas, et al, 2017, New experimental results for the 17 MeV particle created in ^8Be , *EPJ Web Conf. Volume 137, XIIth Quark Confinement and the Hadron Spectrum*. 08010
51. A. J. Krasznahorkay, M. Csatlós, L. Csige, J. Gulyás, T. J. Ketel, A. Krasznahorkay, I. Kuti, A. Nagy, B. M. Nyakó and N. Sas, et al, On the creation of the 17 MeV X boson in the 17.6 MeV M1 transition of ^8Be , *EPJ Web Conf.* 142 (2017), 01019.
52. Krasznahorkay, Attila and Csatlós, Margit and Csige, Lorant and S. Firak, Daniel and Gulyás, J. and Nagy, Á and Sas, Nandor and Timar, Janos and T.G. Tornyai and A. Krasznahorkay, 2019, On the X17 Light-particle Candidate Observed in Nuclear Transitions, *Acta Physica Polonica B*. 50. 675. 10.5506/APhysPolB.50.675.
53. David Griffiths, 1987, Introduction to Elementary Particles, *John Wiley & Sons Inc*.
54. Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li, David Gross, 1985, Gauge Theory of Elementary Particle Physics. *Physics Today* 1 December 1985; 38 (12): 78–79.

55. N.A. Viet, 2003, Some Remarks on Gravity in Noncommutative Spacetime and a New Solution to the Structure Equations. *arXiv:hep-th/0303128*.
56. N.A. Viet and K.C. Wali, 2003, Chiral spinors and gauge fields in noncommutative curved space-time, *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*.
57. N.A. Viet, and K.C. Wali, 2000, Matter fields in curved space-time, *AIP Conference Proceedings*. 541, 1 (2000), 27–39.
58. N.A. Viet , 2015, General Relativity in noncommutative spacetime as a unified framework for all interactions and the Higgs field. *arXiv:1512.01643*.
59. T.P. Cheng, and L.F. Li, 1984, Gauge theory of elementary particle physics, *Oxford University Press, ISBN 9780198519614*.
60. A. Connes, 1985, Non-commutative differential geometry, *Mathématiques de L'Institut des Hautes Scientifiques*.
61. Alain Connes, 2000, Noncommutative Geometry Year 2000. *arXiv 10.1007/978-3-0346-0425-3*.
62. A. Connes, 1988, The action functional in non-commutative geometry, *Commun.Math. Phys.* **117**, 673–683.
63. M. Alishahiha, 2001, (De)constructing dimensions and non-commutative geometry, *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*. 517, 3–4, 406–414.
64. A.H. Chamseddine, et al, 1993, Gravity in non-commutative geometry, *Communications in Mathematical Physics*, 155, 1 (Jul. 1993), 205–217.
65. A.H. Chamseddine, and A. Connes, 2011, Noncommutative geometric spaces with boundary: Spectral action, *Journal of Geometry and Physics*.
66. A.H. Chamseddine, and A. Connes, 1997, The spectral action principle, *Communications in Mathematical Physics*. 186, 3 (1997), 731–750.

67. R.P. Feynman, 1969, Very high-energy collisions of hadrons, *Physical Review Letters*. 23.1415.
68. Kosheleva, Olga and Kreinovich, Vladik, 2019, Neutron Lifetime Puzzle and Nuclear Stability: A Possible Relation, *Departmental Technical Reports (CS)*. 1338.

PHỤ LỤC

P.1. Đạo hàm dạng-2 , liên thông trong trường hợp cơ bản và độ cong trong trường hợp phi Abel

Chọn trường hợp đặc biệt của hệ cơ sở trực chuẩn.

$$E_\mu^a = e_\mu^a \cdot e \quad (5.1)$$

Ta có:

$$\tilde{E}_\mu^a = E_\mu^a = e_\mu^a \cdot e \quad (5.2)$$

Áp dụng vào ta có các thành phần của connection là:

$$\begin{aligned} \Omega_{abc} &= \frac{1}{2} \left[E_b^\mu E_c^\nu (\partial_\mu E_{a\nu} - \partial_\nu E_{a\mu}) + E_c^\mu E_a^\nu (\partial_\mu E_{b\nu} - \partial_\nu E_{b\mu}) - E_a^\mu E_b^\nu (\partial_\mu E_{c\nu} - \partial_\nu E_{c\mu}) \right] \\ &+ \frac{m}{2} \left[(A_b \cdot E_c^\nu - A_c \cdot E_b^\nu) E_{a\nu} + (A_c \cdot E_a^\nu - A_a \cdot E_c^\nu) E_{b\nu} - (A_a \cdot E_b^\nu - A_b \cdot E_a^\nu) E_{c\nu} + 2(A_a \eta_{bc} - A_b \eta_{ac}) \right] \\ \Omega_{abc} &= \frac{1}{2} \left[E_b^\mu E_c^\nu (\partial_\mu E_{a\nu} - \partial_\nu E_{a\mu}) + E_c^\mu E_a^\nu (\partial_\mu E_{b\nu} - \partial_\nu E_{b\mu}) - E_a^\mu E_b^\nu (\partial_\mu E_{c\nu} - \partial_\nu E_{c\mu}) \right] \\ &+ \frac{m}{2} \left[(A_b \cdot \eta_{ac} - A_c \cdot \eta_{ab}) + (A_c \cdot \eta_{ab} - A_a \cdot \eta_{bc}) - (A_a \cdot \eta_{bc} - A_b \cdot \eta_{ac}) + 2(A_a \eta_{bc} - A_b \eta_{ac}) \right] \\ \Omega_{abc} &= \frac{1}{2} \left[E_b^\mu E_c^\nu (\partial_\mu E_{a\nu} - \partial_\nu E_{a\mu}) + E_c^\mu E_a^\nu (\partial_\mu E_{b\nu} - \partial_\nu E_{b\mu}) - E_a^\mu E_b^\nu (\partial_\mu E_{c\nu} - \partial_\nu E_{c\mu}) \right] \end{aligned}$$

Thành phần thứ 2 của connection:

$$\begin{aligned} \Omega_{ab\dot{5}} &= \frac{1}{4} E_a^\mu E_b^\nu (F_{\mu\nu} \Phi + \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{\Phi}) + \frac{m}{4} \left[(\tilde{A}_\mu \cdot E_a^\mu E_b^\nu - \tilde{A}_\mu E_b^\mu \cdot E_a^\nu) \tilde{\Phi} \right. \\ &\quad \left. - (A_\mu \cdot E_a^\mu E_b^\nu - A_\mu E_b^\mu \cdot E_a^\nu) \Phi \right] (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \\ \Omega_{ab\dot{5}} &= \frac{1}{4} E_a^\mu E_b^\nu (F_{\mu\nu} \Phi + \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{\Phi}) + \frac{m}{4} (E_a^\mu E_b^\nu - E_b^\mu \cdot E_a^\nu) (\tilde{A}_\mu \tilde{\Phi} - A_\mu \Phi) (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \end{aligned}$$

Thành phần thứ 3:

$$\Omega_{\dot{5}ab} = -\frac{1}{4} \left(E_a^\mu E_b^\nu F_{\mu\nu} \Phi + E_a^\mu E_b^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{\Phi} \right) - \frac{m}{4} \left[\left(\tilde{A}_a \cdot E_b^\nu - \tilde{A}_b \cdot E_a^\nu \right) \tilde{\Phi} \right] \left(\tilde{A}_\nu - A_\nu \right)$$

$$\Omega_{\dot{5}ab} = -\frac{1}{4} E_a^\mu E_b^\nu \left(F_{\mu\nu} \Phi + \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{\Phi} \right) - \frac{m}{4} \left(E_a^\mu E_b^\nu - E_b^\mu \cdot E_a^\nu \right) \left(\tilde{A}_\mu \tilde{\Phi} - A_\mu \Phi \right) \left(\tilde{A}_\nu - A_\nu \right)$$

Thành phần thứ tư:

$$\Omega_{\dot{5}b\dot{5}} = \frac{1}{2} \left(\tilde{E}_b^\mu \frac{\partial_\mu \Phi}{\Phi} + E_b^\mu \frac{\partial_\mu \tilde{\Phi}}{\tilde{\Phi}} \right) + \frac{m}{2} \left[\tilde{E}_b^\mu \left(A_\mu - \tilde{A}_\mu \tilde{\Phi}^{-1} \Phi \right) + E_b^\mu \left(\tilde{A}_\mu - A_\mu \Phi^{-1} \tilde{\Phi} \right) \right]$$

$$\Omega_{\dot{5}b\dot{5}} = \frac{1}{2} \left(E_b^\mu \frac{\partial_\mu \Phi}{\Phi} + E_b^\mu \frac{\partial_\mu \tilde{\Phi}}{\tilde{\Phi}} \right) + \frac{m}{2} \left[E_b^\mu \left(A_\mu - \tilde{A}_\mu \tilde{\Phi}^{-1} \Phi \right) + E_b^\mu \left(\tilde{A}_\mu - A_\mu \Phi^{-1} \tilde{\Phi} \right) \right]$$

$$\Omega_{\dot{5}b\dot{5}} = \frac{1}{2\Phi\tilde{\Phi}} E_b^\mu \left(\tilde{\Phi} \partial_\mu \Phi + \Phi \partial_\mu \tilde{\Phi} \right) + \frac{m}{2\Phi\tilde{\Phi}} E_b^\mu \left[\left(A_\mu \Phi \tilde{\Phi} - \tilde{A}_\mu \Phi^2 \right) + \left(\tilde{A}_\mu \Phi \tilde{\Phi} - A_\mu \tilde{\Phi}^2 \right) \right]$$

$$\Omega_{\dot{5}b\dot{5}} = \frac{E_b^\mu}{2\Phi\tilde{\Phi}} \left[\left(\tilde{\Phi} \partial_\mu \Phi + \Phi \partial_\mu \tilde{\Phi} \right) + m \left(A_\mu + \tilde{A}_\mu \right) \Phi \tilde{\Phi} - m \left(\tilde{A}_\mu \Phi^2 + A_\mu \tilde{\Phi}^2 \right) \right]$$

$$\Omega_{\dot{5}b\dot{5}} = \frac{E_b^\mu}{2\Phi\tilde{\Phi}} \left[\left(\tilde{\Phi} \partial_\mu \Phi + \Phi \partial_\mu \tilde{\Phi} \right) + m \left(A_\mu \tilde{\Phi} - \tilde{A}_\mu \Phi \right) \left(\Phi - \tilde{\Phi} \right) \right]$$

Tóm lại:

$$\Omega_{abc} = \frac{1}{2} \left[E_b^\mu E_c^\nu \left(\partial_\mu E_{a\nu} - \partial_\nu E_{a\mu} \right) + E_c^\mu E_a^\nu \left(\partial_\mu E_{b\nu} - \partial_\nu E_{b\mu} \right) - E_a^\mu E_b^\nu \left(\partial_\mu E_{c\nu} - \partial_\nu E_{c\mu} \right) \right]$$

$$\Omega_{ab\dot{5}} = \frac{1}{4} E_a^\mu E_b^\nu \left(F_{\mu\nu} \Phi + \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{\Phi} \right) + \frac{m}{4} \left(E_a^\mu E_b^\nu - E_b^\mu \cdot E_a^\nu \right) \left(\tilde{A}_\mu \tilde{\Phi} - A_\mu \Phi \right) \left(\tilde{A}_\nu - A_\nu \right)$$

$$\Omega_{\dot{5}ab} = -\frac{1}{4} E_a^\mu E_b^\nu \left(F_{\mu\nu} \Phi + \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{\Phi} \right) - \frac{m}{4} \left(E_a^\mu E_b^\nu - E_b^\mu \cdot E_a^\nu \right) \left(\tilde{A}_\mu \tilde{\Phi} - A_\mu \Phi \right) \left(\tilde{A}_\nu - A_\nu \right)$$

$$\Omega_{\dot{5}b\dot{5}} = \frac{E_b^\mu}{2\Phi\tilde{\Phi}} \left[\left(\tilde{\Phi} \partial_\mu \Phi + \Phi \partial_\mu \tilde{\Phi} \right) + m \left(A_\mu \tilde{\Phi} - \tilde{A}_\mu \Phi \right) \left(\Phi - \tilde{\Phi} \right) \right]$$

$$\Omega_{\dot{5}\dot{5}a} = \Omega_{\dot{5}\dot{5}\dot{5}} = 0$$

Từ đây dễ có các $\Omega_{ABC} = \omega_{ABC} \cdot e$ và $\Omega_{abc} = \omega_{abc} \cdot e$ và $\Omega_{\dot{5}ab} = -\Omega_{ab\dot{5}}$ nên:

$$\Omega_{abc} = \tilde{\Omega}_{abc} ; \Omega_{ab\dot{5}} = \tilde{\Omega}_{ab\dot{5}} ; \tilde{\Omega}_{\dot{5}ab} = \Omega_{\dot{5}ab}$$

$$\tilde{\Omega}_{\dot{5}a\dot{5}} = \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} \quad ; \quad \tilde{\Omega}_{\dot{5}\dot{5}\dot{5}} = 0 \quad (5.3)$$

Bây giờ ta tính $D\Omega$ để áp dụng cho phương trình Cartan số hai:

$$\begin{aligned} (D\Omega_{AB})_{cd} &= \frac{1}{2} E_c^\mu E_d^\nu (\partial_\mu E_\nu^e - \partial_\nu E_\mu^e) \Omega_{ABe} - \frac{1}{2} E_c^\mu E_d^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \Phi \Omega_{AB\dot{5}} \\ &+ \frac{1}{2} (E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{ABd} - E_d^\nu \partial_\nu \Omega_{ABc}) + \frac{m}{2} \left[(A_c \cdot E_d^\nu - A_d \cdot E_c^\nu) E_\nu^e \Omega_{ABe} + (A_d \tilde{\Omega}_{ABc} - A_c \tilde{\Omega}_{ABd}) \right. \\ &\quad \left. + (A_c \cdot E_d^\nu - A_d \cdot E_c^\nu) (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \Phi \Omega_{AB\dot{5}} \right] \\ (D\Omega_{AB})_{cd} &= \frac{1}{2} E_c^\mu E_d^\nu (\partial_\mu E_\nu^e - \partial_\nu E_\mu^e) \Omega_{ABe} - \frac{1}{2} E_c^\mu E_d^\nu F_{\mu\nu} \Phi \Omega_{AB\dot{5}} + \frac{1}{2} (E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{ABd} - E_d^\nu \partial_\nu \Omega_{ABc}) \\ &+ \frac{m}{2} \left[A_c (\Omega_{ABd} - \tilde{\Omega}_{ABd}) - A_d (\Omega_{ABc} - \tilde{\Omega}_{ABc}) + (A_c \cdot E_d^\nu - A_d \cdot E_c^\nu) (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \Phi \Omega_{AB\dot{5}} \right] \end{aligned}$$

Thay (5.3) vào ta được:

$$\begin{aligned} (D\Omega_{AB})_{cd} &= \frac{1}{2} E_c^\mu E_d^\nu (\partial_\mu E_\nu^e - \partial_\nu E_\mu^e) \Omega_{ABe} - \frac{1}{2} E_c^\mu E_d^\nu F_{\mu\nu} \Phi \Omega_{AB\dot{5}} \\ &+ \frac{1}{2} (E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{ABd} - E_d^\nu \partial_\nu \Omega_{ABc}) + \frac{m}{2} (A_c \cdot E_d^\nu - A_d \cdot E_c^\nu) (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \Phi \Omega_{AB\dot{5}} \\ (D\Omega_{AB})_{cd} &= \frac{1}{2} E_c^\mu E_d^\nu (\partial_\mu E_\nu^e - \partial_\nu E_\mu^e) \Omega_{ABe} + \frac{1}{2} (E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{ABd} - E_d^\nu \partial_\nu \Omega_{ABc}) - \\ &- \frac{1}{2} E_c^\mu E_d^\nu F_{\mu\nu} \Phi \Omega_{AB\dot{5}} + \frac{m}{2} (A_c \cdot E_d^\nu - A_d \cdot E_c^\nu) (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \Phi \Omega_{AB\dot{5}} \\ \text{Và} \quad (DU)_{b\dot{5}} &= \frac{1}{2} \tilde{E}_b^\mu \left(\frac{\partial_\mu \Phi}{\Phi} U_{\dot{5}} + \partial_\mu U_{\dot{5}} \right) + \frac{m}{2} \left[\Phi^{-1} (\tilde{U}_b - \tilde{E}_b^\mu E_\mu^c U_c) \right] \\ &+ \frac{m}{2} \left[\tilde{E}_b^\mu A_\mu U_{\dot{5}} - \tilde{A}_b (1 + \tilde{\Phi}^{-1} \Phi) U_{\dot{5}} + \tilde{A}_b \tilde{U}_{\dot{5}} \right] \\ (D\Omega_{AB})_{c\dot{5}} &= \frac{1}{2} E_c^\mu \left(\frac{\tilde{\Phi} \partial_\mu \Phi}{\Phi \tilde{\Phi}} \Omega_{AB\dot{5}} + \partial_\mu \Omega_{AB\dot{5}} \right) + \frac{m}{2} \left[\Phi^{-1} (\tilde{\Omega}_{ABc} - \Omega_{ABc}) \right] \\ &+ \frac{m}{2} (A_c \Omega_{AB\dot{5}} - \tilde{A}_c \tilde{\Phi}^{-1} \Phi \Omega_{AB\dot{5}}) \\ (D\Omega_{AB})_{c\dot{5}} &= \frac{1}{2} E_c^\mu \left(\frac{\tilde{\Phi} \partial_\mu \Phi}{\Phi \tilde{\Phi}} \Omega_{AB\dot{5}} + \partial_\mu \Omega_{AB\dot{5}} \right) + \frac{m}{2} (A_\mu E_c^\mu - \tilde{A}_\mu E_c^\mu \tilde{\Phi}^{-1} \Phi) \Omega_{AB\dot{5}} \\ (D\Omega_{AB})_{c\dot{5}} &= \frac{1}{2} E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{AB\dot{5}} + \frac{1}{2\Phi\tilde{\Phi}} E_c^\mu \left[\tilde{\Phi} \partial_\mu \Phi + m (A_\mu \Phi \tilde{\Phi} - \tilde{A}_\mu \Phi^2) \right] \Omega_{AB\dot{5}} \quad (5.4) \end{aligned}$$

Ta có đi tính R_1 như sau, ta có

$$\begin{aligned} R_1 &= \eta^{AC} R_{ABCD} \eta^{BD} = \eta^{AC} (D\Omega_{AB})_{CD} \eta^{BD} + \eta^{AC} \Omega_{AEC} \cdot \Omega_{BD}^E \eta^{BD} \\ &= \eta^{AC} (D\Omega_{AB})_{CD} \eta^{BD} - \eta^{AC} \Omega_{AEC} \cdot \Omega_{BFD} \eta^{BD} \eta^{EF} \end{aligned}$$

Viết ở dạng tường minh như sau:

$$\begin{aligned} R_1 &= [1] \eta^{ac} (D\Omega_{ab})_{cd} \eta^{bd} + [2] \eta^{ac} (D\Omega_{a\dot{s}})_{c\dot{s}} + [3] (D\Omega_{\dot{s}b})_{\dot{s}d} \eta^{bd} \\ &\quad - [4] \eta^{ac} \Omega_{aec} \cdot \Omega_{bfd} \eta^{bd} \eta^{ef} - [5] \eta^{ac} \Omega_{a\dot{s}c} \cdot \Omega_{b\dot{s}d} \eta^{bd} - [6] \Omega_{\dot{s}e\dot{s}} \cdot \Omega_{bfd} \eta^{bd} \eta^{ef} \\ &\quad - [7] \eta^{ac} \Omega_{aec} \cdot \Omega_{\dot{s}f\dot{s}} \eta^{ef} \end{aligned}$$

Ta tính lần lượt bày số hạng của biểu thức trên:

$$[1] = \eta^{ac} (D\Omega_{ab})_{cd} \eta^{bd}$$

$$\begin{aligned} [1] &= \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu (\partial_\mu E_\nu^e - \partial_\nu E_\mu^e) \Omega_{abe} + (E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{abd} - E_d^\nu \partial_\nu \Omega_{abc}) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu F_{\mu\nu} - m(A_c \cdot E_d^\nu - A_d \cdot E_c^\nu)(\tilde{A}_\nu - A_\nu) \right] \Phi \Omega_{ab\dot{s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1] &= \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu (\partial_\mu E_\nu^e - \partial_\nu E_\mu^e) \Omega_{abe} + (E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{abd} - E_d^\nu \partial_\nu \Omega_{abc}) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu F_{\mu\nu} - m(A_\mu \cdot E_c^\mu E_d^\nu - A_\mu \cdot E_d^\mu E_c^\nu)(\tilde{A}_\nu - A_\nu) \right] \Phi \Omega_{ab\dot{s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1] &= \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu (\partial_\mu E_\nu^e - \partial_\nu E_\mu^e) \Omega_{abe} + (E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{abd} - E_d^\nu \partial_\nu \Omega_{abc}) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu F_{\mu\nu} - m(E_c^\mu E_d^\nu - E_d^\mu E_c^\nu) A_\mu (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \right] \Phi \Omega_{ab\dot{s}} \end{aligned}$$

Số hạng thứ nhất trong [1] chỉ chứa E_μ^a đóng góp vào độ cong vô hướng, mà ta không xét ở đây. Nên ta chỉ quan tâm đến số hạng thứ 2.

Số hạng thứ 2 và 3:

$$[2] = \eta^{ac} (D\Omega_{a\dot{s}})_{c\dot{s}} = [3]$$

$$[2] = \frac{1}{2} \eta^{ac} E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{a\dot{s}\dot{s}} + \frac{1}{2\Phi\tilde{\Phi}} \eta^{ac} E_c^\mu \left[\tilde{\Phi} \partial_\mu \Phi + m(A_\mu \Phi \tilde{\Phi} - \tilde{A}_\mu \Phi^2) \right] \Omega_{a\dot{s}\dot{s}}$$

$$[2] = -\frac{1}{2}\eta^{ac}E_c^\mu\partial_\mu\Omega_{\dot{5}a\dot{5}} - \frac{1}{2\Phi\tilde{\Phi}}\eta^{ac}E_c^\mu\left[\tilde{\Phi}\partial_\mu\Phi + m(A_\mu\Phi\tilde{\Phi} - \tilde{A}_\mu\Phi^2)\right]\Omega_{\dot{5}a\dot{5}}$$

Số hạng thứ 4:

$$[4] = \eta^{ac}\Omega_{aec}\cdot\Omega_{bfd}\eta^{bd}\eta^{ef}$$

$$[4] = \eta^{ac}\left[\frac{1}{2}E_e^\mu E_c^\nu(\partial_\mu E_{av} - \partial_\nu E_{a\mu}) + \frac{1}{2}E_c^\mu E_a^\nu(\partial_\mu E_{ev} - \partial_\nu E_{e\mu})\right]\cdot\Omega_{bfd}\eta^{bd}\eta^{ef}$$

$$\left[-\frac{1}{2}E_a^\mu E_e^\nu(\partial_\mu E_{cv} - \partial_\nu E_{c\mu})\right]$$

$$[4] = \left[\frac{1}{2}E_e^\mu E^{av}(\partial_\mu E_{av} - \partial_\nu E_{a\mu}) + \frac{1}{2}G^{\mu\nu}(\partial_\mu E_{ev} - \partial_\nu E_{e\mu})\right]\cdot\Omega_{bfd}\eta^{bd}\eta^{ef}$$

$$\left[-\frac{1}{2}E^{c\mu}E_e^\nu(\partial_\mu E_{cv} - \partial_\nu E_{c\mu})\right]$$

$$[4] = \left[E_e^\mu E^{av}(\partial_\mu E_{av} - \partial_\nu E_{a\mu}) + \frac{1}{2}G^{\mu\nu}(\partial_\mu E_{ev} - \partial_\nu E_{e\mu})\right]\cdot\Omega_{bfd}\eta^{bd}\eta^{ef}$$

$$[4] = E^{c\mu}E^{av}(\partial_\mu E_{av} - \partial_\nu E_{a\mu})\Omega_{bcd}\eta^{bd} + \frac{1}{2}G^{\mu\nu}(\partial_\mu E_\nu^c - \partial_\nu E_\mu^c)\cdot\Omega_{bcd}\eta^{bd}$$

$$[4] = E^{c\mu}E^{av}(\partial_\mu E_{av} - \partial_\nu E_{a\mu})\Omega_{bcd}\eta^{bd}$$

Số hạng thứ 2 trong [4] bằng không do $G^{\mu\nu}$ không đổi khi đổi chỗ μ, ν .

Như vậy [4] cũng chỉ cho đóng góp vào độ cong vô hướng.

Số hạng số 5:

$$[5] = \eta^{ac}\Omega_{a\dot{5}c}\cdot\Omega_{b\dot{5}d}\eta^{bd} = (\eta^{ac}\Omega_{a\dot{5}c})^2 = (-\eta^{ac}\Omega_{\dot{5}ac})^2 = 0$$

Do $\Omega_{\dot{5}ac}$ phản xứng với 2 chỉ số a, c nên

$$\eta^{ac}\Omega_{\dot{5}ac} = -\eta^{ac}\Omega_{\dot{5}ca} = \eta^{ca}\Omega_{\dot{5}ca} = \eta^{ac}\Omega_{\dot{5}ca} = 0$$

Số hạng thứ 6 và 7:

$$[6] = \Omega_{\dot{5}e\dot{5}}\cdot\Omega_{bfd}\eta^{bd}\eta^{ef} = [7]$$

Tổng hợp lại ta có:

$$\begin{aligned}
R_1 = & \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu (\partial_\mu E_\nu^e - \partial_\nu E_\mu^e) \Omega_{abe} + (E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{abd} - E_d^\nu \partial_\nu \Omega_{abc}) \right] \\
& - \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu F_{\mu\nu} - m (E_c^\mu E_d^\nu - E_d^\mu E_c^\nu) A_\mu (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \right] \Phi \Omega_{ab\dot{5}} \\
& - \eta^{ac} E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} - \frac{1}{\Phi \tilde{\Phi}} \eta^{ac} E_c^\mu \left[\tilde{\Phi} \partial_\mu \Phi + m (A_\mu \Phi \tilde{\Phi} - \tilde{A}_\mu \Phi^2) \right] \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} \\
& - E^{c\mu} E^{a\nu} (\partial_\mu E_{a\nu} - \partial_\nu E_{a\mu}) \Omega_{bcd} \eta^{bd} - 2 \Omega_{\dot{5}e\dot{5}} \cdot \Omega_{b\dot{f}\dot{d}} \eta^{bd} \eta^{ef} \\
R_1 = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1[1] & 0 \\ 0 & r_2[1] \end{pmatrix} - \eta^{ac} E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} - \frac{1}{\Phi \tilde{\Phi}} \eta^{ac} E_c^\mu \left[\tilde{\Phi} \partial_\mu \Phi + m (A_\mu \Phi \tilde{\Phi} - \tilde{A}_\mu \Phi^2) \right] \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} \\
& - 2 \Omega_{\dot{5}e\dot{5}} \cdot \Omega_{b\dot{f}\dot{d}} \eta^{bd} \eta^{ef} - \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu F_{\mu\nu} - m (E_c^\mu E_d^\nu - E_d^\mu E_c^\nu) A_\mu (\tilde{A}_\nu - A_\nu) \right] \Phi \Omega_{ab\dot{5}}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Tương tự ta tính R_2 như sau:

$$\begin{aligned}
R_2 = & \eta^{AD} (D\Omega_{AB})_{CD} \eta^{BC} + \eta^{AD} \Omega_{AEC} \cdot \Omega_{BD}^E \eta^{BC} \\
= & \eta^{AD} (D\Omega_{AB})_{CD} \eta^{BC} - \eta^{AD} \Omega_{AEC} \cdot \Omega_{BFD} \eta^{BC} \eta^{EF} \\
= & -\eta^{AD} (D\Omega_{AB})_{DC} \eta^{BC} - \eta^{AD} \Omega_{AEC} \cdot \Omega_{BFD} \eta^{BC} \eta^{EF}
\end{aligned}$$

Như vậy các số hạng chứa $(D\Omega_{AB})_{DC}$ sẽ tương tự trong R_1 với dấu trừ:

$$\begin{aligned}
R_2 = & [1'] \eta^{ac} (D\Omega_{ab})_{cd} \eta^{bd} + [2'] \eta^{ac} (D\Omega_{a\dot{5}})_{c\dot{5}} + [3'] (D\Omega_{\dot{5}b})_{\dot{5}d} \eta^{bd} - [4'] \eta^{ad} \Omega_{aec} \cdot \Omega_{b\dot{f}\dot{d}} \eta^{bc} \eta^{ef} \\
& - [5'] \eta^{ad} \Omega_{a\dot{5}c} \cdot \Omega_{b\dot{5}d} \eta^{bc} - [6'] \Omega_{\dot{5}ec} \cdot \Omega_{b\dot{f}\dot{5}} \eta^{bc} \eta^{ef} - [7'] \eta^{ad} \Omega_{ae\dot{5}} \cdot \Omega_{\dot{5}fd} \eta^{ef}
\end{aligned}$$

Như vậy ta có:

$$\begin{aligned}
[1'] = & -[1] \\
[2'] = & [3'] = -[2] \\
[4'] = & \eta^{ad} \Omega_{aec} \cdot \Omega_{b\dot{f}\dot{d}} \eta^{bc} \eta^{ef}
\end{aligned}$$

Số hạng này cho đóng góp vào độ cong vô hướng Ricci thông thường.

$$\begin{aligned}
[5'] = & \eta^{ad} \Omega_{a\dot{5}c} \cdot \Omega_{b\dot{5}d} \eta^{bc} \\
[5'] = & \eta^{ad} \Omega_{\dot{5}ac} \cdot \Omega_{\dot{5}bd} \eta^{bc}
\end{aligned}$$

$$[5'] = \eta^{ad} \Omega_{ac\dot{5}} \cdot \Omega_{bd\dot{5}} \eta^{bc}$$

Số hạng thứ 6,7:

$$[6'] = [7'] = \eta^{ad} \Omega_{ae\dot{5}} \cdot \Omega_{\dot{5}fd} \eta^{ef} = -\eta^{ad} \Omega_{ac\dot{5}} \cdot \Omega_{bd\dot{5}} \eta^{bc}$$

Như vậy kết hợp lại ta thu được:

$$\begin{aligned} R_2 = & -\frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu \left(\partial_\mu E_\nu^e - \partial_\nu E_\mu^e \right) \Omega_{abe} + \left(E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{abd} - E_d^\nu \partial_\nu \Omega_{abc} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu F_{\mu\nu} - m \left(E_c^\mu E_d^\nu - E_d^\mu E_c^\nu \right) A_\mu \left(\tilde{A}_\nu - A_\nu \right) \right] \Phi \Omega_{ab\dot{5}} \\ & + \eta^{ac} E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} + \frac{1}{\Phi \tilde{\Phi}} \eta^{ac} E_c^\mu \left[\tilde{\Phi} \partial_\mu \Phi + m \left(A_\mu \Phi \tilde{\Phi} - \tilde{A}_\mu \Phi^2 \right) \right] \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} \\ & - \eta^{ad} \Omega_{aec} \cdot \Omega_{bfd} \eta^{bc} \eta^{ef} + \eta^{ad} \Omega_{ac\dot{5}} \cdot \Omega_{bd\dot{5}} \eta^{bc} \end{aligned}$$

Vậy ta thu được

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1[2] & 0 \\ 0 & r_2[2] \end{pmatrix} + \eta^{ac} E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} + \frac{1}{\Phi \tilde{\Phi}} \eta^{ac} E_c^\mu \left[\tilde{\Phi} \partial_\mu \Phi + m \left(A_\mu \Phi \tilde{\Phi} - \tilde{A}_\mu \Phi^2 \right) \right] \Omega_{\dot{5}a\dot{5}} \\ & + \eta^{ad} \Omega_{ac\dot{5}} \cdot \Omega_{bd\dot{5}} \eta^{bc} + \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \left[E_c^\mu E_d^\nu F_{\mu\nu} - m \left(E_c^\mu E_d^\nu - E_d^\mu E_c^\nu \right) A_\mu \left(\tilde{A}_\nu - A_\nu \right) \right] \Phi \Omega_{ab\dot{5}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

P.2. Tính tensor độ cong trong trường hợp abel

Xét trường hợp đơn giản $A_\mu = 0$; $\Phi = 1 \Rightarrow F_{\mu\nu} = 0$

Ta sẽ đi tính lần lượt R_1 , R_2 , ta có

$$\begin{aligned} R_1 &= \eta^{AC} R_{ABCD} \eta^{BD} = \eta^{AC} \left(D \Omega_{AB} \right)_{CD} \eta^{BD} + \eta^{AC} \Omega_{AEC} \cdot \Omega_{BD}^E \eta^{BD} \\ &= \eta^{AC} \left(D \Omega_{AB} \right)_{CD} \eta^{BD} - \eta^{AC} \Omega_{AEC} \cdot \Omega_{BFD} \eta^{BD} \eta^{EF} \\ R_1 &= [1] \eta^{ac} \left(D \Omega_{ab} \right)_{cd} \eta^{bd} + [2] \eta^{ac} \left(D \Omega_{a\dot{5}} \right)_{c\dot{5}} + [3] \left(D \Omega_{\dot{5}b} \right)_{\dot{5}d} \eta^{bd} - [4] \eta^{ac} \Omega_{aec} \cdot \Omega_{bfd} \eta^{bd} \eta^{ef} \\ &\quad - [5] \eta^{ac} \Omega_{a\dot{5}c} \cdot \Omega_{b\dot{5}d} \eta^{bd} - [6] \Omega_{\dot{5}e\dot{5}} \cdot \Omega_{bfd} \eta^{bd} \eta^{ef} - [7] \eta^{ac} \tilde{\Omega}_{aec} \cdot \Omega_{\dot{5}f\dot{5}} \eta^{ef} \end{aligned}$$

Khi đó các thành phần của connection còn lại:

$$\Omega_{abc} = \frac{1}{2} \left[E_b^\mu E_c^\nu \left(\partial_\mu E_{a\nu} - \partial_\nu E_{a\mu} \right) + E_c^\mu E_a^\nu \left(\partial_\mu E_{b\nu} - \partial_\nu E_{b\mu} \right) - E_a^\mu E_b^\nu \left(\partial_\mu E_{c\nu} - \partial_\nu E_{c\mu} \right) \right]$$

$$\Omega_{ab\dot{5}} = \frac{m}{4} \left[\left(\tilde{E}_a^\mu E_{b\mu} - \tilde{E}_b^\mu E_{a\mu} \right) + \left(E_a^\mu \tilde{E}_{b\mu} - E_b^\mu \tilde{E}_{a\mu} \right) \right]$$

$$\Omega_{\dot{5}ab} = \frac{m}{4} \left[4\eta_{ab} - 3\tilde{E}_b^\mu E_{a\mu} + E_b^\mu \tilde{E}_{a\mu} - \tilde{E}_a^\mu E_{b\mu} - E_a^\mu \tilde{E}_{b\mu} \right]$$

$$\Omega_{\dot{5}b\dot{5}} = 0 = \Omega_{\dot{5}\dot{5}\dot{5}}$$

Sử dụng (2.19) trong trường hợp đặc biệt đang xét:

$$D(\Omega_{AB})_{cd} = \frac{1}{2} E_c^\mu E_d^\nu (\partial_\mu E_\nu^e - \partial_\nu E_\mu^e) \Omega_{ABe} + \frac{1}{2} (E_c^\mu \partial_\mu \Omega_{ABd} - E_d^\nu \partial_\nu \Omega_{ABc})$$

$$(D\Omega_{AB})_{c\dot{5}} = \frac{1}{2} \tilde{E}_c^\mu \partial_\mu \Omega_{AB\dot{5}} + \frac{m}{2} (\tilde{\Omega}_{ABc} - \tilde{E}_c^\mu E_\mu^d \Omega_{ABd})$$

Áp dụng các biểu thức của connection ta tính lần lượt 7 số hạng:

Số hạng thứ [1,4] đóng góp vào phần Gravity ta không tính:

Số hạng [6]; [7] đều bằng 0.

Số hạng 2,3 bằng nhau:

$$\begin{aligned} [2] + [3] &= 2\eta^{ac} (D\Omega_{a\dot{5}})_{c\dot{5}} = 2\eta^{ac} \frac{1}{2} \tilde{E}_c^\mu \partial_\mu \Omega_{a\dot{5}\dot{5}} + 2\eta^{ac} \frac{m}{2} (\tilde{\Omega}_{a\dot{5}c} - \tilde{E}_c^\mu E_\mu^d \Omega_{a\dot{5}d}) \\ &= m\eta^{ac} (\tilde{\Omega}_{a\dot{5}c} - \tilde{E}_c^\mu E_\mu^d \Omega_{a\dot{5}d}) \\ &= m\eta^{ac} (\tilde{E}_c^\mu E_\mu^d \Omega_{\dot{5}ad} - \tilde{\Omega}_{\dot{5}ac}) \\ &= \frac{m^2}{4} \eta^{ac} \tilde{E}_c^\nu E_\nu^d (4\eta_{ad} - 3\tilde{E}_d^\mu E_{a\mu} + E_d^\mu \tilde{E}_{a\mu} - \tilde{E}_a^\mu E_{d\mu} - E_a^\mu \tilde{E}_{d\mu}) - \\ &\quad - \frac{m^2}{4} \eta^{ac} (4\eta_{ac} - 3E_c^\mu \tilde{E}_{a\mu} + \tilde{E}_c^\mu E_{a\mu} - E_a^\mu \tilde{E}_{c\mu} - \tilde{E}_a^\mu E_{c\mu}) \\ &= \frac{m^2}{4} (\tilde{E}^{av} E_\nu^d (4\eta_{ad} - 3\tilde{E}_d^\mu E_{a\mu} + E_d^\mu \tilde{E}_{a\mu} - \tilde{E}_a^\mu E_{d\mu} - E_a^\mu \tilde{E}_{d\mu}) - (16 - 4E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m^2}{4} \left(4\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} - 3\tilde{E}^{a\mu} E_{\mu}^d \tilde{E}_d^{\nu} E_{a\nu} + \tilde{E}^{a\mu} E_{\mu}^d E_d^{\nu} \tilde{E}_{a\nu} - \tilde{E}^{a\mu} E_{\mu}^d \tilde{E}_a^{\nu} E_{d\nu} - \tilde{E}^{a\mu} E_{\mu}^d E_a^{\nu} \tilde{E}_{d\nu} - 16 + 4E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} \right) \\
&= \frac{m^2}{4} \left(4\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} - 3E_{a\nu} \tilde{E}^{a\mu} E_{\mu}^d \tilde{E}_d^{\nu} + \tilde{E}^{a\mu} \tilde{E}_{a\nu} E_{\mu}^d E_d^{\nu} - \tilde{E}^{a\mu} \tilde{E}_a^{\nu} E_{\mu}^d E_{d\nu} - \tilde{E}^{a\mu} E_a^{\nu} \tilde{E}_{d\nu} E_{\mu}^d - 16 + 4E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} \right) \\
&= \frac{m^2}{4} \left(-16 + 4E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} + 4\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} - 3E_{a\nu} \tilde{E}^{a\mu} E_{\mu}^d \tilde{E}_d^{\nu} - \tilde{E}^{a\mu} E_a^{\nu} \tilde{E}_{d\nu} E_{\mu}^d - \tilde{G}^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \delta_{\mu}^{\nu} \delta_{\nu}^{\mu} \right) \\
[2] + [3] &= \frac{m^2}{4} \left(-12 + 4E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} + 4\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} - 3E_{a\nu} \tilde{E}^{a\mu} E_{\mu}^d \tilde{E}_d^{\nu} - \tilde{E}^{a\mu} E_a^{\nu} \tilde{E}_{d\nu} E_{\mu}^d - \tilde{G}^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right)
\end{aligned}$$

Số hạng thứ 5:

$$\begin{aligned}
[5] &= \eta^{ac} \Omega_{a\dot{5}c} \cdot \Omega_{b\dot{5}d} \eta^{bd} = \left(\eta^{ac} \Omega_{a\dot{5}c} \right)^2 = \frac{m^2}{16} \left[16 - 4\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} \right]^2 \\
&= m^2 \left[16 - 8\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} + \left(\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned}
R_1 &= R_{4.1} + \frac{m^2}{4} \left(-12 + 4E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} + 4\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} - 3E_{a\nu} \tilde{E}^{a\mu} E_{\mu}^d \tilde{E}_d^{\nu} - \tilde{E}^{a\mu} E_a^{\nu} \tilde{E}_{d\nu} E_{\mu}^d - \tilde{G}^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right) \\
&\quad - m^2 \left[16 - 8\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} + \left(\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Tính R_2 tương tự như trên:

$$\begin{aligned}
R_2 &= \eta^{AD} R_{ABCD} \eta^{BC} = \eta^{AD} (D\Omega_{AB})_{CD} \eta^{BC} + \eta^{AD} \Omega_{AEC} \cdot \Omega_{BD}^E \eta^{BC} \\
&= \eta^{AD} (D\Omega_{AB})_{CD} \eta^{BC} - \eta^{AD} \Omega_{AEC} \cdot \Omega_{BFD} \eta^{BC} \eta^{EF} \\
&= -\eta^{AD} (D\Omega_{BA})_{CD} \eta^{BC} - \eta^{AD} \Omega_{AEC} \cdot \Omega_{BFD} \eta^{BC} \eta^{EF}
\end{aligned}$$

Như vậy các số hạng chứa $(D\Omega_{AB})_{DC}$ sẽ tương tự trong R_1 với dấu trừ:

$$\begin{aligned}
R_2 &= -[1'] \eta^{ac} (D\Omega_{ab})_{cd} \eta^{bd} - [2'] \eta^{ac} (D\Omega_{a\dot{5}})_{c\dot{5}} - [3'] (D\Omega_{\dot{5}b})_{\dot{5}d} \eta^{bd} \\
&\quad - [4'] \eta^{ad} \Omega_{aec} \cdot \Omega_{bfd} \eta^{bc} \eta^{ef} - [5'] \eta^{ad} \Omega_{a\dot{5}c} \cdot \Omega_{b\dot{5}d} \eta^{bc} - [6'] \tilde{\Omega}_{\dot{5}ec} \cdot \Omega_{bf\dot{5}} \eta^{bc} \eta^{ef} \\
&\quad - [7'] \eta^{ad} \Omega_{ae\dot{5}} \cdot \Omega_{\dot{5}fd} \eta^{ef}
\end{aligned}$$

Số hạng 1, 4 cũng cho vào $R_{4.2}$

Số hạng $[2']; [3']$:

$$[2'] + [3'] = -\frac{m^2}{4} \left(-12 + 4E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} + 4\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} - 3E_{av} \tilde{E}^{a\mu} E_{\mu}^d \tilde{E}_d^v - \tilde{E}^{a\mu} E_a^v \tilde{E}_{dv} E_{\mu}^d - \tilde{G}^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right)$$

Cuối cùng số hạng thứ 5 thì sẽ khác:

$$[5'] = \eta^{ad} \Omega_{a\dot{s}c} \cdot \Omega_{b\dot{s}d} \eta^{bc} = \frac{m^2}{16} \eta^{ad} \left[4\eta_{ac} - 3\tilde{E}_c^{\mu} E_{a\mu} + E_c^{\mu} \tilde{E}_{a\mu} - \tilde{E}_a^{\mu} E_{c\mu} - E_a^{\mu} \tilde{E}_{c\mu} \right] \\ \times \left[4\eta_{bd} - 3\tilde{E}_d^{\nu} E_{b\nu} + E_d^{\nu} \tilde{E}_{b\nu} - \tilde{E}_b^{\nu} E_{d\nu} - E_b^{\nu} \tilde{E}_{d\nu} \right] \eta^{bc}$$

$$[5'] = \frac{m^2}{16} \left[4\delta_c^d - 3\tilde{E}_c^{\mu} E_{\mu}^d + E_c^{\mu} \tilde{E}_{\mu}^d - \tilde{E}^{d\mu} E_{c\mu} - E^{d\mu} \tilde{E}_{c\mu} \right] \\ \cdot \left[4\delta_d^c - 3\tilde{E}_d^{\nu} E_{\nu}^c + E_d^{\nu} \tilde{E}_{\nu}^c - \tilde{E}^{c\nu} E_{d\nu} - E^{c\nu} \tilde{E}_{d\nu} \right]$$

$$[5'] = \frac{m^2}{16} \left[4\delta_a^b - 3\tilde{E}_a^{\mu} E_{\mu}^b + E_a^{\mu} \tilde{E}_{\mu}^b - E_{a\mu} \tilde{E}^{b\mu} - \tilde{E}_{a\mu} E^{b\mu} \right] \\ \cdot \left[4\delta_b^a - 3E_{\nu}^a \tilde{E}_b^{\nu} + \tilde{E}_{\nu}^a E_b^{\nu} - \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} - E^{a\nu} \tilde{E}_{b\nu} \right]$$

$$[5'] = \frac{4m^2}{16} \left[4\delta_b^a \delta_a^b - 3\delta_b^a \tilde{E}_a^{\mu} E_{\mu}^b + \delta_b^a E_a^{\mu} \tilde{E}_{\mu}^b - \delta_b^a E_{a\mu} \tilde{E}^{b\mu} - \delta_b^a \tilde{E}_{a\mu} E^{b\mu} \right] \\ - \frac{3m^2}{16} \left[4\delta_a^b E_{\nu}^a \tilde{E}_b^{\nu} - 3\tilde{E}_a^{\mu} E_{\mu}^b E_{\nu}^a \tilde{E}_b^{\nu} + E_a^{\mu} \tilde{E}_{\mu}^b E_{\nu}^a \tilde{E}_b^{\nu} - E_{a\mu} \tilde{E}^{b\mu} E_{\nu}^a \tilde{E}_b^{\nu} - \tilde{E}_{a\mu} E^{b\mu} E_{\nu}^a \tilde{E}_b^{\nu} \right] \\ + \frac{m^2}{16} \left[4\delta_a^b \tilde{E}_{\nu}^a E_b^{\nu} - 3\tilde{E}_a^{\mu} E_{\mu}^b \tilde{E}_{\nu}^a E_b^{\nu} + E_a^{\mu} \tilde{E}_{\mu}^b \tilde{E}_{\nu}^a E_b^{\nu} - E_{a\mu} \tilde{E}^{b\mu} \tilde{E}_{\nu}^a E_b^{\nu} - \tilde{E}_{a\mu} E^{b\mu} \tilde{E}_{\nu}^a E_b^{\nu} \right] \\ - \frac{m^2}{16} \left[4\delta_a^b \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} - 3\tilde{E}_a^{\mu} E_{\mu}^b \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} + E_a^{\mu} \tilde{E}_{\mu}^b \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} - E_{a\mu} \tilde{E}^{b\mu} \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} - \tilde{E}_{a\mu} E^{b\mu} \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} \right] \\ - \frac{m^2}{16} \left[4\delta_a^b E^{a\nu} \tilde{E}_{b\nu} - 3\tilde{E}_a^{\mu} E_{\mu}^b E^{a\nu} \tilde{E}_{b\nu} + E_a^{\mu} \tilde{E}_{\mu}^b E^{a\nu} \tilde{E}_{b\nu} - E_{a\mu} \tilde{E}^{b\mu} E^{a\nu} \tilde{E}_{b\nu} - \tilde{E}_{a\mu} E^{b\mu} E^{a\nu} \tilde{E}_{b\nu} \right]$$

$$[5'] = \frac{m^2}{4} \left[16 - 3\tilde{E}_a^{\mu} E_{\mu}^a + E_a^{\mu} \tilde{E}_{\mu}^a - E_{a\mu} \tilde{E}^{a\mu} - \tilde{E}_{a\mu} E^{a\mu} \right] \\ - \frac{3m^2}{16} \left[4E_{\nu}^a \tilde{E}_a^{\nu} - 3\tilde{E}_a^{\mu} E_{\nu}^a E_{\mu}^b \tilde{E}_b^{\nu} + 4 - G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} - \tilde{E}_{a\mu} E_{\nu}^a E^{b\mu} \tilde{E}_b^{\nu} \right] \\ + \frac{m^2}{16} \left[4\tilde{E}_{\nu}^a E_a^{\nu} - 3.4 + E_a^{\mu} \tilde{E}_{\nu}^a \tilde{E}_{\mu}^b E_b^{\nu} - E_{a\mu} \tilde{E}_{\nu}^a \tilde{E}^{b\mu} E_b^{\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right] \\ - \frac{m^2}{16} \left[4\tilde{E}^{a\nu} E_{a\nu} - 3G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} + E_a^{\mu} \tilde{E}^{a\nu} \tilde{E}_{\mu}^b E_{b\nu} - E_{a\mu} \tilde{E}^{a\nu} \tilde{E}^{b\mu} E_{b\nu} - 4 \right] \\ - \frac{m^2}{16} \left[4E^{a\nu} \tilde{E}_{b\nu} - 3\tilde{E}_a^{\mu} E^{a\nu} E_{\mu}^b \tilde{E}_{b\nu} + \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - 4 - \tilde{E}_{a\mu} E^{a\nu} E^{b\mu} \tilde{E}_{b\nu} \right]$$

$$\begin{aligned}
[5'] &= \frac{m^2}{16} \left[64 - 16E_{a\mu} \tilde{E}^{a\mu} \right] \\
&- \frac{m^2}{16} \left[12E_{a\nu} \tilde{E}^{a\nu} - 9E_{a\nu} \tilde{E}^{a\mu} E_{b\mu} \tilde{E}^{b\nu} + 12 - 3G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} - 3\tilde{E}_{a\mu} E_{\nu}^a E^{b\mu} \tilde{E}_b^{\nu} \right] \\
&+ \frac{m^2}{16} \left[4E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} - 3.4 + E^{a\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \tilde{E}_{b\mu} - E_{a\mu} \tilde{E}_{\nu}^a \tilde{E}^{b\mu} E_b^{\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right] \\
&- \frac{m^2}{16} \left[4E_{a\mu} \tilde{E}^{a\mu} - 3G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} + E_a^{\mu} \tilde{E}^{a\nu} \tilde{E}_{\mu}^b E_{b\nu} - E_{a\mu} \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} \tilde{E}^{b\mu} - 4 \right] \\
&- \frac{m^2}{16} \left[4E^{a\mu} \tilde{E}_{b\mu} - 3\tilde{E}_a^{\mu} E^{a\nu} E_{\mu}^b \tilde{E}_{b\nu} + \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - 4 - \tilde{E}_{a\mu} E^{a\nu} E^{b\mu} \tilde{E}_{b\nu} \right] \\
\frac{16}{m^2} [5'] &= 64 - 16E_{a\mu} \tilde{E}^{a\mu} \\
&- 12E_{a\nu} \tilde{E}^{a\nu} + 9E_{a\nu} \tilde{E}^{a\mu} E_{b\mu} \tilde{E}^{b\nu} - 12 + 3G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} + 3\tilde{E}_{a\mu} E_{\nu}^a E^{b\mu} \tilde{E}_b^{\nu} \\
&+ 4E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} - 3.4 + E^{a\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \tilde{E}_{b\mu} - E_{a\mu} \tilde{E}_{\nu}^a \tilde{E}^{b\mu} E_b^{\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \\
&- 4E_{a\mu} \tilde{E}^{a\mu} + 3G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} - E_a^{\mu} \tilde{E}^{a\nu} \tilde{E}_{\mu}^b E_{b\nu} + E_{a\mu} \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} \tilde{E}^{b\mu} + 4 \\
&- 4E^{a\mu} \tilde{E}_{b\mu} + 3\tilde{E}_a^{\mu} E^{a\nu} E_{\mu}^b \tilde{E}_{b\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + 4 + \tilde{E}_{a\mu} E^{a\nu} E^{b\mu} \tilde{E}_{b\nu} \\
\frac{16}{m^2} [5'] &= 48 - 32E_{a\mu} \tilde{E}^{a\mu} + 6G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} - 2\tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \\
&+ 10E_{a\mu} \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} \tilde{E}^{b\mu} + 2E^{a\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \tilde{E}_{b\mu} + 4E_{a\mu} \tilde{E}_{\nu}^a E_b^{\nu} \tilde{E}^{b\mu} \\
[5'] &= \frac{m^2}{8} \left[24 - 16E_{a\mu} \tilde{E}^{a\mu} + 3G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + 5E_{a\mu} \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} \tilde{E}^{b\mu} \right. \\
&\left. + E^{a\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \tilde{E}_{b\mu} + 2E_{a\mu} \tilde{E}_{\nu}^a E_b^{\nu} \tilde{E}^{b\mu} \right]
\end{aligned}$$

Với chú ý khi có chỉ số c,d tiêu trên dưới ta có thể trao vị trí trên dưới:

$$\tilde{E}_c^{\mu} E_{\nu}^c = \eta_{ac} \tilde{E}^{a\mu} \eta^{bc} E_{b\nu} = \delta_a^b \tilde{E}^{a\mu} E_{b\nu} = \tilde{E}^{a\mu} E_{a\nu}$$

Sô hạng thứ 6,7 là:

$$\begin{aligned}
[6'] + [7'] &= \tilde{\Omega}_{\dot{5}ec} \cdot \Omega_{bf\dot{5}} \eta^{bc} \eta^{ef} + \Omega_{ae\dot{5}} \cdot \Omega_{\dot{5}fd} \eta^{ad} \eta^{ef} = \tilde{\Omega}_{\dot{5}bd} \cdot \Omega_{ac\dot{5}} \eta^{ad} \eta^{bc} + \Omega_{ac\dot{5}} \cdot \Omega_{\dot{5}bd} \eta^{ad} \eta^{bc} \\
&= \Omega_{ac\dot{5}} \left(\tilde{\Omega}_{\dot{5}bd} + \Omega_{\dot{5}bd} \right) \eta^{ad} \eta^{bc}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[6'] + [7'] &= \frac{m^2}{16} \eta^{ad} \eta^{bc} \left[\tilde{E}_a^\nu E_{c\nu} - E_{a\nu} \tilde{E}_c^\nu + E_a^\nu \tilde{E}_{c\nu} - \tilde{E}_{a\nu} E_c^\nu \right] \\
&\times \left(4\eta_{bd} - 3\tilde{E}_{b\mu} E_d^\mu + E_{b\mu} \tilde{E}_d^\mu - E_b^\mu \tilde{E}_{d\mu} - \tilde{E}_b^\mu E_{d\mu} \right) \\
&\times \left(+4\eta_{bd} - 3E_{b\mu} \tilde{E}_d^\mu + \tilde{E}_{b\mu} E_d^\mu - \tilde{E}_b^\mu E_{d\mu} - E_b^\mu \tilde{E}_{d\mu} \right) \\
[6'] + [7'] &= \frac{m^2}{16} \eta^{ad} \eta^{bc} \left[\tilde{E}_a^\nu E_{c\nu} - E_{a\nu} \tilde{E}_c^\nu + E_a^\nu \tilde{E}_{c\nu} - \tilde{E}_{a\nu} E_c^\nu \right] \\
&\times \left(8\eta_{bd} - 2\tilde{E}_{b\mu} E_d^\mu - 2E_{b\mu} \tilde{E}_d^\mu - 2E_b^\mu \tilde{E}_{d\mu} - 2\tilde{E}_b^\mu E_{d\mu} \right) \\
[6'] + [7'] &= \frac{m^2}{8} \left(4\delta_b^a - E^{a\mu} \tilde{E}_{b\mu} - \tilde{E}^{a\mu} E_{b\mu} - \tilde{E}_\mu^a E_b^\mu - E_\mu^a \tilde{E}_b^\mu \right) \\
&\left(\tilde{E}_a^\nu E_\nu^b - E_{a\nu} \tilde{E}^{b\nu} + E_a^\nu \tilde{E}_\nu^b - \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \right) \\
[6'] + [7'] &= \frac{m^2}{8} \left(4\delta_b^a \tilde{E}_a^\nu E_\nu^b - E^{a\mu} \tilde{E}_{b\mu} \tilde{E}_a^\nu E_\nu^b - \tilde{E}^{a\mu} E_{b\mu} \tilde{E}_a^\nu E_\nu^b - \tilde{E}_\mu^a E_b^\mu \tilde{E}_a^\nu E_\nu^b - E_\mu^a \tilde{E}_b^\mu \tilde{E}_a^\nu E_\nu^b \right) \\
&- \frac{m^2}{8} \left(4\delta_b^a E_{a\nu} \tilde{E}^{b\nu} - E^{a\mu} \tilde{E}_{b\mu} E_{a\nu} \tilde{E}^{b\nu} - \tilde{E}^{a\mu} E_{b\mu} E_{a\nu} \tilde{E}^{b\nu} - \tilde{E}_\mu^a E_b^\mu E_{a\nu} \tilde{E}^{b\nu} - E_\mu^a \tilde{E}_b^\mu E_{a\nu} \tilde{E}^{b\nu} \right) \\
&+ \frac{m^2}{8} \left(4\delta_b^a E_a^\nu \tilde{E}_\nu^b - E^{a\mu} \tilde{E}_{b\mu} E_a^\nu \tilde{E}_\nu^b - \tilde{E}^{a\mu} E_{b\mu} E_a^\nu \tilde{E}_\nu^b - \tilde{E}_\mu^a E_b^\mu E_a^\nu \tilde{E}_\nu^b - E_\mu^a \tilde{E}_b^\mu E_a^\nu \tilde{E}_\nu^b \right) \\
&- \frac{m^2}{8} \left(4\delta_b^a \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} - E^{a\mu} \tilde{E}_{b\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} - \tilde{E}^{a\mu} E_{b\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} - \tilde{E}_\mu^a E_b^\mu \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} - E_\mu^a \tilde{E}_b^\mu \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \right) \\
\frac{8}{m^2} ([6'] + [7']) &= \left(4E_\nu^a \tilde{E}_a^\nu - E^{a\mu} \tilde{E}_a^\nu E_\nu^b \tilde{E}_{b\mu} - G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} - 4 - E_{a\mu} \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} \tilde{E}^{b\mu} \right) \\
&- \left(4E_{a\nu} \tilde{E}^{a\nu} - 4 - E_{a\mu} \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} \tilde{E}^{b\mu} - E^{a\mu} \tilde{E}_a^\nu E_\nu^b \tilde{E}_{b\mu} - G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} \right) \\
&+ \left(4\tilde{E}_{a\nu} E^{a\nu} - G^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu} - E^{a\mu} \tilde{E}_a^\nu E_\nu^b \tilde{E}_{b\mu} - E^{a\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \tilde{E}_{b\mu} - 4 \right) \\
&- \left(4\tilde{E}_{a\nu} E^{a\nu} - E^{a\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \tilde{E}_{b\mu} - 4 - G^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu} - E^{a\mu} \tilde{E}_a^\nu E_\nu^b \tilde{E}_{b\mu} \right) \\
\frac{8}{m^2} ([6'] + [7']) &= 0
\end{aligned}$$

$$R_2 = R_{4.2} - \frac{m^2}{4} \left(-12 + 4E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} + 4\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} - 3E_{a\nu} \tilde{E}^{a\mu} E_{\mu}^d \tilde{E}_d^{\nu} - \tilde{E}^{a\mu} E_a^{\nu} \tilde{E}_{d\nu} E_{\mu}^d - \tilde{G}^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right) \\ - \frac{m^2}{8} \left[24 - 16E_{a\mu} \tilde{E}^{a\mu} + 3G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + 5E_{a\mu} \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} \tilde{E}^{b\mu} \right] \\ + E^{a\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \tilde{E}_{b\mu} + 2E_{a\mu} \tilde{E}_a^{\nu} E_b^{\nu} \tilde{E}^{b\mu}$$

Vậy:

$$R = R_4 + \frac{m^2}{4} \left(-12 + 4E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} + 4\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} - 3E_{a\nu} \tilde{E}^{a\mu} E_{\mu}^d \tilde{E}_d^{\nu} - \tilde{E}^{a\mu} E_a^{\nu} \tilde{E}_{d\nu} E_{\mu}^d - \tilde{G}^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right) \\ - \frac{m^2}{2} \left[16 - 8\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} + \left(\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} \right)^2 \right] \\ + \frac{m^2}{16} \left[24 - 16E_{a\mu} \tilde{E}^{a\mu} + 3G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + 5E_{a\mu} \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} \tilde{E}^{b\mu} \right] \\ + E^{a\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \tilde{E}_{b\mu} + 2E_{a\mu} \tilde{E}_a^{\nu} E_b^{\nu} \tilde{E}^{b\mu} \\ R = R_4 + \frac{m^2}{16} \left(-48 + 16E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} + 16\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} - 12E_{a\nu} \tilde{E}^{a\mu} E_{b\mu} \tilde{E}^{b\nu} \right) \\ - 4\tilde{E}^{a\mu} E_a^{\nu} \tilde{E}_{b\nu} E_{\mu}^b - 4\tilde{G}^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \\ + \frac{m^2}{16} \left[-128 + 64\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} - 8 \left(\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} \right)^2 \right] \\ + \frac{m^2}{16} \left[24 - 16E_{a\mu} \tilde{E}^{a\mu} + 3G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + 5E_{a\mu} \tilde{E}^{a\nu} E_{b\nu} \tilde{E}^{b\mu} \right] \\ + E^{a\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \tilde{E}_{b\mu} + 2E_{a\mu} \tilde{E}_a^{\nu} E_b^{\nu} \tilde{E}^{b\mu}$$

Vậy ta thu được công thức của độ cong

$$R = R_4 + \frac{m^2}{16} \left(-152 + 16E^{a\mu} \tilde{E}_{a\mu} + 64\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} - G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - 8 \left(\tilde{E}^{a\mu} E_{a\mu} \right)^2 \right) \\ + \frac{m^2}{16} \left[-7E_{a\nu} \tilde{E}^{a\mu} E_{b\mu} \tilde{E}^{b\nu} + E^{a\mu} \tilde{E}_{a\nu} E^{b\nu} \tilde{E}_{b\mu} - 2\tilde{E}^{a\mu} E_a^{\nu} \tilde{E}_{b\nu} E_{\mu}^b \right] \quad (5.7)$$

P.3. Tính toán độ rộng phân rã trong các kênh phân rã neutron qua X17

Ta có biên độ phân rã trong (4.13) là

$$\begin{aligned}
 M = & -\frac{g_1 g_2 g_{\mu\nu}}{(q^2 - M_X^2)} [\bar{u}(n_X) \gamma^\mu u(n)] [\bar{u}(f) \gamma^\nu u(\bar{f})] \\
 & + \frac{g_1 g_2}{(q^2 - M_X^2) M_X^2} [\bar{u}(n_X) \gamma^\mu q_\mu u(n)] [\bar{u}(f) \gamma^\nu q_\nu u(\bar{f})].
 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ta có mối liên hệ xung lượng của các hạt là $q = p_1 - p_3 = p_2 + p_4$. Ta áp dụng phương trình Dirac cho các biểu thức trong ngoặc vuông của biểu thức biên độ tán xạ ta được

$$\begin{aligned}
 [\bar{u}(n_X) \gamma^\mu (p_{1\mu} - p_{3\mu}) u(n)] &= \bar{u}(n_X) \gamma^\mu p_{1\mu} u(n) - \bar{u}(n_X) \gamma^\mu p_{3\mu} u(n) \\
 &= \bar{u}(n_X) m_n u(n) - \bar{u}(n_X) m_{n_X} u(n) = \bar{u}(n_X) (m_n - m_{n_X}) u(n), \\
 [\bar{u}(f) \gamma^\nu (p_{2\nu} + p_{4\nu}) u(\bar{f})] &= \bar{u}(f) \gamma^\nu p_{2\nu} u(\bar{f}) + \bar{u}(f) \gamma^\nu p_{4\nu} u(\bar{f}) \\
 &= -\bar{u}(f) m_{\bar{f}} u(\bar{f}) + \bar{u}(f) m_f u(\bar{f}) = -\bar{u}(f) m_2 u(\bar{f}) + \bar{u}(f) m_4 u(\bar{f}) \\
 &= \bar{u}(f) (m_4 - m_2) u(\bar{f}).
 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Trong đó: $m_n = m_1$, $m_{n_X} = m_3$, $m_f = m_4$, $m_{\bar{f}} = m_2$.

Suy ra biên độ tán xạ là

$$\begin{aligned}
 M = & -\frac{g_1 g_2}{(q^2 - M_X^2)} [\bar{u}(n_X) \gamma^\mu u(n)] [\bar{u}(f) \gamma_\mu u(\bar{f})] \\
 & + \frac{g_1 g_2}{(q^2 - M_X^2) M_X^2} [\bar{u}(n_X) (m_n - m_{n_X}) u(n)] [\bar{u}(f) (m_4 - m_2) u(\bar{f})].
 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ta có do $|\mathcal{M}^2| = \mathcal{M} \mathcal{M}^*$ nên ta cần áp dụng công thức Casimir [53].

$$\begin{aligned} [\bar{u}(f)\Gamma_1 u(\bar{f})][\bar{u}(f)\Gamma_2 u(\bar{f})]^* &= \text{Tr}[\Gamma_1(\not{p}_2 - m_2)\Gamma_2(\not{p}_4 + m_4)], \\ [\bar{u}(n_x)\Gamma_1 u(n)][\bar{u}(n_x)\Gamma_2 u(n)]^* &= \text{Tr}[\Gamma_1(\not{p}_n + m_n)\Gamma_2(\not{p}_{n_x} + m_{n_x})]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Thay (5.11) vào (5.10) ta có biểu thức bình phương biên độ tán xạ là

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}^2| &= \frac{g_1^2 g_2^2}{(q^2 - M_X^2)^2} \left\{ \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_{\bar{f}} - m_{\bar{f}})\gamma_\nu(\not{p}_f + m_f)] \right\} \\ &\quad - \frac{g_1^2 g_2^2}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^2} \left\{ \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_n + m_n)\gamma^\nu(\not{p}_{n_x} + m_{n_x})] \right\} \\ &\quad - \frac{g_1^2 g_2^2}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^2} \left\{ \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_{\bar{f}} - m_{\bar{f}})(m_f - m_{\bar{f}})(\not{p}_f + m_f)] \right\} \\ &\quad - \frac{g_1^2 g_2^2}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^2} \left\{ \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_n + m_n)(m_n - m_{n_x})(\not{p}_{n_x} + m_{n_x})] \right\} \\ &\quad - \frac{g_1^2 g_2^2}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^2} \left\{ \text{Tr}[(m_f - m_{\bar{f}})(\not{p}_{\bar{f}} - m_{\bar{f}})\gamma_\mu(\not{p}_f + m_f)] \right\} \\ &\quad - \frac{g_1^2 g_2^2}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^2} \left\{ \text{Tr}[(m_n - m_{n_x})(\not{p}_n + m_n)\gamma^\mu(\not{p}_{n_x} + m_{n_x})] \right\} \\ &\quad + \frac{g_1^2 g_2^2}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^4} \left\{ \text{Tr}[(m_f - m_{\bar{f}})(\not{p}_{\bar{f}} - m_{\bar{f}})(m_f - m_{\bar{f}})(\not{p}_f + m_f)] \right\} \\ &\quad + \frac{g_1^2 g_2^2}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^4} \left\{ \text{Tr}[(m_n - m_{n_x})(\not{p}_n + m_n)(m_n - m_{n_x})(\not{p}_{n_x} + m_{n_x})] \right\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ta tính các tích Trace ở trên, áp dụng các công thức tích chéo và chú ý rằng vết của một tích lẻ các ma trận gamma thì bằng không, không quan tâm đến các ma trận γ^5 , ta tính vết cho từng dấu ngoặc kép.

Ta đặt các tích vết trong ngoặc nhọn của biểu thức (5.12) lần lượt là [1], [2], [3] và [4]. Ta sẽ tính từng số hạng một. Ta có số hạng đầu tiên là

$$\begin{aligned} [1] &= \text{Tr}[(\gamma_\mu \not{p}_{f^+} - \gamma_\mu m_{f^+})(\gamma_\nu \not{p}_{f^-} + \gamma_\nu m_{f^-})] \text{Tr}[(\gamma^\mu \not{p}_n + \gamma^\mu m_n)(\gamma^\nu \not{p}_{n_x} + \gamma^\nu m_{n_x})] \\ &= \text{Tr}[\gamma_\mu \not{p}_{f^+} \gamma_\nu \not{p}_{f^-} - m_{f^+} m_{f^-} \gamma_\mu \gamma_\nu] \text{Tr}[\gamma^\mu \not{p}_n \gamma^\nu \not{p}_{n_x} + m_n m_{n_x} \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= \left[(4g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - 4g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} + 4g_{\nu\lambda} g_{\mu\sigma}) p_2^\lambda p_4^\sigma - 4m_{f^-} m_{f^+} g_{\mu\nu} \right] \\ &\quad \left[(4g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} - 4g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + 4g^{\nu\lambda} g^{\mu\sigma}) p_{1\lambda} p_{3\sigma} + 4m_n m_{n_x} g^{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[4p_{2\mu}p_{4\nu} + 4p_{2\nu}p_{4\mu} - g_{\mu\nu} \left(4p_2 \cdot p_4 + 4m_{f^-}m_{f^+} \right) \right] \\
&\quad \left[4p_1^\mu p_3^\nu + 4p_1^\nu p_3^\mu - g^{\mu\nu} \left(4p_1 \cdot p_3 - 4m_n m_{n_X} \right) \right] \\
&= 32(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 32(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) - 8(p_2 \cdot p_4)(4p_1 \cdot p_3 - 4m_n m_{n_X}) \\
&\quad - 8(p_1 \cdot p_3)(4p_2 \cdot p_4 + 4m_{f^-}m_{f^+}) + 4(4p_2 \cdot p_4 + 4m_{f^-}m_{f^+})(4p_1 \cdot p_3 - 4m_n m_{n_X}) \\
&= 32(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 32(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) - 32(p_2 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_3) + 32m_n m_{n_X}(p_2 \cdot p_4) \\
&\quad - 32m_{f^-}m_{f^+}(p_1 \cdot p_3) + 32(p_2 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_3) - 64m_n m_{n_X} p_2 \cdot p_4 \\
&\quad + 64m_{f^-}m_{f^+} p_1 \cdot p_3 + 64m_{f^-}m_{f^+} m_n m_{n_X} \\
&= 32(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 32(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) - 32m_n m_{n_X}(p_2 \cdot p_4) + 32m_{f^-}m_{f^+}(p_1 \cdot p_3) \\
&\quad + 64m_{f^-}m_{f^+} m_n m_{n_X}. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Số hạng thứ 2 là

$$\begin{aligned}
[2] &= (m_{f^-} - m_{f^+})(m_n - m_{n_X}) \text{Tr} \left[m_{f^-} \gamma_\mu \not{p}_{f^+} - m_{f^+} \gamma_\mu \not{p}_{f^-} \right] \text{Tr} \left[m_{n_X} \gamma^\mu \not{p}_n + m_n \gamma^\mu \not{p}_{n_X} \right] \\
&= 16(m_{f^-} - m_{f^+})(m_n - m_{n_X}) \left[m_{f^-} g_{\mu\nu} p_2^\nu - m_{f^+} g_{\mu\nu} p_4^\nu \right] \left[m_{n_X} g^{\mu\nu} p_{1\nu} + m_n g^{\mu\nu} p_{3\nu} \right] \\
&= 16(m_{f^-} - m_{f^+})(m_n - m_{n_X}) \left[m_{f^-} p_{2\mu} - m_{f^+} p_{4\mu} \right] \left[m_{n_X} p_1^\mu + m_n p_3^\mu \right] \\
&= 16(m_{f^-} - m_{f^+})(m_n - m_{n_X}) \left[\begin{aligned} &m_{f^-} m_{n_X} (p_1 \cdot p_2) - m_{f^+} m_{n_X} (p_1 \cdot p_4) \\ &+ m_{f^-} m_n (p_3 \cdot p_2) - m_{f^+} m_n (p_3 \cdot p_4) \end{aligned} \right]. \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Số hạng thứ 3 tương tự và bằng số hạng thứ 2. Cuối cùng, ta có số hạng thứ 4 là

$$\begin{aligned}
[4] &= (m_{f^-} - m_{f^+})^2 (m_n - m_{n_X})^2 \text{Tr} \left[(\not{p}_{f^+} \not{p}_{f^-} - m_{f^+} m_{f^-}) \right] \text{Tr} \left[(\not{p}_n \not{p}_{n_X} + m_n m_{n_X}) \right] \\
&= (m_{f^-} - m_{f^+})^2 (m_n - m_{n_X})^2 \left[4(p_2 \cdot p_4) - 4m_{f^+} m_{f^-} \right] \left[4(p_1 \cdot p_3) + 4m_n m_{n_X} \right] \\
&= 16(m_{f^-} - m_{f^+})^2 (m_n - m_{n_X})^2 \left[\begin{aligned} &(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - m_{f^+} m_{f^-} (p_1 \cdot p_3) \\ &+ m_n m_{n_X} (p_2 \cdot p_4) - m_{f^+} m_{f^-} m_n m_{n_X} \end{aligned} \right]. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Như vậy cuối cùng ta thu được bình phương biên độ tán xạ là

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}| = & \frac{32g_1^2 g_2^2}{(q^2 - M_X^2)^2} \left[(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) - m_n m_{n_x} (p_2 \cdot p_4) \right] \\
& - \frac{32g_1^2 g_2^2 (m_4 - m_2)(m_n - m_{n_x})}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^2} \left[m_4 m_{n_x} (p_1 \cdot p_2) - m_2 m_{n_x} (p_1 \cdot p_4) \right] \\
& + \frac{16g_1^2 g_2^2 (m_4 - m_2)^2 (m_n - m_{n_x})^2}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^4} \left[(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - m_4 m_2 (p_1 \cdot p_3) \right] \\
& + \frac{16g_1^2 g_2^2 (m_4 - m_2)^2 (m_n - m_{n_x})^2}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^4} \left[m_n m_{n_x} (p_2 \cdot p_4) - m_4 m_2 m_n m_{n_x} \right].
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Hay

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}| = & \frac{32g_1^2 g_2^2}{(q^2 - M_X^2)^2} \left[(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) \right. \\
& \left. - m_1 m_3 (p_2 \cdot p_4) + m_2 m_4 (p_1 \cdot p_3) + 2m_1 m_2 m_3 m_4 \right] \\
& + \frac{32g_1^2 g_2^2 (m_2 - m_4)(m_1 - m_3)}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^2} \left[m_1 m_4 (p_2 \cdot p_3) - m_1 m_2 (p_3 \cdot p_4) \right] \\
& + \frac{16g_1^2 g_2^2 (m_2 - m_4)^2 (m_1 - m_3)^2}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^4} \left[(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - m_2 m_4 (p_1 \cdot p_3) \right] \\
& + \frac{16g_1^2 g_2^2 (m_2 - m_4)^2 (m_1 - m_3)^2}{(q^2 - M_X^2)^2 M_X^4} \left[m_1 m_3 (p_2 \cdot p_4) - m_1 m_2 m_3 m_4 \right].
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Như vậy bình phương ma trận chỉ phụ thuộc vào khối lượng và năng lượng của các hạt. Bài toán rã hạt neutron nên ta xét trong hệ quy chiếu mà nó đứng yên, nghĩa là $p_1 = (m_1, \vec{0})$, nên ta có

$$p_1 \cdot p_2 = m_1 E_2, \quad p_1 \cdot p_3 = m_1 E_3, \quad p_1 \cdot p_4 = m_1 E_4. \tag{5.18}$$

Mà $q = p_1 - p_3 = p_2 + p_4$, ta có

$$\begin{aligned}
q^2 &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 = p_2^2 + p_4^2 + 2p_2 \cdot p_4 \\
\Rightarrow q^2 &= m_1^2 + m_3^2 - 2m_1 E_3 = 2p_2 \cdot p_4 + m_2^2 + m_4^2 \\
\Rightarrow 2p_2 \cdot p_4 &= m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 - 2m_1 E_3.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\text{Tương tự, ta có } \begin{cases} 2p_2 \cdot p_3 = m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 + m_4^2 - 2m_1 E_4, \\ 2p_3 \cdot p_4 = m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2 - 2m_1 E_2. \end{cases} \tag{5.20}$$

Áp dụng quy tắc vàng trong trường hợp rã 3 hạt [53] ta có vi phân của độ rộng phân rã là

$$d\Gamma = \frac{\langle |M|^2 \rangle}{2\hbar m_n} \left(\frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left(\frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{d^3 \vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \quad (5.21)$$

Hay

$$d\Gamma = \frac{\langle |M|^2 \rangle}{2\hbar m_n} \left(\frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left(\frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{d^3 \vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) (2\pi)^4 \times \delta^3(\vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4) \delta(m_n - E_2 - E_3 - E_4) \quad (5.22)$$

Lấy tích phân theo $\vec{p}_3$ với hàm delta Dirac, chú ý $\langle |M|^2 \rangle$ chỉ phụ thuộc vào E_2, E_3, E_4 , ta được

$$d\Gamma = \frac{\langle |M|^2 \rangle}{16(2\pi)^5 \hbar m_1} \frac{d^3 \vec{p}_2 d^3 \vec{p}_4}{E_2 E_3 E_4} \delta(m_1 - E_2 - E_3 - E_4). \quad (5.23)$$

Trong đó chú ý rằng $\vec{p}_3 = -\vec{p}_2 - \vec{p}_4$ và

$$E_3 = \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2}; E_2 = \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2}; E_4 = \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_4^2}, \quad (5.24)$$

Hệ tọa độ ta chọn là hệ tọa độ mà hạt neutron đứng yên, trục Ox hướng theo xung lượng của hạt số 2 ($\vec{p}_2$).

Ta tính tích phân theo $d^3 \vec{p}_2$, góc θ là góc giữa $\vec{p}_2$ và $\vec{p}_4$, hay trục Ox. Ta có

$$E_3^2 = \vec{p}_3^2 + m_3^2 = \vec{p}_2^2 + \vec{p}_4^2 + 2\vec{p}_2 \vec{p}_4 + m_3^2 = \vec{p}_2^2 + \vec{p}_4^2 + 2|\vec{p}_2||\vec{p}_4|\cos\theta + m_3^2. \quad (5.25)$$

Như vậy E_3 bị chặn trong khoảng

$$x_- = \sqrt{(|\vec{p}_2| - |\vec{p}_4|)^2 + m_3^2} < E_3 < \sqrt{(|\vec{p}_2| + |\vec{p}_4|)^2 + m_3^2} = x_+. \quad (5.26)$$

Mặt khác ta có trong tọa độ cầu

$$d^3 \vec{p}_2 = |\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2| \sin\theta d\theta d\phi = |\vec{p}_2| E_2 dE_2 \sin\theta d\theta d\phi, \quad (5.27)$$

trong đó ta chọn $\vec{p}_2, \vec{p}_4$ cùng trong mặt phẳng Oxy và tích phân theo $d\phi$ trở nên tầm thường bằng 2π .

Tích phân được lấy theo θ , nhưng hàm delta lại biểu diễn theo E_3 nên ta cần đổi biến lấy tích phân theo E_3 . Ta có:

$$E_3 = \sqrt{\vec{p}_2^2 + \vec{p}_4^2 + 2|\vec{p}_2||\vec{p}_4|\cos\theta + m_3^2} \Rightarrow dE_3 = -\frac{|\vec{p}_2||\vec{p}_4|\sin\theta d\theta}{E_3}. \quad (5.28)$$

Suy ra:

$$d\Gamma = \frac{\langle |M|^2 \rangle}{16(2\pi)^5 \hbar m_1} \frac{|\vec{p}_2| E_2 dE_2 \sin\theta d\theta d\phi d^3\vec{p}_4}{E_2 E_3 E_4} \delta(m_1 - E_2 - E_3 - E_4). \quad (5.29)$$

Nên ta có

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{\langle |M|^2 \rangle d^3\vec{p}_4}{16(2\pi)^4 \hbar m_1} \frac{|\vec{p}_2| dE_2 \sin\theta d\theta}{E_3 E_4} \delta(m_1 - E_2 - E_3 - E_4) \\ &= \frac{\langle |M|^2 \rangle d^3\vec{p}_4}{16(2\pi)^4 \hbar m_1} \frac{dE_2}{E_4 |\vec{p}_4|} \frac{|\vec{p}_2||\vec{p}_4|\sin\theta d\theta}{E_3} \delta(m_1 - E_2 - E_3 - E_4) \\ &= -\frac{\langle |M|^2 \rangle d^3\vec{p}_4}{16(2\pi)^4 \hbar m_1} \frac{dE_2}{E_4 |\vec{p}_4|} dE_3 \delta(m_1 - E_2 - E_3 - E_4). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Lấy tích phân theo hàm delta Dirac ta được

$$d\Gamma = \frac{\langle |M|^2 \rangle d^3\vec{p}_4}{(4\pi)^4 \hbar m_1} \frac{dE_2}{E_4 |\vec{p}_4|}. \quad (5.31)$$

Và tương tự ta có

$$d^3\vec{p}_4 = |\vec{p}_4|^2 d|\vec{p}_4| \sin\theta d\theta d\phi = |\vec{p}_4| E_4 dE_4 \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi |\vec{p}_4| E_4 dE_4. \quad (5.32)$$

Vậy ta thu được biểu thức của vi phân độ rộng phân rã theo năng lượng của hai hạt neutrino bay ra là

$$d\Gamma = \frac{\langle |M|^2 \rangle}{(4\pi)^3 \hbar m_1} dE_2 dE_4. \quad (5.33)$$

Điều kiện liên hệ giữa năng lượng của các hạt là

$$E_3 = m_1 - E_2 - E_4. \quad (5.34)$$

Từ điều kiện của E_3 trong (5.26) ta có thể suy ra điều kiện của E_2 như sau

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(|\vec{p}_2| - |\vec{p}_4|)^2 + m_3^2} < m_1 - E_2 - E_4 < \sqrt{(|\vec{p}_2| + |\vec{p}_4|)^2 + m_3^2}, \\
& \Rightarrow E_2^2 + E_4^2 - m_2^2 - m_4^2 - 2|\vec{p}_2||\vec{p}_4| + m_3^2 < m_1^2 + E_2^2 + E_4^2 + 2E_2E_4 - 2m_1E_2 - 2m_1E_4 \\
& < E_2^2 + E_4^2 + 2|\vec{p}_2||\vec{p}_4| + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2, \\
& \Rightarrow -2|\vec{p}_2||\vec{p}_4| < 2E_2(E_4 - m_1) + (m_1^2 - m_3^2 + m_2^2 + m_4^2) - 2m_1E_4 < 2|\vec{p}_2||\vec{p}_4|, \\
& \Rightarrow [2E_2E_4 - 2m_1(E_2 + E_4) + (m_1^2 - m_3^2 + m_2^2 + m_4^2)]^2 < 4|\vec{p}_2|^2|\vec{p}_4|^2 \\
& \quad = 4(E_2^2 - m_2^2)(E_4^2 - m_4^2), \\
& \Rightarrow [2E_2E_4 - 2m_1(E_2 + E_4) + D]^2 \leq 4(E_2^2 - m_2^2)(E_4^2 - m_4^2), \\
& \quad \text{với } D = m_1^2 - m_3^2 + m_2^2 + m_4^2 \\
& \Rightarrow [2E_2(E_4 - m_1) - 2m_1E_4 + D]^2 \leq 4E_2^2(E_4^2 - m_4^2) - 4m_2^2(E_4^2 - m_4^2), \\
& \Rightarrow 4E_2^2(E_4^2 - 2m_1E_4 + m_1^2) + 4m_1^2E_4^2 + D^2 + 4E_2(E_4 - m_1)(-2m_1E_4 + D) - 4m_1E_4D \\
& < 4E_2^2(E_4^2 - m_4^2) - 4m_2^2(E_4^2 - m_4^2), \\
& \Rightarrow 4(m_1^2 + m_4^2 - 2m_1E_4)E_2^2 + 4(-2m_1E_4^2 + DE_4 + 2m_1^2E_4 - m_1D)E_2 + 4m_1^2E_4^2 \\
& \quad + D^2 - 4m_1E_4D + 4m_2^2E_4^2 - 4m_2^2m_4^2 < 0.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Ta thu được phương trình điều kiện là

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow 4(m_1^2 + m_4^2 - 2m_1E_4)E_2^2 + 4(2m_1^2E_4 - 2m_1E_4^2 + DE_4 - m_1D)E_2 \\
& + (D^2 - 4m_1E_4D + 4m_1^2E_4^2 + 4m_2^2E_4^2 - 4m_2^2m_4^2) < 0
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Đây là một tam thức bậc 2 theo E_2 mà vì $m_1^2 + m_4^2 - 2m_1E_4 > 0$ nên điều kiện của E_2 là nằm trong khoảng hai nghiệm và hàm $\Delta > 0$ sẽ suy ra điều kiện của E_4 . Để các phép tính toán đạt được sự đơn giản, ta sẽ áp dụng các điều kiện gần đúng của lý thuyết. Để đơn giản hơn cho việc tính toán và dễ dàng đánh giá các đại lượng, ta sử dụng phép đặt các tham số không có thứ nguyên như sau

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{m_1 - m_3}{m_1} = \frac{m_n - m_{n_x}}{m_n}, & \delta &= \frac{m_4}{m_1} = \frac{m_f}{m_n}, \\
\eta &= \frac{E_4}{m_1} = \frac{E_4}{m_n}, & \phi &= \sqrt{\eta^2 - \delta^2} = \frac{|\vec{p}_4|}{m_n}, \\
\gamma &= \frac{m_2}{m_1} = \frac{m_{\bar{f}}}{m_n}, & E &= \frac{E_2}{m_1} = \frac{E_2}{m_n}, \\
X &= \frac{M_X^2}{m_1^2} = \left(\frac{M_X}{m_n} \right)^2.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Ta chú ý điều quan trọng rằng: do kênh rã ra cặp electron và positron bị cấm nên ta có điều kiện: $m_n - m_{n_x} < 2m_e \approx 1,022\text{MeV} \Rightarrow \varepsilon \approx 10^{-3}$ và khối lượng của X17 là cỡ 17 MeV nên $X \approx \varepsilon/3 \approx 10^{-3}$ kéo theo các đại lượng ta vừa đặt đều là các giá trị vô cùng bé cỡ 10^{-3} . Đây là điều cực kỳ quan trọng do các bước tính toán tiếp theo sẽ vô cùng phức tạp và công kênh với rất nhiều số hạng xuất hiện. Việc đặt các ẩn phụ không có thứ nguyên giúp ta dễ dàng đánh giá được độ lớn của chúng so với nhau, do đó dễ dàng nhận biết các số hạng cùng bậc.

Theo định luật bảo toàn năng lượng, ta có

$$E_3 = E_1 - E_2 - E_4 \Rightarrow \frac{E_3}{m_1} = 1 - E - \eta, \tag{5.38}$$

$$\frac{q^2}{m_1^2} = 2 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 2(1 - E - \eta) = 2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Với chú ý rằng:

$$m_3 = m_1(1 - \varepsilon), m_1^2 - m_3^2 = m_1^2(2\varepsilon - \varepsilon^2). \tag{5.39}$$

Chia cả 2 vế của (5.36) cho m_1^4 để khử thứ nguyên và thay các đại lượng mới không có thứ nguyên vào, ta có

$$D \rightarrow d = 1 - (1 - \varepsilon)^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \gamma^2 + \delta^2. \tag{5.40}$$

Và điều kiện (5.15) trở thành

$$4(1 + \delta^2 - 2\eta)E^2 + 4(2\eta - 2\eta^2 + d\eta - d)E + (d^2 - 4\eta d + 4\eta^2 + 4\gamma^2\eta^2 - 4\gamma^2\delta^2) < 0 \quad (5.41)$$

Nên

$$(1 + \delta^2 - 2\eta)E^2 + (\eta - 1)(d - 2\eta)E + (d/2 - \eta)^2 + (\gamma^2\eta^2 - \gamma^2\delta^2) < 0 \quad (5.42)$$

Ta có hàm delta là

$$\begin{aligned} \Delta &= (\eta - 1)^2 (d - 2\eta)^2 - (1 + \delta^2 - 2\eta) \left[(d - 2\eta)^2 + (4\gamma^2\eta^2 - 4\gamma^2\delta^2) \right] \\ &= (\eta^2 - 2\eta + 1)(d - 2\eta)^2 - (1 + \delta^2 - 2\eta)(d - 2\eta)^2 - (1 + \delta^2 - 2\eta)(4\gamma^2\eta^2 - 4\gamma^2\delta^2) \\ &= (\eta^2 - \delta^2)(d - 2\eta)^2 - 4\gamma^2(1 + \delta^2 - 2\eta)(\eta^2 - \delta^2). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Tiếp tục rút gọn ta thu được

$$\begin{aligned} \Delta &= (\eta - 1)^2 (d - 2\eta)^2 - (1 + \delta^2 - 2\eta) \left[(d - 2\eta)^2 + (4\gamma^2\eta^2 - 4\gamma^2\delta^2) \right] \\ &= (\eta^2 - 2\eta + 1)(d - 2\eta)^2 - (1 + \delta^2 - 2\eta)(d - 2\eta)^2 - (1 + \delta^2 - 2\eta)(4\gamma^2\eta^2 - 4\gamma^2\delta^2) \\ &= (\eta^2 - \delta^2)(d - 2\eta)^2 - 4\gamma^2(1 + \delta^2 - 2\eta)(\eta^2 - \delta^2). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Ta chỉ lấy gần đúng đến bậc thấp nhất của delta tức là bậc 4, ta có

$$\begin{aligned} \Delta &\approx (\eta^2 - \delta^2)(2\varepsilon - 2\eta)^2 - 4\gamma^2(\eta^2 - \delta^2) \\ &= 4(\eta^2 - \delta^2) \left[(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2 \right] = 4\phi^2 \left[(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Vậy ta có điều kiện của E_2 là nằm trong khoảng 2 nghiệm tương ứng với điều kiện của E cũng là nằm giữa hai nghiệm của phương trình (5.42), nên

$$\begin{aligned} \frac{-(\eta - 1)(d - 2\eta) - 2\phi\sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2}}{2(1 + \delta^2 - 2\eta)} < E < \frac{-(\eta - 1)(d - 2\eta) + 2\phi\sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2}}{2(1 + \delta^2 - 2\eta)} \\ \Leftrightarrow E_- < E < E_+ \end{aligned} \quad (5.46)$$

Trong gần đúng đến bậc 2 ta có cận của E là

$$E_{\pm} = \frac{(1 - \eta)(2\varepsilon - 2\eta - \varepsilon^2 + \gamma^2 + \delta^2) \pm 2\phi\sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2}}{2(1 + \delta^2 - 2\eta)}$$

$$\begin{aligned}
& \approx \frac{(1-\eta) \left(\varepsilon - \eta \frac{-\varepsilon^2 + \gamma^2 + \delta^2}{2} \right) \pm \phi \sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2}}{(1-2\eta)} \\
& \approx \left[(1-\eta) \left(\varepsilon - \eta + \frac{\gamma^2 + \delta^2 - \varepsilon^2}{2} \right) \pm \phi \sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2} \right] (1+2\eta), \quad (5.47)
\end{aligned}$$

ở đây ta đã sử dụng phép khai triển Taylor. Tiếp tục biến đổi ta được

$$\begin{aligned}
E_{\pm} & \approx \left[\varepsilon - \eta + \frac{\gamma^2 + \delta^2 - \varepsilon^2}{2} - \eta(\varepsilon - \eta) \pm \phi \sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2} \right] (1+2\eta) \\
& = \left[\varepsilon - \eta + \frac{\gamma^2 + \delta^2 - \varepsilon^2}{2} - \eta\varepsilon + \eta^2 \pm \phi \sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2} \right] (1+2\eta) \\
& \approx \varepsilon - \eta + \frac{\gamma^2 + \delta^2 - \varepsilon^2}{2} - \eta\varepsilon + \eta^2 \pm \phi \sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2} + 2\eta(\varepsilon - \eta). \quad (5.48)
\end{aligned}$$

Vậy cuối cùng ta thu được biểu thức hai cận của E là

$$E_{\pm} \approx \varepsilon - \eta + \frac{\gamma^2 + \delta^2 - \varepsilon^2}{2} + \eta\varepsilon - \eta^2 \pm \phi \sqrt{(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2}. \quad (5.49)$$

Điều kiện của E_4 là $\Delta' > 0$ tương ứng với điều kiện của η là

$$(\varepsilon - \eta)^2 - \gamma^2 > 0. \quad (5.50)$$

Kết hợp với điều kiện của các ẩn phụ ta thu được điều kiện là

$$\delta < \eta < \varepsilon - \gamma. \quad (5.51)$$

Như vậy ta đã có được miền xác định của các biến mới không còn thứ nguyên. Ta tiếp tục thay các biến mới này vào các số hạng tích xung lượng trong biểu thức (5.17) của bình phương biên độ, ta có

$$\frac{p_1 \cdot p_2}{m_1^2} = E, \quad \frac{p_1 \cdot p_3}{m_1^2} = 1 - E - \eta, \quad \frac{p_1 \cdot p_4}{m_1^2} = \eta \quad (5.52)$$

$$\frac{q^2}{m_1^2} = 2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \quad (5.53)$$

$$\begin{cases} \frac{2p_2 \cdot p_4}{m_1^2} = 1 - \gamma^2 + (1 - \varepsilon)^2 - \delta^2 - 2(1 - E - \eta) = 2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \delta^2 - \gamma^2, \\ \frac{2p_2 \cdot p_3}{m_1^2} = 1 - \gamma^2 - (1 - \varepsilon)^2 + \delta^2 - 2\eta = 2\varepsilon - 2\eta - \varepsilon^2 + \delta^2 - \gamma^2, \\ \frac{2p_3 \cdot p_4}{m_1^2} = 1 + \gamma^2 - (1 - \varepsilon)^2 - \delta^2 - 2E = 2\varepsilon - 2E - \varepsilon^2 - \delta^2 + \gamma^2, \end{cases} \quad (5.54)$$

Thay vào (5.17) ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{M}^2|}{4g_1^2 g_2^2} (q^2 - M_X^2)^2 &= 2 \left[(2p_1 \cdot p_2)(2p_3 \cdot p_4) + (2p_2 \cdot p_3)(2p_1 \cdot p_4) \right. \\ &\quad \left. - 2m_1 m_3 (2p_2 \cdot p_4) + 2m_2 m_4 (2p_1 \cdot p_3) + 8m_1 m_2 m_3 m_4 \right] \\ &\quad + \frac{4(m_2 - m_4)(m_1 - m_3)}{M_X^2} \left[m_1 m_4 (2p_2 \cdot p_3) - m_1 m_2 (2p_3 \cdot p_4) \right. \\ &\quad \left. + m_3 m_4 (2p_1 \cdot p_2) - m_2 m_3 (2p_1 \cdot p_4) \right] \\ &\quad + \frac{(m_2 - m_4)^2 (m_1 - m_3)^2}{M_X^4} \left[(2p_1 \cdot p_3)(2p_2 \cdot p_4) - 2m_2 m_4 (2p_1 \cdot p_3) \right. \\ &\quad \left. + 2m_1 m_3 (2p_2 \cdot p_4) - 4m_1 m_2 m_3 m_4 \right]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Ta được

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{M}^2|}{4g_1^2 g_2^2} (2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)^2 &= \frac{2}{m_1^4} \left[(2p_1 \cdot p_2)(2p_3 \cdot p_4) + (2p_2 \cdot p_3)(2p_1 \cdot p_4) - 2(1 - \varepsilon)(2p_2 \cdot p_4) \right] \\ &\quad + \frac{4(\gamma - \delta)\varepsilon}{X m_1^2} \left[\delta(2p_2 \cdot p_3) - \gamma(2p_3 \cdot p_4) + (1 - \varepsilon)\delta(2p_1 \cdot p_2) - \gamma(1 - \varepsilon)(2p_1 \cdot p_4) \right] \\ &\quad + \frac{(\gamma - \delta)^2 \varepsilon^2}{X^2} \left[\frac{(2p_1 \cdot p_3)(2p_2 \cdot p_4)}{m_1^4} - 2\gamma\delta \frac{2p_1 \cdot p_3}{m_1^2} + 2(1 - \varepsilon) \frac{2p_2 \cdot p_4}{m_1^2} - 4\gamma\delta(1 - \varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Tiếp tục biến đổi ta có

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{M}^2|}{4g_1^2 g_2^2} (2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)^2 &= 2 \left[2E \frac{2p_3 \cdot p_4}{m_1^2} + 2\eta \frac{2p_2 \cdot p_3}{m_1^2} - 2(1 - \varepsilon) \frac{2p_2 \cdot p_4}{m_1^2} \right. \\ &\quad \left. + 4\gamma\delta(1 - E - \eta) + 8\gamma\delta(1 - \varepsilon) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4(\gamma - \delta)\varepsilon}{X} \left[\delta \frac{2p_2 \cdot p_3}{m_1^2} - \gamma \frac{2p_3 \cdot p_4}{m_1^2} + 2E\delta(1 - \varepsilon) - 2\eta\gamma(1 - \varepsilon) \right] \\
& + \frac{(\gamma - \delta)^2 \varepsilon^2}{X^2} \left[\begin{aligned} & 2(1 - E - \eta) \frac{2p_2 \cdot p_4}{m_1^2} - 4\gamma\delta(1 - E - \eta) \\ & + 2(1 - \varepsilon) \frac{2p_2 \cdot p_4}{m_1^2} - 4\gamma\delta(1 - \varepsilon) \end{aligned} \right]. \quad (5.57)
\end{aligned}$$

Trong gần đúng đến bậc hai (giữ lại các số hạng vô cùng bé bậc 1,2 do sau này các vô cùng bé bậc nhất sẽ triệt tiêu hết), ta thấy rằng các biểu thức trong trong (5.52) trong công thức (5.57) là các vô cùng bé bậc 1 và 2, do đó số hạng thứ 2 và 3 bên vế phải của biểu thức (5.57) sẽ có bậc từ 3 trở lên, vì thế ta có thể bỏ qua. Vậy ta thu được

$$\begin{aligned}
& \frac{|\mathcal{M}^2|}{4g_1^2 g_2^2} (2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)^2 \\
& = 2 \left[\begin{aligned} & 2E(2\varepsilon - 2E - \varepsilon^2 - \delta^2 + \gamma^2) + 2\eta(2\varepsilon - 2\eta - \varepsilon^2 + \delta^2 - \gamma^2) \\ & - 2(1 - \varepsilon)(2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \delta^2 - \gamma^2) + 4\gamma\delta(1 - E - \eta) + 8\gamma\delta(1 - \varepsilon) \end{aligned} \right]. \quad (5.58)
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
& \frac{|\mathcal{M}^2|}{16g_1^2 g_2^2} (2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)^2 = E(2\varepsilon - 2E - \varepsilon^2 - \delta^2 + \gamma^2) \\
& + \eta(2\varepsilon - 2\eta - \varepsilon^2 + \delta^2 - \gamma^2) - (1 - \varepsilon)(2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \delta^2 - \gamma^2) \\
& + 2\gamma\delta(3 - E - \eta - 2\varepsilon). \quad (5.59)
\end{aligned}$$

Tiếp tục rút gọn và bỏ đi các vô cùng bé bậc 3 trở lên ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{|\mathcal{M}^2|}{16g_1^2 g_2^2} (2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)^2 = -2E^2 + E(-2 + 4\varepsilon - \varepsilon^2 - \delta^2 + \gamma^2 - 2\gamma\delta) \\
& + \eta(2\varepsilon - 2\eta - \varepsilon^2 + \delta^2 - \gamma^2) - (1 - \varepsilon)(2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \delta^2 - \gamma^2) + 2\gamma\delta(3 - \eta - 2\varepsilon). \quad (5.60)
\end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{M}^2|}{16g_1^2g_2^2} (2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)^2 &= -2E^2 + (-2 + 4\varepsilon - \varepsilon^2 - \delta^2 + \gamma^2 - 2\gamma\delta)E \\ &+ \eta(2\varepsilon - 2\eta - \varepsilon^2 + \delta^2 - \gamma^2 - 2\gamma\delta) - (1 - \varepsilon)(2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \delta^2 - \gamma^2 - 6\gamma\delta) + 2\gamma\delta\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Tiếp tục chỉ giữ lại số hạng vô cùng bé bậc 1,2 ở vế phải ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{M}^2|}{16g_1^2g_2^2} (2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)^2 &\approx -2E^2 + (-2 + 4\varepsilon)E + \eta(2\varepsilon - 2\eta) + \varepsilon(2\eta - 2\varepsilon) \\ &- (2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \delta^2 - \gamma^2 - 6\gamma\delta) \\ &= -2E^2 + (-2 + 4\varepsilon)E + 2\eta\varepsilon - 2\eta^2 + 2\eta\varepsilon - 2\varepsilon^2 - 2\eta + 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + 6\gamma\delta \\ &= -2E^2 + (4\varepsilon - 2)E - 2\eta^2 + 4\eta\varepsilon - 2\varepsilon^2 - 2\eta + 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + 6\gamma\delta. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Ta thu được biểu thức cuối cùng của bình phương biên độ tán xạ là

$$\frac{|\mathcal{M}^2|}{16g_1^2g_2^2} = \frac{-2E^2 + (4\varepsilon - 2)E + 2\varepsilon - 2\eta - 2\eta^2 + 4\eta\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + 6\gamma\delta}{(2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)^2}. \quad (5.63)$$

Thay biến mới trong (5.37) và biểu thức (5.63) vào (5.33), ta có vi phân của độ rộng phân rã là

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} \left(\frac{4\pi^3\hbar}{g_1^2g_2^2m_1} \right) = \frac{-2E^2 + (4\varepsilon - 2)E + 2\varepsilon - 2\eta - 2\eta^2 + 4\eta\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + 6\gamma\delta}{(2E + 2\eta - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - X)^2} dE. \quad (5.64)$$