

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ



Đào Minh Tiến

**PHÂN TÍCH TĨNH VÀ ĐỘNG TÂM NANO HỮU CƠ
NHIỀU LỚP CÓ KỂ ĐẾN HIỆU ỨNG KÍCH THÚC NHỎ**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT CƠ KHÍ VÀ CƠ KỸ THUẬT

Hà Nội - 2025

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ

Đào Minh Tiến

**PHÂN TÍCH TÍNH VÀ ĐỘNG TÂM NANO HỮU CƠ
NHIỀU LỚP CÓ KỂ ĐẾN HIỆU ỨNG KÍCH THƯỚC NHỎ**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT CƠ KHÍ VÀ CƠ KỸ THUẬT

Ngành: Cơ kỹ thuật

Mã số: 9.52.01.01

Xác nhận của Học viện
Khoa học và Công nghệ

Người hướng dẫn 1
(Ký, ghi rõ họ tên)

Người hướng dẫn 2
(Ký, ghi rõ họ tên)

PGS.TS Đỗ Văn Thơm

PGS.TS Đào Như Mai

Hà Nội - 2025

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận án: "**Phân tích tĩnh và động tấm nano hữu cơ nhiều lớp có kể đến hiệu ứng kích thước nhỏ**" là công trình nghiên cứu của chính mình dưới sự hướng dẫn khoa học của tập thể hướng dẫn. Luận án sử dụng thông tin trích dẫn từ nhiều nguồn tham khảo khác nhau và các thông tin trích dẫn được ghi rõ nguồn gốc. Các kết quả nghiên cứu của tôi được công bố chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các số liệu, kết quả được trình bày trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ một công trình nào khác ngoài các công trình công bố của tác giả. Luận án được hoàn thành trong thời gian tôi làm nghiên cứu sinh tại Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Hà Nội, ngày 16 tháng 10 năm 2025

Tác giả luận án

Đào Minh Tiến

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tác giả xin chân thành cảm ơn tập thể cán bộ hướng dẫn PGS.TS Đỗ Văn Thơm và PGS.TS Đào Như Mai đã nhiệt tình hướng dẫn, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp tôi hoàn thành luận án. Đồng thời, tác giả cũng thể hiện lòng biết ơn đối với các góp ý quý báu của GS.TSKH Nguyễn Tiến Khiêm, GS.TSKH Nguyễn Đông Anh, GS.TS Hoàng Xuân Lượng và GS.TS Trần Văn Liên.

Tác giả trân trọng cảm ơn Ban Lãnh đạo, các phòng chức năng Học viện Khoa học và Công nghệ, phòng Đào tạo, Đảng ủy Viện kỹ thuật PK-KQ, Chỉ huy và các đồng nghiệp trong Phòng Thiết bị bay không người lái vì sự giúp đỡ quý báu trong thời gian tác giả thực hiện luận án.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn tới gia đình, người thân và bạn bè đã động viên, khích lệ, giúp đỡ tôi trong quá trình thực hiện luận án.

Tác giả luận án

Đào Minh Tiến

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN	
LỜI CẢM ƠN	
MỤC LỤC	i
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT.....	iv
DANH MỤC CÁC BẢNG.....	vi
DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ	vii
MỞ ĐẦU	1
CHƯƠNG 1 TỔNG QUAN VỀ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU	5
1.1. Tổng quan về vật liệu nano.....	5
1.1.1. Khái niệm vật liệu nano.....	5
1.1.2. Tính chất của vật liệu nano	5
1.1.3. Các phương pháp chính chế tạo vật liệu nano	6
1.1.4. Ứng dụng của vật liệu nano	7
1.2. Tổng quan về lý thuyết tính toán tấm và các phương pháp tính	9
1.2.1. Các lý thuyết tính toán tấm.....	9
1.2.2. Các phương pháp tính tấm.....	10
1.3. Tổng quan về tính toán kết cấu nano	12
1.3.1. Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ.....	13
1.3.2. Lý thuyết cặp ứng suất cải tiến	15
1.3.3. Lý thuyết trường gradient biến dạng cải tiến.....	16
1.3.4. Các công trình sử dụng đàn hồi phi cục bộ tính toán kết cấu tấm nano	16
1.3.5. Mô hình cản Kelvin-Voigt.....	20
1.3.6. Tấm nano hữu cơ gồm nhiều lớp vật liệu và các công trình nghiên cứu đối với kết cấu này	22
1.4. Các kết quả chính đã được công bố	28
1.5. Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu	29
1.6. Những nội dung luận án tập trung nghiên cứu	30
1.7. Kết luận chương 1	30

CHƯƠNG 2 CƠ SỞ LÝ THUYẾT TÍNH TOÁN TẮM NANO HỮU CƠ CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA HIỆU ỨNG KÍCH THƯỚC.....	32
2.1. Thiết lập bài toán và các giả thiết	32
2.1.1. Mô hình bài toán.....	32
2.1.2. Các giả thiết.....	33
2.2. Quan hệ ứng xử cơ học của tấm.....	33
2.2.1. Trường chuyển vị	33
2.2.2. Trường biến dạng	34
2.2.3. Quan hệ ứng suất – biến dạng.....	35
2.2.4. Nguyên lý năng lượng toàn phần cực tiểu.....	36
2.3. Mô hình phần tử hữu hạn.....	45
2.3.1. Mô hình phần tử	45
2.3.2. Các ma trận, véc tơ phần tử	46
2.4. Xử lý biên.....	54
2.5. Kết luận chương 2	54
CHƯƠNG 3 PHÂN TÍCH TĨNH TẮM NANO HỮU CƠ CÓ XÉT ĐẾN HIỆU ỨNG KÍCH THƯỚC VÀ KHẢO SÁT ẢNH HƯỞNG CỦA MỘT SỐ YẾU TỐ	56
3.1. Thuật toán PTHH giải bài toán uốn tĩnh của tấm nano hữu cơ	56
3.2. Kiểm tra độ tin cậy của chương trình tính.....	58
3.3. Khảo sát ảnh hưởng của một số tham số đến đáp ứng uốn tĩnh của tấm nano hữu cơ	64
3.4. Kết luận chương 3	71
CHƯƠNG 4 PHÂN TÍCH ĐÁP ỨNG ĐỘNG CỦA TẮM NANO HỮU CƠ CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA HIỆU ỨNG KÍCH THƯỚC VÀ KHẢO SÁT ẢNH HƯỞNG CỦA MỘT SỐ YẾU TỐ	73
4.1. Bài toán dao động riêng.....	73
4.1.1. Thuật toán PTHH và chương trình tính dao động riêng	73
4.1.2. Kiểm tra sự hội tụ và độ chính xác của chương trình tính	75
4.1.3. Kết quả tính khảo sát ảnh hưởng của một số tham số đến đáp ứng dao động riêng của tấm nano hữu cơ.....	79

4.2. Bài toán dao động cưỡng bức	83
4.2.1. Mô hình bài toán.....	83
4.2.2. Thuật toán PTHH và chương trình tính.....	84
4.2.3. Kiểm tra độ tin cậy của chương trình tính.....	88
4.2.4. Kết quả tính toán số.....	89
4.3. Kết luận chương 4	100
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	102

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

1. Các ký hiệu bằng chữ Latin

a	Chiều dài tấm
b	Chiều rộng tấm
h	Chiều dày tấm
C_e	Ma trận cản phần tử
K_e	Ma trận độ cứng phần tử tấm
M_e	Ma trận khối lượng phần tử
q_e	Véc tơ chuyển vị phần tử
q_i	Véc tơ chuyển vị tại nút phần tử
u, v, w	Các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong tấm
u_0, v_0, w_0	Các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kỳ trên mặt trung bình
x, y, z	Các toạ độ Đề các

2. Các ký hiệu bằng chữ Hi Lạp

∇	Toán tử Laplace
ε	Véc tơ biến dạng tại một điểm
ρ	Khối lượng riêng của vật liệu
l	Hệ số phi cục bộ
ν	Hệ số Poisson
σ	Véc tơ ứng suất tại một điểm
ω	Tần số dao động riêng

3. Các chữ viết tắt

PTHH	Phần tử hữu hạn
SSSS	Tấm tựa đơn trên bốn cạnh

CCCC	Tấm ngàm trên bốn cạnh
LA1	Lời giải dạng giải tích, f_z là hàm đa thức
LA2	Lời giải dạng giải tích, f_z là hàm sin
LA3	Lời giải dạng giải tích, f_z là hàm sin hyperbol
LA4	Lời giải FEM, f_z là hàm đa thức
LA5	Lời giải FEM, f_z là hàm sin
LA6	Lời giải FEM, f_z là hàm sin hyperbol
FEM	Phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method)
FSDT	Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (First-order shear deformation theory)
HSDT	Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (High-order shear deformation theory)
NET	Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ (Nonlocal Elasticity Theory)
MCST	Lý thuyết cặp ứng suất cải tiến
MSGT	Lý thuyết trường biến dạng cải tiến
TSDT	Lý thuyết biến dạng cắt bậc ba
FDM	phương pháp sai phân hữu hạn.
DQM	Phương pháp cầu phương vi phân
DEM	Phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên cầu phương vi phân
IGA	Phương pháp đẳng hình học
FG	Cơ tính biến đổi
FGM	Vật liệu cơ tính biến đổi
GF	Tấm làm bằng vật liệu cơ tính biến đổi
FGCNT	Vật liệu cơ tính biến đổi có gia cường ống cac bon

DANH MỤC CÁC BẢNG

Bảng 3.1. Sự hội tụ của chuyển vị lớn nhất w của tấm nano chịu tác dụng của tải trọng tĩnh, luận án sử dụng lưới chia phần tử tăng dần, $a/h = 10$, [45] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba.....	60
Bảng 3.2. So sánh chuyển vị không thứ nguyên w của tấm nano với các kết quả giải tích, [45] dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba.....	61
Bảng 3.3. So sánh chuyển vị lớn nhất w của tấm nhiều lớp với các tỷ lệ chiều dày các lớp khác nhau ($l_i = 0$).....	62
Bảng 3.4. So sánh chuyển vị w và ứng suất của tấm với các kết quả tính bằng nhiều phương pháp khác nhau ($l_i = 0$).....	63
Bảng 3.5. Các đặc trưng cơ tính từng lớp vật liệu của nano hữu cơ [48].....	64
Bảng 3.6. Chuyển vị uốn w^* của tấm nano hữu cơ phụ thuộc tỷ lệ a/h và tham số phi cực bộ l_i , $b/a = 1$	66
Bảng 3.7. Ứng suất σx^* của tấm nano hữu cơ phụ thuộc tỷ lệ a/h và tham số đàn hồi phi cực bộ l_i , $b/a = 1$	67
Bảng 3.8. Chuyển vị uốn w^* của tấm nano phụ thuộc tỷ lệ b/a , $a/h=10$	69
Bảng 3.9. Ứng suất σx^* của tấm nano hữu cơ phụ thuộc tỷ lệ b/a và tham số đàn hồi phi cực bộ l_i , $a/h=10$	70
Bảng 4.1. Sự hội tụ của tần số dao động riêng không thứ nguyên ω của tấm nano khi lưới chia phần tử tăng dần, $a/h = 10$, tài liệu [45] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba	77
Bảng 4.2. So sánh tần số dao động riêng đầu tiên ω của tấm nano với các kết quả giải tích, tài liệu [27] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba.....	78
Bảng 4.3. Tần số dao động riêng đầu tiên ω_1^* của tấm nano hữu cơ phụ thuộc vào a/h và tham số đàn hồi phi cực bộ, $b/a = 1$, $\omega_1^* = \omega_1 h \sqrt{\rho_{glass} / E_{glass}}$	80
Bảng 4.4. Sáu tần số dao động riêng đầu tiên ω_i^* của tấm nano hữu cơ phụ thuộc vào a/h và tham số đàn hồi phi cực bộ, f_z là hàm đa thức, $b/a = 1$, $\omega_i^* = \omega_i h \sqrt{\rho_{glass} / E_{glass}}$	81

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ

Hình 1.1. Tấm nano dùng trong bộ cộng hưởng [3].	12
Hình 1.2. Tấm nano dùng trong cảm biến [5].	13
Hình 1.3. Mô hình cản nhớt Kelvin-Voigt	21
Hình 1.3. Tấm hữu cơ gồm năm lớp vật liệu [68]-[69].	24
Hình 1.4. Một số ứng dụng của tấm biến đổi năng lượng mặt trời thành điện năng [68]- [70].	25
Hình 2.1. Mô hình tấm nano hữu cơ nhiều lớp.	32
Hình 2.2. Biểu diễn phần tử tứ giác 4 nút.	46
Hình 3.1. Sơ đồ thuật toán giải bài toán tấm nano hữu cơ chịu tác dụng của tải trọng tĩnh.	57
Hình 3.2 Biểu đồ biểu diễn sai số của chuyển vị và ứng suất phụ thuộc l_i/h_i ứng với các trường hợp của tỷ lệ $a/h, f_z$ là hàm đa thức, $a/b=1$	68
Hình 3.3. Biểu đồ biểu diễn sai số của ứng suất và chuyển vị theo tỷ lệ l_i/h_i ứng với các trường hợp của tỷ lệ $b/a, f_z$ là hàm đa thức, $a/h=10$	71
Hình 4.1. Sơ đồ giải thuật giải quyết bài toán dao động riêng tấm nano hữu cơ	75
Hình 4.2. Sự khác biệt của tần số dao động riêng đầu tiên của tấm nano hữu cơ trong trường hợp có tính đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước và trường hợp bỏ qua hiệu ứng kích thước, f_z là hàm đa thức	82
Hình 4.3. Sự khác biệt của sáu tần số dao động riêng đầu tiên của tấm nano hữu cơ trong trường hợp có tính đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước và trường hợp bỏ qua hiệu ứng kích thước, f_z là hàm đa thức.	82
Hình 4.4. Bốn dạng dao động riêng đầu tiên của tấm nano hữu cơ ứng với lý thuyết tấm sử dụng hàm f_z dạng đa thức, $a/h=10$, KQ giải tích	83
Hình 4.5. Mô hình bài toán tấm nano hữu cơ chịu tác dụng của tải trọng biến đổi theo thời gian.	84
Hình 4.6. Sơ đồ giải thuật đối với bài toán dao động cưỡng bức.	87
Hình 4.7. Quy luật biến đổi của tải trọng theo thời gian	88
Hình 4.8. So sánh đáp ứng chuyển vị điểm giữa tấm theo thời gian.	89

Hình 4.9. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và theo thông số cản khác nhau, tấm liên kết tựa đơn trên các cạnh (SSSS), tải tam giác, f_z là hàm đa thức, $l_i/h_i = 1$, $a/h=50$, $t^*=t/2t_1$	91
Hình 4.10. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và theo thông số cản khác nhau, tấm liên kết ngàm tất cả các cạnh (CCCC), tải tam giác, $l_i/h_i = 1$, $a/h=50$	91
Hình 4.11. Sự thay đổi của chuyển vị theo thời gian và theo thông số cản khác nhau, SSSS, tải hình sin, $l_i/h_i = 1$, $\omega = 5\pi$, $a/h=50$, $t^*=t/2t_1$	92
Hình 4.12. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và theo thông số cản khác nhau, CCCC, tải hình sin, $l_i/h_i = 1$, $\omega = 5\pi$, $a/h=50$	92
Hình 4.13. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ b/a , SSSS, tải hình sin, $l_i/h_i = 1$, $\alpha = 10^{-6}$, $\omega = 5\pi$, $a/h=50$	94
Hình 4.14. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ b/a , tấm liên kết ngàm tất cả các cạnh (CCCC), tải hình sin, $l_i/h_i = 1$, $\alpha = 10^{-6}$, $\omega = 5\pi$, $a/h=50$	94
Hình 4.15. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ b/a , tấm liên kết tựa đơn trên cả bốn cạnh (SSSS), tải tam giác, $l_i/h_i = 1$, $\alpha = 10^{-6}$, $\omega = 5\pi$, $a/h=50$	94
Hình 4.16. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ b/a , tấm liên kết ngàm tất cả các cạnh (CCCC), tải tam giác, $l_i/h_i = 1$, $\alpha = 10^{-6}$, $\omega = 5\pi$, $a/h=50$	95
Hình 4.17. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ l_i/h_i , tấm liên kết tựa đơn trên cả bốn cạnh (SSSS), tải hình sin, $b/a = 1$, $\alpha = 10^{-5}$, $\omega = 5\pi$, $a/h=50$	96
Hình 4.18. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ l_i/h_i , tấm liên kết tựa đơn trên cả bốn cạnh (SSSS), tải tam giác, $b/a = 1$, $\alpha = 10^{-5}$, $\omega = 5\pi$, $a/h=50$	96
Hình 4.19. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ b/a , tấm liên kết tựa đơn tất cả các cạnh SSSS, tải hình sin, $l_i/h_i = 1$, $\alpha = 10^{-6}$, $\omega = \omega_1 t_1$, $a/h=50$	97

- Hình 4.20. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ b/a , tấm liên kết ngàm tất cả các cạnh CCCC, tải hình sin, $l_i/h_i = 1, \alpha = 10^{-6}, \omega = \omega_1 t_1, a/h=50$ 98
- Hình 4.21. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và hệ số cản α , tấm liên kết tựa đơn trên cả bốn cạnh (SSSS), tải hình sin, $l_i/h_i = 1, \omega = \omega_1 t_1, b/a=2, a/h=50$ 98
- Hình 4.22. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và hệ số cản α , tấm liên kết ngàm tất cả các cạnh (CCCC), tải hình sin, $l_i/h_i = 1, \omega = \omega_1 t_1, b/a=2, a/h=50$ 99
- Hình 4.23. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ l_i/h_i , tấm liên kết tựa đơn trên cả bốn cạnh (SSSS), tải hình sin, $\alpha = 10^{-6}, \omega = \omega_1 t_1, b/a=1, a/h=50$ 99

MỞ ĐẦU

1. Tính cấp thiết của đề tài

Tiêu thụ năng lượng là nhu cầu tất yếu của tiến bộ xã hội, trong những năm trước đây, để phục vụ nhu cầu năng lượng, con người đã khai thác và sử dụng rất nhiều các loại nhiên liệu hóa thạch, các nguồn nhiên liệu này đang dần cạn kiệt, và hệ quả của việc khai thác và sử dụng như vậy gây ra cũng vô cùng tàn khốc, đó là hủy hoại môi trường sống của nhân loại. Cũng từ lý do đó, nhu cầu đối với các nguồn năng lượng thân thiện môi trường, có khả năng tái tạo đang trở nên vô cùng cấp thiết. Và thật may mắn, con người đã tìm ra cách sử dụng nguồn năng lượng mặt trời, đây là một trong những nguồn năng lượng tái tạo hứa hẹn nhất, hoàn toàn không gây ô nhiễm môi trường và không bị cạn kiệt. Để thu được nguồn năng lượng này, đơn giản nhất là tạo ra các tấm hấp thụ năng lượng trực tiếp từ ánh sáng mặt trời, biến quang năng thành các dạng năng lượng khác phục vụ cho nhu cầu của con người (Người ta thường gọi đó là tấm pin mặt trời). Để sử dụng các tấm hấp thụ năng lượng mặt trời và chuyển thành điện năng có hiệu quả cao, cần phải có những nghiên cứu chi tiết tổng thể về các khía cạnh như vật liệu, sự làm việc, chế tạo,... và một trong số đó là nghiên cứu đáp ứng cơ học của tấm nano hữu cơ nhiều lớp (đây là kết cấu ứng dụng để làm tấm pin mặt trời).

Vì vậy, đề tài ***“Phân tích tĩnh và động tấm nano hữu cơ nhiều lớp có kể đến hiệu ứng kích thước nhỏ”*** là vấn đề mang tính cấp thiết, có ý nghĩa khoa học, mang tính thời sự và thực tiễn.

2. Mục tiêu nghiên cứu của luận án

Nghiên cứu về tấm nano nói chung và tính toán cơ học kết cấu tấm nano hữu cơ nhiều lớp nói riêng là một lĩnh vực rộng lớn, trong khuôn khổ luận án, tác giả tập trung nghiên cứu đáp ứng tĩnh và động của kết cấu tấm nano hữu cơ

trên cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn, lý thuyết đàn hồi phi cục bộ với các mục tiêu cụ thể như sau:

- Xây dựng các mô hình bài toán, biểu thức quan hệ cơ học, thuật toán phân tích chuyển vị, trạng thái ứng suất, biến dạng của tấm nano hữu cơ chịu tải trọng tĩnh và động trên cơ sở lý thuyết đàn hồi phi cục bộ.

- Xây dựng các mô đun, lập trình tính toán trong môi trường Matlab để phân tích chuyển vị, ứng suất, tần số dao động riêng, đáp ứng tĩnh và đáp ứng động của tấm nano hữu cơ có xét đến hiệu ứng kích thước.

- Khảo sát ảnh hưởng của một số yếu tố kết cấu, hệ số phi cục bộ, điều kiện biên...đến ứng xử cơ học của tấm nano hữu cơ.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu của luận án

3.1. Đối tượng nghiên cứu

a) Kết cấu

- Tấm nano hữu cơ gồm nhiều lớp vật liệu.

b) Tải trọng

Tải trọng tĩnh và động (biến đổi theo thời gian).

3.2. Phạm vi nghiên cứu

Phạm vi nghiên cứu của bài toán bao gồm:

- Bài toán uốn tĩnh tuyến tính cho tấm nano hữu cơ nhiều lớp có kể đến hiệu ứng kích thước nhỏ (Chuyển vị, ứng suất tĩnh).

- Bài toán dao động tự do tuyến tính cho tấm nano hữu cơ nhiều lớp có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước nhỏ (Tần số dao động tự do và các dạng dao động riêng).

- Bài toán dao động cưỡng bức tuyến tính cho tấm nano hữu cơ nhiều lớp có kể đến hiệu ứng kích thước nhỏ (Chuyển vị cưỡng bức biến đổi theo thời gian).

4. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu được lựa chọn là phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) dựa trên lý thuyết phi cục bộ và nguyên lý năng lượng toàn phần cực tiểu để xây dựng các phương trình cơ bản đối với các bài toán uốn tĩnh, dao động tự do và dao động cưỡng bức của tấm nano hữu cơ.

Chương trình máy tính được lập trình trên nền phần mềm Matlab. Kết quả tính toán của luận án được so sánh với các kết quả nghiên cứu sử dụng các phương pháp khác của các công trình đã được công bố để chứng minh tính chính xác của mô hình toán cơ, lý thuyết tính toán và chương trình máy tính.

Cấu trúc của luận án:

Luận án được cấu trúc thành 4 chương chính.

Mở đầu: Luận án nêu bật tính cấp thiết của đề tài, mục tiêu, đối tượng, phạm vi và phương pháp nghiên cứu.

Chương 1: Tổng quan về vấn đề nghiên cứu.

Chương này trình bày tổng quan về vật liệu nano, công nghệ chế tạo, ứng dụng của vật liệu nano. Các lý thuyết tính toán đối với kết cấu nano nói chung cũng như các kết quả nghiên cứu đạt được đối với các kết cấu nano.

Chương 2: Cơ sở lý thuyết tính toán tấm nano hữu cơ có xét đến hiệu ứng kích thước.

Chương này trình bày các biểu thức tính toán chuyển vị, biến dạng, ứng suất, từ đó xây dựng phương trình cân bằng cho tấm nano hữu cơ dựa trên nguyên lý năng lượng toàn phần cực tiểu. Biến đổi phương trình cân bằng tổng quát của tấm nano hữu cơ về dạng phương trình cân bằng của phương pháp phần tử hữu hạn.

Chương 3: Phân tích đáp ứng tĩnh tấm nano hữu cơ có xét đến hiệu ứng kích thước và khảo sát ảnh hưởng của một số yếu tố.

Chương này đưa ra thuật toán phân tử hữu hạn và phương pháp giải tích dựa trên lời giải của Navier để tính toán uốn tĩnh của tấm nano hữu cơ có xét đến hiệu ứng kích thước. Các kiểm chứng được thực hiện thông qua các so sánh giữa hai lời giải và với các kết quả đã công bố. Cuối cùng là các kết quả khảo sát số đối với chuyển vị và ứng suất của tấm nano hữu cơ.

Chương 4: Phân tích đáp ứng động tấm nano hữu cơ có xét đến hiệu ứng kích thước và khảo sát ảnh hưởng của một số yếu tố.

Chương này trình bày thuật toán phân tử hữu hạn và phương pháp giải tích dựa trên lời giải của Navier để tính toán tần số dao động riêng của tấm nano hữu cơ có xét đến hiệu ứng kích thước. Bài toán động lực học của tấm nano hữu cơ được đề xuất sử dụng lời giải bằng phương pháp phân tử hữu hạn. Các ví dụ kiểm chứng được thực hiện bằng các so sánh để minh họa sự tin cậy của cả hai lời giải đề xuất trong luận án. Cuối cùng là các kết quả khảo sát số đối với tần số dao động, chuyển vị biến đổi theo thời gian của tấm nano hữu cơ.

Kết luận và kiến nghị: Các kết quả chính luận án đã thực hiện, những đóng góp mới của luận án cùng các kiến nghị khác.

Danh mục công trình của tác giả

Tài liệu tham khảo

CHƯƠNG 1 TỔNG QUAN VỀ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Chương này trình bày những kiến thức chung về vật liệu nano, công nghệ chế tạo, ứng dụng của vật liệu nano. Các lý thuyết tính toán đối với kết cấu nano nói chung cũng như các kết quả nghiên cứu đạt được của các nhà khoa học trong nước và trên thế giới đối với các kết cấu nano, kết cấu nano hữu cơ nhiều lớp. Từ đó, luận án xác định nội dung cần tập trung giải quyết.

1.1. Tổng quan về vật liệu nano

1.1.1. Khái niệm vật liệu nano

Vật liệu nano là một loại vật liệu có cấu trúc ở dạng các sợi, các hạt, ống, hoặc các tấm mỏng,... có kích thước nằm trong khoảng từ 1 đến 100 nanomet. Công nghệ nano là công nghệ liên quan đến việc phân tích, thiết kế, tính toán, chế tạo và ứng dụng các kết cấu, thiết bị và hệ thống trên cơ sở thay đổi kích thước, hình dáng trên quy mô nanomet.

Năm 1959, khái niệm về công nghệ nano lần đầu được nhà vật lý người Mỹ Richard Feynman đề cập đến khi ông đề cập tới khả năng tạo ra vật chất ở kích thước siêu nhỏ từ quá trình tập hợp các nguyên tử, phân tử. Đến năm 1980, nhờ sự phát triển của công nghệ, nhờ sự ra đời của các thiết bị phân tích hiện đại như kính hiển vi đầu dò quét, thiết bị này có khả năng quan sát các kích thước từ vài nguyên tử hay phân tử, do vậy các nhà khoa học mới hiểu rõ hơn về kết cấu nano.

1.1.2. Tính chất của vật liệu nano

So với vật liệu thông thường, vật liệu nano có tính chất vượt trội về cơ, lý, hóa tính. Tính chất đặc biệt của vật liệu nano là do từ kích thước của vật liệu này rất nhỏ so với các kích thước của vật liệu thông thường. Vật liệu nano nằm giữa tính chất lượng tử của nguyên tử và tính chất khối của vật liệu. Đối với vật

liệu khối, độ dài tới hạn của các tính chất rất nhỏ so với độ lớn của vật liệu, nhưng đối với vật liệu ở kích thước nano thì điều đó không còn đúng nên các tính chất đặc biệt bắt đầu từ nguyên nhân này [1], [2].

1.1.3. Các phương pháp chính chế tạo vật liệu nano

Vật liệu nano có thể được chế tạo bằng một trong bốn phương pháp phổ biến là phương pháp hoá ướt, phương pháp cơ học, phương pháp bốc hơi nhiệt và phương pháp hình thành từ pha khí. Mỗi phương pháp đều có những ưu điểm và nhược điểm khác nhau; phụ thuộc vào điều kiện trang thiết bị, yêu cầu vật liệu, ... để lựa chọn phương pháp phù hợp.

a) Phương pháp hóa ướt

Phương pháp hóa ướt bao gồm nhiều phương pháp như thủy nhiệt, sol-gel, và đồng kết tủa. Đối với phương pháp hóa ướt, các dung dịch chứa i-on khác nhau được pha và trộn lẫn với nhau theo một tỷ lệ thành phần phù hợp, trong các điều kiện áp suất, nhiệt độ, pH phù hợp mà các vật liệu nano được kết tủa từ dung dịch. Sau các bước lọc, sấy khô, người ta thu được các vật liệu có kích thước nano.

Phương pháp này có ưu điểm là vật liệu nano có thể chế tạo được rất đa dạng về chủng loại, chúng có thể là vật liệu hữu cơ, vô cơ, kim loại. Chi phí sản xuất theo phương pháp này rẻ tiền và có thể chế tạo được một khối lượng lớn vật liệu nhưng phương pháp hóa ướt cũng có nhược điểm là các hợp chất có lẫn và liên kết với phân tử chất lỏng có thể là một thách thức không nhỏ. Phương pháp sol-gel không đem lại hiệu suất cao, sản phẩm có thể không đảm bảo đồng nhất.

b) Phương pháp cơ học

Phương pháp này gồm phương pháp nghiền, tán, hợp kim cơ học. Đối với phương pháp này, vật liệu đầu vào dạng bột được nghiền nhỏ để tạo ra kích thước bé hơn. Ngày nay, các máy nghiền thường dùng là máy nghiền quay hay

máy nghiền kiểu hành tinh. Ưu điểm của phương pháp này là đơn giản, dụng cụ chế tạo rẻ tiền và có thể tạo ra một lượng lớn vật liệu. Mặc dù vậy, nhược điểm của phương pháp này là các hạt bị kết tụ với nhau, kích thước hạt phân bố không đồng nhất, do đó không dễ đạt được hạt có kích thước nhỏ và dễ bị nhiễm bẩn từ các dụng cụ chế tạo. Phương pháp này phù hợp dùng để chế tạo vật liệu không phải là hữu cơ (như là kim loại).

c) Phương pháp bốc hơi nhiệt

Gồm các phương pháp quang khắc, bốc hơi trong môi trường chân không. Phương pháp này bốc hơi nhiệt áp dụng hiệu quả trong chế tạo lớp bao phủ bề mặt hoặc màng mỏng, người ta cũng có thể sử dụng phương pháp này để chế tạo hạt nano bằng cách tạo vật liệu nano từ tấm chắn. Tuy nhiên, nhược điểm của phương pháp này là có hiệu quả không cao để chế tạo vật liệu ở quy mô công nghiệp.

d) Phương pháp tạo ra từ pha khí

Phương pháp này bao gồm phương pháp nổ điện, nhiệt phân, đốt laser, bốc hơi nhiệt độ cao, plasma. Nguyên lý của phương pháp này là tạo ra vật liệu nano từ pha khí. Phương pháp đốt laser có ưu điểm là tạo được nhiều loại vật liệu nhưng nhược điểm là hiệu suất của chúng không cao nên chỉ giới hạn trong quy mô phòng thí nghiệm. Nhiệt phân là phương pháp có từ rất lâu, là phương pháp tạo các vật liệu đơn giản như silicon, carbon. Phương pháp plasma xoay chiều và một chiều có thể dùng để tạo rất nhiều vật liệu khác nhau nhưng có nhược điểm là không thích hợp để chế tạo vật liệu hữu cơ vì nhiệt độ có thể lên đến 9000°C.

1.1.4. Ứng dụng của vật liệu nano

Công nghệ nano cho phép chế tạo và sử dụng vật liệu ở phạm vi phân tử, bổ sung và tạo ra tính chất cơ lý đặc biệt của vật liệu, giảm kích thước của các

kết cấu, hệ thống đến kích thước rất nhỏ. Đây được xem là cuộc cách mạng công nghiệp quan trọng, thúc đẩy sự phát triển trong mọi lĩnh vực đặc biệt là trong y sinh học, năng lượng, môi trường, công nghệ thông tin, quân sự... và tác động đến toàn xã hội [1].

a) Trong y – sinh học

Các hạt nano giống như các robot nano thâm nhập vào cơ thể. Giúp con người có thể tác động ở quy mô phân tử hay tế bào. Ngày nay, các nhà khoa học đã chế tạo ra hạt nano có đặc tính sinh học có thể dùng để hỗ trợ dẫn truyền thuốc, chẩn đoán bệnh, tiêu diệt các tế bào.

b) Năng lượng

Nền công nghệ nano góp phần chế tạo và nâng cao chất lượng lưu trữ và chuyển đổi của pin năng lượng mặt trời, tăng hiệu suất và hiệu quả hấp thụ và lưu trữ của pin và siêu tụ điện, chất siêu dẫn được dùng làm dây dẫn điện để truyền tải điện đường dài.

c) Điện tử – cơ khí

Công nghệ nano giúp con người tạo các linh kiện điện tử cỡ nhỏ với tốc độ xử lý rất nhanh để tích hợp vào các thể hệ máy tính nano hay sử dụng vật liệu nano để làm các thiết bị lưu trữ thông tin cực nhỏ, màn hình điện thoại, máy tính. Bên cạnh đó, công nghệ nano tạo ra các vật liệu nano siêu bền, siêu nhẹ. Vật liệu nano còn được dùng trong sản xuất các thiết bị xe hơi, máy bay và tàu vũ trụ.

d) Thực phẩm và may mặc

Ngành may mặc đã bước đến bước tiến mới khi sử dụng các hạt nano bạc. Loại nano này có khả năng đặc biệt như thu hút và tiêu diệt các loại vi khuẩn tạo ra mùi hôi khó chịu trong quần áo. Đây là một ứng dụng hữu ích, hiện tại đã được sử dụng trên một số mẫu quần áo dễ tiếp xúc với mồ hôi, nhất là trong thể thao.

Không dừng lại ở đó, công nghệ nano có thể làm cho thực phẩm không những thay đổi mùi vị mà còn nhiều dinh dưỡng hơn. Ngoài ra, công nghệ nano cũng sẽ giúp giữ các loại thực phẩm trong thời gian lâu hơn bằng cách tạo ra những vật liệu bao gói thực phẩm có khả năng tiêu diệt vi khuẩn.

e) Môi trường

Công nghệ nano giúp loại bỏ và thay thế những hóa chất, vật liệu và quy trình sản xuất lâu đời truyền thống để tạo ra ô nhiễm bằng một quy trình công nghệ tiên tiến, tiết kiệm năng lượng, gọn nhẹ, giảm ảnh hưởng xấu đến môi trường. Con người đã chế tạo thành công các màng lọc nano, chúng góp phần lọc được các phân tử tạo ô nhiễm; các chất xúc tác, hấp phụ nano dùng để xử lý chất thải nhanh chóng và hiệu quả... Trong đó, nổi bật là máy lọc nước, máy lọc không khí nano. Đây là loại máy sử dụng công nghệ nano với các màng lọc gồm nhiều lỗ rỗng vi mô nhỏ nhằm loại bỏ sạch các tạp chất, bụi bẩn và vi khuẩn trong nguồn nước đầu vào. Ngoài ra, các màng lọc nano còn giúp giữ lại các chất khoáng tự nhiên có sẵn trong nước và có ích cho cơ thể.

Công nghệ nano ra đời thực sự là một bước ngoặt đối với nhiều lĩnh vực đời sống. Hiện nay công nghệ nano vẫn còn đang tiếp tục được nghiên cứu để khám phá và ứng dụng hết những ưu điểm tuyệt vời mà công nghệ này đem lại.

1.2. Tổng quan về lý thuyết tính toán tấm và các phương pháp tính

1.2.1. Các lý thuyết tính toán tấm

Có nhiều lý thuyết biến dạng cắt dùng để tính toán tấm được đề xuất, trong đó có bốn lý thuyết thường được dùng như sau:

a) Lý thuyết tấm cổ điển

Lý thuyết này tính toán đơn giản, vì đây là lý thuyết chỉ chứa 3 ẩn chuyển vị. Tuy nhiên, do không tính đến biến dạng cắt, do vậy lý thuyết tấm cổ điển chỉ phù hợp cho tính toán các kết cấu mỏng.

b) Lý thuyết tấm Mindlin và cắt bậc nhất

Lý thuyết tấm bậc nhất của Mindlin đã khắc phục được hạn chế của lý thuyết tấm cổ điển là xét đến biến dạng cắt, do vậy phù hợp cho tính toán các kết cấu mỏng và trung bình. Nhưng lý thuyết này chỉ xem xét biến dạng cắt không đổi theo chiều dày tấm, không thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt bằng không tại hai mặt trên và dưới. Do đó cần đến hệ số hiệu chỉnh cắt phụ thuộc vào rất nhiều điều kiện như vật liệu, kết cấu hình học, điều kiện biên, v.v. (thường lấy bằng 5/6).

c) Lý thuyết tấm bậc cao

Ưu điểm chính của lý thuyết tấm bậc cao là ứng suất cắt phân bố dạng parabol dọc theo chiều dày tấm nhưng đảm bảo thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt bằng không tại hai mặt trên và dưới, do vậy phù hợp cho tính toán các kết cấu có chiều dày trung bình và dày.

Tuy vậy, trường chuyển vị phức tạp. Khối lượng tính toán nhiều, làm tăng bậc tự do của kết cấu trong phân tích PTHH.

d) Lý thuyết tấm bậc cao cải tiến

Theo lý thuyết tấm bậc cao cải tiến, ứng suất cắt phân bố dạng parabol dọc theo chiều dày tấm, đồng thời cũng thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt bằng không tại hai mặt trên và dưới, xét đến biến dạng dọc theo chiều dày tấm, gần hơn với trạng thái ứng suất thực tế của kết cấu. Và không cần thêm bất kỳ hệ số hiệu chỉnh cắt nào.

Mặc dù vậy, lý thuyết này vẫn có nhược điểm là việc tìm các hàm bậc cao cải tiến đối với trường chuyển vị là tương đối phức tạp.

1.2.2. Các phương pháp tính tấm

Có nhiều phương pháp khác nhau để tính toán tấm thông thường cũng như tấm nano bao gồm nhóm các phương pháp giải tích như lời giải Navier, lời giải Lévy, Ritz; nhóm các phương pháp số như phương pháp phần tử hữu hạn

(FEM), phương pháp phần tử hữu hạn trơn (S-FEM), phương pháp sai phân hữu hạn (FDM), phương pháp cầu phương vi phân (DQM), phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên cầu phương vi phân (DEM), phương pháp đẳng hình học (IGA); và nhóm các phương pháp giải tích và bán giải tích.

Ưu điểm của các phương pháp giải tích là có thể đưa ra lời giải chính xác, độ tin cậy cao tuy nhiên biến đổi khá phức tạp và thường chỉ tính các kết cấu đơn giản, có tính chất đối xứng. Các phương pháp số chỉ đưa ra nghiệm xấp xỉ tuy nhiên phương pháp này hiệu quả với các kết cấu phức tạp với các dạng điều kiện biên và tải trọng khác nhau. Ngày nay, do sự phát triển mạnh mẽ của phương pháp tính và công nghệ thông tin, các kết quả của phương pháp số được kiểm nghiệm qua nhiều công trình công bố đã khẳng định được độ tin cậy và tính chính xác.

a) Các phương pháp giải tích

Lời giải Navier, lời giải Lévy, Rayleigh-Ritz, Galerkin Vlasov

Ưu điểm: Có thể đưa ra lời giải chính xác, độ tin cậy cao.

Nhược điểm: Biến đổi phức tạp, chỉ dùng để tính các kết cấu có mô hình hình học đơn giản và bị hạn chế về điều kiện biên.

b) Các phương pháp số

Phần tử hữu hạn (FEM), phương pháp phần tử hữu hạn làm trơn (S-FEM), phương pháp sai phân hữu hạn (FDM), phương pháp cầu phương vi phân (DQM), phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên cầu phương vi phân (DEM), phương pháp đẳng hình học (IGA).

Ưu điểm: Có thể tính các kết cấu phức tạp.

Nhược điểm: Thường chỉ đưa ra nghiệm xấp xỉ, không đưa ra được nghiệm chính xác.

Tuy nhiên, với sự phát triển của phương pháp tính và công nghệ thông tin, các kết quả của phương pháp số đã được kiểm nghiệm qua nhiều công trình

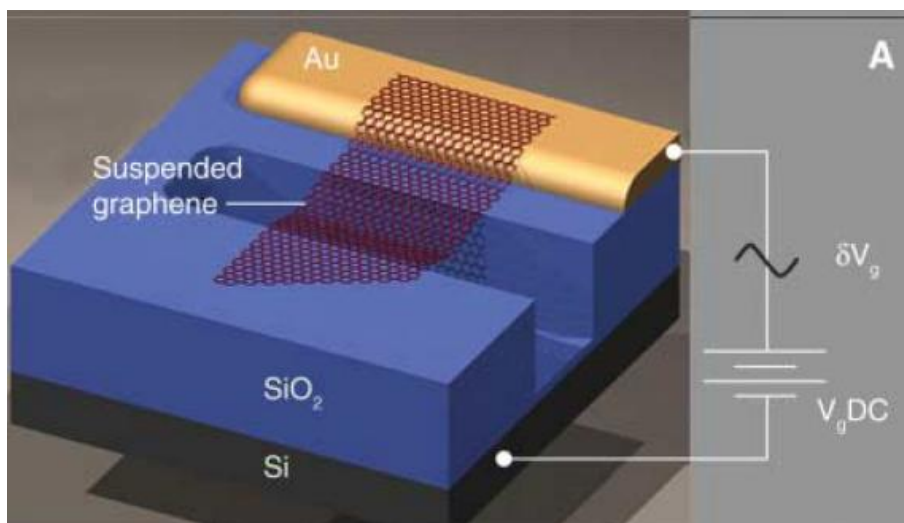
công bố đã khẳng định được độ tin cậy và tính chính xác.

c) Các phương pháp bán giải tích.

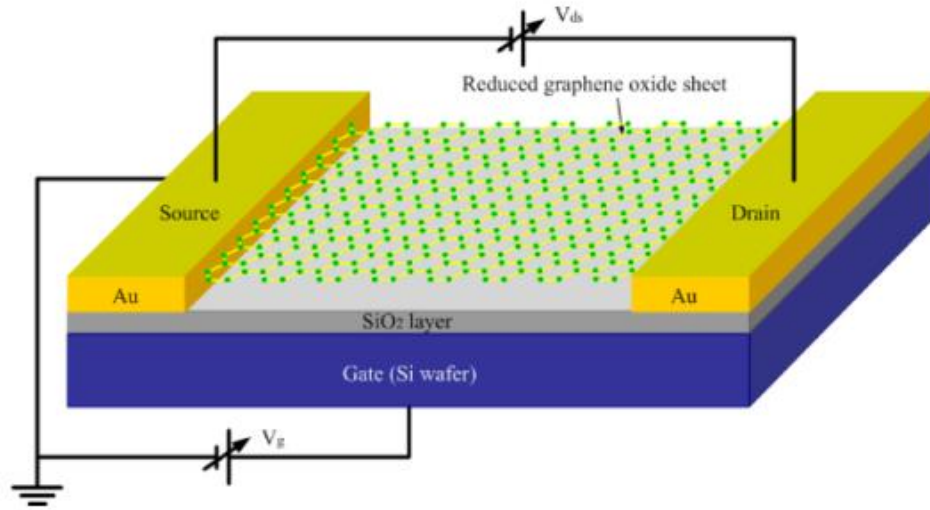
Kết hợp giữa phương pháp giải tích và lời giải số.

1.3. Tổng quan về tính toán kết cấu nano

Ngày nay, với sự phát triển của khoa học và công nghệ đòi hỏi các thiết bị có kích thước nhỏ gọn, đặc biệt là các thiết bị trong y học, điện tử, hàng không vũ trụ. Vì vậy việc nghiên cứu cấu trúc nano luôn được các nhà khoa học trên thế giới quan tâm. Tầm kích thước nano là một trong những kết cấu có vai trò quan trọng và thường được sử dụng rộng rãi trong các bộ cộng hưởng [3], [4] (Hình 1.1), các cảm biến [5], [6],[7] (Hình 1.2) và các màng mỏng [8].



Hình 1.1. Tầm nano dùng trong bộ cộng hưởng [3].



Hình 1.2. Tấm nano dùng trong cảm biến [5].

Các tính toán lý thuyết và phân tích thực nghiệm cho thấy các lý thuyết tính toán cổ điển cho các kết cấu có kích thước lớn cỡ milimet trở lên không còn phù hợp đối với các kết cấu có kích thước nhỏ cỡ micromet, nanomet. Để tính toán cho các kết cấu có kích thước nhỏ cỡ micromet và nanomet có nhiều lý thuyết đã được đưa ra, trong đó có ba lý thuyết chính bao gồm: Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ (Nonlocal elasticity theory); Lý thuyết cặp ứng suất cải tiến (Modified couple stress theory) và Lý thuyết trường gradient biến dạng cải tiến (Modified strain gradient theory).

1.3.1. Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ

Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ (Nonlocal elasticity theory) được đề xuất đầu tiên bởi Eringen [9], [10], Eringen và Edelen [11] ở dạng tích phân theo phương trình sau:

$$\sigma_{ij} = \int_{\bar{x}} k(|x - \bar{x}|, \kappa) \sigma_{ij}^L dx \quad (1.1)$$

trong đó:

σ_{ij} và σ_{ij}^L lần lượt là các thành phần tenxơ ứng suất theo lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và lý thuyết đàn hồi thông thường.

k là hàm được xác định thông qua tham số đàn hồi phi cục bộ κ và khoảng

cách lân cận $|x - \bar{x}|$.

$\kappa = e_0 a$ với a là hằng số phụ thuộc loại vật liệu, e_0 tham số tỷ lệ kích thước vật liệu như kích thước hạt, đường kính phân tử. Giá trị của e_0 được tính toán thông qua mô phỏng động lực học phân tử hoặc xác định bằng thực nghiệm.

Eringen [12] đã viết lại phương trình (1.1) ở dạng vi phân như sau:

$$(1 - l^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^L \quad (1.2)$$

trong đó $l = \kappa$, ∇^2 là toán tử Laplace.

Các kết quả nghiên cứu về lý thuyết đàn hồi phi cục bộ trong giai đoạn từ năm 1972 đến năm 2002 được Eringen tổng hợp trong [13].

So với phương trình dạng tích phân (1.1), phương trình dạng vi phân (1.2) được sử dụng nhiều hơn trong tính toán kết cấu nano do tính đơn giản của nó. Tuy nhiên, phương trình dạng vi phân có thể cho kết quả trái ngược trong một số trường hợp [14], [15], [16].

Mô hình đàn hồi phi cục bộ do Eringen xây dựng trong xem xét một tích chập tích phân có trường đầu vào và đầu ra tương ứng là biến dạng đàn hồi và ứng suất. Hạt nhân của tích chập này là lời giải cho bài toán vi phân với điều kiện biên triệt tiêu ở vô cực. Lúc này, định luật tích phân có thể được thay thế một cách thuận tiện bằng phép toán tương đương vi phân. Đây là mô hình tác động đến ứng suất do Eringen đề xuất cho sóng Rayleigh. Sau đó, định luật tích phân này đã được sử dụng cho các mô hình cấu trúc có biên liên tục, mà không chú ý đến thực tế là các điều kiện biên ứng suất tự nhiên xuất hiện khi tính toán cho miền bị chặn. Khi được xây dựng đúng cách bằng cách thêm các điều kiện biên, kết quả tính toán trở nên không chính xác, do sự cân bằng khi xét điều kiện không còn khớp trên trường ứng suất. Do đó, không có nghiệm nào thỏa mãn cho bài toán đàn hồi phi cục bộ tồn tại, và đây là lý do tại sao các kết quả nghịch lý được tìm ra trong một số trường hợp. Tuy nhiên, cách tiếp cận theo lý thuyết này đơn giản và dễ tiếp cận, cho nghiệm chấp nhận được trong đa số các trường hợp, do vậy lý thuyết này vẫn được đông đảo các nhà khoa học chấp nhận và sử

dụng để tính toán cho các kết cấu nano.

1.3.2. Lý thuyết cặp ứng suất cải tiến

Lý thuyết cặp ứng suất cải tiến (Modified couple stress theory) được đề xuất bởi Yang và các đồng nghiệp [17] trên cơ sở cải tiến lý thuyết cặp ứng suất cổ điển của Toupin [18], Mindlin [19], Tiersten và Koiter [20]. Bằng cách bổ sung cặp tenxơ ứng suất đối xứng, từ đó làm giảm tham số tỷ lệ chiều dài từ hai xuống một.

Điều này làm cho lý thuyết cặp ứng suất cải tiến ưu việt hơn vì việc xác định tham số tỷ lệ kích thước khá khó khăn. Năng lượng biến dạng U là một hàm tổng hợp của cả biến dạng, độ cong [20]

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (1.3)$$

trong đó:

m_{ij} là các thành phần đạo hàm của cặp tenxơ ứng suất đối xứng.

χ_{ij} là các thành phần của tenxơ độ cong đối xứng.

Các giá trị m_{ij} và χ_{ij} được xác định như sau [21]:

$$\chi_{xx} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \chi_{yy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \chi_{zz} = \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \quad (1.4)$$

$$\chi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right), \chi_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial z} + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right), \chi_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial z} + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right) \quad (1.5)$$

Đối với vật liệu trong giai đoạn đàn hồi tuyến tính, m_{ij} được xác định:

$$m_{ij} = \frac{E}{1+\nu} l^2 \chi_{ij} \quad (1.6)$$

trong đó l là tham số tỉ lệ kích thước vật liệu. Giá trị của l được xác định như trong các công trình [21], [22].

Lý thuyết này tuy đơn giản hơn so với lý thuyết cặp ứng suất cổ điển vì đã làm giảm số tham số tỷ lệ chiều dài từ hai xuống một, và thông thường người ta dùng lý thuyết này để tính toán cho các kết cấu ở kích thước cỡ micro mét,

để giải quyết các kết cấu có kích thước nhỏ hơn (như cỡ nano mét) thì người ta sẽ dùng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ hoặc lý thuyết trường gradient biến dạng cải tiến.

1.3.3. Lý thuyết trường gradient biến dạng cải tiến

So với lý thuyết cặp ứng suất cải tiến (Modified strain gradient theory), năng lượng biến dạng theo lý thuyết trường biến dạng cải tiến có thêm hai thành phần: gradient giãn nở và gradient ứng suất lệch. Do đó, năng lượng biến dạng được xác định như sau [23]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk} \eta_{ijk} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (1.7)$$

Các thành phần xuất hiện trong công thức (1.7) được xác định như trong tài liệu [23].

Lý thuyết này được áp dụng để mô phỏng và tính toán các kết cấu kích thước cỡ nano mét, tuy nhiên nhược điểm lớn nhất của lý thuyết này là số tham số kích thước nhiều hơn lý thuyết đàn hồi phi cục bộ nên gây khó khăn tính toán hơn.

1.3.4. Các công trình sử dụng đàn hồi phi cục bộ tính toán kết cấu tấm nano

Kết hợp các lý thuyết tính toán kết cấu micromet, nanomet ở trên với các lý thuyết tính toán tấm ta được các lớp bài toán đa dạng khác nhau. Trong các lý thuyết trên, lý thuyết đàn hồi phi cục bộ là một trong những lý thuyết được sử dụng phổ biến để tính toán kết cấu nano vì lý thuyết này khá đơn giản và cho kết quả khá chính xác với mô phỏng. Do đó, luận án sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ để tính toán tấm nano. Sau đây tác giả tóm tắt một số kết quả tính toán kết cấu nano trên cơ sở lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và các lý thuyết tính toán tấm.

Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ kết hợp lý thuyết tấm cổ điển (Kirchhoff)

Lý thuyết tấm cổ điển có ưu điểm đơn giản, chỉ chứa ba hàm ẩn chuyển

vị, tuy nhiên lý thuyết này bỏ qua biến dạng cắt, đây là lý thuyết chỉ phù hợp cho tính toán các kết cấu mỏng. Lu và các cộng sự [24] sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ trên cơ sở lý thuyết tấm cổ điển để nghiên cứu ảnh hưởng của kích thước hình học tấm đến ứng xử tĩnh và ổn định của tấm nano đẳng hướng. Duan và Wang [25] sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ kết hợp với lý thuyết tấm cổ điển tìm ra lời giải chính xác cho tấm nano hình tròn chịu uốn với biên ngàm và tựa đơn. Cũng sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và lời giải Lévy, Aksencer và Aydogdu [26] đã tính ra tải trọng nén tới hạn và các tần số dao động riêng của tấm nano hình chữ nhật. Shakouri [27] và cộng sự đã dùng lời giải Galekin để phân tích dao động riêng của tấm nano đẳng hướng dưới nhiều điều kiện biên khác nhau. Ansari [28], Phadikar và Pradhan [29] và cộng sự là những nhà khoa học sớm áp dụng phương pháp mô phỏng hữu hạn trên cơ sở lý thuyết đàn hồi phi cục bộ để tính toán kết cấu dầm và tấm nano. Trên cơ sở lý thuyết tấm cổ điển và lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, Phadikar và Pradhan [29] sử dụng phương pháp mô phỏng hữu hạn để phân tích uốn tĩnh, dao động riêng và ổn định của dầm nano, tấm nano làm bằng vật liệu đẳng hướng. Nguyen và các cộng sự [30] sử dụng phương pháp tiếp cận đẳng hình học để nghiên cứu ứng xử cơ học tấm FG nano. Nhiều kết quả nghiên cứu khác về bài toán uốn tĩnh, dao động riêng, ổn định cơ, ổn định nhiệt của tấm, ống nano sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ trên cơ sở lý thuyết tấm cổ điển được công bố trong các công trình [31-34]

Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ kết hợp lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất

Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đã xét đến biến dạng trượt, do vậy phù hợp cho tính toán các kết cấu mỏng và trung bình. Tuy nhiên biến dạng trượt không đổi theo chiều dày tấm, không thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt triệt tiêu tại hai mặt trên và dưới của kết cấu. Do đó cần đến hệ số hiệu chỉnh cắt, hệ số này phụ thuộc vào rất nhiều điều kiện như vật liệu, kết cấu hình học, điều kiện

biên,... (thường lấy bằng 5/6). Pradhan và Phadikar sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ kết hợp cả lý thuyết tấm cổ điển và lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất để phân tích dao động riêng [35] và ổn định [36] của tấm graphene nhiều lớp. Ansari và các cộng sự đã sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để nghiên cứu dao động của tấm graphene một lớp [37] và nhiều lớp [38] với nhiều điều kiện biên khác nhau. Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất cũng được nhiều tác giả sử dụng để phân tích kết cấu nano làm bằng vật liệu FG. Hosseini-Hashemi [39] và cộng sự đã sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ kết hợp với lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất để tính toán dao động riêng của tấm FGM nano hình tròn. Kết hợp lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất Anjomshoa và Tahani [40] đã phân tích dao động riêng tấm graphene hình tròn, elip đẳng hướng trên nền đàn hồi. Golmakani và Rezatalab [41] phân tích dao động phi tuyến của tấm graphene. Dastjerdi và các cộng sự [42], [43] đã phân tích dao động phi tuyến của tấm graphene hình tròn, bán khuyên một lớp và nhiều lớp có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ. Ansari và Norouzzadeh [44] nghiên cứu ổn định tĩnh đối với tấm nano dựa trên lý thuyết đàn hồi phi cục bộ kết hợp với lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất và cách tiếp cận đẳng hình học.

Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ kết hợp lý thuyết biến dạng trượt bậc ba

Aghababbaei và Reddy [45] đã kết hợp giữa lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và lý thuyết biến dạng cắt bậc ba để chỉ rõ ứng xử uốn tĩnh, dao động tự do của tấm nano với biên tựa đơn. Cũng sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và lý thuyết biến dạng trượt bậc ba, Pradhan và Sahu [46] đã nghiên cứu ảnh hưởng của hệ số đàn hồi phi cục bộ đến tải trọng tới hạn và tần số dao động riêng của tấm graphene một lớp tựa đơn. Ổn định của tấm graphene một lớp cũng được nghiên cứu bởi Ansari và Sahmani [47] bằng cách kết hợp giữa lý thuyết đàn hồi phi cục bộ với ba lý thuyết tính tấm khác nhau lý thuyết tấm cổ điển, lý

thuyết biến dạng cắt bậc nhất và lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Daneshmehr và cộng sự đã phân tích ổn định [48] và dao động riêng [49] của tấm FG nano. Nami và nhóm nghiên cứu [50] đã tính toán ổn định của tấm FG nano trên cơ sở áp dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ TSDT.

Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ kết hợp lý thuyết biến dạng trượt bậc cao

Lý thuyết tấm bậc cao có ưu điểm là ứng suất cắt phân bố dạng parabol dọc theo chiều dày tấm, đồng thời thỏa mãn điều kiện triệt tiêu ứng suất cắt tại hai mặt trên và dưới, do vậy phù hợp cho tính toán các kết cấu trung bình và dày. Tuy nhiên trường chuyển vị phức tạp và xảy ra hiện tượng khóa cắt đối với trường hợp tấm mỏng, do vậy phải sử dụng một số kỹ thuật để khử hiện tượng trên như sử dụng tích phân giảm bậc hoặc sử dụng trường biến dạng cắt độc lập.

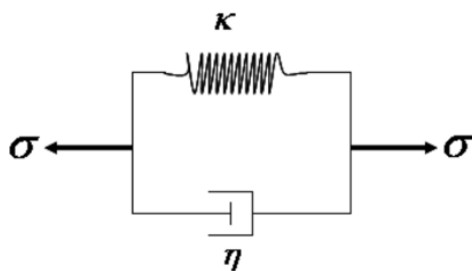
Sobhy [51] đã trình bày mô hình kết hợp giữa lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và lý thuyết biến dạng trượt bậc cao dạng hình sin của Thai và Choi [52]. Sử dụng phương pháp giải tích, Sobhy đã nghiên cứu dao động riêng, ổn định cơ và ổn định nhiệt của tấm graphene nhiều lớp trong nhiều điều kiện biên khác nhau. Phát triển hướng nghiên cứu của mình, trong các công trình [53], [54]. Sobhy đã phân tích uốn tĩnh của tấm graphene đẳng hướng, dị hướng một lớp trong môi trường nhiệt. Các tác giả Zenkour và Sobhy [55], Alzahrani và cộng sự [56], Thai và cộng sự [57] đã có những nghiên cứu về ổn định nhiệt, ổn định cơ-nhiệt của tấm graphen một lớp sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ kết hợp lý thuyết trượt bậc cao dạng hình sin của Touratier [58]. Belkorissat và cộng sự [59] đã tính toán tấm GF nano trên cơ sở lý thuyết HSDT dạng hypebol. Phung-Van và cộng sự đã chỉ rõ ứng xử tĩnh và động tấm FGCNT nano composite dựa trên lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và phương pháp tiếp cận đẳng hình học [60]. Zenkour và cộng sự [55] đã tính toán ổn định nhiệt của tấm nano trên nền đàn hồi bằng lý thuyết biến dạng cắt hình sin. Tran và cộng sự [61] sử dụng lý

thuyết biến dạng trượt bậc cao phân tích uốn tĩnh, ổn định tĩnh vào dao động riêng của vỏ nano. Ngoài ra, một vài công trình nghiên cứu khác về kết cấu nano cũng được tổng hợp trong công trình [62-64].

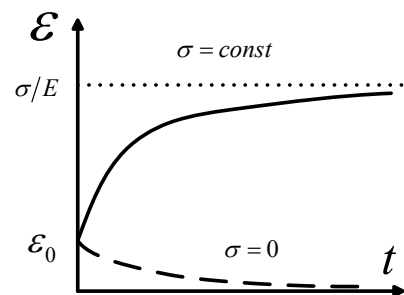
Nguyễn Văn Hậu [65] đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và Quasi-3D cùng với lời giải Ritz để phân tích bài toán tĩnh, ổn định tĩnh, dao động tự do của tấm cơ tính biến thiên (FGM) chịu tác dụng của tải trọng cơ học và nhiệt độ. Phạm Công Hồng [66] đã sử dụng các lý thuyết tấm cổ điển, lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất và lý thuyết biến dạng trượt bậc ba của Reddy cùng với phương pháp Galerkin phân tích bài toán phi tuyến tĩnh và động lực học tấm FGM tựa trên nền đàn hồi. Nguyễn Văn Thành [2] sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc ba của Reddy và bậc nhất kết hợp với tính phi tuyến hình học của Von Karman đã tìm ra được các phương trình cơ bản của bài toán phân tích phi tuyến tĩnh và động lực học của tấm FG-CNTRC. Bằng cách tiếp cận giải tích và sử dụng phương pháp Galerkin luận án đã phân tích tải tới hạn tĩnh và động lực học của tấm FG-CNTRC chịu tác dụng của hai loại tải cơ và tải nhiệt độ.

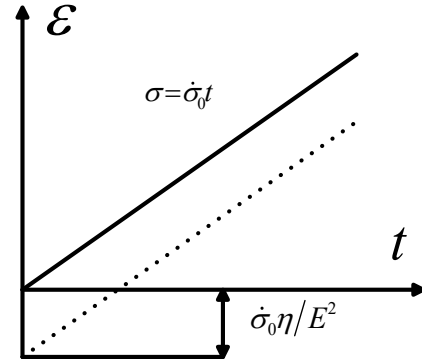
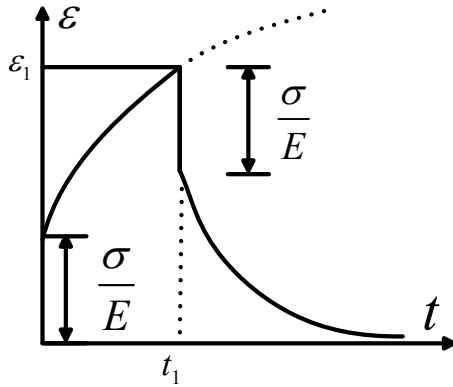
1.3.5. Mô hình cản Kelvin-Voigt

Luận án sử dụng mô hình cản nhớt của vật liệu theo mô hình của Kelvin-Voigt, nên phần này trình bày những kiến thức tổng quan về mô hình cản nhớt này. Mô hình Kelvin-Voigt gồm hai phần tử là một lò xo đàn hồi độ cứng k và một bộ cản nhớt ghép song song với nhau như trên Hình 1.3a.



a. Mô hình Kelvin-Voigt



b. Biên dạng khi $\sigma = const$ 

c. Biên dạng trong trường hợp không còn biến dạng dư

d. Độ lưu tỷ lệ với vận tốc biến dạng

Hình 1.3. Mô hình cản nhớt Kelvin-Voigt

Vì hai phần tử chịu cùng một ứng suất nên mô hình này cũng được gọi là mô hình đẳng ứng suất. Ứng suất tổng bằng tổng ứng suất trong lò xo và ứng suất trong bộ cản nhớt, do đó [67]:

$$\sigma = E\varepsilon + \chi \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (1.8)$$

trong đó E là tham số vật liệu, ε là biến dạng, χ là tham số cản nhớt của vật liệu và t là biến thời gian.

Các trường hợp riêng:

- Khi ứng suất $\sigma = const$ với điều kiện ban đầu $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ thì (1.8) có biên dạng là:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} - \left(\frac{\sigma}{E} - \varepsilon_0 \right) e^{-\frac{Et}{\chi}} = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-\frac{Et}{\chi}} \right) + \varepsilon_0 e^{-\frac{Et}{\chi}} \quad (1.9)$$

Đồ thị là đường nét liền trên hình 1.4b, có đường tiệm cận ngang $\varepsilon = \sigma/E$. Nếu cắt tải hoàn toàn, tức là $\sigma = 0$, đồ thị là đường nét đứt có đường tiệm cận $\varepsilon = 0$.

Nếu tại thời điểm $t = t_1$ khi biến dạng có giá trị $\varepsilon = \varepsilon_1$, tiến hành dỡ tải hoàn toàn thì kể từ thời điểm đó biến dạng thay đổi theo quy luật:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 e^{-\frac{E(t-t_1)}{\chi}} \quad (1.10)$$

Biến dạng giảm dần về không, không còn biến dạng dư (Hình 1.4c).

- Khi $\sigma = \sigma_0 t$, nghĩa là tải trọng tăng tỷ lệ theo thời gian, với điều kiện ban đầu $\varepsilon(t) = 0$ thì (1.8) có biến dạng và vận tốc biến dạng là:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} - \frac{\sigma_0 \chi}{E^2} \left(1 - e^{-\frac{Et}{\chi}}\right); \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{Et}{\chi}}\right) \quad (1.11)$$

Biến dạng gồm hai số hạng: số hạng đầu là biến dạng tĩnh tương ứng với ứng suất σ , số hạng sau là độ lưu tỷ lệ với vận tốc biến dạng $\dot{\varepsilon}(t)$ do ứng suất thay đổi. Độ lưu này bằng không ở thời điểm ban đầu và sau đó tăng dần, tiến tới tiệm cận với đường $\sigma_0 \chi / E^2$ (Hình 1.4d).

- Khi $\varepsilon = const$ thì (1.8) cho ứng suất là $\sigma = const$. Như vậy mô hình này không diễn tả hiện tượng chùng ứng suất.

Việc xác định hệ số cản nhớt χ của vật liệu theo mô hình Kelvin-Voigt tương đối khó khăn, đặc biệt là phải tiến hành thực nghiệm trên từng mẫu vật liệu cụ thể. Trong luận án này, tác giả chỉ xét trường hợp hệ số cản nhớt của vật liệu là biết trước và không thay đổi trong từng lớp vật liệu.

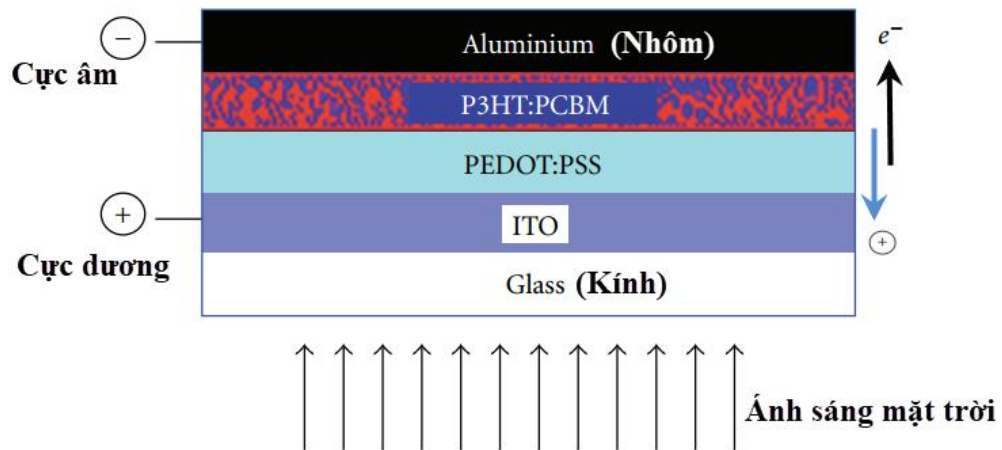
1.3.6. Tấm nano hữu cơ gồm nhiều lớp vật liệu và các công trình nghiên cứu đối với kết cấu này

Để hấp thụ năng lượng từ ánh sáng mặt trời, các nhà khoa học đã tạo ra những kết cấu dạng vô cơ, dạng hữu cơ và dạng kết hợp giữa hữu cơ với vô cơ. Loại tấm vô cơ thường được chế tạo từ Silic. Silic từ lâu đã và vẫn là chất đóng vai trò chủ đạo trong quá trình chuyển đổi năng lượng quang điện, tuy nhiên để đảm bảo khả năng hấp thụ đầy đủ quang phổ mặt trời, cần có Silic hạt lớn, độ tinh khiết cao để giảm thiểu sự kết hợp lại của các điện tích được giải phóng ra do ánh sáng mặt trời, do đó, quá trình tinh chế ở nhiệt độ cao và sự phát triển

của tinh thể cũng như tổn thất vật liệu trong quá trình chế tạo góp phần làm tăng chi phí của các thiết bị làm từ Silic thông thường.

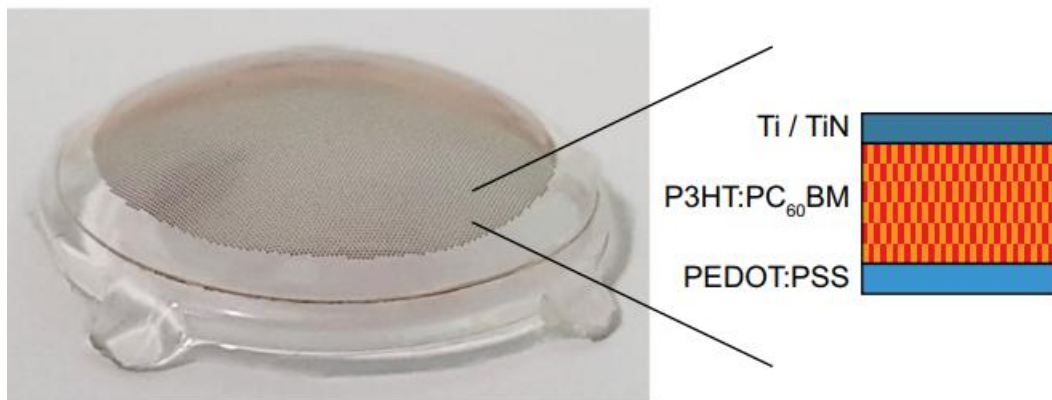
Ngày nay, các tấm hữu cơ gồm nhiều lớp vật liệu được tạo ra nhằm khắc phục các nhược điểm của tấm vô cơ và được sử dụng nhiều trong các kết cấu kích thước nhỏ, và luận án này chỉ tập trung tính toán cho tấm hữu cơ gồm năm lớp vật liệu như các công trình [68],[69]. Lớp kính (glass) có tác dụng cho ánh sáng từ mặt trời chiếu vào các lớp trong nhưng không cho ánh sáng bị phản xạ trở lại, lớp ITO (indium-doped tin oxide) đóng vai trò như điện cực dương, có tác dụng hút các lỗ trống (mang điện tích dương), lớp PEDOT: PSS (Poly(3,4-ethylenedioxythiophene): poly (styrenesulfonate)) có tác dụng truyền các lỗ trống đến lớp ITO, lớp P3HT: PCBM (Poly(3-hexylthiophene) (rrP3HT) and [6,6]-phenyl-C61-butyric acid methyl ester) gồm các nguyên tử có thể bị tách thành các electron và lỗ trống khi bị ánh sáng mặt trời chiếu vào, lớp nhôm (Al) có tác dụng hút các electron (mang điện tích âm) và trở thành điện cực âm.

Nguyên lý hoạt động của tấm hữu cơ nhiều lớp hấp thụ năng lượng mặt trời và biến đổi thành điện năng như sau: Khi ánh sáng mặt trời chiếu vào, ánh sáng truyền qua các lớp kính, ITO, PEDOT đến lớp P3HT:PCBM, năng lượng của ánh sáng mặt trời làm trạng thái năng lượng của nguyên tử trong lớp P3HT:PCBM tăng lên, làm electron trong lớp này nhảy lên mức năng lượng cao hơn, trở nên linh động hơn và dễ bị mất liên kết với hạt nhân, các electron bị bứt ra khỏi nguyên tử và di chuyển về lớp nhôm (Al) và lớp này trở thành dư điện tích âm. Phần còn lại của nguyên tử trở thành lỗ trống và mang điện tích dương, truyền qua lớp PEDOT: PSS đến lớp ITO làm cho lớp ITO trở thành thừa điện tích dương (cực dương). Như vậy tấm hữu cơ nhiều lớp đã biến năng lượng của ánh sáng mặt trời thành năng lượng điện tích lũy ở hai điện cực.



Hình 1.3. Tấm hữu cơ gồm năm lớp vật liệu [68]-[69].

Tấm nano hữu cơ nhiều lớp và tấm hấp thụ năng lượng mặt trời để biến đổi thành điện năng đã và đang được sử dụng rộng rãi trong đời sống và kỹ thuật, trên hình 1.4 thể hiện một số ứng dụng của tấm nano hữu cơ và tấm biến đổi năng lượng mặt trời thành điện năng [68].



- a. Tấm nano hữu cơ sử dụng trong thiết bị bán dẫn/dẫn điện dùng cho điều biến thần kinh [70]



b. Tấm hấp thụ năng lượng mặt trời sử dụng trong các vệ tinh không gian



c. Tấm hấp thụ năng lượng mặt trời sử dụng để sạc pin cho thiết bị điện tử

Hình 1.4. Một số ứng dụng của tấm biến đổi năng lượng mặt trời thành điện năng [68]- [70].

Việc nghiên cứu về tấm hấp thụ năng lượng mặt trời đã thu hút sự quan

tâm của các nhà khoa học và cũng đạt được một số thành tựu nhất định. Gundampati và các cộng sự [71] đã trình bày tổng quan về lĩnh vực tấm hấp thụ năng lượng mặt trời, thảo luận về các công nghệ sản xuất. Đồng thời nhóm tác giả cũng chỉ ra các thông số quan trọng để cải thiện hiệu suất của chúng. Abdulrazzaq cùng nhóm nghiên cứu [72] cũng đã đưa ra nghiên cứu tổng quan về vật liệu để chế tạo các tấm hấp thụ năng lượng mặt trời, nghiên cứu này cũng đưa ra các giới hạn cũng như khả năng cải tiến để nâng cao chất lượng và giảm giá thành của các kết cấu này. Tian và các đồng nghiệp [73] đã dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba để nghiên cứu đáp ứng ổn định phi tuyến của tấm hấp thụ năng lượng mặt trời tựa trên nền đàn hồi với nhiều điều kiện biên khác nhau, các tác giả đã sử dụng phương pháp Galerkin để giải quyết bài toán đặt ra, sau các kết quả tính toán, các tác giả kết luận rằng phương pháp tiếp cận này không chỉ áp dụng tính toán ổn định cho tấm hấp thụ năng lượng mặt trời mà có thể giải quyết cho kết cấu nhiều lớp khác. Trên cơ sở của lý thuyết biến thiên biến dạng cải tiến, Li và các cộng sự [68] đã tìm ra lời giải đối với bài toán uốn tĩnh, dao động tự do của tấm hấp thụ năng lượng mặt trời tựa trên nền đàn hồi. Lời giải dựa trên dạng nghiệm của Navier để tìm ra ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước tới đáp ứng chuyển vị tĩnh và tần số dao động riêng của tấm hấp thụ năng lượng mặt trời. Liu và các đồng nghiệp [74] đã sử dụng phương pháp đẳng hình học để mô phỏng đáp ứng ổn định của tấm hấp thụ năng lượng mặt trời chịu tác dụng đồng thời của tải trọng cơ và nhiệt, nghiên cứu cũng chỉ ra hiệu ứng kích thước nhỏ có tác động đến đáp ứng tải tới hạn trong bài toán ổn định tĩnh của tấm này.

1.3.7. Tình hình nghiên cứu trong nước về kết cấu dầm, tấm, vỏ có kích thước nano

Tại Việt Nam, việc tính toán để tìm ra quy luật ứng xử cơ học của kết cấu, cũng như mô hình các bài toán cơ học có liên quan đến kích thước nhỏ cỡ micro,

nano có xét đến các hiệu ứng điện-nhiệt- từ đã được các nhà cơ học quan tâm và đạt một số thành tựu. Giáo sư Nguyễn Tiến Khiêm và đồng nghiệp [75-77] phân tích ứng xử cơ học của các kết cấu dầm có gắn các lớp áp điện và có vết nứt dưới tác dụng của tải trọng tĩnh và động dựa trên lời giải dạng giải tích, trong đó khuyết tật vết nứt được mô hình thông qua các lò xo, đây là cách tiếp cận thông minh và thuận lợi cho tính toán. Gần đây, giáo sư Nguyễn Đông Anh [78-80] đã dựa trên lý thuyết biến thiên biến dạng và lý thuyết phi cục bộ để nghiên cứu dao động tự do và dao động cưỡng bức ngẫu nhiên phi tuyến của dầm, ông có kích thước nano khi chịu tác dụng đồng thời của tải trọng điện-từ, đây là những vấn đề có nhiều ý nghĩa khoa học. Giáo sư Nguyễn Đình Đức và đồng nghiệp [81] nghiên cứu ứng xử động lực học phi tuyến và dao động của các tấm hấp thụ năng lượng mặt trời gồm nhiều lớp vật liệu chịu tác dụng đồng thời của tải cơ học và tải trọng nhiệt. Trong đó, tấm hấp thụ năng lượng mặt trời gồm năm lớp nanocomposite được sản xuất bởi các vật liệu Al, P3HT-PCBM-PEDOT-PSS, Thủy tinh và Graphene. Phó giáo sư Lê Khả Hòa và nhóm nghiên cứu [82] đã sử dụng lời giải dạng giải tích để trình bày lời giải đối với bài toán uốn tĩnh và dao động riêng của tấm nano có cơ tính biến đổi. Dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn và lý thuyết dầm Timoshenko, Giáo sư Trần Văn Liên và cộng sự [83] chỉ rõ dao động tự do của tấm nano có chiều dày biến đổi trên cơ sở mô hình độ cứng động phi cục bộ. Giáo sư Nguyễn Đình Kiên và đồng nghiệp [84] phân tích dao động riêng đối với dầm nhiều lớp được gia cường bởi các ống nano bằng phần tử hai điểm nút, dầm chịu tác dụng của tải trọng di động theo thời gian. Trên cơ sở lý áp dụng thuyết biến dạng trượt cải tiến bốn ẩn số, nhóm nghiên cứu của giáo sư Trần Minh Tú đã áp dụng phương pháp giải tích để phân tích rõ uốn tĩnh của tấm composite gia cố bằng sợi nano [85]. Tiếp đó, lý thuyết tấm bốn ẩn số cũng được nhóm nghiên cứu sử dụng để trình bày kết quả tính toán điều khiển dao động chủ động tích cực cho kết cấu dạng vỏ trụ gia cố bằng sợi nano dựa trên phương pháp mô phỏng hữu hạn [86].

Về ứng xử cơ học của kết cấu tấm hữu cơ nhiều lớp dùng để hấp thụ năng lượng mặt trời có kể đến hiệu ứng kích thước nhỏ, theo nghiên cứu của nghiên cứu sinh, hiện tại chưa có nhiều nghiên cứu và công bố liên quan đến vấn đề này.

1.4. Các kết quả chính đã được công bố

Qua các phân tích trong các công trình trên rút ra một số kết luận sau:

Ngày nay, kết cấu nano được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực, công nghệ nano là một bước ngoặt đối với mọi mặt trong đời sống. Do đó việc phân tích, tính toán kết cấu nano là vấn đề cấp thiết.

Để nghiên cứu kết cấu nano có ba phương pháp chính: một là thí nghiệm trên kết cấu nano thực, hai là mô phỏng động lực phân tử và ba là phát triển các mô hình toán học ở cấp độ nano. Trong ba phương pháp trên thì hai phương pháp đầu phải thực hiện với các máy móc, trang thiết bị hiện đại, chi phí cao do đó việc phát triển các mô hình toán học ở cấp độ nano đang được tập trung nghiên cứu để đánh giá ứng xử cơ học của kết cấu nano.

Để tính toán cho các kết cấu có kích thước micromet, nanomet có nhiều lý thuyết đã được đưa ra trong đó có ba lý thuyết chính là Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, Lý thuyết cặp ứng suất cải tiến và Lý thuyết trường biến dạng cải tiến. Trong ba lý thuyết đó, lý thuyết đàn hồi phi cục bộ được sử dụng nhiều vì tính toán đơn giản và cho kết quả khá chính xác với mô phỏng động học phân tử.

Có nhiều lý thuyết khác nhau để tính toán kết cấu tấm như lý thuyết tấm cổ điển, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và lý thuyết Quasi - 3D. Trong các lý thuyết đó, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất được sử dụng phổ biến. Ngày nay nhiều nhà khoa học đã quan tâm đến lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và lý thuyết Quasi – 3D.

Đồng thời, có nhiều phương pháp khác nhau để tính toán kết cấu bao gồm các phương pháp giải tích, các phương pháp số và các phương pháp bán

giải tích. Ưu điểm của các phương pháp giải tích là có thể đưa ra lời giải chính xác, độ tin cậy cao tuy nhiên biến đổi khá phức tạp và thường chỉ tính các kết cấu đơn giản. Các phương pháp số chỉ đưa ra nghiệm xấp xỉ tuy nhiên phương pháp này hiệu quả với các kết cấu phức tạp với các dạng điều kiện biên và tải trọng khác nhau.

Các công trình nghiên cứu về kết cấu nano, micro được các nhà khoa học quan tâm từ nhiều năm nay. Các công trình đã tập trung xây dựng các lý thuyết tính toán kết cấu nano. Một số công trình sử dụng các lý thuyết trên cùng với phương pháp giải tích để tính toán uốn tĩnh, dao động riêng và ổn định cơ-nhiệt của các kết cấu dầm, tấm, ống nano. Gần đây, một số nhà khoa học đã sử dụng phương pháp số để phân tích ứng xử cơ học một số kết cấu nano như dầm, tấm.

1.5. Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

Từ tổng quan những vấn đề đã trình bày ở trên, tác giả nhận thấy có một số vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu đó là:

- Nghiên cứu đáp ứng uốn, dao động riêng không cản, có cản và động cưỡng bức của tấm, vỏ nano nhiều lớp nói chung và tấm nano hữu cơ nhiều lớp chịu tác dụng của các loại tải trọng cơ học khác nhau trên cơ sở sử dụng lý thuyết biến dạng trượt Mindlin, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao cải tiến.

- Nghiên cứu ổn định tĩnh và động của tấm nano nói chung và tấm nano hữu cơ nhiều lớp nói riêng trong môi trường đàn hồi, đàn nhớt chịu tác dụng của các loại tải trọng cơ học.

- Đáp ứng động lực học của các kết cấu nano và tấm nano hữu cơ nhiều lớp trong môi trường phức hợp, nhiều loại tải trọng tác dụng đồng thời.

- Tính toán tối ưu kích thước, tối ưu vật liệu cho các kết cấu dạng tấm nano hữu cơ nhiều lớp.

- Tính toán ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến các đáp ứng tĩnh và động của tấm nano hữu cơ nhiều lớp.

1.6. Những nội dung luận án tập trung nghiên cứu

Luận án kết hợp giữa phương pháp phân tử hữu hạn, lý thuyết biến dạng cắt cải tiến, lý thuyết đàn hồi phi cục bộ để phân tích uốn tĩnh, dao động tự do không cản và động cường bức của tấm nano hữu cơ. Tấm nano hữu cơ này được làm từ các lớp vật liệu hữu cơ có cơ tính khác nhau.

Kết quả tính toán của luận án được so sánh với các kết quả đã công bố bằng lời giải giải tích để kiểm tra tính chính xác và độ tin cậy của phương pháp và chương trình tính. Trên cơ sở đó, luận án sẽ khảo sát một số thông số hình học, tham số cản, điều kiện biên, tham số phi cục bộ,... đến đáp ứng uốn tĩnh, dao động tự nhiên không cản, dao động cường bức của nano hữu cơ nhiều lớp.

1.7. Kết luận chương 1

Chương này đã trình bày tổng quan về vật liệu nano, do các tính chất đặc biệt về cơ học, nhiệt, điện và hóa học nên kết cấu nano đã và đang được sử dụng rộng rãi trong các lĩnh vực y học, điện tử và các lĩnh vực khác. Tấm nano là một trong những thành tố quan trọng nhất thường được sử dụng làm thành phần trong các tấm phim mỏng, các bộ cộng hưởng và cảm biến. Do đó, việc nghiên cứu các dao động của cấu trúc nano là rất quan trọng đối với thiết kế và sản xuất thực tế.

Ngoài ra, các lý thuyết tính toán kết cấu nano cũng như các kết quả nghiên cứu của các nhà khoa học đối với các kết cấu này cũng được thảo luận cụ thể, từ đó luận án xác định nội dung chính mà nghiên cứu này thực hiện.

Tính toán, phân tích tĩnh, dao động tự do, dao động cường bức,... của kết cấu nano nói chung và tấm hữu cơ nói riêng được nhiều nhà khoa học trong

nước và ngoài nước quan tâm tính toán bằng nhiều phương pháp khác nhau như phương pháp giải tích, phương pháp bán giải tích, phương pháp số, phương pháp thực nghiệm,... Trong giai đoạn hiện nay với sự phát triển mạnh mẽ của khoa học công nghệ đặc biệt là ứng dụng máy tính vào trong tính toán thì phương pháp phần tử hữu hạn có rất nhiều ưu thế để giải các bài toán cơ học có khối lượng tính toán lớn. Vì vậy phương pháp này đã được rất nhiều các nhà khoa học nghiên cứu. Do đó, đề tài **“Phân tích tĩnh và động tấm nano hữu cơ nhiều lớp có kể đến hiệu ứng kích thước nhỏ”** mà luận án đặt ra có ý nghĩa khoa học và thực tiễn, đóng góp thêm một hướng nghiên cứu mới để chỉ rõ một số đáp ứng tĩnh và động của tấm nano hữu cơ chịu tác dụng của các dạng tải trọng khác nhau. Qua tìm hiểu các công trình nghiên cứu đã công bố trong giai đoạn hiện nay, với những hiểu biết tốt nhất của mình tác giả thấy rằng đây là vấn đề có nhiều ý nghĩa khoa học và thực tiễn.

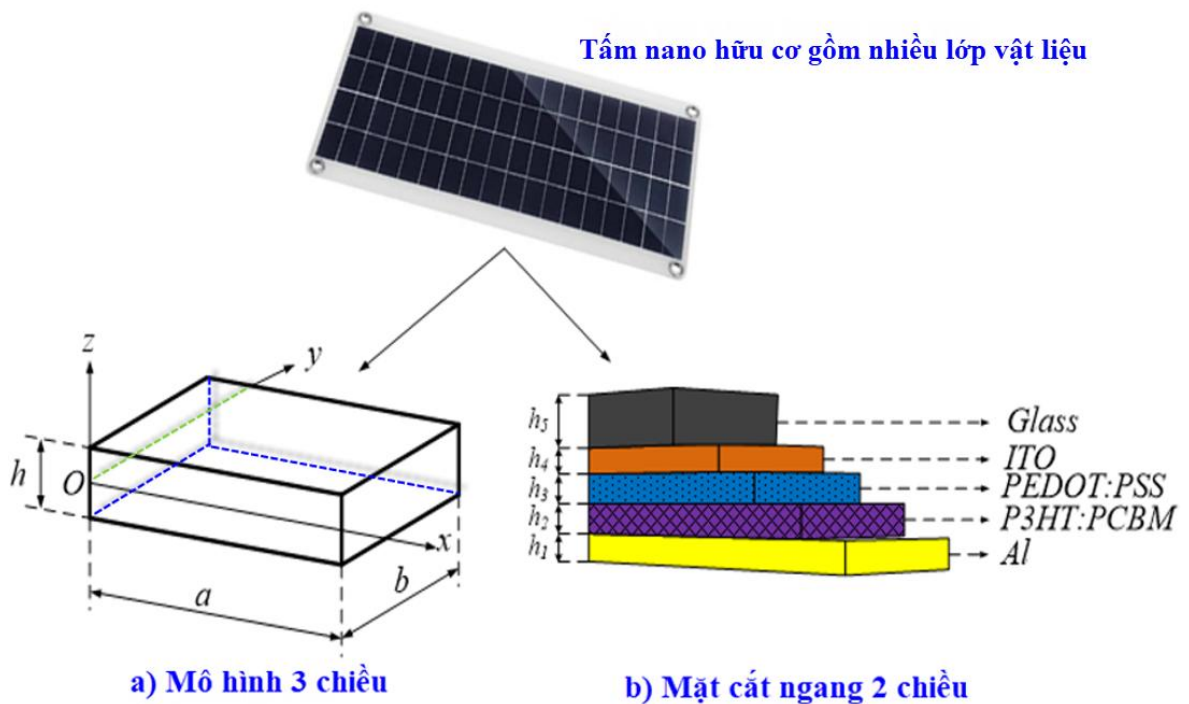
CHƯƠNG 2 CƠ SỞ LÝ THUYẾT TÍNH TOÁN TẮM NANO HỮU CƠ CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA HIỆU ỨNG KÍCH THƯỚC

Chương này trình bày cơ sở lý thuyết tính toán tấm kích thước nano gồm nhiều lớp vật liệu hữu cơ có kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước trên cơ sở lý thuyết đàn hồi phi cục bộ. Đây là cơ sở lý thuyết quan trọng để phục vụ cho việc phân tích đáp ứng tĩnh và động sẽ trình bày ở các chương tiếp theo.

2.1. Thiết lập bài toán và các giả thiết

2.1.1. Mô hình bài toán

Tấm nano hữu cơ có mô hình được thể hiện cụ thể như trên hình 2.1. Các tham số hình học chủ đạo của tấm bao gồm chiều dài a , chiều rộng b , chiều dày tổng thể của kết cấu là h . Tấm gồm 5 lớp vật liệu [68, 74], mỗi lớp có chiều dày tương ứng là h_i .



Hình 2.1. Mô hình tấm nano hữu cơ nhiều lớp.

2.1.2. Các giả thiết

Để xây dựng các phương trình quan hệ ứng xử cơ học, luận án dựa trên một số giả thiết như sau:

- Tấm thỏa mãn biến dạng cắt cải tiến, xem $\varepsilon_z = 0$;
- Biến dạng bé. Không xét đến tác động của môi trường nhiệt độ.
- Vật liệu đàn hồi tuyến tính.
- Không xét sự bong tách giữa các lớp vật liệu trong quá trình chịu lực.
- Hệ số đàn hồi phi cục bộ và hệ số cản như nhau trong mỗi lớp vật liệu.

2.2. Quan hệ ứng xử cơ học của tấm

2.2.1. Trường chuyển vị

Tấm nano hữu cơ gồm nhiều lớp có đặc trưng cơ tính khác nhau, các biểu thức tính toán dưới đây được thiết lập trên mặt phẳng Oxy trùng với mặt trung bình của tấm, và luận án giả thiết mặt giữa cũng là mặt trung hòa của tấm nano hữu cơ.

Dựa trên lý thuyết biến dạng cắt cải tiến, trường chuyển vị của tấm nano hữu cơ có dạng như sau [58, 87, 88]

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f_z \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f_z \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó:

+ u, v, w : ba chuyển vị dài tại điểm có tọa độ (x, y, z) của tấm;

+ Thành phần chuyển vị theo phương trục Oz là $w(x, y, z)$ được chia ra làm hai thành phần, thành phần chuyển vị uốn w_b và thành phần chuyển vị cắt w_s . Hàm f_z thể hiện quy luật phân bố ứng suất theo chiều dày của tấm, hàm này được chọn sao cho ứng suất tiếp phải triệt tiêu tại mặt trên và mặt dưới của tấm.

Và hàm f_z cũng được chọn sao cho không cần đến hệ số hiệu chỉnh cắt trong quá trình tính toán, hàm f_z có thể có các dạng như sau:

Hàm đa thức [87]:

$$f_z = -\frac{z}{4} + \frac{5}{3} \frac{z^3}{h^2} \quad (2.2)$$

Hàm sin [88]:

$$f_z = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (2.3)$$

Hàm sin hyperbolic [89]:

$$f_z = z - h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.4)$$

2.2.2. Trường biến dạng

Các thành phần biến dạng dài và biến dạng trượt được tính toán thông qua đạo hàm bậc nhất và đạo hàm bậc hai của các thành phần chuyển vị:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - f_z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + g_z \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Biểu thức biến dạng (2.5) có thể được viết gọn lại ở dạng như sau:

$$\begin{cases} \varepsilon = z\varepsilon_z + f_z\varepsilon_f \\ \gamma_s = g_z\gamma_{s0} \end{cases} \quad (2.6)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z &= \{\varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{zxy}\}^T; \quad \varepsilon_f = \{\varepsilon_{fx}, \varepsilon_{fy}, \varepsilon_{fxy}\}^T; \\
\gamma_{s0} &= \{\gamma_{sxx}, \gamma_{syz}\}^T; \\
\varepsilon_{zx} &= -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{zy} = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}; \quad \varepsilon_{zxy} = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}; \\
\varepsilon_{fx} &= -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{fy} = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}; \quad \varepsilon_{fxy} = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}; \\
\gamma_{sxx} &= \frac{\partial w_s}{\partial x}; \quad \gamma_{syz} = \frac{\partial w_s}{\partial y}; \quad g_z = 1 - \frac{df_z}{dz}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2.3. Quan hệ ứng suất – biến dạng

Để xem xét ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước nhỏ, luận án sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, do vậy biểu thức liên hệ giữa ứng suất với biến dạng trong lớp vật liệu thứ i có dạng [27], [89, 90]:

$$\begin{aligned}
(1 - l^2 \nabla^2) \sigma^i &= (1 - l^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^i \\
&= \begin{bmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & 0 \\ c_{12}^i & c_{11}^i & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^i + \chi \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^i = \mathbf{D}_b^i \boldsymbol{\varepsilon}^i + \chi \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i}{\partial t}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
(1 - l^2 \nabla^2) \tau^i &= (1 - l^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^i \\
&= \begin{bmatrix} c_{33}^i & 0 \\ 0 & c_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^i + \chi \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^i = \mathbf{D}_s^i \boldsymbol{\gamma}_s^i + \chi \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_s^i}{\partial t}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

trong đó χ là hệ số kể đến tính đàn nhớt của vật liệu và t là biến thời gian.

Phương trình (2.8)- (2.9) được viết gọn lại như sau:

$$\{\boldsymbol{\sigma}^i; \boldsymbol{\tau}^i\} - l^2 \nabla^2 \{\boldsymbol{\sigma}^i; \boldsymbol{\tau}^i\} = \mathbf{D}^i \{\boldsymbol{\varepsilon}^i; \boldsymbol{\gamma}_s^i\} + \chi \frac{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}^i; \boldsymbol{\gamma}_s^i\}}{\partial t} \tag{2.10}$$

trong đó:

$l = (e_0 \lambda)$ là hệ số nonlocal (nm), e_0 là hằng số, λ là hệ số phụ thuộc các đặc trưng của vật liệu nano.

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ là toán tử Laplace.

$$\mathbf{D}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_b^i & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{D}_s^i \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{D}_b^i = \begin{bmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & 0 \\ c_{12}^i & c_{11}^i & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_s^i = \begin{bmatrix} c_{33}^i & 0 \\ 0 & c_{33}^i \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

trong đó:

$$c_{11}^i = c_{22}^i = \frac{E^i}{1 - (\nu^i)^2}$$

$$c_{12}^i = \frac{\nu^i E^i}{1 - (\nu^i)^2} \quad (2.13)$$

$$c_{66}^i = c_{55}^i = c_{44}^i = \frac{E^i}{2(1 - \nu^i)} \quad (2.14)$$

trong đó E^i và ν^i là mô đun đàn hồi và hệ số Poisson của vật liệu lớp thứ i .

2.2.4. Nguyên lý năng lượng toàn phần cực tiểu

Để đưa ra phương trình chuyển động của tấm nano hữu cơ, luận án áp dụng cực tiểu đối với năng lượng toàn phần của tấm ở dạng sau [91]:

$$\delta U - \delta W - \delta T = 0 \quad (2.15)$$

trong đó δU , δW và δT lần lượt là các thành phần biến phân thế năng biến dạng của tấm, biến phân công của ngoại lực và biến phân động năng của tấm.

Khi tấm được chia thành các phần tử nhỏ, phương trình cực tiểu (2.15) được viết lại dưới dạng phần tử hữu hạn như sau:

$$\delta(\sum_e U_e - \sum_e W_e - \sum_e T_e) = 0 \quad (2.16)$$

trong đó U_e, W_e, T_e lần lượt là thế năng biến dạng của phần tử tấm, công của ngoại lực tác dụng lên phần tử tấm và động năng của phần tử tấm.

Thế năng biến dạng đàn hồi

Biểu thức biến phân thế năng biến dạng đàn hồi của tấm nano được tính như sau:

$$\begin{aligned}\delta U_e &= \int_{\Omega} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left((\sigma_x)^i \delta(\varepsilon_x)^i + (\sigma_y)^i \delta(\varepsilon_y)^i + (\tau_{xy})^i \delta(\gamma_{xy})^i \right. \\ &\quad \left. + (\tau_{xz})^i \delta(\gamma_{xz})^i + (\tau_{yz})^i \delta(\gamma_{yz})^i \right) dz d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(-M_x \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - S_x \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - S_y \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2S_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + F_{xz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + F_{yz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.17)\end{aligned}$$

trong đó các thành phần nội lực của tấm được tính như sau:

$$\{M_{kn}; S_{kn}\} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^i \{1; f_z\} dz; \quad kn = x, y, xy \quad (2.18)$$

$$\{F_{xz}; F_{yz}\} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^i dz \quad (2.19)$$

Động năng của tấm

Vận tốc của điểm có tọa độ (x, y, z) tại thời điểm t :

$$\begin{cases} \dot{u}(x, y, z) = -z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - f_z \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \\ \dot{v}(x, y, z) = -z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - f_z \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \\ \dot{w}(x, y, z) = \dot{w}_b(x, y) + \dot{w}_s(x, y) \end{cases} \quad (2.20)$$

trong đó dấu chấm là ký hiệu đạo hàm cấp một theo thời gian.

Biến phân của vận tốc:

$$\begin{cases} \delta \dot{u}(x, y, z) = -z \delta \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - f_z \delta \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \\ \delta \dot{v}(x, y, z) = -z \delta \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - f_z \delta \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \\ \delta \dot{w}(x, y, z) = \delta \dot{w}_b(x, y) + \delta \dot{w}_s(x, y) \end{cases} \quad (2.21)$$

Biến phân động năng được tính như sau:

$$\delta T = \int_{\Omega} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \rho^i (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dz d\Omega \quad (2.22)$$

Thay các công thức (2.20) và (2.21) vào công thức (2.22), ta rút ra:

$$\delta T = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &H_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta(w_b + w_s) + H_1 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \delta w_b \\ &+ H_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \delta w_b + H_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \delta w_s \\ &+ H_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \delta w_s \end{aligned} \right\} d\Omega \quad (2.23)$$

trong đó dấu hai chấm là đạo hàm bậc hai của biến tương ứng theo thời gian, và các hệ số được tính toán như sau:

$$\begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \rho^i \begin{pmatrix} 1 \\ z^2 \\ z f_z \\ f_z^2 \end{pmatrix} dz \quad (2.24)$$

trong đó ρ^i là khối lượng riêng tương ứng với vật liệu lớp thứ i .

Công của ngoại lực

Biến phân công của ngoại lực tác dụng theo phương trục Oz , vuông góc với bề mặt của tấm được tính như sau:

$$\delta W = \int_{\Omega} p_z \delta w d\Omega = \int_{\Omega} p_z \delta w d\Omega \quad (2.25)$$

trong đó p_z là ngoại lực tác dụng theo phương vuông góc với mặt phẳng tấm. Thay các phương trình (2.17), (2.23), (2.25) vào (2.16) sau đó tích phân từng phần và nhóm theo các số hạng lần lượt chứa δw_b , δw_s ta thu được các phương trình sau:

$$\begin{aligned} \delta w_b: \quad & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + H_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + H_1 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \\ & + H_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) + p_z = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\delta w_s: \quad \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \frac{\partial F_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yz}}{\partial y} + H_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)$$

$$+H_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) + H_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) + p_z = 0 \quad (2.27)$$

Tích phân phương trình (2.8)- (2.9) theo chiều dày tấm, luận án tìm được các thành phần nội lực của tấm như sau:

Biểu thức mô men:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} - l^2 \nabla^2 \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \begin{bmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & 0 \\ c_{12}^i & c_{11}^i & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^i z dz \\ &= \mathbf{A}_z \boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{B}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f + \chi \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_{z\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{B}_{f\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_f) \quad (2.28) \end{aligned}$$

Phương trình (2.28) được viết gọn lại như sau:

$$(1 - l^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_z \boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{B}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f + \chi \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_{z\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{B}_{f\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_f) \quad (2.29)$$

Mô men bậc cao

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{Bmatrix} - l^2 \nabla^2 \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \begin{bmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & 0 \\ c_{12}^i & c_{11}^i & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^i f_z dz \\ &= \mathbf{B}_f \boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f + \chi \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}_{f\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{D}_{f\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_f) \quad (2.30) \end{aligned}$$

Phương trình (2.30) được viết gọn lại như sau:

$$(1 - l^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_f \boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f + \chi \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}_{f\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{D}_{f\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_f) \quad (2.31)$$

trong đó

$$\{\mathbf{A}_z, \mathbf{B}_f, \mathbf{D}_f\} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \begin{bmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & 0 \\ c_{12}^i & c_{11}^i & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^i \end{bmatrix} \{z^2, z f_z, f_z^2\} dz \quad (2.32)$$

$$\{\mathbf{A}_{z\chi}, \mathbf{B}_{f\chi}, \mathbf{D}_{f\chi}\} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \{z^2, z f_z, f_z^2\} dz \quad (2.33)$$

Các thành phần lực cắt:

$$\begin{Bmatrix} F_{xz} \\ F_{yz} \end{Bmatrix} - l^2 \nabla^2 \begin{Bmatrix} F_{xz} \\ F_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \begin{bmatrix} c_{33}^i & 0 \\ 0 & c_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^i dz = \mathbf{A}_s \boldsymbol{\gamma}_{s0} + \chi \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_{s\chi} \boldsymbol{\gamma}_{s0}) \quad (2.34)$$

Phương trình (2.34) được viết gọn lại như sau:

$$(1 - l^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} F_{xz} \\ F_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_s \boldsymbol{\gamma}_{s0} + \chi \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_{s\chi} \boldsymbol{\gamma}_{s0}) \quad (2.35)$$

trong đó

$$\mathbf{A}_s = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \begin{bmatrix} c_{33}^i & 0 \\ 0 & c_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^i g_z^2 dz; \mathbf{A}_{s\chi} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^i g_z^2 dz \quad (2.36)$$

Thay nội lực từ các phương trình (2.28), (2.30) và (2.34) vào các phương trình cân bằng (2.26) và (2.27), luận án thu được phương trình cân bằng của hệ (bằng cách cho các giá trị tương ứng với các biến phân $\delta w_b, \delta w_s$ bằng 0) có dạng sau:

δw_b :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + (1 - l^2 \nabla^2) p_z \\ & + (1 - l^2 \nabla^2) H_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + (1 - l^2 \nabla^2) H_1 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \\ & + (1 - l^2 \nabla^2) H_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

δw_s :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \frac{\partial F_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yz}}{\partial y} + (1 - l^2 \nabla^2) p_z \\ & + (1 - l^2 \nabla^2) H_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + (1 - l^2 \nabla^2) H_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \\ & + (1 - l^2 \nabla^2) H_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dạng khai triển của các phương trình (2.37), (2.38) như sau:

$$\begin{aligned}
& -A_{z11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - A_{z12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{f11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - B_{f12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& -B_{f11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - 4A_{z33} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4B_{f33} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& -\chi A_{z\chi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& -\chi B_{f\chi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& = -(1 - l^2 \nabla^2) p_z - (1 - l^2 \nabla^2) H_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - (1 - l^2 \nabla^2) H_1 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \\
& \quad - (1 - l^2 \nabla^2) H_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \tag{2.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -B_{f11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{f11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - B_{f12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{f12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& -D_{f11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - 4B_{f33} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{f33} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& -A_{s11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - A_{s22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\
& -\chi B_{f\chi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& -\chi D_{f\chi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& -\chi A_{s\chi} \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right) \\
& = -(1 - l^2 \nabla^2) p_z - (1 - l^2 \nabla^2) H_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - (1 - l^2 \nabla^2) H_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \\
& \quad - (1 - l^2 \nabla^2) H_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Nhân lần lượt các phương trình (2.39) và (2.40) với các biến phân $\delta w_b, \delta w_s$, sau đó cộng về theo về ta được phương trình sau:

$$\int_{\Omega} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \delta w_b \\ & + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \end{aligned} \right] \delta w_b + \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \\ & + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \frac{\partial F_{xz}}{\partial x} \\ & + \frac{\partial F_{yz}}{\partial y} \end{aligned} \right] \delta w_s + (1 - l^2 \nabla^2) \left[\begin{aligned} & \left(p_z + H_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \right. \\ & \left. + H_1 \nabla^2 \ddot{w}_b + H_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \right) \delta w_b \\ & + \left(p_z + H_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \right. \\ & \left. + H_2 \nabla^2 \ddot{w}_b + H_3 \nabla^2 \ddot{w}_s \right) \delta w_s \end{aligned} \right] dxdy = 0 \quad (2.41)$$

Dạng khai triển của phương trình (2.41) như sau:

$$\int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & -A_{z11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - B_{f11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - A_{z12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - B_{f12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4A_{z33} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - 4B_{f33} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - \chi A_{z\chi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\ & - \chi B_{f\chi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \end{aligned} \right] \delta w_b \\ & + \left[\begin{aligned} & -B_{f11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{f11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - B_{f12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - D_{f12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4B_{f33} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - 4D_{f33} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - \chi B_{f\chi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\ & - \chi D_{f\chi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\ & - \chi A_{s\chi} \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right) \end{aligned} \right] \delta w_s \end{aligned} \right\} dxdy$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& p_z \left[\delta w_b - l^2 \left(\frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} \right) \right] \\
& + p_z \left[\delta w_s - l^2 \left(\frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \right) \right] \\
& - (\delta w_b + \delta w_s) l^2 \left(\frac{\partial^2 p_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_z}{\partial y^2} \right) \\
& + H_0 \left[(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta w_b + l^2 \left(\frac{\partial(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{\partial x} \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} + \frac{\partial(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{\partial y} \frac{\partial \delta w_b}{\partial y} \right) \right] \\
& + H_0 \left[(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta w_s + l^2 \left(\frac{\partial(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{\partial x} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + \frac{\partial(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{\partial y} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right) \right] \\
& + (1 - l^2 \nabla^2) \left\{ \begin{aligned} & H_1 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \\ & + H_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \delta w_b \\
& + (1 - l^2 \nabla^2) \left\{ \begin{aligned} & H_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \\ & + H_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \delta w_s
\end{aligned} \right\} dx dy = 0
\end{aligned}
\tag{2.42}$$

Phương trình cân bằng (2.42) là phương trình cân bằng của tấm nano trong trường hợp tham số đàn hồi phi cục bộ là không đổi trên toàn bộ chiều dày của tấm nano hữu cơ. Đã có một vài công trình nghiên cứu cũng chỉ ra rằng tham số đàn hồi phi cục bộ phụ thuộc vào loại vật liệu, nếu vật liệu của kết cấu có cơ tính thay đổi thì tham số đàn hồi cũng biến đổi [89, 92]. Vì tấm nano hữu cơ gồm nhiều lớp vật liệu, luận án giả thiết tham số đàn hồi phi cục bộ mỗi lớp khác nhau và tỷ lệ với chiều dày lớp đó (l_i là tham số đàn hồi phi cục bộ của lớp thứ i), phương trình cân bằng đối với tấm nano hữu cơ có dạng như sau:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & -A_{z11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - B_{f11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - A_{z12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & -B_{f12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4A_{z33} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4B_{f33} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & -\chi A_{zx} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\ & -\chi B_{fx} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \end{aligned} \right] \delta w_b \\ & + \left[\begin{aligned} & -B_{f11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{f11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - B_{f12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & -D_{f12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4B_{f33} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{f33} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & -\chi B_{fx} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\ & -\chi D_{fx} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\ & -\chi A_{sx} \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right) \end{aligned} \right] \delta w_s \end{aligned} \right\} dx dy \\
& - \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \left[p_z \left[\delta w_b - \sum_i \frac{l_i^2 h_i}{h} \left(\frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} \right) \right] + p_z \left[\delta w_s - \sum_i \frac{l_i^2 h_i}{h} \left(\frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - (\delta w_b + \delta w_s) \sum_i \frac{l_i^2 h_i}{h} \left(\frac{\partial^2 p_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_z}{\partial y^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left[H_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta w_b + H_{0l} \left(\frac{\partial (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{\partial x} \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} + \frac{\partial (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{\partial y} \frac{\partial \delta w_b}{\partial y} \right) \right] \right] \end{aligned} \right\} dx dy
\end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} + \left\{ H_1 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) + H_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \right\} \delta w_b \\ - \nabla^2 \left\{ H_{1l} \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) + H_{2l} \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \right\} \delta w_b \\ + \left\{ H_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) + H_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \right\} \delta w_s \\ - \nabla^2 \left\{ H_{2l} \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) + H_{3l} \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \right\} \delta w_s \end{array} \right\} dx dy = 0 \quad (2.43)$$

trong đó

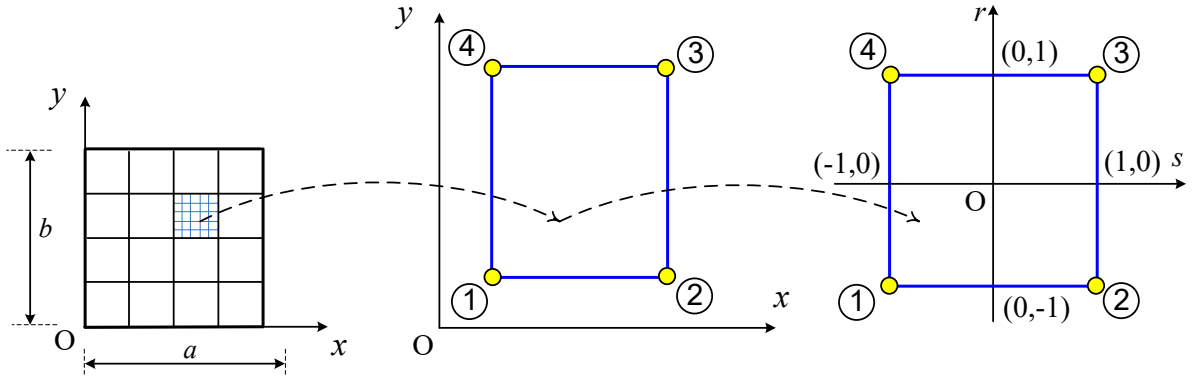
$$\begin{pmatrix} H_{0l} \\ H_{1l} \\ H_{2l} \\ H_{3l} \end{pmatrix} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{l_i^2 h_i}{h} \rho^i \begin{pmatrix} 1 \\ z^2 \\ z f_z \\ f_z^2 \end{pmatrix} dz \quad (2.44)$$

Phương trình (2.43) khác với phương trình (2.42) vì xem xét đến sự khác nhau của biến phi cục bộ trong mỗi lớp vật liệu.

2.3. Mô hình phần tử hữu hạn

2.3.1. Mô hình phần tử

Để giải quyết bài toán đặt ra bằng phương pháp phần tử hữu hạn, luận án chia tám thành các phần tử phẳng tứ giác bốn nút, khi chuyển sang hệ tọa độ tự nhiên, phần tử tứ giác của tám sẽ trở thành phần tử chuẩn là hình vuông có các tọa độ nút biểu diễn hệ tọa độ tự nhiên. Một nút có sáu bậc tự do gồm hai bậc tự do chuyển vị và bốn bậc tự do gồm các đạo hàm của chuyển vị như sau $w_{bj}, w_{sj}, \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \right)_j, \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} \right)_j, \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} \right)_j, \left(\frac{\partial w_s}{\partial y} \right)_j$.



Hình 2.2. Biểu diễn phần tử tứ giác 4 nút.

2.3.2. Các ma trận, véc tơ phần tử

Véc tơ chuyển vị phần tử

Véc tơ chuyển vị nút của phần tử gồm các thành phần chuyển vị và các đạo hàm tại các nút như sau:

$$\mathbf{q}_e = \sum_{j=1}^4 \left[w_{bj}, w_{sj}, \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \right)_j, \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} \right)_j, \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} \right)_j, \left(\frac{\partial w_s}{\partial y} \right)_j \right] \quad (2.45)$$

Do có các ẩn số có đạo hàm bậc nhất và đạo hàm bậc hai của chuyển vị uốn và cắt, nên cần phải sử dụng hàm Hermite để nội suy hai thành phần này như sau:

$$\begin{cases} w_b = \sum_{j=1}^4 \left\{ F_j w_{bj} + F_{j+1} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \right)_j + F_{j+2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} \right)_j \right\} = F_b q_e \\ w_s = \sum_{j=1}^4 \left\{ F_j w_{sj} + F_{j+1} \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} \right)_j + F_{j+2} \left(\frac{\partial w_s}{\partial y} \right)_j \right\} = F_s q_e \end{cases} \quad (2.46)$$

trong đó:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_b = \sum_{j=1}^4 [F_j & 0 & F_{j+1} & 0 & F_{j+2} & 0] \\ \mathbf{F}_s = \sum_{j=1}^4 [0 & F_j & 0 & F_{j+1} & 0 & F_{j+2}] \end{cases} \quad (2.47)$$

và F_j là các hàm nội suy Hermite, chúng được tính toán trong hệ tọa độ tự nhiên như sau:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(2-r-s-r^2-s^2); F_2 = \frac{1}{8}(1-r^2)(1-s) \\
F_3 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-s^2); F_4 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(2+r-s-r^2-s^2) \\
F_5 &= -\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-r^2); F_6 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-r^2) \\
F_7 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(2+r+s-r^2-s^2); F_8 \\
&= -\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-r^2) \\
F_9 &= -\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-s^2); F_{10} \\
&= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(2-r+s-r^2-s^2) \\
F_{11} &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-r^2); F_{12} = -\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-s^2) \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Lúc này, vectơ gồm chuyển vị tại điểm bất kỳ thuộc phần tử tám được tính toán thông qua vectơ chuyển vị nút của phần tử đó như sau:

$$\mathbf{u} = \left\{ w_b, w_s, \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \right\}^T = \mathbf{F}_H \cdot \mathbf{q}_e \quad (2.49)$$

trong đó

$$\mathbf{F}_H = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} F_j & 0 & F_{j+1} & 0 & F_{j+2} & 0 \\ 0 & F_j & 0 & F_{j+1} & 0 & F_{j+2} \\ \frac{\partial F_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial F_{j+1}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial F_{j+2}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial F_{j+1}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial F_{j+2}}{\partial x} \\ \frac{\partial F_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial F_{j+1}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial F_{j+2}}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial F_{j+1}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial F_{j+2}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Ma trận độ cứng và ma trận cản phân tử

Công thức biến phân thế năng biến dạng đàn hồi:

$$\delta U_e = \int_{V_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (2.51)$$

$$\delta U_e = \int_{\Omega_e} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \boldsymbol{\sigma}^L \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dz d\Omega \quad (2.52)$$

$$\delta U_e = \int_{\Omega_e} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^i + \chi \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}{\partial t} \right) \delta \boldsymbol{\varepsilon} dz d\Omega \quad (2.53)$$

$$\delta U_e = \int_{\Omega_e} \sum_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} \left[\begin{aligned} & (z \boldsymbol{\varepsilon}_z + f_z \boldsymbol{\varepsilon}_f)^T \mathbf{D}_b^i \delta (z \boldsymbol{\varepsilon}_z + f_z \boldsymbol{\varepsilon}_f) \\ & + \chi \frac{\partial (z \boldsymbol{\varepsilon}_z + f_z \boldsymbol{\varepsilon}_f)^T}{\partial t} \delta (z \boldsymbol{\varepsilon}_z + f_z \boldsymbol{\varepsilon}_f) \\ & + \boldsymbol{\gamma}_{s0}^T \mathbf{D}_s^i \delta \boldsymbol{\gamma}_{s0} + \chi \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{s0}^T}{\partial t} \delta \boldsymbol{\gamma}_{s0} \end{aligned} \right] dz d\Omega \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \delta U_e = \int_{\Omega_e} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} & \left[\boldsymbol{\varepsilon}_z^T \mathbf{D}_b^i z^2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_z + \boldsymbol{\varepsilon}_z^T \mathbf{D}_b^i z f_z \delta \boldsymbol{\varepsilon}_f + \boldsymbol{\varepsilon}_f^T \mathbf{D}_b^i z f_z \delta \boldsymbol{\varepsilon}_z \right. \\ & \left. + \boldsymbol{\varepsilon}_f^T \mathbf{D}_b^i f_z^2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_f + \boldsymbol{\gamma}_{s0}^T \mathbf{D}_s^i \delta \boldsymbol{\gamma}_{s0} \right] dz d\Omega \\ & + \chi \int_{\Omega_e} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left[\begin{aligned} & \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_z^T}{\partial t} z^2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_z + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_z^T}{\partial t} z f_z \delta \boldsymbol{\varepsilon}_f + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_f^T}{\partial t} z f_z \delta \boldsymbol{\varepsilon}_z \\ & + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_f^T}{\partial t} f_z^2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}_f + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{s0}^T}{\partial t} \delta \boldsymbol{\gamma}_{s0} \end{aligned} \right] dz d\Omega \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \delta U_e = \int_{\Omega_e} & \left[\boldsymbol{\varepsilon}_z^T \mathbf{A}_z \boldsymbol{\varepsilon}_z + \boldsymbol{\varepsilon}_z^T \mathbf{B}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f + \boldsymbol{\varepsilon}_f^T \mathbf{B}_f \boldsymbol{\varepsilon}_z + \boldsymbol{\varepsilon}_f^T \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f \right. \\ & \left. + \boldsymbol{\gamma}_{s0}^T \mathbf{A}_s \delta \boldsymbol{\gamma}_{s0} \right] dx dy \\ & + \chi \int_{\Omega_e} \left[\begin{aligned} & \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_z^T}{\partial t} \mathbf{A}_{z\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_z + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_z^T}{\partial t} \mathbf{B}_{f\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_f + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_f^T}{\partial t} \mathbf{B}_{f\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_z + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_f^T}{\partial t} \mathbf{D}_{f\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_f \\ & + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{s0}^T}{\partial t} \mathbf{A}_{s\chi} \delta \boldsymbol{\gamma}_{s0} \end{aligned} \right] dx dy \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \delta U_e = \mathbf{q}_e^T \int_{\Omega_e} & \left[\mathbf{V}_z^T \mathbf{A}_z \mathbf{V}_z + \mathbf{V}_z^T \mathbf{B}_f \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_f^T \mathbf{B}_f \mathbf{V}_z + \mathbf{V}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{V}_f \right. \\ & \left. + \mathbf{V}_s^T \mathbf{A}_s \mathbf{V}_s \right] dx dy \cdot \delta \mathbf{q}_e \\ & + \dot{\mathbf{q}}_e^T \chi \int_{\Omega_e} \left[\mathbf{V}_z^T \mathbf{A}_{z\chi} \mathbf{V}_z + \mathbf{V}_z^T \mathbf{B}_{f\chi} \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_f^T \mathbf{B}_{f\chi} \mathbf{V}_z + \mathbf{V}_f^T \mathbf{D}_{f\chi} \mathbf{V}_f \right. \\ & \left. + \mathbf{V}_s^T \mathbf{A}_{s\chi} \mathbf{V}_s \right] dx dy \cdot \delta \mathbf{q}_e \\ & = \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e \delta \mathbf{q}_e + \dot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{C}_e \delta \mathbf{q}_e \end{aligned} \quad (2.57)$$

trong đó ma trận độ cứng phân tử:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e^b + \mathbf{K}_e^s \quad (2.58)$$

với

$$\mathbf{K}_e^b = \int_{\Omega_e} \left([\mathbf{V}_z^T \quad \mathbf{V}_f^T] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_z & \mathbf{B}_f \\ \mathbf{B}_f & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_z \\ \mathbf{V}_f \end{bmatrix} \right) dxdy \quad (2.59)$$

$$\mathbf{K}_e^s = \int_{\Omega_e} (\mathbf{V}_s^T \mathbf{A}_s \mathbf{V}_s) dxdy \quad (2.60)$$

trong đó $\mathbf{K}_e^b$ là ma trận độ cứng chống uốn, $\mathbf{K}_e^s$ là ma trận độ cứng chống cắt của phần tử tấm, còn các ma trận hệ số được tính toán theo công thức:

$$\mathbf{V}_z = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \mathbf{F}_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathbf{F}_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \mathbf{F}_b}{\partial xy} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}_f = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \mathbf{F}_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathbf{F}_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \mathbf{F}_s}{\partial xy} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Và ma trận cản phần tử tấm do tính đàn nhớt của vật liệu được xác định như sau:

$$\mathbf{C}_e = \chi \left[\int_{\Omega_e} \left([\mathbf{V}_z^T \quad \mathbf{V}_f^T] \begin{bmatrix} A_{z\chi} & B_{f\chi} \\ B_{f\chi} & D_{f\chi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_z \\ \mathbf{V}_f \end{bmatrix} \right) dxdy + \int_{\Omega_e} (\mathbf{V}_s^T A_{s\chi} \mathbf{V}_s) dxdy \right] \quad (2.62)$$

Ma trận độ cứng của phần tử tấm và ma trận cản của phần tử tấm được viết trong hệ tọa độ tự nhiên có dạng sau:

$$\mathbf{K}_e^b = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left([\mathbf{V}_z^T \quad \mathbf{V}_f^T] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_z & \mathbf{B}_f \\ \mathbf{B}_f & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_z \\ \mathbf{V}_f \end{bmatrix} \right) \det(\mathbf{J}) drds \quad (2.63)$$

$$\mathbf{K}_e^s = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{V}_s^T \mathbf{A}_s \mathbf{V}_s) \det|\mathbf{J}| drds \quad (2.64)$$

$$\mathbf{C}_e = \chi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left([\mathbf{V}_z^T \quad \mathbf{V}_f^T] \begin{bmatrix} A_{z\chi} & B_{f\chi} \\ B_{f\chi} & D_{f\chi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_z \\ \mathbf{V}_f \end{bmatrix} + (\mathbf{V}_s^T A_{s\chi} \mathbf{V}_s) \right) \det(\mathbf{J}) drds \quad (2.65)$$

với $\mathbf{J}$ là ma trận Jacobi của phép chuyển hệ trục tọa độ từ hệ tọa độ Đề Các sang hệ tọa độ tự nhiên. Và từ đây có thể thấy việc tính toán ma trận độ cứng của phần tử tấm không cần đến bất kỳ hệ số hiệu chỉnh cắt nào, cũng không cần phải thực hiện tích phân rút gọn đối với thành phần ma trận chống cắt của phần

tử tâm, đây cũng chính là ưu điểm của lý thuyết biến dạng cắt cải tiến so với lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất.

Ma trận khối lượng phần tử

Công thức biến phân động năng:

$$\delta T_e = \int_{\Omega_e} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \rho^{(i)} (1 - l^2 \nabla^2) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dz d\Omega \quad (2.66)$$

$$\delta T_e = \int_{\Omega_e} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \rho^{(i)} (1 - l^2 \nabla^2) \left[\begin{aligned} & \left(-z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - f_z \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right) \delta \left(-z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - f_z \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right) \\ & + \left(-z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - f_z \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right) \delta \left(-z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - f_z \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\ & + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \end{aligned} \right] dz d\Omega \quad (2.67)$$

$$\delta T_e = \int_{\Omega_e} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \rho^{(i)} (1 - l^2 \nabla^2) \left[\begin{aligned} & \left(z^2 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \right) \delta \left(f_z z \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right) \delta \left(f_z z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right) \delta \left(f_z^2 \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \right) \delta \left(z^2 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \right) \delta \left(f_z z \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right) \delta \left(f_z z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right) \delta \left(f_z^2 \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\ & + \dot{w}_b \delta \dot{w}_b + \dot{w}_b \delta \dot{w}_s + \dot{w}_s \delta \dot{w}_b + \dot{w}_s \delta \dot{w}_s \end{aligned} \right] dz d\Omega \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \delta T_e = \ddot{\mathbf{q}}_e^T \int_{\Omega_e} \sum_i (1 - l^2 \nabla^2) & \left[\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial x} H_1 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial x} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x} \\ & + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial x} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial x} H_3 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x} \\ & \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial y} H_1 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial y} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial y} \\ & + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial y} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial y} H_3 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial y} \\ & \mathbf{F}_b^T H_0 \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_b^T H_0 \mathbf{F}_s \\ & + \mathbf{F}_s^T H_0 \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s^T H_0 \mathbf{F}_s \end{aligned} \right] dx dy \delta \mathbf{q}_e \\ & = \ddot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{M}_e \delta \mathbf{q}_e \end{aligned} \quad (2.69)$$

trong đó ma trận khối lượng phần tử $\mathbf{M}_e$ được xác định như sau:

$$M_e = \int_{\Omega_e} \sum_i (1 - l^2 \nabla^2) \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial x} H_1 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial x} \\ + \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial x} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x} \\ + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial x} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial x} \\ + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial x} H_3 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x} \\ + \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial y} H_1 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial y} \\ + \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial y} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial y} \\ + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial y} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial y} \\ + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial y} H_3 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial y} \\ \mathbf{F}_b^T H_0 \mathbf{F}_b \\ + \mathbf{F}_b^T H_0 \mathbf{F}_s \\ + \mathbf{F}_s^T H_0 \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s^T H_0 \mathbf{F}_s \end{array} \right] dx dy \quad (2.70)$$

Khi tính toán trong hệ tọa độ tự nhiên, ma trận khối lượng của phần tử tám nano được xác định như sau:

$$\mathbf{M}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_i (1 - l^2 \nabla^2) \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial x} H_1 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial x} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x} \\ + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial x} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial x} H_3 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial y} H_1 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial y} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial y} \\ + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial y} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial y} H_3 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial y} \\ \mathbf{F}_b^T H_0 \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_b^T H_0 \mathbf{F}_s \\ + \mathbf{F}_s^T H_0 \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s^T H_0 \mathbf{F}_s \end{array} \right] \det(\mathbf{J}) dr ds \quad (2.71)$$

Trong trường hợp tham số đàn hồi phi cục bộ trong mỗi lớp là khác nhau thì biểu thức ma trận khối lượng phần tử tám được xác định như sau:

$$\mathbf{M}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_i (1 - \nabla^2) \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial x} H_1 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial x} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x} \\ + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial x} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial x} H_3 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial y} H_1 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_b^T}{\partial y} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial y} \\ + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial y} H_2 \frac{\partial \mathbf{F}_b}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_s^T}{\partial y} H_3 \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial y} \\ \mathbf{F}_b^T H_0 \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_b^T H_0 \mathbf{F}_s \\ + \mathbf{F}_s^T H_0 \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s^T H_0 \mathbf{F}_s \end{bmatrix} \det(\mathbf{J}) dr ds \quad (2.72)$$

trong đó các hệ số $H_{0l}, H_{1l}, H_{2l}, H_{3l}$ được tính toán như công thức (2.55).

Xác định véc tơ tải trọng nút của phần tử

Véc tơ tải trọng nút của phần tử được xác định như sau:

$$\mathbf{P}_e = \int_{\Omega_e} (1 - l^2 \nabla^2) (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s) p_z dx dy \quad (2.73)$$

$$\mathbf{P}_e = \int_{\Omega_e} \left\{ (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s)^T p_z - l^2 \left[p_z \left(\frac{\partial^2 (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s)^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s)^T}{\partial y^2} \right) + (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s)^T \left(\frac{\partial^2 p_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_z}{\partial y^2} \right) \right] \right\} dx dy \quad (2.74)$$

Cuối cùng, véc tơ tải trọng nút của phần tử được viết trong hệ tọa độ tự nhiên có dạng như sau:

$$\mathbf{P}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s)^T p_z - l^2 \left[p_z \left(\frac{\partial^2 (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s)^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s)^T}{\partial y^2} \right) + (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s)^T \left(\frac{\partial^2 p_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_z}{\partial y^2} \right) \right] \right\} \det(\mathbf{J}) dr ds \quad (2.75)$$

Trong trường hợp tham số đàn hồi phi cục bộ trong mỗi lớp khác nhau thì biểu thức tính toán véc tơ tải trọng nút phần tử có dạng sau:

$$\mathbf{P}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s)^T p_z - \sum_i l_i^2 \frac{h_i}{h} \left[p_z \left(\frac{\partial^2 (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s)^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s)^T}{\partial y^2} \right) + (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s)^T \left(\frac{\partial^2 p_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_z}{\partial y^2} \right) \right] \right\} \det(\mathbf{J}) dr ds \quad (2.76)$$

Các biểu thức tích phân trong các ma trận, véc tơ phần tử (2.63)-(2.63), (2.72), (2.76) được tính bằng phương pháp tích phân cầu Gauss với hai điểm tích phân.

Từ phương trình (2.16), với dạng khai triển cụ thể như (2.43) và các ma trận phần tử tâm và véc tơ tải trọng nút phần tử tâm đã thiết lập, ta thu được phương trình cân bằng cho phần tử tâm như sau:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{P}_e \quad (2.77)$$

trong đó $\mathbf{M}_e$, $\mathbf{K}_e$, $\mathbf{P}_e$ lần lượt là các ma trận khối lượng phần tử, ma trận độ cứng phần tử và véc tơ tải trọng nút phần tử, $\ddot{\mathbf{q}}_e$, $\dot{\mathbf{q}}_e$, $\mathbf{q}_e$ là véc tơ gia tốc nút phần tử, véc tơ vận tốc nút phần tử và véc tơ chuyển vị nút phần tử tâm nano hữu cơ.

Sau khi tập hợp ma trận khối lượng phần tử tâm nano, ma trận độ cứng phần tử tâm và véc tơ lực nút phần tử ta được phương trình chuyển động của tâm nano hữu cơ như sau:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{P} \quad (2.78)$$

trong đó $\mathbf{M} = \sum_e \mathbf{M}_e$, $\mathbf{C} = \sum_e \mathbf{C}_e$, $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}_e$, $\mathbf{P} = \sum_e \mathbf{P}_e$ lần lượt là ma trận khối lượng tổng thể, ma trận cản tổng thể, ma trận độ cứng tổng thể và véc tơ tải trọng nút tổng thể, còn $\ddot{\mathbf{q}} = \sum_e \ddot{\mathbf{q}}_e$, $\dot{\mathbf{q}} = \sum_e \dot{\mathbf{q}}_e$, $\mathbf{q} = \sum_e \mathbf{q}_e$ là véc tơ gia tốc nút tổng thể, véc tơ vận tốc nút tổng thể và véc tơ chuyển vị nút tổng thể của tâm nano hữu cơ.

2.4. Xử lý biên

Xét tấm với các điều kiện liên kết khác nhau như liên kết tựa đơn (ký hiệu là S), liên kết ngàm (ký hiệu là C). Điều kiện biên với từng trường hợp cụ thể đối với trường hợp tấm chữ nhật như sau:

- *Tấm tựa đơn tại $x = 0$ và $x = a$ thì*

$$w_{bi} = 0, w_{si} = 0, \left(\frac{\partial w_b}{\partial y}\right)_i = 0, \left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)_i = 0 \quad (2.79)$$

- *Tấm tựa đơn tại $y = 0$ và $y = b$ thì*

$$w_{bi} = 0, w_{si} = 0, \left(\frac{\partial w_b}{\partial x}\right)_i = 0, \left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)_i = 0 \quad (2.80)$$

- *Tấm ngàm tại $x = 0$ và $x = a$ thì*

$$w_{bi} = 0, w_{si} = 0, \left(\frac{\partial w_b}{\partial x}\right)_i = 0, \left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial w_b}{\partial y}\right)_i = 0, \left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)_i = 0 \quad (2.81)$$

- *Tấm ngàm tại $y = 0$ và $y = b$ thì*

$$w_{bi} = 0, w_{si} = 0, \left(\frac{\partial w_b}{\partial x}\right)_i = 0, \left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial w_b}{\partial y}\right)_i = 0, \left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)_i = 0 \quad (2.82)$$

Nếu tấm có bốn cạnh tựa đơn thì ký hiệu là SSSS, nếu tấm có bốn cạnh ngàm thì ký hiệu là CCCC.

2.5. Kết luận chương 2

Trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt cải tiến, lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và phương pháp phần tử hữu hạn tác giả đã xây dựng được ma trận độ cứng của tấm, ma trận khối lượng và véc tơ lực nút. Từ đó, nguyên lý năng lượng toàn phần cực tiểu được áp dụng để thiết lập hệ phương trình chuyển động để giải bài toán tấm nano hữu cơ chịu tác dụng của tải trọng tĩnh và tải trọng thay đổi theo thời gian.

Chương này cũng xác định các điều kiện biên cụ thể cho các mô hình liên kết khác nhau.

Các biểu thức xây dựng trong chương này là cơ sở khoa học để xây dựng thuật toán và chương trình tính giải bài toán tĩnh trong chương 3, bài toán dao động riêng và dao động cưỡng bức trong chương 4.

Các công thức trong chương 2, quan hệ ứng xử cơ học của tấm nano hữu cơ nhiều lớp được tác giả công bố ở các bài báo thứ 1-5 (Danh mục công trình của tác giả).

CHƯƠNG 3 PHÂN TÍCH TĨNH TẮM NANO HỮU CƠ CÓ XÉT ĐẾN HIỆU ỨNG KÍCH THƯỚC VÀ KHẢO SÁT ẢNH HƯỞNG CỦA MỘT SỐ YẾU TỐ

Trong chương này, tác giả lập phương trình cân bằng tĩnh của tấm nano hữu cơ, lập trình chương trình giải bài toán uốn tĩnh, kiểm tra độ tin cậy của chương trình. Đồng thời khảo sát tác động của một số tham số đến đáp ứng tĩnh của tấm nano hữu cơ như hệ số đàn hồi phi cục bộ, đặc trưng hình học của kết cấu này.

3.1. Thuật toán PTHH giải bài toán uốn tĩnh của tấm nano hữu cơ

Từ phương trình cân bằng tổng quát đối với tấm nano hữu cơ như (2.78), bỏ qua các thành phần liên quan đến thời gian, phương trình cân bằng đối với tấm nano hữu cơ chịu tải trọng tĩnh có dạng như sau:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{P} \quad (3.1)$$

trong đó: $\mathbf{K}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{P}$ lần lượt là ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ chuyển vị nút tổng thể và véc tơ tải trọng tổng thể của tấm. Chúng được tập hợp từ các ma trận độ cứng phần tử, véc tơ chuyển vị phần tử và véc tơ tải trọng phần tử như đã được trình bày trong chương 2.

Từ công thức (3.1) tính được véc tơ chuyển vị uốn tổng thể của tấm theo phương trình sau:

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} \quad (3.2)$$

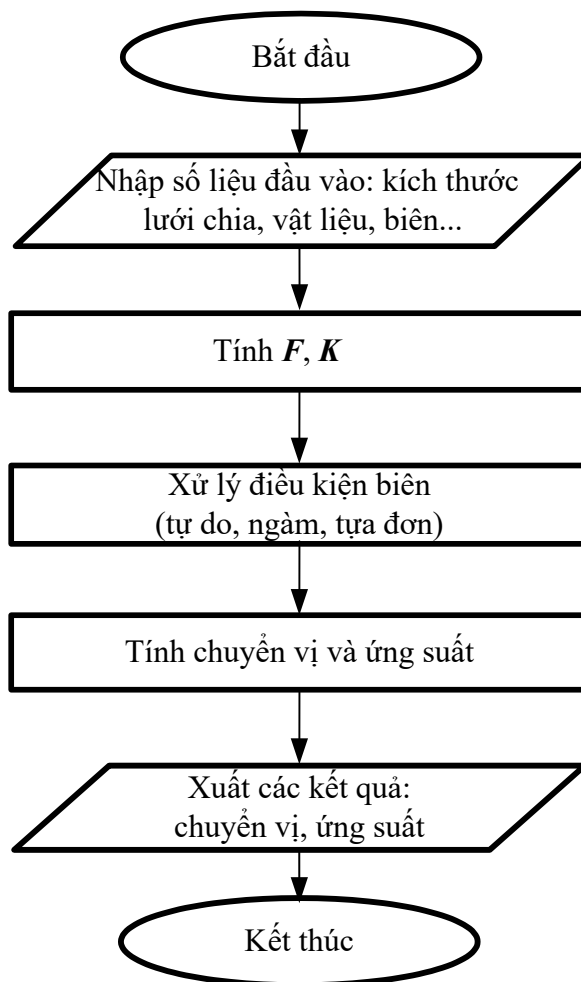
Sơ đồ thuật toán giải bài toán tấm nano hữu cơ chịu tác dụng của tải trọng tĩnh như Hình 3.1.

Trên cơ sở lý thuyết, thuật toán đã thiết lập ở trên, tác giả đã viết chương trình tính Solar_Nonlocal_Static_2025 (SNS_2025) trong môi trường Matlab để phân tích tĩnh tấm nano hữu cơ. Chương trình gồm các mô đun chủ yếu sau:

- Mô đun nhập số liệu, chia lưới phần tử.

- Mô đun giải bài toán tĩnh cho tấm nano hữu cơ.
- Mô đun xuất kết quả.

Bộ chương trình Solar_Nonlocal_Static_2025 có khả năng giải được bài toán tấm nano hữu cơ dưới tác dụng của tải trọng tĩnh. Bộ chương trình này cho phép xác định đáp ứng chuyển vị, ứng suất của tấm, đồng thời bộ chương trình tính cũng có khả năng khảo sát tác động của tham số kích thước hình học, tham số đàn hồi phi cục bộ,... đến đáp ứng tĩnh của tấm nano hữu cơ.



Hình 3.1. Sơ đồ thuật toán giải bài toán tấm nano hữu cơ chịu uốn khi chịu tải trọng tĩnh.

3.2. Kiểm tra độ tin cậy của chương trình tính

Phần này sẽ đưa ra các ví dụ để kiểm tra độ chính xác của lý thuyết và chương trình tính toán đã lập ở phần trên với cả phương pháp giải tích và phương pháp phần tử hữu hạn. Để giải phương trình (2.43) bằng phương pháp giải tích, luận án sử dụng dạng nghiệm Navier cho hai thành phần chuyển vị như sau:

$$\begin{aligned} w_b(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ w_s(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

trong đó m và n là các số tự nhiên, và W_{bmn} , W_{smn} là biên độ của các chuyển vị tương ứng. Tải trọng tác dụng lên tấm với biên độ P_{max} có biểu thức xác định như sau:

$$p_z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16P_{max}}{\pi^2 mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.4)$$

Thay các biểu thức (3.3) và (3.4) vào (2.43), thu được hệ phương trình chỉ gồm hai ẩn số là W_{bmn} và W_{smn} như sau:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_b \\ P_s \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

trong đó các hệ số:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \chi^4 A_{z11} + 2A_{z12}\chi^2\varphi^2 + A_{z12}\varphi^4 + 4.A_{z33}\chi^2\varphi^2 \\ K_{12} &= \varphi^4 B_{f11} + 2B_{f12}\chi^2\varphi^2 + B_{f12}\chi^4 + 4.B_{f33}\chi^2\varphi^2 \\ K_{21} &= \chi^4 B_{f11} + 2B_{f12}\chi^2\varphi^2 + B_{f12}\varphi^4 + 4.B_{f33}\chi^2\varphi^2 \\ K_{22} &= \varphi^4 D_{f11} + 2D_{f12}\chi^2\varphi^2 + D_{f12}\chi^4 + 4.D_{f33}\chi^2\varphi^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$P_b = P_s = \left(\frac{16mP_{\max}}{a^2n} + \frac{16nP_{\max}}{b^2m} \right) \left(1 - \sum_i \frac{l_i^2 h_i}{h} \right)$$

với $\chi = \pi/a$; $\varphi = \pi/b$. Giải phương trình (3.5), sẽ thu được các biên độ W_{bmn} và W_{smn} :

$$\begin{Bmatrix} W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P_b \\ P_s \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Thay (3.7) vào biểu thức (3.3), ta sẽ thu được chuyển vị uốn tĩnh của tấm nano hữu cơ tại mọi vị trí cần tìm.

Ví dụ kiểm chứng 1: Ví dụ này so sánh chuyển vị uốn tĩnh của tấm nano có một lớp xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước thông qua tham số phi cực bộ l . Các thông số hình học của tấm gồm chiều dài và chiều rộng $a = b = 10$ nm, chiều dày tấm h biến đổi từ $a/10$ đến $a/100$. Các tham số vật liệu gồm mô đun đàn hồi $E = 30$ MPa, hệ số Poisson $\nu = 0.3$, tải trọng phân bố đều với cường độ $Q_0 = 1$ N/m², tấm tựa đơn trên các cạnh.

Chuyển vị không thứ nguyên lớn nhất được tính toán theo công thức $\bar{w} = 10^3 h^3 w_{\max} / (12(1-\nu^2) Q_0 a^4)$. Cũng cần lưu ý ở đây rằng tấm chỉ có một lớp vật liệu nên tham số đàn hồi phi cực bộ không đổi theo chiều dày tấm. Bảng 3.1 trình bày sự hội tụ của kết quả tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) đối với chuyển vị uốn tĩnh của tấm nano bằng cách tăng dần lưới chia phần tử của tấm với các tham số đàn hồi phi cực bộ khác nhau, kết quả trong bảng này chứng tỏ khi số lượng phần tử của lưới chia tăng lên, kết quả tính toán chuyển vị của tấm nano hội tụ, và với lưới chia 16x16 phần tử đảm bảo độ chính xác cần thiết khi so sánh với kết quả tính bằng phương pháp giải tích dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba trong tài liệu [45], do vậy các tính toán dưới đây sẽ sử dụng lưới chia này để tính toán.

Bảng 3.2 liệt kê kết quả so sánh chuyển vị lớn nhất với các tham số phi cục bộ khác nhau và tham số chiều dày khác nhau, kết quả tính toán này chứng tỏ các kết quả tính toán bằng cách tiếp cận giải tích và phương pháp mô phỏng hữu hạn rất gần nhau và gần với kết quả đã công bố trong tài liệu[45], sự khác biệt ở đây là do lý thuyết tính toán của tài liệu [45] dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba, còn trường chuyển vị trong luận án dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba.

Bảng 3.1. Sự hội tụ của chuyển vị lớn nhất w của tấm nano chịu tác dụng của tải trọng tĩnh, luận án sử dụng lưới chia phần tử tăng dần, $a/h = 10$, [45] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba

l (nm)	Kết quả của luận án (Phương pháp phần tử hữu hạn với lưới chia khác nhau)						Kết quả giải tích [45]
	6×6	10×10	14×14	16×16	18×18	20×20	
f_z là hàm đa thức							
0	4.394	4.314	4.292	4.287	4.283	4.281	4.185
0.5	4.583	4.506	4.484	4.478	4.475	4.472	4.560
1	5.151	5.081	5.059	5.053	5.049	5.046	4.936
f_z là hàm sin							
0	4.393	4.313	4.292	4.286	4.283	4.280	4.185
0.5	4.583	4.505	4.483	4.478	4.474	4.472	4.560
1	5.152	5.081	5.058	5.052	5.049	5.046	4.936
f_z là hàm sin hyperbol							
0	4.394	4.314	4.292	4.287	4.283	4.281	4.185
0.5	4.583	4.506	4.484	4.478	4.475	4.472	4.560
1	5.151	5.081	5.059	5.053	5.049	5.046	4.936

Bảng 3.2. So sánh chuyển vị không thứ nguyên lớn nhất $\tilde{w}$ của tấm nano với các kết quả tính toán giải tích, [45] dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba

l (nm)	Luận án						Kết quả giải tích [45]
	LA1	LA2	LA3	LA4	LA5	LA6	
$a/h=10$							
0	4.261	4.261	4.261	4.287	4.286	4.287	4.185
0.5	4.447	4.446	4.447	4.478	4.478	4.478	4.560
1	5.004	5.003	5.004	5.053	5.052	5.053	4.936
$a/h=50$							
0	4.063	4.063	4.063	4.085	4.085	4.085	4.015
0.5	4.244	4.244	4.244	4.269	4.269	4.269	4.377
1	4.786	4.786	4.786	4.823	4.823	4.823	4.740
$a/h=100$							
0	4.057	4.057	4.057	4.078	4.078	4.078	4.010
0.5	4.237	4.237	4.237	4.263	4.263	4.263	4.372
1	4.779	4.779	4.779	4.816	4.816	4.816	4.734

Ghi chú: LA1: Lời giải dạng giải tích, f_z là hàm đa thức

LA2: Lời giải dạng giải tích, f_z là hàm sin

LA3: Lời giải dạng giải tích, f_z là hàm sin hyperbol

LA4: Lời giải FEM, f_z là hàm đa thức

LA5: Lời giải FEM, f_z là hàm sin

LA6: Lời giải FEM, f_z là hàm sin hyperbol

Ví dụ kiểm chứng 2: Ví dụ này kiểm chứng chuyển vị tại giữa tấm của tấm gồm ba lớp vật liệu, lớp giữa làm bằng vật liệu ZrO_2 có các đặc trưng cơ tính [93]: $E_g = 168.06$ GPa, $\nu_g = 0.298$, hai lớp bề mặt làm bằng vật liệu SUS304 có các đặc trưng cơ tính: $E_{bm} = 207.79$ GPa, $\nu_{bm} = 0.318$. Tấm có ba lớp với tỷ lệ chiều dày các lớp là $h_1:h_2:h_3$, ký hiệu (1-1-1) có nghĩa là chiều dày ba lớp bằng nhau, ký hiệu (2-1-2) có nghĩa là chiều dày lớp giữa bằng một nửa chiều

dày hai lớp bề mặt, và ký hiệu (1-8-1) có nghĩa là chiều dày lớp giữa gấp 8 lần chiều dày lớp bề mặt. Chiều dày tổng thể của tấm là $h = a/10$. Tấm có liên kết tựa đơn trên tất cả các cạnh và chịu tác dụng của tải trọng tĩnh và phân bố đều cường độ là Q_0 (N/m²).

Tham số so sánh là chuyển vị tại giữa tấm không thứ nguyên của tấm được tính theo công thức $\bar{w} = \frac{10E_0h}{Q_0a^2} w \left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2} \right)$, trong đó $E_0 = 1$ GPa. Bảng 3.3 thể hiện kết quả so sánh chuyển vị lớn nhất của tấm nhiều lớp với các tỷ lệ chiều dày khác nhau với kết quả tính bằng phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên lý thuyết tấm Mindlin trong tài liệu [93]. Các kết quả so sánh trong bảng này chứng tỏ sự tin cậy của lý thuyết và chương trình tính toán đối với tấm nhiều lớp ở kích thước macro (chưa kể đến hiệu ứng kích thước).

Bảng 3.3. So sánh chuyển vị lớn nhất $\bar{w}$ của tấm nhiều lớp với các tỷ lệ chiều dày các lớp khác nhau ($l_i = 0$)

Tỷ lệ chiều dày các lớp	Luận án						Lời giải bằng FEM [93]
	LA1	LA2	LA3	LA4	LA5	LA6	
1-1-1	0.224	0.224	0.224	0.225	0.225	0.225	0.224
2-1-2	0.222	0.222	0.222	0.223	0.223	0.223	0.222
1-8-1	0.247	0.247	0.247	0.249	0.249	0.249	0.248

Ví dụ kiểm chứng 3: Ví dụ này kiểm chứng chuyển vị lớn nhất và ứng suất của tấm chịu liên kết tựa đơn, tấm vuông với chiều dài hai cạnh $a = b$, tỷ lệ chiều dài và chiều dày tấm là $a/h = 10$. Tải trọng tác dụng lên tấm là phân bố đều với cường độ Q_0 (N/m²), các thông số vật liệu của tấm là $E = 380$ GPa, $\nu = 0.3$. Các thông số không thứ nguyên của chuyển vị giữa tấm và ứng suất được tính toán theo công thức như sau:

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \frac{10h^3 E_c}{Q_0 a^4} w(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}) \\ \tilde{\sigma}_{xx} &= \frac{h}{Q_0 a} \sigma_{xx}(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{h}{2})\end{aligned}\quad (3.7)$$

Bảng 3.4 thể hiện kết quả tính toán và so sánh chuyển vị và ứng suất của tấm với các kết quả đã công bố trong tài liệu [94] và [95], trong đó tài liệu [94] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn và lý thuyết biến dạng cắt bậc ba, tài liệu [95] tính toán dựa trên phương pháp giải tích và lý thuyết biến dạng cắt bậc ba. Các kết quả so sánh chứng tỏ sự tin cậy của lý thuyết và chương trình tính trong luận án đối với tấm ở kích thước macro (chưa kể đến hiệu ứng kích thước, $l_i = 0$).

Bảng 3.4. So sánh chuyển vị $\tilde{w}$ và ứng suất $\tilde{\sigma}_{xx}$ của tấm với các kết quả tính bằng nhiều cách giải khác nhau ($l_i = 0$)

Luận án						Kết quả giải bằng phương pháp giải tích [96]	Kết quả tính bằng FEM [94]
LA1	LA2	LA3	LA4	LA5	LA6		
$\tilde{w} = \frac{10h^3 E_c}{Pa^4} w(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2})$							
0.465	0.465	0.465	0.467	0.467	0.467	0.466	0.463
$\tilde{\sigma}_{xx} = \frac{h}{Pa} \sigma_{xx}(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{h}{2})$							
2.829	2.828	2.828	2.887	2.889	2.887	2.892	2.893

3.3. Khảo sát ảnh hưởng của một số tham số đến đáp ứng uốn tĩnh của tấm nano hữu cơ

Trên cơ sở chương trình đã lập, trong mục này, tác giả tiến hành phân tích uốn tấm nano hữu cơ với các hình dạng, thông số hình học, thuộc tính vật liệu như mô tả dưới đây.

Tấm nano hữu cơ chịu tác dụng của tải trọng tĩnh như Hình 2.1. Các tham số hình học của tấm bao gồm chiều dài tấm là a , chiều rộng tấm là b , chiều dày là h , tỷ lệ a/b thay đổi từ 1 đến 4, tỷ lệ chiều dày a/h thay đổi từ 10 đến 50. Tấm gồm 5 lớp vật liệu, tổng chiều dày là $h = 0.55044$ nm, mỗi lớp có chiều dày là h_i , tỷ lệ chiều dày các lớp tương ứng là 550:0.120:0.050:0.170:0.100. Các đặc trưng cơ tính của từng lớp được cho như trong bảng 3.5, tải trọng phân bố đều tác dụng lên tấm có cường độ là P_{max} .

Bảng 3.5. Một số đặc trưng cơ tính từng lớp vật liệu của nano hữu cơ [48]

Thứ tự lớp	Tên gọi	Mô đun E (GPa)	Hệ số ν	Khối lượng riêng (kg/m^3)
1	Glass	69	0.23	2400
2	ITO	116	0.35	7120
3	PEDOT: PSS	2.3	0.4	1000
4	P3HT: PCBM	6	0.23	1200
5	Aluminum	70	0.35	2601

Hai tham số được tính toán và khảo sát đối với bài toán uốn tĩnh là chuyển vị và ứng suất của điểm giữa tấm, các tham số này được chuẩn hóa theo công thức sau:

$$w^* = \frac{10h_0^3 E_{glass}}{P_{max} a^4} w \left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2} \right) \quad (3.8)$$

$$\sigma_x^* = \frac{h_0}{P_{\max} a} \sigma_x \left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{h}{2} \right)$$

trong đó $h_0 = 1 \text{ nm}$.

Để thấy rõ tác động của hiệu ứng kích thước nhỏ đến đáp ứng của tấm nano hữu cơ, nghiên cứu này tính toán sự khác biệt giữa trường hợp bỏ qua tham số đàn hồi phi cục bộ l_i và trường hợp có tính đến tham số đàn hồi phi cục bộ l_i , công thức tính toán sự khác biệt này như sau:

$$Diff_w = \frac{w^*(l_i \neq 0)}{w^*(l_i = 0)}; Diff_\sigma = \frac{\sigma_x^*(l_i \neq 0)}{\sigma_x^*(l_i = 0)}; Diff_\omega = \frac{\omega_i^*(l_i \neq 0)}{\omega_i^*(l_i = 0)} \quad (3.9)$$

- Ảnh hưởng của chiều dày tấm và tham số đàn hồi phi cục bộ

Để xem xét ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đối với đáp ứng chuyển vị và ứng suất của tấm nano hữu cơ, luận án cho tham số phi cục bộ của mỗi lớp l_i biến đổi từ 0 đến $2h_i$, tỷ lệ chiều dài và chiều dày của tấm biến đổi từ 10 đến 50, kết quả tính toán chuyển vị và ứng suất được thể hiện như trong các bảng 3.6 và 3.7. Một số nhận xét từ các kết quả tính toán:

+ Nếu tham số đàn hồi phi cục bộ l_i có giá trị càng lớn thì cả chuyển vị uốn tĩnh và ứng suất của tấm nano hữu cơ có giá trị càng lớn, điều này chứng tỏ tham số đàn hồi phi cục bộ đã làm giảm độ cứng của tấm nano hữu cơ.

+ Các kết quả tính toán bằng cả phương pháp giải tích và phương pháp phần tử hữu hạn với ba lý thuyết tấm khác nhau đều cho các kết quả gần giống nhau, điều này chứng tỏ rằng có thể áp dụng phương pháp tính giải tích hoặc phương pháp số để giải quyết bài toán uốn tĩnh của tấm nano hữu cơ.

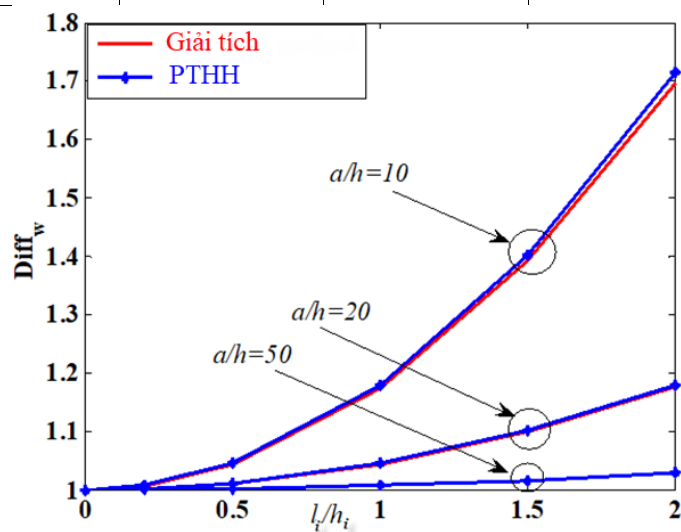
Hình 3.2 là đồ thị biểu diễn sự khác biệt của chuyển vị uốn tĩnh và ứng suất theo tỷ lệ l_i/h ứng với ba giá trị của tỷ lệ chiều dài và chiều dày a/h , khi tỷ lệ $a/h = 10$, thì sự sai lệch của chuyển vị và ứng suất (giữa hai trường hợp tính đến tham số phi cục bộ và bỏ qua tham số phi cục bộ l_i) càng rõ rệt khi tỷ lệ l_i/h nhận giá trị càng lớn. Tuy nhiên đối với trường hợp $a/h = 50$ thì sự sai lệch giữa hai trường hợp này lại không rõ rệt (sai lệch lớn nhất của chuyển vị không vượt quá 3% ứng với $l_i/h_i = 2$), điều này cũng có nghĩa rằng nếu không yêu cầu độ chính xác quá khắt khe thì có thể bỏ qua ảnh hưởng của tham số đàn hồi phi cục bộ, và sẽ đơn giản tính toán hơn rất nhiều.

Bảng 3.6. Chuyển vị uốn w^* của tấm nano hữu cơ phụ thuộc tỷ lệ a/h và tham số phi cục bộ l_i , $b/a = 1$

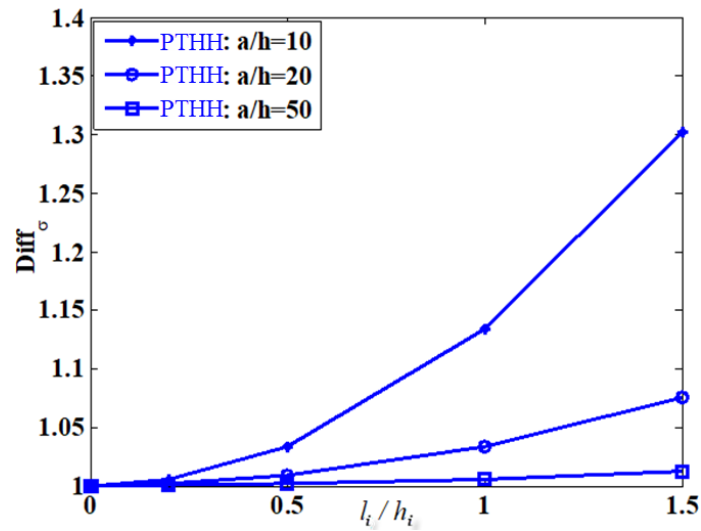
l_i/h_i	0	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0
$a = 10h$						
LA1	2.9347	2.9552	3.0625	3.4458	4.0847	4.9791
LA2	2.9345	2.9550	3.0623	3.4456	4.0845	4.9788
LA3	2.9347	2.9552	3.0625	3.4458	4.0847	4.9791
LA4	2.9068	2.9276	3.0365	3.4257	4.0742	4.9822
LA5	2.9066	2.9273	3.0363	3.4253	4.0737	4.9815
LA6	2.9068	2.9276	3.0365	3.4257	4.0742	4.9822
$a = 20h$						
LA1	2.8375	2.8425	2.8689	2.9629	3.1196	3.3389
LA2	2.8375	2.8425	2.8688	2.9628	3.1195	3.3389
LA3	2.8375	2.8425	2.8689	2.9629	3.1196	3.3389
LA4	2.8091	2.8141	2.8406	2.9354	3.0933	3.3144
LA5	2.8090	2.8141	2.8406	2.9354	3.0933	3.3144
LA6	2.8091	2.8141	2.8406	2.9354	3.0933	3.3144
$a = 50h$						
LA1	2.8103	2.8111	2.8153	2.8302	2.8552	2.8901
LA2	2.8103	2.8111	2.8153	2.8302	2.8552	2.8901
LA3	2.8103	2.8111	2.8153	2.8302	2.8552	2.8901
LA4	2.7817	2.7825	2.7867	2.8017	2.8268	2.8619
LA5	2.7816	2.7824	2.7867	2.8017	2.8268	2.8619
LA6	2.7817	2.7825	2.7867	2.8017	2.8268	2.8619

Bảng 3.7. Ứng suất σ_x^* của tấm nano hữu cơ phụ thuộc tỷ lệ a/h và tham số đàn hồi phi cục bộ l_i , $b/a = 1$

l_i/h_i	0	0.2	0.5	1.0	1.5
$a = 10h$					
LA1	4.8630	4.8818	4.9804	5.3327	5.9200
LA2	4.8643	4.8831	4.9816	5.3333	5.9196
LA3	4.8628	4.8816	4.9803	5.3327	5.9200
LA4	4.9602	4.9868	5.1267	5.6263	6.4590
LA5	4.9621	4.9887	5.1287	5.6285	6.4615
LA6	4.9600	4.9867	5.1265	5.6261	6.4587
$a = 20h$					
LA1	9.6945	9.7041	9.7544	9.9340	10.2334
LA2	9.6952	9.7048	9.7550	9.9346	10.2339
LA3	9.6945	9.7040	9.7543	9.9340	10.2334
LA4	9.8771	9.8902	9.9593	10.2059	10.6170
LA5	9.8781	9.8913	9.9606	10.2084	10.6213
LA6	9.8770	9.8901	9.9592	10.2057	10.6165
$a = 50h$					
LA1	24.2144	24.2182	24.2385	24.3107	24.4311
LA2	24.2147	24.2185	24.2387	24.3110	24.4314
LA3	24.2144	24.2182	24.2384	24.3107	24.4311
LA4	24.6627	24.6679	24.6952	24.7924	24.9545
LA5	24.6632	24.6684	24.6957	24.7932	24.9559
LA6	24.6627	24.6679	24.6951	24.7924	24.9544



a. Kết quả tính bằng lời giải giải tích và PTHH



b. Kết quả tính dựa trên PTHH

Hình 3.2 Biểu đồ biểu diễn sai số của chuyển vị và ứng suất phụ thuộc l_i/h_i ứng với các trường hợp của tỷ lệ a/h , f_z là hàm đa thức, $a/b=1$

- Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dài b/a và tham số đàn hồi phi cục bộ

Bảng 3.8 và 3.9 thể hiện chuyển vị và ứng suất của tấm nano hữu cơ với trường hợp tỷ lệ chiều dài hai cạnh tấm b/a và tỷ lệ l_i/h_i nhận các giá trị khác nhau. Các kết quả tính toán thể hiện rằng:

+ Khi tỷ lệ chiều dài các cạnh tấm b/a tăng lên thì độ cứng của tấm nano hữu cơ giảm xuống, kết quả là chuyển vị uốn của tấm tăng nano lên, do vậy ứng suất của tấm cũng tăng lên. Và cũng dễ dàng thấy rằng với các giá trị của tỷ lệ b/a khác nhau thì khi giá trị của tham số đàn hồi phi cục bộ l_i càng lớn, thì sự sai lệch giữa chuyển vị và ứng suất của tấm nano hữu cơ so với trường hợp tính theo lý thuyết cổ điển (bỏ qua tham số phi cục bộ l_i). Điều này tiếp tục khẳng định rằng không thể bỏ qua ảnh hưởng của tham số đàn hồi phi cục bộ khi tính toán đối với tấm nano hữu cơ.

+ Kết quả tính toán bằng phương pháp phân tử hữu hạn và phương pháp giải tích với cả ba lý thuyết biến dạng cắt đều cho kết quả rất gần nhau.

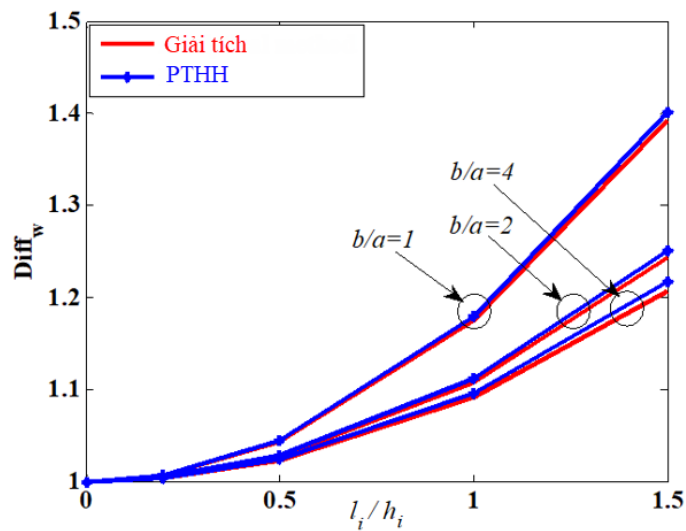
Trên hình 3.3 trình bày kết quả tính toán sai khác ứng suất và chuyển vị theo tỷ lệ l_i/h_i ứng với ba trường hợp của tỷ lệ b/a , có thể thấy rằng sự sai lệch này tăng dần khi tăng giá trị của tham số đàn hồi phi cục bộ l_i , và sự sai lệch này giảm dần khi tỷ lệ b/a tăng dần. Như vậy có thể thấy rằng sự sai lệch ứng suất và chuyển vị trong trường hợp có tính đến lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và tính theo lý thuyết cổ điển (bỏ qua tham số đàn hồi phi cục bộ) phụ thuộc vào cả tỷ lệ chiều dài các cạnh của tấm và tỷ lệ chiều dài so với chiều dày của tấm nano hữu cơ.

Bảng 3.8. Chuyển vị uốn w^* của tấm nano phụ thuộc tỷ lệ b/a , $a/h=10$

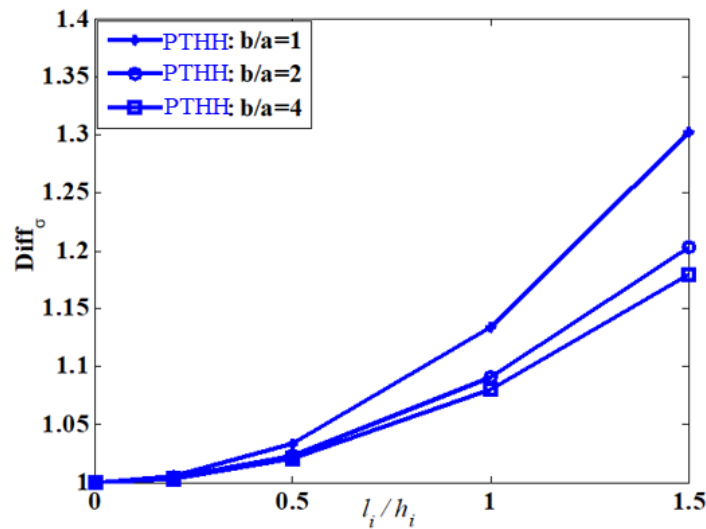
l_i/h_i	0	0.2	0.5	1.0	1.5
$b = a$					
LA1	2.9347	2.9552	3.0625	3.4458	4.0847
LA2	2.9345	2.9550	3.0623	3.4456	4.0845
LA3	2.9347	2.9552	3.0625	3.4458	4.0847
LA4	2.9068	2.9276	3.0365	3.4257	4.0742
LA5	2.9066	2.9273	3.0363	3.4253	4.0737
LA6	2.9068	2.9276	3.0365	3.4257	4.0742
$b = 2a$					
LA1	7.1675	7.1984	7.3609	7.9413	8.9085
LA2	7.1672	7.1981	7.3606	7.9410	8.9082
LA3	7.1675	7.1984	7.3609	7.9413	8.9085
LA4	7.1289	7.1607	7.3273	7.9223	8.9140
LA5	7.1286	7.1603	7.3269	7.9218	8.9133
LA6	7.1289	7.1607	7.3273	7.9223	8.9140
$b = 4a$					
LA1	8.8001	8.8324	9.0024	9.6094	10.6211
LA2	8.7997	8.8321	9.0021	9.6091	10.6208
LA3	8.8000	8.8324	9.0024	9.6094	10.6211
LA4	8.9736	9.0082	9.1899	9.8387	10.9201
LA5	8.9732	9.0078	9.1895	9.8383	10.9197
LA6	8.9736	9.0082	9.1899	9.8387	10.9201

Bảng 3.9. Ứng suất σ_x^* của tấm nano hữu cơ phụ thuộc tỷ lệ b/a và tham số đàn hồi phi cục bộ l_i , $a/h=10$

l_i/h_i	LA1	LA2	LA3	LA4	LA5	LA6
$b = a$						
1.5	5.9200	5.9196	5.9200	6.4590	6.4615	6.4587
1.0	5.3327	5.3333	5.3327	5.6263	5.6285	5.6261
0.5	4.9804	4.9816	4.9803	5.1267	5.1287	5.1265
0.2	4.8818	4.8831	4.8816	4.9868	4.9887	4.9867
0	4.8630	4.8643	4.8628	4.9602	4.9621	4.9600
$b = 2a$						
1.5	12.6124	12.6132	12.6124	13.227	13.2323	13.2272
1.0	11.6160	11.6176	11.6158	11.9867	11.9902	11.9863
0.5	11.0181	11.0202	11.0179	11.2421	11.2450	11.2418
0.2	10.8507	10.8529	10.8505	11.0336	11.0364	11.0333
0	10.8188	10.8211	10.8186	10.9939	10.9966	10.9936
$b = 4a$						
1.5	14.8298	14.8307	14.8297	15.9255	15.9305	15.9250
1.0	13.7659	13.7677	13.7658	14.5756	14.5796	14.5752
0.5	13.1276	13.1298	13.1274	13.7656	13.7691	13.7653
0.2	12.9489	12.9513	12.9487	13.5389	13.5421	13.5385
0	12.9148	12.9172	12.9146	13.4957	13.4989	13.4954



a. Kết quả tính dựa trên lời giải giải tích và PTHH



b. Kết quả tính dựa trên PTHH

Hình 3.3. Biểu đồ biểu diễn sai số của ứng suất và chuyển vị theo tỷ lệ l_i/h_i ứng với các trường hợp của tỷ lệ $b/a, f_z$ là hàm đa thức, $a/h=10$

3.4. Kết luận chương 3

Trong chương 3 tác giả đã trình bày thuật toán phần tử hữu hạn giải quyết bài toán uốn tĩnh của tấm nano hữu cơ. Qua các số liệu tính toán, tác giả rút ra một số kết luận chủ đạo:

Tác giả đã xây dựng được thuật toán phần tử hữu hạn và chương trình Solar_Nonlocal_Static_2025 (SNS_2025) tính toán tấm nano hữu cơ có tính đến hiệu ứng kích thước. Tác giả cũng đưa ra lời giải dạng Navier để kiểm chứng với lời giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Kết quả tính toán của phương pháp phần tử hữu hạn được so sánh với các kết quả tính bằng phương pháp giải tích và với các kết quả đã công bố nhằm chứng minh độ chính xác và tin cậy.

Qua các kết quả khảo sát, luận án nhận thấy tùy thuộc vào thông số hình học của tấm, ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước (thông qua tham số đàn hồi phi cục bộ) sẽ khác nhau. Do đó, khi thiết kế tấm nano hữu cơ sử dụng cho những

yêu cầu cụ thể, người kỹ sư cần chú ý những vấn đề trên để kết cấu có thể làm việc đạt được hiệu quả cao.

Nội dung của chương này đã được công bố trong bài báo thứ 1 (Danh mục công trình của tác giả).

CHƯƠNG 4 PHÂN TÍCH ĐÁP ỨNG ĐỘNG CỦA TẮM NANO HỮU CƠ CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA HIỆU ỨNG KÍCH THƯỚC VÀ KHẢO SÁT ẢNH HƯỞNG CỦA MỘT SỐ YẾU TỐ

Trong chương này, luận án tiến hành lập phương trình, thuật toán và chương trình máy tính giải bài toán dao động tự do không cản và dao động cưỡng bức có cản của tấm nano hữu cơ. Đồng thời, luận án cũng làm rõ ảnh hưởng của một số tham số đến đáp ứng động lực học của tấm nano hữu cơ như hệ số đàn hồi phi cục bộ, tham số hình học tấm, điều kiện biên.

4.1. Bài toán dao động riêng

4.1.1. Thuật toán PTHH và chương trình tính dao động riêng

Từ phương trình chuyển động của tấm (2.78), bỏ qua tải trọng ngoài và bỏ qua cản của kết cấu (bỏ qua tính đàn nhớt) ta thu được phương trình dao động tự do không cản của tấm như sau:

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \quad (4.1)$$

Để tìm tần số dao động tự do và các dạng dao động riêng tương ứng của tấm nano hữu cơ, giả thiết nghiệm của (4.1) có dạng: $q = q_0 \sin(\omega t)$, trong đó q_0 là biên độ và ω là tần số dao động của tấm. Từ đó phương trình dao động tự do (4.1) dẫn tới bài toán trị riêng có dạng như sau:

$$(K - M\omega^2)q_0 = 0 \quad (4.2)$$

Phương trình (4.2) là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất và có nghiệm không tầm thường $q_0 \neq 0$ khi và chỉ khi định thức của ma trận $(K - M\omega^2)$ bằng không:

$$\det(K - M\omega^2) = 0 \quad (4.3)$$

Phương trình (4.3) là phương trình đa thức bậc N đối với ω^2 . Giải phương trình này ta tìm được N giá trị tần số riêng ω_i của kết cấu. Tương ứng với mỗi

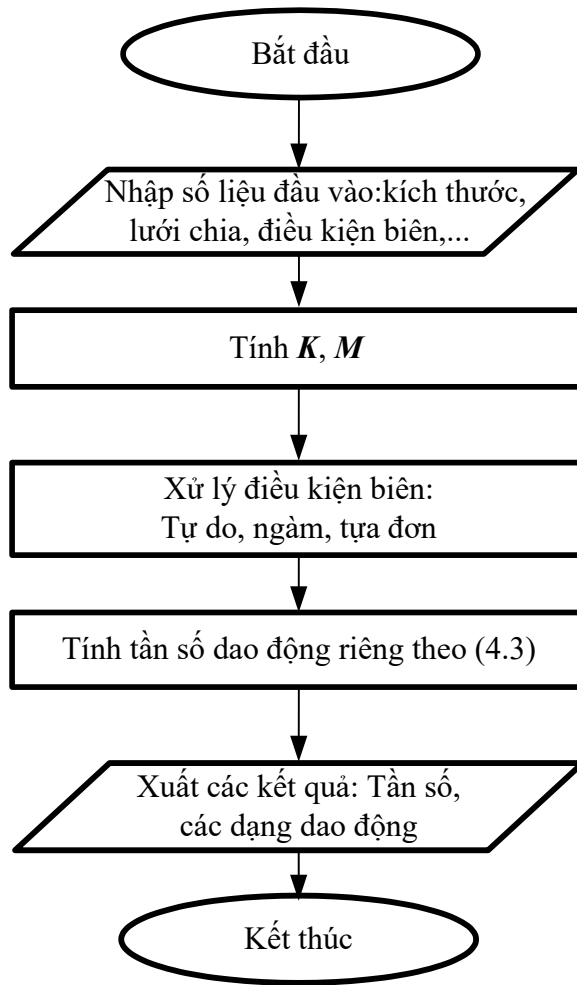
tần số riêng ω_i thay vào phương trình (4.2) ta tìm được véc tơ riêng $\mathbf{q}_i$ tương ứng. Véc tơ riêng $\mathbf{q}_i$ là các biên độ dao động của các nút và được gọi là dạng dao động riêng của tấm tương ứng với tần số ω_i .

Sơ đồ giải thuật giải quyết bài toán dao động riêng tấm nano hữu cơ được thể hiện như Hình 4.1.

Trên cơ sở lý thuyết và thuật toán đã chỉ ra ở phần trên, tác giả đã xây dựng bộ chương trình tính Solar_Nonlocal_Freevibration_2025 (SNF_2025) trong môi trường Matlab để phân tích dao động riêng tấm nano hữu cơ dưới các điều kiện biên khác nhau. Chương trình tính toán có các mô đun chủ yếu:

- Nhập số liệu, chia lưới phần tử.
- Giải bài toán dao động riêng đối với tấm nano hữu cơ.
- Xuất dữ liệu kết quả.

Bộ chương trình Solar_Nonlocal_Freevibration_2025 có khả năng giải được các bài toán dao động tự do cho tấm nano hữu cơ và xem xét ảnh hưởng của các tham số như thay đổi điều kiện biên, kích thước hình học đến dao động riêng của tấm.



Hình 4.1. Sơ đồ giải thuật giải quyết bài toán dao động riêng tấm nano hữu cơ

4.1.2. Kiểm tra sự hội tụ và độ chính xác của chương trình tính

Để kiểm tra độ chính xác và độ hội tụ của chương trình tính, luận án tiến hành so sánh tham số tần số dao động riêng không thứ nguyên của tấm nano với các kết quả tính toán bằng phương pháp giải tích.

Sau đây luận án trình bày thêm cách giải bài toán dao động riêng bằng phương pháp giải tích để nhằm so sánh đối chiếu với lời giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Đối với bài toán dao động riêng, từ phương trình (2.43), không xét đến vế phải và bỏ qua cản, luận án sử dụng dạng nghiệm Navier như sau:

$$w_b(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i\omega t} \quad (4.4)$$

$$w_s(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i\omega t}$$

trong đó m và n là các số tự nhiên, và W_{bmn} , W_{smn} là biên độ của các chuyển vị tương ứng, $i^2 = -1$, ω là tần số dao động của tấm. Thay các biểu thức (4.4) vào (2.43), ta thu được hệ phương trình như sau:

$$\begin{bmatrix} K_{11} - M_{11} & K_{12} - M_{12} \\ K_{21} - M_{21} & K_{22} - M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

trong đó các hệ số:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \chi^4 A_{z11} + 2A_{z12}\chi^2\varphi^2 + A_{z12}\varphi^4 + 4.A_{z33}\chi^2\varphi^2 \\ K_{12} &= \varphi^4 B_{f11} + 2B_{f12}\chi^2\varphi^2 + B_{f12}\chi^4 + 4.B_{f33}\chi^2\varphi^2 \\ K_{21} &= \chi^4 B_{f11} + 2B_{f12}\chi^2\varphi^2 + B_{f12}\varphi^4 + 4.B_{f33}\chi^2\varphi^2 \\ K_{22} &= \varphi^4 D_{f11} + 2D_{f12}\chi^2\varphi^2 + D_{f12}\chi^4 + 4.D_{f33}\chi^2\varphi^2 \\ M_{11} &= \omega^2 \left(H_0 - \tilde{H}_0(\chi^2 + \varphi^2) + H_1(\chi^2 + \varphi^2) - \tilde{H}_1(\chi^4 + \varphi^4 + 2\chi^2\varphi^2) \right) \\ M_{12} &= \omega^2 \left(H_0 - \tilde{H}_0(\chi^2 + \varphi^2) + H_4(\chi^2 + \varphi^2) - \tilde{H}_4(\chi^4 + \varphi^4 + 2\chi^2\varphi^2) \right) \\ M_{21} &= \omega^2 \left(H_0 - \tilde{H}_0(\chi^2 + \varphi^2) + H_2(\chi^2 + \varphi^2) - \tilde{H}_2(\chi^4 + \varphi^4 + 2\chi^2\varphi^2) \right) \\ M_{22} &= \omega^2 \left(H_0 - \tilde{H}_0(\chi^2 + \varphi^2) + H_3(\chi^2 + \varphi^2) - \tilde{H}_3(\chi^4 + \varphi^4 + 2\chi^2\varphi^2) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

với $\chi = \pi/a$; $\varphi = \pi/b$. Giải phương trình (4.5), ta sẽ thu được các tần số dao động riêng kèm theo các dạng riêng tương ứng. Trong nghiên cứu này, luận án sử dụng dạng nghiệm gồm ba số hạng đầu tiên là đảm bảo sự chính xác của kết quả tính toán.

Ví dụ kiểm chứng 4: Ví dụ này so sánh tần số dao động riêng của tấm nano có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước thông qua tham số đàn hồi phi cục bộ l . Các thông số hình học của tấm gồm chiều dài và chiều rộng $a = b = 10$ nm, chiều dày tấm h biến đổi từ $a/10$ đến $a/100$. Các tham số vật liệu gồm

mô đun đàn hồi $E = 30$ MPa, hệ số Poisson $\nu = 0.3$, khối lượng riêng $\rho = 1$ kg/m³, tấm tựa đơn trên các cạnh.

Tần số dao động riêng của tấm $\tilde{\omega} = h^3 \omega_1 / \sqrt{\rho/G}$, trong đó $G = E/2(1 + \nu)$. Sự hội tụ của kết quả tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) đối với tần số dao động riêng đầu tiên của tấm nano bằng cách tăng dần lưới chia phần tử của tấm với các tham số đàn hồi phi cục bộ khác nhau được cho như trong bảng 4.1, các kết quả tính toán này cho thấy rằng khi số lượng phần tử của lưới chia tăng lên, kết quả tính toán chuyển vị của tấm nano hội tụ, và với lưới chia 16×16 phần tử đảm bảo độ chính xác cần thiết khi so sánh với kết quả tính bằng lời giải dạng giải tích dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba trong tài liệu [45], do vậy các tính toán dưới đây sẽ sử dụng lưới chia này để tính toán.

Bảng 4.2 trình bày kết quả so sánh tần số dao động riêng đầu tiên với các tham số phi cục bộ và tham số chiều dày khác nhau, kết quả tính toán này chứng tỏ các kết quả tính toán bằng cả phương pháp giải tích và phương pháp phần tử hữu hạn rất gần nhau và gần với kết quả đã chỉ ra trong tài liệu [45], sự khác biệt ở đây là do lý thuyết tính toán trường chuyển vị của tài liệu [45] so với trường chuyển vị trong luận án là khác nhau.

Bảng 4.1. Sự hội tụ của tần số dao động riêng không thứ nguyên $\tilde{\omega}$ của tấm nano khi lưới chia phần tử tăng dần, $a/h = 10$, tài liệu [45] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba

l (nm)	Kết quả tính toán tần số của luận án bằng phương pháp phần tử hữu hạn với lưới chia khác nhau						Kết quả giải tích [45]
	6×6	10×10	14×14	16×16	18×18	20×20	
f_z là hàm đa thức							
0	0.091	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.093
1	0.083	0.084	0.084	0.084	0.084	0.084	0.085

2	0.077	0.078	0.078	0.078	0.078	0.078	0.079
f_z là hàm sin							
0	0.091	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.093
1	0.083	0.084	0.084	0.084	0.084	0.084	0.085
2	0.077	0.078	0.078	0.078	0.078	0.078	0.079
f_z là hàm sin hyperbol							
0	0.091	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.093
1	0.083	0.084	0.084	0.084	0.084	0.084	0.085
2	0.077	0.078	0.078	0.078	0.078	0.078	0.079

Bảng 4.2. So sánh tần số dao động tự nhiên đầu tiên $\tilde{\omega}$ của tấm nano với các kết quả giải tích, tài liệu [45] áp dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao

l (nm)	LA1	LA2	LA3	LA4	LA5	LA6	Kết quả giải tích [45]
$a=10h$							
2	0.0798	0.0798	0.0798	0.0786	0.0786	0.0786	0.0791
1	0.0861	0.0861	0.0861	0.0848	0.0848	0.0848	0.0854
0	0.0944	0.0944	0.0944	0.0928	0.0928	0.0928	0.0935
$a=20h$							
2	0.0202	0.0202	0.0202	0.0201	0.0201	0.0201	0.0202
1	0.0218	0.0218	0.0218	0.0217	0.0217	0.0217	0.0218
0	0.0239	0.0239	0.0239	0.0238	0.0238	0.0238	0.0239

Ghi chú: LA1: Lời giải dạng giải tích, f_z là hàm đa thức

LA2: Lời giải dạng giải tích, f_z là hàm sin

LA3: Lời giải dạng giải tích, f_z là hàm sin hyperbol

LA4: Lời giải FEM, f_z là hàm đa thức

LA5: Lời giải FEM, f_z là hàm sin

LA6: Lời giải FEM, f_z là hàm sin hyperbol

4.1.3. Kết quả tính toán số khảo sát ảnh hưởng của một số tham số đến đáp ứng dao động riêng của tấm nano hữu cơ

Phần này trình bày tính toán đối với tấm nano hữu cơ với các thông số như ở mục 3.3. Bảng 4.3 trình bày kết quả tính toán tần số dao động riêng đầu tiên của tấm nano hữu cơ và Bảng 4.4 thể hiện sự biến đổi của 6 tần số dao động riêng đầu tiên của tấm nano hữu cơ phụ thuộc vào tỷ lệ l_i/h_i ứng với các giá trị khác nhau của tỷ số a/h , bằng việc nhìn vào các số liệu này, chúng ta thấy rằng khi tăng tỷ lệ l_i/h_i thì tần số dao động riêng của tấm giảm xuống, và khi tấm càng mỏng (thể hiện ở tỷ lệ a/h càng lớn) thì sự giảm của tần số dao động riêng đầu tiên của tấm càng không rõ rệt.

Hình 4.2 thể hiện sự khác biệt của tần số dao động tự nhiên đầu tiên trong trường hợp tính đến ảnh hưởng của tham số đàn hồi phi cục bộ và bỏ qua ảnh hưởng của tham số này, người ta thấy rằng khi tấm càng mỏng (tức tỷ lệ a/h càng lớn) thì sự khác biệt tần số dao động riêng đầu tiên giữa hai trường hợp này là càng nhỏ, ví dụ như trường hợp $a/h=50$, sự khác biệt giữa hai trường hợp là chưa đến 4%, nếu không cần độ chính xác cao, có thể không cần tính đến ảnh hưởng của tham số đàn hồi phi cục bộ l_i . Nhưng với tỷ lệ $a/h=10$, ta nhận thấy rằng khi tỷ lệ l_i/h_i càng lớn thì việc bỏ qua ảnh hưởng của tham số đàn hồi phi cục bộ l_i sẽ không còn chính xác khi tính toán dao động riêng của tấm nano hữu cơ. Điều này cũng được xác thực thông qua hình 4.3, với tỷ lệ $a/h = 10$ thì sự khác biệt của các tần số giữa hai trường hợp khi tỷ lệ l_i/h_i có giá trị lớn thì càng rõ rệt. Hình 4.4 trình bày bốn dạng dao động riêng đầu tiên của tấm nano hữu cơ ứng với trường hợp tính theo f_z là hàm đa thức.

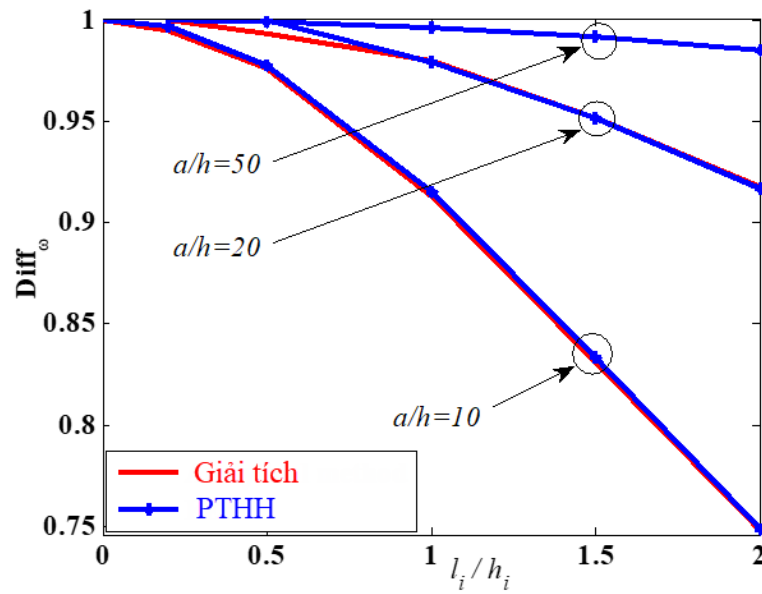
Bảng 4.3. Tần số dao động tự nhiên đầu tiên ω_1^* của tấm nano hữu cơ phụ thuộc vào a/h và tham số đàn hồi phi cục bộ, $b/a = 1$, $\omega_1^* = \omega_1 h \sqrt{\rho_{glass} / E_{glass}}$

l_i/h_i	LA1	LA2	LA3	LA4	LA5	LA6
$a=10h$						
2.0	0.0430	0.0430	0.0430	0.0423	0.0423	0.0423
1.5	0.0478	0.0478	0.0478	0.0471	0.0471	0.0471
1.0	0.0525	0.0525	0.0525	0.0517	0.0517	0.0517
0.5	0.0561	0.0561	0.0561	0.0552	0.0552	0.0552
0.2	0.0572	0.0572	0.0572	0.0563	0.0563	0.0563
0	0.0575	0.0575	0.0575	0.0565	0.0565	0.0565
$a=20h$						
2.0	0.0133	0.0133	0.0133	0.0132	0.0132	0.0132
1.5	0.0138	0.0138	0.0138	0.0137	0.0137	0.0137
1.0	0.0142	0.0142	0.0142	0.0141	0.0141	0.0141
0.5	0.0144	0.0144	0.0144	0.0144	0.0144	0.0144
0.2	0.0145	0.0145	0.0145	0.0144	0.0144	0.0144
0	0.0145	0.0145	0.0145	0.0144	0.0144	0.0144
$a=50h$						
2.0	0.002303	0.002303	0.002303	0.002298	0.002298	0.002298
1.5	0.002319	0.002318	0.002319	0.002314	0.002314	0.002314
1.0	0.002330	0.002330	0.002330	0.002325	0.002325	0.002325
0.5	0.002337	0.002337	0.002337	0.002332	0.002332	0.002332
0.2	0.002339	0.002338	0.002339	0.002334	0.002334	0.002334
0	0.002339	0.002339	0.002339	0.002334	0.002334	0.002334

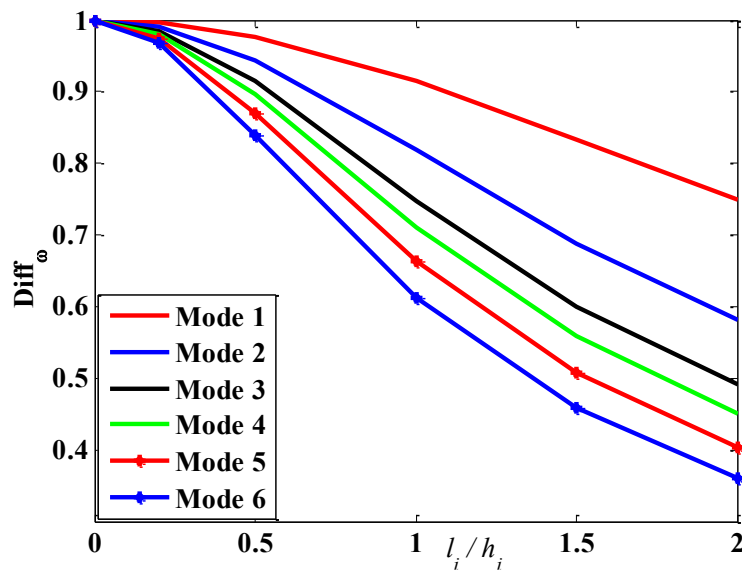
Bảng 4.4. Sáu tần số dao động tự nhiên đầu tiên ω_i^* của tấm nano hữu cơ phụ thuộc vào a/h và tham số đàn hồi phi cục bộ, f_z là hàm đa thức, $b/a = 1$,

$$\omega_i^* = \omega_i h \sqrt{\rho_{glass} / E_{glass}}$$

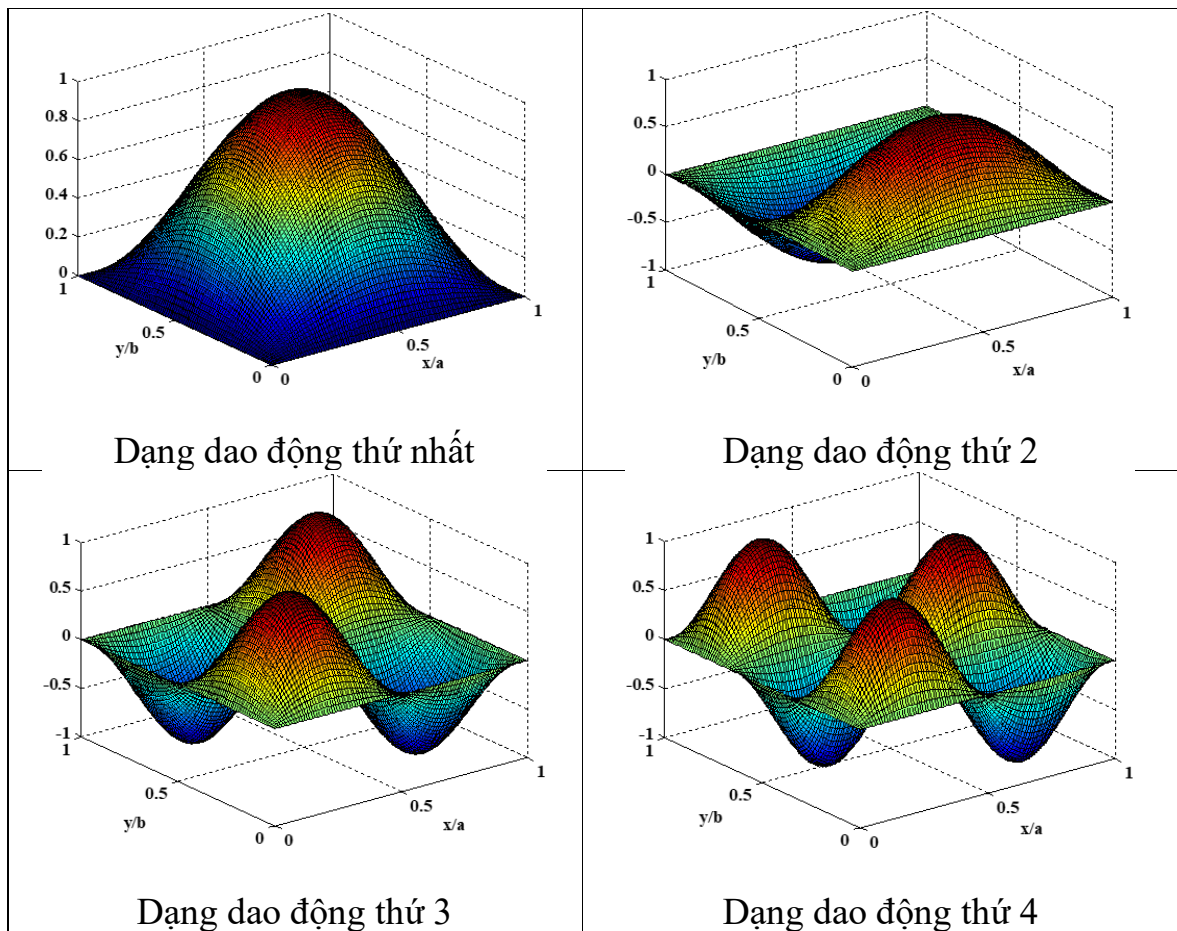
l_i/h_i	ω_1^*	ω_2^*	ω_3^*	ω_4^*	ω_5^*	ω_6^*
$a=10h$						
2.0	0.0423	0.0785	0.1017	0.1142	0.1283	0.1445
1.5	0.0471	0.0931	0.1245	0.1416	0.1612	0.1836
1.0	0.0517	0.1107	0.1550	0.1802	0.2102	0.2451
0.5	0.0552	0.1276	0.1894	0.2274	0.2762	0.3365
0.2	0.0563	0.1339	0.2040	0.2490	0.3095	0.3878
0	0.0565	0.1352	0.2072	0.2538	0.3173	0.4006
$a=20h$						
2.0	0.0132	0.0292	0.0420	0.0497	0.0592	0.0710
1.5	0.0137	0.0316	0.0468	0.0562	0.0682	0.0833
1.0	0.0141	0.0337	0.0514	0.0627	0.0779	0.0975
0.5	0.0144	0.0352	0.0549	0.0680	0.0861	0.1104
0.2	0.0144	0.0356	0.0560	0.0697	0.0889	0.1151
0	0.0144	0.0357	0.0562	0.0700	0.0894	0.1161



Hình 4.2. Sự khác biệt của tần số dao động riêng thứ nhất của tấm nano hữu cơ trong trường hợp có tính đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước và trường hợp bỏ qua hiệu ứng kích thước, f_z là hàm đa thức



Hình 4.3. Sự khác biệt của sáu tần số dao động tự nhiên đầu tiên của tấm nano hữu cơ trong trường hợp bỏ qua hiệu ứng kích thước và trường hợp có tính đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước, f_z là hàm đa thức.

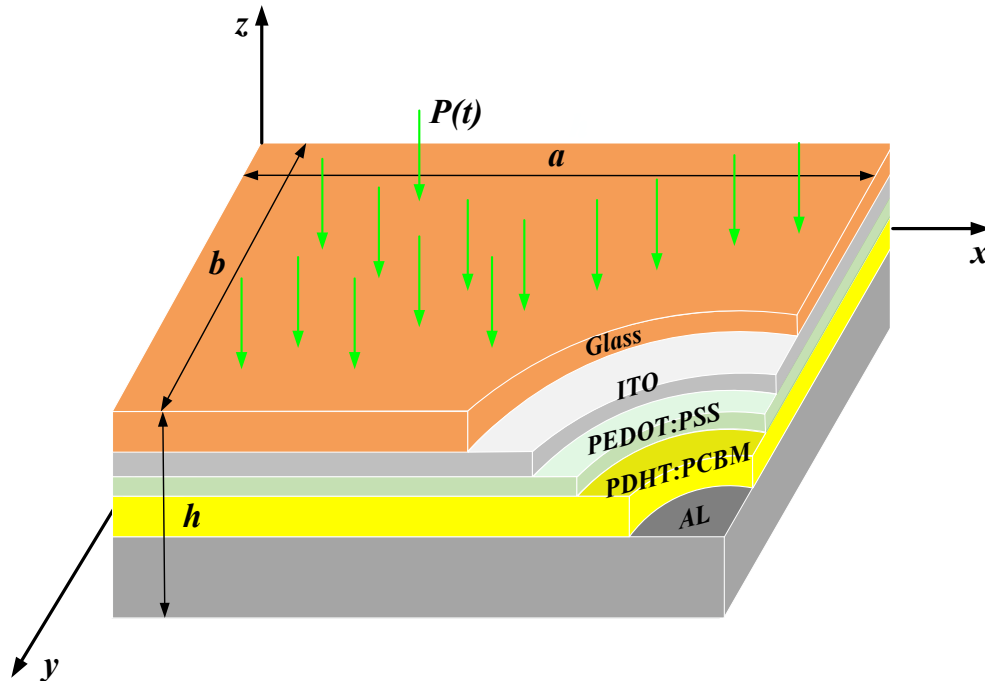


Hình 4.4. Bốn dạng dao động riêng đầu tiên của tấm nano hữu cơ ứng với lý thuyết tấm sử dụng hàm f_z dạng đa thức, $a/h=10$, KQ giải tích

4.2. Bài toán dao động cưỡng bức

4.2.1. Mô hình bài toán

Xét tấm nano hữu cơ chịu tác dụng của tải trọng biến đổi theo thời gian được mô tả như hình 4.5.



Hình 4.5. Mô hình bài toán tấm nano hữu cơ nhiều lớp chịu tác dụng của tải trọng vuông góc với mặt phẳng tấm và biến đổi theo thời gian

4.2.2. Thuật toán PTHH và chương trình tính

Phương trình dao động cường bức có cản của tấm nano hữu cơ như (2.78) được viết lại như sau:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F \quad (4.7)$$

Hệ phương trình vi phân cấp hai thể hiện dao động có cản của kết cấu (4.7) là hệ phương trình vi phân cấp hai tuyến tính có hệ số là hằng số. Có hai phương pháp chính để giải hệ (4.7) là phương pháp tích phân trực tiếp và phương pháp chùng mode.

- Phương pháp tích phân trực tiếp bao gồm các phương pháp như: Phương pháp Newmark, phương pháp sai phân trung tâm, phương pháp Houblt, phương pháp Wilson θ , ... trong đó phương pháp Newmark ổn định không có điều kiện.

- Phương pháp “chồng mode”: Đây là một phương pháp thường áp dụng để giải phương trình dao động cưỡng bức, đặc biệt có lợi khi tận dụng được kết quả bài toán dao động riêng, tức là sử dụng các dạng dao động riêng (mode).

Luận án sử dụng phương pháp tích phân trực tiếp Newmark để giải quyết phương trình vi phân (4.7), tóm tắt thuật toán như sau:

- Nếu phương trình dao động tổng quát của tấm nano có dạng:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F \quad (4.8)$$

Biết nghiệm của (4.8) tại thời điểm t tương ứng với bước tính thứ s . Xác định nghiệm của bài toán tại thời điểm $t + \Delta t$ tương ứng bước tính thứ $s + 1$:

$$M_{s+1}\ddot{q}_{s+1} + C_{s+1}\dot{q}_{s+1} + K_{s+1}q_{s+1} = F_{s+1} \quad (4.9)$$

Bước 1: Xác định các điều kiện đầu.

$$q(0) = q_0; \dot{q}(0) = \dot{q}_0; \ddot{q}(0) = M_0^{-1}(F_0 - K_0q_0 - C_0\dot{q}_0) \quad (4.10)$$

Bước thời gian tính toán: $\Delta t = \frac{t_{tol}}{n}$

với n là tổng số bước tính. Các hệ số:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\gamma\Delta t^2}; a_1 = \frac{2\alpha_N}{\gamma\Delta t}; a_2 = \frac{2}{\gamma\Delta t}; a_3 = \frac{1}{\gamma} - 1; a_4 = \frac{2\alpha_N}{\gamma} - 1; \\ a_5 &= \left(\frac{\alpha_N}{\gamma} - 1\right)\Delta t; a_6 = (1 - \alpha_N)\Delta t; a_7 = \alpha_N\Delta t. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Giá trị α_N, γ được xác định theo giả thiết giá trị gia tốc thay đổi tuyến tính trong bước tính:

$$\ddot{q}(\tau) = \ddot{q}_s + \frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{q}_{s+1} - \ddot{q}_s) \text{ với } t_s \leq \tau \leq t_{s+1} \text{ và } t_{s+1} = t_s + \Delta t.$$

Để đảm bảo độ chính xác nghiệm, chọn $\alpha_N = \frac{1}{2}; \gamma = \frac{1}{4}$.

Bước 2: Tính ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng hiệu dụng.

$$K^* = K + a_0M + a_1C \quad (4.12)$$

$$F^* = F_{s+1} + M(a_0q_i + a_2\dot{q}_i + a_3\ddot{q}_i) + C(a_1q_i + a_4\dot{q}_i + a_5\ddot{q}_i) \quad (4.13)$$

Bước 3: Xác định các đại lượng cần tìm.

- Véc tơ $\mathbf{q}_{s+1}$ theo phương trình:

$$\mathbf{K}_{s+1}^* \cdot \mathbf{q}_{s+1} = \mathbf{F}_{s+1}^* \quad (4.14)$$

- Các véc tơ $\ddot{\mathbf{q}}_{s+1}$, $\dot{\mathbf{q}}_{s+1}$ theo các phương trình:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{s+1} = a_0(\mathbf{q}_{s+1} - \mathbf{q}_s) - a_2\dot{\mathbf{q}}_s - a_3\ddot{\mathbf{q}}_s \quad (4.15)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{s+1} = \dot{\mathbf{q}}_s + a_6\ddot{\mathbf{q}}_s + a_7\ddot{\mathbf{q}}_{s+1} \quad (4.16)$$

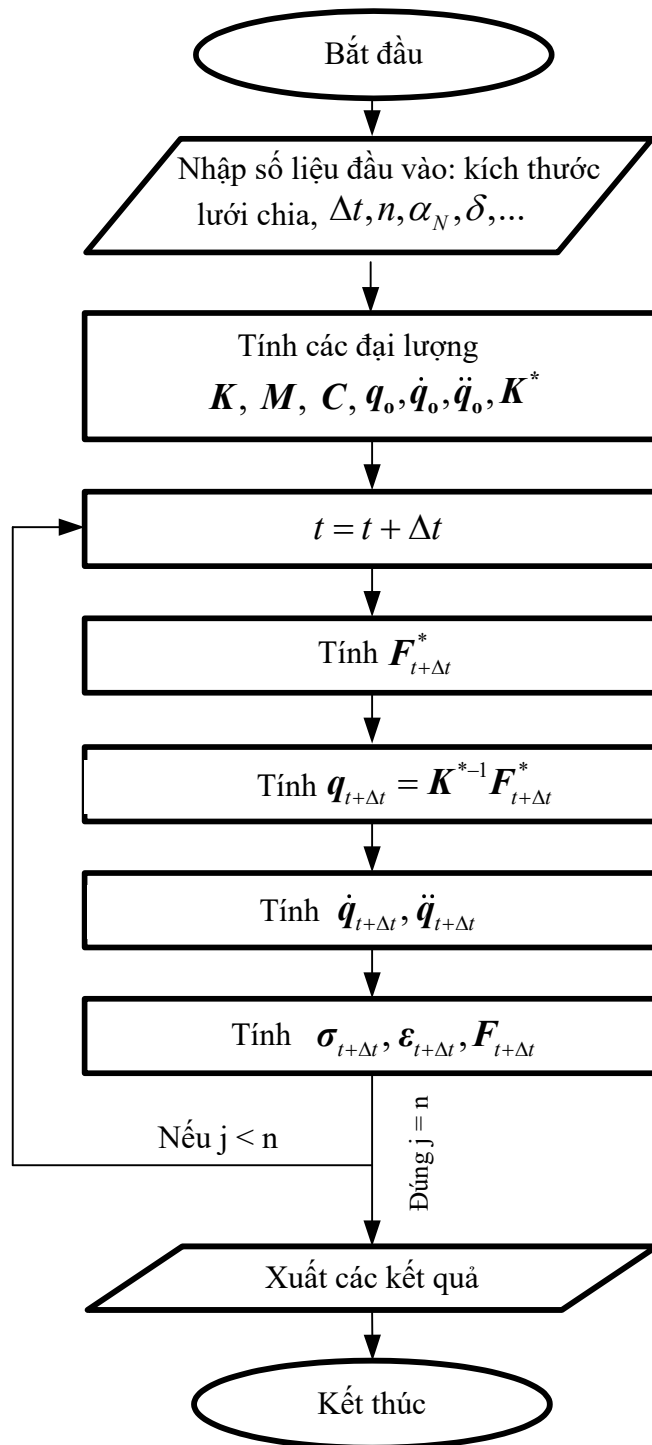
Thực hiện lặp lại cho đến khi hết thời gian khảo sát.

Sơ đồ giải thuật giải quyết bài toán dao động cưỡng bức tấm nano hữu cơ như Hình 4.6.

Trên cơ sở lý thuyết và thuật toán phần tử hữu hạn trình bày ở trên, tác giả đã xây dựng bộ chương trình tính Solar_Nonlocal_Dynamic_2025 (SND_2025) trong môi trường Matlab để tính toán tấm nano hữu cơ chịu tác dụng của tải trọng động. Chương trình máy tính gồm các mô đun chính sau:

- Nhập số liệu, chia lưới phần tử.
- Giải bài toán động lực học cho tấm nano hữu cơ.
- Xuất dữ liệu kết quả.

Bộ chương trình Solar_Nonlocal_Dynamic_2025 có khả năng giải quyết được bài toán dao động cưỡng bức tuyến tính cho tấm nano hữu cơ dưới tác dụng của tải trọng động. Bộ chương trình này cho phép xác định đáp ứng chuyển vị cưỡng bức, vận tốc, gia tốc của tấm, đồng thời chương trình cũng cho phép khảo sát ảnh hưởng của các yếu tố như thay đổi điều kiện biên, kích thước hình học, dạng tải trọng đến đáp ứng động của tấm.

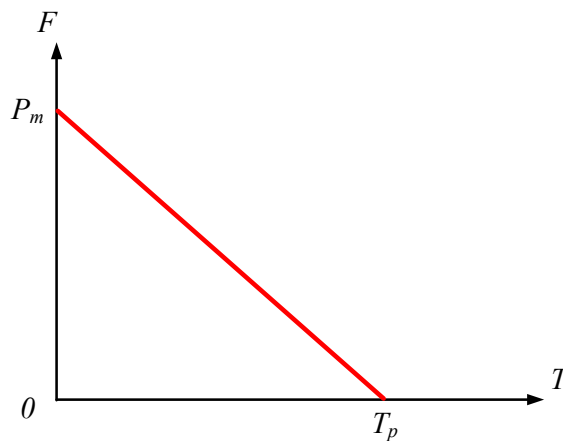


Hình 4.6. Sơ đồ giải thuật đối với bài toán dao động cường bức cho tấm nano hữu cơ.

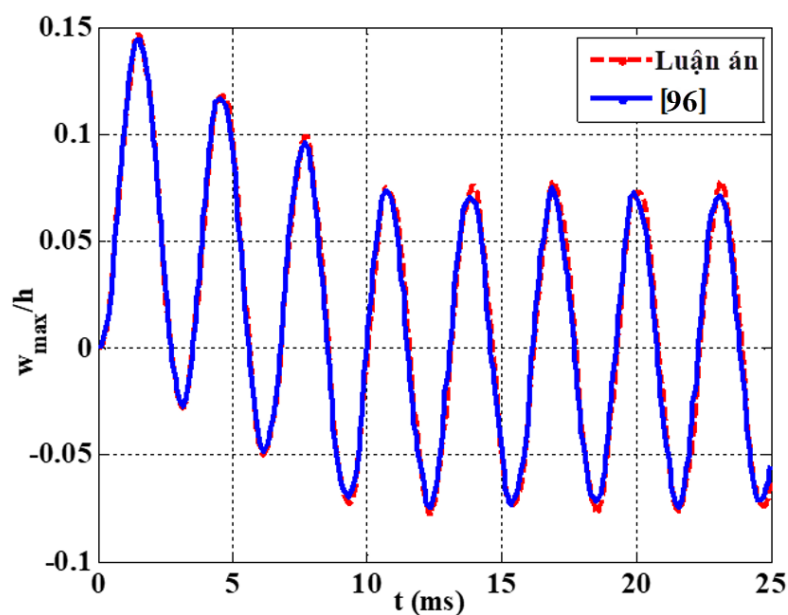
4.2.3. Kiểm tra sự tin cậy của chương trình tính

Ví dụ kiểm chứng 5: Ví dụ này so sánh chuyển vị cưỡng bức của tấm, tấm hình vuông có chiều dài cạnh $a = 0.45\text{m}$, $h = a/10$, $E = 3\text{ GPa}$, $\nu = 0.34$, $\rho = 1200\text{ kg/m}^3$. Tấm chịu tác dụng của tải trọng có quy luật dạng hình tam giác phân bố đều với biên độ $P_m = 500\text{ kPa}$ có quy luật thay đổi theo thời gian ($T_p = 0.01\text{s}$) như hình 4.7.

Chuyển vị tại giữa tấm được tính toán tại mỗi thời điểm và so sánh với kết quả trong tài liệu [96] và trình bày như trên hình 4.8, kết quả này chứng tỏ sự đúng đắn và tin cậy của thuật toán và của chương trình tính toán mà luận án đã lập.



Hình 4.7. Quy luật biến đổi của tải trọng theo thời gian



Hình 4.8. So sánh đáp ứng chuyển vị điểm giữa tấm theo thời gian.

4.2.4. Kết quả tính toán số

Phần này sẽ trình bày các kết quả tính toán số nhằm làm rõ ảnh hưởng của một số tham số đến chuyển vị cưỡng bức của tấm nano hữu cơ theo thời gian, tấm nano hữu cơ có các thông số kích thước hình học và vật liệu như mục 3.3, tấm chịu tải trọng phân bố đều và biến đổi theo quy luật:

$$p_z = P_0 \cdot F(t) \quad (4.17)$$

trong đó P_0 là biên độ tải trọng, còn hàm $F(t)$ biến đổi theo thời gian và có hai dạng sau:

Tải trọng dạng hình sin

$$F(t) = \begin{cases} \sin\left(\omega \frac{t}{t_1}\right) & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \quad (4.18)$$

với $t_1 = 5 \text{ ms}$.

Tải trọng dạng hình tam giác:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{t_1} & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \quad (4.19)$$

Thông số khảo sát là chuyển vị tại vị trí giữa tấm thay đổi theo tham số thời gian với công thức:

$$w^* = \frac{E_A h^3}{12 P_0 a_0^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right); a_0 = 10h \quad (4.20)$$

Trong các kết quả tính toán dưới đây, chiều dày h của tấm không thay đổi $h = 0.55044 \text{ nm}$, tại mỗi ví dụ số dưới đây tham số chiều dài cạnh tấm a, b có thể thay đổi.

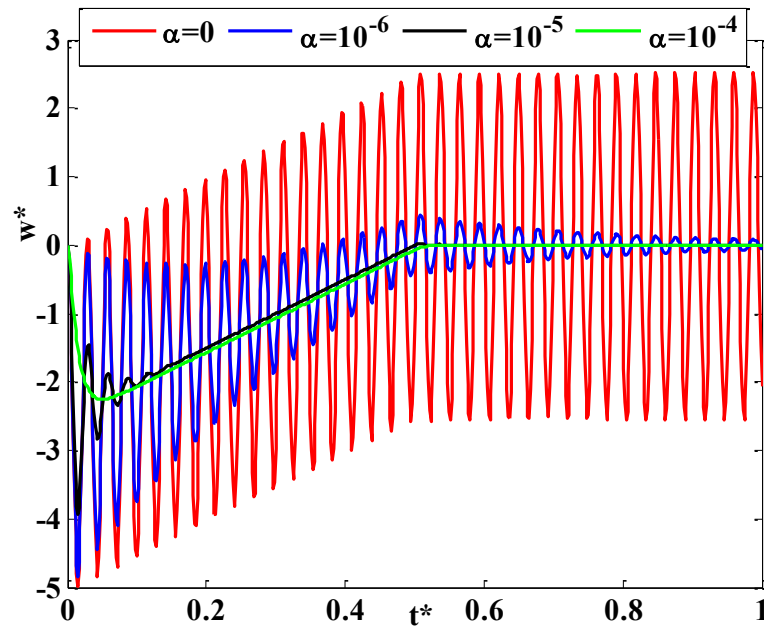
Tham số cản của tấm nano hữu cơ được tính theo công thức không thứ nguyên của tham số đàn nhót $\alpha = \frac{\chi}{E_{AI}}$, trong trường hợp tổng quát, tham số cản này phụ thuộc vào đặc trưng từng loại vật liệu, và cần phải có thí nghiệm để xác định chính xác hệ số này. Tuy nhiên, để thuận lợi cho quá trình tính toán, luận án chỉ xem xét trường hợp tham số cản không thay đổi trong tất cả các lớp vật liệu, giá trị của tham số cản được lấy trong phạm vi từ 0 đến 10^{-4} .

- Ảnh hưởng của tham số cản

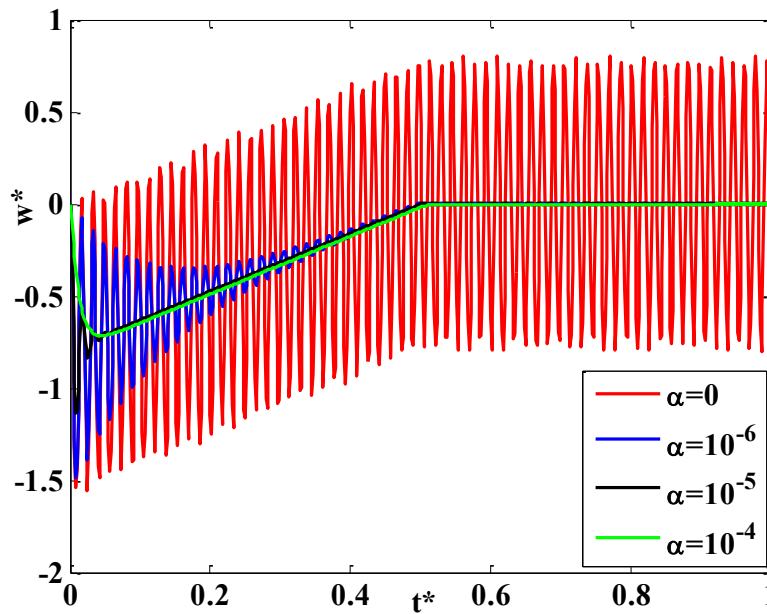
Sự biến đổi của chuyển vị giữa tấm theo thời gian tương ứng với các giá trị khác nhau của hệ số cản được thể hiện như trên các hình 4.9-4.12, một số nhận xét được luận án rút ra như sau:

- Trong trường hợp không xét đến cản, trong thời gian ngoại lực tác dụng, tấm dao động cưỡng bức theo ngoại lực, nhưng khi tải trọng ngoài ngừng tác dụng thì tấm sẽ tiếp tục dao động tự do quanh vị trí 0 và không bị tắt dần. Nhưng khi xét đến cản của kết cấu thì khi ngoại lực ngừng tác dụng, dao động của tấm sẽ giảm dần. Khi tăng hệ số cản, chuyển vị sẽ tiến dần về 0 nhanh hơn, điều này là do năng lượng dao động của tấm bị tiêu hao bởi cản sẽ nhanh hơn. Và với tham số cản $\alpha = 10^{-4}$ thì dao động của tấm nano tắt dần nhanh sau khi ngoại lực ngừng tác dụng, do vậy có thể xem giá trị của tham số cản nằm trong khoảng giá trị $0-10^{-4}$ là vùng giá trị của tham số cản đối với tấm nano hữu cơ có các đặc trưng kích thước hình học và vật liệu như trong luận án đã xét.

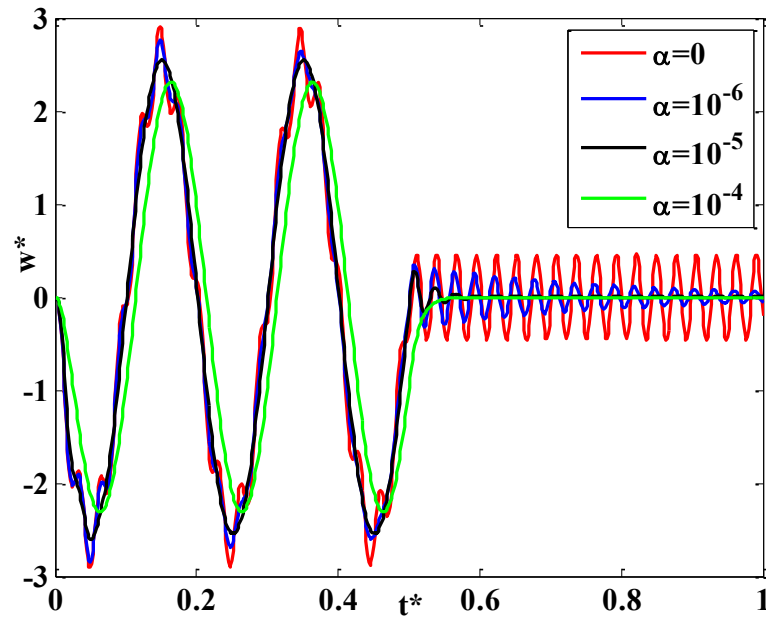
- Trong quá trình dao động cưỡng bức (lực kích thích vẫn còn tác dụng): hệ số cản càng lớn thì chuyển vị lớn nhất của tấm càng nhỏ, điều này cũng là do năng lượng bị tiêu hao một phần bởi cản của kết cấu.



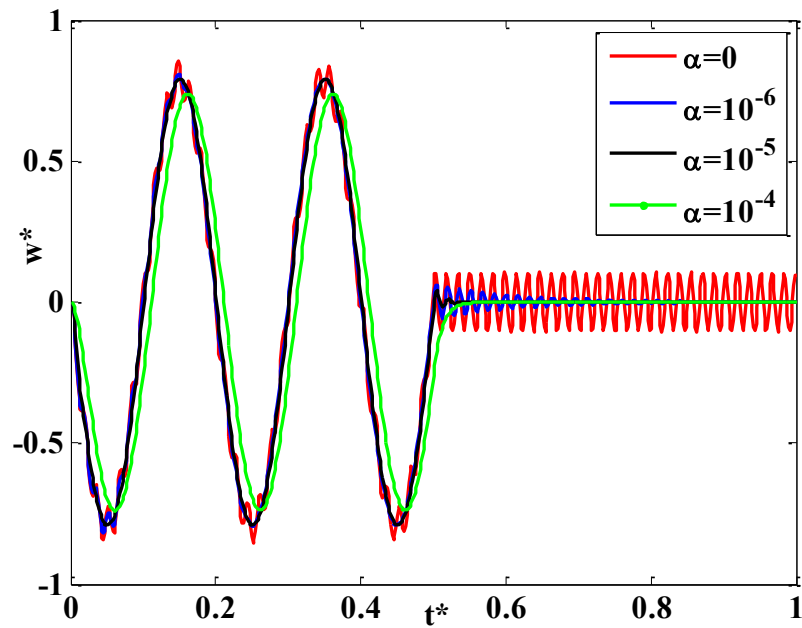
Hình 4.9. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và theo thông số cản khác nhau, tấm liên kết tựa đơn trên các cạnh (SSSS), tải tam giác, f_z là hàm đa thức, $l_i/h_i = 1$, $a/h=50$, $t^*=t/2t_1$



Hình 4.10. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và theo thông số cản khác nhau, tấm liên kết ngàm tất cả các cạnh (CCCC), tải tam giác, $l_i/h_i = 1$, $a/h=50$



Hình 4.11. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và theo thông số cản khác nhau, SSSS, tải hình sin, $l_i/h_i = 1$, $\omega = 5\pi$, $a/h=50$, $t^*=t/2t_1$



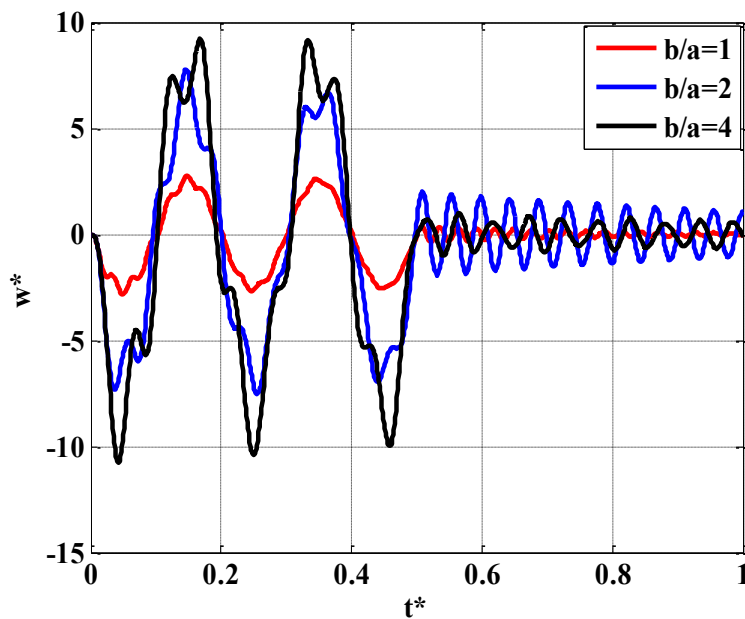
Hình 4.12. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và theo thông số cản khác nhau, CCCC, tải hình sin, $l_i/h_i = 1$, $\omega = 5\pi$, $a/h=50$

- Ảnh hưởng của chiều dài các cạnh tấm

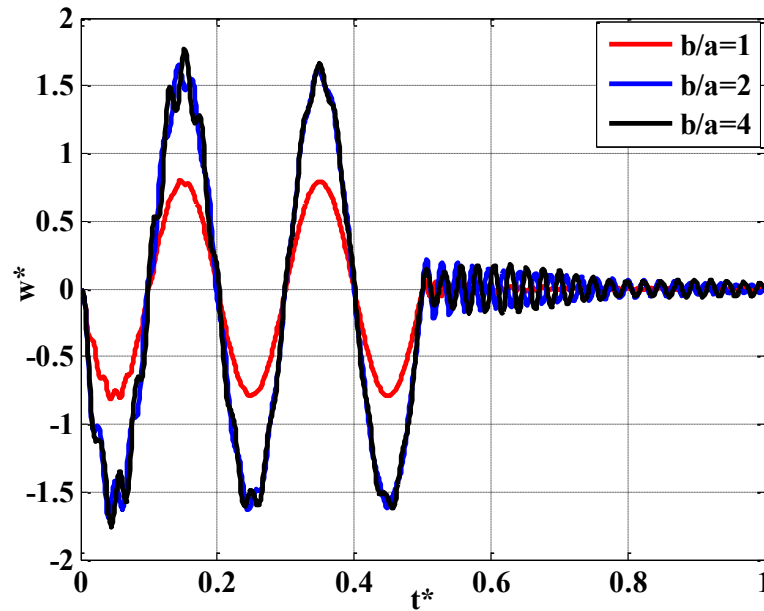
Thay đổi chiều dài cạnh b của tấm sao cho tỷ lệ b/a nhận giá trị từ 1 đến 4, kết quả tính toán chuyển vị lớn nhất biến đổi theo thời gian được trình bày như trên các hình 4.13-4.16, bằng việc nhìn vào các hình vẽ này, luận án đưa ra một số nhận xét:

- Khi tỷ lệ chiều dài các cạnh tấm b/a tăng lên, chuyển vị lớn nhất của tấm cũng tăng lên. thêm vào đó, hình dạng biến đổi theo thời gian cũng khác nhau khi tỷ lệ b/a khác nhau.

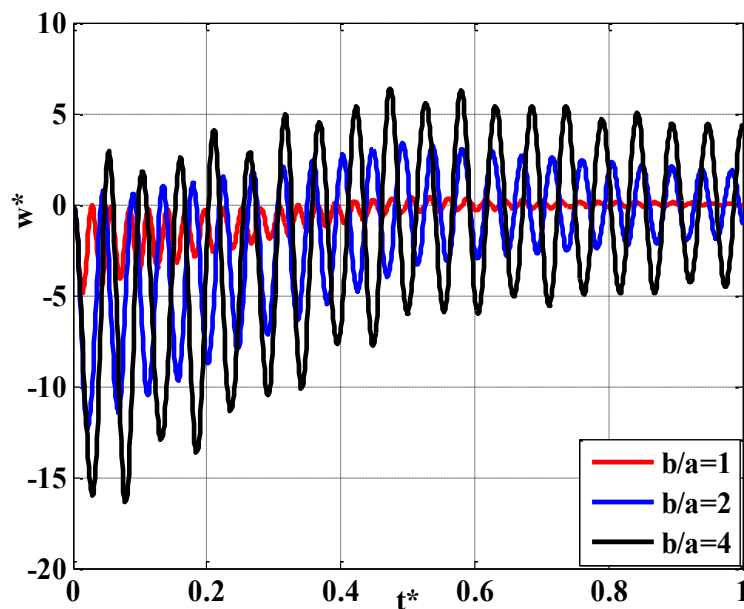
- Tấm chịu liên kết ngàm sẽ có biên độ chuyển vị bé hơn tấm chịu liên kết tựa đơn, hình dạng biến đổi theo thời gian của chuyển vị đối với tấm chịu liên kết ngàm cũng khác đối với tấm chịu liên kết tựa đơn, ngoài ra thời gian chuyển vị giảm về 0 của tấm chịu liên kết ngàm cũng nhanh hơn so với tấm chịu liên kết tựa đơn. Điều này chứng tỏ rằng điều kiện biên và tỷ lệ b/a không những ảnh hưởng đến giá trị lớn nhất mà còn ảnh hưởng đến hình dạng của đường biến đổi theo thời gian của chuyển vị, cũng như thời gian chuyển vị giảm về 0.



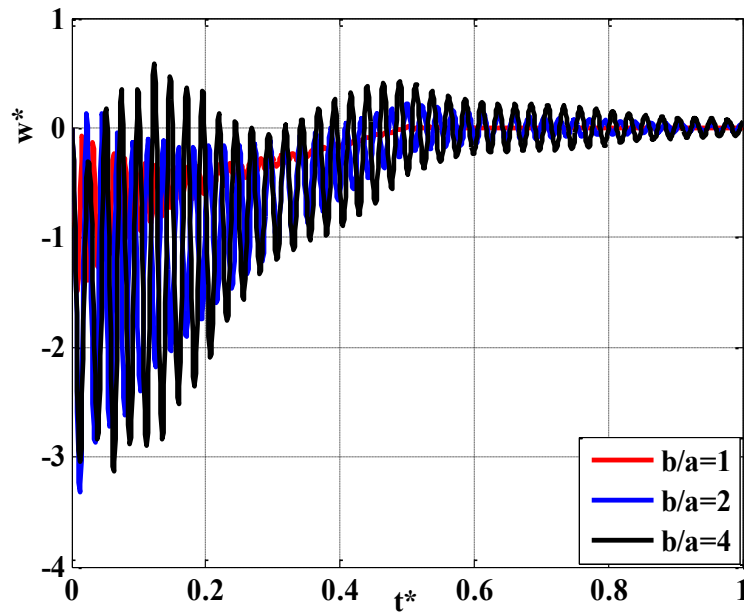
Hình 4.13. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ b/a , SSSS, tải hình sin, $l_i/h_i = 1, \alpha = 10^{-6}, \omega = 5\pi, a/h=50$



Hình 4.14. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ b/a , tấm liên kết ngàm tất cả các cạnh (CCCC), tải hình sin, $l_i/h_i = 1, \alpha = 10^{-6}, \omega = 5\pi, a/h=50$



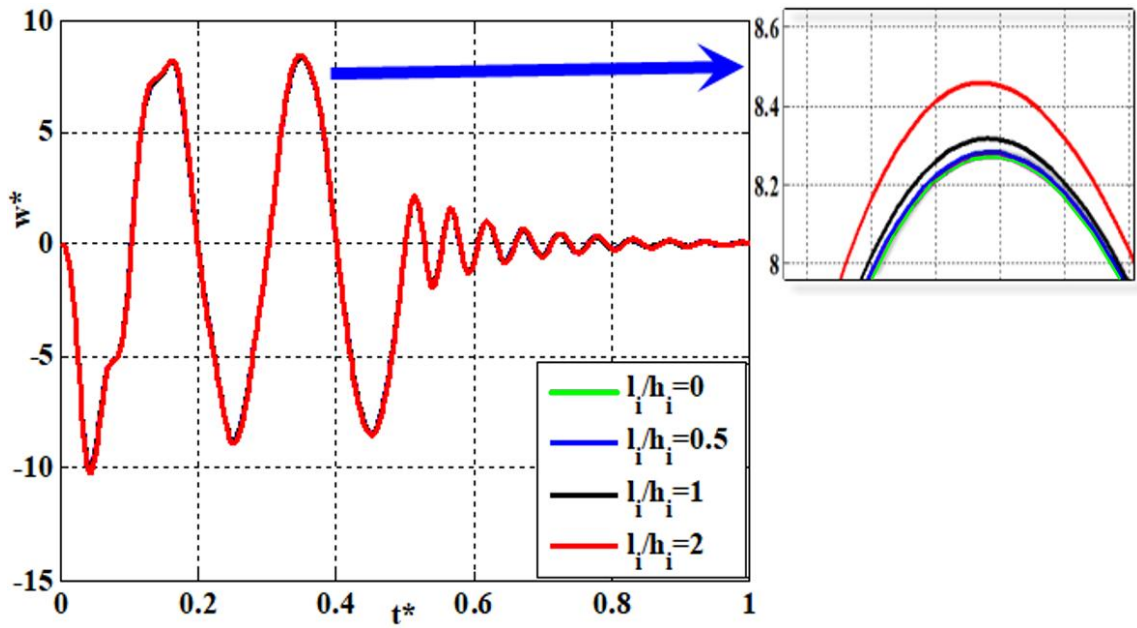
Hình 4.15. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ b/a , tấm liên kết tựa đơn trên tất cả các cạnh (SSSS), tải tam giác, $l_i/h_i = 1, \alpha = 10^{-6}, \omega = 5\pi, a/h=50$



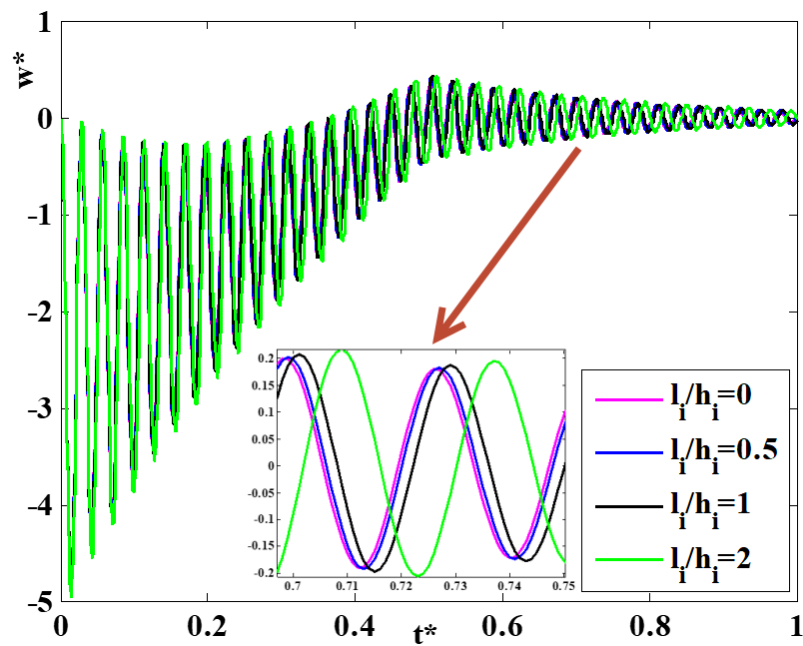
Hình 4.16. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ b/a , tấm liên kết ngàm tất cả các cạnh (CCCC), tải tam giác, $l_i/h_i = 1, \alpha = 10^{-6}, \omega = 5\pi, a/h=50$

- Ảnh hưởng của tham số đàn hồi phi cục bộ

Trên các hình vẽ 4.17-4.18 trình bày sự biến đổi theo thời gian của chuyển vị giữa tấm ứng với các giá trị khác nhau của tỷ lệ l_i/h_i . Khi tỷ lệ l_i/h_i có giá trị càng lớn thì chuyển vị lớn nhất của tấm càng lớn. Tuy nhiên, hình dạng biến đổi của chuyển vị giữa tấm theo thời gian không thay đổi đáng kể khi tỷ lệ l_i/h_i biến đổi.



Hình 4.17. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ l/h_i , tấm liên kết tựa đơn trên tất cả các cạnh (SSSS), tải hình sin, $b/a = 1, \alpha = 10^{-5}, \omega = 5\pi$, $a/h=50$



Hình 4.18. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ l/h_i , tấm liên kết tựa đơn trên tất cả các cạnh (SSSS), tải tam giác, $b/a = 1, \alpha = 10^{-5}, \omega = 5\pi$, $a/h=50$

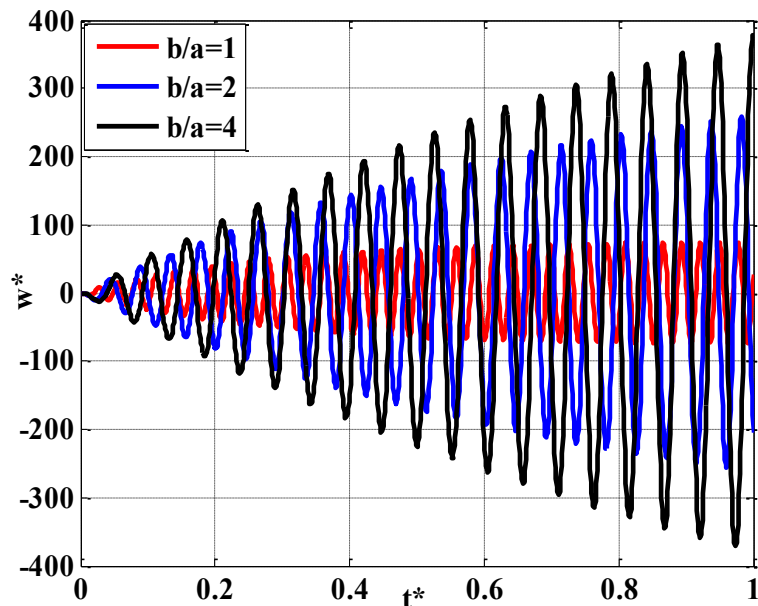
- Ảnh hưởng của tần số tải trọng tác dụng lên tấm

Để xem xét phản ứng động của tấm như thế nào đối với tần số kích thích, luận án chọn tần số kích thích đúng bằng tần số riêng đầu tiên của tấm ($\omega = \omega_1 t_1$), kết quả tính toán chuyển vị giữa tấm được thể hiện như trên các hình vẽ 4.19-4.23, các nhận xét được rút ra như sau:

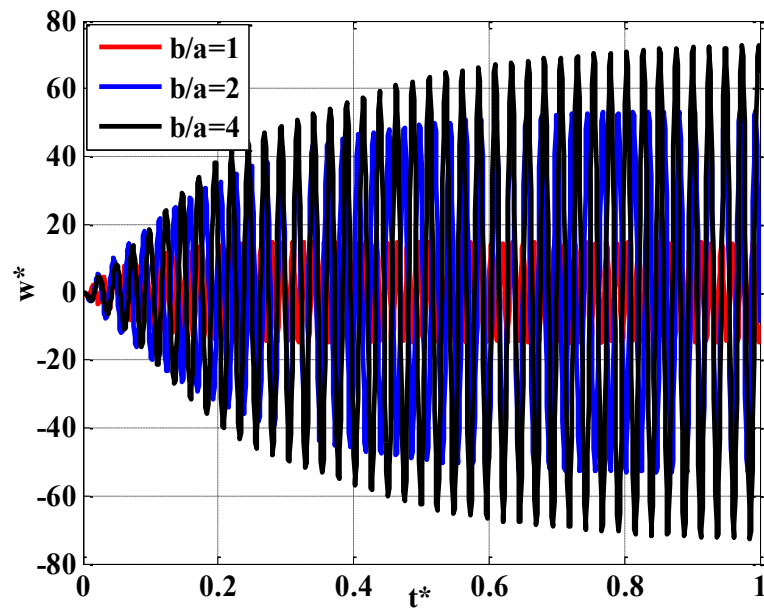
- Trong trường hợp tần số ngoại lực đúng bằng tần số dao động tự nhiên của tấm, chuyển vị của tấm tăng dần theo thời gian, đây chính là hiện tượng cộng hưởng đối với tấm nano hữu cơ.

- Tỷ lệ b/a càng lớn thì biên độ của chuyển vị lớn nhất sẽ cộng hưởng càng lớn, điều kiện biên cũng ảnh hưởng đến hình dáng của đường cộng hưởng của chuyển vị.

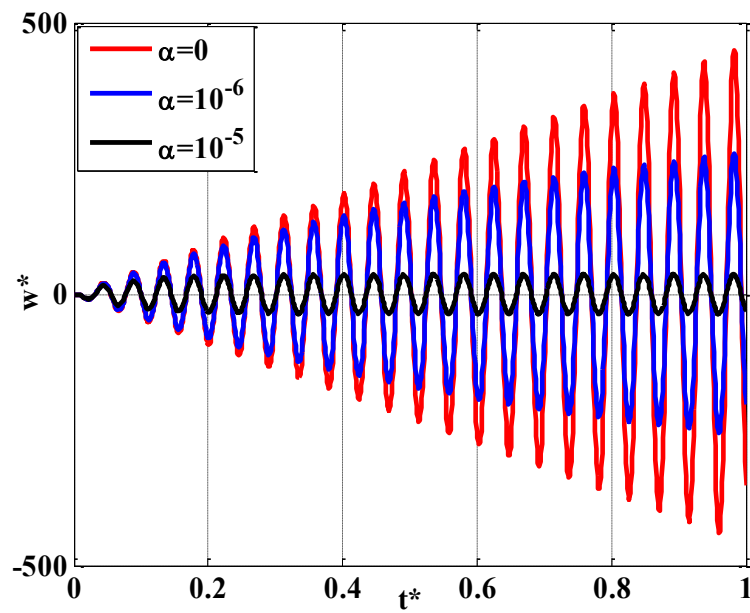
- Hệ số cản càng lớn, thì chuyển vị cộng hưởng càng chậm, điều này là do năng lượng của tấm nano hữu cơ bị mất mát càng lớn.



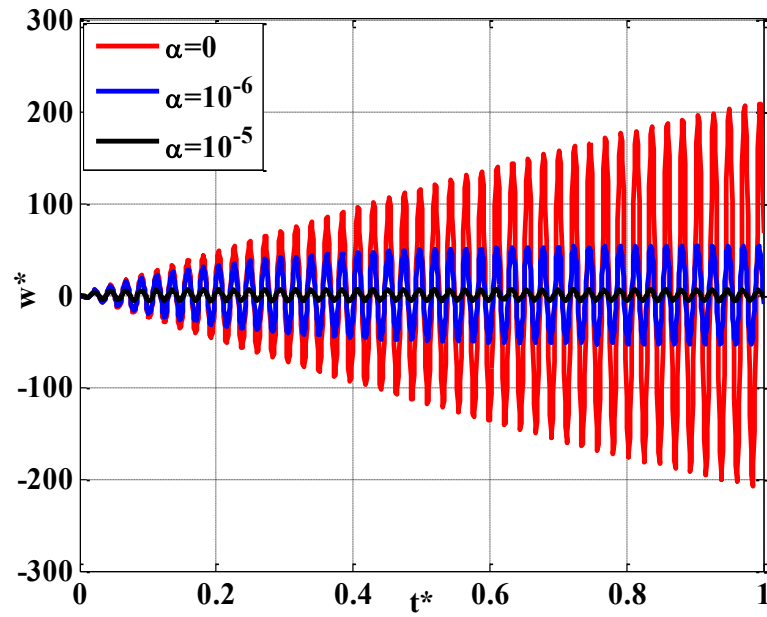
Hình 4.19. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ b/a , tấm liên kết tựa đơn tất cả các cạnh SSSS, tải hình sin, $l_i/h_i = 1, \alpha = 10^{-6}, \omega = \omega_1 t_1, a/h=50$



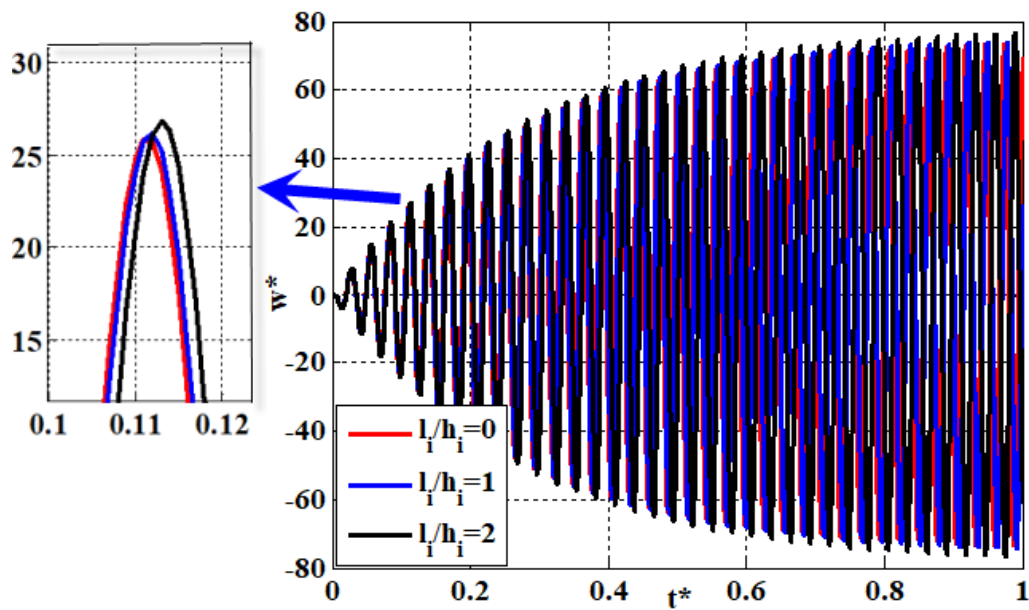
Hình 4.20. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ b/a , tấm liên kết ngàm tất cả các cạnh CCCC, tải hình sin, $l_i/h_i = 1, \alpha = 10^{-6}, \omega = \omega_1 t_1, a/h=50$



Hình 4.21. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và hệ số cản α , tấm liên kết tựa đơn trên tất cả các cạnh (SSSS), tải hình sin, $l_i/h_i = 1, \omega = \omega_1 t_1, b/a = 2, a/h=50$



Hình 4.22. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và hệ số cản α , tấm liên kết ngầm tất cả các cạnh (CCCC), tải hình sin, $l_i/h_i = 1$, $\omega = \omega_1 t_1$, $b/a = 2$, $a/h = 50$



Hình 4.23. Sự biến đổi của chuyển vị theo thời gian và tỷ lệ l_i/h_i , tấm liên kết tựa đơn trên tất cả các cạnh (SSSS), tải hình sin, $\alpha = 10^{-6}$, $\omega = \omega_1 t_1$, $b/a = 1$, $a/h = 50$

4.3. Kết luận chương 4

Trong chương 4 tác giả đã tính toán bài toán dao động riêng không cản, dao động cưỡng bức có cản của tấm nano hữu cơ. Qua đó, tác giả tóm gọn một số kết quả chính trong chương này như sau:

Đã xây dựng được chương trình máy tính để phân tích dao động riêng của tấm nano hữu cơ `Solar_Nonlocal_Freevibration_2025` (SNF_2025). Kết quả tính toán của chương trình được so sánh với các kết quả đã công bố cho thấy độ chính xác và tin cậy.

Luận án đã chỉ ra ảnh hưởng của tham số đàn hồi phi cục bộ và chiều dày tấm đến tần số dao động riêng của tấm nano hữu cơ khi sử dụng cả lời giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn và lời giải bằng phương pháp giải tích. Kết quả tính toán cho thấy đối với tấm dày ($a/h=10$) thì ảnh hưởng của tham số đàn hồi phi cục bộ thể hiện rõ rệt, tuy nhiên với tấm mỏng ($a/h=50$) thì ảnh hưởng của tham số này rất mờ nhạt, do vậy nếu không yêu cầu quá cao về độ chính xác thì có thể bỏ qua tham số đàn hồi phi cục bộ khi tính toán cho tấm nano mỏng.

Luận án đã xây dựng được chương trình tính toán phân tích dao động cưỡng bức cho tấm nano hữu cơ chịu tác dụng tải trọng động `Solar_Nonlocal_Dynamic_2025` (SND_2025) có độ chính xác và tin cậy tốt.

Luận án đã khảo sát ảnh hưởng của một số tham số hình học, vật liệu, ngoại lực ảnh hưởng đến đáp ứng động lực học của tấm nano hữu cơ. Kết quả tính toán cho thấy có một số tham số ảnh hưởng lớn như tỷ lệ chiều dài các cạnh của tấm, hệ số cản, tần số của ngoại lực kích động. Qua các kết quả tính toán, luận án nhận thấy vùng giá trị của tham số cản là từ $0-10^{-4}$ khi tính toán đối với tấm nano hữu cơ gồm các đặc trưng kích thước hình học và vật liệu như trong luận án đề xuất. Do đó, khi thiết kế tấm nano hữu cơ sử dụng cho những yêu cầu cụ thể, người kỹ sư cần lưu ý những vấn đề trên để kết cấu hoạt động đạt được hiệu quả cao.

Kết quả tính toán trong chương này đã được NCS trình bày trong bài báo số 2, lý thuyết tính toán được trình bày trong các bài 2-5.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Những đóng góp mới của luận án

Thông qua sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và phương pháp PTHH, luận án đã phân tích đáp ứng uốn tĩnh và đáp ứng động của tấm nano hữu cơ nhiều lớp có xét đến hiệu ứng kích thước. Luận án đã thực hiện được một số đóng góp mới như sau:

- Đã thiết lập mô hình, xây dựng phương trình cân bằng cho tấm nano hữu cơ trong trường hợp tổng quát cũng như trong bài toán uốn khi chịu tải trọng tĩnh, dao động tự do và dao động cưỡng bức trong trường hợp có kể đến hiệu ứng kích thước nhỏ.

- Sử dụng phương pháp PTHH, lý thuyết đàn hồi phi cục bộ xây dựng thuật toán giải bài toán uốn của tấm chịu tải tĩnh, dao động tự do và dao động cưỡng bức của tấm nano hữu cơ có xét đến hiệu ứng kích thước. Kết quả cho thấy sự khác biệt khi sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ (xem xét ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước nhỏ) và lý thuyết đàn hồi thông thường (Bỏ qua ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước nhỏ).

- Xây dựng bộ chương trình SNS_2025, SNF_2025, SND_2025 tính chuyển vị uốn và ứng suất trong trường hợp tấm nano chịu tải trọng tĩnh, tần số dao động tự do, chuyển vị cưỡng bức đối với tấm nano hữu cơ gồm năm lớp vật liệu có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước nhỏ. Chương trình đã được kiểm chứng sự chính xác và tin cậy.

- Đã nghiên cứu ảnh hưởng của các tham số như hệ số đàn hồi phi cục bộ, kích thước hình học, hệ số cản, điều kiện biên, tần số kích động đến đáp ứng uốn, dao động tự nhiên, dao động cưỡng bức có cản của tấm nano hữu cơ có xét đến hiệu ứng kích thước. Các kết quả tính toán cho thấy ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước trở lên đáng kể khi tấm có chiều dày lớn, khi tấm càng mỏng thì hiệu ứng kích thước càng trở nên mờ nhạt. Do vậy, đối với tấm mỏng

($a/h > 50$) thì nếu không cần độ chính xác cao, ta có thể bỏ qua ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước nhỏ để dễ tính toán. Từ đó luận án rút ra những nhận xét có giá trị khoa học và thực tiễn.

- Bộ số liệu tính toán của luận án có thể tham chiếu khi thiết kế kết cấu dạng tấm nano hữu cơ chịu các loại tải trọng tĩnh, tải trọng động như các bộ tích trữ năng lượng cỡ nhỏ, cảm biến, chip điện tử, sensor.

2. Hướng phát triển tiếp theo của luận án

- Nghiên cứu dao động của tấm, vỏ nano hữu cơ chịu tác dụng của các loại tải trọng cơ học khác nhau có xét đến ảnh hưởng của điện trường, điện trường, nhiệt độ. Vì đây là những loại tải trọng phức tạp thường xuất hiện trong các chip điện tử, vi mạch cỡ nhỏ.

- Nghiên cứu dao động ngẫu nhiên của các kết cấu dầm, tấm, vỏ nano hữu cơ trong môi trường nhiệt độ. Đây là cách mô tả tải trọng phù hợp với thực tế kỹ thuật, do đó có nhiều ý nghĩa thực tiễn.

- Nghiên cứu sự xuất hiện và phát triển khuyết tật vết nứt trong các kết cấu nano hữu cơ. Điều này làm cho các nhà khoa học dự đoán khả năng hư hỏng, đưa ra khuyến cáo phù hợp cho các nhà thiết kế và sử dụng.

- Nghiên cứu ổn định động của tấm nano hữu cơ trong môi trường đàn nhớt chịu tác dụng của các loại tải trọng cơ học.

- Tính toán các kết cấu nano hữu cơ có các dạng khuyết tật như vết nứt, lỗ rỗng, sự tách lớp giữa các lớp vật liệu của tấm nano hữu cơ trong quá trình chịu lực. Vì các dạng khuyết tật này thường xuyên xuất hiện đối với các kết cấu nhiều lớp trong quá trình làm việc. Các khuyết tật này làm thay đổi độ cứng và độ bền, do vậy làm thay đổi khả năng chịu tải, việc nghiên cứu đáp ứng cơ học của chúng là vấn đề có nhiều ý nghĩa trong thực tiễn.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ

1. **Dao Minh Tien**, Do Van Thom, Phung Van Minh, Nguyen Chi Tho, Tran Ngoc Doan, Dao Nhu Mai (2023). The application of the nonlocal theory and various shear strain theories for bending and free vibration analysis of organic nanoplates. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 52 (1), pp. 588-610. <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2186893>. (ISI).
2. **Dao Minh Tien**, Do Van Thom, Nguyen Thi Hai Van, Abdelouahed Tounsi, Phung Van Minh, Dao Nhu Mai, 2023, Buckling and forced oscillation of organic nanoplates taking the structural drag coefficient into account. *Computers and Concrete*, vol. 33 (1), pp. 91-102. <https://doi.org/10.12989/cac.2024.33.1.091>. (ISI).
3. Nguyen Chi Tho, **Dao Minh Tien**, Do Van Thom, Phung Van Minh, Dao Van Doan (2024). A new approach to the static bending problem of organic nanoplates. Part C: *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 239 (8), pp. 3052-3064. <https://doi.org/10.1177/09544062241306986> (ISI).
4. **Dao Minh Tien**, Nguyen Thi Cam Nhung, Do Van Thom, Ta Duc Tam (2023). Thermal buckling of organic nanoplates. The 7th International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA 2023), Hanoi, November, 11÷12, 2023.
5. **Dao Minh Tien**, Đỗ Văn Thơm, Phùng Văn Minh, Phạm Huy Hiếu (2024). Bending and buckling responses of organic nanoplates considering the size effect. *Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải*, số. 75(7), tr. 2015-2029. <https://doi.org/10.47869/tcsj.75.7.1>

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Đức Nghĩa, 2007, *Hoá học nano – Công nghệ nền và vật liệu nguồn*. Hà Nội: Nhà xuất bản Khoa học Tự nhiên và công nghệ.
- [2] Nguyễn Văn Thành, 2021, *Ổn định và các đáp ứng phi tuyến của kết cấu tấm và vỏ composite gia cường các sợi nano carbon, có cơ lý tính biến đổi (FG-CNTRC)*, Luận án tiến sĩ, Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [3] Bunch J.S., Zande A.M. V.D., Verbridge S.S., Frank I.W., Tanenbaum D.M., Parpia J.M., Craighead H.G., McEuen P.L., 2007, Electromechanical resonators from graphene sheets, *Science*, 315, (5811), pp. 490-493.
- [4] Evoy S., Carr D., Sekaric L., Olkhovets A., Parpia J., Craighead H.G., 1999, Nanofabrication and electrostatic operation of single-crystal silicon paddle oscillators, *Journal of Applied Physics*, 86 (11), pp. 6072-6077.
- [5] Lu G., Ocola L.E., Chen J., 2009, Reduced graphene oxide for room-temperature gas sensors, *Nanotechnology*, 20 (44), p. 445502.
- [6] Arash B., Wang Q., Duan W.H. , 2011, Detection of gas atoms via vibration of graphenes, *Physics Letters A*, 375 (24), pp. 2411-2415.
- [7] Sakhaee-Pour A., Ahmadian M., Vafai A. , 2008, Applications of single-layered graphene sheets as mass sensors and atomistic dust detectors," *Solid State Communications*, 145 (4), pp. 168-172.
- [8] Freund L.B., Suresh S., 2004, *Thin film materials: stress, defect formation and surface evolution*. Cambridge university press.
- [9] Eringen A.C. , 1972, Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves, *International Journal of Engineering Science*, 10 (5), pp. 425-435.
- [10] Eringen A.C., 1972, Nonlocal polar elastic continua," *International Journal of Engineering Science*, 10 (1), pp. 1-16.
- [11] Eringen A.C., Edelen D.B.G., 1972, On nonlocal elasticity, *International journal of engineering science*, 10 (3), pp. 233-248.
- [12] Eringen A.C., 1983, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, 54 (9), pp. 4703-4710.
- [13] Eringen A.C., Wegner J.L. , 2003, Nonlocal continuum field theories, *Applied Mechanics Reviews*, 56 (2), pp. B20-B22.
- [14] Norouzzadeh A., Ansari R., Rouhi H. , 2017, Pre-buckling responses of Timoshenko nanobeams based on the integral and differential models of

- nonlocal elasticity: an isogeometric approach, *Applied Physics A*, 123, pp. 1-11.
- [15] Norouzzadeh A., Ansari R., 2017, Finite element analysis of nano-scale Timoshenko beams using the integral model of nonlocal elasticity, *Physics E*, 88, pp. 194-200.
 - [16] Ansari R., Torabi J., Norouzzadeh A., 2018, Bending analysis of embedded nanoplates based on the integral formulation of Eringen's nonlocal theory using the finite element method, *Phys B: Condensed Matter*, 534, pp. 90-97.
 - [17] Yang F., Chong A., Lam D.C.C., Tong P., 2002, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solid and Structures*, 39(10), pp. 2731-2743.
 - [18] Toupin R.A., 1962, Elastic materials with couple-stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11 (1), pp. 385-414.
 - [19] Mindlin R.D., Tiersten H. F., 1962, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11, pp. 415-448.
 - [20] Kolter W., 1964, Couple stresses in the theory of elasticity, *I & II. Philosophical Transactions of the Royal Society of London B*, 67, p. 17-44.
 - [21] Dehrouyeh-Semnani A.M., Nikkhah-Bahrami M., 2015, A discussion on evaluation of material length scale parameter based on micro-cantilever test, *Composite Structures*, 122, pp. 425-429.
 - [22] Khajueenejad F., Ghanbari J., 2015, Internal length parameter and buckling analysis of carbon nanotubes using modified couple stress theory and Timoshenko beam model," *Materials Research Express*, 2(10), p. 105009.
 - [23] Lam D.C., Yang F., Chong A., Wang J., Tong P., 2003, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51 (8), pp. 1477-1508.
 - [24] Lu P., Zhang P., Lee H., Wang C.M., Reddy J.N., 2007, Non-local elastic plate theories, *Proceeding of the Royal Society A*, 463 (2088), pp. 3225-3240.
 - [25] Duan W.H., Wang C.M., 2007, Exact solutions for axisymmetric bending of micro/nanoscale circular plates based on nonlocal plate theory," *Nanotechnology*, 18 (38), p. 385704.
 - [26] Aksencer T., Aydogdu M., 2011, Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory, *Physics E*, 43 (4), pp. 954-959.

- [27] Shakouri A., Ng T.Y., Lin R.M., 2011, Nonlocal plate model for the free vibration analysis of nanoplates with different boundary conditions, *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 8(10), pp. 2118-2128.
- [28] Ansari R., Rajabiehfard R., Arash B., 2010, Nonlocal finite element model for vibrations of embedded multi-layered graphene sheets, *Computational Materials Science*, 49 (4), pp. 831-838.
- [29] Phadikar J.K., Pradhan S.C., 2010, Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates, *Computational Materials Science*, 49(3), pp. 492-499.
- [30] Nguyen N.T., Hui D., Lee J., Nguyen-Xuan H., 2015, An efficient computational approach for size-dependent analysis of functionally graded nanoplates, *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 297, pp. 191-218.
- [31] Anjomshoa A., 2013, Application of Ritz functions in buckling analysis of embedded orthotropic circular and elliptical micro/nano-plates based on nonlocal elasticity theory, *Meccanica*, 48 (6), pp. 1337-1353.
- [32] Anjomshoa A., Shahidi A., Shahidi S., Nahvi H., 2015, Frequency analysis of embedded orthotropic circular and elliptical micro/nano-plates using nonlocal variational principle, *Journal of Solid Mechanics*, 7, pp. 13-27.
- [33] Mohammadi M., Farajpour A., Moradi A., Ghayour M., 2014, Shear buckling of orthotropic rectangular graphene sheet embedded in an elastic medium in thermal environment, *Composites Part B: Engineering*, 56, pp. 629-637.
- [34] Ashoori A., Salari E., Vanini S.A., 2016, Size-dependent thermal stability analysis of embedded functionally graded annular nanoplates based on the nonlocal elasticity theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 119, pp. 396-411.
- [35] Pradhan S., Phadikar J.K., 2009, Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates, *Journal of Sound Vibration*, 325(1-2), pp. 206-223.
- [36] Pradhan S., Phadikar J.K., 2011, Nonlocal theory for buckling of nanoplates, *International Journal of Structural Stability Dynamics*, 11 (03), pp. 411-429.
- [37] Ansari R., Sahmani S., Arash B., 2010, Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets, *Physics Letter A*, 375(1), pp. 53-62.
- [38] Ansari R., Arash B., Rouhi H., 2011, Vibration characteristics of embedded multi-layered graphene sheets with different boundary

- conditions via nonlocal elasticity, *Composite Structures*, 93 (9), pp. 2419-2429.
- [39] Hosseini-Hashemi S., Bedroud M., Nazemnezhad R., 2013, An exact analytical solution for free vibration of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity, *Composite Structures*, 103, pp. 108-118.
 - [40] Anjomshoa A., Tahani M., 2016, Vibration analysis of orthotropic circular and elliptical nano-plates embedded in elastic medium based on nonlocal Mindlin plate theory and using Galerkin method, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 30, pp. 2463-2474.
 - [41] Golmakani M.E., Rezatalab J., 2014, Nonlinear bending analysis of orthotropic nanoscale plates in an elastic matrix based on nonlocal continuum mechanics, *Composite Structures*, 111, pp. 85-97.
 - [42] Dastjerdi S., Jabbarzadeh M., Aliabadi S., 2016, Nonlinear static analysis of single layer annular/circular graphene sheets embedded in Winkler–Pasternak elastic matrix based on non-local theory of Eringen, *Ain Shams Engineering Journal*, 7 (2), pp. 873-884.
 - [43] Dastjerdi S., Jabbarzadeh M., 2017, Non-linear bending analysis of multi-layer orthotropic annular/circular graphene sheets embedded in elastic matrix in thermal environment based on non-local elasticity theory, *Applied Mathematical Modelling*, 41, pp. 83-101.
 - [44] Ansari R., Norouzzadeh A., 2016, Nonlocal and surface effects on the buckling behavior of functionally graded nanoplates: An isogeometric analysis, *Physics E*, 84, pp. 84-97.
 - [45] Aghababaei R., Reddy J.N., 2009, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Journal of Sound and Vibration*, 326(1-2), pp. 277-289.
 - [46] S. C. Pradhan, 2009, Buckling of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory, *Physics Letter A*, 373(45), pp. 4182-4188.
 - [47] Pradhan S.C., Sahu B., 2010, Vibration of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory, *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 7(6), pp. 1042-1050.
 - [48] Daneshmehr A., Rajabpoor A., Pourdavood M., 2014, Stability of size dependent functionally graded nanoplate based on nonlocal elasticity and higher order plate theories and different boundary conditions, *International Journal of Engineering Science*, 82, pp. 84-100.
 - [49] Daneshmehr A., Rajabpoor A., 2015, A. Hadi, Size dependent free vibration analysis of nanoplates made of functionally graded materials

- based on nonlocal elasticity theory with high order theories, *International Journal of Engineering Science*, 95, pp. 23-35.
- [50] Nami M. R., Janghorban M., Damadam M., 2015, Thermal buckling analysis of functionally graded rectangular nanoplates based on nonlocal third-order shear deformation theory, *Aerospace Science and Technology*, 41, pp. 7-15.
 - [51] Sobhy M., 2014, Generalized two-variable plate theory for multi-layered graphene sheets with arbitrary boundary conditions, *Acta Mechanica*, 225 (9), pp. 2521-2538.
 - [52] Thai H.T., Choi D.H., 2013, Efficient higher-order shear deformation theories for bending and free vibration analyses of functionally graded plates, *Archive of Applied Mechanics*, 83, pp. 1755-1771.
 - [53] Sobhy M., 2015, Levy-type solution for bending of single-layered graphene sheets in thermal environment using the two-variable plate theory, *International Journal of Mechanical Science*, 90, pp. 171-178.
 - [54] Sobhy M., 2015, Hygrothermal deformation of orthotropic nanoplates based on the state-space concept, *Composites Part B: Engineering*, 79, pp. 224-235.
 - [55] Zenkour A., Sobhy M., 2013, Nonlocal elasticity theory for thermal buckling of nanoplates lying on Winkler–Pasternak elastic substrate medium, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 53, pp. 251-259.
 - [56] Alzahrani E.O., Zenkour A.M., Sobhy M., 2013, Small scale effect on hygro-thermo-mechanical bending of nanoplates embedded in an elastic medium, *Composite Structures*, 105, pp. 163-172.
 - [57] Thai H.T., Vo T.P., Nguyen T.K., Lee J., 2014, A nonlocal sinusoidal plate model for micro/nanoscale plates, *Proceedings of Institution of Mechanical Engineering, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 228 (14), pp. 2652-2660.
 - [58] Touratier M., 1991, An efficient standard plate theory, *International Journal of Engineering Science*, 29 (8), pp. 901-916.
 - [59] Belkorissat I., Houari M.S.A., Tounsi A., Bedia E., Mahmoud S.J., 2015, On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model, *Steel Composite Structures*, 18(4), pp. 1063-1081.
 - [60] Phung-Van P., Lieu Q.X., Nguyen-Xuan H., Wahab M.A., 2017, Size-dependent isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite nanoplates, *Composite Structures*, 166, pp. 120-135.

- [61] Tran T.T., Tran V.K., Pham Q.H., Zenkour A.M., 2021, Extended four-unknown higher-order shear deformation nonlocal theory for bending, buckling and free vibration of functionally graded porous nanoshell resting on elastic foundation, *Composite Structures*, 264, p. 113737.
- [62] Thai H.T., Vo T.P., Nguyen T.K., Kim S.E., 2017, A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates, *Composite Structures*, 177, pp. 196-219.
- [63] Arash B., Wang Q., 2013, A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes, *Modeling of Carbon Nanotubes, Graphene and their Composites*, pp. 57-82.
- [64] Chandel V.S., Wang G., Talha M., 2020, Advances in modelling and analysis of nano structures: a review, *Nanotechnology Reviews*, 9 (1), pp. 230-258.
- [65] N. V. Hậu, 2017, *Nghiên cứu ứng xử tấm composite chức năng (FGM) dưới tác dụng tải trọng cơ nhiệt*, Luận án tiến sĩ, Trường Đại học Sư phạm kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh.
- [66] Công P.H., 2018, *Phân tích phi tuyến tĩnh và động lực học tấm chữ nhật FGM trên nền đàn hồi*, Luận án tiến sĩ, Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [67] Liên T.V., 2024, *Cơ học môi trường liên tục*. Nhà xuất bản Xây dựng.
- [68] Khatri I., Bao J., Kishi N., Soga T., 2012, Similar Device Architectures for Inverted Organic Solar Cell and Laminated Solid-State Dye-Sensitized Solar Cells," *International Scholarly Research Notices*, 2012 (1), pp. 1-10.
- [69] Chen J.T., Hsu C.S., 2011, Conjugated polymer nanostructures for organic solar cell applications, *Polymer Chemistry*, 2 (12), pp. 2707-2722.
- [70] Danashi I. M., Diego G., 2021, Organic semiconductors for light-mediated neuromodulation, *Communications Materials*, 2, 111.
- [71] Gundampati R.K., Baranwal A.K., Jha A.K., 2018, Organic solar cells: an overview, *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*, 29 (13), pp. 10551-10572.
- [72] Abdulrazzaq O.A., Saini V., Bourdo S., Dervishi E., Biris A.S., 2013, Organic solar cells: A review of materials, limitations, and possibilities for improvement, *Particulate Science and Technology*, 31 (5), pp. 427–442.
- [73] Tian Y., Li Q., Wu D., Chen X., Gao W., 2022, Nonlinear dynamic stability analysis of clamped and simply supported organic solar cells via the third-order shear deformation plate theory, *Engineering Structures*, 252, pp. 113616.

- [74] Liu S., Wang K., Wang B., Li J., Zhang C., 2022, Size effect on thermo-mechanical instability of micro/nano scale organic solar cells, *Meccanica*, 57 (1), pp. 87-107.
- [75] Khiem N.T., Huan D.T., Hieu T.T., 2023, Vibration of cracked FGM beam with piezoelectric layer under moving load, *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 11 (2), pp. 755-769.
- [76] Khiem N.T., Hai T.T., Huong L.Q., 2023, Crack identification of functionally graded beam using distributed piezoelectric sensor, *Journal of Vibration and Control*, 29 (15-16), pp. 3401-3417.
- [77] Khiem N.T., Hai T.T., Huong L.Q., 2023, Modal analysis of cracked FGM beam with piezoelectric layer, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 51 (9), pp. 5120-5140.
- [78] Anh N.D., Hieu D.V., 2022, Nonlinear random vibration of functionally graded nanobeams based on the nonlocal strain gradient theory, *Acta Mechanica*, 233 (4), pp. 1633-1648.
- [79] Anh N.D., Hieu D.V., 2021, Nonlinear vibration of nonlocal strain gradient nanotubes under longitudinal magnetic field, *Vietnam Journal of Mechanics*, 43, pp. 55-77.
- [80] Dang V.H., Nguyen D.A., Le M.Q., Duong T.H., 2020, Nonlinear vibration of nanobeams under electrostatic force based on the nonlocal strain gradient theory, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 16, (2), pp. 289-308.
- [81] Quyen N.V., Duc N.D., 2022, Vibration and nonlinear dynamic response of nanocomposite multi-layer solar panel resting on elastic foundations, *Thin-Walled Structures*, 177, pp. 109412.
- [82] Hoa L.K., Vinh P.V., Duc N.D., Trung N.T., Son L.T., Thom D.V., 2021, Bending and free vibration analyses of functionally graded material nanoplates via a novel nonlocal single variable shear deformation plate theory, *Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 235 (18), pp. 3641-3653.
- [83] Lien T.V., Duc N.T., Dinh T.B., Dat P.T., 2022, Free vibration analysis of FGM stepped nanostructures using nonlocal dynamic stiffness model, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 60 (2), pp. 279-292.
- [84] Tran T.T., Trinh T.H., Nguyen D.K., 2021, Vibration of sandwich beams reinforced by carbon nanotubes under a moving load, *Vietnam Journal of Science and Technology*, 59 (5), pp. 662-676.
- [85] Tran H.Q., Tran M.T., Nguyen-Tri P., 2020, A new four-variable refined plate theory for static analysis of smart laminated functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates, *Mechanics of Materials*, 142, pp. 103294.

- [86] Quoc T.H., Tham V.V., Tu T.M., 2021, Active vibration control of a piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced spherical shell panel, *Acta Mechanica*, 232, pp. 1005-1023.
- [87] Shimpi R.P., 2002, Refined plate theory and its variants, *AIAA journal*, 40 (1), pp. 137-146.
- [88] Soldatos K.P., 1992, A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates," *Acta Mechanica*, 94 (3), pp. 195-220.
- [89] Loghman E., Kamali A., Bakhtiari-Nejad F., Abbaszadeh M., 2021, Nonlinear free and forced vibrations of fractional modeled viscoelastic FGM micro-beam," *Applied Mathematical Modelling*, 92, pp. 297-314.
- [90] Ansari R., Oskouie M.F., Gholami R., 2016, Size-dependent geometrically nonlinear free vibration analysis of fractional viscoelastic nanobeams based on the nonlocal elasticity theory, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 75, pp. 266-271.
- [91] Reddy J. N., 2003, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press.
- [92] Salehipour H., Shahidi A., Nahvi H., 2015, Modified nonlocal elasticity theory for functionally graded materials, *International Journal of Engineering Science*, 90, pp. 44-57.
- [93] Thom, D.V., Bui T.Q., Yu T.T., Pham T.D., Nguyen C.T., 2017, Role of material combination and new results of mechanical behavior for FG sandwich plates in thermal environment, *Journal of Computational Science*, 21, pp. 164-181.
- [94] Bui T.Q., Thom, D.V., Ton L.H.T. , Doan D.H. , Tanaka S. , Pham D.T., Nguyen-Van T.A. , Yu T., Hirose S., 2016, On the high temperature mechanical behaviors analysis of heated functionally graded plates using FEM and a new third-order shear deformation plate theory, *Composites Part B: Engineering*, 92, pp. 218-241.
- [95] Reddy J.N., 2000, Analysis of functionally graded plates, *The International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47 (1-3), pp. 663-684.
- [96] Song M., Kitipornchai S., Yang J., 2017, Free and forced vibrations of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets," *Composite Structures*, 159, pp. 579-588.